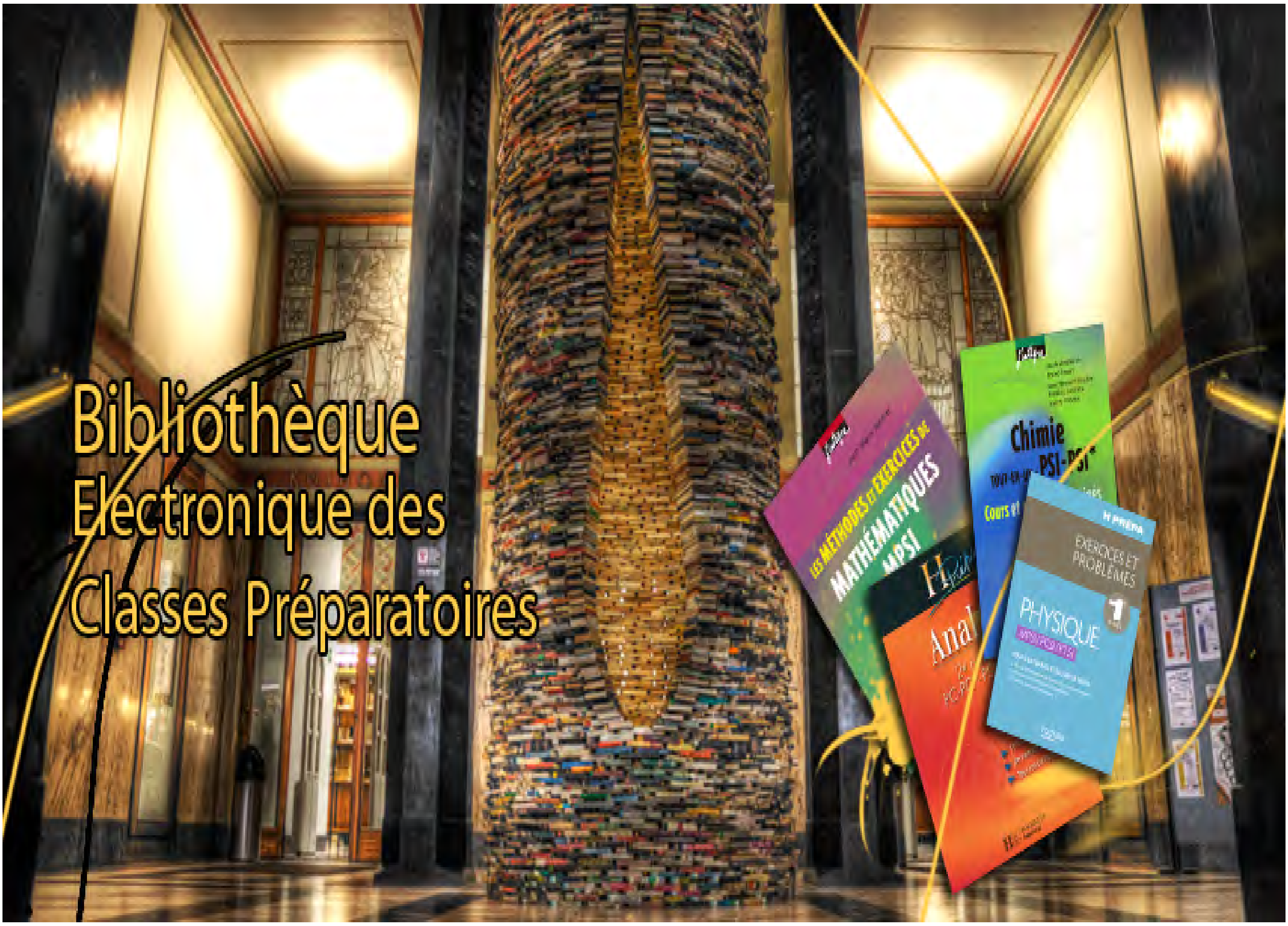

Bibliothèque
Electronique des
Classes Préparatoires
LES MÉTHODES ET EXERCICES DE
MATHÉMATIQUES
MPSI
Chimie
PSI-PSI*
EXERCICES ET PROBLÈMES
PHYSIQUE
H PRÉPA

H Prépa

NOUVEAU PROGRAMME

EXERCICES & PROBLÈMES

Maths

2e année MP

- Rappels de cours
- Plus de 250 exercices et problèmes
- Corrigés détaillés

HACHETTE Supérieur

H Prépa

EXERCICES & PROBLÈMES

Maths

2e année MP

Christine FEUILLET
Professeur en classes préparatoires au lycée Aux-Lazaristes à Lyon

Isabelle SELON
Professeur en classes préparatoires au Centre International de Valbonne à Nice

HACHETTE
Supérieur

Composition, mise en page et schémas : *PUBLILOG*
Maquette intérieure : *Laser Graphie*
Maquette de couverture : *Alain Vambacas*

www.hachette-education.com
I.S.B.N. 978-2-01-187663-1

Préface

Cet ouvrage d'exercices et problèmes corrigés de mathématiques de la collection *H-Prépa* est principalement destiné aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles *MP, MP** et aux étudiants de premier cycle universitaire.

Il propose des problèmes originaux ou classiques, souvent extraits de sujets écrits ou oraux de concours.

Conformément aux nouveaux programmes, ce volume présente de nombreux exercices comportant une **partie algorithmique**.

De plus, l'outil informatique est utilisé dès qu'il peut faciliter la résolution d'un exercice.

Chaque chapitre est constitué :

- de **rappels de cours**, rassemblant les notions essentielles à connaître pour aborder les exercices du chapitre. Il est bien évident que ce bref résumé ne saurait se substituer à une connaissance beaucoup plus approfondie du cours. Nous renvoyons l'étudiant au cours de son professeur et/ou aux ouvrages de la collection *H-Prépa* ;
- d'**énoncés**, comprenant chacun un titre permettant de se faire une idée du sujet traité, avec parfois une référence à une épreuve de concours. Les questions sont échelonnées et progressives pour aider l'étudiant dans sa recherche ;
- de **conseils**, permettant de ne pas rester bloqué sur une question sans aller consulter trop tôt le corrigé. Cette aide peut se présenter sous forme d'indications méthodologiques, de questions ou de références à un point particulier du cours. Elle correspond au « coup de pouce » que peut donner un examinateur dans une épreuve orale ;
- de **corrigés détaillés** de tous les exercices.

Nous n'insisterons jamais assez sur le bon mode d'emploi d'un tel livre d'exercices corrigés. Il serait parfaitement vain de se contenter de lire, même très attentivement, la solution à la suite de l'énoncé. On n'apprend pas à faire du vélo dans un manuel ! Ce n'est qu'après avoir cherché longuement chaque question, avec ou sans succès, mais du moins avec persévérance, que la lecture du corrigé pourra devenir profitable.

Avec ce livre, nous espérons mettre à la disposition des étudiants un ensemble d'exercices et de problèmes leur permettant d'acquérir des méthodes et des pratiques qu'ils pourront réinvestir en d'autres circonstances. Nous leur souhaitons de réussir les concours et examens qu'ils préparent avec courage.

Les auteurs

Sommaire

Partie I *Algèbre et géométrie*

PARTIE II ANALYSE

PARTIE

1 ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

1 Algèbre générale

RAPPELS DE COURS

RELATION DE CONGRUENCE

• Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$ où n est un entier naturel.

Soit a et b dans $\mathbb{Z}$. On dit que a est *congru à b modulo n* si $a - b \in n\mathbb{Z}$. On note $a \equiv b[n]$.

Deux entiers sont congrus modulo n si, et seulement s'ils ont le même reste dans la division euclidienne par n.

• ***Propriétés de la relation de congruence***

Quels que soient les entiers a, b, c et d de $\mathbb{Z}$ et p de $\mathbb{N}$ tels que : $a \equiv b[n]$ et $c \equiv d[n]$ on a :

$a + c \equiv b + d[n]$, $\quad ac \equiv bd[n]$, $\quad -a \equiv -b[n]$ et $a^p \equiv b^p[n]$.

• Soit un entier relatif a, sa classe modulo n est l'ensemble $\overline{a} = \{a + nk \, ; k \in \mathbb{Z}\}$.

L'ensemble des classes d'équivalence sera noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sera appelé *ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par $n\mathbb{Z}$*.

Le cardinal de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est n. Ses éléments sont : $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}$... et $\overline{n-1}$.

La surjection canonique de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ définie par $\psi \ : a \mapsto \overline{a}$ est un morphisme de groupes de noyau $n\mathbb{Z}$.

PARTIE GÉNÉRATRICE D'UN GROUPE

• Soit $(G, .)$ un groupe, A une partie de G.

Le plus petit sous-groupe de G contenant A est appelé *sous-groupe engendré par A*, noté $\langle A \rangle$.

Lorsque $\langle A \rangle = G$, on dit que G est *engendré* par A ou que A est une *partie génératrice* de G.

Le sous-groupe engendré par A est l'intersection de tous les sous-groupes contenant A.

$$\text{Si } A \neq \emptyset, \text{ alors : } \langle A \rangle = \{a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_n^{\varepsilon_n} ; n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1, ..., n\} \ \varepsilon_i \in \{-1, 1\} \ a_i \in A\}.$$

Les générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les classes $\overline{k}$ telles que $k \wedge n = 1$.

Les générateurs du sous-groupe $\mathbb{U}_n$ de $(\mathbb{C}^*, \times)$ des racines n-ièmes de l'unité sont les éléments $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}$ tels que $k \wedge n = 1$.

Les générateurs de $\mathbb{U}_n$ sont appelés les *racines primitives* n-ièmes de l'unité.

• Un groupe *monogène* est un groupe engendré par un seul élément a appelé *générateur*.

Tout groupe monogène infini est isomorphe à $\mathbb{Z}$.

• Un groupe *cyclique* est un groupe monogène fini.

Soit $(G, .)$ un groupe cyclique d'ordre n, d'élément neutre e, engendré par l'élément a. Alors : $G = \{a^0, a^1, ..., a^{n-1}\}$ et n est le plus petit entier non nul tel que $a^n = e$.

Tout groupe cyclique d'ordre n est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Les générateurs de G sont les a^k, où $k \wedge n = 1$.

Tout sous-groupe de G est cyclique, d'ordre un diviseur de n.

• Soit $(G, .)$ un groupe et a un élément de G.

L'application f_a de $\mathbb{Z}$ dans G, définie pour tout entier k par $f_a(k) = a^k$, est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(G, .)$ d'image $\langle a \rangle$. Il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que $\mathbb{K}\mathrm{er}(f_a) = n\mathbb{Z}$.

Si $n = 0$, l'application f_a est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}, +)$ sur $\langle a \rangle$: l'élément a est d'*ordre infini*.

Si $n \neq 0$, l'application g_a de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\langle a \rangle$, définie pour toute classe $\overline{k}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par $g_a(\overline{k}) = a^k$, est un isomorphisme de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ dans $\langle a \rangle$: l'élément a est d'*ordre fini* n.

Les seuls morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(G, .)$ sont les morphismes f_a , pour a dans G.

• Le cardinal d'un groupe fini G est appelé l'*ordre* de G.

L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise l'ordre du groupe.

PRODUIT DE DEUX GROUPES

• Soit $(G, \circ)$ et $(H, \perp)$ deux groupes d'éléments neutres respectifs e et f.

Pour tout couple (g, h) et (g', h') de $G \times H$ on définit :

$$(g, h)\bullet(g', h') = (g \circ g', h \perp h').$$

$(G \times H, \bullet)$ est un groupe appelé le *groupe produit* des groupes $(G, \circ)$ et $(H, \perp)$.

• Soit n et p deux entiers naturels premiers entre eux.

Le groupe produit de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ et de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ est isomorphe au groupe $(\mathbb{Z}/np\mathbb{Z}, +)$.

Ce n'est pas le cas lorsque n et p ne sont pas premiers entre eux.

• ***Théorème chinois***

Soit n et p deux entiers naturels premiers entre eux.

Le système d'équations $\begin{cases} x \equiv a\,[n] \\ x \equiv b\,[p] \end{cases}$ d'inconnue x, où a et b sont des entiers, admet au moins une solution c dans $\mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions est $\{c + knp\ ; k \in \mathbb{Z}\}$.

IDÉAL D'UN ANNEAU COMMUTATIF

• Soit $(A, +, .)$ un anneau ***commutatif***.

Un sous-ensemble I de A est un *idéal* de l'anneau $(A, +, .)$ s'il vérifie les deux conditions suivantes :

(i) $(I, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$;

(ii) $\forall x \in I \quad \forall a \in A\ ax \in I$.

Un sous-ensemble I de A est un *idéal* de l'anneau $(A,+,.)$ si, et seulement s'il vérifie les propriétés suivantes :

$$\textbf{(i)}\ I \neq \emptyset, \quad \textbf{(ii)}\ \forall x \in I \quad \forall y \in I \qquad x+y \in I \quad \text{et} \quad \textbf{(iii)}\ \forall x \in I \quad \forall a \in A \qquad ax \in I.$$

• Soit I un idéal de $(A,+,.)$. Alors $I = A$ si, et seulement si : 1_A appartient à I.

Les idéaux de $(\mathbb{Z},+,.)$ sont les ensembles $n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathrm{N}$.

Soit x un élément de A. L'ensemble $Ax = \{ax\,;\, a \in A\}$ est le plus petit idéal de $(A,+,.)$ contenant x. appelé : *idéal principal engendré par* x.

• Soit A un anneau commutatif, f un morphisme d'anneaux de A dans $(A',\oplus,\otimes)$, I et I' deux idéaux respectifs de $(A,+,.)$ et $(A',\oplus,\otimes)$. Alors $f(I)$ est un idéal du sous-anneau $f(A)$ de $(A',\oplus,\otimes)$ et $f^{-1}(I')$ est un idéal de $(A,+,.)$ contenant le noyau de f,

Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal de $(A,+,.)$.

DIVISIBILITÉ DANS UN ANNEAU INTÈGRE

Soit $(A,+,.)$ un anneau intègre, a et b deux éléments de A.

• On dit que l'élément a est un *diviseur* de b ou que a *divise* b s'il existe un élément q de A tel que $b = aq$. On note : $a \mid b$.

Si a est non nul, l'élément q est unique, on l'appelle le *quotient exact* de b par a.

• a divise b si, et seulement si : $\mathrm{A}b \subset \mathrm{A}a$.

• $Aa = Ab$ si, et seulement s'il existe un élément inversible c tel que $b = ac$. Dans ce cas, on dit que a et b sont *associés*.

• Un élément a non inversible est *irréductible* si ses seuls diviseurs sont les éléments inversibles et les éléments associés à a.

L'ANNEAU $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,.)$

Soit n un entier naturel non nul. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,.)$ est un anneau commutatif d'élément unité : $\overline{1}$.

La surjection canonique φ de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un morphisme d'anneaux.

• L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,.)$ est intègre si, et seulement si, l'entier n est premier.

• L'anneau produit des anneaux $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+,.)$ et $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,.)$ est l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,.)$

Si $n \wedge p = 1$, l'anneau produit $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},+,.)$ est isomorphe à l'anneau $(\mathbb{Z}/np\mathbb{Z},+,.)$.

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

Soit m et n deux entiers. L'ensemble $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z}$ est un idéal de $(\mathbb{Z},+,.)$.

Il existe un entier naturel d unique tel que $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$

d est le plus grand commun diviseur de m et n, noté $m \wedge n$.

ENTIERS PREMIERS ENTRE EUX

• Deux entiers m et n non nuls sont *premiers entre eux* lorsque $m \wedge n = 1$.

• Dans $\mathbb{Z}$, les éléments irréductibles sont les nombres premiers et les opposés des nombres premiers.

• ***Théorème de Bézout***

m et n sont premiers entre eux si, et seulement si : $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

m et n sont premiers entre eux si, et seulement s'il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $mu + nv = 1$.

• Soit a, b et c trois entiers non nuls.

Si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$ alors $a \wedge (bc) = 1$.

Pour tout couple(p, q) d'entiers naturels : $a \wedge b = 1 \Rightarrow a^p \wedge b^q = 1$.

• ***Théorème de Gauss***

Si $a \wedge b = 1$ et $a \mid (bc)$ alors $a \mid c$.

• Soit $a, b_1, ..., b_p$ des entiers non nuls tels que pour tout i de $[\![1, p]\!]$, $a \wedge b_i = 1$.

Alors $a \wedge (b_1 ... b_p) = 1$

• Soit a un entier, $b_1, ..., b_p$ des entiers non nuls premiers entre eux deux à deux tels que pour tout i de $[\![1, p]\!]$, l'entier b_i divise a. Alors le produit $b_1 ..., b_p$ divise a.

PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

• Soit m et n deux entiers. L'ensemble $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ est un idéal de $(\mathbb{Z}, +, .)$.

Il existe un entier naturel r unique tel que : $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = r\mathbb{Z}$ appelé le *plus petit commun multiple* de m et n, noté $m \vee n$.

• Soit a, b non nuls dans $\mathbb{N}$, d leur plus grand commun diviseur, m leur plus petit commun multiple et les deux entiers a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$. Alors $ab = md$ et $m = a'b'd$.

ÉLÉMENTS INVERSIBLES DANS UN ANNEAU

• Soit $(A, +, .)$ un anneau non réduit à $\{0\}$.

Un élément a de A est *inversible* s'il existe un élément b de A tel que $ab = 1_A$. L'élément b est unique, on le note a^{-1}.

L'ensemble $(\mathcal{U}(A), .)$ des éléments inversibles de $(A, +, .)$ muni de la multiplication $(A, +, .)$ est un groupe d'élément neutre 1_A, appelé groupe des éléments inversibles de l'anneau$(A, +, .)$.

• Soit n un entier naturel non nul et k un entier.

L'élément $\overline{k}$ de l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ est inversible si, et seulement si : $k \wedge n = 1$

CORPS

• On dit qu'un anneau $(K, +, .)$ est un *corps* si :

$1_K \neq 0_K$ et tout élément de $K^* = K \backslash \{0_K\}$ est inversible.

• L'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$ est un corps si, et seulement si, n est un nombre premier.

• Soit $(A, +, .)$ un anneau commutatif non réduit à $\{0\}$.

Alors $(A, +, .)$ est un corps si, et seulement si, les seuls idéaux de A sont $\{0\}$ et A.

CARACTÉRISTIQUE D'UN ANNEAU, D'UN CORPS

• ***Factorisation d'un morphisme de l'anneau $\mathbb{Z}$ dans un anneau***

Soit $(A, +, .)$ un anneau d'élément unité 1_A.

Le seul morphisme de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, .)$ dans $(A, +, .)$ est $f : k \mapsto k.1_A$.

$f(\mathbb{Z})$ est le plus petit sous-anneau de $(A, +, .)$.

Il existe un entier naturel m unique tel que $\mathbb{K}\mathrm{er} f = m\mathbb{Z}$, appelé *caractéristique de l'anneau* $(A, +, .)$.

Soit n un entier naturel multiple de m, φ la surjection canonique de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et j l'injection canonique de $f(\mathbb{Z})$ dans A. Alors il existe un unique morphisme d'anneau $\overline{f}$ de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $f(\mathbb{Z})$ tel que $f = j \circ \overline{f} \circ \varphi$. On dit que $j \circ \overline{f} \circ \varphi$ est une factorisation de f à travers φ.

Le morphisme $\overline{f}$ est surjectif.

Le morphisme $\overline{f}$ est injectif si, et seulement si : $m = n$.

L'anneau $(f(\mathbb{Z}), +, .)$ est isomorphe à l'anneau $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, .)$.

• Si 0 est le seul entier k tel que $k.1_A = 0_A$, on dit que l'anneau $(A, +, .)$ est de caractéristique nulle.

$(\mathbb{Z}, +, .)$, $(\mathbb{Q}, +, .)$ et $(\mathbb{R}, +, .)$ sont de caractéristique nulle.

• Si $\{k \in \mathbb{Z}/k.1_A = 0_A\}$ n'est pas réduit à $\{0\}$, alors :

la caractéristique m d'un anneau $(A, +, .)$ est le plus petit entier naturel non nul tel que $m.1_A = 0_A$.

$k.1_A = 0_A \Leftrightarrow m \mid k$.

IDÉAUX DE $\mathbb{K}[X]$

Dans toute la suite, le corps $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

• Tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est principal.

Tout idéal non réduit à $\{0\}$ est engendré par un unique polynôme unitaire.

• Pour tout polynôme P et tout polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$, le polynôme P divise le polynôme Q si et seulement s'il existe un polynôme S de $\mathbb{K}[X]$ tel que $Q = PS$.

On note $P \mid Q$ et on dit que P est un diviseur de Q ou que Q est un *multiple* de P.

Ceci se traduit à l'aide des idéaux par $(Q) \subset (P)$ en notant (Q) l'idéal engendré par Q.

• Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit *irréductible* sur le corps $\mathbb{K}$ s'il est non constant et si ses seuls diviseurs dans $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls et les polynômes associés à P.

PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR

• Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

L'idéal engendré par P et Q est l'ensemble :

$$(P) + (Q) = \{AP + BQ; A \in \mathbb{K}[X] \quad \text{et} \quad B \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Si P et Q sont non simultanément nuls, il existe un polynôme unitaire unique D tel que $(P) + (Q) = (D)$.

Le polynôme D est le plus grand commun diviseur de P et Q, noté $P \wedge Q = D$.

POLYNÔMES PREMIERS ENTRE EUX

• Soit P, Q et R trois polynômes non nuls

On dit que deux polynômes P et Q sont premiers entre eux lorsque $P \wedge Q = 1$.

• *Théorème de Bézout*

Les polynômes P et Q sont premiers entre eux si, et seulement si : $(P) + (Q) = \mathbb{K}[X]$.

Les polynômes P et Q sont premiers entre eux si, et seulement s'il existe deux polynômes U et V tels que $UP + VQ = 1$.

• Si $P \wedge Q = 1$, pour tout n et tout m de $\mathbb{N}$ on a : $P^n \wedge Q^m = 1$.

• Si $P \wedge Q = 1$ et $P \wedge R = 1$, alors $P \wedge (QR) = 1$.

• Si P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ alors $P \wedge Q = 1$ si, et seulement si, P ne divise pas Q.

• ***Théorème de Gauss***

Si $P \wedge Q = 1$ et si $P \mid QR$ alors $P \mid R$.

• Soit P un polynôme non nul et $(P_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de polynômes non nuls telle que, pour i dans $[\![1,n]\!]$, $P \wedge P_i = 1$. Alors $P \wedge (P_1 \ldots P_n) = 1$.

• Soit P un polynôme irréductible et $(P_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de polynômes non nuls. Pour que P divise $P_1 \ldots P_n$ il faut et il suffit que P divise l'un des P_i.

• Soit P un polynôme non nul et $(P_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de polynômes non nuls premiers entre eux deux à deux telle que, pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, P_i divise P. Alors $P_1 \ldots P_n$ divise P.

PLUS PETIT COMMUN MULTIPLE

• Soit P et Q deux polynômes non nuls.

L'ensemble $(P) \cap (Q)$ est un idéal de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$.

Il existe un unique polynôme unitaire M tel que $(P) \cap (Q) = (M)$. Le polynôme M est le plus petit commun multiple de P et Q, noté $M = P \vee Q$.

• Soit P et Q deux polynômes unitaires, D leur plus grand commun diviseur et M leur plus petit commun multiple, R et S les polynômes tels que $P = DS$ et $Q = DR$.

Alors $PQ = MD$ et $M = DRS$.

ALGÈBRE

• On appelle $\mathbb{K}$-algèbre un ensemble E muni de deux lois internes, notées $+$ et $\times$ et d'une loi externe sur le corps $\mathbb{K}$, notée **.**, telles que :

$(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

$(E, +, \times)$ est un anneau.

$\forall \alpha \in \mathbb{K} \qquad \forall (x, y) \in E^2 \quad (\alpha.x) \times y = x \times (\alpha.y) = \alpha.(x \times y)$.

L'algèbre est dite commutative si la multiplication interne $\times$ est commutative.

• Soit $(E, +, \times, .)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. Tout sous-ensemble F de E qui, muni des lois induites, est encore une $\mathbb{K}$-algèbre est une sous-algèbre de $(E, +, \times, .)$.

Une partie F de E est une sous-algèbre de $(E, +, \times, .)$ si, et seulement si : $1_E \in F$;

F est stable par combinaison linéaire : $\quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall (x, y) \in F^2 \quad \alpha x + \beta y \in F$;

F est stable par multiplication interne : $\quad \forall (x, y) \in F^2 \quad xy \in F$.

• Les applications linéaires qui sont également des morphismes d'anneaux sont des morphismes d'algèbres.

Un morphisme d'algèbres bijectif est un isomorphisme d'algèbres.

L'image et l'image réciproque d'une sous-algèbre par un morphisme d'algèbres sont des sous-algèbres.

ÉNONCÉS

1 Pour s'entraîner

1 — **a)** La réunion de deux sous-groupes est-elle un sous-groupe ?

b) Soit A un anneau et $B \subset A$ un anneau pour les mêmes lois que A.

B est-il un sous-anneau de A ?

2 — Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles, donner leurs ordres et leurs signatures :

$a = \begin{pmatrix} 1234567 \\ 5647321 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 14327865 \end{pmatrix}$,

$c = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 378945216 \end{pmatrix}$.

Calculer a^{201}, b^{198} et c^{1000}.

3 — Si p est premier, a-t-on : $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ isomorphe à $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$?

4 — Quel est le reste de la division euclidienne de 1515^{1789} par 13 ?

5 — Résoudre $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$ dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ puis dans $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

6 — Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}(2^n + 3^n) \wedge (2^{n+1} + 3^{n+1}) = 1$.

7 — Factoriser en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ le polynôme : $X^6 + 1$.

8 — Soit n un entier naturel non nul, r un réel strictement positif et P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n - 1$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!] \;\; \tilde{P}(k) = r^k$.

Calculer $\tilde{P}(n + 1)$.

Conseils

1) b) Ont-ils le même élément unité ?
2) Revoir votre *cours* de première année.
3) Que dire de px pour x dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$?
4) Calculer les puissances successives de 1511 modulo 13.
5) Tout élément est-il inversible ? A-t-on des diviseurs de 0 ?
6) On a : $a \wedge b = a \wedge (b + ka)$.
7) Ne pas se précipiter sur la factorisation dans $\mathbb{C}$
8) Penser aux polynômes d'interpolation de Lagrange

2 Un groupe simple

Soit $(G, .)$ un groupe abélien. On dit que G est simple s'il n'est pas réduit à $\{0\}$ et s'il ne possède aucun autre sous-groupe que $\{0\}$ et G.

1 — Montrer que, si p est premier alors $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ est simple.

2 — Montrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

a) G est simple.

b) G est cyclique d'ordre premier.

Conseils

Lorsque G est simple on pourra considérer un élément x distinct du neutre et montrer que le sous-groupe engendré par x est de cardinal premier.

3* Un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$

Soit $(G, +)$ un groupe.

1 — On suppose dans cette question que :

$$\forall x \in G \quad x^2 = e.$$

a) Montrer que G est un groupe abélien.

b) Soit H un sous-groupe strict de G et x un élément de G qui n'est pas dans H. Vérifier que $H \cup xH$ est un sous-groupe de G.

c) Démontrer que, s'il est fini, le cardinal de G est une puissance de 2, 2^p où p est un entier naturel.

d) Montrer que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$.

2 — Soit $(G, .)$ un groupe de cardinal 6.

a) Déterminer les ordres des éléments de G.

b) Montrer que G contient au moins un élément d'ordre 3 ou 6.

c) Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ou a $(\sigma_3, \circ)$.

Conseils

1) c) Partir d'un groupe de cardinal 2 et construire par récurrence à l'aide de la question **b)** une suite de sous-groupes de la forme $H_{k+1} = H_k \cup a_k H_k$.

4 Groupe possédant un unique automorphisme

Montrer que tout groupe fini G ne possédant qu'un seul automorphisme de groupes est isomorphe à $\{e\}$ ou à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Conseils

On pourra introduire l'application $y \longmapsto xyx^{-1}$ puis utiliser l'*exercice* 3.

5 Les morphismes de groupes de $(\sigma_3, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$

Déterminer tous les morphismes de groupes de $(\sigma_3, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Conseils

Il suffit de déterminer les images de toutes les transpositions.

6 Les carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Soit p un entier naturel premier. Combien $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ contient-il de carrés ?

Conseils

Résoudre l'équation : $x^2 = \overline{a}^2$.

7* Une équation dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On se propose d'étudier l'équation **(1)** $x^2 = x$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1 On suppose dans cette question que n est premier. Résoudre **(1)**.

2 Soit p un entier de $[1, n]$ tel que $\overline{p}$ soit une solution de **(1)**. On note $\alpha = p \wedge n$ et $\beta = (p-1) \wedge n$. Montrer que $n = \alpha\beta$.

3 Soit α et β deux entiers premiers entre eux vérifiant $n = \alpha\beta$. Montrer qu'il existe une solution de **(1)** dont un représentant p vérifie $\alpha = p \wedge n$.

4 Soit $\bar{p}$ et $\bar{q}$ deux solutions de **(1)** telles que $p \wedge n = q \wedge n$. Montrer que $\bar{p} = \bar{q}$.

5 Soit $\prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i}$ la décomposition de n en facteurs premiers. Combien l'équation **(1)** a-t-elle de solutions ?.

6 Résoudre l'équation **(1)** pour $n = 12$.

Conseils

2) Appliquer le théorème de Gauss.
3) Maintenant c'est le tour du théorème de Bézout.
4) Utiliser les questions **3)** et **4)** puis **2)**.

8 Les automorphismes de corps de $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$

Déterminer les automorphismes du corps $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$.

Conseils

Déterminer tout d'abord l'image de tout entier, puis de tout rationnel et enfin de $\sqrt{2}$.

9 Les morphismes de corps de $\mathbb{R}$

Déterminer les morphismes de corps de $\mathbb{R}$.

Conseils

Vérifier que l'image d'un réel positif est positif. En déduire que le morphisme est strictement croissant. On rappelle qu'entre deux réels distincts il existe au moins un rationnel.

10* L'anneau des décimaux

Soit $\mathbb{D}$ l'anneau des nombres décimaux.

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{Q};\ \exists p \in \mathbb{N} \quad x \cdot 10^p \in \mathbb{Z}\}.$$

Montrer que $\mathbb{D}$ est un anneau principal.

Conseils

Pour tout idéal I vérifier que $I \cap \mathbb{N}^*$ est non vide et considérer son plus petit élément.

11* Polynômes de Tchebychev

D'après Centrale.

Pour tout entier naturel n on pose :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x).$$

1 Premières propriétés des T_n.

a) Montrer que T_n est une fonction polynomiale à coefficients entiers. Le polynôme associé est encore noté T_n et s'appelle le n-ième polynôme de Tchebychev.

b) Expliciter T_1, T_2, T_3 et T_4.

c) Montrer que pour tout entier naturel n,

$$T_{n+2}[X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

d) En déduire la parité, le degré et le coefficient dominant de T_n.

e) Écrire un algorithme pour calculer $T_n(X)$.

f) Montrer que pour tout t de $[0, \pi]$, on a : $T_n(\cos t) = \cos(nt)$.

2 Calcul de normes

a) Calculer $\|T_n\|_\infty$.

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall u \in \mathbb{R},\ |\sin nu| \leqslant n\,|\sin u|\,.$$

c) En déduire $\|T_n'\|_\infty = n^2$.

3 Encadrement de T_n sur $[1, +\infty[$.

a) Montrer que :

$$\forall r \in \mathbb{R}_*,\ T_n\left(\frac{r + r^{-1}}{2}\right) = \frac{r^n + r^{-n}}{2}.$$

b) Soit un réel x de $[1, +\infty[$. Montrer qu'il existe r tel que $x = \dfrac{r + r^{-1}}{2}$.

En déduire que $1 \leqslant T_n(x) \leqslant \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n$.

4 Équation différentielle vérifiée sur $\mathbb{R}$ par T_n.

a) En dérivant l'égalité $T_n(\cos t) = \cos(nt)$, valable pour tout réel t de $[0, \pi]$, trouver une équation différentielle linéaire homogène du second ordre vérifiée sur $\mathbb{R}$ par T_n.

b) Soit un entier naturel k. Déduire de la question **4) a)** que :

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n}{n+k}\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\,\frac{2^k k!}{(2k)!}.$$

Montrer que $T_n^{(k)}(-1) = (-1)^{n+k}\ T_n^{(k)}(1)$.

Conseils

1) a) Partir de la formule de Moivre.
c) Réviser vos formules de trigonométrie.
d), 2) b) et **3) a)** Raisonner par récurrence.
2) c) Dériver une fonction composée.
4) b) Appliquer la formule de Leibniz.

12* Majoration des polynômes et de leurs dérivées

D'après Centrale.

On introduit la subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ du segment $[-1, 1]$ définie par :

$$\forall j \in [\![0, n]\!],\quad a_i = \cos\left(1 - \frac{j}{n}\right)\pi.$$

Par ailleurs, pour tout i de $[\![0, n]\!]$ on appelle $E_i = [\![0, n]\!] \setminus i$ et on note :

$$L_i(X) = \prod_{j \in E_i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

le $i^{\text{ième}}$ polynôme élémentaire de Lagrange associé à la subdivision σ.

1 Majoration d'un polynôme sur $[1, +\infty]$.

a) Résoudre sur $[-1, 1]$ l'équation $|T_n(x)| = 1$ et calculer $T_n'(a_j)$ pour $j = n$, pour $j = 0$ puis pour $j \in [\![1, n-1]\!]$.

b) Montrer que :

$$T_n(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} L_i(X).$$

c) On suppose que $x \in [1, +\infty[$. Montrer que :

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|.$$

d) Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$. Montrer que :

$$\forall x \in [1, +\infty[,\quad |P(x)| \leqslant \|P\|_\infty \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)^n.$$

2 Majoration des dérivées successives d'un polynôme sur $[1, +\infty[$.

a) On suppose que $x \in [1, +\infty[$. Montrer que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad T_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{n} |L_i^{(k)}(x)|.$$

b) Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$. Montrer que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ \forall x \in [1, +\infty[,\quad |P^{(k)}(x)| \leqslant \|P\|_\infty T_n^{(k)}(x).$$

3 Majoration des dérivées successives d'un polynôme sur $[-1, 1]$

Soit $P(X)$ un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$. On considère un entier $k \in [\![1, n]\!]$.

a) On pose :

$$\forall \lambda \in [-1, 1],\quad P_\lambda(X) = P\left(\frac{\lambda + \varepsilon}{2} X + \frac{\lambda - \varepsilon}{2}\right)$$

avec $\varepsilon = 1$ si $\lambda \in [0, 1]$ et $\varepsilon = -1$ si $\lambda \in [-1, 0]$.

Montrer que $|P_\lambda^{(k)}(1)| = \left(\dfrac{|\lambda| + 1}{2}\right)^k |P^{(k)}(\lambda)|$.

b) En déduire que $\|P^{(k)}\|_\infty \leqslant 2^k T_n^{(k)}(1) \|P\|_\infty$.

c) Montrer que :

$$\|P^{(k)}\|_\infty \leqslant 2^{2k} \frac{k!}{(2k)!}\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!} \|P\|_\infty$$

et que, si $k = 1$, on a la majoration plus fine $\|P'\|_\infty \leqslant 2n^2 \|P\|_\infty$.

Conseils

Utiliser les résultats de l'*exercice* 11.
1) b) Revoir la dualité.

CORRIGÉS

1 Pour s'entraîner

1 a) Jamais, sauf si l'un est inclus dans l'autre. Soit A et B deux sous-groupes d'un même groupe et a un élément de $A \setminus B$ et b un élément de $B \setminus A$. Alors ab est dans $A \cup B$. Si $ab \in A$, comme $a \in A$ et $b = a^{-1}(ab)$ on en déduit $b \in A$ ce qui est absurde. On conclut de même si $ab \in B$.

b) Non, car l'unité de A n'est pas nécessairement celui de B. C'est le cas par exemple de $A = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ et de $B = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{Z} \right\}$.

2 $a = (15347)(26)$, $\quad b = (24)(5768)$,
$c = (138)(27)(4965)$.

L'ordre de a est $2 \vee 5 = 10$, celui de b est $2 \vee 4 = 4$ et celui de c est $3 \vee 2 \vee 4 = 12$.

La signature de a est $(-1)^{4+1} = -1$, celle de b est $(-1)^{3+1} = 1$ et celle de c est $(-1)^{2+1+3} = 1$.

De plus : $a^{201} = a^{20 \times 10+1} = a$,
$b^{198} = b^{49 \times 4+2} = b^2 = (56)(78)$

et enfin : $c^{1\,000} = c^{93 \times 12+4} = c^4 = (138)$.

3 Non, car dans $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^2$ on a pour tout x l'égalité $px = 0$. S'il existait un isomorphisme entre $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^2$ et $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, tout élément de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ vérifierait également $px = 0$. Ceci est absurde dans un groupe cyclique d'ordre p^2.

4 $1\,515 \equiv 7[13]$ et :

$1\,515^2 \equiv -3[13]$ ... $1\,515^{12} \equiv 1[13]$.

Or : $1\,789 \equiv 1[12]$. Donc $1\,515^{1\,789} \equiv 7[13]$. Le reste est 7.

5 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ est un corps car 5 est premier.

L'équation proposée se factorise en $x(x-1)(x-2) = 0$.

Les racines sont les classes 0, 1 et 2 car il n'y a pas de diviseurs de 0. Ce n'est pas la même chose dans $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$. Puisque $x(x-1)(x-2) = 0$, l'élément x n'est pas inversible et appartient à l'ensemble :

$$\{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22\}.$$

La solution 0 convient.

Si $x = 2$, on a : $2(2-1)(2-2) = 0$. 2 convient.

Si $x = 3$, on a : $3(3-1)(3-2) \neq 0$. 3 n'est pas solution.

On continue ainsi avec toutes les valeurs. Les solutions sont : $\{0, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22\}$.

6 $(2^n + 3^n) \wedge (2^{n+1} + 3^{n+1}) = (2^n + 3^n) \wedge (2(2^n + 3^n)) + 3^n)$
$= ((2^n + 3^n) \wedge 3^n$.

$(2^n + 3^n) \wedge (2^{n+1} + 3^{n+1}) = 2^n \wedge 3^n = 1$.

7 $X^6 + 1 = (X^2+1)(X^4 + X^2 + 1)$
$= (X^2+1)\left((X^2+1)^2 - 2X^2\right)$.

$X^6 + 1 = (X^2+1)(X^2 + 1 - \sqrt{2}X)(X^2 + 1 - \sqrt{2}X)$.

8 Il existe un unique polynôme vérifiant ces conditions. Il est donné à l'aide des polynômes d'interpolation de Lagrange $P_j(X) = \prod_{i=1 \wedge i \neq j}^{n} \dfrac{X - i}{j - i}$ où $j \in [\![1, n]\!]$ par l'égalité :

$$P(X) = \sum_{j=1}^{n} r^j P_j(X).$$

Or :

$$P_j(n+1) = \prod_{i=1, i \neq j}^{n} \frac{n+1-i}{j-i}$$
$$= (-1)^{n-j} \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!}.$$

On obtient :

$$P(n+1) = r[r^n - (r-1)^n].$$

2 Un groupe simple

1 Le cardinal de tout sous-groupe de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ divise p. Or p est premier, donc son cardinal est 1 ou p. On en déduit que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est simple.

2 a) Si $(G, .)$ est cyclique d'ordre premier, la démonstration est identique à celle de la première question. Réciproquement, on suppose que G est simple. Soit x un élément de G distinct de e. Le sous-groupe engendré par x est distinct de $\{e\}$. Il est donc égal à G. On en déduit que $(G, .)$ est cyclique.

b) Montrons par l'absurde que son cardinal p est premier. Si $p = rs$ où r et s sont des entiers naturels distincts de 1 et 0 alors x^s est d'ordre r. Le groupe engendré par x^s est un sous-groupe de G. Ceci contredit la simplicité de G.

Donc, p est premier.

3 Un groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$

1 ▬ a) $\forall x \in G\ x = x^{-1}$. Soit x et y dans G. On a :
$$xy = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx.$$

b) On vérifie facilement que pour tout élément x de G n'appartenant pas à H l'ensemble $H \cup xH$ est un sous-groupe de G.

c) Soit p le plus grand entier tel que $2^p \leqslant \operatorname{card} G$. Si $\operatorname{card} G \neq 1$, l'ensemble $\{e, a_1\}$ ou a_1 est un élément de G distinct de e est un sous-groupe H_1 de G. Si $\operatorname{card}(G) = 2$, c'est fini. Sinon on peut construire un sous-groupe de quatre éléments :
$$H_2 = H_1 \cup a_1 H_1.$$
Par une récurrence finie, on construit ainsi une suite finie de sous-groupe H_k et une suite finie d'éléments a_k de G tels que :
$$H_{k+1} = H_k \cup a_k H_k \quad \text{et} \quad a_k \in G - H_k.$$
Le sous-groupeH_p de G a 2^p éléments. Si $\operatorname{card} G \neq 2^p$, il existe un élément y de G qui n'est pas dans H_p. Le sous-groupe $H_p \cup yH_p$ de G est de cardinal 2^{p+1}. Ce qui contredit la définition de p.

Donc, $\operatorname{card} G = 2^p$.

d) L'application f de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$ dans G définie par :
$$f(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_p}) = a_1^{n_1} \ldots a_p^{n_p}$$
est un morphisme de groupes surjectif. Les ensembles d'arrivée et de départ ont le même cardinal donc f est un isomorphisme de groupes.

2 ▬ a) Les ordres des éléments de G divisent l'ordre de G. Ils sont égaux à 1, 2, 3 ou 6.

b) Le seul élément d'ordre 1 est e. Si tous les autres éléments de G étaient d'ordre 2, le cardinal de G serait une puissance de 2. Ce qui n'est pas.

Donc, il existe au moins un élément d'ordre 3 ou 6.

c) Si G possède un élément d'ordre 6, il est cyclique et isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$. Si G ne possède aucun élément d'ordre 6, il en possède un d'ordre 3.

Soit x cet élément. Notons y un élément de G n'appartenant pas au sous-groupe engendré par x. L'ordre du sous-groupe $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle$ est 1 ou 3 car il divise l'ordre de $\langle x \rangle$.

Or, y n'appartient pas à $\langle x \rangle$. Donc $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$. Montrons que l'application $f : \langle x \rangle \times \langle y \rangle \longmapsto G$ définie par $f(u, v) = u \cdot v$ est injective.

$\forall (u, u') \in \langle x \rangle\ \forall (v', v') \in \langle y \rangle$.
$$u \cdot v = u' \cdot v' \iff u'^{-1} \cdot u = v' \cdot v^{-1}.$$
Or : $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{e\}$. Donc $u'^{-1} \cdot u = v' \cdot v^{-1} = e$.

On en déduit $u = u'$ et $v = v'$. L'injectivité de f conduit à : $\operatorname{card} \langle x \rangle \times \operatorname{card} \langle y \rangle \leqslant \operatorname{card} G$.

Par conséquent :
$$\operatorname{card} \langle y \rangle = 2 \quad \text{et} \quad G = \left\{e, x, x^2, y, xy, x^2y\right\}.$$
G n'est pas abelien car sinon $x \cdot y$ serait d'ordre 6.

L'élément $x \cdot y$ n'appartient pas à $\langle x \rangle$. Comme nous l'avons étudié ci-dessus, son ordre est nécessairement 2.

On peut alors écrire la table d'opération de G et constater qu'elle est identique à celle de $(\sigma_3, \circ)$.

Donc, G est isomorphe à $(\sigma_3, \circ)$.

L'application définie par : $e \longmapsto I_d$, $x \longmapsto (123)$, $y \longmapsto (12)$ définit un isomorphisme de $(G, .)$ dans $(\sigma_3, \circ)$.

4 Groupe possédant un unique automorphisme

Soit x un élément fixé dans G. L'application $y \longmapsto xyx^{-1}$ est un automorphisme de G. C'est l'identité par hypothèse. On en déduit que G est abélien. L'application $y \longmapsto x^{-1}$ est un automorphisme de G car G est commutatif. Par conséquent :
$$\forall x \in G \quad x^2 = e.$$
D'après l'*exercice* 3, le cardinal de G est une puissance de 2 : 2^p où p est un entier naturel et G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$.

- Si $p = 0$ le groupe G est réduit à $\{e\}$.
- Si $p = 1$ le groupe G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.
- Si $p > 1$ l'automorphisme de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^p$ défini par $(x_1, ..., x_p) \longmapsto (x_p, ..., x_1)$ n'est pas l'identité.

Donc, les seuls groupes n'ayant qu'un seul automorphisme sont $\{e\}$ ou isomorphes à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

5 Les morphismes de groupes de $(\sigma_3, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$

Le groupe $(\sigma_3, \circ)$ est engendré par les transpositions. Pour déterminer un morphisme f de $(\sigma_3, \circ)$. dans $(\mathbb{C}^*, \times)$, il suffit de déterminer les images de toutes les transpositions.

Montrons que toutes les transpositions ont la même image. Soit σ une permutation de $\{1, 2, 3\}$ et $\tau = (i, j)$ une transposition. Alors :
$$f(\sigma\tau\sigma^{-1}) = f(\sigma)f(\tau)f(\sigma^{-1}) = f(\tau)$$
car $f(\sigma^{-1}) = \dfrac{1}{f(\sigma)}$. On en déduit que τ et $(\sigma(i), \sigma(j))$ ont la même image.

La transposition τ est d'ordre 2, donc $f(\tau)$ est également d'ordre 2. Donc $f(\tau) = 1$ ou $f(\tau) = -1$.

• Si $f(\tau) = 1$, l'application f est l'application constante égale à 1.

• Si $f(\tau) = -1$, l'application f est la signature.

6 Les carrés de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Il s'agit de calculer le cardinal de l'ensemble $\{x^2;\ x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$. Soit a dans $[\![0, p-1]\!]$. Nous devons dénombrer les solutions de $x^2 = \bar{a}^2$ dans le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

• Si $a = 0$, la seule solution est $x = \bar{0}$ car $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps.

• Si $a \neq 0$, l'équation se factorise en $(x-\bar{a})(x+\bar{a}) = \bar{0}$. On obtient $x-\bar{a} = \bar{0}$ ou $x-\bar{a} = \bar{0}$. Il y a deux solutions $x = \bar{a}$ et $x = \overline{p-a}$ lorsque $\bar{a} \neq \overline{p-a}$. C'est-à-dire lorsque $2a \not\equiv p[p]$.

Dans ce cas, le carré $\bar{a}^2$ est obtenu deux fois.

Tout nombre premier, distinct de 2, est un nombre impair.

Lorsque $p = 2$, on obtient deux carrés $\bar{0}$ et $\bar{1}$.

Lorsque $p = 2n+1$ où n est un entier naturel non nul, on obtient tous les carrés une seule fois en prenant a dans $[\![0, n]\!]$. Le nombre de carrés est $\dfrac{p+1}{2}$.

7 Une équation dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

1 Quand n est premier l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps. L'équation **(1)** équivaut à $x = \bar{0}$ ou $x = \bar{1}$.

2 $\bar{p}(\bar{p}-\bar{1}) = \bar{0}$. Donc n divise $p(p-1)$. Il existe deux entiers naturels n' et p' tels que :

$$n = \alpha n', \quad p = \alpha p' \quad \text{et} \quad n' \wedge p' = 1.$$

Donc, n' divise $p'(p-1)$.

Or $n' \wedge p' = 1$. Donc n' divise $p-1$.

On en déduit que n' est un diviseur de β, puis que n divise $\alpha\beta$.

D'autre part, p et $p-1$ sont premiers entre eux. Par conséquent, α et β sont premiers entre eux. Comme chacun divise n, leur produit $\alpha\beta$ divise n.

En conclusion : $n = \alpha\beta$.

3 D'après le *théorème de Bézout*, il existe deux entiers u et v tels que $\alpha u + \beta v = 1$. On pose $p = \alpha u$. On vérifie facilement que $\bar{p}$ est solution de **(1)**.

De plus, l'identité de Bézout assure que β et u sont premiers entre eux. Donc $\alpha = n \wedge p$.

4 On note α la valeur commune $n \wedge p = n \wedge q$. Soit $\beta = n \wedge (q-1)$. On a $\alpha\beta = n$. Donc $\beta = n \wedge (p-1)$ également.

L'entier α divise p et q. Il divise $p-q$.

L'entier β divise $p-1$ et $q-1$. Il divise $p-q$.

Or α et β sont premiers entre eux, car p et $p-1$ le sont. Par conséquent $\alpha\beta$ divise $p-q$. On en déduit $\bar{p} = \bar{q}$.

5 D'après les questions **3)** et **4)**, pour tout couple (α, β) d'entiers premiers entre eux, tels que $n = \alpha\beta$, il existe une unique solution de **(1)**.

D'après la question **2)**, toute solution de **(1)** est associée à un tel couple. Pour $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{m_i}$, on obtient les couples $(\prod_{i\in L} p_i^{m_i}, \prod_{j\in M} p_j^{m_j}$ où (L, M) est une partition de $[\![1, k]\!]$.

Le nombre de ces partitions est $\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}$.

Il y a 2^k solutions.

6 • Pour $n = 12$, les valeurs de α sont 1, 3, 4 et 12 .

• Pour $\alpha = 1$, on trouve la solution $\bar{1}$.

• Pour $\alpha = 12$, on trouve la solution $\bar{0}$.

L'identité de Bézout est $4 - 3 = 1$.

• Pour $\alpha = 3$, on a $u = -1$. On trouve la solution $\overline{11}$.

• Pour $\alpha = 4$, on a $u = 1$. On trouve la solution $\bar{4}$.

8 Les automorphismes de corps de $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2}$

On note $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}$. Soit σ un automorphisme de $\mathbb{K}$. Il vérifie : $\sigma(0) = 0$ et $\sigma(1) = 1$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K} \qquad \sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y) \qquad \textbf{(1)}$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{K} \qquad \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) \qquad \textbf{(2)}$$

On en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\ \sigma(n) = n$.

En appliquant **(1)** au couple $(x, -x)$, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{K} \quad \sigma(-x) = -\sigma(x).$$

Puis : $\qquad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \sigma(n) = n.$

En appliquant **(1)** au couple $(q, \dfrac{p}{q})$, on obtient :

$$\forall r \in \mathbb{Q} \quad \sigma(r) = r.$$

On applique ensuite **(2)** au couple $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$. On en déduit $\sigma(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ ou $\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$.

Finalement :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Q}^2 \quad \sigma(a+b\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}\,;$$

ou bien :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Q}^2 \quad \sigma(a+b\sqrt{2}) = a - b\sqrt{2}.$$

Réciproquement, on vérifie que les deux applications définies ci-dessus sont des automorphismes de $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}$.

9 Les morphismes de corps de $\mathbb{R}$

Soit σ un morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans lui-même. On montre comme dans l'*exercice* 8 que $\forall r \in \mathbb{Q}\ \ \sigma(r) = r$.

Montrons que σ est croissant.

Soit x un réel positif, alors $\sqrt{x}$ existe et :

$$\sigma(x) = (\sigma(\sqrt{x}))^2.$$

On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}^+\ \sigma(x) \geqslant 0$.

Puis, en appliquant ce résultat à $y - x \geqslant 0$, on obtient

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ x \leqslant y \Longrightarrow \sigma(x) \leqslant \sigma(y).$$

Montrons que σ est injectif. Soit x un réel non nul, alors $\dfrac{1}{x}$ existe. On en déduit que $\sigma(x)\sigma(\dfrac{1}{x}) = 1$. Par conséquent, $\sigma(x) \neq 0$. En conclusion, σ est strictement croissante.

Montrons par l'absurde que σ est l'identité. Soit x un réel. Si $\sigma(x) \neq x$. On a, par exemple, $x < \sigma(x)$. Il existe un rationnel r tel que $x < r < \sigma(x)$. L'application σ étant strictement croissante, on en déduit :

$$\sigma(x) < \sigma(r).$$

Or, $\sigma(r) = r$, contredit l'inégalité $r < \sigma(x)$. On procède de même si $\sigma(x) < x$.

Le seul morphisme de corps de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'identité.

10 L'anneau des décimaux

$\mathbb{D}$ est clairement un sous-anneau de $\mathbb{R}$. Il est donc intègre. Montrons que ses idéaux sont principaux. Soit I un idéal de $\mathbb{D}$.

• Si $I = \{0\}$ alors $I = 0\mathbb{D}$.

• Si $I \neq \{0\}$ montrons que $I \cap \mathbb{N}^*$ est non vide. Soit x_0 un élément non nul de I. Il existe un entier p tel que $x_0 \cdot 10^p$ soit un entier relatif q. Or $q = x_0 \cdot 10^{-p}$ avec $x_0 \in I$ et $10^{-p} \in \mathbb{D}$, donc $q \in I$ car I est un idéal. D'autre part, I est un sous-groupe, donc $-q \in I$. Ainsi, q ou $-q$ est un élément de $I \cap \mathbb{N}^*$.

Notons a le minimum de $I \cap \mathbb{N}^*$.

On a trivialement $a\mathbb{D} \subset I$. Montrons que $I \subset a\mathbb{D}$.

Soit x dans I. Il appartient à $\mathbb{D}$, donc il existe trois entiers relatifs α, β et n tels que ;

$$x = 2^\alpha 5^\beta n \quad \text{et} \quad n \wedge 10 = 1$$

Or $2^{-\alpha}5^{-\beta}$ est dans $\mathbb{D}$ et x est dans I, donc $2^\alpha 5^\beta x$ appartient à I. Ainsi $n \in I \cap \mathbb{Z}$.

Or $I \cap \mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$. Il existe un entier naturel m non nul tel que $I \cap \mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$. On vérifie que $m = a$. Donc $n \in a\mathbb{Z}$.

On en déduit que $x \in a\mathbb{D}$. En conclusion : $I = a\mathbb{D}$.

Dans les deux cas, I est principal.

11 Polynômes de Tchebychev

1 ▬ a) Notons $t = \text{Arccos}\ x$, d'après la *formule de Moivre*, on a :

$$T_n(x) = \text{Re}\,(\cos t + \text{i} \sin t)^n$$
$$= \sum_{0 \leqslant p \leqslant \frac{n}{2}} \binom{n}{2p} (-1)^p \cos^{n-2p} t (1 - \cos^2 t)^p.$$

Il s'agit bien d'un polynôme en $\cos t$ à coefficients entiers et de degré inférieur ou égal à n.

b) $T_1(X) = X$; $T_2(X) = 2X^2 - 1$; $T_3(X) = 4X^3 - 3X$; $T_4(X) = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

c) La relation de récurrence est obtenue à partir de la relation :

$$\cos(n+1)t + \cos(n-1)t = 2 \cos t \cos nt.$$

d) On choisit comme hypothèse de récurrence H_n.

Le polynôme T_n a la parité de n, son degré est n et son coefficient dominant est 2^{n-1}.

L'hypothèse est vérifiée pour les quatre premières valeurs de n. L'hérédité est montrée facilement à l'aide de la relation de la question **3)**, en remarquant que $XT_{n+1}(X)$ a une parité différente de celle de T_{n+1} et que le terme de plus haut degré de T_{n+2} est celui de $2XT_{n+1}(X)$.

e) La formule de récurrence donne l'algorithme :

on ajoute à $-T_n$ le produit de $2X$ par T_{n+1} puis on obtient T_{n+2}.

Entrée de n

$u \longleftarrow 1$

$v \longleftarrow X$

For p **from 2 to** n **do**

$w \longleftarrow v$

$v \longleftarrow 2 * X * v - u$

$u \longleftarrow w$

endfor

Afficher v

Avec le logiciel *Maple* on utilise la commande *with(orthopoly)*

f) On pose $t = \text{Arccos}\ x$.

2 ▬ a) La question **1) f)** assure :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad |T_n(x)| \leqslant 1,$$

atteint pour $t = 0$ donc pour $x = 1$. On en déduit $\|T_n\|_\infty = 1$.

b) Cette inégalité se démontre par récurrence à l'aide de l'expression :

$$\sin((n+1)u) = \sin(nu)\cos u + \sin u \cos(nu).$$

c) On dérive la fonction composée de $x \longmapsto t = \text{Arccos}\, x$ et de $t \longmapsto \cos nt$. On obtient :

$$\forall x \in [-1,1] \quad T_n'(x) = -n \cos nt \frac{1}{\sin t}.$$

D'après la question **2) b)**, on en déduit :

$$\forall x \in [-1,1] \quad |T_n'(x)| \leqslant n^2.$$

Cette borne étant atteinte lorsque t tend vers 0, c'est-à-dire lorsque x tend vers 1.

D'où $\|T_n'\|_\infty = n^2$

3 ▬ **a)** La relation se démontre facilement par récurrence à l'aide de la formule de la question **1) c)**.

b) L'application $r \longmapsto \dfrac{r+r^{-1}}{2}$ est continue strictement croissante de $[1,+\infty[$ dans lui-même. Pour tout x de $[1,+\infty[$ il existe un unique r de $[1,+\infty[$ tel que :

$$x = \frac{r+r^{-1}}{2}.$$

La résolution de l'équation du second degré qui correspond à cette égalité donne $r = x + \sqrt{x^2-1}$.

Pour $r \geqslant 1$ on a $1 \leqslant \dfrac{r^n + r^{-n}}{2} \leqslant r^n$.

On en déduit :

$$1 \leqslant T_n(x) \leqslant \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n.$$

4 ▬ **a)** Pour tout t de $[0,\pi]$ on obtient :

$$T_n'(\cos t)(-\sin t) = -n \sin nt$$
$$T_n''(\cos t)\sin^2 t - T_n'(\cos t)\cos t = -n^2 \cos nt.$$

On en déduit :

$$\forall x \in [-1,1] \quad (1-x^2)T_n''(x) - xT_n'(x) + n^2 T_n(x) = 0.$$

Cette expression polynomiale, nulle sur $[-1,1]$, est également nulle sur $\mathbb{R}$.

L'équation différentielle vérifiée par T_n sur $\mathbb{R}$ est :

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

b) On applique la *formule de Leibniz* à l'ordre $k-1$ à l'équation différentielle obtenue. On obtient :

$$(1-x^2)y^{(k+1} - 2(k-1)xy^{(k} - (k-1)(k-2)y^{(k-1)}$$
$$-xy^{(k)} - (k-1)y^{(k-1)} + n^2 y^{(k-1)} = 0.$$

Puis, après simplification et pour $x = 1$ on a :

$$(2k-1)T_n^{(k)}(1) = (n^2-(k-1)^2)T_n^{(k-1)}(1).$$

En multipliant les égalités obtenues pour k variant à partir de la valeur 0. On obtient :

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n^2(n^2-1)...(n^2-(k-1)^2)}{1.3...(2k-1)}.$$

En introduisant les termes pairs manquants on a :

$$T_n^{(k)}(1) = \frac{n(n-1)...(n-(k-1))n(n+1)...(n+(k-1))}{1.2.3...(2k-1)(2k)} 2^k k!$$

puis la relation demandée.

La dernière relation s'obtient en remarquant que la parité change à chaque dérivation.

12 Majoration des polynômes et de leurs dérivées

1 ▬ **a)** On résout $\cos nt = \pm 1$ (1) en posant $x = \cos t$. L'ensemble des solutions de (1)est $\dfrac{k\pi}{n}$; $\quad k \in [\![0,n]\!]$.

Les solutions de $|T_n(x)| = 1$ sont les a_k.

On a $T_n(a_k) = (-1)_k$.

D'après l'*exercice* 11 question **2) c)**, on a :

$T_n'(cost) = \dfrac{n \sin nt}{\sin t}$. On en déduit :

$$\forall j \in [\![1,n-1]\!] \quad T_n'(a_j) = 0.$$

Pour $j = 0$ ou $j = n$, l'expression précédente est indéterminée. On va utiliser la question **4) b)** de l'*exercice* 11.

Pour $j = n$, $T_n'(1) = n^2$.

Pour $j = 0$, $T_n'(-1) = (-1)^{n+1}n^2$.

b) La famille $(L_0, ..., L_n)$ est la base duale de la famille $(u_0, ..., u_n)$ où chaque u_i est définie par $P \longmapsto P(a_i)$.

L'expression de tout polynôme P de degré inférieur à n est donnée par :

$$P = \sum_{i=0}^{n} \langle u_i, P\rangle\, L_i \qquad \textbf{(2)}$$

où $\langle\ \rangle$ désigne le crochet de dualité.

Pour T_n on obtient : $T_n(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}L_i(X)$.

c) Pour $x \geqslant 1$ on a $x - a_i \geqslant 0$ car les a_i sont dans $[-1,1]$.

Le dénominateur de L_i contient exactement $n-i$ facteurs négatifs. Par conséquent $(-1)^{n-i}L_i(x) = |L_i(x)|$.

D'où : $\forall x \in [1,+\infty[\quad T_n(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n}|L_i(x)|$.

d) La relation **(2)** et la question **3) b)** de l'*exercice* 11 permet d'écrire pour tout x de $[1,+\infty[$

$$|P(x)| \leqslant \sum_{i=0}^{n}|P(a_i|\,|L_i(x)| \leqslant \|P\|_\infty \sum_{i=0}^{n}|L_i(x)|$$
$$\leqslant |P\|_\infty(x+\sqrt{x^2-1})^n.$$

2 ▬ **a)** La justification est analogue à celle de la question **1) c)**. En effet, lorsqu'on dérive le numérateur de L_i tous les facteurs des termes de la somme obtenue sont positifs.

b) C'est la même démonstration qu'à la question **1) d)** à l'aide de la question **2) a)**.

3 ▬ **a)** On montre par une récurrence immédiate que :

$$P_\lambda^{(k)}(X) = \left(\frac{\lambda+\varepsilon}{2}\right)^k P^{(k)}\left(\frac{\lambda+\varepsilon}{2}X + \frac{\lambda-\varepsilon}{2}\right).$$

Or λ et ε ont le même signe. Donc $|\frac{\lambda+\varepsilon}{2}| = \frac{|\lambda|+1}{2}$. On obtient l'égalité attendue.

b) Comme $1+|\lambda[\geqslant 1$ l'égalité de **3) a)** assure :

$$|P^{(k)}(\lambda)| \leqslant 2^k |P_\lambda^{(k)}(1)|.$$

D'après **2) b)**, on a :

$$|P^{(k)}(\lambda)| \leqslant 2^k \|P_\lambda\|_\infty T_n^{(k)}(1).$$

De plus : $\frac{\lambda+\varepsilon}{2}X + \frac{\lambda-\varepsilon}{2} = \lambda\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{2}$.

Or : $\frac{x+1}{2} \geqslant 0$ et $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Donc :

$$-1 \leqslant \frac{\lambda+\varepsilon}{2}X + \frac{\lambda-\varepsilon}{2} \leqslant x \leqslant 1.$$

On en déduit la majoration de $\|P_\lambda\|_\infty$ par $\|P\|_\infty$, puis l'inégalité :

$$\|P^{(k)}\| \leqslant 2^k \|P\|_\infty T_n^{(k)}(1).$$

c) D'après la question **4) b)** de l'*exercice* 11, on a :

$$\begin{aligned} 2^k \|P\|_\infty T_n^{(k)}(1) &= 2^{2k}\frac{n}{n+k}\frac{k!}{(2k)!}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\|P\|_\infty \\ &\leqslant 2^{2k}\frac{k!}{(2k)!}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\|P\|_\infty. \end{aligned}$$

Pour $k=1$, on reprend la majoration de la question **3) b)** et on applique la question **2) c)** de l'*exercice* 11. On obtient :

$$\|P'\|_\infty \leqslant 2n^2 \|P\|_\infty.$$

2 Compléments d'algèbre linéaire

RAPPELS DE COURS

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de E indexée par un ensemble I fini ou infini. On note $\mathbb{K}^{(I)}$ le sous-espace de $\mathbb{K}^I$ des familles à support fini indexées par I.

FAMILLES DE VECTEURS

• *Combinaisons linéaires*

Un vecteur x de E est *combinaison linéaire* des x_i pour i dans I, s'il est combinaison linéaire d'une sous-famille finie de $(x_i)_{i\in I}$.

Une famille $(x_i)_{i\in I}$, d'un espace vectoriel E est génératrice si, et seulement si, tout élément de E est une combinaison linéaire des vecteurs x_i pour i dans I.

• *Famille libre, famille liée*

La famille $(x_i)_{i\in I}$ est *libre* si tout élément du sous-espace engendré par cette famille s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs x_i pour i dans I.

On dit aussi que les vecteurs x_i pour i dans I sont *linéairement indépendants* ou plus simplement *indépendants*.

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'un espace vectoriel E qui n'est pas libre est *liée*. Dans ce cas, les vecteurs x_i pour i dans I sont dits *linéairement dépendants.*

La famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si, et seulement si :

$$\forall\,(\alpha_i)_{i\in I}\ \in \mathbb{K}^{(I)}\quad \left(\sum_{i\in I}\alpha_i x_i = 0_E \quad\Rightarrow\quad \forall\, i\in I\quad \alpha_i = 0\right).$$

Une famille de vecteurs est libre si, et seulement si, toute sous-famille finie est libre.

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments d'un espace vectoriel E est liée si, et seulement s'il existe une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{K}^{(I)}$ non identiquement nulle telle que $\sum\limits_{i\in I}\alpha_i x_i = 0_E$.

Une famille est liée si, et seulement si, l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Soit une famille libre $(x_i)_{i\in I}$, d'un espace vectoriel E et x un vecteur de E tel que la famille associée à $\{x\}\cup\{x_i\ ;\ i\in I\}$ soit liée. Alors x est combinaison linéaire des vecteurs x_i pour i dans I.

• ***Base***

La famille $(x_i)_{i\in I}$ est une *base* de E si elle est libre et génératrice. La famille $(x_i)_{i\in I}$, est une base de E si, et seulement si, tout vecteur x de E s'écrit de manière unique $x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$ où $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille de $\mathbb{K}^{(I)}$. Les scalaires α_i pour i dans I sont les *coordonnées* ou les *composantes* du vecteur x.

• ***Théorème de la base incomplète***

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille génératrice finie de E et J une partie de I telle que la famille $(x_i)_{i\in J}$ soit une famille libre de E.

Alors il existe une partie L de I contenant J telle que $(x_i)_{i\in L}$ soit une base de E.

• ***Application linéaire déterminée par l'image d'une base***

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une base de l'espace vectoriel E et $(y_i)_{i\in I}$ une famille de l'espace vectoriel F.

Il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que :

$$\forall\, i \in I \qquad u(x_i) = y_i.$$

SOMME DE SOUS-ESPACES

• Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E.

On appelle *somme* de la famille $(E_i)_{i\in I}$ et on note $\sum_{i\in I} E_i$ le sous-espace de E engendré par $\bigcup_{i\in I} E_i$.

$$\sum_{i\in I} E_i = \left\{ \sum_{i\in I} x_i \;\;;\;\; \forall\, i \in I \quad x_i \in E_i \right\}.$$

On dit que la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est *directe* et on note $\bigoplus_{i\in I} E_i$, si tout élément de la somme $\sum_{i\in I} E_i$ s'écrit de manière unique comme une somme d'éléments de E_i.

Pour tout i de I, $\displaystyle\bigoplus_{i\in I} E_i = E_i \oplus \left(\bigoplus_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} E_j\right)$

• La somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe si, et seulement si :

$$\forall (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i \left(\sum_{i\in I} x_i = 0_E \;\Rightarrow\; \forall\, i \in I \;\; x_i = 0_E\right).$$

• La somme des E_i pour i dans I est directe si, et seulement si :

$$\forall\, j \in I \qquad E_j \cap \left(\sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} E_i\right) = \{\, 0_E \,\}.$$

• Lorsque la dimension de E est finie, la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe si, et seulement si :

$$\dim \sum_{i\in I} E_i = \sum_{i\in I} \dim E_i.$$

• Lorsque l'espace vectoriel E est somme directe de la famille $(E_i)_{i\in I}$, pour tout i de I, on note p_i la projection sur E_i de noyau $\displaystyle\bigoplus_{\substack{j\in I\\ j\neq i}} E_j$.

Alors $\displaystyle\sum_{i\in I} p_i = \mathrm{Id}_E$, $p_i \circ p_i = p_i$ et $p_i \circ p_j = 0_{L(E)}$ pour $i \neq j$.

SOUS-ESPACES SUPPLÉMENTAIRES

Deux sous-espaces E_1 et E_2 d'un espace vectoriel E sont *supplémentaires* si, et seulement si :

$$E_1 \oplus E_2 = E.$$

• Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie.

1) Tout sous-espace F admet au moins un supplémentaire.

2) Pour tout supplémentaire G de F on a : $\dim F + \dim G = \dim E$.

• Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E.

Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

(i) $E = \mathrm{Im} f + \mathrm{Ker}\, f$;

(ii) $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker}\, f$;

(iii) $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.

• Tout sous-espace d'un espace vectoriel admet au moins un supplémentaire.

Tout sous-espace distinct de E admet une infinité de supplémentaires.

SOMME ET FAMILLES DE VECTEURS

Pour tout i dans I, soit S_i une famille de E_i.

Si pour tout i dans I , S_i est génératrice de E_i, alors $\bigcup_{i\in I} S_i$ est une famille génératrice de $\displaystyle\sum_{i\in I} E_i$.

On suppose que la somme des $(E_i)_{i\in I}$ est directe.

1) Si, pour tout i dans I, la famille S_i est libre, alors $\bigcup_{i\in I} S_i$ est libre dans $\bigoplus_{i\in I} E_i$.

2) Si, pour tout i dans I, la famille S_i est une base de E_i, alors $\bigcup_{i\in I} S_i$ est une base de $\bigoplus_{i\in I} E_i$.

• Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base d'un espace vectoriel E et $(I_k)_{k\in J}$ une partition *finie* de I. Pour tout k de J soit E_k le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_i)_{i\in I_k}$. Alors $E = \bigoplus_{k\in J} E_k$.

Une base $(e_i)_{i\in I}$ de E est dite *adaptée à la décomposition en somme directe* $E = \bigoplus_{k\in J} E_k$ s'il existe une partition $(I_k)_{k\in J}$ de I telle que, pour tout k de J, la famille $(e_i)_{i\in I_k}$ soit une base de E_k.

SOMMES DIRECTES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

• Soit E un espace vectoriel, somme directe d'une famille finie $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels, F un espace vectoriel et, pour tout i de I, u_i une application linéaire de E_i dans F.

Alors, il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que, pour tout i de I, l'application u_i soit la restriction de u à l'espace E_i.

• Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F. Alors :

1) la restriction de u à un supplémentaire G de $\mathrm{Ker}\, u$ est un isomorphisme de G dans $\mathrm{Im} u$;

2) tout supplémentaire du noyau de u est isomorphe à l'image de u.

• Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, G et H deux sous-espaces supplémentaires de F dans E :

1) la restriction à H de la projection sur G de noyau F est un isomorphisme de H dans G.

2) les supplémentaires G et H sont isomorphes.

• Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace de E.

Si F admet un supplémentaire G de dimension finie, tous les supplémentaires de F sont de dimension finie égale à la dimension de G.

La dimension commune de tous les supplémentaires de F est la *codimension* de F, notée codim F.

Lorsque E est de dimension finie : $\operatorname{codim} F = \dim E - \dim F$.

• Soit E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et u une application linéaire de E dans F de rang fini.

Alors $\operatorname{Ker} u$ est de codimension finie égale au rang de u.

DUALITÉ

• Formes linéaires et espace dual

Une application u linéaire de E dans $\mathbb{K}$ est appelée *forme linéaire sur l'espace E*.

L'espace vectoriel $L(E, \mathbb{K})$ est appelé l'*espace dual* de E. Il est noté E^*.

L'application φ définie de $E^* \times E$ sur $\mathbb{K}$, par $\varphi(u, x) = u(x)$ est une forme bilinéaire.

L'application φ est appelée *forme bilinéaire canonique*.

Le scalaire $\varphi(u, x)$ sera noté $\langle u, x\rangle$, la notation $\langle , \rangle$ sera appelée *crochet de dualité*.

Le zéro de E^* est l'application nulle. Il sera noté 0^*.

• Soit x et y dans E, u dans E^*. Alors :

$$\begin{aligned} x = 0_E \quad &\Leftrightarrow \quad \forall u \in E^* \ \langle u, x\rangle = 0. \\ x = y \quad &\Leftrightarrow \quad \forall u \in E^* \ \langle u, x\rangle = \langle u, y\rangle. \end{aligned}$$

• Trace d'une matrice, d'un endomorphisme

• Soit A une matrice carrée d'ordre n dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $A = [\![a_{i,j}]\!]_{i\in[\![1,n]\!] \ j\in[\![1,n]\!]}$.

Le scalaire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ est appelé la *trace* de A noté $\operatorname{Tr}(A)$.

L'application trace Tr définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ est une forme linéaire.

Pour toute matrice A et toute matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a : $\operatorname{Tr}(A\,B) = \operatorname{Tr}(B\,A)$.

Deux matrices semblables ont la même trace.

• Soit B une base de E et u un endomorphisme de E. La trace de la matrice de u dans la base B ne dépend pas du choix de la base B. Elle ne dépend que de l'endomorphisme u. On l'appelle trace de l'endomorphisme u, notée $\operatorname{Tr}(u)$.

• Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. La trace d'un projecteur p est égale à son rang.

• Hyperplans

Un hyperplan H de E est un sous-espace de E de codimension 1 : il existe une droite D telle que $H \oplus D = E$.

Si H est un hyperplan de E, pour tout vecteur a de E n'appartenant pas à H, on a : $H \oplus \mathbb{K}a = E$.

Pour tout hyperplan H de E et tout vecteur a de E n'appartenant pas à H, il existe une forme linéaire u unique telle que $u_{|H}$ soit nulle et telle que $u(a) = 1$.

Un sous-espace H de E est un hyperplan si, et seulement s'il est le noyau d'une forme linéaire *non nulle*.

• Soit u dans E^* non nulle et H le noyau de u. Alors $u(x) = 0$ est appelée une équation de H et :

$$\forall\, v \in E^* \quad H = \operatorname{Ker} v \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \quad v = \lambda\, u.$$

Toutes les équations d'un hyperplan sont proportionnelles entre elles.

• ***Base duale et préduale***

• Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $B = (e_1\ ,\ e_2\ ,\ \dots,\ e_n)$ une base de E.

Pour $i,\ j$ dans $[\![1\ ,\ n]\!]$ le symbole de Kronecker δ_i^j est défini par $\delta_i^j = 1$ si $i = j$ et $\delta_i^j = 0$ si $i \neq j$.

Pour tout i dans $[\![1\ ,\ n]\!]$, on définit la forme linéaire e_i^* sur E par :

$$\forall\ j \in [\![1\ ,\ n]\!] \quad \langle e_i^*,\ e_j \rangle = \delta_i^j.$$

Les formes linéaires $e_1^*\ ,\ e_2^*\ ,\ \dots,\ e_n^*$ sont appelées les *formes linéaires coordonnées.*

Alors E^* est de dimension n et $B^* = (e_1^*\ ,\ e_2^*\ ,\ \dots,\ e_n^*)$ est une base de E^*, appelée *base duale* de B .

La base B est dite *préduale* de B^*.

Toute forme linéaire de E^* se décompose de manière unique dans la base B^* : $u = \sum_{i=1}^{n} \langle u\ ,\ e_i \rangle e_i^*$.

Tout vecteur x de E se décompose de manière unique dans la base B : $x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i^*\ ,\ x \rangle e_i$.

• Soit $(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots,\ x_n)$ une famille de E et $(u_1\ ,\ u_2\ ,\ \dots,\ u_n)$ une famille de E^* telles que :

$$\forall i \in [\![1\ ,\ n]\!] \quad \forall\ j \in [\![1\ ,\ n]\!] \qquad \langle u_i,\ x_j \rangle = \delta_i^j.$$

Alors :

– la famille $(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots,\ x_n)$ est une base de E ;

– la famille $(u_1\ ,\ u_2\ ,\ \dots,\ u_n)$ est une base de E^*, duale de la base $(x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots,\ x_n)$.

• Soit $L = (u_1,\ \dots,\ u_n)$ une base de E^*. Il existe une base $B = (x_1\ ,\ x_2\ ,\ \dots,\ x_n)$ de E telle que $L = B^*$.

Elle est l'image réciproque de la base canonique de $\mathbb{K}^n$ par l'application f de E dans $\mathbb{K}^n$ définie, pour x dans E, par :

$$f(x) = \big(u_1(x),\ \ \dots,\ u_n(x)\big).$$

Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension p, l'ensemble des formes linéaires s'annulant sur F est un sous-espace vectoriel de E^* de dimension $n - p$.

• Soit $(u_1,\ \dots,\ u_p)$ une famille *libre* de p formes linéaires dans E^* alors $\bigcap_{j=1}^{p} \operatorname{Ker}\ u_j$ est un espace vectoriel de dimension $n - p$ et $\operatorname{Vect}(u_1,\ \dots,\ u_p)$ est l'ensemble des formes linéaires nulles sur $\bigcap_{j=1}^{p} \operatorname{Ker}\ u_j$.

Tout sous-espace de dimension p est l'ensemble des vecteurs de E dont les coordonnées dans la base B sont solutions d'un système de rang $n - p$ de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}\, x_1 + \cdots + a_{1,n}\, x_n = 0 \\ a_{2,1}\, x_1 + \cdots + a_{2,n}\, x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-p,1} x_1 + \cdots + a_{n-p,n} x_n = 0 \end{cases}$$

Réciproquement, l'ensemble des solutions d'un système de p équations de rang p est un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ de dimension $n - p$.

ÉNONCÉS

Dans ce chapitre, le corps $\mathbb{K}$ désigne soit le corps $\mathbb{R}$ des réels, soit celui des complexes $\mathbb{C}$.

1 Pour s'entraîner

1 E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

On considère deux endomorphismes f, g de E tels que :

$$f + g = \mathrm{Id}_E \; ; \qquad \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leqslant n.$$

Montrer que f et g sont des projecteurs.

2 On note E l'ensemble des endomorphismes u de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad u({}^tM) = {}^t(u(M)).$$

Déterminer la structure de E et sa dimension.

3 Les réels x_1, x_2, x_3 sont distincts. On considère les six formes linéaires définies sur l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}[X]$ par :

$$\forall i \in [\![1, 3]\!] \quad \forall P \in E \quad \phi_i(P) = P(x_i), \psi_i(P) = P'(x_i).$$

Déterminer le rang de la famille $\{\phi_1, \ldots, \psi_3\}$.

4 Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

Discuter l'équation :

$$P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) = Q(X).$$

Application

Résoudre les cas particuliers $Q \in \{1, X, X^2\}$.

5* Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F.

Montrer que f est un isomorphisme si, et seulement si :

$$\forall g \in \mathcal{L}(F, E) \quad f \circ g \circ f = 0 \implies g = 0.$$

6* Soit $n \geqslant 2$ et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \mathrm{Det}(A + X) = \mathrm{Det}(A) + \mathrm{Det}(X).$$

Montrer que $A = 0$.

7 Cet exercice utilise les développements en série entière.

a) Expliciter le développement en série entière de $\sqrt{1+x}$ pour $-1 < x < 1$.

b) M est une matrice carrée réelle telle que :

$$M^3 - 3M^2 + 3M - \mathrm{I} = 0.$$

Expliciter une matrice N sur le même corps que M telle que $M = N^2$.

8 $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et M une matrice régulière appartenant à $\mathcal{A}$.

a) Montrer que l'application ϕ $(X \longmapsto MX)$ est un automorphisme d'espace vectoriel de $\mathcal{A}$.

b) Montrer que M^{-1} appartient à $\mathcal{A}$.

c) Calculer l'inverse de $N = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

d) Où intervient la structure de sous-algèbre pour $\mathcal{A}$?

Conseils

1) Question classique, s'il en est...
Vous DEVEZ savoir montrer que f et g sont des projecteurs associés.

2) Montrer que les sous-espaces des matrices symétriques et des matrices antisymétriques sont stables par tout endomorphisme de E.

3) Considérer une combinaison linéaire nulle des formes linéaires et chercher à montrer que les coefficients sont nuls en l'appliquant à des polynômes judicieusement choisis...

5) Si f est un isomorphisme et si g vérifie $f \circ g \circ f = 0$, alors...
Réciproquement, si f vérifie cette propriété, montrer que f est injective, puis surjective.
Essayer de procéder par l'absurde.

6) Poser $X = A$. Qu'en déduire ?
Supposer ensuite $A \neq 0$ et construire une matrice X telle que :

$$\mathrm{Det}(A + X) \neq \mathrm{Det}(A) + \mathrm{Det}(X).$$

7) Écrire $M = \mathrm{I} + (M - \mathrm{I})$ dans $M = N^2$.

8) b) Regarder les antécédents de I_n par ϕ.

2 Hyperplans et formes linéaires

1 *D'après E3A.PC.*

Calculer la dimension et donner une base de l'ensemble E des polynômes réels P de degré inférieur ou égal à n tels que $\displaystyle\int_{-1}^{1} P = 0$.

2* A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ϕ est une forme linéaire non nulle sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Résoudre, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'équation $X + \phi(X)A = B$.

Conseils

2) Appliquer la forme linéaire aux matrices B et $X + \phi(X)A$. Puis discuter suivant les cas.
Si nécessaire, et seulement dans ce cas, décomposer $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en somme directe de sous-espaces vectoriels.

3 Une équation matricielle

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation :

$$\begin{cases} \operatorname{tr}(X)Y + \operatorname{tr}(Y)X = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \\ XY = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \end{cases}.$$

Conseil

Prendre la trace de $\operatorname{tr}(X)Y + \operatorname{tr}(Y)X$.

4 Matrices de trace nulle

Soit E un espace vectoriel non réduit au vecteur nul.

1 Déterminer les fonctions f dans $\mathcal{L}(E)$ telles que, pour tout x de E, la famille $\{x, f(x)\}$ soit liée.

2 Montrer que, si M est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, non scalaire, elle est semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix}.$$

3 Montrer que toute matrice carrée non scalaire, de trace nulle est semblable à une matrice dont les termes diagonaux sont nuls.

Conseils

1) Pour tout vecteur x de E, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.
Mais attention ! ce scalaire dépend de x.
2) Utiliser la question précédente.
3) Démonstration par récurrence.
À l'ordre $n+1$, considérer la matrice obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne de M et travailler avec les matrices décrites par blocs.

5 Un calcul d'inverse

Inverser, si possible, la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} n & n-1 & \cdots & 1 \\ n-1 & n-1 & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Conseils

Plusieurs méthodes sont possibles...

6* Morphismes multiplicatifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$

Soit f une application *non constante* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad f(A.B) = f(A).f(B).$$

1 Déterminer $f(\mathrm{I}_n)$ et $f(0)$.

2 Montrer que deux matrices semblables ont même image par f.

3 Montrer que, si A est une matrice de rang $0 < r < n$, il existe deux matrices inversibles P et Q telles que :

$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} Q = PNQ.$$

4 Montrer que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \iff f(A) \neq 0$.

Conseils

2) Chercher d'abord l'image par f d'une matrice inversible.
3) Noter u l'endomorphisme canoniquement associé à f et chercher deux bases de $\mathbb{R}^n$ dans lesquelles la matrice de u ait la forme souhaitée.
4) Regarder les puissances de la matrice N.

7 Composés d'endomorphismes

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1 Soit f et g deux endomorphismes de E. On considère les trois égalités :

(i) $f \circ g \circ f = f$ **(ii)** $g \circ f \circ g = g$ **(iii)** $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$

Montrer que si deux de ces égalités sont vérifiées, la troisième l'est aussi.

2 Soit f dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer l'existence de g dans $\mathcal{L}(E)$ telle que **(i)**, **(ii)**, **(iii)** soient vraies.

3 Soit f, g, h, f_1, g_1 dans $\mathcal{L}(E)$ telles que :

$$f \circ f_1 \circ f = f \quad \text{et} \quad g \circ g_1 \circ g = g.$$

Montrer qu'il existe x dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ x \circ g = h$ si, et seulement si :

$$f \circ f_1 \circ h \circ g_1 \circ g = h.$$

Conseils

1) Pour montrer que **(i)** et **(iii)** entraînent **(ii)**, établir, tout d'abord, que $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g$.
Puis, établir que si a et b sont deux endomorphismes de E tels que : $\operatorname{Im} a = \operatorname{Im} b$, il existe un endomorphisme c de E tel que : $a \circ c = b$. On pourra alors utiliser l'*exercice* 1.
2) Faire une étude suivant le rang de f.

8* Normes de forme linéaire

D'après X.ESPCI. PC.

On fixe un entier n dans $\mathbb{N}$ et on désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n. On considère la forme linéaire L sur E définie par :

$$\forall P \in E \quad L(P) = \int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x.$$

1 Déterminer l'image par L de la fonction polynomiale P telle que $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$.

Déterminer la dimension du noyau de L, puis une base de ce noyau.

2 Soit N une norme sur E. On pose :

$$N(L) = \sup_{P \in E, N(P) \leqslant 1} |L(P)|.$$

Justifier l'existence de $N(L)$ et montrer qu'il existe Q dans E tel que $N(Q) = 1$ et $|L(Q)| = N'(L)$.

3 Pour P dans E tel que $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$, on pose :

$$N_\infty(P) = \sup_{0 \leqslant p \leqslant n} |a_p| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \left(\sum_{p=0}^{n} (a_p)^2 \right)^{1/2}$$

Comparer les normes N_∞ et N_2.

4 On désigne par $N_\infty(L)$ et $N_2(L)$ les nombres $N(L)$ définis dans la première question, quand on choisit pour N respectivement N_∞ et N_2.

a) Trouver Q_∞ dans E tel que $N_\infty(Q_\infty) = 1$ et $|L(Q_\infty)| = N_\infty(L)$.

b) Trouver Q_2 dans E tel que $N_2(Q_2) = N_2(L)$.

Conseils

1) Noyau d'une forme linéaire...
2)) Montrer que l'ensemble $\{P \in E;\ N(P) \leqslant 1\}$ est une partie compacte de E.
3) Revoir le cours.
4 a)) Utiliser **2) b)**.
b) Une racine carrée... Penser à Cauchy-Schwarz.

9 Matrices et déterminants par blocs

Les deux exercices suivants sont indépendants.

1 Les matrices A et B sont carrées d'ordre $n \geqslant 1$, à coefficients réels.

On considère la matrice, définie par blocs :

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix}.$$

On pose, en blocs, $P = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{i}\mathrm{I}_n & -\mathrm{i}\mathrm{I}_n \end{bmatrix}$.

a) Montrer que la matrice P est inversible et donner son inverse.

b) Calculer la matrice $P^{-1}MP$.

c) Quelle relation en déduit-on pour $\operatorname{Det}(M)$?

2* Soit A, B, C et D quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On considère la matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

a) Montrer que si A est inversible, on a :
$\operatorname{Det} M = \operatorname{Det} A . \operatorname{Det}(D - CA^{-1}B)$.

b) On considère $N = \begin{pmatrix} \operatorname{Det} A & \operatorname{Det} B \\ \operatorname{Det} C & \operatorname{Det} D \end{pmatrix}$.

Montrer que, si M est de rang n, la matrice N est de déterminant nul.

Conseils

1) a) Essayer directement de déterminer l'inverse de P.
c) Que dire du signe de $\mathrm{Det}(M)$?
2) a) On pourra déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ telle que PM soit trigonale par blocs.
b) On pourra distinguer les cas $\mathrm{Det}A = 0$ et $\mathrm{Det}A \neq 0$.

10* Polynôme et déterminant

On considère un entier naturel non nul, n et D_{n+1} le déterminant :

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} & x^n \\ 1 & 1 & \cdots & & & 1 \\ 1 & 2 & 3 & & n & n+1 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & & n^{n-1} & (n+1)^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Montrer que D_{n+1} est un expression polynomiale en x dont on précisera le degré et le terme dominant.

Calculer D_{n+1}.

Conseil

Considérer l'endomorphisme δ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ défini par :
$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \quad \delta(P) = P(X+1)$$
et utiliser $(Id - \delta)^n$.

11* Déterminant, rang et inverse de matrice

On considère $(a_1, a_2, .., a_n)$ un n-uplet de réels. On pose $a_0 = 0$ et pour tout entier k $(1 \leqslant k \leqslant n)$:
$$b_k = a_k - a_{k-1}.$$
On note A_n la matrice (n, n) dont l'élément situé à la i-ième ligne, j-ième colonne est $a_{\min(i,j)}$.

1 Calculer le déterminant de A_n.

2 Montrer que le rang de A_n est le nombre d'éléments non nuls du n-uplet $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

3 Dans le cas où A_n est inversible, déterminer A_n^{-1}.

Conseils

1) On pourra effectuer des manipulations sur les lignes de ce déterminant.
2) Les mêmes méthodes s'emploient pour la recherche du rang.

12 Comatrice

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1* Soit A dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la transposée de la comatrice de A, notée ${}^t\mathrm{Com}A$ soit égale à A^{-1}.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que ${}^t\mathrm{Com}A = A$.

2 Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible et que A^{-1} soit dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Conseils

1) et **2)** Utiliser la relation liant ${}^t\mathrm{Com}A$, A et $\mathrm{Det}A$.

Algorithmes

1* Les nombres de Stirling

D'après Navale.

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels ; pour tout entier naturel, $n > 0$, $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à n.

On désigne par $e_0 = \alpha_0 = E_0 = F_0$ le polynôme $X^0 = 1$.

On considère, pour tout entier $j \neq 0$ et tout réel $\alpha \neq 0$, les polynômes e_j, α_j, E_j, F_j respectivement définis par :
$$e_j(X) = X^j\,; \qquad \alpha_j(X) = (X-\alpha)^j\,;$$
$$E_j(X) = \frac{1}{j!}X(X-1)\cdots(X-j+1)\,;$$
$$F_j(X) = j!E_j(X).$$
On appelle, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_{n,\alpha}, \mathcal{E}_n, \mathcal{F}_n$ les familles :
$$\mathcal{B}_0 = (e_0, \ldots, e_n)\,; \qquad \mathcal{B}_{n,\alpha} = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n)\,;$$
$$\mathcal{E}_n = (E_0, \ldots, E_n)\,; \qquad \mathcal{F}_n = (F_0, \ldots, F_n).$$
Le dual d'un espace vectoriel V dont une base est $\mathcal{B}$ sera noté V^*, et $\mathcal{B}^*$ sera la base duale de $\mathcal{B}$; cette base $\mathcal{B}$ elle-même sera dite préduale de $\mathcal{B}^*$.

Soit Δ l'opérateur de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même qui, à toute f appartenant à $\mathbb{R}[X]$, associe $\Delta(f)$ telle que, pour tout x de $\mathbb{R}$:
$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

On pose $\Delta^0 = I$, et pour tout entier $p > 0$, $\Delta^{p+1} = \Delta^p \circ \Delta$.

Soit D l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout réel x :

$$(Df)(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x).$$

Partie 1 : Étude de Δ et nombres de Stirling

1 ▬ **a)** Montrer que $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{F}_n$ sont des bases de $\mathbb{R}_n[X]$ et que Δ est une application linéaire.

b) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ.

c) L'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par Δ est noté Δ_n.

Montrer que Δ_n est nilpotent.

Montrer que Δ n'est pas un endomorphisme nilpotent de $\mathbb{R}[X]$.

d Déterminer la matrice A_n de Δ_n relativement à $\mathcal{B}_0$.

2 ▬ Déterminer la matrice B_n de Δ_n relativement à $\mathcal{E}_n$ et le plus petit entier m (dit indice de nilpotence de B_n) tel que $B_n^m = 0$.

3 ▬ On pose, pour tout k dans $\mathbb{N}$ vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n$:

$$F_k = \sum_{i=0}^{n} s(i,k)e_i \quad \text{et} \quad e_k = \sum_{i=0}^{n} \sigma(i,k)F_i.$$

Les nombres $s(i,k)$ et $\sigma(i,k)$ sont appelés respectivement nombres de Stirling de première et de seconde espèce.

a) Déterminer, pour tout (i,k) dans $\mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $0 \leqslant k \leqslant n-1$, le nombre $s(i,k+1)$ en fonction de $s(i-1,k)$ et $s(i,k)$.

b) Déterminer de même une relation de récurrence permettant de calculer $\sigma(i,k)$.

c) Écrire un programme de calcul, à n fixé, des $s(i,k)$ pour tout (i,k) dans $\mathbb{N}^2$ tel que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant k \leqslant n$.

Même question pour les $\sigma(i,k)$.

Faire fonctionner ces programmes pour calculer $s(5,6)$ et $\sigma(5,6)$.

4 ▬ On désigne par P_n la matrice de passage de $\mathcal{E}_n$ à $\mathcal{F}_n$. Calculer P_5 et P_5^{-1}.

Partie 2 : Interpolation

5 ▬ Déterminer la base duale $\mathcal{B}_{n,\alpha}^* = (\alpha_0^*, \ldots, \alpha_n^*)$ de $\mathcal{B}_{n,\alpha}$.

6 ▬ Soit $\mathcal{E}_n^* = (E_0^*, \ldots, E_n^*)$ la base duale de $\mathcal{E}_n$.

a) Calculer, pour tout (k,i) de $\mathbb{N}^2$, $\Delta^k(E_i)$ et $\Delta^k(E_i)(0)$.

b) Expliciter $P = \sum_{i=0}^{n} E_i^*(P)E_i$ en déterminant, pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$, les $E_i^*(P)$ en fonction de Δ_n et de P.

c) On suppose qu'un polynôme Q de degré q de $\mathbb{R}[X]$ prend, pour $q+1$ entiers consécutifs de $\mathbb{Z}$ des valeurs entières. Montrer que $Q(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

7 ▬ Soit i un entier. On définit l'application :

$L_i^* : \mathbb{R}_n[X] \longmapsto \mathbb{R}$ par $L_i^*(P) = P(i)$.

a) Montrer que $\mathcal{L}^* = (L_0^*, \ldots, L_n^*)$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$ dont on déterminera la base préduale, qui sera notée $\mathcal{L} = (L_0, \ldots, L_n)$.

b) En utilisant $\mathcal{L}$, déterminer un polynôme T, de degré 3, dont le graphe contienne les points :

$$\left(i, \sum_{j=0}^{i} j^4\right) \text{ pour } i \text{ dans } \{0,1,2,3\}.$$

Partie 3 : Lien entre Δ et D

8 ▬ **a)** Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$:

$$D(E_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1}}{i} E_{k-i}.$$

b) En déduire que $D = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \Delta_i$

Conseils

3) a) Les $s(i,k)$ (et les $\sigma(i,k)$) sont les coordonnées des polynômes F_k (respectivement e_k) dans la base $\mathcal{B}_0$ (respectivement $\mathcal{F}_n$).
La question posée incite à écrire F_{k+1} en fonction de F_k.
b) Une méthode possible consiste à écrire X^k, pour k entre 0 et $n-1$, en fonction des F_i et à multiplier par X.

5) Décomposer P suivant les polynômes de la base $\mathcal{B}_{n,\alpha}$.

6) b) Utiliser la question précédente.
c) On peut :
- définir, en utilisant Q, un polynôme P de même degré, prenant des valeurs entières pour les entiers 0,1,... ,d ;
- montrer que, pour tout k dans $[\![0,d]\!]$, $\Delta_d^k(P)(0)$ est un entier relatif ;
- poursuivre en utilisant la question précédente.

7) a) Penser aux polynômes de Lagrange.

8) a) Récurrence sur k. Ne pas oublier que :

$$E_{k+1} = \frac{X-k}{k+1} E_k.$$

2 Racines d'un polynôme par la méthode de Bernoulli

Partie mathématique

On considère le polynôme $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0$, (avec $a_n \neq 0$), polynôme dont on cherche les racines supposées toutes non nulles et de modules distincts. Soit $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ces racines telles que :

$$|x_1| > |x_2| > \cdots > |x_n|.$$

On cherche à approximer une racine de P en utilisant une suite récurrente linéaire telle que : $\forall k \in \mathbb{N}$.

$$a_n u_{k+n} + a_{n-1} u_{k+n-1} \cdots + a_0 u_k = 0 \qquad \textbf{(E)}$$

soit, pour tout entier k :

$$u_{k+n} = -\frac{a_{n-1}}{a_n} u_{k+n-1} - \cdots - \frac{a_0}{a_n} u_k.$$

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des suites vérifiant la relation **(*E*)**. Vérifier, en utilisant la méthode du cours pour les suites récurrentes linéaires d'ordre 2, que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel et que les suites géométriques $(x_i^k)_k$ forment une base de $\mathcal{E}$. Soit u dans $\mathcal{E}$. Il existe donc n scalaires $C_1, \cdots, C_n$ tels que, pour tout entier k :

$$u_k = C_1 x_1^k + \cdots + C_n x_n^k.$$

Montrer que, si la suite (u_k) n'est pas nulle, le rapport $\dfrac{u_k}{u_{k-1}}$ converge vers une racine de P.

Partie informatique

1 Expliciter un algorithme de recherche des racines de P.

2 Traduire cet algorithme en un programme.

3 Résoudre, avec ce programme, les équations :

$$x^2 - 1{,}5x - 7 = 0 \ ; \ x^3 - 12{,}5x^2 + 33{,}5x + 20 = 0.$$

3* Forme faible de Frobenius d'une matrice

D'après CCP. Maths appliquées.

Une matrice compagnon est aussi dénommée matrice de Frobenius.

> **Georg Frobenius** (1849-1917), mathématicien allemand, travaille sur la théorie des groupes et en algèbre linéaire. Il fournit la première démonstration générale du théorème de Cayley-Hamilton en 1878. Récemment, vers 1980, une autre démonstration de ce théorème est apparue, utilisant et approfondissant les questions qui constituent le problème suivant.

Notations

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ l'algèbre des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$,

Id_n l'application identité sur $\mathbb{R}^n$,

I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

0_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Une matrice A, élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, étant donnée, on désignera par C_j sa colonne d'indice j, par L_i sa ligne d'indice i et par $A[i, j] = a_{i,j}$ l'élément de la i-ième ligne et de la j-ième colonne $(1 \leqslant i \leqslant n\,,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$.

On appelle matrice compagnon d'ordre n toute matrice carrée de la forme :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & & -c_1 \\ 0 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -c_{n-1} \end{bmatrix}.$$

En particulier, si $n = 1$, $C = (-c_0)$.

On dira que le polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ défini par $P(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1 X + c_0$ est le polynôme associé à la matrice C.

Objectif

Dans ce problème, on se propose de démontrer que toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice F diagonale par blocs, $F = \mathrm{diag}(C_1, \ldots, C_k)$, où les blocs diagonaux C_j sont des matrices compagnons. De plus, on définit un certain nombre de procédures permettant de construire effectivement cette matrice F, appelée forme faible de Frobenius de la matrice A.

Transformations élémentaires et matrices compagnons

Pour tous i et j dans $[\![1, n]\!]$, $E_{i,j}$ désigne la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les termes sont nuls sauf $E_{i,j}[i, j]$ qui est égal à 1.

Le réel a étant donné, on définit les matrices suivantes :

$$D_i(a) = \mathrm{I}_n + (a-1)E_{i,i}\ ;\ T_{i,j}(a) = \mathrm{I}_n + aE_{i,j}\ (i \neq j)$$
$$P_{i,j} = \mathrm{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i}.$$

On suppose maintenant n fixé, supérieur ou égal à 2.

Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1 Comment A est-elle transformée si on la multiplie à droite par la matrice $D_i(a)$, par la matrice $T_{i,j}(a)$ $(i \neq j)$, par la matrice $P_{i,j}$? Même question pour la multiplication à gauche.

2 Écrire une procédure Ddroite qui transforme la matrice A en $AD_i(a)$, sans effectuer la mutiplication des deux matrices A et $D(a)$.

3 Montrer que les matrices $T_{i,j}(a), i \neq j$, et $P_{i,j}$ sont inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer leur inverse.

À quelle condition la matrice $D_i(a)$ est-elle inversible ?

Dans ce cas, quel est son inverse ?

4 Écrire une procédure ChercheNonNul qui recherche dans la colonne j de la matrice A un terme non nul dont l'indice de ligne est supérieur ou égal à $j+1$.

Si les $a_{i,j}$, avec $i > j$, sont tous nuls, CherchNonNul retourne $n+1$.

5 On suppose connues les procédures Dgauche, Tdroite, Tgauche, Pdroite, Pgauche qui transforment la matrice A en $D_i(a)A$, $AT_{i,j}(a)$, $T_{i,j}(a)A$, $AP_{i,j}$ et $P_{i,j}A$.

Écrire une procédure Dtransformation qui transforme la matrice A en $D_i\left(\dfrac{1}{a}\right)AD_i(a)$, a étant supposé non nul.

6 On suppose connues les procédures Ttransformation, Ptransformation qui transforment la matrice A en $T_{i,j}(-a)AT_{i,j}(a)$, $P_{i,j}AP_{i,j}$.

On définit alors la procédure suivante :

Avec Maple

```
> Compagnon:=proc(A,n)
local j,k,i,d,M:
j:=1:k:=CherchNonNul(A,j,n);
while k<=n do
   if k<>j+1 then
     Ptransformation(A,k,j+1,n):
   fi:
Dtransformation(A,A[j+1,j],j+1,n):
for i to n do
   if i<>j+1 then
     Ttransformation(A,A[i,j],i,j+1,n):
   fi:od:
j:=j+1:
k:=CherchNonNul(A,j,n):
od:
d:=j;
end;
```

a) On suppose ici que $n = 3$ et que la matrice A est égale à $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Appliquer la procédure Compagnon à la matrice A.

(On donnera les transformations successives de la matrice A.)

b) On se place à nouveau dans le cas général.

Expliciter les différentes transformations subies par la matrice A pendant le déroulement de la procédure Compagnon.

En déduire que la matrice A est semblable à une matrice B' de la forme par blocs :

$$B' = \begin{pmatrix} C_1 & B_1' \\ 0 & B_2' \end{pmatrix},$$

où C_1 est une matrice compagnon.

Dans la suite du problème, on notera d l'ordre de la matrice C_1. En particulier, si $d = n$, $B' = C_1$.

c) Dans l'exemple numérique de la question **6) a)**, donner les valeurs de C_1, B_1', B_2', d.

7 On suppose connue la procédure Identité qui construit la matrice I_n.

Comment peut-on modifier la procédure Compagnon, pour qu'elle calcule, outre la matrice B' et l'entier d, une matrice de passage P telle que $P^{-1}AP = B'$?

Quelle est la première colonne de P ?

Forme faible de Frobenius

8 Écrire une procédure Zéroadroite qui transforme la matrice B' de la question **6)** en une matrice B'' de la forme :

$$B'' = \left(\begin{array}{ccc|cccc} & & & b_{1,d+1} & \cdots & & b_{1,n} \\ & C_1 & & 0 & \cdots & & 0 \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & & \vdots & & & B_2'' & \\ 0 & \cdots & 0 & & & & \end{array}\right).$$

On admettra maintenant que, s'il existe j compris entre $d+1$ et n tel que $b_{1,j} \neq 0$, les opérations Ptransformation$(B'', j, 1)$, puis Compagnon(B'', n) suivies de Zeroadroite(B'', d, n) transforment B'' en une matrice semblable, de la même forme, l'ordre de la matrice compagnon étant $d+1$.

9 Montrer que la matrice A est semblable à une matrice :

$$B = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix},$$

où C_1 est une matrice compagnon d'ordre supérieur ou égal à d.

Finalement, en répétant les mêmes transformations sur la matrice B_2, on obtient une forme faible de Frobenius de la matrice A, c'est-à-dire une matrice F élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, semblable à A, telle que :

$$F = \mathrm{diag}\,(C_1, \ldots, C_k),$$

où les C_j sont des matrices compagnons.

Donner la matrice B obtenue avec la matrice A de l'énoncé.

Conseils

1) Regarder comment sont transformées les lignes et les colonnes de A.

3) Utiliser la question **1)** et éviter les calculs.

6) a) Détailler les différentes étapes en indiquant les valeurs prises par j, k et i.
b) Utiliser la question **3)** .

7) Se rappeler la recherche de l'inverse d'une matrice régulière en utilisant le pivot de Gauss...

8) Attention ! Rétrograder en i !

9) Présenter d'abord un algorithme simple d'obtention de B, puis justifier que cet algorithme ne boucle pas.

4* Matrices de transvection

D'après INT.

Pour (i, j) dans $[\![1, n]\!]^2$, on définit l'élément $E_{i,j}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme étant la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la $i-$ème ligne et de la $j-$ème colonne qui vaut 1.

On sait que ces matrices sont appelées matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On appelle matrice de transvection toute matrice du type $(\mathrm{I}_n + \lambda E_{i,j})$ avec λ réel et $i \neq j$.

1 **a)** Calculer les produits matriciels : $E_{i,j}E_{h,k}$ pour i, j, h, k dans $[\![1, n]\!]$.

b) Que peut-on dire de la famille $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$?

c) Calculer le déterminant d'une matrice de transvection.

d) Soit deux réels λ, μ et i, j, h, k dans $[\![1, n]\!]$ tels que $i \neq j, h \neq k, j \neq h$.

Calculer $(\mathrm{I}_n + \lambda E_{i,j})(\mathrm{I}_n + \mu E_{h,k})$. En déduire l'inverse de $(\mathrm{I}_n + \lambda E_{i,j})$.

2 Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Montrer que l'addition à une ligne de A d'un vecteur proportionnel à une autre ligne peut se faire en multipliant A à gauche par une matrice de transvection.

b) Établir un résultat analogue sur les colonnes.

3 Soit $A = (a_{i,j})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose, de plus, que la première ligne de A ou la première colonne de A possède un élément non nul.

Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, produits de matrices de transvection, telles que la matrice $B = PAQ$ soit une matrice de coefficients $b_{i,j}$ telle que $b_{1,1} = 1$ et $b_{i,1} = b_{1,i} = 0$, pour $2 \leqslant i \leqslant n$.

4 Soit $A = (a_{i,j})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et r le rang de A. On suppose $r > 0$.

Montrer qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, produits de matrices de transvection, telles que la matrice $B = PAQ$ soit une matrice diagonale de coefficients $b_{i,j}$ telle que :

(i) $b_{i,i} = 1$ pour $1 \leqslant i < r$;

(ii) $b_{i,i} = 0$ pour $r < i \leqslant n$;

(iii) $b_{r,r} = d$, avec ($d = 1$ si $r < n$) et ($d = \mathrm{Det}(A)$ si $r = n$).

5 Écrire un programme qui fournit un couple de matrices de transvection (P, Q) telles que la matrice $B = PAQ$ vérifie les conditions de la question précédente. Commenter votre programme.

6 Montrer que le groupe des matrices carrées d'ordre n, de déterminant égal à 1, est engendré par les matrices de transvection.

Conseils

1) b) Question de cours...
2) a) Vous pouvez appeler $L_1, \ldots, L_n$ les vecteurs lignes de la matrice A et regarder $(\mathrm{I}_n + E_{i\,j})\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$.
3) Distinguer plusieurs cas : si $a_{11} = 1$, si $a_{11} \neq 1$ et il existe un élément non nul, autre que a_{11}, soit sur la ligne 1, soit sur la colonne 1,...
4) Faire une récurrence sur n, en commençant par $n = 2$.
Dans chaque cas, supposer d'abord que l'un des coefficients de la première ligne ou de la première colonne de A n'est pas nul. Puis revenir ensuite à ce cas.

6) Montrer que toute matrice de déterminant égal à 1 est produit de matrices de transvection.
Partir du résultat de la question **4)** avec une matrice de déterminant 1.

5* Décomposition *LU*

D'après Centrale.

Dans tout ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Toutes les matrices considérées ici sont à coefficients réels. On note :

• $\mathcal{M}_n$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n ;

• $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (termes sous-diagonaux nuls) et $\mathcal{U}_n^+$ l'ensemble des matrices appartenant à $\mathcal{U}_n$ dont tous les termes diagonaux sont positifs ou nuls ;

• $\mathcal{L}_n$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures dont les termes diagonaux valent 1. Le symbole I_n désigne la matrice unité diag(1, 1.., 1) élément de $\mathcal{M}_n$.

Pour A dans $\mathcal{M}_n$, le terme de A situé sur la ligne i et la colonne j est noté $A_{i,\,j}$.

Dans les questions **1)** et **2)** seulement, si $1 \leqslant i \leqslant n$, A_i désigne la matrice extraite de A d'ordre i :

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,i} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i,1} & A_{i,2} & \cdots & A_{i,i} \end{bmatrix}.$$

On confond respectivement :

– matrice et endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé ;

– vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne de ses coordonnées ;

– une matrice d'ordre 1 et le réel la constituant.

Si nécessaire, $\mathbb{R}^n$ sera muni de sa structure euclidienne rendant la base canonique orthonormale. Ainsi, si v appartient à $\mathbb{R}^n$, $v\,{}^tv$ est une matrice de $\mathcal{M}_n$ tandis que ${}^tv v$ représente $||v||^2$ (norme euclidienne).

Le but de ce problème est d'étudier un type de décomposition matricielle : la décomposition LU.

1 **a)** Montrer que si A appartenant à $\mathcal{M}_n$ est triangulaire inversible, son inverse est aussi triangulaire.

b Montrer que $(\mathcal{L}_n, \times)$ est un groupe.

2 **a)** Soit A un élément de $\mathcal{M}_n$.

Montrer que si A est inversible, il existe au plus un couple (L, U) de $\mathcal{L}_n \times \mathcal{U}_n$ tel que $A = LU$.

Si c'est le cas, on dira que A possède une décomposition LU(L comme Lower et U comme Upper).

b) Montrer que si A est inversible et possède une décomposition LU, alors, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, $\mathrm{Det}(A_k)$ n'est pas nul. *(On pourra utiliser une décomposition par blocs de A.)*

c) On suppose que $\mathrm{Det}(A_{n-1})$ est non nul et on écrit A par blocs sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & V \\ W & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'il existe H dans $\mathcal{L}_n$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!] \quad (HA)_{n,i} = 0.$$

En posant, *a priori*, $H = \begin{pmatrix} H_{n-1} & 0 \\ H' & 1 \end{pmatrix}$, expliciter une telle matrice H ainsi que son inverse, c'est-à-dire expliciter les blocs H_{n-1} et H', ainsi que les blocs correspondants de H^{-1} en fonction des blocs de la matrice A.

d) Montrer que, si pour tout k dans $[\![1, n]\!]$, $\mathrm{Det}(A_k)$ est non nul, alors A a une décomposition LU.

(On pourra opérer par récurrence en utilisant une décomposition par blocs de A.)

3 **a)** Soit deux entiers p et q tel que $1 \leqslant p < q \leqslant n$.

Montrer que l'opération élémentaire consistant à échanger les lignes p et q d'une matrice de $\mathcal{M}_n$ correspond à la multiplication à gauche par une matrice de $\mathcal{M}_n$ à déterminer.

b) Pour $1 \leqslant k \leqslant n$ et $1 \leqslant i_1 < i_2 < .. < i_k \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n$, le symbole $\begin{bmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_k \end{bmatrix}_A$ désigne le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} A_{i_1,j_1} & A_{i_1,j_2} & \cdots & A_{i_1,j_k} \\ A_{i_2,j_1} & A_{i_2,j_2} & \cdots & A_{i_2,j_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i_k,j_1} & A_{i_k,j_2} & \cdots & A_{i_k,j_k} \end{pmatrix}$ extraite de A.

Sous les hypothèses de la question **2) d)** et notant $A = LU$ la décomposition de A, trouver dans l'ordre :

(i) la première ligne de U ;

(ii) la première colonne de L ;

(iii) les éléments diagonaux de U ;

(iiii) les éléments de L des colonnes $2, 3..n$. *(On utilisera* **3) a)** *sous forme $PA = PLU$, où P est une matrice telle que la multiplication de M par P à gauche permute deux lignes de M)* ;

(iiiii) les éléments de U des lignes $2, 3, \ldots, n$.

On montrera que pour $2 \leqslant j \leqslant i \leqslant n$:

$$L_{i,j} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & j-1 & i \\ 1 & 2 & \cdots & j-1 & j \end{bmatrix}_A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & j \\ 1 & 2 & \cdots & j \end{bmatrix}_A}$$ et on donnera pour $(U_{i,j})$ $(2 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$ une formule analogue.

4 Écriture de l'algorithme

En utilisant :

– un algorithme induit par la question **3) b)** ,

– un langage de programmation (qu'on précisera) comprenant la fonction déterminant (notée Det),

écrire une procédure donnant, pour une matrice A satisfaisant aux conditions du **2) d)** , les matrices L et U telles que $A = LU$.

5 Exemples

a) À l'aide de l'algorithme mis en place à la question **4)** , effectuer la décomposition LU de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

en indiquant les différentes étapes et les calculs intermédiaires.

b) En déduire la résolution du système matriciel $AX = Y$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et de paramètre $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

c) Donner deux exemples de matrices de $\mathcal{M}_2$, l'une ne possédant pas de décomposition LU, l'autre en possédant plusieurs.

Conseils

1) a) Utiliser l'endomorphisme A et regarder les sous-espaces stables par A lorsque A est triangulaire inférieure.
Adapter pour une matrice triangulaire supérieure...

2) a) Montrer d'abord que si A est inversible et possède une décomposition LU, alors U est inversible.
Puis utiliser ce résultat en supposant que A possède deux décompositions LU.
b) Comme indiqué, travailler par blocs.
c) Partir de la forme indiquée par l'énoncé pour H et travailler par blocs.
d) Récurrence + question **2) c)**.

3) a) Utiliser les matrices élémentaires.
b) (i) $A = L_n U_n$, donc : $U_n = A L_n^{-1}$.
(ii) $L_n = A U_n^{-1}$, donc...
(iii) Regarder le raisonnement de la question **2) d)**, comment obtenir la décomposition LU de A_{k-1} en fonction de celle de A_k ?
(iiii) Considérer la matrice P de la question **3) a)** en utilisant seulement le fait qu'elle permute les lignes i et j.
Pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, écrire $PA = (PL)U$ et calculer ce produit en isolant le bloc constitué des i premières lignes et i premières colonnes. Puis calculer leurs déterminants.
(iiiii) Procéder de même en intervertissant lignes et colonnes et travaillant avec $AP = L(UP)$.

4) Suivre pas à pas les calculs de la question **3) b)** pour construire votre procédure.

5) a) Utiliser votre procédure.
b) Écrire $LUX = Y$ et résoudre deux systèmes triangulaires successifs.

CORRIGÉS

1 Pour s'entraîner

1 La relation $f+g=\mathrm{Id}_E$ entraîne :
$$E=\mathrm{Im}\ (f+g)\subset \mathrm{Im}\ f+\mathrm{Im}\ g\subset E.$$
Puis :
$$\mathrm{Im}\ f+\mathrm{Im}\ g=E.$$
D'où :
$$\mathrm{rg}(f)+\mathrm{rg}(g)\geqslant n.$$
Avec $\mathrm{rg}\,(f)+\mathrm{rg}\,(g)\leqslant n$, il vient : $\mathrm{rg}\,(f)+\mathrm{rg}\,(g)=n$. Il suffit ensuite d'écrire, pour tout x de E :
$$x=f(x)+g(x)$$
pour obtenir :
$$\mathrm{Im}\ f\oplus \mathrm{Im}\ g=E\quad \text{et}\quad \mathrm{Ker}\,(f)\subset \mathrm{Im}\ (g).$$
Ensuite, avec les dimensions, $\mathrm{Ker}\,(f)=\mathrm{Im}\ (g)$.

De même :
$$\mathrm{Ker}\,(g)=\mathrm{Im}\ (f).$$
Ensuite :
$$(f+g)^2=f+g=f^2+fg+gf+g^2=f^2+g^2.$$
D'où :
$$f^2-f=g-g^2.$$
Et :
$$\mathrm{Im}\ (f^2-f)=\mathrm{Im}\ (g-g^2)\subset \mathrm{Im}\ (f)\bigcap \mathrm{Im}\ (g).$$
f et g sont des projecteurs associés.

2 E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Soit u un élément de E et M une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :
$$u({}^{\mathrm{t}}M)={}^{\mathrm{t}}(u(M))=u(M).$$
La matrice $u(M)$ est symétrique.

Le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques est stable par u.

Montrons de même que le sous-espace vectoriel $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques est stable par u.

Réciproquement, soit u un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ laissant ces deux sous-espaces vectoriels supplémentaires stables.
$$\forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\quad \exists N\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})\quad \exists R\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\quad M=N+R.$$
Alors :
$$u(M)=u(N)+u(R).$$
Et :
$$\begin{aligned}{}^{\mathrm{t}}u(M)&={}^{\mathrm{t}}(u(N)+u(R))\\&={}^{\mathrm{t}}u(N)+{}^{\mathrm{t}}u(R)=u(N)-u(R)=u\left({}^{\mathrm{t}}M\right).\end{aligned}$$
L'endomorphisme u appartient à E.

Les éléments de E sont les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui laissent stables $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

L'espace vectoriel E est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathcal{S}_n)\times\mathcal{L}(\mathcal{A}_n)$ par l'application $(u\longmapsto(u_{|\mathcal{S}_n},u_{|\mathcal{A}_n})$.

Les dimensions de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont :
$$\frac{n(n+1)}{2}\quad\text{et}\quad\frac{n(n-1)}{2}.$$
La dimension de E est donc :
$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2.$$
Si vous n'êtes pas convaincus, regardez la matrice d'un tel endomorphisme dans une base adaptée à la décomposition en somme directe.

3 L'espace vectoriel E est de dimension infinie.

Pour vérifier que les six formes linéaires forment une famille libre, considérons six réels a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 et b_3 tels que, pour tout polynôme P :
$$\sum_{i=1}^{3}a_i\,P(x_i)+\sum_{i=1}^{3}b_i\,P'(x_i)=0,$$
La relation appliquée au polynôme :
$$P(X)=(X-x_1)^2(X-x_2)^2(X-x_3)$$
entraîne :
$$b_3=0.$$
En déduire que les b_i sont nuls.

Terminer en considérant les polynômes de la forme $Q_i(X)=\displaystyle\prod_{j\neq i}(X-x_j)$.

4 Fixons $n\geqslant 2$ et étudions l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par :
$$\phi(P)=P(X+1)+P(X-1)-2P(X).$$

Cette application est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Nous devons résoudre une équation linéaire. Soit $k \geqslant 2$.

$$\phi(X^k) = 2\sum_{j=1}^{\mathrm{E}(\frac{k}{2})} \binom{k}{2j} X^{k-2}.$$

Ce polynôme a pour degré $k-2$.

Et $\phi(1) = \phi(X) = 0$. Le noyau de ϕ est $\mathrm{Vect}(1, X)$.

Un supplémentaire de ce noyau est $X^2\mathbb{R}[X]$. Pour tout polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$, il existe donc un unique polynôme P de la forme $X^2 P_1(X)$, avec $\deg(P_1) = \deg(Q)$, tel que :

$$\phi(P) = Q.$$

Tous les polynômes vérifiant cette égalité sont les polynômes de la forme :

$$a + bX + X^2 P_1(X),$$

où a et b décrivent $\mathbb{R}$.

Pour $Q = 1$, on obtient $P(X) = a + bX + \dfrac{X^2}{2}$.

Pour $Q = X$, on obtient $P(X) = a + bX + \dfrac{X^3}{6}$.

Pour $Q = X^2$, on obtient $P(X) = a + bX + \dfrac{X^4}{12}$.

5 Soit f un isomorphisme et g une application linéaire de F dans E telle que :

$$f \circ g \circ f = 0.$$

Composons à droite et à gauche par f^{-1}.

Nous obtenons $g = 0$.

Réciproquement, soit f une application linéaire de E dans F possédant la propriété : si g est une application linéaire g de F dans E telle que $f \circ g \circ f = 0$, alors $g = 0$.

Supposons que f ne soit pas injective.

Il existe un vecteur $a \neq 0$ tel que $f(a) = 0$.

Notons H un supplémentaire de la droite vectorielle $\mathbb{K}a$.

La projection p sur cette droite vectorielle parallèlement à H n'est pas nulle, mais $f \circ p \circ f = 0$.

L'application f est donc injective.

Supposons ensuite que f ne soit pas surjective.

Notons F' un supplémentaire de $\mathrm{Im}\ f$ dans F.

La dimension de F' est non nulle.

Soit a un vecteur non nul de F', b un vecteur non nul de E et F'' un supplémentaire de $\mathbb{K}a$ dans F.

Considérons l'application linéaire g définie par :

$$\forall x \in F'' \quad g(x) = 0; \quad g(a) = b.$$

Cette application n'est pas nulle, mais $f \circ g \circ f = 0$.

L'application f est donc surjective.

6 Appliquons la relation avec $X = A$.

$$\mathrm{Det}(2A) = 2\mathrm{Det}(A).$$

Or, $\mathrm{Det}(2A) = 2^n \mathrm{Det}(A)$. Donc : $\mathrm{Det}(A) = 0$. La matrice A est de rang $p < n$.

Supposons $A \neq 0$.

Considérons l'endomorphisme u canoniquement associé à A.

Notons $e_1, \dots, e_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $f_1, \dots, f_n$ les vecteurs définis, pour tout i par :

$$f_i = u(e_i).$$

Il est possible d'extraire de la famille $\{f_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ une sous-famille libre de p $(1 \leqslant p < n)$ vecteurs et de compléter cette famille en une famille libre de $\mathbb{R}^n$ par l'adjonction de $n-p$ vecteurs :

$$g_1, \dots, g_{n-p}.$$

Afin de simplifier la rédaction, nous supposerons que les p vecteurs $f_1, \dots, f_p$ forment une sous-famille libre de la famille $\{f_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$.

Définissons l'endomorphisme v par :

$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad v(e_i) = f_i \ ; \quad \forall i \in [\![p+1, n]\!] \quad v(e_i) = g_{i-p}.$

L'endomorphisme $u + v$ est un isomorphisme. Notons X la matrice de v dans la base canonique.

Alors :

$$\mathrm{Det}(u+v) = \mathrm{Det}(A+X) \neq 0.$$

Mais $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(X) = 0$.

Nous en déduisons que la matrice A de l'énoncé est nulle.

7 **a)** On sait que, pour tout x dans $]-1, 1[$:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} x^n.$$

b) Nous cherchons N telle que $N^2 = \mathrm{I} + (M - \mathrm{I})$.

Or la matrice M donnée vérifie $(M - \mathrm{I})^3 = 0$.

La matrice N définie par :

$$N = \mathrm{I} + \frac{1}{2}(M - \mathrm{I}) - \frac{1}{8}(M - \mathrm{I})^2$$

convient.

8 ▬ **a)** Vérifier que l'application donnée, ϕ, est un endomorphisme de $\mathcal{A}$.

De plus, $X \in \operatorname{Ker} \phi \iff MX = 0$.

M est régulière. ϕ est un automorphisme d'espace vectoriel de $\mathcal{A}$.

b) Puisque l'application ϕ est bijective, il existe M' dans A telle que $MM' = \mathrm{I}_n$.

Composons à droite avec M^{-1}. Nous obtenons :

$$M' = M^{-1}.$$

c) Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de la forme :

$$M = \begin{bmatrix} a & b & b & b & c \\ b & a & b & c & b \\ b & b & x & b & b \\ b & c & b & a & b \\ c & b & b & b & a \end{bmatrix},$$

où a, b et c sont des réels quelconques et x un réel à préciser.

Nous remarquons que, pour $x = a + c - b$, M peut s'écrire comme combinaison linéaire des matrices I_5 et :

$$U = (u_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,5]\!]^2} \text{ avec } u_{i,j} = 1;$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ & & & 1 & 0 \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{A}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_5(\mathbb{K})$ engendré par U, H et I_5.

De plus, $\mathcal{A}$ est stable dans $\mathcal{M}_5(\mathbb{K})$ pour la multiplication, car :

$$UH = HU = U\ ;\ U^2 = 5U\ ;\ H^2 = \mathrm{I}_5.$$

L'élément unité I_5 est dans $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ est donc une sous-algèbre de $\mathcal{M}_5(\mathbb{K})$.

Si la matrice donnée, N, est inversible, son inverse s'écrit sous la forme :

$$\alpha U + \beta H + \gamma \mathrm{I}_5.$$

Terminer les calculs et montrer que :

$$N^{-1} = \frac{1}{50}\begin{bmatrix} 29 & -1 & -1 & -1 & -21 \\ -1 & 29 & -1 & -21 & -1 \\ -1 & -1 & 9 & -1 & -1 \\ -1 & -21 & -1 & 29 & -1 \\ -21 & -1 & -1 & -1 & 29 \end{bmatrix}.$$

Et *Maple* confirme.

Avec Maple

```
> with(linalg) :
> N:=matrix(5,5,[4,1,1,1,3,1,4,1,
  3,1,1,1,6,1,1,1,3,1,4,1,3,1,1,1,4]);
```

$$N := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> inverse(N);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{29}{50} & \frac{-1}{50} & \frac{-1}{50} & \frac{-1}{50} & \frac{-21}{50} \\ \frac{-1}{50} & \frac{29}{50} & \frac{-1}{50} & \frac{-21}{50} & \frac{-1}{50} \\ \frac{-1}{50} & \frac{-1}{50} & \frac{9}{50} & \frac{-1}{50} & \frac{-1}{50} \\ \frac{-1}{50} & \frac{-21}{50} & \frac{-1}{50} & \frac{29}{50} & \frac{-1}{50} \\ \frac{-21}{50} & \frac{-1}{50} & \frac{-1}{50} & \frac{-1}{50} & \frac{29}{50} \end{bmatrix}$$

d) Cette structure permet de dire que $\mathcal{A}$ est stable pour la multiplication.

Elle intervient donc dans la question **2)**.

2 Hyperplans et formes linéaires

1 ▬ Considérons l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\phi(P) = \int_{-1}^{1} P.$$

ϕ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Son noyau, E, est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$. Sa dimension est n.

De plus :

$$\phi(X^{2k}) = \frac{2}{2k+1} \quad \text{et} \quad \phi(X^{2k+1}) = 0.$$

Une base de E est :

$$\left\{X^{2k+1} ; 0 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}\right\} \bigcup \left\{X^{2k} - \frac{1}{2k+1} ; 1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2}\right\}.$$

2 Si X est une matrice solution, appliquons ϕ aux deux membres de l'équation :

$$\phi(X)(1+\phi(A)) = \phi(B).$$

Plusieurs cas peuvent alors être distingués.

• $\phi(A) = -1$ et $\phi(B) \neq 0$.

L'équation n'admet pas de solution.

• $\phi(A) \neq -1$ et $\phi(B) = 0$.

Alors $\phi(X) = 0$ et l'équation donne $X = B$.

Vérifier cette solution.

• $\phi(A) \neq -1$ et $\phi(B) \neq 0$.

Alors :

$$\phi(X) = \frac{\phi(B)}{1+\phi(A)}.$$

Nous obtenons alors :

$$X = B - \frac{\phi(B)}{1+\phi(A)}A.$$

Vérifier cette solution.

• $\phi(A) = -1$ et $\phi(B) = 0$.

Le cas non trivial !

Nous savons que :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \text{Ker } \phi \oplus \mathbb{R}A.$$

Cherchons la matrice X sous la forme : $X = C + \lambda A$, où C est dans Ker ϕ.

L'équation équivaut à $X - \lambda A = B$.

Il existe donc une infinité de solutions :

$$X = B + \lambda A,$$

λ est un réel quelconque.

3 Une équation matricielle

Soit (X, Y) un couple solution.

La première équation donne $\text{tr}(X)\text{tr}(Y) = 0$.

Si $\text{tr}(X) = \text{tr}(Y) = 0$, la première équation n'est pas vérifiée.

Si $\text{tr}(X) = 0$ et $\text{tr}(Y) \neq 0$, alors :

$$X = \frac{1}{\text{tr}(Y)}\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est inversible.

Puis :

$$Y = X^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \text{tr}(Y)\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{\text{tr}(Y)}{12}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \frac{\text{tr}(Y)}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vérifier que toutes les matrices X et Y de la forme :

$$X = \frac{1}{a}\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \frac{a}{4}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

avec a réel non nul, vérifient le système.

Si $\text{tr}(X) \neq 0$ et $\text{tr}(Y) = 0$, montrer de même que les matrices solutions sont les matrices de la forme :

$$X = \frac{a}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \; ; \; Y = \frac{1}{a}\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix},$$

où a est un réel non nul.

4 Matrices de trace nulle

1 L'énoncé nous indique que, pour tout x nul ou non, il existe un scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.

Soit x et y deux vecteurs tels que la famille $\{x, y\}$ soit liée et x et y non nuls.

Alors : $\quad \exists \alpha \in \mathbb{K} \quad y = \alpha x.$

Puis : $\qquad f(y) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha \lambda_x x = \lambda_{\alpha x} \alpha x.$

Nous en déduisons $\lambda_x = \lambda_{\alpha x}$.

Supposons ensuite que $\dim E \geqslant 1$ et notons x et y deux vecteurs linéairement indépendants de E.

Alors : $f(x+y) = \lambda_x x + \lambda_y y = \lambda_{x+y}(x+y).$

Puisque la famille $\{x, y\}$ est libre, nous en déduisons :

$$\lambda_x = \lambda_y = \lambda_{x+y}.$$

Il existe donc un scalaire λ tel que, pour tout x de E :

$$f(x) = \lambda x.$$

f est une homothétie vectorielle.

2 Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ canoniquement associé à M.

Puisque la matrice M est non scalaire, la question précédente permet d'affirmer qu'il existe un vecteur x de $\mathbb{K}^2$ tel que la famille $\{x, f(x)\}$ est libre. Cette famille constitue une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^2$ et, dans cette base, la matrice de f a la forme requise.

3 Démonstration par récurrence sur l'ordre n de la matrice.

Le cas $n = 2$ découle de la question précédente si nous précisons que la trace de matrices semblables est identique et nous en déduisons $\beta = 0$.

Supposons que, pour un certain $n \geqslant 2$, toute matrice carrée non scalaire, d'ordre n, de trace nulle soit semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont nuls.

Considérons une matrice M, d'ordre $n+1$, non scalaire, de trace nulle. Un raisonnement semblable à celui de la question **2)** permet d'affirmer que M est semblable à une matrice A_{n+1}, dont la première colonne est nulle à l'exception du second terme égal à 1. Notons alors A_n la matrice obtenue en supprimant la première ligne et la première colonne de A_{n+1}.

La matrice A_n a une trace nulle.

Si la matrice A_n est scalaire, elle est nulle et nous avons terminé.

Si la matrice A_n n'est pas scalaire, l'hypothèse de récurrence s'applique. Il existe une matrice carrée inversible P d'ordre n et une matrice N dont les éléments diagonaux sont nuls tels que :

$$N = P^{-1} A_n P.$$

Notons P_1 la matrice $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & & & \\ \vdots & & P & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$, écrite en blocs.

Vérifier que cette matrice est inversible et que :

$$P_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & & & \\ \vdots & & P^{-1} & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}.$$

Vérifier également que la matrice $P_1^{-1} A_{n+1} P_1$ est de la forme :

$$\begin{bmatrix} 0 & * & \cdots & \cdots \\ * & & & \\ \vdots & & N & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}.$$

Cette matrice est semblable à la matrice M et ses éléments diagonaux sont nuls.

5 Un calcul d'inverse

Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice A.

Il est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = nx_1 + (n-1)x_2 + \cdots + x_n \\ y_2 = (n-1)x_1 + (n-1)x_2 + \cdots + x_n \\ \qquad \vdots \\ y_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \end{array} \right. . \quad \textbf{(1)}$$

Cherchons l'endomorphisme réciproque, s'il existe.

$$\textbf{(1)} \iff \left\{ \begin{array}{rl} y_1 - y_2 &= x_1 \\ y_2 - y_3 &= x_1 + x_2 \\ &\vdots \\ y_{n-1} - y_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \\ y_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \end{array} \right. .$$

Ce système équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{rl} x_1 &= y_1 - y_2 \\ x_2 &= 2y_2 - y_1 - y_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= 2y_{n-1} - y_n - y_{n-2} \\ x_n &= 2y_n - y_{n-1} \end{array} \right. .$$

La matrice A est inversible et :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ & & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6 Morphismes multiplicatifs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$

1 Soit f une application non constante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout couple (A, B) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on ait :

$$f(A.B) = f(A).f(B).$$

En prenant $A = B = I_n$, on obtient :

$$f(I_n.I_n) = f(I_n)\,f(I_n) \Longrightarrow f(I_n) = f(I_n)^2$$
$$\Longrightarrow f(I_n) = 0 \text{ ou } 1.$$

Si $f(I_n) = 0$:

$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad f(M) = f(M.I_n) = f(M)f(I_n) = 0.$

L'application f est donc constante et nulle. Ainsi $f(I_n) = 1$.

De même, comme $f(0) = f(0.0) = f(0)^2$, on en déduit que $f(0) = 0$ ou 1.

Pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$f(0) = f(0.M) = f(0)f(M).$$

Si $f(0) = 1$, pour tout M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on aurait $f(M) = 1$. L'application f serait constante.

Conclusion : $f(I_n) = 1$ et $f(0) = 0$.

2 Si A est inversible on a $AA^{-1} = I_n$.

D'où $f(A)f(A^{-1}) = f(I_n) = 1$ ce qui implique que $f(A)$ ne peut être nul. De plus :

$$f(A^{-1}) = \frac{1}{f(A)}.$$

Si A et B sont deux matrices semblables. Il existe P une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On a $f(B) = f(P^{-1})f(A)f(P)$. Ainsi deux matrices semblables ont même image par f.

3 Soit A une matrice de rang $0 < r < n$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Prenons un vecteur f_1 non nul dans Ker u et une base $(u(f_2), \dots, u(f_{r+1}))$ de Im (u).

Alors la famille $(f_1, f_2, \dots, f_{r+1})$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$ que nous complétons en une base $(f_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de $\mathbb{R}^n$.

Notons, pour tout i de $[\![2, r+1]\!]$, $g_i = u(f_i)$ et complétons en une base $(g_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de $\mathbb{R}^n$.

Si nous appelons P la matrice de passage de la base canonique $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ à la base $(g_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, et Q la matrice de passage de la base canonique $(f_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ à la base $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$:

$$A = P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix} Q = PNQ.$$

4 Il reste à prouver que, si une matrice A n'est pas inversible, on a $f(A) = 0$.

On note r le rang de A (r est donc strictement plus petit que n).

Utilisons la question **3)**.

Il existe P et Q deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, inversibles telles que $A = P.N.Q$.

N est une matrice nilpotente.

Il existe k un entier naturel non nul tel que $N^k = 0$. Ainsi $f(N^k) = 0$.

L'application f est multiplicative, donc $f(N)^k = 0$, c'est-à-dire $f(N) = 0$. Or :

$$A = PNQ \Longrightarrow f(A) = f(P)\,f(N)\,f(Q)$$

on obtient $f(A) = 0$.

On vient de caractériser les matrices inversibles :

$$A \text{ inversible} \iff f(A) \neq 0.$$

7 Composés d'endomorphismes

1 Supposons les conditions **(i)** et **(ii)** vérifiées.

$$f \circ g \circ f = f \implies \operatorname{rg} f \leqslant \operatorname{rg} g.$$

De même :

$$g \circ f \circ g = g \implies \operatorname{rg} g \leqslant \operatorname{rg} f.$$

Finalement, $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} g$.

Supposons les conditions **(i)** et **(iii)** vérifiées.

$$f \circ g \circ f = f \implies \operatorname{rg} f \leqslant \operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \operatorname{rg} g.$$

Donc :

$$\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} g.$$

Puis :

$$\operatorname{Im}\ (g \circ f) = \operatorname{Im}\ g.$$

Montrons qu'il est possible de définir un endomorphisme h de E tel que :

$$g \circ f \circ h = g.$$

Plus simplement, soit a et b deux endomorphismes de E tels que Im a = Im b. Nous allons construire un endomorphisme c de E tel que $a \circ c = b$.

Soit $f_1, \dots, f_r$ une base de Im a = Im b.

Il existe $e_1, \dots, e_r$ et $e'_1, \dots, e'_r$ dans E tels que :

$$\forall i \in [\![1, r]\!] \quad a(e_i) = f_i \text{ et } b(e'_i) = f_i.$$

Les familles $e_1, \dots, e_r$ et $e'_1, \dots, e'_r$ sont des familles libres de E.

La famille $e_1, \dots, e_r$ peut être complétée en une base de E, $(e_1, \dots, e_n)$, par l'adjonction de vecteurs de Ker a.

La famille $e'_1, \dots, e'_r$ peut être complétée en une base de E, $(e'_1, \dots, e'_n)$, par l'adjonction de vecteurs de Ker b.

Il suffit de définir c en posant :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad c(e'_i) = e_i.$$

L'endomorphisme c vérifie :

$$a \circ c = b.$$

Soit alors h un endomorphisme de E tel que :

$$g \circ f \circ h = g.$$

Nous avons :

$$g \circ f \circ g = g \circ f \circ (g \circ f \circ h) = g \circ f \circ h = g.$$

De même, **(ii)** et **(iii)** entraînent **(i)**.

2 Si $f = 0$ ($g = 0$) ou si f est un automorphisme de E ($g = f^{-1}$), l'existence de g est immédiate.

Supposons ensuite que $\operatorname{rg} f = r < n$.

Soit $f_1, \dots, f_r$ une base de Im f.

Il existe $e_1, \ldots, e_r$ dans E tels que :

$$\forall i \in [\![1, r]\!] \quad f(e_i) = f_i.$$

La famille $e_1, \ldots, e_r$ est une famille libre de E.

La famille $f_1, \ldots, f_r$ peut être complétée en une base de E, $(f_1, \ldots, f_n)$.

Posons :

$$\forall i \in [\![1, r]\!] \quad g(f_i) = e_i \quad \text{et} \quad \forall i > r \quad g(f_i) = 0.$$

L'endomorphisme de E ainsi défini vérifie les conditions **(i)** et **(iii)**.

On peut aussi utiliser les projecteurs pour traiter cette question.

3 S'il existe x dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ x \circ g = h$, alors :

$$\begin{aligned} f \circ f_1 \circ h \circ g_1 \circ g &= f \circ f_1 \circ (f \circ x \circ g) \circ g_1 \circ g \\ &= (f \circ f_1 \circ f) \circ x \circ (g \circ g_1 \circ g) \\ &= f \circ x \circ g = h. \end{aligned}$$

Réciproquement, si $f \circ f_1 \circ h \circ g_1 \circ g = h$, il suffit de prendre $x = f_1 \circ h \circ g_1$.

8 Normes de formes linéaires

1 Nous obtenons :

$$L(P) = 2 \sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \frac{a_{2k}}{2k+1}.$$

La forme linéaire L est non nulle, car $L(1) = 2$.

Le noyau de L est un hyperplan de E, donc :

$$\dim(\operatorname{Ker}(L)) = n.$$

Pour i dans $[\![1, n]\!]$, notons R_i la fonction polynomiale définie par :

$$R_i(x) = x^i - L(x^i).$$

Pout tout i dans $[\![1, n]\!]$, le degré de R_i est i. La famille $(R_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est donc libre.

Elle contient n éléments dont l'image par L est nulle. C'est une base de Ker (L).

2 L'espace vectoriel E est de dimension finie.

La forme linéaire L est donc lipschitzienne.

$$\exists A > 0 \quad \forall P \in E \quad |L(P)| \leqslant A N(P).$$

L'ensemble $\{|L(P)|\,;\, P \in E, N(P) \leqslant 1\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, majorée par A. Elle admet une borne supérieure.

Plus précisément, l'ensemble $\{P \in E;\, N(P) \leqslant 1\}$ est une partie compacte de l'espace vectoriel E de dimension finie. L'application $(P \longmapsto |L(P)|)$ est continue sur E en tant que composée d'applications continues. Nous savons que sa restriction au compact $\{P \in E;\, N(P) \leqslant 1\}$ est bornée et atteint ses bornes.

Soit Q un élément de E tel que :

$$N(Q) \leqslant 1 \text{ et } N(L) = |L(Q)|.$$

Q n'est pas nul car $L(0) = 0$.

Si $N(Q) < 1$, alors, en posant $Q_1 = \dfrac{1}{N(Q)} Q$, on a :

$$N(Q_1) = 1 \quad \text{et} \quad |L(Q_1)| = \frac{1}{N(Q)} |L(Q)| > N(L).$$

Ceci est impossible.

3 Soit $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ dans E.

Alors, pour tout k dans $[\![0, n]\!]$:

$$|a_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2} = N_2(P).$$

D'où :

$$N_\infty(P) \leqslant N_2(P).$$

De plus, $a_k^2 \leqslant N_\infty(P)^2$. D'où :

$$N_2(P) \leqslant \sqrt{n+1} N_\infty(P).$$

On retrouve l'équivalence des normes N_2 et N_∞, car la dimension de E est finie.

4 **a)** Pour une fonction polynomiale $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ de E, nous savons que :

$$|L(P)| = 2 \left| \sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \frac{a_{2k}}{2k+1} \right| \leqslant 2 \left(\sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \frac{1}{2k+1} \right) N_\infty(P).$$

La question **2) b)** permet d'en déduire que :

$$K = 2 \left(\sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \frac{1}{2k+1} \right) \geqslant N_\infty(L).$$

Il suffit ensuite de constater que cette inégalité devient une inégalité si nous choisissons :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} x^{2k}.$$

De plus, $N_\infty(P) = 1$.

Donc la fonction polynomiale $Q_\infty(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} x^{2k}$ convient.

b) Où nous retrouvons Cauchy et Schwarz qui sont au produit scalaire ce que Roux et Combalusier sont aux ascenseurs.

Pour une fonction polynomiale $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ de E, nous savons que :

$$|L(P)| = 2\left|\sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \frac{a_{2k}}{2k+1}\right|$$

$$\leqslant 2\sqrt{\sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} a_{2k}^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \frac{1}{(2k+1)^2}},$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{1+\mathrm{E}(n/2)}$ euclidien.

De plus :

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} a_{2k}^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2} = N_2(P).$$

Donc :

$$\forall P \in E \quad |L(P)| \leqslant 2\sqrt{\sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \frac{1}{(2k+1)^2}}N_2(P). \qquad \textbf{(1)}$$

D'après la question **2) b)** :

$$K = 2\sqrt{\sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \frac{1}{(2k+1)^2}} \geqslant N_2(L).$$

Cherchons les polynômes tels que l'inégalité **(1)** soit une égalité.

Il est alors nécessaire que :

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} a_{2k}^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} a_k^2} = N_2(P).$$

D'où :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} a_{2k} x^{2k}.$$

Il faut également que l'inégalité de Cauchy-Schwarz soit une égalité.

Cette condition impose :

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$

$$(a_0, a_2, \ldots, a_{2\mathrm{E}(n/2)}) = \lambda\left(\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{2\mathrm{E}(n/2)+1}\right).$$

La fonction polynomiale Q_2 définie par :

$$Q_2(x) = \lambda_2 \sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \frac{x^{2k}}{2k+1},$$

avec $\lambda_2 = \dfrac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^{\mathrm{E}(n/2)} \frac{1}{(2k+1)^2}}}$, convient.

Elle vérifie en effet :

$$N_2(Q_2) = 1 \quad \text{et} \quad |L(Q_2)| = K = N_2(L).$$

9 Matrices et déterminants par blocs

1 ▬ a) La matrice $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\mathrm{I}_n & -\frac{1}{2}\mathrm{iI}_n \\ \frac{1}{2}\mathrm{I}_n & \frac{1}{2}\mathrm{iI}_n \end{bmatrix}$ vérifie $PQ = \mathrm{I}_n$.

La matrice P est inversible et son inverse est Q.

b) $P^{-1}MP = \begin{bmatrix} A+\mathrm{i}B & 0 \\ 0 & A-\mathrm{i}B \end{bmatrix}$.

c) $\mathrm{Det}(P^{-1}MP) = \mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} A+\mathrm{i}B & 0 \\ 0 & A-\mathrm{i}B \end{bmatrix}$.

La matrice $\begin{bmatrix} A+\mathrm{i}B & 0 \\ 0 & A-\mathrm{i}B \end{bmatrix}$ est une matrice diagonale par blocs.

$\mathrm{Det}(M) = \mathrm{Det}(A+\mathrm{i}B)\mathrm{Det}(A-\mathrm{i}B) = |\mathrm{Det}(A+\mathrm{i}B)|^2 \geqslant 0$.

2 ▬ a) On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ -CA^{-1} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}$.

Le déterminant de la matrice P est 1.

On a donc $\mathrm{Det}(PM) = \mathrm{Det}(M)$.

Puisque $PM = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$, on a :

$$\mathrm{Det}M = \mathrm{Det}(PM) = \mathrm{Det}A\,\mathrm{Det}(D - CA^{-1}B).$$

b) Si $\mathrm{Det}A = \mathrm{Det}B = 0$, on a évidemment $\mathrm{Det}N = 0$.

Le rang des vecteurs colonnes d'une matrice est invariant par toute permutation des colonnes. Le rang de $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ est égal au rang de $\begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix}$.

On peut donc supposer, sans nuire à la généralité, que $\mathrm{Det}A \neq 0$.

Si on applique les résultats de la question **1)**, on a :

$$PM = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

La matrice P est inversible, donc $\mathrm{rg}(PM) = \mathrm{rg}(M)$.

La matrice A est une matrice $n \times n$ inversible, extraite de M. Comme le rang de PM est n, toute matrice extraite d'ordre $n+1 \times n+1$ est non inversible. On en déduit que la matrice $D - CA^{-1}B$ est nulle.

Ainsi on a :

$$\mathrm{Det}D = \mathrm{Det}(CA^{-1}B).$$

En effectuant le produit par $\mathrm{Det}A$, on obtient :

$$\mathrm{Det}A\,\mathrm{Det}D = \mathrm{Det}C\,\mathrm{Det}B,$$

c'est-à-dire que $\mathrm{Det}N = 0$.

10 Polynôme et déterminant

L'application δ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \quad \delta(P) = P(X+1)$$

est un endomorphisme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.

La base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est $(1, X, X^2, \dots, X^{n-1})$.

On a $\qquad \delta(X^p) = (X+1)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} X^k.$

Dans cette base, la matrice de δ est triangulaire avec des coefficients diagonaux égaux à 1.

On en déduit que la matrice de $\mathrm{Id} - \delta$ est triangulaire avec une diagonale nulle.

Elle est nilpotente, d'indice n au maximum :

$$(\mathrm{Id} - \delta)^n = 0.$$

D'où :

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \quad (\mathrm{Id} - \delta)^n(P) = 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \quad \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} \delta^p(P) = 0.$$

On a donc :

$$\forall P \in \mathbb{K}_{n-1}[X] \quad \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} P(X+p) = 0.$$

Pour tout entier k de $[\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{n}{p} (p+1)^k = 0.$$

On note, pour j compris entre 1 et $n+1$, C_j la colonne d'indice j de D_{n+1}.

En effectuant l'opération $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j-1} \binom{n}{j-1} C_j$, on annule les coefficients de la colonne $n+1$ situés entre les lignes 2 et $n+1$.

D'où :

$$D_{n+1} = (-1)^n \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & & x^{n-1} & (1-x)^n \\ 1 & 1 & \cdots & & & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & & n^{n-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Le développement de ce déterminant par rapport à la dernière colonne donne :

$$D_{n+1} = (1-x)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \\ 1 & 2 & \cdots & \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & 2^{n-1} & & n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Ce dernier déterminant est un déterminant de Vandermonde, dont la valeur est :

$$\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i) = \prod_{k=1}^{n-1} k!.$$

Donc :

$$D_{n+1} = (1-x)^n \prod_{k=1}^{n-1} k!.$$

11 Déterminant, rang et inverse de matrice

1 À partir de la ligne n jusque la ligne 2, on retranche à chaque ligne, la ligne précédente. Ainsi le déterminant de A_n s'écrira :

$$\mathrm{Det}A_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & & a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2 - a_1 & \cdots & a_2 - a_1 \\ & & & & \\ 0 & \cdots & & a_{n-1} - a_{n-2} & a_{n-1} - a_{n-2} \\ 0 & \cdots & & 0 & a_n - a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Avec les conventions d'écriture, on a donc :

$$\mathrm{Det}A_n = b_1 b_2 .. b_n.$$

2 Le rang d'une matrice est également invariant si on retranche une ligne à une autre ligne de cette matrice.

Le rang de A_n est le rang de :

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_1 & \cdots & & b_1 \\ 0 & b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ & & & & \\ 0 & \cdots & & b_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & b_n \end{pmatrix}.$$

Si un b_k est nul, la ligne d'indice k est nulle. De plus les lignes sont « étagées ». Donc, le rang de A_n est le nombre d'éléments non nuls du n-uplet $(b_1, .., b_n)$.

3 Supposons tous les b_i non nuls. La matrice A_n est inversible.

Nous allons déterminer son inverse par le procédé de Gauss en travaillant sur les lignes uniquement.

Les opérations effectuées sur la matrice A_n dans la question **2)** transforment la matrice I_n en J_n :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 & 0 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Effectuons ensuite les opérations suivantes simultanément sur A_n et J_n. On soustrait à la ligne 1 la ligne 2 multipliée par $\dfrac{b_1}{b_2}$, à la ligne 2 la ligne 3 multipliée par $\dfrac{b_2}{b_3}$ et de proche en proche jusqu'à la ligne $n-1$.

La matrice A_n et la matrice I_n sont devenues respectivement :

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & \cdots & & b_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1+\dfrac{b_1}{b_2} & -\dfrac{b_1}{b_2} & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1+\dfrac{b_2}{b_3} & -\dfrac{b_2}{b_3} & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & & \\ \vdots & \cdots & & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il suffit ensuite de multiplier, pour tout i de $[\![1,n]\!]$, la ligne i par $\dfrac{1}{b_i}$.

Nous obtenons :

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2} & -\dfrac{1}{b_2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\dfrac{1}{b_2} & \dfrac{1}{b_2}+\dfrac{1}{b_3} & -\dfrac{1}{b_3} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -\dfrac{1}{b_n} & \dfrac{1}{b_n} \end{pmatrix}.$$

12 Comatrice

1 a) Utilisons la relation :

$$^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}A.A = (\mathrm{Det}A)\mathrm{I}_n.$$

Elle entraîne que $^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}A = A^{-1}$ si, et seulement si : $\mathrm{Det}A = 1$.

b) Avec la même relation, nous obtenons que : $^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}A = A$ si, et seulement si, $A^2 = \mathrm{Det}(A)\mathrm{I}_n$.

Prenons les déterminants des deux membres.

$$(\mathrm{Det}A)^2 = (\mathrm{Det}A)^n .$$

D'où :

$$(\mathrm{Det}(A))^{n-2} = 1.$$

Si n est impair, nous obtenons la condition nécessaire $\mathrm{Det}A = 1$, puis $A^2 = \mathrm{I}_n$.

Cette condition est aussi suffisante.

Si n est pair, nous obtenons $\mathrm{Det}(A) = \pm 1 = \varepsilon$, puis $A^2 = \varepsilon\mathrm{I}_n$.

Cette condition est aussi suffisante.

2 Supposons A inversible et A^{-1} dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Alors :

$$\mathrm{Det}(A) \in \mathbb{Z} \text{ et } \mathrm{Det}(A^{-1}) \in \mathbb{Z}.$$

Or, $\mathrm{Det}(A)\mathrm{Det}(A^{-1}) = 1$.

Nous obtenons la condition nécessaire : $\mathrm{Det}(A) = \pm 1$.

Réciproquement, si A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $\mathrm{Det}(A) = \pm 1$, alors A est inversible.

De plus, $A^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{Det}(A)}{}^{\mathrm{t}}\mathrm{Com}(A)$, où $\mathrm{Com}(A)$ désigne la comatrice de A.

Puisque A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Com}(A)$ l'est aussi.

Donc A^{-1} appartient également à $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

Algorithmes

1 Les nombres de Stirling

Partie 1

1 a) Les familles $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{F}_n$ sont des familles de $n+1$ polynômes de degrés échelonnés de 0 à n.

Chacune forme donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

La linéarité de Δ est immédiate.

b) Si P est un polynôme constant, $\Delta(P)$ est nul. Sinon, le degré de $\Delta(P)$ est le degré de P diminué de 1. Nous en déduisons que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ.

c) La question précédente permet d'affirmer que $\Delta_n^{n+1} = 0$.

Soit m un entier strictement positif.

Le coefficient dominant de $\Delta(X^m)$ est mX^{m-1}.

Montrer par récurrence que celui de $\Delta^m(X^m)$ est $m!$.

L'endomorphisme Δ de $\mathbb{R}[X]$ n'est pas nilpotent.

d) Calculons :

$$\Delta(X^m) = mX^{m-1} + \sum_{i=2}^{m} \binom{m}{i} X^{m-i}.$$

Nous en déduisons :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & \binom{m}{m} & \cdots & \binom{n}{n} \\ 0 & 0 & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \binom{m}{2} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \binom{m}{1} & & \vdots \\ \vdots & & & & 0 & & \binom{n}{2} \\ \vdots & & & & & \ddots & \binom{n}{1} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

2 Calculons, pour tout j dans $[\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned} &\Delta_n(E_j) \\ &= \frac{1}{j!}[(X+1)X\cdots(X-j+2) - X(X-1)\cdots(X-j+1)] \\ &= E_{j-1}. \end{aligned}$$

La matrice B_n est donc :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

En déduire, en considérant $\Delta^p(E_n)$, pour p entier positif, que l'indice de nilpotence de B_n est $n+1$.

3 **a)** Écrivons :

$$\begin{aligned} F_{k+1} &= X(X-1)\cdots(X-k+1)(X-k) \\ &= F_k(X-k) = XF_k - kF_k. \end{aligned}$$

$s(i, k+1)$ est le coefficient de X^i dans F_{k+1}. D'où :

$$s(i, k+1) = s(i-1, k) - ks(i, k).$$

De plus, $s(k+1, k+1) = s(k, k) = 1$.

Et, pour tout $k \geqslant 1$ et tout $i > k$:

$$s(0, k) = 0 \ \text{ et } \ s(i, k) = 0.$$

b) Fixons k dans $[\![0, n-1]\!]$. Nous avons :

$$X^k = \sum_{i=0}^{n} \sigma(i, k) F_i.$$

En effet, si $k = 0$, $\sigma(0, 0) = 1$ et, pour tout $i > 0$:

$$\sigma(i, 0) = 0.$$

Puis, en multipliant par X :

$$\begin{aligned} X^{k+1} &= \sum_{i=0}^{n} \sigma(i, k) X F_i = \sum_{i=0}^{n} \sigma(i, k)(F_{i+1} + iF_i) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (\sigma(j-1, k) + j\sigma(j, k)) F_j. \end{aligned}$$

Le terme $\sigma(n, k)$ est nul, car X^k est de degré au plus $n-1$.

Nous en déduisons :

$$\sigma(i, k+1) = \sigma(i-1, k) + i\sigma(i, k).$$

Ici également, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\sigma(0, k) = 0 \ \text{ et } \ \sigma(k, k) = 1.$$

c) Nous obtenons :

$$s(5, 6) = -15 \ \text{ et } \ \sigma(5, 6) = 15.$$

Avec Maple

```
> with(linalg) :
> s:=proc(k)
local i;
A:=matrix(k+1,k+1,0);
for i from 1 to k+1 do A[i,i]:=1 od :
for i from 2 to k+1 do
   for j from i+1 to k+1 do
      A[i,j]:=A[i-1,j-1]-(j-2)*A[i,j-1] od:
od:
print(A);
end;
>
Warning, 'A' is implicitly declared local
Warning, 'j' is implicitly declared local
```

$s :=$ **proc**(k)
local$i$, A, j;
  $A :=$ matrix$(k+1, k+1, 0)$;
  for i **to** $k+1$ **do** $A_{i,i} := 1$ **od**;
  for i **from** 2 **to** $k+1$ **do**
    for j **from** $i+1$ **to** $k+1$ **do**
    $A_{i,j} := A_{i-1,j-1} - (j-2) \times A_{i,j-1}$ **od**
  od;
  print(A)
end

```
> s(6);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -6 & 24 & -120 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 11 & -50 & 274 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 & 35 & -225 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -10 & 85 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec Maple

```
> with(linalg):
> sigma:=proc(k)
local i;
A:=matrix(k+1,k+1,0);
for i from 1 to k+1 do A[i,i]:=1 od:
for i from 2 to k+1 do
   for j from i+1 to k+1 do
      A[i,j]:=A[i-1,j-1]+(i-
1)*A[i,j-1] od: od:
print(A);
end;
>
Warning, `A` is implicitly declared local
Warning, `j` is implicitly declared local
```

$\sigma :=$ **proc**(k)
local $i,\ A,\ j$;
  $A := \mathrm{matrix}(k+1,\ k+1,\ 0)$;
  for i **to** $k+1$ **do** $A_{i,i} := 1$ **od**;
  for i **from** 2 **to** $k+1$ **do**
    for j **from** $i+1$ **to** $k+1$ **do**
    $A_{i,j} := A_{i-1,j-1} + (i-1) \times A_{i,j-1}$ **od**
  od;
  print(A)
end

```
> sigma(6);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 7 & 15 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & 25 & 90 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 & 65 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 Puisque $F_k = k!E_k$, les matrices P_n sont diagonales.

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0! & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1! & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 5! \end{pmatrix};$$

$$P_5^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{0!} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{1!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{5!} \end{pmatrix}.$$

Partie 2

5 Afin de déterminer la base duale de $\mathcal{B}_{n,\alpha}$, notons $P = \sum_{i=0}^{n} a_i (X-\alpha)^i$ un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout i de $[\![0,n]\!]$, la forme linéaire α_i^* sur $\mathbb{R}_n[X]$ est alors définie par :

$$\alpha_i^*(P) = a_i = \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}.$$

6 **a)** Nous avons établi dans la question **2)** que :

$$\Delta(E_0) = 0\,;\ \Delta(E_i) = E_{i-1} \quad \text{si} \quad i > 0.$$

En déduire que :

$$\Delta^k(E_i) = E_{i-k} \text{ si } i \geqslant k \quad \text{et} \quad \Delta^k(E_i) = 0 \text{ sinon.}$$

Puis :

$$\Delta^k(E_i)(0) = 1 \text{ si } i = k \quad \text{et} \quad \Delta^k(E_i)(0) = 0 \text{ sinon.}$$

b) Le calcul précédent permet de remarquer que :

$$\forall (i,k) \in [\![0,n]\!]^2 \qquad \Delta_n^k(E_i)(0) = \delta_{i,k}.$$

Or, pour k dans $[\![0,n]\!]$, les $n+1$ applications $(P \longmapsto \Delta_n^k(P)(0))$ sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}_n[X]$. Puisque $\Delta_n^k(E_i)(0) = \delta_{i,k}$, ces applications constituent la base duale de la base $\mathcal{E}_n$. Par conséquent :

$$P = \sum_{k=0}^{n} E_k^*(P)E_k = \sum_{k=0}^{n} \Delta_n^k(P)(0)E_k.$$

c) Soit Q un polynôme de degré q prenant aux points $m, \ldots, m+q$ ($m \in \mathbb{Z}$) des valeurs entières.

Si $q = 0$, le résultat est immédiat. Supposons $q > 0$.

Notons P le polynôme défini par $P(X) = Q(X+m)$. Le polynôme P est de degré q et prend aux points $0, \ldots, q$ des valeurs entières. Montrons que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Nous en déduirons que le polynôme Q possède la même propriété.

D'après la question précédente :

$$P = \sum_{k=0}^{q} \Delta_q^k(P)(0)E_k.$$

Remarquons que $\Delta_q(P)(0) = P(1) - P(0) \in \mathbb{Z}$.

Montrer par récurrence que, pour tout j dans $[\![0,q]\!]$:

$$\Delta_q^j(P)(0) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^i P(i) \in \mathbb{Z}.$$

Puis, pour tout entier s :

$$P(s) = \sum_{k=0}^{q} \Delta_q^k(P)(0)E_k(s).$$

Or $E_k(s) = \dfrac{1}{k!} s(s-1)\cdots(s-k+1)$.

Trois cas peuvent alors être distingués.

• Si $s > k-1$:

$$E_k(s) = \binom{s}{k} \in \mathbb{N}.$$

• Si $s-k+1 \leqslant 0 \leqslant s$:

$$E_k(s) = 0.$$

• Si $s < 0$:

$$E_k(s) = (-1)^k \binom{-s+k-1}{k} \in \mathbb{Z}.$$

Dans tous les cas, $P(s)$ est un entier relatif.

7 ▬ a) Les $n+1$ réels $0, \dots, n$ sont distincts. Nous savons (polynômes de Lagrange) qu'il existe, pour tout j de $[\![0, n]\!]$, un unique polynôme L_j tel que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!] \quad L_j(i) = \delta_{i,j}.$$

De plus, $L_j(X) = \displaystyle\prod_{i \in [\![0,n]\!], i \neq j} \frac{(X-i)}{(j-i)}$.

De plus, ces polynômes forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Nous en déduisons que $\mathcal{L}^*$ est une base de $(\mathbb{R}_n[X])^*$, base duale de la base $(L_0, \dots, L_n)$.

b) Dans notre cas, $n = 3$.

$$\begin{aligned} T &= T(0)L_0 + T(1)L_1 + T(2)L_2 + T(3)L_3 \\ &= 0L_0 + 1L_1 + 17L_2 + 98L_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1(X) &= \frac{X(X-2)(X-3)}{2} ; \\ L_2(X) &= \frac{X(X-1)(X-3)}{-2} \\ L_3(X) &= \frac{X(X-1)(X-2)}{6}. \end{aligned}$$

Partie 3

8 ▬ a) Effectuons une démonstration par récurrence sur k.

Pour $k = 1$, $D(E_1) = E_0$.

Supposons que, pour un certain $k \geqslant 1$, on ait :

$$D(E_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1}}{i} E_{k-i}.$$

Nous savons que :

$$E_{k+1} = \frac{X-k}{k+1} E_k.$$

$$\begin{aligned} D(E_{k+1}) &= \frac{1}{k+1}E_k + \frac{X-k}{k+1}D(E_k) \\ &= \frac{1}{k+1}E_k + \frac{X-k}{k+1}\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{i}E_{k-i} \\ &= \frac{1}{k+1}E_k \\ &\quad + \frac{X-k}{k+1}\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{(k+1)i}(X-(k-i)-i)E_{k-i} \\ &= \frac{1}{k+1}E_k + \sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{(k+1)i}(k+1-i)E_{k+1-i} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\frac{E_{k-i}}{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1}E_k + \sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{i}E_{k+1-i} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\frac{E_{k+1-i}}{k+1} - \sum_{i=2}^{k+1}(-1)^{i}\frac{E_{k+1-i}}{k+1}. \end{aligned}$$

Après simplification, nous arrivons à la formule demandée :

$$D(E_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1}\frac{(-1)^{i-1}}{i}E_{k+1-i}.$$

b) Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ et d son degré.

Il existe une famille finie de réels $(b_0, b_1, \dots, b_d)$ telle que :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{d} b_k E_k.$$

L'application D est linéaire.

$$D(P) = \sum_{k=0}^{d} b_k D(E_k).$$

Or, pour tout k dans $[\![0, d]\!]$:

$$\begin{aligned} D(E_k) &= \sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{i}E_{k-i} = \sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\Delta^i(E_k) \\ &= \sum_{i=1}^{d}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\Delta^i(E_k). \end{aligned}$$

D'où :

$$D(P) = \sum_{i=1}^{d}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\Delta^i(P).$$

Or, pour tout $i > d$:

$$\Delta^i(P) = 0.$$

Finalement :

$$D(P) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \Delta^i(P).$$

D'où :

$$D = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} \Delta^i.$$

2 Racines d'un polynôme par la méthode de Bernoulli

Partie mathématique

Supposons la suite non nulle. Il existe alors au moins un coefficient C_i non nul. Notons j le plus petit entier i tel que $C_i \neq 0$. Dans ce cas : $u_k \sim C_j x_j^k$. Le quotient $\dfrac{u_k}{u_{k-1}}$ tend vers x_j.

Partie informatique

1 *Algorithme de recherche d'une racine*

Initialisation de $u_0, \dots u_{k-1}$

- Calcul de r $\qquad r \leftarrow \dfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}}$
- Calcul de v $\qquad v \leftarrow \dfrac{a_{n-1}}{a_n} u_{n-1} - \dots - \dfrac{a_0}{a_n} u_0$
- Calcul de R $\qquad R \leftarrow \dfrac{v}{u_{n-1}}$

Tant que $|R - r| > eps$ **faire**

Décalage des u_i $\qquad u_0 \leftarrow u_1, \dots, u_{n-2} \leftarrow u_{n-1}, u_{n-1} \leftarrow v$

$r \leftarrow R$

Calcul de v

Calcul de R

fin faire

Algorithme de recherche des racines

Initialisation $\quad n \leftarrow \deg(P)$

$s \leftarrow 1$

$p_1 \leftarrow \deg(P)$

Tant que $n \geqslant s$ **faire**

Racine (P_1, eps)

Rac $[s] \leftarrow$ Racine (P_1, eps)

$P_1 \leftarrow \text{quo}(P_1, x - R, x)$

$s \leftarrow s + 1$

fin faire

2

Avec Maple

```
> restart :
> Racine:=proc(P,eps)
local u,j,k,r,v,n;
global R;
n:=degree(P,x);
for k from 0 to n-1 do u[k]:=k+1 od;
r:=1;
v:=-sum(coeff(P,x,i)*u[i]/coeff(P,x,n),
                                    i=0..n-1);
R:=v/u[n-1];
    while (abs(R-r)>eps) do
    for j from 0 to n-2 do
        u[j]:=u[j+1];
    od;
    u[n-1]:=v; r:=R;
    v:=-sum(coeff(P,x,i)*u[i]/coeff(P,x,n),
                                    i=0..n-1);
    R:=v/u[n-1];
    od;
R;
end :
> Racine(x^2-1.5*x-7,10^(-48));
```

$$3.500000000$$

3

Avec Maple

```
> Bernoulli:=proc(P,eps)
  local n,s,P1;
  global Rac;
  n:=degree(P,x);s:=1;P1:=P;
  while n>=s do
    Racine(P1,eps);Rac[s]:=R;
    P1:=quo(P1,x-R,x);s:=s+1;
    od;
  for i to n do print(Rac[i]);od;
  end;
  Warning, ‘i‘ is implicitly declared local
```

$Bernoulli :=$ **proc**(P, eps)

local $n, s, P1, i$;

global Rac;

$n := \text{degree}(P, x)$;

$s := 1$;

$P1 := P$;

while $s \leqslant n$ **do** $\text{Racine}(P1, eps)$; $Rac_s := R$;

$P1 := \text{quo}(P1, x - R, x)$; $s := s + 1$ **od**;

for i **to** n **do** $\text{print}(Rac_i)$ **od**

end

```
> Bernoulli(x^2-1.5*x-7,10^(-14));
                        3.500000000
                       -2.000000000
> Bernoulli(x^3-12.5*x^2+33.5*x+20,10^(-14));
                        8.000000011
                        4.999999983
                       -.4999999940
```

3 Forme faible de Frobenius d'une matrice

1 Écrivons les matrices $D_i(a)$, $T_{i,j}(a)$, $P_{i,j}$:

$$D_i(a) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & 0 & \\ & & & a & & & \\ & & & & 1 & & \\ & 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} ;$$

$$T_{i,j}(a) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & 0 & & & \\ & & \ddots & & a & & \\ & & & \ddots & & & \\ & 0 & & & \ddots & & 0 \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{ij}(a) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & 0 & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & 1 & & \\ & 0 & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} .$$

Notons $e_1, \ldots, e_n$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes et $L_1, \ldots, L_n$ ses vecteurs lignes.

Ensuite, regardons les images des vecteurs de la base canonique par les applications linéaires associées aux matrices $AD_i(a)$, $AT_{i,j}(a)$ et $AP_{i,j}$.

Identifions ces applications aux matrices.

• Si $k \neq i$, e_k a pour image e_k par $D_i(a)$, puis c_k par A.

• Si $k = i$, e_i a pour image ae_i par $D_i(a)$, puis ac_i par A.

En multipliant à droite la matrice A par $D_i(a)$, on multiplie la colonne i par a.

Montrer de même qu'en multipliant à droite la matrice A par $T_{i,j}(a)$, on ajoute à la colonne j la colonne C_i multipliée par a.

Et en multipliant à droite par la matrice $P_{i,j}$, on permute les colonnes C_i et C_j.

La i-ème ligne de A est la i-ème colonne de ${}^tA$. La multiplication à gauche opère donc les transformations semblables sur les lignes.

2

Avec Maple

```
> restart :with(linalg) :
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> Ddroite:=proc(A,a,i,n)
local k :
for k to n do A[k,i]:=a*A[k,i] :od :
print(A) :
end;
```

$Ddroite :=$ **proc**(A, a, i, n) **local**k; **for** k **to** n **do** $A_{k,i} := a \times A_{k,i}$ **od** ; print(A) **end**

3 D'après la question **1)** , en multipliant $T_{i,j}(-a)$ à droite par $T_{i,j}(a)$, on ajoute à la colonne j de $T_{i,j}(-a)$ la colonne i multipliée par a.

Les autres colonnes ne sont pas modifiées.

On obtient alors la matrice unité.

La matrice $T_{i,j}(a)$ est inversible et :

$$T_{i,j}(a)^{-1} = T_{i,j}(-a).$$

La permutation de $[\![1, n]\!]$ qui échange j et k est involutive.

La matrice $P_{i,j}$ est donc inversible et :

$$P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}.$$

Enfin, la matrice $D_i(a)$ est inversible si, et seulement si, $a \neq 0$. Dans ce cas :

$$D_i(a)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{a}\right).$$

4

Avec Maple

```
> with(linalg) :
> ChercheNonNul:=proc(A,j,n)
local i :
i:=n ;
while (A[i,j]=0 and i>j) do i:=i-1 :od :
if i<=j then n+1 :
        else i :
fi :
end ;
```

ChercheNonNul := **proc**(A, j, n)
local i;
$i := n$; **while** $A_{i,\,j} = 0$ **and** $j < i$ **do** $i := i - 1$ **od** ;
if $i \leqslant j$ **then** $n + 1$ **else** i **fi**
end

5

Avec Maple

```
> Dtransformation:=proc(A,a,i,n)
Ddroite(A,a,i,n) :
Dgauche(A,1/a,i,n) :
end ;
```

Dtransformation := **proc**(A, a, i, n)
Ddroite(A, a, i, n) ; Dgauche(A, $1/a$, i, n) **end**

6 **a)**

Avec Maple

```
> A:=matrix([[2,1,-1],[0,2,0],
[-1,1,2]]) ;Compagnon(A,3) ;
```

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2$$

La matrice A subit successivement :

- Ptransformation$(A, 3, 2, 3)$, avec $j = 1, k = 3$;
- Dtransformation$(A, -1, 2, 3)$, avec $j = 1, k = 3$;
- Ttransformation$(A, 2, 1, 2, 3)$, avec $j = 1, k = 3, i = 1$;
- Ttransformation$(A, 0, 3, 2, 3)$, avec $j = 1, k = 3, i = 3$.

Puis $j = 2, k = 4$, car $a_{32} = 0$.

Le programme s'interrompt.

b) L'algorithme travaille successivement sur les colonnes $1, \ldots$.

Pour chacune de ces colonnes, il cherche un élément non nul $a_{k,\,j}$, avec $k > j$.

S'il ne trouve pas de tel élément, il s'interrompt.

S'il en trouve un, une Ptransformation permute les lignes k et $j+1$. Puis une Dtransformation substitue 1 à $a_{j+1,\,j}$. Enfin, la boucle FOR soustrait de la ligne i (pour tout i différent de $j+1$) le produit de la $j+1$-ième par le réel $a_{i,\,j}$. Les termes de la j-ième colonne, à l'exception de $a_{j+1,\,j}$, sont alors tous transformés en 0. Les termes des colonnes situés à gauche de la j-ième, ne sont pas modifiés.

L'algorithme s'interrompt soit, lorsque, dans une colonne, il ne rencontre pas de terme non nul sous le terme diagonal, soit lorsque toutes les colonnes ont été transformées.

Le nombre de colonnes modifiées est appelé d.

De plus, chacune des transformations effectuées est de la forme $\left(A \longmapsto P^{-1}AP\right)$ où P est une matrice inversible.

La matrice A est donc semblable à la matrice obtenue par l'algorithme qui est de la forme :

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & & \vdots & b & \cdots & \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & & \\ \vdots & 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & \vdots & & 1 & f & \cdots & \cdots \\ & & & 0 & 0 & g & \cdots \\ 0 & 0 & & & 0 & h & \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} C_1 & B_4' \\ 0 & B_2' \end{pmatrix},$$

où C_1 est une matrice compagnon.

c) Nous avons obtenu :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix},\ B_1' = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},\ B_2' = (2)\,.$$

7 Après l'éxécution de l'algorithme, la matrice A a été transformée en une matrice de la forme :

$$P_m^{-1} P_{m-1}^{-1} \cdots P_1^{-1} A P_1 \cdots P_m.$$

La matrice de passage recherchée est la matrice $P = P_1 \cdots P_m$.

Pour la déterminer, il suffit à chaque étape, de multiplier I_n par les matrices P_k successivement.

La procédure Compagnon doit donc être modifiée ainsi :

- ajouter P:=Identité(n) au début du programme
- faire précéder chaque transformation par la même transformation, à droite, sur P.

Avec Maple

```
> with(linalg) :
> Identit:=proc(n)
local f :
f:=(i,j)->if i<>j then 0 else 1 fi :
matrix(n,n,f) ;
end;
```

Identit := **proc**(n)
local f;
f := **proc**(i, j) **option** *operator*, *arrow*;
if $i \neq j$ **then** 0 **else** 1 **fi end** ; matrix(n, n, f)
end

Les matrices P_k ont toutes la même première colonne, nulle à l'exception du premier terme égal à 1.

Cette colonne est donc aussi la première colonne de P.

8 Utilisons encore les matrices $T_{i,j}(a)$ pour gagner des zéros grâce à l'opération qui transforme C_j en $C_j + aC_i$.

Mais, pour ne pas détruire ce que l'on gagne, il est impératif de rétrograder en i.

Avec Maple

```
> Zeroadroite:=proc(B,d,n)
local i,j :
for i from d-1 to 1 do
   for j from d+1 to n do
   Ttransformation(B,-B[i+1,j],i,j,n) ;
   od;od;    end;
```

Zeroadroite := **proc**(B, d, n)
local i, j;
for i **from** $d-1$ **to** 1 **do**
for j **from** $d+1$ **to** n **do**
Ttransformation(B, $-B_{i+1,\,j}$, i, j, n)
od
od
end

Pour les mêmes raisons que dans la question **6) b)**, nous pouvons affirmer que la matrice obtenue est semblable à A.

9 L'algorithme appliqué à la matrice A est le suivant :

- Appliquer Compagnon, puis Zeroadroite à A :

$$\{\text{on obtient } B'' \text{ et } d\}.$$

- Tant que ($\exists\, j\ \ b_{1,\,j} \neq 0$), faire :

Ptransformation(j, 1), puis Compagnon, Zeroadroite.

À chaque passage dans la boucle, d croît d'une unité. L'algorithme se termine donc.

Puisqu'on sort de la boucle, la condition qui la contrôle devient fausse.

Il existe donc une matrice B semblable à A de la forme :

$$B = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

où C_1 est une matrice compagnon.

Avec la matrice A de l'énoncé, nous obtenons :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

4 Matrices de transvection

1 **a)** Vérifier sans peine que :

$$E_{i\,j} E_{hk} = \delta_{jh} E_{ik}.$$

b) La famille $(E_{i\,j})_{(i,\,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, car toute matrice $M = (m_{i\,j})_{(i,\,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des matrices de la famille :

$$M = \sum_{(i,\,j)\in[\![1,n]\!]^2} m_{i\,j} E_{i\,j}.$$

c) Toute matrice de transvection est triangulaire.

Si $i \neq j$, $\mathrm{Det}(\mathrm{I}_n + E_{i\,j}) = 1$.

d) Calculons :

$$(\mathrm{I}_n + \lambda E_{i,\,j})(\mathrm{I}_n + \mu E_{h,k}) = \mathrm{I}_n + \lambda E_{i\,j} + \mu E_{hk}\,,$$

car $j \neq h$.

Donc, si $i = h$, $j = k$, $\lambda = -\mu$, on obtient I_n. Soit :

$$(\mathrm{I}_n + \lambda E_{i\,j})^{-1} = (\mathrm{I}_n - \mu E_{i\,j}).$$

2 Soit $i \neq j$.

a) Notons $L_1, \ldots, L_n$ les vecteurs lignes de la matrice A.

Cette matrice s'écrit, en blocs : $A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$.

Alors : $(\mathrm{I}_n + \lambda E_{i\,j}) \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + \lambda L_j \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$.

À la i-ème ligne de A a été substituée la somme de cette ligne et de λ fois la ligne j.

b) Montrer de même que le produit $A(\mathrm{I}_n + \lambda E_{i\,j})$ est la matrice obtenue en ajoutant, à la j-ième colonne de A, la somme de cette colonne et de λ fois la colonne i.

3 Considérons successivement plusieurs cas.

• Si $a_{11} = 1$ et s'il existe $i \geqslant 2$ tel que $a_{i1} \neq 0$ ou $j \geqslant 2$ tel que $a_{1j} \neq 0$.

Utilisons la question précedente.

La matrice $\displaystyle\prod_{i=2}^{n} (\mathrm{I}_n - a_{i1} E_{i1})A$ a pour première colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice $\displaystyle\prod_{i=2}^{n} (\mathrm{I}_n - a_{i1} E_{i1})A \prod_{j=2}^{n} (\mathrm{I}_n - a_{1j} E_{1j})$ a même première colonne et sa première ligne est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle vérifie les conditions demandées.

• Si $a_{11} \neq 1$ et s'il existe $i \geqslant 2$ tel que $a_{i1} \neq 0$ ou $j \geqslant 2$ tel que $a_{1j} \neq 0$.

Supposons $a_{i1} \neq 0$, avec $i \geqslant 2$.

Alors la première ligne de la matrice $(\mathrm{I}_n + \lambda E_{1i})A$ a pour premier terme : $a_{11} + \lambda a_{i1}$.

Ce terme vaut 1 si, et seulement si, $a_{11} + \lambda a_{i1} = 1$, soit :

$$\lambda = \frac{1 - a_{11}}{a_{i1}}.$$

Ce choix de λ est possible, car $a_{i1} \neq 0$.

Nous sommes alors ramenés au cas précédent.

c) Si, pour tout $i \geqslant 2$ et tout $j \geqslant 2$, $a_{i1} = a_{1j} = 0$.

L'hypothèse permet d'affirmer que $a_{11} \neq 0$.

La matrice $(\mathrm{I}_n + E_{21})A$ admet sur la première colonne et deuxième ligne :

$$a_{21} = a_{11} \neq 0.$$

Nous sommes ramenés au cas précédent.

4 Supposons $n = 2$.

Si un des coefficients de la première ligne ou de la première colonne de la matrice A est non nul, d'après la question précédente, il existe deux matrices P et Q, produits de matrices de transvection telles que, en blocs :

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}.$$

La matrice A' est un scalaire d.

De plus :

$$\mathrm{Det}(PAQ) = \mathrm{Det}(P)\mathrm{Det}(A)\mathrm{Det}(Q) = \mathrm{Det}(A) = d.$$

Si tous les coefficients de la première ligne et de la première colonne de A sont nuls, la matrice A est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$.

$$(\mathrm{I}_2 + E_{12})A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix}.$$

Nous sommes ramenés au cas précédent.

Supposons ensuite que, pour un certain $n \geqslant 2$ et pour toute matrice A de rang $r > 0$, il existe deux matrices P et Q, produits de matrices de transvection telles que la matrice $B = PAQ$ vérifie les conditions imposées.

Considérons alors une matrice A de rang $r > 0$ dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Si un des coefficients de la première ligne ou de la première colonne de la matrice A est non nul, d'après la question précédente, il existe deux matrices P et Q, produits de matrices de transvection dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telles que, en blocs :

$$PAQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}.$$

La matrice A' est carrée d'ordre n.

De plus :

$$\mathrm{Det}(PAQ) = \mathrm{Det}(P)\mathrm{Det}(A)\mathrm{Det}(Q) = \mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(A').$$

Si le rang de A est 1, nous avons terminé (ouf !).

Sinon, le rang de A' est $r - 1 > 0$ et $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}(A')$.

Appliquons à la matrice A' l'hypothèse de récurrence.

Il existe deux matrices de transvection P' et Q' dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que la matrice $B' = P'A'Q'$ vérifie les conditions imposées.

Revenons dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ en travaillant en blocs.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & A'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & B'\end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P'\end{pmatrix}PAQ\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & B'\end{pmatrix}.$$

Or les matrices P', Q' sont des matrices de transvection P' et Q' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc les matrices $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P'\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q'\end{pmatrix}$ sont des matrices de transvection de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Les matrices $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P'\end{pmatrix}P, Q\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & Q'\end{pmatrix}$ sont des matrices de transvection de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Posons $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & B'\end{pmatrix}$.

Alors $\mathrm{Det}(B)=\mathrm{Det}(B')=\mathrm{Det}(A)=\mathrm{Det}(A')$.

On vérifiera aisément que la matrice B vérifie les autres conditions exigées.

Si les coefficients de la première ligne ou de la première colonne de A sont tous nuls, procéder comme dans le cas $n=2$ pour vous revenir au cas précédent.

5

Avec Maple

```
> restart :
> transvection:=proc(A)
local m,n,i,j,r,u,P,Q,v1,v2,v3,R,k;
global P1,Q1;
with(linalg) :
n:=coldim(A);m:=n;
r:=rank(A);R:=r;
if r=0 then print(‘erreur‘);break; fi;
  while r>0 do
   u:=product(A[k,1],k=2..n)
         *product(A[1,k],k=2..n);
  P[r]:=array(identity,1..n,1..n);
  Q[r]:=array(identity,1..n,1..n);

#Lorsque tous les éléments de la première
#ligne et de la première colonne
#sont nuls, on amène un terme
#non nul en première ligne.

   if u*A[1,1]=0 then i:=2;j:=2;
    while A[i,j]=0 do if i<n then i:=i+1; else
    i:=2;j:=j+1;fi;od;
   A:=addrow(A,j,1,1);
   P[r]:=addrow(P[r],j,1,1);fi;

#Si a11 est différent de 1,on cherche s'il
#existe un élément non nul en
#première ligne ou première
#colonne autre que a11. S'il n'en existe pas,
#on recopie a11 en a12.

    if A[1,1]<>1 then
    i:=1;j:=2;
     while (A[i,j]=0 and i<=n) do
      if (i=1) and (j<n)
      then j:=j+1;else j:=1;i:=i+1;fi;od;
    if i=n+1 then
    A:=addrow(A,1,2,1);
    P[r]:=addrow(P[r],1,2,1);

#S'il en existe un, on l'utilise pour changer
#a11 en 1.

    else
     if j=1 then
     P[r]:=addrow(P[r],i,1,(1-A[1,1])/A[i,1]);
     A:=addrow(A,i,1,(1-A[1,1])/A[i,1]);fi;
     if i=1 then
     Q[r]:=addcol(Q[r],j,1,(1-A[1,1])/A[1,j]);
     A:=addcol(A,j,1,(1-A[1,1])/A[1,j]);fi;
     fi;
    fi;

#On utilise ensuite a11 pour annuler les
#autres termes de la première
#ligne et de la première colonne.

    for i from 2 to n do if A[i,1]<>0 then
    P[r]:=addrow(P[r],1,i,-A[i,1]);
    A:=addrow(A,1,i,-A[i,1]);fi;od;
   for j from 2 to n do if A[1,j]<>0 then
   Q[r]:=addcol(Q[r],1,j,-A[1,j]);
   A:=addcol(A,1,j,-A[1,j]);fi;od;

#A,n,r sont modifiés.

   A:=submatrix(A,2..n,2..n);r:=rank(A);
   n:=n-1;
   od;

#Les différents produits de matrices de
# transvection, appels Pr et Qr,
#ont été créés.
#On reconstitue les matrices P et Q de la
#théorie.

   for k from 2 to R do
   v1:=matrix(1,m+k-R-1,0);v2:=transpose(v1);
   v3:=stackmatrix([1],v2);
   P[k-1]:=augment(v3,stackmatrix(v1,P[k-1]));
   P[k]:=evalm(P[k-1]&*P[k]);
   Q[k-1]:=augment(v3,stackmatrix(v1,Q[k-1]));
   Q[k]:=evalm(Q[k]&*Q[k-1]);
   od;
P1:=evalm(P[R]);Q1:=evalm(Q[R]);print(P1,Q1);
end :
```

```
> A:=matrix(4,4,[0,0,0,3,0,1,2,1,
                 0,3,0,5,0,2,3,0]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> transvection(A);
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 1 & 0 \\ \dfrac{-1}{3} & \dfrac{-3}{2} & \dfrac{-1}{6} & 1 \\ \dfrac{-7}{10} & \dfrac{27}{20} & \dfrac{3}{20} & \dfrac{-9}{10} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{-2}{3} & \dfrac{-14}{5} & -20 \\ 1 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{5} & 0 \\ 0 & \dfrac{-1}{6} & \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-3}{10} & 0 \end{bmatrix}$$

6 Soit A une matrice de transvection de déterminant égal à 1. Nous savons qu'il existe P et Q, produits de matrices de transvection, tels que : $PAQ = \mathrm{I}_n$.

Nous avons établi que toute matrice de transvection est inversible et que son inverse est une matrice de transvection. Donc :

$$A = P^{-1}Q^{-1}.$$

A est produit de matrices de transvection.

5 Décomposition *LU*

1 **a)** Soit A une matrice triangulaire (que nous supposerons inférieure) et inversible.

Notons $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout i de $[\![1, n]\!]$, le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_i)$ est stable par l'endomorphisme A.

Il est donc stable par A^{-1} et A^{-1} est triangulaire inférieure.

Si A est triangulaire supérieure, le changement de base défini par $f_i = e_{n-i}$ montre que A est semblable à une matrice triangulaire inférieure B. B^{-1} est triangulaire inférieure. En revenant à la base $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, on obtient pour A^{-1} une triangulaire supérieure.

b) $\mathcal{L}_n$ est une partie de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

Il contient I_n.

Il est stable par le produit matriciel.

Pour tout élément A de $\mathcal{L}_n$, A^{-1} est triangulaire inférieure.

De plus, sa diagonale est constituée de 1, car ce sont les éléments propres de A^{-1}.

A^{-1} est dans $\mathcal{L}_n$.

C'est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

2 **a)** On considère deux décompositions d'une matrice A inversible : $A = LU = L'U'$.

A, L, L' sont des matrices inversibles. Les matrices U et U' sont inversibles.

On a $L'^{-1}L = U'U^{-1}$.

La matrice $L'^{-1}L$ est triangulaire inférieure.

La matrice $U'U^{-1}$ est triangulaire supérieure.

D'où $L'^{-1}L = U'L^{-1} = \mathrm{I}_n$.

On a donc $L = L'$ et $U = U'$.

Si une telle décomposition existe, elle est unique.

b) Si la matrice A est inversible et que $A = LU$, la matrice U est inversible. Ses éléments diagonaux sont non nuls.

Soit k un entier compris entre 1 et n. Si on utilise les matrices A, L et U écrites en blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_k & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} ; U = \begin{pmatrix} U_k & \cdot \\ 0 & \cdot \end{pmatrix} ; L = \begin{pmatrix} L_k & 0 \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

le produit par blocs donne $A_k = L_k U_k$.

La matrice L_k est triangulaire inférieure d'éléments diagonaux égaux à 1 : L_k est inversible. La matrice U_k est inversible, car U est inversible, donc ses éléments diagonaux ne sont pas nuls.

On en déduit que A_k est inversible.

c) On considère la décomposition en blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & V \\ W & A_{n,n} \end{pmatrix}.$$

On considère une matrice H de $\mathcal{L}_n$ écrite sous la forme :

$$H = \begin{pmatrix} H_{n-1} & 0 \\ H' & 1 \end{pmatrix}.$$

Le produit HA donne :

$$HA = \left(\begin{array}{c|c} A_{n-1}H_{n-1} & H_{n-1}V \\ \hline H'A_{n-1} + W & H'V + A_{n,n} \end{array}\right).$$

On veut que : $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $(HA)_{n,i} = 0$.

Cette condition se traduit par $H'A_{n-1} + W = 0$.

La matrice A_{n-1} est inversible, donc $H' = -WA_{n-1}^{-1}$.

La matrice H_{n-1} est quelconque dans $\mathcal{L}_{n-1}$ et :

$$H = \begin{pmatrix} H_{n-1} & 0 \\ -WA_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice H est inversible. H^{-1} est dans $\mathcal{L}_n$, donc on peut poser :

$$H^{-1} = \begin{pmatrix} H_{n-1}^{-1} & 0 \\ Z & 1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant le produit HH^{-1}, on obtient :

$$Z = WA_{n-1}^{-1}H_{n-1}^{-1}.$$

d) On va faire une démonstration par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, on a $A = \mathrm{I}_n A$. C'est une décomposition LU.

On suppose le résultat vrai pour une matrice de taille $(n-1)\times(n-1)$.

Soit A une matrice de taille n telle que $\mathrm{Det}(A_k)$ soit non nul pour tout k entre 1 et n.

La matrice extraite A_{n-1} est inversible : il existe L_{n-1} dans $\mathcal{L}_{n-1}$ et U_{n-1} dans $\mathcal{U}_{n-1}$ tels que :

$$A_{n-1} = L_{n-1}U_{n-1}.$$

D'après la question **2) c)** , en prenant $H_{n-1} = L_{n-1}^{-1}$, on obtient :

$$H = \begin{pmatrix} L_{n-1}^{-1} & 0 \\ -WA_{n-1}^{-1} & 1 \end{pmatrix} \ ;\ H^{-1} = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0 \\ WA_{n-1}^{-1}L_{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient donc :

$$HA = \begin{pmatrix} U_{n-1} & L_{n-1}^{-1}V \\ 0 & -WA_{n-1}^{-1}V + A_{n,n} \end{pmatrix} = U$$

qui est une matrice de $\mathcal{U}_n$.

$A = H^{-1}U$ est une décomposition LU de la matrice A.

On vient de prouver la propriété pour n.

3 **a)** On connaît la base canonique de $\mathcal{M}_n$:

$E_{i,j}$ est la matrice de $\mathcal{M}_n$ qui possède un seul terme non nul, un 1 en ligne i et colonne j.

Pour $p \neq q$ dans $[\![1, n]\!]$, la multiplication à gauche par la matrice $(\mathrm{I}_n + E_{p,q} - E_{p,p} - E_{q,q} + E_{q,p})$ échange les lignes p et q d'une matrice.

b) (i) La première ligne de L_n^{-1} est $1\,0\ldots0$ et $U = L_n^{-1}A$. La première ligne de U est donc la première ligne de A.

(ii) La première colonne de U_n est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et la démonstration de la question précédente montre que $\alpha = A_{11}$.

Or, $L = AU_n^{-1}$. La première colonne de U_n est donc : $\begin{pmatrix} \dfrac{1}{A_{1,1}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et nous en déduisons que la première colonne de L est la première colonne de A divisée par $A_{1,1}$.

(iii) La construction de la question **2) d)** nous indique que si $A = LU_n$ est la décomposition LU de A, et, pour tout k dans $[\![1, n-1]\!]$, $A_k = L_kU_k$, celle de A_k, alors, pour $k \geqslant 2$, L_{k-1} et U_{k-1} s'obtiennent en conservant les $k-1$ premières lignes et colonnes respectivement de L_k et U_k.

Par conséquent : $\forall i \in [\![2, n]\!]$

$$u_{i,i} = \frac{\mathrm{Det}U_i}{\mathrm{Det}U_{i-1}} = \frac{\mathrm{Det}A_i}{\mathrm{Det}A_{i-1}} \text{ et } u_{1,1} = A_{1,1}.$$

(iiii) Soit $1 < i \leqslant j \leqslant n$. Notons P la matrice telle que la multiplication de M par P à gauche permute les lignes i et j de M.

Alors $PA = (PL)U$.

Écrivons PA, PL et U en isolant le bloc constitué des i premières lignes et colonnes :

$$PA = \left(\begin{array}{c|c} (PA)_i & A' \\ \hline A'' & A''' \end{array}\right) ;\quad PL = \left(\begin{array}{c|c} (PL)_i & L''' \\ \hline L' & L'' \end{array}\right);$$

$$U = \left(\begin{array}{c|c} U_i & A' \\ \hline 0 & A''' \end{array}\right).$$

En faisant le produit par blocs, nous obtenons :

$$(PA)_i = (PL)_iU_i.$$

$$\text{Or :}\quad (PA)_i = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & & A_{1,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{i-1,1} & \cdots & & A_{i-1,i} \\ A_{j,1} & \cdots & \cdots & A_{j,i} \end{pmatrix}$$

$$\text{et}\quad (PL)_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{i-1,1} & \cdots & 1 & 0 \\ L_{j,1} & \cdots & \cdots & L_{j,i} \end{pmatrix}.$$

En utilisant les notations de l'énoncé, considérons le déterminant des deux membres :

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(PA)_i &= \begin{bmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i \\ 1 & \cdots & i-1 & j \end{bmatrix}_A \\ &= \mathrm{Det}(PL)_i\mathrm{Det}(U_i) = L_{j,i}\mathrm{Det}(A_i). \end{aligned}$$

D'où :

$$L_{j,i} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i \\ 1 & \cdots & i-1 & j \end{bmatrix}_A}{\mathrm{Det}(A_i)} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & i-1 & j \\ 1 & \cdots & i-1 & i \end{bmatrix}_A}{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i \\ 1 & \cdots & i-1 & i \end{bmatrix}_A}.$$

(iiiii) On remarque que, dans la question précédente, $L_{i,j}$ a été calculé en l'isolant par le calcul du déterminant de $(PL)_i$.

Soit $1 < i \leqslant j \leqslant n$.

On procédera de même en utilisant cette fois la matrice P qui, multipliant à droite la matrice M, permute les colonnes i et j de M. On écrira $AP = L(UP)$, calculera les produits par blocs en isolant le bloc des i premières lignes et colonnes, et on égalera les déterminants.

En déduire :

$$U_{j,i} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i \\ 1 & \cdots & i-1 & j \end{bmatrix}_A}{\mathrm{Det}(A_{i-1})} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i \\ 1 & \cdots & i-1 & j \end{bmatrix}_A}{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & i-2 & i-1 \\ 1 & \cdots & i-2 & i-1 \end{bmatrix}_A}.$$

4 ▬ La procédure suit exactement les étapes décrites dans la question **3) b)**

Avec Maple

```
> restart :with(linalg) :
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
> LU:=proc(A,n)
local i,j ;
global L,U ;
L:=matrix(n,n) ;U:=matrix(n,n) ;
for i to n do L[i,1]:=A[i,1]/A[1,1] ;
L[i,i]:=1 ;
  for j from i+1 to n do
  L[i,j]:=0 od ;
  od ;
for i from 3 to n do
  for j from 2 to i-1 do
L[i,j]:=det(submatrix(
swaprow(A,i,j),1..j,1..j))
/det(submatrix(A,1..j,1..j)) od ;
  od ;
for j to n do U[1,j]:=A[1,j] ;
  for i from j+1 to n do U[i,j]:=0 ;od ;
  od ;
for j from 2 to n do U[j,j]:=
det(submatrix(A,1..j,1..j))
              /det(submatrix(A,1..j-1,1..j-1))
  for i from 2 to j-1 do
U[i,j]:=det(submatrix(
swapcol(A,i,j),1..i,1..i))/
det(submatrix(A,1..i-1,1..i-1)) ;
  od ; od ;
end ;
```

5 ▬ **a)**

Avec Maple

```
> A:=matrix(4,4,[1,1,3,1,1,2,1,3,0,1,
                 -1,2,1,-1,2,1]) ;
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> LU(A,4):evalm(L) ;evalm(U) ;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

b) La matrice A est inversible. Le système admet une solution unique.

Il équivaut à $LUX = Y$. Notons $Z = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = UX$.

La résolution du système équivaut à la résolution successives de deux systèmes triangulaires :

$$LZ = Y \iff Z = L^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}.$$

Soit : $Z = \begin{pmatrix} a \\ -a+b \\ a-b+c \\ 2a-3b+5c+d \end{pmatrix}$. Puis :

$$X = U^{-1}Z$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -a+b \\ a-b+c \\ 2a-3b+5c+d \end{pmatrix}.$$

c) Travaillons avec $n = 2$. Ce sera plus simple.

Une matrice carrée d'ordre 2 de la forme LU s'écrit donc sous la forme générale :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & c \\ ab & ac+d \end{pmatrix}.$$

Nous remarquons que, si $b = c = 0$, la matrice obtenue ne dépend pas de a. Elle admet donc une infinité de décompositions LU.

Inversement, pour trouver une matrice sans décomposition LU, il faut chercher x, y, z, t tels que le système :

$$x = b\,;\ y = ab\,;\ z = c\,;\ t = ac + d,$$

dont les inconnues sont a, b, c, d, n'ait pas de solution.

Il suffit de choisir $x = 0$ et $y \neq 0$.

3 Sous-espaces stables et réduction des endomorphismes

RAPPELS DE COURS

$\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$ et u un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

SOUS-ESPACES STABLES

• *Sous-espaces stables par un endomorphisme*

Un sous-espace vectoriel F de E est dit *stable* par u lorsque $u(F) \subset F$.

Si deux endomorphismes u et v de E commutent, alors les sous-espaces Ker u et Im u sont stables par v.

• *Matrice dans une base adaptée à un sous-espace stable*

Soit $B_F = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. Le théorème de la base incomplète permet de compléter cette base en une base $B = (e_1, \ldots, e_p, \ldots, e_n)$ de E. On dit que B est une base *adaptée* à F.

Le sous-espace F est stable par u si, et seulement si, la matrice de u dans la base B est de la forme $\begin{bmatrix} M & N \\ 0 & P \end{bmatrix}$ avec M dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, N dans $\mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$, P dans $\mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$ et 0 matrice nulle de $\mathcal{M}_{n-p,p}(\mathbb{K})$.

Dans ce cas, M est la matrice de $u_{|F}$ dans la base $(e_1, \ldots, e_p)$.

POLYNÔMES D'ENDOMORPHISMES

Si l'ensemble $\{P \in \mathbb{K}[X]/P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}\}$ des polynômes annulateurs de u est non réduit à $\{0_{\mathbb{K}[X]}\}$, il est engendré par un unique polynôme unitaire Π_u appelé *polynôme minimal* de u.

$\mathbb{K}[u] = \{P(u)\,;\, P \in \mathbb{K}[X]\}$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(E)$.

Le polynôme minimal Π_u existe si, et seulement si, $\mathbb{K}[u]$ est de dimension finie. Dans ce cas, $n = \deg \Pi_u = \dim \mathbb{K}[u]$ et $(u^0, u^1, \ldots, u^{n-1})$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

• Si u admet un polynôme minimal et si F est un sous-espace stable par u, alors l'endomorphisme $u_{|F}$ induit par u sur F admet un polynôme minimal et le polynôme minimal de $u_{|F}$ divise celui de u.

• *Théorème de décomposition des noyaux*

Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ *premiers entre eux* . Alors :

$$\text{Ker } A(u) \oplus \text{Ker } B(u) = \text{Ker } AB(u).$$

◗ ÉLÉMENTS PROPRES D'UN ENDOMORPHISME

• *Valeurs et vecteurs propres*

Soit λ un élément de $\mathbb{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) il existe un vecteur x *non nul* de E tel que $u(x) = \lambda x$;

(ii) Ker $(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$;

(iii) $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas injectif.

On dit alors, que λ est une *valeur propre* de u et x est un *vecteur propre de u associé à la valeur propre* λ. Le sous-espace Ker $(u - \lambda \text{Id}_E) = \{x \in E / u(x) = \lambda x\}$ est appelé *sous-espace propre relatif à la valeur propre* λ et noté $E_\lambda(u)$.

L'ensemble des valeurs propres de u est le *spectre* de u noté $\text{Sp}(u)$.

• Si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont des valeurs propres distinctes deux à deux d'un endomorphisme u de E, alors les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

• Soit p vecteurs propres $x_1, \ldots, x_p$ associés à p valeurs propres distinctes deux à deux. Alors la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.

• Si deux endomorphismes commutent, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre.

• Soit F un sous-espace de E stable pour u. Le scalaire λ est une valeur propre de $u_{|F}$ si, et seulement si :

$$F \cap \text{Ker } (u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}.$$

• *Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie*

À partir de maintenant, on suppose E de dimension n.

Le polynôme formel $P_u(X) = \text{Det}(u - X\text{Id}_E)$ sera appelé *polynôme caractéristique de u*.

Si A est la matrice de u dans une base B de E le polynôme caractéristique de u est :

$$P_u(X) = \text{Det}(A - X\text{I}_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & \cdots\cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & a_{nn} - X \end{vmatrix}.$$

On remarque : $P_u(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} \text{Tr} u X^{n-1} + \cdots + \text{Det} u$

• Les valeurs propres de u sont les racines du polynôme caractéristique de u.

• Si F est un sous-espace de E stable par u, le polynôme caractéristique de $u_{|F}$ divise celui de u.

• Soit λ dans $\text{Sp}(u)$. Alors l'ordre de multiplicité m de λ dans P_u vérifie : $1 \leqslant \dim E_\lambda(u) \leqslant m$.

• Si le polynôme caractéristique de u est scindé sur $\mathbb{K}$, alors :

$$\text{Tr} u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad \text{Det} u = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{où} \quad \{\lambda_i \,; i \in [\![1, n]\!]\} = \text{Sp} u.$$

Théorème de Cayley-Hamilton

Le polynôme caractéristique de u est un polynôme annulateur de u : $P_u(u) = 0$.

• Les valeurs propres de u sont les racines du polynôme minimal de u.

Étude matricielle

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Si λ est une valeur propre de u, on dit que λ est une *valeur propre de la matrice* A.

De même le *polynôme minimal de la matrice* A est celui de u. Il sera noté Π_A .

• Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique et les mêmes valeurs propres.

• La matrice ${}^tA$ a le même polynôme caractéristique que A.

Théorème de Cayley-Hamilton

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $P_A(A) = 0$.

ENDOMORPHISMES DIAGONALISABLES

• *Caractérisations*

Un endomorphisme u est *diagonalisable* si, et seulement si, l'une des propriétés suivantes est vérifiée :

• $E = \bigoplus\limits_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$; dans ce cas, $u = \sum\limits_{\lambda \in Sp(u)} \lambda p_\lambda$ en notant p_λ la projection sur $E_\lambda(u)$ parallèlement à $\bigoplus\limits_{\substack{\mu \in \mathrm{Sp}(u) \\ \mu \neq \lambda}} E_\mu(u)$.

• $\dim E = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim E_\lambda(u)$.

• Il existe une base formée de vecteurs propres de u.

• Il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

• E est somme directe de sous-espaces stables sur lesquels u induit une homothétie.

• Son polynôme caractéristique P_u est scindé dans $\mathbb{K}$ et, pour toute valeur propre λ, le sous-espace propre $E_\lambda(u)$ a pour dimension l'ordre de multiplicité de λ dans P_u.

• Son polynôme minimal Π_u est scindé dans $\mathbb{K}$ et n'a que des racines simples.

• Il existe un polynôme annulateur de u scindé sur $\mathbb{K}$ et dont toutes les racines sont simples.

Matrices diagonalisables

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous dirons que A est *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale.

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A dans la base canonique.

La matrice A est diagonalisable si, et seulement si, u est diagonalisable.

Diagonaliser une matrice A diagonalisable, c'est déterminer la matrice de passage P, la matrice diagonale D correspondante et donner l'expression matricielle : $A = PDP^{-1}$.

Méthode pratique de diagonalisation d'une matrice A de $\mathcal{M}_{\boldsymbol{n}}(\mathbb{K})$, diagonalisable.

1) *Recherche des valeurs propres :* on détermine le spectre de A en étudiant le polynôme caractéristique de A ou un polynôme annulateur de A.

2) *Détermination des sous-espaces propres :* pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on résout l'équation matricielle :

$(A - \lambda \mathrm{I}_n)X = 0$ où l'inconnue X appartient à $\mathcal{M}_{n,1}(K)$ pour déterminer le sous-espace propre associé E_λ.

On vérifie que A est diagonalisable en comparant $\dim E_\lambda$ et l'ordre de multiplicité de λ.

3) *Choix d'une base de vecteurs propres :* on choisit une base dans chaque E_λ et la réunion de ces bases constitue une base de vecteurs propres.

Soit P la matrice de passage de l'ancienne base à cette nouvelle base de vecteurs propres. Il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

ENDOMORPHISMES TRIGONALISABLES

L'endomorphisme u est *trigonalisable* sur $\mathbb{K}$ s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure. *Réduire* un endomorphisme signifie trouver une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ou triangulaire supérieure.

• *Caractérisations d'un endomorphisme trigonalisable*

• Un endomorphisme u de E est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

• Tout endomorphisme est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

• Un endomorphisme u de E est trigonalisable si, et seulement s'il existe un polynôme annulateur de l'endomorphisme u, scindé sur $\mathbb{K}$.

• *Matrice trigonalisable*

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice A dans la base canonique.

La matrice A est trigonalisable si, et seulement si, u est trigonalisable. *Trigonaliser* une matrice A c'est déterminer une matrice de passage P et une matrice triangulaire T telles que : $A = PTP^{-1}$.

• *Méthode pratique*

1) On calcule le polynôme caractéristique de u et on vérifie qu'il est scindé.

2) On recherche la plus grande famille libre de vecteurs propres, puis on considère un supplémentaire F du sous-espace G engendré par cette famille.

On introduit la projection p de E sur F parallèlement à G et l'endomorphisme $v = p \circ u_{|F}$ de $\mathcal{L}(F)$.

On recherche la plus grande famille libre de vecteurs propres de v et on continue de la même manière jusqu'à l'obtention d'une base de E.

ÉNONCÉS

1 Pour s'entraîner

1 Calculer la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n$, où $n \geqslant 1$.

Cette matrice est-elle inversible ?

2 **a*)** Soit M une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang $r \leqslant 1$.

Exprimer le polynôme caractéristique de M : $\operatorname{Det}(M - x\mathrm{I}_n)$, en fonction de x et $\operatorname{tr}(M)$.

b) En déduire que, si A est une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et X une matrice colonne :

$$\operatorname{Det}(A + X\,{}^tX) = \operatorname{Det}(A)(1 + \operatorname{tr}({}^tXA^{-1}X)).$$

Donner une expression plus simple de ce résultat.

c) Retrouver ce résultat en calculant les produits matriciels suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ X & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & {}^tX \\ -X & A \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & {}^tX \\ -X & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A^{-1}X & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

3 Soit E un espace vectoriel réel de dimension 3 muni d'une base.

On considère l'endomorphisme u dont la matrice dans cette base est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer les sous-espaces de E stables par u.

b) Montrer que tout sous-espace de E stable par u admet un supplémentaire stable par u.

4* Soit A dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe p dans $\mathbb{N}^*$tel que A^p soit diagonalisable.

Montrer que A est diagonalisable.

La propriété subsiste-t-elle si A n'est pas inversible ?

5* Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E.

Soit ϕ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$ défini par $\phi(f) = p \circ f \circ p$.

L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?

Préciser la dimension des sous-espaces propres de ϕ.

Conseils

1) Regarder si la matrice est diagonalisable...

2) a) Que dire des valeurs propres d'une matrice de rang $r \leqslant 1$?

b) Mettre A en facteur dans $A + X\,{}^tX$ et regarder le rang de $A^{-1}X\,{}^tX$...

3) Le cours indique comment rechercher les droites vectorielles stables par u.
Pour déterminer des plans stables par u, considérer les valeurs propres complexes, des vecteurs propres associés, puis les parties réelles et imaginaires des produits matriciels obtenus en écrivant que ce sont des éléments propres.
Ne pas oublier la réciproque. Avez-vous déterminé tous les plans stables par u ?

4) Donner un polynôme annulateur de A^p, puis chercher un polynôme annulateur de A.

5) Utiliser une base adaptée à la décomposition de E en somme directe :

$$E = \operatorname{Im}\ p \oplus \operatorname{Ker}\ p.$$

Et travailler avec les matrices des endomorphismes.

2* Une équation matricielle

L'objectif de l'exercice est la résolution de l'équation $X^n = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ lorsque X désigne une matrice carrée complexe.

1 Déterminer les matrices carrées complexes qui commutent avec la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2 Résoudre l'équation matricielle.

3 Préciser les solutions réelles.

Conseils

1) Lorsque deux endomorphismes commutent, tout sous-espace propre de l'un...

2) Montrer d'abord que la matrice X cherchée a la forme $X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$, puis utiliser la question précédente.

3 Valeurs propres des matrices pseudo-magiques

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite pseudo-magique s'il existe un réel $S(A)$ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} = S(A).$$

Soit E l'ensemble des matrices pseudo-magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1 Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, .)$.

2 Montrer que A est pseudo-magique si, et seulement s'il existe un réel μ tel que $AJ = JA = \mu J$.

3 Soit A une matrice de E inversible. Montrer que $S(A) \neq 0$ et que A^{-1} appartient à E. Que vaut $S(A^{-1})$?

4 Soit A une matrice de E. Montrer que $S(A)$ est une valeur propre de A.

5 Soit A une matrice de E dont tous les coefficients sont positifs. Montrer que si α est une valeur propre réelle de A alors $|\alpha| \leqslant S(A)$.

Conseils

5) Considérer un vecteur propre $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre α et isoler dans l'expression de la j-ième ligne de l'égalité $AX = \alpha X$ le terme contenant x_j où $|x_j| = \max\{|x_i|\ ; i \in [\![1,n]\!]\}$.

4 Deux spectres infinis non dénombrables

On considère l'ensemble E des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier naturel k, la série $\sum n^k u_n$ est absolument convergente.

1 Montrer que E est un sous-espace de l'espace des suites réelles.

2 Soit φ définie sur E par $\varphi(u) = v$ où, pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1}$.

Montrer que φ est un endomorphisme. Donner ses éléments propres.

3 Mêmes questions avec l'application ψ définie sur E par $\psi(u) = w$ où, pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_n = nu_{n+1} - u_n$.

Conseils

2) et **3)** Chercher simultanément les valeurs propres et les vecteurs propres.

5 Déterminant d'une matrice circulante

Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par :

- $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

- M la matrice $M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_n \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & a_2 \\ \vdots & & & & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$.

1 Montrer que J est diagonalisable.

2 En déduire que M est diagonalisable. Calculer $\operatorname{Det} M$.

Conseils

1) Chercher un polynôme annulateur de J.

2) Expression du déterminant à l'aide des valeurs propres.

6 Une réduction de matrice

Réduire la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Conseils

Considérer un vecteur propre $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ associé à une valeur propre λ.
La résolution de $AX = \lambda X$ se ramène à l'étude d'une suite récurrente.

7 Un endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Pour toute application f de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et tout entier n, on définit l'application $T(f)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad T(f)(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

et

$$T(f)(0) = \frac{f(0)}{n+1}.$$

1 Montrer que l'application $T(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2 Soit E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à p.

Montrer que la restriction φ de T à E est un endomorphisme. Est-il injectif ? Surjectif ?

Donner ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

3 Mêmes questions avec E espace des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$.

4 Mêmes questions avec $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Conseils

1) Vérifier la définition ou appliquer la règle de L'Hospital.
3) Attention, en dimension infinie, un endomorphisme injectif n'est pas nécessairement surjectif.
4) Remarquer que, si $\lambda \neq 0$ et $T(f) = \lambda f$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Puis résoudre une équation différentielle.

8 Série de Fourier et éléments propres d'un endomorphisme

1 Déterminer la série de Fourier de $t \mapsto \left|\sin \frac{t}{2}\right|$.

2 Soit E l'espace vectoriel des applications 2π-périodiques continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et φ l'endomorphisme de E défini par :

$\forall f \in E \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\varphi(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)\right| f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

Conseils

2) Le réel λ est une valeur propre pour φ si, et seulement s'il existe une fonction f de E non identiquement nulle telle que $\varphi(f) = \lambda f$.
Comparer les séries de Fourier de $\varphi(f)$ et de λf.

9 Trente secondes pour répondre !

Un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie vérifiant $(f - 2\mathrm{I}_E)(f + 3\mathrm{I}_E)^2 = 0$ et $(f - 2\mathrm{I}_E)(f + 3\mathrm{I}_E) \neq 0$ est-il diagonalisable ?

Conseil

Rechercher le polynôme minimal de f.

10 Calcul d'une puissance de matrice

Calculer A^n pour n dans $\mathbb{N}$ et :

$$A = \begin{pmatrix} k + \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & k - \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Conseils

Plusieurs méthodes possibles, remarquer que A est la somme d'une matrice de symétrie orthogonale et de $k\mathrm{I}_2$ et appliquer la formule du binôme ou bien diagonaliser la matrice A ou encore utiliser un polynôme annulateur de A.

11* Valeurs propres et image d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 & 1 \\ \mathrm{j}^2 & 1 & \mathrm{j} \end{pmatrix}$ où j désigne $\mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Pour X dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, on pose $\varphi(X) = AXA$.

Déterminer les valeurs propres et l'image de φ.

Conseils

Étudier le rang de A, écrire A comme le produit d'une matrice colonne et d'une matrice ligne, calculer A^2 puis l'image de l'endomorphisme canoniquement associé à A.

12 Recherche de sous-espaces stables par un endomorphisme

Quels sont les sous-espaces stables par f endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Conseils

Rechercher les sous-espaces stables en les classant par dimension.
Considérer la restriction de l'endomorphisme u canoniquement associé à A à un sous-espace stable F de dimension 2.

13 Un endomorphisme bien caché

Soit M la matrice réelle triangulaire inférieure telle que, si $n \geqslant i \geqslant j \geqslant 1$, $m_{i,j} = \binom{i-1}{j-1}$.

1 Donner les éléments propres de M.

2 Calculer M^k pour k dans $\mathbb{Z}$.

Conseil

2) Chercher un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ associé à la matrice ${}^tM$.

14 Un endomorphisme encore mieux caché

Soit N la matrice réelle : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & n-1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Trouver un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont N est la matrice.

En déduire les éléments propres de N. La matrice N est-elle diagonalisable ?

Conseil

Introduire l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_n[X]$ associé à N dans la base canonique, puis résoudre l'équation différentielle vérifiée par la fonction polynomiale associée à un vecteur propre P de u.

15 Deux équations dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Résoudre l'équation $X^2 = A$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans les cas suivants :

1 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 2 & 6 & -14 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. **2** $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 5 \\ -5 & -5 & -6 \end{pmatrix}$.

Conseils

Réduire A et remarquer la commutativité de deux matrices.

16 Une matrice décomposée par blocs

Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, diagonalisable. La matrice $A = \begin{pmatrix} M & -I \\ -I & M \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ est-elle diagonalisable ? Inversible ?

Conseils

Réduire la matrice $\begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et utiliser les décompositions par blocs.

17 Une exponentielle de matrice

Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$: $\exp(M) = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 4 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Conseil

Remarquer que M et $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 4 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$ commutent. En déduire qu'elles ont un vecteur propre commun.

18 Recherche d'un polynôme minimal

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme minimal $\pi(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{m_i}$ et $B = \begin{pmatrix} A & I \\ 0 & A \end{pmatrix}$.

Déterminer le polynôme minimal de B.

Conseil

Écrire pour tout polynôme P l'expression de $P(B)$ à l'aide de $P(A)$ et de $P'(A)$.

19 Convergence vers l'inverse d'une matrice

Dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on considère une matrice A inversible.

On construit une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ par :

$$\begin{cases} A_0 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N} \;\; A_{n+1} = 2A_n - A_n A A_n \end{cases}.$$

1 Exprimer $\mathrm{I}_p - AA_n$ en fonction de $\mathrm{I}_p - AA_0$.

2 On suppose que AA_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

a) Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

(i) $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (\mathrm{I}_p - AA_0)^n = 0$;

(ii) les valeurs propres de $\mathrm{I}_p - AA_0$ ont toutes une valeur absolue strictement inférieure à 1 ;

(iii) les valeurs propres de AA_0 sont dans $]0, 2[$.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A_0 pour que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers A^{-1}.

20 Surjectivité d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On note u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $u(X) = AX - XB$.

Montrer que l'endomorphisme u est surjectif si, et seulement si, A et B n'ont pas de valeur propre commune.

Conseils

Remarquer tout d'abord que l'injectivité de u est équivalente à sa surjectivité.
On suppose l'endomorphisme u injectif, il existe une matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX = XB$. En déduire que le polynôme minimal de A annule B.
On rappelle que λ est une valeur propre de B si, et seulement si, la matrice $B - \lambda I_n$ est non inversible.
Conclure.
Inversement si A et B ont une valeur propre commune, introduire deux matrices Z et Y vecteurs propres respectifs de A et ${}^tB$. Puis considérer $X = Z\,{}^tY$.

21 Relations polynomiales entre deux matrices

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour qu'il existe deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(A) = B$ et $Q(B) = A$.

Conseils

On suppose qu'il existe deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(A) = B$ et $Q(B) = A$.
En déduire que B est diagonalisable et que A et B ont les mêmes sous-espaces propres.
Réciproquement, si A et B ont les mêmes sous-espaces propres, construire les deux polynômes P et Q en utilisant les valeurs propres.

22* Trace des puissances d'une matrice

Déterminer toutes les matrices A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que : $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \mathrm{Tr}(A^k) = n$.

Conseils

Remarquer que les matrices dont le spectre est $\{1\}$ conviennent.
Pour la réciproque :
• montrer, en utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, que 1 est une valeur propre de A ;
• montrer, par récurrence, que 1 est la seule valeur propre.

23* Supplémentaire stable d'un sous-espace stable

D'après St Cyr.

Soit G un sous-groupe fini et commutatif du groupe $\mathcal{GL}(E)$ de cardinal q.

À tout élément u, endomorphisme de E, on associe $\overline{u} = \dfrac{1}{q} \sum\limits_{v\in G} v \circ u \circ v^{-1}$.

1 Montrer que $\overline{u}$ est un endomorphisme de E.

2 Montrer que $\forall w \in G \quad w \circ \overline{u} \circ w^{-1} = \overline{u}$.

3 Soit un sous espace F stable par G, c'est-à-dire stable par tout élément de G et un projecteur p d'image F. Montrer que : $\forall w \in G \quad w(F) = F$.

Montrer que $\overline{p}$ est un projecteur d'image F et de noyau stable par G.

4 En déduire que tout sous-espace de E stable par G admet un supplémentaire stable par G.

5 Soit u un endomorphisme idempotent de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u.

Montrer que F admet un supplémentaire stable par u.

Conseils

2) Remarquer que $\{w \circ v \,;\, v \in G\} = G$.

3) Vérifier que $\overline{p} \circ \overline{p} = \overline{p}$ en remarquant que $\forall x \in E \quad \overline{p} \circ p(x) = p(x)$.

Montrer que $\operatorname{Im} \overline{p} \subset F$, puis que $F \subset \operatorname{Im} \overline{p}$.

Algorithmes

1 Calcul du polynôme caractéristique par la méthode de Souriau

Partie mathématique

On admet, dans ce texte, les formules de Newton. Soit n est un entier naturel non nul, et $P_n(X)$ le polynôme unitaire, à coefficients réels, de degré n :

$$P_n(X) = X^n - a_1 X^{n-1} - \cdots - a_{n-1}X - a_n = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i).$$

On note, pour tout entier $k \geqslant 1$, $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^k$.

Les formules de Newton permettent de calculer S_k à l'aide des coefficients du polynôme P_n par $a_1 - S_1 = 0$ et, pour tout entier k dans $[\![2, n]\!]$:

$$ka_k + a_{k-1}S_1 + a_{k-2}S_2 + \cdots + a_1 S_{k-1} - S_k = 0.$$

Soit A une matrice carrée d'ordre n, à coefficients réels. On note $P_A(X)$ le polynôme caractéristique de A, et $x_1, \cdots, x_n$ ses racines :

$$\begin{aligned} P_A(X) &= (-1)^n \operatorname{Det}(A - XI_n) \\ &= X^n - a_1 X^{n-1} - \cdots - a_{n-1}X - a_n \\ &= \prod_{i=1}^{n}(X - x_i). \end{aligned}$$

1 Montrer que, pour tout entier k de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$\operatorname{Tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k = S_k.$$

Vous pourrez admettre que toute matrice carrée complexe est semblable à une matrice triangulaire.

2 On définit la suite de réels $(u_k)_k$ et la suite de matrices carrées d'ordre n, $(B_k)_k$ par $B_1 = A$, et pour tout $k \geqslant 1$:

$$u_k = \frac{\operatorname{Tr}(B_k)}{k} \;;\quad B_{k+1} = (B_k - u_k I_n)A.$$

Montrer que, pour tout k dans $[\![1, n,]\!]$, on a :

$$u_k = a_k \text{ et } B_k = A^k - \sum_{i=1}^{k-1} u_{k-i} A^i.$$

3 Montrer que $B_{n+1} = 0$.

4 Montrer que, si A est inversible, l'inverse de A est :

$$A^{-1} = \frac{B_{n-1} - u_{n-1} I_n}{u_n}.$$

Partie informatique

5 Écrire un programme qui calcule le polynôme caractéristique d'une matrice A. L'appliquer à une matrice A que vous choisirez.

2 Résolution d'un système linéaire par la méthode de Gauss-Seidel

Partie mathématique

Soit A une matrice complexe carrée d'ordre n telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad |a_{ii}| > \sum_{k \in [\![1,n]\!], k \neq i} |a_{ik}|$$

Une telle matrice est dite à diagonale strictement dominante. Nous avons montré dans le livre de cours, *Algèbre-Géométrie*, en exercice du *chapitre* 1, que la matrice A est alors inversible. Ce résultat est appelé théorème d'Hadamard.

1 On écrit $A = L + U$ où la matrice L est triangulaire inférieure et la matrice U triangulaire supérieure, avec tous ses éléments diagonaux nuls et on pose : $M = L^{-1}U$.

Montrer que les valeurs propres de M sont de module strictement inférieur à 1.

On admettra que toute matrice carrée complexe est semblable à une matrice triangulaire.

En déduire que la suite $(M^p)_p$ converge vers 0.

2 Soit B un vecteur identifié à une matrice colonne et X la solution du système $AX = B$.

Montrer que la suite définie par :

$$X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \;\; \forall p \in \mathbb{N} \;\; X_{p+1} = L^{-1}(B - UX_p)$$

converge vers X.

Partie informatique

3 Écrire un programme de résolution du système. L'appliquer à un système que vous choisirez.

C O R R I G É S

1 Pour s'entraîner

1 *Maple* nous aide.

Avec Maple

```
> restart:with(linalg):
A:=matrix(3,3,[1,1,11,1,1,1,1,1,1]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvects(A);
```

$$[5, 1, \{[3, 1, 1]\}], [0, 1, \{[-1, 1, 0]\}], [-2, 1, \{[-4, 1, 1]\}]$$

La matrice A admet trois valeurs propres distinctes : -2, 5 et 0. Elle est diagonalisable.

Mais 0 est valeur propre de la matrice. Elle n'est donc pas inversible.

Un vecteur propre associé à la valeur propre -2 est : $(-4, 1, 1)$.

Un vecteur propre associé à la valeur propre 5 est : $(3, 1, 1)$.

Un vecteur propre associé à la valeur propre 0 est : $(-1, 1, 0)$.

Par conséquent :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Tous calculs faits :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 & 0 \\ 0 & 5^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalement :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4(-2)^n + 3.5^n & 4(-2)^n + 3.5^n & -16(-2)^n + 9.5^n \\ -(-2)^n + 5^n & -(-2)^n + 5^n & 4(-2)^n + 3.5^n \\ -(-2)^n + 5^n & -(-2)^n + 5^n & 4(-2)^n + 3.5^n \end{pmatrix}.$$

2 **a)** La matrice M est de rang $r \leqslant 1$.

0 est donc valeur propre d'ordre au moins $n - 1$ et le polynôme caractéristique de M se factorise par x^{n-1}.

D'où :

$$\operatorname{Det}(M - x\mathrm{I}_n) = (-x)^{n-1}(\operatorname{tr}(M) - x).$$

b) Écrivons $A + X\,{}^tX = A(\mathrm{I}_n + A^{-1}X\,{}^tX)$.

Si la matrice X n'est pas nulle, le rang de $X\,{}^tX$ est 1.

Le rang de $A^{-1}X\,{}^tX$ est donc inférieur ou égal à 1.

Par conséquent :

$$\operatorname{Det}(A + X\,{}^tX) = \operatorname{Det}(A)\operatorname{Det}(\mathrm{I}_n + A^{-1}X\,{}^tX).$$

Appliquons le résultat de la question précédente avec $x = -1$:

$$\operatorname{Det}(\mathrm{I}_n + A^{-1}X\,{}^tX) = \operatorname{tr}(A^{-1}X\,{}^tX) + 1 = \operatorname{tr}({}^tX A^{-1}X) + 1.$$

Or la matrice ${}^tX(A^{-1}X)$ est une matrice carrée d'ordre 1. Nous l'identifions à un scalaire.

Et nous obtenons :

$$\operatorname{Det}(A + X\,{}^tX) = \operatorname{Det}(A)\left({}^tXA^{-1}X + 1\right).$$

c) Calculons les deux produits matriciels donnés par blocs :

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ X & \mathrm{I}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & {}^{\mathrm{t}}X\\ -X & A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & {}^{\mathrm{t}}X\\ 0 & A+X\,{}^{\mathrm{t}}X\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & {}^{\mathrm{t}}X\\ -X & A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ A^{-1}X & \mathrm{I}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+{}^{\mathrm{t}}XA^{-1}X & {}^{\mathrm{t}}X\\ 0 & A\end{pmatrix}.$$

Les matrices $\begin{pmatrix}1 & 0\\ X & \mathrm{I}_n\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1 & 0\\ A^{-1}X & \mathrm{I}_n\end{pmatrix}$ ont pour déterminant 1. Donc :

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix}1 & {}^{\mathrm{t}}X\\ 0 & A+X\,{}^{\mathrm{t}}X\end{pmatrix}=\mathrm{Det}\begin{pmatrix}1+{}^{\mathrm{t}}XA^{-1}X & {}^{\mathrm{t}}X\\ 0 & A\end{pmatrix}.$$

Soit :

$$\mathrm{Det}(A+X\,{}^{\mathrm{t}}X)=\mathrm{Det}(A)\left({}^{\mathrm{t}}XA^{-1}X+1\right).$$

3 **a)** Une pincée de *Maple*.

Avec Maple

```
> A:=matrix(3,3,[1,-1,1,1,0,0,0,1,0]);
```

$$A:=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

```
eigenvects(A);
```

$$[1,\,1,\,\{[1,\,1,\,1]\}],\ [I,\,1,\,\{[-1,\,I,\,1]\}],\ [-I,\,1,\,\{[-1,\,-I,\,1]\}]$$

La matrice A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Elle admet la valeur propre simple 1 et deux valeurs propres complexes conjuguées i et $-\mathrm{i}$.

La seule droite vectorielle stable par u est donc la droite engendrée par $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Recherchons les plans vectoriels stables en utilisant les valeurs propres complexes.

Ainsi :

$$A\begin{pmatrix}-1\\ \mathrm{i}\\ 1\end{pmatrix}=\mathrm{i}\begin{pmatrix}-1\\ \mathrm{i}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\mathrm{i}\\ -1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

b) Considérons alors la partie réelle, puis la partie imaginaire de ce produit matriciel.

$$A\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\end{pmatrix};\quad A\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

Nous en déduisons que le plan vectoriel engendré par $\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$ est stable par u.

Est-il le seul ?

Supposons qu'il existe deux plans vectoriels distincts stables par u.

Leur intersection est une droite vectorielle stable par u, c'est-à-dire la droite vectorielle déterminée ci-dessus. Mais cette droite n'est pas contenue dans le plan vectoriel stable trouvé. Ce plan est donc le seul plan vectoriel stable par u. Et il est supplémentaire de la droite vectorielle stable trouvée.

De même, E et $\{0\}$ sont stables par u et supplémentaires.

4 La matrice A^p est diagonalisable.

Nous connaissons un polynôme P annulateur de A^p dont les racines sont simples :

$$P(X)=\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A^p)}(X-\lambda).$$

Or, la matrice A est inversible. Donc A^p est inversible et 0 n'est pas valeur propre de A^p.

Chaque valeur propre de A^p admet p racines p-ièmes complexes distinctes.

Notons E l'ensemble de ces racines et Q le polynôme tel que $Q(X)=\prod_{\mu\in E}(X-\mu)$.

Puisque $P(A^p)=\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A^p)}(A^p-\lambda)=0$, nous avons :

$$Q(A)=\prod_{\mu\in E}(A-\mu\mathrm{I}_n)=0.$$

La matrice A admet un polynôme annulateur dont les racines sont simples. Elle est diagonalisable.

Si A n'est pas inversible, il suffit de considérer une matrice nilpotente non nulle.

Il existe $p>0$ tel que $A^p=0$. La matrice A^p est diagonalisable. Mais, pour toute valeur propre λ de A, λ^p est valeur propre de A^p.

0 est donc la seule valeur propre de A, qui n'est pas diagonalisable.

5 Considérons une base B de E adaptée à la décomposition de E en somme directe :

$$E=\mathrm{Im}\,p\oplus\mathrm{Ker}\,p.$$

Dans cette base, la matrice de p a la forme par blocs :

$$\begin{pmatrix}\mathrm{I}_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Notons $\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}$ la matrice de même forme associée à un endomorphisme f de $\mathcal{L}(E)$.

La matrice de $p \circ f \circ p$ est :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme f est vecteur propre de Φ si, et seulement si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \quad \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Cette égalité équivaut à :

$$A = \lambda A\,; \quad 0 = \lambda B\,; \quad 0 = \lambda C\,; \quad 0 = \lambda D.$$

Attention, les matrices écrites B, C et D n'ont pas la même taille !

• Si $\lambda = 0$, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

0 est valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé est $n^2 - r^2$.

• Si $\lambda = 1$, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1 est valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé est r^2. La somme des dimensions des sous-espaces propres est n^2.

L'endomorphisme ϕ est diagonalisable.

2 Une équation matricielle

1 Soit Y une matrice commutant avec N. Tout sous-espace propre de la matrice N est stable par Y.

Le sous-espace engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable par Y.

La matrice Y s'écrit sous la forme :

$$Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & f & g \end{pmatrix}.$$

Elle commute avec N si, et seulement si : $NY = YN$.

Cette égalité équivaut à :

$$a = d = g\,; \quad b = e\,; \quad f = 0.$$

Nous obtenons : $Y = a\mathrm{I}_3 + bN + cN^2$.

Réciproquement, vérifier sans douleur que ces matrices commutent avec N.

2 Soit X une matrice solution. Alors :

$$X^{n+1} = AX = XA.$$

Les matrices A et X commutent. Tout sous-espace propre de la matrice A est stable par X.

Le sous-espace engendré par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est stable par X. De même :

$${}^{\mathrm{t}}(X^{n+1}) = ({}^{\mathrm{t}}X)^{n+1} = {}^{\mathrm{t}}A\,{}^{\mathrm{t}}X = {}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}A.$$

Nous en déduisons que ce sous-espace est aussi stable par ${}^{\mathrm{t}}X$.

La matrice X a donc la forme $X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$, où Z désigne une matrice carrée d'ordre 3 et λ un scalaire.

L'équation devient alors $X^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & Z^n \end{pmatrix} = A$.

Elle équivaut à :

$$\lambda^n = 2\,; \quad Z^n = B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_3 + N.$$

Nous savons que la matrice N est nilpotente et vérifie :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N^3 = 0.$$

Si la matrice Z vérifie $Z^n = B$, elle commute avec B, donc avec N.

Utilisons la première question. La matrice Z est de la forme $Z = a\mathrm{I}_3 + bN + cN^2$.

Les matrices I_n, N, N^2 commutent et forment une famille libre.

L'équation $Z^n = B$ se traduit par :

$$a^n\mathrm{I}_3 + na^{n-1}(bN + cN^2) + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}(bN + cN^2)^2 = \mathrm{I}_3 + N.$$

Soit $a^n = 1\,;\ b = \dfrac{a}{n}\,;\ c = -\dfrac{n-1}{2n}b$.

Les solutions complexes de l'équation matricielle sont les matrices $X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$, avec :

$$\lambda^n = 2\,; \quad Z = a\mathrm{I}_3 + bN + cN^2,$$

où a est une racine réelle de l'équation $a^n = 1$, b, c définis par $b = \dfrac{a}{n}$ et $c = -\dfrac{n-1}{2n}b$.

3 Les solutions réelles s'obtiennent en prenant $a = 1$ et λ réel.

3 Valeurs propres des matrices pseudo-magiques

1 Simple vérification de la caractérisation des sous-espaces.

2 On conclut facilement en remarquant :

$$(AJ)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \quad \text{et que} \quad (JA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}.$$

3 La matrice A est inversible. Il existe une matrice B telle que $AB = BA = \mathrm{I}_n$.

Or, $AJ = JA = S(A)J$.

Par conséquent, $BAJ = S(A)BJ$, puis $J = S(A)BJ$.

De même, $J = S(A)JB$.

La matrice J n'est pas nulle. Le réel $S(A)$ ne l'est pas.

La relation $BJ = JB = S(A)^{-1}J$ prouve que B est une matrice pseudo-magique et que $S(B) = S(A)^{-1}$.

4 $S(A - S(A)\mathrm{I}_n) = 0$.

D'après la question **3)** la matrice $A - S(A)\mathrm{I}_n$ n'est pas inversible. Le réel $S(A)$ est une valeur propre de A.

5 Soit α une valeur propre de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

Il existe un indice j tel que $|x_j| = \max\{|x_i| \,;\, i \in [\![1, n]\!]\}$.

On a : $$(a_{j,j} - \alpha)x_j = -\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_{j,k}x_k.$$

$$|(a_{j,j} - \alpha)x_j| \leqslant \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{j,k}|\,|x_k| \leqslant |x_j| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{j,k}|.$$

Le vecteur X est non nul. Donc $|x_j| \neq 0$.

On en déduit :

$$|\alpha| \leqslant |a_{j,j}| + |a_{j,j} - \alpha| \leqslant |a_{j,j}| + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} |a_{j,k}|.$$

Or les coefficients de A sont positifs. $|\alpha| \leqslant S(A)$.

4 Deux spectres infinis non dénombrables

On considère l'ensemble E des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier naturel k, la série $\sum n^k u_n$ est absolument convergente.

1 Simple vérification de la caractérisation des sous-espaces.

2 L'application φ est linéaire.

Soit u dans E. Pour tout entier naturel k, nous avons $n^k v_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^k (n+1)^k u_{n+1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^k = 1$. Donc $n^k v_n \sim (n+1)^k u_{n+1}$.

Or la série $\sum n^k u_n$ est absolument convergente.

La série $\sum n^k v_n$ est absolument convergente.

La suite $\varphi(u)$ appartient à E.

L'application φ est un endomorphisme de E.

Recherchons λ dans $\mathbb{R}$ et u dans E non nulle tels que : $\varphi(u) = \lambda u$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \lambda u_n.$$

La suite u est une suite géométrique de raison λ. Elle appartient à E si, et seulement si, $|\lambda| \leqslant 1$.

Si $\lambda = 0$, la suite nulle à partir du rang 1 et de premier terme u_0 non nul est un vecteur propre.

Le spectre de φ est $]-1, 1[$. Pour λ dans $]-1, 1[$, le sous-espace propre associé est la droite engendrée par la suite $(\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3 D'après la question **2)**, pour tout u dans E, la suite $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est dans E.

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, la série $\sum n^{k+1} u_{n+1}$ est absolument convergente.

On en déduit que la série $\sum n^k w_n$ est absolument convergente.

La suite $\psi(u)$ est dans E.

On en déduit que ψ est un endomorphisme de E.

Recherchons λ dans $\mathbb{R}$ et u dans E non nulle tels que $\psi(u) = \lambda u$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n u_{n+1} = (\lambda + 1) u_n.$$

La suite u est entièrement déterminée par :

- pour $n = 0$, on a $\lambda = -1$ ou $u_0 = 0$;
- pour n non nul, on a $u_{n+1} = \dfrac{\lambda+1}{n} u_n$; puis $u_n = \dfrac{(\lambda+1)^{n-1}}{(n-1)!} u_1$.

La suite u est entièrement déterminée par ces deux conditions.

Si $\lambda = -1$, le sous-espace propre associé est la droite engendrée par la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u_n = 0$ pour n dans $\mathbb{N}^*$.

Si $\lambda \neq -1$, la suite définie par $u_0 = 0, u_1 \in \mathbb{R}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{(\lambda+1)^{n-1}}{(n-1)!} u_1$ est-elle dans E ?

Soit k dans $\mathbb{N}$, étudions l'absolue convergence de la série $\sum a_n$ avec $a_n = n^k \dfrac{(\lambda+1)^{n-1}}{(n-1)!} u_1$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{\lambda+1}{n}. \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0.$$

On en déduit que λ est une valeur propre et que le sous-espace propre est la droite engendrée par la suite définie par $u_0 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \dfrac{(\lambda+1)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Le spectre de ψ est $\mathbb{R}$.

5 Déterminant d'une matrice circulante

1 Le polynôme $X^n - 1$ est annulateur de J. Il n'a que des racines simples sur $\mathbb{C}$. La matrice J est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

L'ensemble des racines n-ième de l'unité est le spectre de A.

Notons D la matrice diagonale de diagonale $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où, pour tout k de $[\![1, n]\!]$:

$$\lambda_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right).$$

Il existe une matrice inversible B telle que :

$$A = BDB^{-1}.$$

2 La matrice M s'écrit :

$$M = P(J) \quad \text{en notant} \quad P(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

On en déduit $M = BP(D)B^{-1}$.

La matrice $P(D)$ est diagonale de diagonale $(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n))$.

On en déduit que M est diagonalisable et que $\operatorname{Det} M = \prod_{k=1}^{n} P(\lambda_k)$.

6 Une réduction de matrice

Considérons un vecteur propre $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ associé à une valeur propre λ.

L'équation $AX = \lambda X$ équivaut au système :

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 - x_2 = 0 \\ \forall k \in [\![2, n-1]\!] \; -x_{k-1} + (2-\lambda)x_k - x_{k+1} = 0 \\ -x_{n-1} + (2-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

En complétant par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \forall k \in [\![1, n]\!] \; -x_{k-1} + (2-\lambda)x_k - x_{k+1} = 0. \\ x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

La suite récurrente ainsi définie a pour équation caractéristique : $r^2 + (\lambda - 2)r + 1 = 0$.

Son discriminant est $\Delta = \lambda(\lambda - 4)$.

• Si $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles r et s distinctes.

$\forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad x_k = \alpha r^k + \beta s^k$.

Pour vérifier $x_0 = 0$ on choisit $\alpha = -\beta$.

L'égalité $x_{n+1} = 0$ équivaut à $\alpha(r^{n+1} - s^{n+1}) = 0$. Ceci n'est possible que pour $\alpha = 0$ ou $r = s\exp\left(\dfrac{2im\pi}{n+1}\right)$.

Cette dernière condition n'est pas réalisable donc : $\alpha = 0$. On obtient $X = 0$.

Dans ce cas, λ n'est pas valeur propre.

• Si $\Delta = 0$, il y a une racine double r.

$\forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad x_k = (\alpha + k\beta)s^k$.

Pour vérifier $x_0 = 0$ on choisit $\alpha = 0$.

L'égalité $x_{n+1} = 0$ conduit à $\beta = 0$.

On obtient $X = 0$.

Dans ce cas, λ n'est pas valeur propre.

• Si $\Delta < 0$, il y a deux racines complexes conjuguées.

Dans ce cas : $0 < \lambda < 4$.

Il existe θ dans $]0, \pi[$ tel que $\lambda = 4\cos^2 \dfrac{\theta}{2}$.

Les deux racines sont : $-e^{i\theta}$ et $-e^{-i\theta}$.

On obtient :

$$\forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad x_k = (-1)^k[\alpha e^{ik\theta} + \beta e^{-ik\theta}].$$

Pour vérifier $x_0 = 0$ on choisit $\alpha = -\beta$.

$\forall k \in [\![0, n+1]\!] \quad x_k = 2\alpha(-1)^k \sin(k\theta)$.

L'égalité $x_{n+1} = 0$ conduit à $\theta = \dfrac{m\pi}{n+1}$ avec $m \in [\![1, n]\!]$ car $0 < \theta < 0$.

On obtient n valeurs propres distinctes deux à deux :

$$\lambda_m = 4\cos^2 \frac{m\pi}{2(n+1)} \quad \text{avec} \quad m \in [\![1, n]\!].$$

Soit D la matrice diagonale de diagonale $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et P la matrice de passage.

Le terme d'indice (i, j) de P est $2(-1)^i \sin\left(i\dfrac{j\pi}{n+1}\right)$.

On a :

$$A = PDP^{-1}.$$

7 Un endomorphisme de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

1 Notons h l'application $T(f)$.

L'application $t \mapsto t^n f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc l'application $x \mapsto \int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit la continuité de h sur $\mathbb{R}^*$. Montrons la continuité en 0.

Utilisons la *règle de L'Hospital*.

La dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ est $x \mapsto x^n f(x)$ et celle de $x \mapsto x^{n+1}$ est $x \mapsto (n+1)x^n$.

De plus $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^n f(x)}{(n+1)x^n} = \frac{f(0)}{n+1}$. Donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{f(0)}{n+1}$.

L'application h est continue sur $\mathbb{R}$.

On peut également effectuer la démonstration suivante.

Calculons $h(x) - h(0) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x t^n[f(t) - f(0)]\,\mathrm{d}t$.

L'application f est continue en 0 :

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ \forall t \in \mathbb{R} \quad |t| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(t) - f(0)| \leqslant \varepsilon$.

Pour x tel que $|x| \leqslant \alpha$, on a :

$$\begin{aligned}|h(x) - h(0)| &\leqslant \frac{1}{|x|^{n+1}} \left|\int_0^x |t|^n\, |f(t) - f(0)|\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|x|^{n+1}}\varepsilon \left|\int_0^x |t|^n\,\mathrm{d}t\right| = \frac{\varepsilon}{n+1}.\end{aligned}$$

On en déduit la continuité de h en 0.

2 ▬ L'application T est clairement linéaire. Si f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à p, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n+p+1$ et de valuation au moins égale à $n+1$. Par conséquent, la fonction h est bien une fonction polynomiale et son degré est inférieur ou égal à p. L'application φ est un endomorphisme de E.

Recherchons son noyau.

Soit f dans E telle que $\varphi(f)$ soit l'application nulle. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

En dérivant, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad x^n f(x) = 0$.

L'application f est nulle.

$\mathrm{Ker}\ \varphi = \{0_E\}$.

L'endomorphisme φ est injectif.

Or la dimension de E est finie. L'endomorphisme φ est surjectif.

Recherchons les valeurs propres et les vecteurs propres.

Soit λ dans $\mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \displaystyle\sum_0^p a_k x^k$ telle que $\varphi(f) = \lambda f$.

On en déduit, après intégration :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_0^p a_k \frac{x^k}{k+n+1} = \lambda \sum_0^p a_k x^k.$$

En identifiant les coefficients, on obtient :

$$\forall k \in [\![0, p]\!] \quad a_k = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{1}{k+n+1}.$$

Par conséquent, le spectre de φ est :

$$\left\{\frac{1}{k+n+1}\ ; k \in [\![0, p]\!]\right\}.$$

Le sous-espace propre de φ associé à la valeur propre $\dfrac{1}{k+n+1}$ est la droite engendrée par la fonction $x \mapsto x^k$.

3 ▬ On montre de la même manière que l'espace E est stable par T. L'endomorphisme ψ induit par T sur E est injectif. On vérifie que l'image de la base canonique par ψ est une base de E. L'endomorphisme ψ est surjectif.

On vérifie de la même manière que le spectre de ψ est $\left\{\dfrac{1}{k+n+1}\ ; k \in \mathbb{N}\right\}$ et que le sous-espace propre de ψ associé à la valeur propre $\dfrac{1}{k+n+1}$ est la droite engendrée par la fonction $x \mapsto x^k$.

4 ▬ La question **1)** prouve que T est un endomorphisme de E.

On montre comme à la question **2)** que T est injectif.

Étudions la surjectivité de T.

Soit g dans E. Supposons qu'il existe une application f de E telle que $f(0) = (n+1)g(0)$ et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad g(x) = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

L'application g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad x^{n+1} g'(x) + (n+1)x^n g(x) = x^n f(x).$$

Lorsque g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ on trouve f définie par :

$\forall x \in \mathbb{R}^*\ f(x) = xg'(x) + (n+1)g(x)$ et $f(0) = (n+1)g(0)$.

Lorsque g n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}^*$, l'application g n'a pas d'antécédent par T.

L'application T n'est pas surjective.

Déterminons les éléments propres de T.

Tout d'abord, 0 n'est pas valeur propre de T car T est injective.

Soit λ non nulle et f dans E non identiquement nulle telle que $T(f) = \lambda f$.

On vérifie que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que :

$T(f) = \lambda f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \lambda x f'(x) + \lambda(n+1) f(x)$ et $f(0)(1 - \lambda(n+1)) = 0$.

Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$x \mapsto \begin{cases} C_1 x^{\frac{1}{\lambda} - (n+1)} & \text{pour } x > 0 \\ C_2\, (-x)^{\frac{1}{\lambda} - (n+1)} & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

L'application f est prolongeable par continuité en 0 si, et seulement si : $\dfrac{1}{\lambda} - (n+1) \geqslant 0$.

Pour $\frac{1}{\lambda} - (n+1) = 0$, on a $f(0) = C \neq 0$ et $\lambda = \frac{1}{n+1}$.

Pour $\frac{1}{\lambda} - (n+1) > 0$, on a $f(0) = 0$.

Par conséquent, le spectre de T est $]0, \frac{1}{n+1}]$.

Le sous-espace propre de T associé à la valeur propre $\frac{1}{n+1}$ est la droite des fonctions constantes.

Le sous espace propre de T associé à la valeur propre λ de $]0, \frac{1}{n+1}[$ est un sous-espace de dimension 2, engendré par les deux fonctions : f_1 nulle sur $\mathbb{R}^+$ définie par $f_1(x) = (-x)^{\frac{1}{\lambda}-(n+1)}$ sur $\mathbb{R}^-$ et f_2 nulle sur $\mathbb{R}^-$ définie par $f_2(x) = x^{\frac{1}{\lambda}-(n+1)}$ sur $\mathbb{R}^+$.

8 Série de Fourier et éléments propres d'un endomorphisme

1 La fonction $h\ : t \mapsto |\sin \frac{t}{2}|$ est continue, paire et 2π-périodique.

$$a_0(h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} a_n(h) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\sin\frac{t}{2}\right| \cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin\frac{t}{2}\cos(nt)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin\left(nt+\frac{t}{2}\right) - \sin\left(nt-\frac{t}{2}\right)\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+1/2} - \frac{1}{n-1/2}\right) \\ &= -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}. \end{aligned}$$

La fonction h est continue, 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Sa série de Fourier converge normalement vers h sur $\mathbb{R}$. Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(nt).$$

2 On vérifie que φ est un endomorphisme de E.

Pour tout f de E la fonction $\varphi(f)$ est 2π-périodique.

Elle est continue car la fonction $(x,t) \mapsto |\sin(\frac{x-t}{2})| f(t)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [-\pi, \pi]$.

Le réel λ est une valeur propre pour φ si, et seulement s'il existe une fonction f de E non identiquement nulle telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)\right| f(t)\,\mathrm{d}t - \lambda f(x) = 0.$$

La convergence normale de la série $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(nt)$ entraîne la convergence normale de la série :

$$\frac{2}{\pi}f(t) - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(n(x-t))f(t).$$

Ceci permet d'écrire :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\left(\frac{x-t}{2}\right)\right| f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4n^2-1}\cos(n(x-t))f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}a_0(f) - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4n^2-1}\cos(nx)\cos(nt)f(t)\mathrm{d}t \\ &\qquad + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{4n^2-1}\sin(nx)\sin(nt)f(t)\,\mathrm{d}t. \\ &= \frac{1}{\pi}a_0(f) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(nx)a_n(f) \\ &\qquad + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\sin(nx)b_n(f). \end{aligned}$$

Or, l'application f est continue. Le développement ci-dessus est le développement en série de Fourier de la fonction λf. On identifie les coefficients :

$$\lambda\frac{a_0(f)}{2} = \frac{1}{\pi}a_0(f)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lambda a_n(f) = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}a_n(f)$$

et $\lambda b_n(f) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}b_n(f)$.

Ceci donne les conditions suivantes :

$\lambda = \frac{2}{\pi}$ ou $a_0(f) = 0$,

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lambda = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}$ ou $a_n(f) = 0$

et $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lambda = \frac{2}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}$ ou $b_n(f) = 0$.

Par conséquent, le spectre de φ est :

$$\left\{-\frac{2}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}\ ; n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\frac{2}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}\ ; n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $-\frac{2}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}$ est la droite $\{x \mapsto a\cos(nx)\ ; a \in \mathbb{R}\}$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre $\frac{2}{\pi}\frac{1}{4n^2-1}$ est la droite $\{x \mapsto a\sin(nx)\ ; a \in \mathbb{R}\}$.

9 Trente secondes pour répondre !

Le polynôme minimal de f divise $(X-2)(X+3)^2$ et ne divise pas $(X-2)(X+3)$. Il est égal à $(X-2)(X+3)^2$ ou à $(X+3)^2$. Ses racines ne sont pas simples. L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable.

10 Calcul d'une puissance de matrice

1 ▬ Première méthode

$$A = \begin{pmatrix} k+\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & k-\cos\theta \end{pmatrix} = k\mathrm{I} + S \text{ en notant :}$$

$$S = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Les matrices I et S commutent. On applique la formule du binôme.

On remarque que : $S^2 = \mathrm{I}$.

Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

$$A^n = \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{n} \binom{p}{n} k^{n-p}\mathrm{I} + \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ impair}}}^{n} \binom{p}{n} k^{n-p} S.$$

$$\text{Or } \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ pair}}}^{n} \binom{p}{n} k^{n-p} = \frac{(k+1)^n + (k-1)^n}{2}$$

$$\text{et } \sum_{\substack{p=0 \\ p \text{ impair}}}^{n} \binom{p}{n} k^{n-p} = \frac{(k+1)^n - (k-1)^n}{2}.$$

$$\text{Donc } A^n = \frac{(k+1)^n}{2}(\mathrm{I}+S) + \frac{(k-1)^n}{2}(\mathrm{I}-S).$$

2 ▬ Deuxième méthode

Le polynôme caractéristique de A est :

$$P(X) = X^2 - (2k)X + k^2 - 1.$$

Il est annulateur de A.

Effectuons la division euclidienne de X^n par P. Il existe un unique polynôme Q et un unique couple (a_n, b_n) de $\mathbb{R}^2$ tels que : $X^n = P(X)Q(X) + a_n X + b_n$.

Les racines de P sont $k-1$ et $k+1$.

On en déduit : $(k+1)^n = a_n(k+1) + b_n$

et $(k-1)^n = a_n(k-1) + b_n$.

On obtient : $a_n = \dfrac{(k+1)^n - (k-1)^n}{2}$

et $\qquad b_n = \dfrac{(1-k)(k+1)^n + (1+k)(k-1)^n}{2}$

puis :

$$A^n = \frac{(k+1)^n - (k-1)^n}{2} A + \frac{(1-k)(k+1)^n + (1+k)(k-1)^n}{2}\mathrm{I}$$

$$\text{Donc } A^n = \frac{(k+1)^n}{2}(\mathrm{I}+S) + \frac{(k-1)^n}{2}(\mathrm{I}-S).$$

3 ▬ Troisième méthode

Pour $\theta \neq 0[2\pi]$, les racines du polynôme caractéristique sont simples. La matrice A est diagonalisable.

Le spectre de A est $\{k-1, k+1\}$.

Le vecteur $(\sin\theta, 1-\cos\theta)$ est un vecteur propre pour la valeur propre $k-1$.

Le vecteur $(\sin\theta, -1-\cos\theta)$ est un vecteur propre pour la valeur propre $k+1$.

Nous avons $A = PDP^{-1}$ en posant :

$$P = \begin{pmatrix} \sin\theta & \sin\theta \\ 1-\cos\theta & -1-\cos\theta \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} k-1 & 0 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $A^n = P\begin{pmatrix} (k-1)^n & 0 \\ 0 & (k+1)^n \end{pmatrix}P^{-1}$.

11 Valeurs propres et image d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$

En notant L la matrice ligne : $\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \end{pmatrix}$, on écrit :

$$A = {}^tLL \quad \text{et} \quad \varphi(X) = {}^tL(LX^tL)L = (LX^tL)A$$

car (LX^tL) est un réel.

Or $L^tL = 0$.

On en déduit que : $A^2 = 0$ puis que : X^2 est un polynôme annulateur de φ.

L'endomorphisme φ n'est pas identiquement nulle, donc le polynôme minimal de φ est X^2, scindé à racine double. L'endomorphisme φ est trigonalisable, non diagonalisable et son spectre est $\{0\}$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 est son noyau Ker (φ).

$$X \in \operatorname{Ker}(\varphi) \iff LX^tL = 0.$$

Or $X \longmapsto LX^tL$ est une forme linéaire non nulle. On en déduit que Ker (φ) est de dimension 8.

Le théorème du rang, nous donne : rg $(\varphi) = 1$.

On déduit de $\varphi(X) = (LX^tL)A$ que Im $(\varphi) = \operatorname{Vect}(A)$.

12 Recherche de sous-espaces stables par un endomorphisme

Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

Le polynôme caractéristique de A est $(3-X)^2(1-X)$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite D_1 engendrée par le vecteur $(1, -1, 0)$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 3 est la droite D_2 engendrée par le vecteur $(1, 1, 0)$.

Le seul sous-espace stable de dimension 0 est $\{0\}$.

Les seules droites stables, sont les droites dirigées par un vecteur propre : D_1 et D_2.

Le seul sous-espace de dimension 3 est $\mathbb{R}^3$.

Recherchons maintenant les plans stables.

Soit F un plan stable par u et notons $u_{|F}$ la restriction de u à F.

Le spectre de $u_{|F}$ est contenu dans celui de u et son polynôme caractéristique est de degré 2 et divise celui de u.

Il y a deux possibilités : $(3-X)(1-X)$ et $(3-X)^2$.

Si le polynôme caractéristique de $u_{|F}$ est $(3-X)(1-X)$, alors $F \subset \mathrm{Ker}\,(u-\mathrm{Id})(u-3\mathrm{Id})$.

Or, d'après le théorème de décomposition des noyaux $\mathrm{Ker}\,(u-\mathrm{Id})(u-3\mathrm{Id})$ est le plan $D_1 \oplus D_2$.

Donc $F = D_1 \oplus D_2$.

Si le polynôme caractéristique de $u_{|F}$ est $(3-X)^2$, alors $F \subset \mathrm{Ker}\,(u-3\mathrm{Id})^2$.

Or $\mathrm{Ker}\,(u-3\mathrm{Id})^2$ est le plan P d'équation $x = y$. Par conséquent $F = P$.

En conclusion, les sous-espaces stables par u sont :

$\{0\}$, $\mathrm{Ker}\,(u-\mathrm{Id})$, $\mathrm{Ker}\,(u-3\mathrm{Id})$, $\mathrm{Ker}\,(u-3\mathrm{Id})\oplus\mathrm{Ker}\,(u-\mathrm{Id})$, $\mathrm{Ker}\,(u-3\mathrm{Id})^2$ et $\mathbb{R}^3$.

13 Un endomorphisme bien caché

1 La matrice est triangulaire inférieure et sa diagonale ne contient que des 1. Le spectre de M est $\{1\}$.

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite engendrée par le vecteur $(0,\dots,0,1)$.

La matrice M n'est pas diagonalisable.

2 On remarque que ${}^tM$ est la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ défini par : $\varphi(P) = P(X+1)$.

La matrice $({}^tM)^k$ est la matrice de $\varphi^k : P \mapsto P(X+k)$ pour tout k de $\mathbb{Z}$.

Or $\varphi^k(X^{i-1}) = \displaystyle\sum_{l=1}^{i} \binom{i-1}{l-1} k^{i-j} X^{l-1}$.

Le terme de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de M^k est $\dbinom{i-1}{l-1} k^{i-j}$.

14 Un endomorphisme encore mieux caché

Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ associé à $\mathbb{N}$ dans la base canonique.

On observe que pour tout j de $[\![0,n]\!]$, on a :

$$u(X^j) = jX^{j-1} + (n-j)X^{i+1}.$$

On en déduit que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad u(P) = (1-X^2)P' + nXP.$$

Le scalaire λ est une valeur propre de u si, et seulement s'il existe un polynôme non nul P tel que :

$$(1-X^2)P' + nXP = \lambda P.$$

Ceci nous conduit à résoudre l'équation différentielle : $(1-x^2)y' + (nx-\lambda)y = 0$.

Les solutions sur $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$ sont de la forme $x \mapsto C|x-1|^{n-\lambda/2}|x+1|^{n+\lambda/2}$.

Il s'agit de fonctions polynomiales si, et seulement si, le scalaire λ appartient à $\{n-2p \ ; p \in [\![0,n]\!]\}$.

On trouve ainsi $n+1$ valeurs propres distinctes. Le sous-espace propre associé à la valeur propre $n-2p$ est la droite engendrée par le polynôme $(X-1)^p(X+1)^{n-p}$.

On en déduit que N est diagonalisable, que son spectre est $\{n-2p \ ; p \in [\![0,n]\!]\}$ et qu'un vecteur propre associé à la valeur propre $n-2p$ est le vecteur dont la r-ième coordonnée dans la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ est :

$\displaystyle\sum_{k=r-1-n+p}^{\min(r-1,p)} (-1)^k \binom{p}{k}\binom{n-p}{r-1-k}$, coefficient de X^{r-1} dans le développement de $(X-1)^p(X+1)^{n-p}$.

15 Deux équations dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1 La matrice A s'écrit $A = PTP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$.

En posant $Y = P^{-1}XP$. L'équation devient : $Y^2 = T$.

On écrit Y sous la forme : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

Or Y et T commutent. On en déduit : $b = g = h = 0$.

En identifiant Y^2 et T on trouve : $a = 0$, $e = 0$ et $dc = 1$. Les solutions sont de la forme :

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ \dfrac{1}{c} & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}.$$

2 La matrice A s'écrit $A = PDP^{-1}$ avec :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Un calcul analogue donne $a = 2$ ou $a = -2$, $i = -e$, $hf = -1 - e^2$ et $b = c = d = g = 0$.

16 Une matrice décomposée par blocs

Soit $B = \begin{pmatrix} m & -1 \\ -1 & m \end{pmatrix}$.

On obtient $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m-1 & 0 \\ 0 & m+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On en déduit :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M-I & 0 \\ 0 & M+I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}.$$

La matrice M est diagonalisable. Elle s'écrit $M = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale et P une matrice inversible.

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} P & P \\ P & -P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D-I & 0 \\ 0 & D+I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P^{-1} & P^{-1} \\ P^{-1} & -P^{-1} \end{pmatrix}.$$

La matrice A est diagonalisable et le spectre de A est $\{\lambda - 1\,;\lambda \in \mathrm{Sp}(M)\} \cup \{\lambda + 1\,;\lambda \in \mathrm{Sp}(M)\}$.

La matrice A est inversible si, et seulement si, 1 et -1 ne sont pas valeurs propres de M.

17 Une exponentielle de matrice

On note $A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 4 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Les matrices M et A commutent. Elles ont un vecteur propre commun.

La seule direction propre de A est $(1, 0)$. Le vecteur $(1, 0)$ est donc également un vecteur propre pour M.

On en déduit que M s'écrit : $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$.

$MA = AM \Leftrightarrow a = c$.

La seule valeur propre de $\exp(M)$ est e^a.

Par conséquent : $a = \mathrm{i}\dfrac{\pi}{2} + 2\mathrm{i}k\pi$ avec k dans $\mathbb{Z}$.

$M = a\mathrm{I} + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice N est nilpotente : $N^2 = 0$.

Donc :

$$\begin{aligned} \exp(M) &= \exp(a\mathrm{I} + N) = \exp(a\mathrm{I})\exp(N) \\ &= \mathrm{e}^a \exp(N) = \mathrm{i}\exp(N) = \mathrm{i}(\mathrm{I} + N). \end{aligned}$$

On identifie : $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & \mathrm{i}b \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 4 \\ 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix}$. D'où $b = -4\mathrm{i}$.

Les solutions sont les matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{i}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) & -4\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i}\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \end{pmatrix} \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

18 Recherche d'un polynôme minimal

Soit k dans $\mathbb{N}$. On montre par récurrence que : $B^k = \begin{pmatrix} A^k & kA^{k-1} \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$.

Pour tout polynôme P l'expression de $P(B)$ est :

$$P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le polynôme P est annulateur de A si, et seulement si, P et P' sont annulateurs de A.

Le polynôme minimal de B est le polynôme unitaire de plus bas degré tel que π divise P et P'.

Soit S le polynôme tel que $P = S\pi$. Alors π divise $S'\pi + S\pi'$ si, et seulement si, le polynôme π divise $S\pi'$. C'est-à-dire si, et seulement s'il existe un polynôme T tel que $T\pi = S\pi'$.

On cherche donc le polynôme T de plus bas degré tel que $T\dfrac{\pi}{\pi'}$ soit un polynôme.

On pose ensuite $S = T\dfrac{\pi}{\pi'}$, puis $P = T\dfrac{\pi^2}{\pi'}$.

Déterminons T.

Or $\dfrac{\pi'(X)}{\pi(X)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{m_k}{X - \alpha_k}$.

Donc : $$\frac{\pi(X)}{\pi'(X)} = \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{p} m_k \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p}(X - \alpha_j)}.$$

De plus les polynômes $\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - \alpha_i)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} m_k \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{p}(X - \alpha_j)$ n'ont pas de racine commune. Ils sont premiers entre eux.

Par conséquent :

$$T = \sum_{k=1}^{p} m_k \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{p} (X - \alpha_j) \quad \text{et} \quad S = \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i).$$

On obtient :

$$P(X) = S(X)\pi(X) = \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i) \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{m_i}$$

$$= \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{m_i+1}.$$

Le polynôme minimal de B est $\prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{m_i+1}$.

19 Convergence vers l'inverse d'une matrice

1 ▬ Il suffit de faire le calcul.

$I_p - AA_{n+1} = I_p - 2AA_n + AA_nA \cdot A_n = (I_p - AA_n)^2$.

Donc : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \;\; (I_p - AA_n) = (I_p - AA_0)^{2^n}$.

2 ▬ **a)** AA_0 est diagonalisable :

$\quad \exists P \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{R}) \quad AA_0 = P\mathrm{diag}(\lambda_1, .., \lambda_n)P^{-1}$.

Donc $I_p - AA_n = P\mathrm{diag}((1-\lambda_1)^{2^n}, .., (1-\lambda_n)^{2^n})P^{-1}$.

La matrice $I_p - AA_n$ est diagonalisable.

Les valeurs propres de $I_p - AA_0$ sont donc $1 - \lambda_1, .., 1 - \lambda_n$. On sait que :

$$|\lambda| < 1 \iff -1 < \lambda < 1$$
$$\iff 0 < 1 - \lambda < 2.$$

L'application $M \mapsto P^{-1}MP$ est continue puisque c'est une application linéaire dans un espace de dimension finie.

On peut dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} (I_p - AA_0)^n = 0$ si, et seulement si :

$$\lim_{n \to +\infty} P^{-1}(I_p - AA_0)^n P = 0.$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} (I_p - AA_0)^n = 0$ si, et seulement si :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{diag}((1-\lambda_1)^n, .., (1-\lambda_n)^n) = 0.$$

On doit donc avoir :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad |1 - \lambda_k| < 1.$$

Ainsi :

$$\lim_{n \to +\infty} (I_p - AA_0)^n = 0 \iff \forall k \in [\![1, n]\!] \quad 0 < \lambda_k < 2.$$

b) A_n converge vers A^{-1} si, et seulement si, AA_n converge vers I_p.

Donc A_n converge vers A^{-1} si, et seulement si, $I_p - AA_n$ converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

D'après la question précédente, une condition nécessaire et suffisante pour que A_n converge vers A^{-1} est que :

$$\mathrm{Sp}(A \cdot A_0) \subset]0, 2[.$$

20 Surjectivité d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

L'espace vectoriel est de dimension finie. L'injectivité et la surjectivité de l'endomorphisme u sont équivalentes.

Nous allons démontrer les implications contraposées.

Supposons tout d'abord l'endomorphisme u non injectif. Il existe une matrice X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX = XB$.

On montre par une récurrence immédiate que : $\forall k \in \mathbb{N} \quad A^k X = XB^k$.

Vérifier que, plus généralement, pour tout P de $\mathbb{C}[X]$ on a $P(A)X = XP(B)$.

En particulier, pour le polynôme minimal π_A de A, on obtient $X\pi_A(B) = 0$.

La matrice X n'est pas nulle. Par conséquent, la matrice $\pi_A(B)$ n'est pas inversible.

Or $\pi_A(B) = \prod_{i=1}^{p} (B - \lambda_i I_n)$ où $\{\lambda_i \,;\, i \in [\![1, p]\!]\}$ désigne le spectre de A dans $\mathbb{C}$.

Montrons par l'absurde que l'une des matrices $B - \lambda_i I_n$ est non inversible. En effet, si cela n'était pas le cas, toutes les matrices $B - \lambda_i I_n$ seraient inversibles et leur produit $\pi_A(B)$ également. Ce qui n'est pas.

Par conséquent, il existe j dans $[\![1, p]\!]$ tel que $B - \lambda_j I_n$ ne soit pas inversible.

On en déduit que λ_j est une valeur propre commune de A et de B.

Réciproquement, on suppose que λ est une valeur propre commune de A et de B.

Les matrices B et ${}^tB$ ont le même spectre. Le complexe λ est également une valeur propre de ${}^tB$.

Notons Z une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vecteur propre de A et Y une matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ vecteur propre de ${}^tB$ pour cette valeur propre.

$AZ = \lambda Z. \; {}^tBY = \lambda Y.$

Posons $X = Z{}^tY$. La matrice X, non nulle, appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$AX = (AZ){}^tY = \lambda Z{}^tY = Z(\lambda{}^tY) = Z{}^t({}^tBY)$$
$$= Z{}^tYB = XB.$$

Le noyau de u contient X. Il n'est pas réduit au vecteur nul.

Nous avons montré :

$$u \text{ non injectif} \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) \neq \varnothing.$$

En contraposant, on obtient :

$$u \text{ injectif} \Leftrightarrow \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing.$$

21 Relations polynomiales entre deux matrices

On suppose qu'il existe deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(A) = B$ et $Q(B) = A$.

La matrice A est diagonalisable. Il existe une matrice inversible M telle que $A = MDM^{-1}$ avec D matrice diagonale de diagonale $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Alors $B = MP(D)M^{-1}$ et la matrice $P(D)$ est diagonale de diagonale $(P(\alpha_1), \dots, P(\alpha_n))$.

On en déduit que B est diagonalisable et que les vecteurs propres pour A associés à une valeur propre α sont vecteurs propres pour B associés à la valeur propre $P(\alpha)$.

On en déduit que le sous-espace propre $E_\alpha(A) \subset E_{P(\alpha)}(B)$.

Les sous-espaces propres de A sont inclus dans les sous-espaces propres de B.

De même, à l'aide de $Q(B) = A$, on montre que les sous-espaces propres de B sont contenus dans les sous-espaces propres de A. En conclusion, les matrices A et B ont les mêmes sous-espaces propres.

Réciproquement, supposons que les matrices A et B ont les mêmes sous-espaces propres.

Notons $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ le spectre de A sans répétition et $(\mu_1, \dots, \mu_p)$ celui de B.

On suppose que les valeurs propres de A et de B sont rangées de telle sorte que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad E_{\lambda_i}(A) = E_{\mu_i}(B).$$

On sait qu'il existe un unique polynôme P de degré p tel que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad P(\lambda_i) = \mu_i.$$

(On le construit à l'aide des *polynômes d'interpolation de Lagrange*.)

De même, il existe un unique polynôme Q de degré n tel que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad Q(\mu_i) = \lambda_i.$$

Soit X un vecteur quelconque de $E_{\lambda_i}(A) = E_{\mu_i}(B)$.

$P(A)X = P(\lambda_i)X = \mu_i X = BX$. On en déduit $P(A) = B$.

Vérifier de même : $Q(B) = A$.

22 Trace des puissances d'une matrice

Remarquons tout d'abord que les matrices dont le spectre est $\{1\}$ conviennent.

Montrons la réciproque par récurrence sur n.

Le résultat est acquis pour $n = 1$. Supposons que pour tout entier $m < n$, toute matrice C de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ telle que $\forall k \in [\![1, m]\!] \quad \mathrm{Tr}(C^k) = m$ admet 1 pour unique valeur propre. Montrons le résultat au rang n.

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant : $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \mathrm{Tr}(A^k) = n$.

• Montrons que 1 appartient au spectre de A.

Notons $P_A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ le polynôme caractéristique de A.

Le *théorème de Cayley-Hamilton* assure :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k A^k = 0_n.$$

L'application trace est linéaire.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{Tr}\,(A^k) = 0. \qquad n \sum_{k=0}^{n} a_k = 0.$$

Le réel 1 est racine de P_A.

• Montrons par l'absurde que 1 est la seule valeur propre.

Si 1 n'est pas la seule valeur propre, il existe p dans $[\![1, n]\!]$ et Q dans $\mathbb{C}[X]$ tels que $P_A = (X - 1)^p Q$ et $(X - 1) \wedge Q = 1$.

L'entier p est la multiplicité de la valeur propre 1.

Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A et e l'application identique.

Le *théorème de décomposition des noyaux* permet d'écrire :

$$\mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}\,(u - e)^p \oplus \mathrm{Ker}\; Q(u).$$

Les sous-espaces $\mathrm{Ker}\,(u - e)^p$ et $\mathrm{Ker}\; Q(u)$ sont stables par u.

$\mathrm{Ker}\,(u - e)^p$ est le sous-espace caractéristique de u pour la valeur propre 1. Il est de dimension p.

$\mathrm{Ker}\; Q(u)$ est un sous-espace de dimension $n - p$.

Il existe une base B_1deKer $(u - e)^p$ dans laquelle la matrice M de la restriction v de u à $\mathrm{Ker}\,(u - e)^p$ est triangulaire supérieure et ne comporte que des 1 sur la diagonale.

Complétons cette base B_1 en une base adaptée à la décomposition en somme directe.

La matrice de u dans cette base est :

$$P = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}.$$

L'application v admet $(X-1)^p$ comme polynôme annulateur. L'unique racine est 1.

Le polynôme caractéristique de M est $(X-1)^p$.

$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad P^k = \begin{pmatrix} M^k & 0 \\ 0 & N^k \end{pmatrix}$.

$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad n = \mathrm{Tr}(P^k) = p + \mathrm{Tr}(N^k)$.

Or N matrice de $\mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{C})$ vérifie :

$$\forall k \in [\![1,n-p]\!] \quad \mathrm{Tr}(N^k) = n-p.$$

$p > 1$.

L'hypothèse de récurrence appliquée à $n-p$ prouve que 1 est l'unique racine du polynôme caractéristique P_N de N.

Par conséquent $Q(1) = 0$. Ceci contredit encore $(X-1) \wedge Q = 1$. Donc 1 est la seule racine de P_A.

En conclusion, la solution du problème est l'ensemble des matrices de spectre $\{1\}$.

23 Supplémentaire stable d'un sous-espace stable

1 Immédiat.

2 Soit $w \in G$.

$$w \circ \overline{u} \circ w^{-1} = \frac{1}{q}\sum_{v\in G} w \circ (v \circ u \circ v^{-1}) \circ w^{-1}$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{v\in G} (w \circ v) \circ u \circ (v^{-1} \circ w^{-1})$$

$$w \circ \overline{u} \circ w^{-1} = \frac{1}{q}\sum_{v\in G} (w \circ v) \circ u \circ (w \circ v)^{-1}.$$

Montrons que $\{w \circ v / v \in G\} = G$.

L'application $v \mapsto w \circ v$ est bijective de G dans G car w est inversible. (Translation dans un groupe.)

$$\frac{1}{q}\sum_{v\in G} (w \circ v) \circ u \circ (w \circ v)^{-1} = \frac{1}{q}\sum_{v\in G} v \circ u \circ v^{-1} = \overline{u}.$$

3 Montrons que $\forall w \in G \quad w(F) = F$.

• Soit $w \in G$. L'ensemble G est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$.

L'application w^{-1} appartient à G et $w^{-1}(F) \subset F$.

Par conséquent $F \subset w(F)$, puis $w(F) = F$.

• Montrons que $\overline{p}$ est un projecteur en vérifiant que $\overline{p} \circ \overline{p} = \overline{p}$.

$$\overline{p} \circ \overline{p} = \frac{1}{q}\sum_{v\in G} \overline{p} \circ (v \circ p \circ v^{-1}).$$

D'après la question **2)**, nous avons $v \circ \overline{p} = \overline{p} \circ v$ pour tout v de G.

$$\overline{p} \circ \overline{p} = \frac{1}{q}\sum_{v\in G} v \circ \overline{p} \circ p \circ v^{-1}.$$

Montrons que $\forall x \in E \quad \overline{p} \circ p(x) = p(x)$.

Soit x dans E. Le vecteur $p(x)$ appartient à F.

Or F est stable par v^{-1}. Donc $v^{-1} \circ p(x)$ appartient à F.

La projection p a pour image F. Par conséquent la restriction de p à F est l'identité.

$$(p \circ v^{-1} \circ p)(x) = (v^{-1} \circ p)(x).$$

$$(v \circ p \circ v^{-1} \circ p)(x) = p(x).$$

Puis : $\qquad (\overline{p} \circ p)(x) = p(x).$

Revenons au calcul de $\overline{p} \circ \overline{p}$.

$$\overline{p} \circ \overline{p} = \frac{1}{q}\sum_{v\in G} v \circ \overline{p} \circ p \circ v^{-1} = \frac{1}{q}\sum_{v\in G} v \circ p \circ v^{-1} = \overline{p}.$$

• Montrer que $\mathrm{Im}\,\overline{p} \subset F$.

Soit x quelconque dans E. Le vecteur $p \circ v^{-1}(x)$ appartient à F et F est stable par v. Donc $v \circ p \circ v^{-1}(x)$ appartient à F. Ainsi $\overline{p}(x)$ appartient à F.

Montrons que $F \subset \mathrm{Im}\,\overline{p}$. Il suffit de vérifier que $\forall x \in F \quad \overline{p}(x) = x$.

Soit x dans F. Alors $v^{-1}(x)$ est encore dans F, donc dans l'image de p.

$p \circ v^{-1}(x) = v^{-1}(x)$.

$$\overline{p}(x) = \frac{1}{q}\sum_{v\in G} v \circ p \circ v^{-1}(x) = \frac{1}{q}\sum_{v\in G} v \circ v^{-1}(x) = x.$$

• La commutativité de $\overline{p}$ avec tout élément de G assure la stabilité de $\mathrm{Ker}\,\overline{p}$ par G.

4 Conclusion immédiate.

5 Soit G le groupe $\langle u \rangle$ engendré par u. Il est fini car u est idempotent.

D'après la question **4)**, le sous-espace vectoriel admet un supplémentaire stable par $\langle u \rangle$, donc par u.

Algorithmes

1 Calcul du polynôme caractéristique par la méthode de Souriau

Partie mathématique

1 Nous avons admis que toute matrice carrée complexe est semblable à une matrice triangulaire. Il existe donc une matrice carrée, complexe, inversible, P, et une matrice carrée, complexe triangulaire T telles que :

$$A = P^{-1}TP.$$

T et A ont même polynôme caractéristique. Puisque T est triangulaire, ses éléments diagonaux sont les racines du polynôme caractéristique. Nous en déduisons que, pour tout $k \geqslant 1$:

$$\mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(T^k) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k = S_k.$$

2 Nous ne vous ferons pas l'injure de rédiger cette récurrence simple !

3 C'est le *théorème de Cayley-Hamilton*.

4 D'après la question précédente :

$$A^{n+1} - \sum_{i=1}^{n} u_{n+1-i} A^i = 0.$$

Soit : $A[A(B_{n-1} - a_{n-1} I_n) - a_n I_n] = 0$.

D'où le résultat.

Partie informatique

5

Avec Maple

```
> restart :
> Souriau:=proc(A)
local P,B,k,u,n,J,v,C ;
with(linalg) ;
n:=coldim(A) ;J:=array(identity,1..n,1..n) ;
B:=A ;u:=trace(B) ;
P:=X^n-u*X^(n-1) ;
for k to n-1 do
B:=evalm((B-u*J)&*A) ; u:=trace(B)/(k+1) ;
P:=P-u*X^(n-k-1) ;

#Pour pouvoir calculer l'inverse de A, si A
#est inversible

if k=n-2 then v:=u ;C:=evalm(B) ;fi ;
od ;
print(P) ;
if u<>0 then print(evalm((C-v*J)/u)) ;fi ;
end :

> A:=matrix(3,3,[1,2,3,-1,-4,2,0,2,1]) ;
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Souriau(A) ;
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
```

$$X^3 + 2X^2 - 9X + 12$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{-1}{12} & \frac{-1}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

```
> charpoly(A,X) ;inverse(A) ;
```

$$X^3 + 2X^2 - 9X + 12$$

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-4}{3} \\ \frac{-1}{12} & \frac{-1}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

2 Résolution d'un système linéaire par la méthode de Gauss-Seidel

Partie mathématique

1 Soit λ un complexe de module supérieur ou égal à 1. Alors : $M - \lambda \mathrm{I}_n = L^{-1}U - \lambda \mathrm{I}_n$

La matrice L est inversible. Donc la matrice $M - \lambda \mathrm{I}_n$ est inversible si, et seulement si, la matrice $U - \lambda L$ l'est. Vérifier que cette matrice est à diagonale strictement dominante. Elle est inversible, donc λ n'est pas valeur propre de M.

Nous avons admis que la matrice M est semblable à une matrice triangulaire.

Il existe une matrice carrée complexe inversible P telle que :

$$M = PDP^{-1}$$

avec D diagonale.

Pour tout entier p, on a : $M^p = PD^pP^{-1}$.

La suite (D^p) converge vers 0, car les éléments diagonaux de D sont de module strictement inférieur à 1. Les matrices P et P^{-1} sont fixées. L'application ϕ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même, définie par $\phi(N) = PNP^{-1}$ est linéaire, donc continue car $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension finie. La suite (M^p) converge vers 0.

2 Vérifier que : $X = L^{-1}(B - UX)$.

On en déduit :

$$X_{p+1} - X = L^{-1}UX - L^{-1}UX_p = -M(X_p - X).$$

Donc, pour tout $p \geqslant 1$: $X_p - X = (-M)^p(X_0 - X)$.

La convergence de la suite (M^p) vers 0 entraîne celle de la suite (X_p) vers X.

Partie informatique

3

Avec Maple

```
> restart:
> GaussSeidel:=proc(A,B,eps)
local i,j,k,n,X,L,U,IL,M,Y ;
with(linalg) ;
n:=coldim(A) ;
#On teste si la matrice est à diagonale
#dominante.
  for i to n do
   if sum(abs(A[i,k]),k=1..n)>2*abs(A[i,i])
   then print('error') ;break
   fi ;od ;
```

```
#On construit les matrices L et U.
  L:=matrix(n,n,0) ;
  for i to n do
   for j from 1 to i do L[i,j]:=A[i,j] ;od ; od ;
  U:=evalm(A-L) ;
#On calcule M, puis on construit la suite Xp.
  IL:=inverse(L) ;
  M:=evalm(IL&*U) ;X:=matrix(n,1,1) ;
  Y:=evalm(IL&*(B-U&*X)) ;
  while evalf(norm(evalm(Y-X),2))>eps do
   X:=evalm(Y) ;Y:=evalm(IL&*(B-U&*X)) ;
  od ;
end :
```

```
> A:=matrix(4,4,[7,2,1,0,2,8,1,-2,1,2,9,1,0,
                                    -1,2,6]):
B:=matrix(4,1,[1.,2,3,4]) :eps:=10^(-2) :
> GaussSeidel(A,B,10^(-3)) ;
Warning, new definition for norm
Warning, new definition for trace
```

$$\begin{bmatrix} .005299083986 \\ .3965730051 \\ .1694716691 \\ .6762716112 \end{bmatrix}$$

```
> linsolve(A,B) ;
```

$$\begin{bmatrix} .005347593583 \\ .3965446318 \\ .1694775812 \\ .6762649116 \end{bmatrix}$$

4 Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques

RAPPELS DE COURS

Dans ce chapitre, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

FORMES BILINÉAIRES

Une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est dite *bilinéaire* sur E lorsque les applications de E dans $\mathbb{R}$ définies, pour tout x de E, par $g_x : y \longmapsto \varphi(x,\ y)$ et, pour tout y de E, par $d_y : x \longmapsto \varphi(x,\ y)$ sont linéaires.

Une forme bilinéaire φ est *symétrique* lorsque :

$$\forall (x,\ y) \in E \times E \quad \varphi(x,\ y) = \varphi(y,\ x).$$

• L'ensemble $\mathcal{BL}(E)$ des formes bilinéaires sur E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}^{E\times E}, +, \cdot)$.

L'ensemble $\mathcal{BS}(E)$ des formes bilinéaires symétriques sur E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{BL}(E)$.

• On suppose maintenant que l'espace vectoriel E est de dimension n.

Considérons une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

La matrice $A = (\varphi(e_i, e_j))_{i\in[\![1,\ n]\!],\ j\in[\![1,\ n]\!]}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est appelée *matrice de la forme bilinéaire* φ dans la base B.

• Si nous notons X et Y les matrices colonnes des coordonnées de x et de y dans la base B, nous obtenons :

$$\varphi(x,\ y) = {}^{\mathrm{t}}XAY.$$

• L'application de $\mathcal{BL}(E)$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui associe, à toute forme bilinéaire, sa matrice dans la base B est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. La dimension de $\mathcal{BL}(E)$ est n^2.

• La forme bilinéaire φ est symétrique si, et seulement si, A est une matrice symétrique.

• L'application de $\mathcal{BS}(E)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui associe, à toute forme bilinéaire symétrique, sa matrice dans la base B, est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

La dimension de $\mathcal{BS}(E)$ est :

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

• Soit P la matrice de passage de la base B à la base B'.

Notons A' la matrice de φ dans la base B'. Alors $A' = {}^{\mathrm{t}}PAP$.

FORMES QUADRATIQUES

L'application Φ définie de E dans $\mathbb{R}$ est une forme quadratique s'il existe une forme bilinéaire φ telle que :

$$\forall x \in E \quad \Phi(x) = \varphi(x,\ x).$$

• L'ensemble $\mathcal{Q}(E)$ des formes quadratiques sur E est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}^E,\ +,\ .)$.

• Pour toute forme quadratique Φ, il existe une unique forme bilinéaire symétrique φ associée. On l'appelle la *forme polaire* de Φ. Elle est donnée par :

$$\forall (x,\ y) \in E^2 \quad \varphi(x,\ y) = \frac{1}{2}[\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)] \ (\textit{Identité de polarisation.})$$

L'application qui, à toute forme quadratique, associe sa forme polaire est un isomorphisme de $\mathcal{Q}(E)$ dans $\mathcal{BS}(E)$.

• Soit Φ une forme quadratique sur E.

Alors :

$$\forall (x,\ y) \in E^2 \quad \Phi(x+y) + \Phi(x-y) = 2(\Phi(x) + \Phi(y)) \ (\textit{Identité du parallélogramme.})$$

• On suppose maintenant que l'espace vectoriel E est de dimension n.

Considérons une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

Notons A la matrice de φ dans la base B.

• Alors, si nous notons X la matrice colonne des coordonnées de x dans la base B, nous obtenons :

$$\Phi(x) = {}^{\mathrm{t}}XAX.$$

• L'application de $\mathcal{Q}(E)$ dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ qui, associe à toute forme quadratique, la matrice dans la base B de sa forme polaire est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. La dimension de $\mathcal{Q}(E)$ est :

$$\frac{n(n+1)}{2}.$$

La matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ associée à la forme polaire de la forme quadratique Φ est appelée *matrice* de la forme quadratique Φ dans la base B.

• Soit P la matrice de passage de la base B à la base B'. Notons A' la matrice de Φ dans la base B'. Alors :

$$A' = {}^{\mathrm{t}}PAP.$$

Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui représentent la même forme quadratique dans des bases différentes sont dites *congruentes*.

CARACTÉRISATIONS D'UNE FORME QUADRATIQUE

• Une application Φ de E dans $\mathbb{R}$ est une forme quadratique sur E si, et seulement si, elle vérifie les deux propriétés suivantes :

• l'application $\varphi\ :(x,\ y) \longmapsto \frac{1}{2}[\Phi(x+y) - \Phi(x) - \Phi(y)]$ est bilinéaire sur E ;

• $\forall x \in E \quad \varphi(x,\ x) = \Phi(x)$.

• Une application Φ de E dans $\mathbb{R}$ est une forme quadratique sur E si, et seulement si, elle vérifie les deux propriétés suivantes :

• l'application $\varphi\ :(x,\ y) \longmapsto \frac{1}{4}[\Phi(x+y) - \Phi(x-y)]$ est bilinéaire sur E ;

• $\forall x \in E \quad \varphi(x,\ x) = \Phi(x)$.

• Lorsque E est de dimension finie, soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Une application Φ de E dans $\mathbb{R}$ est une forme quadratique sur E si, et seulement si, elle s'exprime à l'aide d'un polynôme homogène de degré 2 en fonction des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ du vecteur x de E.

$$\forall x \in E \quad \Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 b_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j b_{i,\,j}$$

avec, pour tout i et tout j de $[\![1, n]\!]$ distincts, b_i et $b_{i,\,j}$ réels.

Dans ce cas, on obtient l'expression de la forme polaire de Φ en dédoublant les termes de la manière suivante :

$$x_i y_i \qquad \text{se substitue à } x_i^2$$

et

$$\frac{1}{2}(x_i y_j + x_j y_i) \qquad \text{se substitue à } x_i x_j.$$

De plus, la matrice de Φ dans cette base B est la matrice de la famille :

$$\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial x_n}\right) \qquad \text{dans la base } B^*.$$

RANG D'UNE FORME BILINÉAIRE SYMÉTRIQUE OU D'UNE FORME QUADRATIQUE

• Le *noyau* d'une forme quadratique Φ et le noyau de sa forme polaire φ sont définis par :

$$\operatorname{Ker} \Phi = \operatorname{Ker} \varphi = \{x \in E \,; \forall y \in E \quad \varphi(x,\ y) = 0\}.$$

Une forme bilinéaire symétrique φ ou une forme quadratique Φ sont dites *non dégénérées* lorsque leur noyau est réduit à $\{0_E\}$. Elles sont dites *dégénérées* dans le cas contraire.

Soit φ une forme bilinéaire symétrique, le *rang* de φ est le rang de l'application linéaire g, associée à gauche, définie par $x \longmapsto g_x$

Soit Φ une forme quadratique. Le *rang* de Φ est celui de sa forme polaire.

• Lorsque E est de dimension finie, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, Φ une forme quadratique sur E, φ sa forme polaire et A sa matrice dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Alors :

• le noyau de Φ est le sous-espace de E d'équation $AX = 0$;

• les formes Φ ou φ sont dégénérées si, et seulement si : $\operatorname{Det}(A) = 0$.

Le déterminant $\operatorname{Det}(A)$ est appelé *discriminant de Φ dans la base* $(e_1, \ldots, e_n)$.

Une forme quadratique Φ sur un espace vectoriel E de dimension finie est non dégénérée si, et seulement si, son discriminant dans une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est non nul.

• $\operatorname{rg}(\varphi) = \operatorname{rg}(\Phi) = \operatorname{rg}(A)$.

FORMES QUADRATIQUES POSITIVES ET DÉFINIES POSITIVES

Une forme quadratique Φ est *positive* lorsque $\Phi(x) \geqslant 0$, pour tout x de E.

Elle est *définie positive* lorsque $\Phi(x) > 0$, pour tout x non nul de E.

Une forme quadratique Φ est *négative* lorsque $-\Phi$ est positive et *définie négative* lorsque $-\Phi$ est définie positive.

Soit φ une forme bilinéaire symétrique.

On dira que φ est *positive* (respectivement *négative*) lorsque la forme quadratique associée est positive (respectivement *négative*).

On dira que φ est *définie positive* (respectivement *définie négative*) lorsque la forme quadratique associée est définie positive (respectivement *définie négative*).

Soit A une matrice symétrique.

On dira que A est *positive* si la forme quadratique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associée est positive :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^{t}XAX \geqslant 0.$$

On dira que A est *définie positive* lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X \neq 0 \Rightarrow {}^{t}XAX > 0.$$

A est *négative* lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad {}^{t}XAX \leqslant 0.$$

et *définie négative* lorsque :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad X \neq 0 \Rightarrow {}^{t}XAX < 0.$$

• Soit Φ une forme quadratique positive de forme polaire φ. On a :

$$\forall (x,\ y) \in E^2 \quad \varphi(x,\ y)^2 \leqslant \Phi(x)\Phi(y) \qquad \textit{(Inégalité de Cauchy-Schwarz.)}$$

• Une forme quadratique est définie positive si, et seulement si, elle est positive et non dégénérée.

• Soit Φ une forme quadratique positive. On a :

$$\forall (x,\ y) \in E^2 \quad \sqrt{\phi(x+y)} \leqslant \sqrt{\phi(x)} + \sqrt{\phi(y)} \qquad \textit{(Inégalité de Minkowski.)}$$

• Soit A une matrice symétrique réelle. Alors :

– A est positive si, et seulement si : $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$;

– A est définie positive si, et seulement si : $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.

• Notons A une matrice de Φ dans une base fixée quelconque de E.

le couple $s = (\mathrm{card}\,(\mathrm{Sp}(A) \cap \mathbb{R}^{*+}, \mathrm{card}\,(\mathrm{Sp}(A) \cap \mathbb{R}^{*-})$ est appelé la signature de Φ

• Soit Φ une forme quadratique sur E de signature $s = (p,\ q)$ et de rang r. Alors :

• $p + q = r$.

• La forme quadratique Φ est positive si, et seulement si :

$$s = (r, 0).$$

• La forme quadratique Φ est négative si, et seulement si :

$$s = (0,\ r).$$

• La forme quadratique Φ est définie positive si, et seulement si :

$$s = (n, 0).$$

• La forme quadratique Φ est définie négative si, et seulement si :

$$s = (0,\ n).$$

• La forme quadratique Φ est non dégénérée si, et seulement si :

$$p + q = n.$$

• Il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ orthogonale pour Φ telle que :

$$\begin{aligned}
&\forall i \in [\![1, n]\!] \quad i \leqslant p \Rightarrow \Phi(e_i) = 1\\
&\forall i \in [\![1, n]\!] \quad p < i \leqslant p + q \Rightarrow \Phi(e_i) = -1\\
&\forall i \in [\![1, n]\!] \quad i > p + q \Rightarrow \Phi(e_i) = 0.
\end{aligned}$$

La base $(e_1, \dots, e_n)$ est dite *réduite relativement à Φ*.

Dans cette base, l'expression de $\Phi(x)$ en fonction des coordonnées de $(x_1, \dots, x_n)$ de x est :

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{p} {x_i}^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2.$$

• Toute matrice A symétrique réelle de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est congruente à une matrice :

$$J_{p,\, q,\, n} = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ de } \mathcal{S}_n(\mathbb{R}).$$

• Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension n et φ une forme bilinéaire symétrique.

Il existe un unique endomorphisme auto-adjoint u tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \forall y \in E \qquad \varphi(x,\ y) = (u(x) \mid y).$$

L'endomorphisme u est appelé *endomorphisme auto-adjoint associé à φ*.

La matrice de l'endomorphisme u auto-adjoint associé à φ dans une base orthonormale $(e_1, \dots, e_n)$ de E est la matrice de φ dans cette même base.

• Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, Φ_1 une forme quadratique sur E définie positive et Φ_2 une forme quadratique sur E.

Il existe une base de E orthonormale pour Φ_1 et orthogonale pour Φ_2.

• Soit A et B deux matrices symétriques. On suppose A définie positive. Alors il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que :

$$A = {}^tPP \quad \text{et} \quad B = {}^tPDP.$$

ÉNONCÉS

1 Inégalités entre formes quadratiques

Soit E l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Déterminer le plus petit λ dans $\mathbb{R}$ tel que :

$$\lambda \int_{-1}^{1} P(t)^2 \,\mathrm{d}t \geqslant \int_{-1}^{1} P'(t)^2 \,\mathrm{d}t$$

pour tout P de E.

Conseils

Pour λ donné, étudier la forme quadratique Q définie par :

$$Q(P) = \lambda \int_{-1}^{1} P(t)^2 \,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} P'(t)^2 \,\mathrm{d}t.$$

Déterminer une base orthogonale pour Q.

2 Biorthogonal d'un sous-espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie n et φ une forme bilinéaire symétrique sur E. F est un sous-espace vectoriel de E. On note :

- $F^{\perp} = \{y \in E \mid \forall x \in F \quad \varphi(x, y) = 0\}$ et $\operatorname{Ker} \varphi = E^{\perp}$;
- f l'application de F dans E^* le dual de E définie par :

$$\forall x \in F \quad f(x) = \varphi(x, .) \,;$$

- g l'application de E dans F^* le dual de F définie par :

$$\forall x \in E \quad g(x) = \varphi(x, .)_{|F}.$$

1 Montrer que f et g ont même rang.

2 Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} g$. En déduire la dimension de $F^{\perp}$.

3 En déduire la valeur de $\dim (F^{\perp})^{\perp}$, puis que $(F^{\perp})^{\perp} = F + \operatorname{Ker} \varphi$.

Conseils

1) Écrire les matrices de f et de g dans des bases adaptées.
2) Appliquer le théorème du rang.

3 Une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(A,\ B) = \alpha \operatorname{Tr}(AB) + \beta \operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B)$$

où α et β sont deux réels fixés.

Montrer que φ est une forme bilinéaire symétrique. Donner la forme quadratique associée.

Conseils

Commencer par montrer que l'application est symétrique. Il suffira ensuite de montrer la linéarité à gauche.

4 Dédoublement des termes

On définit sur $\mathbb{R}^3$ l'application Q par :

$$Q(x,\ y,\ z) = 3x^2 - 2y^2 + 8xy + 6yz - 4xz.$$

Montrer que Q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$. Donner sa forme polaire et sa matrice dans la base canonique.

Conseil

Méthode du dédoublement des termes.

5 Reconnaître une forme quadratique

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, φ une forme bilinéaire sur E et u un endomorphisme de E.

On définit l'application Q de E dans $\mathbb{R}$ par $Q(x) = \varphi(u(x), x)$.

Montrer que Q est une forme quadratique sur E. Quelle est sa forme polaire ?

Conseil

Utiliser l'une des caractérisations des formes quadratiques.

6 Quand le noyau et le cône isotrope sont confondus

Soit Q une forme quadratique sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

Montrer que Q est de signe constant si, et seulement si, le noyau de Q est égal à son cône isotrope $C(Q)$ défini par :

$$C(Q) = \{x \in E\ ;\ Q(x) = 0\}.$$

Conseils

Lorsque Q est de signe constant, écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Raisonner par l'absurde pour la réciproque.

7* Signature d'une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit S une matrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que l'application Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$Q(A) = \mathrm{Tr}(SA\,{}^{\mathrm{t}}\!A)$$

est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner sa forme polaire.

Quelle est sa signature ? son rang ?

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la forme quadratique Q soit respectivement positive, définie positive, non dégénérée ?

Conseils

Trouver une forme bilinéaire φ telle que :

$$Q(A) = \varphi(A, A).$$

Pour déterminer la signature de Q écrire que la matrice S est congruente à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8 Orthogonalité pour une forme bilinéaire symétrique

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n et φ une forme bilinéaire symétrique.

Deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux pour φ quand $\varphi(x, y) = 0$.

1 Soit A une partie de E. L'orthogonal de A est l'ensemble, noté $A^\perp$, des vecteurs de E orthogonaux à tout vecteur de A.

a) Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. Comparer A et $(A^\perp)^\perp$.

b) Donner $E^\perp$ et $\{0_E\}^\perp$.

2 Soit F et G deux sous-espaces de E.

a) On suppose $F \subset G$. Comparer $F^\perp$ et $G^\perp$.

b) Comparer $(F+G)^\perp$ et $F^\perp \cap G^\perp$.

c) Comparer $F^\perp + G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp$.

d) On suppose, dans cette question, que φ est non dégénérée. Montrer que :

$$\dim F + \dim F^\perp = n$$
$$(F^\perp)^\perp = F$$

A-t-on $E = F \oplus F^\perp$?

e) Montrer que :

$$\dim F + \dim F^\perp = n + \dim(F \cap \mathrm{Ker}\ \varphi)$$
$$F \cap F^\perp = \{0_E\} \Leftrightarrow E = F \oplus F^\perp$$
$$(F^\perp)^\perp = F + \mathrm{Ker}\ \varphi$$

À quelle condition a-t-on $(F^\perp)^\perp = F$?

Conseils

Pour la question **2) d)**, introduire une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de F, la compléter en une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et utiliser la base duale $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ dans E^*.
Remarquer que, dans ce cas, l'application linéaire à gauche g est un isomorphisme de E dans E^*.
Puis montrer que :

$$x \in F^\perp \Leftrightarrow g(x) \in \mathrm{Vect}\,(e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*).$$

Pour la question **2) e)**, introduire un supplémentaire K de $\mathrm{Ker}\ \varphi \cap F$ dans F et un supplémentaire L de $\mathrm{Ker}\ \varphi$ dans E contenant K. Puis, considérer la forme bilinéaire ψ restriction de φ à $L \times L$.
Vérifier que ψ est non dégénérée.

9* Réduction simultanée de deux formes quadratiques

Soit Q et R deux formes quadratiques sur $\mathbb{R}^3$ définies par :

$$Q(x,\ y,\ z) = 3x^2 + y^2 + 3z^2 - 2xz$$
$$R(x,\ y,\ z) = 2y^2 - 3z^2 + 2xz$$

Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle Q et R s'écrivent respectivement :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 \text{ et } aX^2 + bY^2 + cZ^2.$$

Conseil

Penser à la diagonalisation d'une matrice symétrique.

10 Forme quadratique et produit mixte

Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orienté par sa base canonique.

On définit l'application Q de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par $Q(x) = [x,\ u,\ v \wedge x]$, où $[\,,\,,\,]$ désigne le produit mixte sur $\mathbb{R}^3$.

Montrer que Q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.

Préciser sa signature et son noyau. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que Q soit non dégénérée.

Conseils

Séparer les cas $(u,\ v)$ libre et $(u,\ v)$ liée.
Dans le cas où $(u,\ v)$ est libre, utiliser une base orthonormale convenablement choisie.

11 Une somme de formes quadratiques

Soit E un espace euclidien de dimension n et Q la forme quadratique sur E associée au produit scalaire.

On suppose qu'il existe n formes quadratiques $Q_1, \ldots, Q_n$ sur E telles que :

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = Q \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \operatorname{rg} Q_i = n.$$

Montrer que E est somme directe orthogonale de sous-espaces $E_1, \ldots, E_n$ et que les projecteurs orthogonaux $p_1, \ldots, p_n$ associés vérifient :

$$\forall x \in E \quad \forall k \in [\![1, n]\!]$$
$$Q_k(x) = (p_k(x) \mid x) = (p_k(x) \mid p_k(x))$$

Conseil

Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, il existe un endomorphisme de E auto-adjoint u_k tel que :

$$\forall x \in E \quad Q_k(x) = (u_k(x) \mid x)$$

12 Une dernière forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit Q l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$Q(A) = \operatorname{Tr}(A^2).$$

Montrer que c'est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser sa signature et son rang.

Conseil

Considérer les cas particuliers des matrices symétriques et des matrices antisymétriques.

CORRIGÉS

1 Inégalités entre formes quadratiques

On considère la forme quadratique sur E définie par $Q_\lambda(P) = \lambda \int_{-1}^{1} P(t)^2 \,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} P'(t)^2 \,\mathrm{d}t$ de forme polaire :

$$\phi_\lambda(P, R) = \lambda \int_{-1}^{1} P(t)R(t) \,\mathrm{d}t - \int_{-1}^{1} P'(t)R'(t) \,\mathrm{d}t.$$

On voit que $\phi_\lambda(1, X) = 0$ et $\phi_\lambda(X, X^2) = 0$.

Donc X est déjà Q_λ-orthogonal à 1 et à X^2, et une base orthogonale possible est de la forme $1, X, X^2 + a$.

Mais $\phi_\lambda(1, X^2 + a) = \dfrac{2}{3}\lambda + 2a\lambda$ s'annule si $a = -\dfrac{1}{3}$.

Donc une base orthogonale pour Q_λ est $1, X, X^2 - \dfrac{1}{3}$.

Dans cette base la matrice de Q_λ est :

$$\begin{pmatrix} Q_\lambda(1) & 0 & 0 \\ 0 & Q_\lambda(X) & 0 \\ 0 & 0 & Q_\lambda\left(X^2 - \frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}(\lambda - 3) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{45}(\lambda - 15) \end{pmatrix}$$

La forme est positive si, et seulement si, $\lambda \geqslant 15$.

Ainsi $\lambda = 15$ est la meilleure constante vérifiant :

$$\forall P \in E \quad \lambda \int_{-1}^{1} P(t)^2 \,\mathrm{d}t \geqslant \int_{-1}^{1} P'(t)^2 \,\mathrm{d}t.$$

2 Biorthogonal d'un sous-espace vectoriel

1 On choisit une base $(e_F) = (e_1, \dots, e_p)$ de F complétée en une base $(e) = (e_1, \dots, e_n)$ de E.

On considère alors la base duale de E et la base duale de F notées $(e^*) = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ et $(e_F^*) = (e_1^*, \dots, e_p^*)$.

La matrice de f dans les bases (e_F) et (e^*) est A définie par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \ \ \forall j \in [\![1, p]\!] \quad a_{i,j} = e_i^*(f(e_j)) = \varphi(e_i, e_j)$$

De même dans les bases (e) et (e_F^*) la matrice de g est B telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \ \ \forall j \in [\![1, p]\!] \quad b_{j,i} = \varphi(e_j, e_i).$$

Les matrices A et B sont transposées l'une de l'autre. Elles ont le même rang.

2 $x \in \operatorname{Ker}(f) \iff x \in F \quad \forall y \in E \ \ \varphi(x, y) = 0.$

Donc $\operatorname{Ker} f = F \cap \operatorname{Ker} \varphi$.

De même $x \in \operatorname{Ker} g \iff \forall y \in F \ \ \varphi(x, y) = 0.$

Donc $\operatorname{Ker} g = F^\perp$.

Or :

$\operatorname{rg}(f) = \dim F - \dim \operatorname{Ker} f = p - \dim (F \cap \operatorname{Ker} \varphi)$

et

$$\operatorname{rg}(g) = \dim E - \dim \operatorname{Ker} g = n - \dim F^\perp.$$

On en déduit que :

$$\dim E - \dim F^\perp = \dim F - \dim (F \cap \operatorname{Ker} \varphi).$$

Ceci prouve que :

$$\dim F^\perp = \dim E - \dim F + \dim (F \cap \operatorname{Ker} \varphi).$$

3 En appliquant la formule précédente on obtient :

$$\dim (F^\perp)^\perp = \dim E - \dim F^\perp + \dim (F^\perp \cap \operatorname{Ker} \varphi).$$

Mais $F^\perp \cap \operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \varphi$ et en remplaçant $\dim F^\perp$ par l'expression obtenue dans la question **2)** on obtient :

$$\begin{aligned} \dim (F^\perp)^\perp &= \dim F + \dim \operatorname{Ker} \varphi - \dim (F \cap \operatorname{Ker} \varphi) \\ &= \dim (F + \operatorname{Ker}(\varphi)). \end{aligned}$$

Puisque $F + \operatorname{Ker}(\varphi) \subset (F^\perp)^\perp$, l'égalité des dimensions donne l'égalité des espaces.

Conclusion : $F + \operatorname{Ker}(\varphi) = (F^\perp)^\perp$.

3 Une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \varphi(A, B) &= \alpha \operatorname{Tr}(AB) + \beta \operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B) \\ &= \alpha \operatorname{Tr}(BA) + \beta \operatorname{Tr}(B)\operatorname{Tr}(A) = \varphi(B, A) \end{aligned}$$

L'application φ est symétrique.

Montrons la linéarité à gauche.

$\forall (A, A', B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}\varphi(xA + yA', B) &= \alpha \mathrm{Tr}(xAB + yA'B) + \beta \mathrm{Tr}(xA + yA')\mathrm{Tr}(B)\\ &= \alpha x \mathrm{Tr}(AB) + \alpha y \mathrm{Tr}(A'B) + \beta x \mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)\\ &\qquad + \beta y \mathrm{Tr}(A')\mathrm{Tr}(B)\\ &= x\varphi(A, B) + y\varphi(A', B).\end{aligned}$$

L'application φ est bilinéaire symétrique.

L'expression de la forme quadratique associée est :

$$Q(A) = \varphi(A, A) = \alpha \mathrm{Tr}(A^2) + \beta \mathrm{Tr}(A)^2.$$

4 Dédoublement des termes

L'expression de $Q(x, y, z)$ en fonction des coordonnées dans la base canonique est un polynôme homogène de degré 2.

Par conséquent, Q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.

La forme polaire φ s'écrit, en appliquant la méthode du dédoublement des termes :

$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \forall (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned}\varphi((x, y, z), (x', y', z')) =& 3xx' - 2yy' + 4x'y + 4y'x\\ &+ 3y'z + 3yz' - 2x'z - 2xz'.\end{aligned}$$

La matrice de Q dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2\\ 4 & -2 & 3\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

5 Reconnaître une forme quadratique

On introduit l'application ψ définie sur $E \times E$ par :

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= \frac{1}{2}[\varphi(u(x+y), x+y) - \varphi(u(x), x) - \varphi(u(y), y)]\\ &= \frac{1}{2}[\varphi(u(x), y) + \varphi(u(y), x)].\end{aligned}$$

On vérifie facilement que ψ est bilinéaire symétrique et que :

$$\forall x \in E \quad \psi(x, x) = Q(x).$$

On en déduit que Q est une forme quadratique et que ψ est sa forme polaire.

6 Quand le noyau et le cône isotrope sont confondus

Notons φ la forme polaire de Q.

On a toujours $\mathrm{Ker}\, Q \subset C(Q)$.

Supposons Q de signe constant. Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \varphi(x, y)^2 \leqslant Q(x)Q(y).$$

Soit x quelconque dans $C(Q)$. Alors $Q(x) = 0$ et, d'après l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*, on a :

$$\forall y \in E \quad \varphi(x, y) = 0.$$

On en déduit $C(Q) \subset \mathrm{Ker}\, Q$.

Réciproquement, supposons que $C(Q) = \mathrm{Ker}\, Q$. Montrons par l'absurde que le signe de Q est constant.

Si Q n'est pas de signe constant, il existe deux vecteurs x et y de E tels que $Q(x) > 0$ et $Q(y) < 0$.

Pour tout réel λ, on a :

$$Q(\lambda x + y) = \lambda^2 Q(x) + 2\lambda\varphi(x, y) + Q(y).$$

$$\varphi(x, y)^2 - Q(x)Q(y) > 0.$$

Par conséquent, il existe un réel non nul λ tel que :

$$\lambda^2 Q(x) + 2\lambda\varphi(x, y) + Q(y) = 0.$$

$$Q(\lambda x + y) = 0.$$

Le vecteur $\lambda x + y$ appartient au cône isotrope.

Mais il n'appartient pas au noyau. En effet :

$$\varphi(\lambda x + y, x) = \lambda Q(x) + \varphi(x, y).$$

Or λ n'est pas une racine double du trinôme du second degré. Donc $\varphi(\lambda x + y, x) \neq 0$.

Ceci contredit l'égalité $C(Q) = \mathrm{Ker}\, Q$.

Par conséquent, la forme quadratique Q est de signe constant.

7 Signature d'une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On remarque que $Q(A) = \mathrm{Tr}({}^tASA)$. L'application φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\varphi(A, B) = \mathrm{Tr}({}^tASB)$ est bilinéaire et, pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $Q(A) = \varphi(A, A)$.

L'application q est une forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\mathrm{Tr}({}^tASB) = \mathrm{Tr}({}^t({}^tASB)) = \mathrm{Tr}({}^tB{}^tSA) = \mathrm{Tr}({}^tBSA)$, car S est symétrique.

L'application bilinéaire φ est symétrique, c'est la forme polaire de Q.

Notons (p, q) la signature de la forme quadratique de matrice S et J la matrice $\begin{pmatrix} I_p & 0 & 0\\ 0 & -I_q & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

Il existe une matrice P de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $J = {}^tPSP$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a :

$$Q(PM) = \mathrm{Tr}({}^tM{}^tPSPM) = \mathrm{Tr}({}^tMJM).$$

Notons $m_{i,\,j}$ le terme général de la matrice M.

$$Q(PM) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} m_{i,\,j}^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q}\sum_{i=1}^{n} m_{i,\,j}^2.$$

Notons $u_{i,\,j}$ la forme linéaire $M \longmapsto m_{i,\,j}$.
La famille $(u_{i,\,j})_{i\in[\![1,n]\!],\ j\in[\![1,n]\!]}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$.

Par conséquent, la famille $(u_{i,\,j})_{i\in[\![1,\,p+q]\!],\ j\in[\![1,\,n]\!]}$ est libre.

Notons v l'automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $v(A) = P^{-1}A$.

Alors :

$$Q(A) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n}(u_{i,\,j}\circ v(A))^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q}\sum_{i=1}^{n}(u_{i,\,j}\circ v(A))^2$$

et la famille $(u_{i,\,j}\circ v)_{i\in[\![1,\,p+q]\!],\ j\in[\![1,\,n]\!]}$ est libre.

La matrice de Q est congruente à la matrice

$$\begin{pmatrix} I_{np} & 0 & 0\\ 0 & -I_{nq} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

La signature de Q est $(np,\ nq)$.

Le rang de Q est $n\mathrm{rg}\,(S)$.

La forme quadratique Q est positive si, et seulement si, $q = 0$. C'est-à-dire si, et seulement si, S est positive.

La forme quadratique Q est définie positive si, et seulement si, $q = 0$ et $p = n$. C'est-à-dire si, et seulement si, S est définie positive.

La forme quadratique Q est non dégénérée si, et seulement si, $p+q = n$. C'est-à-dire si, et seulement si, S est inversible.

8 Orthogonalité pour une forme bilinéaire symétrique

1 ▬ a) $0_E \in A^\perp$, $A^\perp \subset E$.

On vérifie facilement la stabilité par combinaison linéaire de $A^\perp$ et l'inclusion :

$$A \subset (A^\perp)^\perp.$$

b) $E^\perp = \mathrm{Ker}\,\varphi$ et $\{0_E\}^\perp = E$.

2 ▬ a) On vérifie facilement que $G^\perp \subset F^\perp$.

b) On remarque que $F \subset F+G$. On en déduit $(F+G)^\perp \subset F^\perp$.

De même :

$$(F+G)^\perp \subset G^\perp.$$

Par conséquent :

$$(F+G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp.$$

Montrons la deuxième inclusion.

Soit x quelconque dans $F^\perp \cap G^\perp$.

Pour tout y de $F+G$, on considère z dans F et t dans G tels que $y = z+t$. Alors :

$$\varphi(x,\ y) = \varphi(x,\ z) + \varphi(x,\ t).$$

Or x appartient à $F^\perp$. On en déduit $\varphi(x,\ z) = 0$. De même, $\varphi(x,\ t) = 0$.

On montre ainsi que x appartient à $(F+G)^\perp$.

En conclusion :

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp.$$

c) On remarque que $F\cap G \subset F$.

Donc : $F^\perp \subset (F\cap G)^\perp$.

De même : $G^\perp \subset (F\cap G)^\perp$.

On en déduit :

$$F^\perp + G^\perp \subset (F\cap G)^\perp.$$

Mais, en général, il n'y a pas égalité.

d) La forme bilinéaire φ est non dégénérée. Donc l'application linéaire g associée à gauche à φ est injective de E dans E^*.

L'espace vectoriel E est de dimension finie et $\dim E = \dim E^*$. Par conséquent, g est un isomorphisme de E dans E^*.

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. On complète en une base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.

Notons $B^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale dans E^*.

Soit x dans E.

$$\begin{aligned} x \in F^\perp &\Leftrightarrow \forall y \in F \quad && \varphi(x,\ y) = 0\\ &\Leftrightarrow \forall y \in F && g(x)(y) = 0\\ &\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!] && g(x)(e_i) = 0\end{aligned}$$

Or $g(x)$ s'écrit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\langle g(x), e_i\rangle\, e_i^*$ dans la base B^*.

$$\begin{aligned} x \in F^\perp &\Leftrightarrow g(x) \in \mathrm{Vect}\,(e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*)\\ F^\perp &= g^{-1}(\mathrm{Vect}\,(e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*))\\ \dim F^\perp &= \dim g^{-1}(\mathrm{Vect}\,(e_{p+1}^*, \ldots, e_n^*))\end{aligned}$$

Or g est un isomorphisme.

Par conséquent : $\dim F^\perp = n - p$.

Puis : $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.

Nous avons $F \subset (F^\perp)^\perp$. L'égalité des dimensions assure l'égalité $F = (F^\perp)^\perp$.

On ne peut pas en déduire $F \oplus F^\perp = E$. En effet, considérer la forme φ sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\Phi(x,\ y) = x^2 - y^2.$$

Nous avons déjà montré qu'elle est non dégénérée.

Soit la droite $D = \mathrm{Vect}\,((1,\ 1))$. Vérifier que $D^\perp = D$.

e) Soit $H = \text{Ker } \varphi \cap F$ et K un supplémentaire de H dans F :

$$F = K \oplus H.$$

D'après la question **2) b)**, on a :

$$F^{\perp} = K^{\perp} \cap H^{\perp}.$$

Or $H \subset \text{Ker } \varphi$. Donc $E = (\text{Ker } \varphi)^{\perp} \subset H^{\perp}$.

On en déduit $E = H^{\perp}$, puis $F^{\perp} = K^{\perp}$.

Soit L un supplémentaire de Ker φ dans E contenant K. Il existe car $K \cap \text{Ker } \varphi = \{0_E\}$.

Considérons la forme bilinéaire symétrique ψ sur L restriction de φ à $L \times L$.

$$\begin{aligned}\text{Ker } \psi &= \{x \in L \,;\, \forall y \in L \quad \varphi(x,\ y) = 0\}\\ &= \{x \in L \,;\, \forall y \in E \quad \varphi(x,\ y) = 0\}\end{aligned}$$

car $E = L \oplus \text{Ker } \varphi$.

Par conséquent, $\text{Ker } \psi = \text{Ker } \varphi \cap L = \{0_E\}$. La forme bilinéaire ψ est non dégénérée.

Notons K° l'orthogonal pour ψ de K. Alors, d'après la question **d)**, on a :

$$(K^{\circ})^{\circ} = K \quad \text{et} \quad \dim K + \dim K^{\circ} = \dim L.$$

Montrons que $K^{\perp} = K^{\circ} \oplus \text{Ker } \varphi$.

$$\begin{aligned}x \in K^{\perp} &\Leftrightarrow \forall y \in E \quad \varphi(x,\ y) = 0\\ &\Leftrightarrow \forall z \in L \ \ \forall t \in \text{Ker } \varphi \quad \varphi(x,\ z + t) = 0\\ &\Leftrightarrow \forall z \in L \quad \varphi(x,\ z) = 0.\end{aligned}$$

Or tout élément x de E s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2$, où x_1 est dans L et x_2 dans Ker φ.

$$\begin{aligned}x \in K^{\perp} &\Leftrightarrow \forall z \in L \quad \varphi(x_1,\ z) = 0\\ &\Leftrightarrow x_1 \in K^{\circ}.\end{aligned}$$

On en déduit $K^{\perp} = K^{\circ} \oplus \text{Ker } \varphi$.

$$\begin{aligned}\dim F^{\perp} = \dim K^{\perp} &= \dim K^{\circ} + \dim \text{Ker } \varphi\\ &= \dim L - \dim K + \dim \text{Ker } \varphi\\ &= \dim E - \dim K.\end{aligned}$$

Or $\dim K = \dim F - \dim(F \cap \text{Ker } \varphi)$.

Donc :

$$\dim F^{\perp} + \dim F = \dim E + \dim(F \cap \text{Ker } \varphi)$$

Il suffit de démontrer :

$$F \cap F^{\perp} = \{0_E\} \Rightarrow E = F \oplus F^{\perp}$$

Supposons que $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$.

On sait que $\text{Ker } \varphi \subset F^{\perp}$.

Donc $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$ entraîne $F \cap \text{Ker } \varphi = \{0_E\}$.

On en déduit $\dim F^{\perp} + \dim F = \dim E$.

Puis $E = F \oplus F^{\perp}$.

$$(F^{\perp})^{\perp} = F + \text{Ker } \varphi.$$

On a déjà $F + \text{Ker } \varphi \subset (F^{\perp})^{\perp}$.

Montrons l'égalité des dimensions.

$\dim(F + \text{Ker } \varphi) = \dim F + \dim \text{Ker } \varphi - \dim(F \cap \text{Ker } \varphi)$

Or :

$$\begin{aligned}\dim(F^{\perp})^{\perp} + \dim F^{\perp} &= \dim E + \dim(F^{\perp} \cap \text{Ker } \varphi)\\ &= \dim E + \dim \text{Ker } \varphi.\end{aligned}$$

On a également :

$$\dim F + \dim F^{\perp} = \dim E + \dim(F \cap .\text{Ker } \varphi).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\dim(F + \text{Ker } \varphi) &= \dim E - \dim F^{\perp} + \dim \text{Ker } \varphi\\ &= \dim(F^{\perp})^{\perp}.\end{aligned}$$

En conclusion, $F + \text{Ker } \varphi = (F^{\perp})^{\perp}$.

$$\begin{aligned}(F^{\perp})^{\perp} = F &\Leftrightarrow F = F + \text{Ker } \varphi\\ &\Leftrightarrow \text{Ker } \varphi \subset F.\end{aligned}$$

9 Réduction simultanée de deux formes quadratiques

Il s'agit de trouver une base orthonormale pour Q et orthogonale pour R. Nous savons qu'elle existe si la forme Q est définie positive.

La matrice de Q dans la base canoïque $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ est

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Son spectre est $\{1, 2, 4\}$. On choisit une base orthonormale de vecteurs propres $(e'_1,\ e'_2,\ e_3)$ en posant

$$e'_1 = e_2, \quad e'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3) \quad \text{et} \quad e'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3).$$

Dans cette base la nature de Q est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On choisit $i = e'_1, \quad j = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e'_2 \quad$ et $\quad k = \dfrac{1}{2}e'_3$.

Dans la base (i, j, k) orthonormale pour Q, la matrice de R est $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-1}{4} & \dfrac{3\sqrt{2}}{8} \\ 0 & \dfrac{3\sqrt{2}}{8} & \dfrac{-5}{8} \end{pmatrix}$.

Son spectre est $\left\{2, -1, \dfrac{1}{8}\right\}$.

On choisit une base orthonormale de vecteurs propres $(I,\ J,\ K)$ en posant $I = i, \quad J = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(j - \sqrt{2}k)$ et $K = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}j + k)$.

Dans la base (I, J, K) l'expression de Q est $X^2+Y^2+Z^2$ et celle de R est $2X^2 - Y^2 + \dfrac{1}{8}Z^2$.

La base demandée est (I, J, K) où $I = (0,1,0)$,

$$J = \left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \text{et} \quad K = \left(\frac{\sqrt{6}}{4},\ 0,\ \frac{\sqrt{6}}{12}\right).$$

10 Forme quadratique et produit mixte

La forme bilinéaire symétrique φ :

$$(x,\ y) \longmapsto \frac{1}{2}([x,\ u,\ v \wedge y] + [y,\ u,\ v \wedge x])$$

est telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \quad Q(x) = \varphi(x,\ x).$$

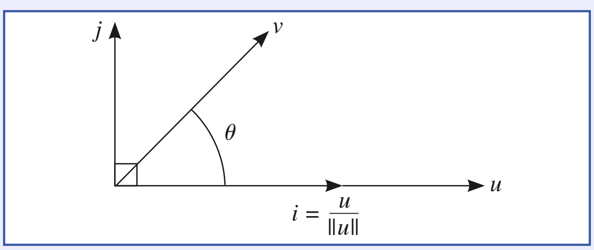
L'application Q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ et φ est sa forme polaire.

• **Premier cas** : (u, v) est libre.

Considérons la base orthonormale $(i,\ j)$ de $F = \operatorname{Vect}(u,\ v)$ telle que :

$$i = \frac{u}{\|u\|} \quad \text{et} \quad v = \|v\|(\cos\theta i + \sin\theta j)$$

avec θ dans $]0,\ \pi[$.



Notons $k = i \wedge j$.

$$Q(i) = 0$$

$$\begin{aligned} Q(j) &= \|v\|\|u\| \cos\theta [j,\ i,\ k] \\ &= -\|v\|\|u\| \cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(k) &= \|v\|\|u\| \cos\theta [k, i,\ -j] + \|v\|\|u\| \sin\theta [k,\ i,\ i] \\ &= -\|v\|\|u\| \cos\theta \end{aligned}$$

$$\varphi(i,\ j) = \frac{1}{2}\|v\|\|u\| \sin\theta [j,\ i,\ -k] = \frac{1}{2}\|v\|\|u\| \sin\theta$$

et :

$$\varphi(i,\ k) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(j,\ k) = 0.$$

La matrice de Q dans cette base est :

$$\frac{1}{2}\|v\|\|u\| \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -2\cos\theta \end{pmatrix}.$$

La signature de Q est celle de la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -2\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont $-2\cos\theta$, $1 - \cos\theta$ et $-1 - \cos\theta$.

Si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, la signature est $(1,\ -1)$.

La forme Q est dégénérée de rang 2 et son noyau est $\operatorname{Vect}(k) = \operatorname{Vect}(u \wedge v)$.

Si $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$, la signature est (1,2) pour θ dans $\left]0,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ et (2, 1) dans $\left]\dfrac{\pi}{2},\ \pi\right[$.

La forme Q est non dégénérée et son noyau est $\{(0,0,0)\}$.

• **Second cas** : $(u,\ v)$ est liée.

Si $u = (0,0,0)$ ou $v = (0,\ 0,\ 0)$, la forme Q est identiquement nulle.

Si u et v sont non nuls, il existe λ dans $\mathbb{R}^*$ tel que $v = \lambda u$.

Dans ce cas, $Q(x) = \lambda[x,\ u,\ u \wedge x] = -\lambda\|u \wedge x\|^2$.

La forme quadratique est négative. Donc le noyau est égal à $\{x \in \mathbb{R}^3\ ;\ Q(x) = 0\} = \operatorname{Vect}(u)$. Le rang de Q est 2.

En conclusion, la forme quadratique Q est non dégénérée si, et seulement si, $(u,\ v)$ est libre et u non orthogonal à v.

11 Une somme de formes quadratiques

Pour tout k de $[\![1, n]\!]$, notons φ_k la forme polaire de Q_k. Il existe un endomorphisme de E auto-adjoint u_k tel que :

$$\forall (x,\ y) \in E \times E \quad \varphi_k(x,\ y) = (u_k(x) \mid y).$$

En particulier :

$$\forall x \in E \quad Q_k(x) = (u_k(x) \mid x).$$

La matrice de u_k dans une base orthonormale pour Q est identique à celle de Q_k. Le rang de u_k est celui de Q_k.

Notons E_k l'image de u_k.

D'autre part, pour tout x de E, on a :

$$\begin{aligned} \forall y \in E \quad (x \mid y) &= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x,\ y) = \sum_{i=1}^{n} (u_i(x) \mid y) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} u_i(x) \mid y \right). \end{aligned}$$

On en déduit que $x = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$. Donc E est la somme des E_i.

Or $\sum_{i=1}^{n} \dim E_i = n$. On en déduit que E est la somme directe des E_i.

On a $\sum_{i=1}^{n} u_i = I_E$ et, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, l'endomorphisme u_i est la projection sur E_i de noyau : $\underset{\substack{j=1\\ j\neq i}}{\overset{n}{\oplus}} E_j$

pour tout i, j tels que $i \neq j$; $u_i \circ u_j = 0$.

Montrons que cette somme est orthogonale.

Calculons $(x \mid y)$ pour x dans E_k et y dans E_l, avec $k \neq l$.

Notons φ_k la forme polaire de chaque Q_k.

Alors :

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x,\ y) = \sum_{i=1}^{n} (u_i(x) \mid y).$$

Or l'endomorphisme u_i est auto-adjoint. Donc :

$$(x \mid y) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{n} (x \mid u_i(y)) + (u_l(x) \mid y).$$

Le vecteur y est dans le noyau de u_i, pour tout i distinct de l, et x est dans le noyau de u_l.

Par conséquent, $(x \mid y)$ est nul.

On en déduit que la somme de E_i est directe orthogonale et que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, l'endomorphisme u_i est la projection orthogonale p_i sur E_i.

Pour conclure, il reste à montrer que :

$$\forall x \in E \quad \forall k \in [\![1, n]\!] \quad (p_k(x) \mid x) = (p_k(x) \mid p_k(x))$$

Or p_k est auto-adjoint et $p_k \circ p_k = p_k$.

Donc, pour tout x de E :

$$\begin{aligned}(p_k(x) \mid p_k(x)) &= (p_k^* \circ p_k(x) \mid x)\\ &= (p_k \circ p_k(x) \mid x) = (p_k(x) \mid x)\end{aligned}$$

12 Une dernière forme quadratique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

L'application $\varphi : (A,\ B) \longmapsto \operatorname{Tr}(AB)$ est bilinéaire symétrique.

Elle vérifie, pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$Q(A) = \varphi(A, A)$$

Par conséquent, Q est une forme quadratique et φ est sa forme polaire.

La forme quadratique Φ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\Phi(A) = \operatorname{Tr}({}^tAA)$ est définie positive.

Nous savons que :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

Soit A dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
Alors $Q(A) = \operatorname{Tr}(A^2) = \operatorname{Tr}({}^tAA)$.

La restriction de Q à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est définie positive.

Or la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Il existe une base $\left(E_1, .., E_{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$ orthonormale pour Q de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall i \in \left[\!\!\left[1, \frac{n(n+1)}{2}\right]\!\!\right] \qquad Q(E_i) = 1$$

Soit B une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors ${}^tB = -B$.

$$Q(B) = \operatorname{Tr}(B^2) = \operatorname{Tr}(-{}^tBB) = -\operatorname{Tr}({}^tBB).$$

La restriction de Q à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est définie négative.

La dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Il existe une base orthogonale $(E'_1, .., E'_{\frac{n(n+1)}{2}})$ de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall j \in \left[\!\!\left[1, \frac{n(n-1)}{2}\right]\!\!\right] \qquad Q(E'j) = -1.$$

De plus $\left(E_1, .., E_{\frac{n(n+1)}{2}}, E'_1, .., E'_{\frac{n(n-1)}{2}}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

La forme quadratique Q est non dégénérée. Son rang est n^2 et sa signature $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}, \dfrac{n(n-1)}{2}\right)$.

5 Espaces vectoriels euclidiens

RAPPELS DE COURS

ESPACE PRÉHILBERTIEN RÉEL

• ***Définitions***

• Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Une application φ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ bilinéaire symétrique définie positive est un produit scalaire sur E. Nous noterons couramment $(\ \mid\ )$ le produit scalaire.

Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire φ est appelé espace préhilbertien réel et noté (E, φ).

Lorsqu'il est de dimension finie non nulle, on dit que c'est un espace euclidien.

L'application :

$$x \longrightarrow \| x \| = \sqrt{(x \mid x)}$$

définit sur E une norme, appelée norme euclidienne et notée $\| \ \|$.

• Soit $(\ \mid\ )$ un produit scalaire sur E. Alors :

$\forall (x, y) \in E \times E \quad |(x \mid y)| \leqslant \| x \| . \| y \|$ *(Inégalité de Cauchy-Schwarz.)*

$\forall (x, y) \in E \times E \quad |(x \mid y)| = \| x \| . \| y \| \iff (x, y)$ liée   *(Cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)*

Identité de polarisation $(x \mid y) = \dfrac{1}{4}(\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2)$.

Un espace préhilbertien réel complet est dit hilbertien.

• ***Orthogonalité***

Vecteurs orthogonaux

• Soit $(E, (\ \mid\ ))$ un espace préhilbertien réel et $\| . \|$ la norme associée. Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (x \mid y) = 0 \iff \| x + y \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2 \quad (\textit{relation de Pythagore}).$$

• Soit (E, φ) un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de E. Alors :

• $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$;

• $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.

Supplémentaires orthogonaux

Soit (E, φ) un espace préhilbertien réel.

– Deux sous-espaces F et G sont dits supplémentaires orthogonaux lorsque :

$$E = F \oplus G \quad \text{et} \quad F \perp G.$$

On note $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$.

– Si F et G sont supplémentaires orthogonaux, alors $G = F^{\perp}$ et $F = (F^{\perp})^{\perp}$.

– Un projecteur p d'image F est un projecteur orthogonal si, et seulement si, F admet un supplémentaire orthogonal $G = F^{\perp}$ et si $\operatorname{Ker} p = F^{\perp}$.

Si F admet un supplémentaire orthogonal, le seul projecteur orthogonal d'image F est la projection orthogonale d'image F et de direction $F^{\perp}$, on le note p_F.

Distance d'un élément à un sous-espace

• Soit (E, φ) un espace préhilbertien réel et $\| \, . \, \|$ la norme associée.

• Soit a un élément de E et F un sous-espace de E. Alors :

– pour tout x de F , $\| a - x \| = d(a, F) \Longleftrightarrow a - x \in F^{\perp}$;

– il existe au plus un vecteur x qui vérifie $\| a - x \| = d(a, F)$;

– si F admet un supplémentaire orthogonal, $p_F(a)$ est l'unique vecteur x de F tel que :

$$\| a - x \| = d(a, F) \quad \text{et} \quad \| a \|^2 = p_F(a)^2 + d(a, F)^2.$$

Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie

• Soit (E, φ) un espace préhilbertien réel. Tout sous-espace de dimension finie admet un supplémentaire orthogonal.

• Soit (E, φ) un espace préhilbertien réel et F un sous-espace de E de dimension finie. Alors :

– $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$;

– $(F^{\perp})^{\perp} = F$;

– $\operatorname{codim} F^{\perp} = \dim F$.

• Si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormale de F, alors :

$$\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (\, e_i \mid x \,) e_i \quad \text{et} \quad \forall x \in E \quad \sum_{i=1}^{p} (\, e_i \mid x \,)^2 \leqslant \| x \|^2 \quad \textit{(Inégalité de Bessel.)}$$

Somme directe orthogonale

• Soit $(E, (\ \mid\ ))$ un espace préhilbertien réel et $\| \, . \, \|$ la norme associée.

• Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E orthogonaux deux à deux. Alors la somme F_i est directe.

• Soit $(F_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \overset{\perp}{\bigoplus_{1 \leqslant i \leqslant n}} F_i$.

Pour tout $x = (x_1, .., x_n)$ de $F_1 \times \cdots \times F_n$, on a $\| x \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^2$ *(Théorème de Pythagore.)*

ESPACES EUCLIDIENS

Un espace vectoriel euclidien est un espace préhilbertien de dimension finie. Il est complet.

• *Bases orthonormales dans un espace vectoriel euclidien*

Une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E est orthonormale lorsque :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \ \ i \neq j \quad (\ e_i \mid e_j\ ) = 0, \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \| \ e_i \ \| = 1.$$

• *Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*

Soit p dans $\mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E. Il existe une et une seule famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ orthonormale de E telle que :

$$\forall k \in [\![1,p]\!] \ \ \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k) = \ \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \quad \text{et} \quad (\ e_k \mid \varepsilon_k\ ) > 0$$

Le procédé permet de construire par récurrence la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ en posant :

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\| \ e_1 \ \|} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1,p-1]\!] \quad \varepsilon_{k+1} = \frac{f_{k+1}}{\| \ f_{k+1} \ \|} \quad \text{avec} \quad f_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (\ e_{k+1} \mid \varepsilon_i\ )\varepsilon_i$$

On l'appelle le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Dans un espace préhilbertien, si $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille libre dénombrable de E, il existe une et une seule famille $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ orthonormale de E telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \ \ \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_k) = \ \mathrm{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \quad \text{et} \quad (\ e_k \mid \varepsilon_k\ ) > 0$$

• *Existence de bases orthonormales*

Dans tout espace euclidien, il existe des bases orthonormales et le procédé de Gram-Schmidt permet d'en construire.

Dans un espace euclidien, toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

• Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace vectoriel euclidien $(E, (\ \ |\ \ ))$ et u un endomorphisme de E.

$$\forall x \in E \qquad x = \sum_{i=1}^{n} (\ x \mid e_i\ ) e_i.$$

$$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{n} (\ u(e_i) \mid e_i\ )$$

$$\mathrm{Det}(u) = \mathrm{Det}((\ u(e_i) \mid e_j\ ))$$

Et, pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et tout vecteur $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ de E :

$$\| \ x \ \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\ x \mid e_i\ )^2} \quad \text{et} \quad (\ x \mid y\ ) = \sum_{i=1}^{n} x_i . y_i = \sum_{i=1}^{n} (\ x \mid e_i\ )(\ y \mid e_i\ ).$$

• *Groupe orthogonal*

Caractérisation des automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien

Le cas particulier des espaces euclidiens.

• Soit $(E, (\ \ |\ \ ))$ un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

– l'endomorphisme u est un automorphisme orthogonal de E ;

– l'endomorphisme u conserve le produit scalaire ;

– l'endomorphisme u conserve la norme ;

– la matrice A de u dans une base orthonormale vérifie : ${}^{\mathrm{t}}AA = \mathrm{I}_n$;

– l'endomorphisme u transforme toute base orthonormale de E en une base orthonormale ;

– l'endomorphisme u transforme une base orthonormale de E en une base orthonormale.

On notera $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E. C'est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$ appelé le groupe orthogonal de E.

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie ${}^{\mathrm{t}}AA = A{}^{\mathrm{t}}A = \mathrm{I}_n$ est appelée matrice orthogonale.

• Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

– la matrice A est orthogonale ;

– la matrice ${}^{\mathrm{t}}A$ est orthogonale ;

– la matrice A admet ${}^{\mathrm{t}}A$ pour matrice inverse ;

– les vecteurs colonnes de A forment une famille orthonormale ;

– les vecteurs lignes de A forment une famille orthonormale.

• L'ensemble des matrices orthogonales d'ordre n est un sous-groupe de type $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ appelé groupe orthogonal d'ordre n et noté $\mathcal{O}_n$. $\mathcal{O}_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); {}^{\mathrm{t}}AA = A{}^{\mathrm{t}}A = \mathrm{I}_n\}$.

• Soit $(E, (\quad|\quad))$ un espace euclidien et u un automorphisme orthogonal de E. Alors le déterminant de u est 1 ou -1.

Le déterminant de toute matrice orthogonale est 1 ou -1.

• Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien. On appelle rotation ou déplacement tout automorphisme orthogonal de déterminant égal à 1.

Une matrice orthogonale dont le déterminant est 1 est appelé matrice de rotation.

On appelle antidéplacement tout automorphisme orthogonal de déterminant égal à -1.

On appelle réflexion ou réflexion d'hyperplan H ou symétrie hyperplane toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan H.

Les réflexions sont des antidéplacements.

L'ensemble des rotations de E est un sous-groupe de $\big(\mathcal{O}(E), \circ\big)$, appelé groupe spécial orthogonal et noté $\mathcal{SO}(E)$ ou $\mathcal{O}^+(E)$.

L'ensemble des matrices de rotation est un sous-groupe de $(\mathcal{O}_n, .)$ appelé groupe spécial d'ordre n et noté $\mathcal{SO}_n$ ou $\mathcal{O}_n^+$.

$\mathcal{SO}_n = \{A \ \in O_n;\ \mathrm{Det} A = 1\}$.

Automorphismes orthogonaux et sous-espaces stables

• Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension n, F un sous-espace de E et u un automorphisme orthogonal. Si F est stable par u, alors :

• $u(F) = F$;

• $F^{\perp}$ est stable par u et $u(F^{\perp}) = F^{\perp}$;

• $u_{|F}$ appartient à $\mathcal{O}(F)$;

• $u_{|F^{\perp}}$ appartient à $\mathcal{O}(F^{\perp})$.

• Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien et u un automorphisme orthogonal. Alors :

• $\mathrm{Sp} u \subset \{-1, 1\}$;

• $\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E) \perp \mathrm{Ker}\,(u + \mathrm{Id}_E)$;

• l'endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, u est une symétrie orthogonale ;

• $\mathrm{Im}\,(u - \mathrm{Id}_E))^{\perp} = \mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{Id}_E)$.

• Soit a et b deux vecteurs unitaires distincts d'un espace euclidien $(E,(\ |\ ))$. Alors il existe une unique réflexion $s_{a,b}$ échangeant a et b, elle est définie par :

$$\forall x \in E \quad s_{a,b}(x) = x - 2(\, x \mid e\,)e, \quad \text{avec} \quad e = \frac{a-b}{\| a-b \|}.$$

Les automorphismes orthogonaux en dimension 2 et 3

En dimension 2

f est un élément de $\mathcal{O}(E)$. $E_1 = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ est le sous-espace des vecteurs invariants de f et $E_{-1} = \operatorname{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.

Sp (f)	**sous-espaces propres de** f	**nature de** f	**Det** (f)
$\varnothing$	pas de sous-espace propre	f est une rotation d'angle $\theta \neq 0[\pi]$	1
$\{1\}$	$E_1 = E$	$f = \mathrm{Id}_E$	1
$\{-1\}$	$E_{-1} = E$	$f = -\mathrm{Id}_E$	1
$\{-1, 1\}$	E_1 et E_{-1} sont deux droites vectorielles orthogonales	f réflexion par rapport à E_1	-1

En dimension 3

Sp (f)	**sous-espaces propres de** f	**nature de** f	**Det** (f)
$\{1\}$	$E_1 = E$	$f = \mathrm{Id}_E$	1
$\{1\}$	E_1 est une droite	f est une rotation d'axe E_1	1
$\{-1\}$	$E_{-1} = E$	$f = -\mathrm{Id}_E$	-1
$\{-1\}$	E_{-1} est une droite	f est la composée d'une rotation d'axe E_{-1} et de la réflexion par rapport à $E_{-1}^{\perp}$	-1
$\{-1, 1\}$	E_1 est un plan et E_{-1} la droite $E_1^{\perp}$	f est la réflexion par rapport à E_1	-1
$\{-1, 1\}$	E_1 est une droite et E_{-1} le plan $E_1^{\perp}$	f est le demi-tour d'axe E_1	1

Isomorphisme d'un espace vectoriel euclidien sur son dual

• Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace euclidien. Notons E^* son dual.

Pour tout a de E, l'application $j(a) : x \longmapsto (\, x \mid a\,)$ est une forme linéaire sur E.

L'application $j : a \longmapsto j(a)$ est un isomorphisme canonique de E sur son dual E^* :

$$\forall \varphi \in E^* \quad \exists! a \in E \quad \forall x \in E \quad \varphi(x) = (\, x \mid a\,).$$

• Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension $n \geqslant 3$. Pour toute famille $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ de $n-1$ vecteurs de E, il existe un unique vecteur a de E tel que :

$$\forall x \in E \quad [x_1, \ldots, x_{n-1}, x] = (\, x \mid a\,).$$

Ce vecteur a est appelé produit vectoriel de la famille $(x_1, \ldots x_{n-1})$. Il est noté $x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}$.

ADJOINT D'UN ENDOMORPHISME

• *Dans un préhilbertien réel*

• Soit $(E,(\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel et u un endomorphisme de E.

S'il existe un endomorphisme v de E tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (\, u(x) \mid y\,) = (\, x \mid v(y)\,)$$

on dit que v est un *adjoint* de u.

Si un endomorphisme u de l'espace préhilbertien réel $(E, (\ |\ ))$ admet un adjoint, il est unique. On le note u^*.

Un endomorphisme u de E qui vérifie $u^* = u$ est dit *auto-adjoint* ou *endomorphisme symétrique*. Il est caractérisé par :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (\ u(x) \mid y\ ) = (\ x \mid u(y)\ ).$$

Un endomorphisme u de E qui vérifie $u^* = -u$ est dit endomorphisme *antisymétrique*. Il est caractérisé par :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (\ u(x) \mid y\ ) = -(\ x \mid u(y)\ ).$$

• Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel, u et v deux endomorphismes de E admettant des adjoints u^* et v^*. Alors :

• u^* admet un adjoint et $(u^*)^* = u$;

• $u \circ v$ admet un adjoint et $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$;

• pour tous réels a et b, l'endomorphisme $au + bv$ admet un adjoint et $(au + bv)^* = au^* + bv^*$.

Une projection orthogonale est un endomorphisme auto-adjoint.

Toute symétrie orthogonale s est un endomorphisme auto-adjoint.

– Soit u un endomorphisme admettant un adjoint u^*. Alors $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$.

• Soit u un endomorphisme admettant un adjoint u^* et F un sous-espace de E stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u^*

• *Dans un espace euclidien*

Tout endomorphisme d'un espace euclidien admet un adjoint.

Si A est la matrice de l'endomorphisme u dans une base orthonormale, alors ${}^t A$ est la matrice de u^* dans la même base.

L'application de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$ définie par $u \longmapsto u^*$ est un automorphisme involutif.

Si u appartient à $\mathcal{GL}(E)$, alors u^* appartient à $\mathcal{GL}(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$.

Le sous-espace F est stable par u si, et seulement si, $F^\perp$ est stable par u^* :

$$\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp.$$

Les endomorphismes u et u^* ont le même rang, la même trace, le même déterminant, le même polynôme caractéristique et le même spectre.

• Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel et u un endomorphisme continu de E.

La norme subordonnée de u est :

$$\| u \| = \sup\{(\ u(x) \mid y\ ) ; \quad x \in E,\ y \in E,\ \| x \| \leqslant 1,\ \ \| y \| \leqslant 1\}.$$

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace préhilbertien réel et u un endomorphisme continu admettant un adjoint u^*. Alors :

$$\| u \| = \| u^* \|$$
$$\| u \circ u^* \| = \| u^* \circ u \| = \| u \|^2 .$$

• Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

• l'endomorphisme u est un automorphisme orthogonal de E ;

• $u^* \circ u = I_E$;

• $u \circ u^* = I_E$;

• l'endomorphisme u est inversible et $u^{-1} = u^*$.

Endomorphismes auto-adjoints

• Soit $(E, (\ \mid\ ))$ un espace euclidien de dimension n.

L'endomorphisme u de E est auto-adjoint si, et seulement si, la matrice A de u dans une base orthonormale vérifie ${}^{t}A = A$.

L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes auto-adjoints de E est un sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

• Soit F un sous-espace de E et u un endomorphisme de E auto-adjoint. Alors :

– le sous-espace F est stable par u si, et seulement si, $F^{\perp}$ est stable par u ;

– $\operatorname{Ker} u = (\operatorname{Im} u)^{\perp}$.

• Soit u un endomorphisme de E auto-adjoint. Alors :

– u est diagonalisable ;

– ses valeurs propres sont réelles ;

– ses sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux ;

– il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est diagonale réelle.

Soit A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Il existe une matrice D diagonale réelle d'ordre n et une matrice orthogonale P d'ordre n telles que $A = PDP^{-1} = PD\,{}^{t}P$

• Soit u un endomorphisme auto-adjoint.

Il est *positif* lorsque $\forall x \in E\ \ (u(x) \mid x) \geqslant 0$

Il est *défini positif* lorsque $\forall x \in E \setminus \{0\}\ \ (u(x) \mid x) > 0$

• Soit u un endomorphisme de E.

Alors $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ sont auto-adjoints positifs.

Si, de plus, u est un automorphisme, $u^* \circ u$ et $u \circ u^*$ sont auto-adjoints définis positifs.

Pour tout A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, les matrices ${}^{t}AA$ et $A\,{}^{t}A$ sont symétriques positives.

Pour tout A dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$, les matrices ${}^{t}AA$ et $A\,{}^{t}A$ sont symétriques définies positives.

• Soit u un endomorphisme auto-adjoint de E. Alors :

• u est positif si, et seulement si, $\operatorname{Sp}(u)$ est inclus dans $\mathbb{R}^{+}$ (idem pour une matrice A symétrique positive) ;

• u est défini positif si, et seulement si, $\operatorname{Sp}(u)$ est inclus dans $\mathbb{R}^{*+}$ (idem pour une matrice A symétrique définie positive).

• Soit u un endomorphisme auto-adjoint de l'espace euclidien $(E, (\ \mid\ ))$.

Alors la norme de u subordonnée à la norme euclidienne est égale à son rayon spectral :

$$\| u \| = \rho(u) = \sup\{|\lambda| \,;\, \lambda \in \operatorname{Sp}(u)\}.$$

• Soit u est un endomorphisme auto-adjoint positif alors :

• $\rho(u) = \max(\operatorname{Sp}(u))$ • $\| u \| = \rho(u) = \sup\{(u(x) \mid x)\ ;\ x \in E\ \ \| x \| \leqslant 1\}$

– Soit u un endomorphisme quelconque de l'espace euclidien $(E, (\ \mid\ ))$. Alors $\| u \| = \sqrt{\rho(u^* \circ u)}$.

ÉNONCÉS

1 Pour s'entraîner

Les exercices suivants sont indépendants.

1 On considère sur $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ le produit scalaire défini par :

$$\forall (A, B) \in E^2 \quad \langle A \mid B \rangle = \mathrm{tr}({}^{t}A \cdot B).$$

On considère le sous-espace vectoriel :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} ; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

a) Trouver une base de $F^{\perp}$.

b) Déterminer la projection orthogonale de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sur F.

2 **a*)** Donner l'expression développée du polynôme $\left[(1 - X)^n X^i\right]^{(i-1)}$.

b) Trouver, après avoir justifié son existence,

$$\inf_{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n) e^{-x} dx.$$

Conseils

1) Écrire l'orthogonalité d'un élément de E au sous-espace F, donc à une de ses bases.
2) a) Utiliser la formule du binôme, puis dériver.
b) Interpréter l'expression indiquée : espace vectoriel, produit scalaire, distance...

2 Et Gram-Schmidt...

1 Orthonormaliser par le procédé de Schmidt, dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, la famille :

$$(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1).$$

2 Orthonormaliser par le procédé de Schmidt, dans l'espace euclidien $\mathbb{R}_2[X]$, la famille :

$$X^2 - 1, 3X + 1, X^2 + X.$$

3 **a)** On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$.

Montrer qu'il existe une unique base $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \quad \int_{-1}^{1} P_i(t)P_j(t)dt = \delta_i^j$; $\deg(P_i) = i$ et le coeffcient de plus haut degré de P_i est strictement positif.

b) Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(t) = a_n \left((t^2 - 1)^n\right)^{(n)}$.

Indiquer comment il est possible de déterminer les a_n. Donner P_0, P_1 et P_2.

Les polynômes $\left((t^2 - 1)^n\right)^{(n)}$ sont appelés **polynômes de Legendre**.

4 On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$.

a) Montrer que, pour tout P de E, la fonction $\left(x \longmapsto e^{-x} P(x)\right)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

b) Montrer que l'application :

$$\left((P, Q) \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x)Q(x)dx\right)$$

définit un produit scalaire sur E.

c) Montrer que le polynôme L_n défini, pour tout n dans $\mathbb{N}$, par $L_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^n\right)$, est un polynôme de degré n.

Les polynômes L_n sont appelés **polynômes de Laguerre**.

d) On note, pour tout k dans $\mathbb{N}$, P_k le polynôme de degré k défini par $P_k(X) = X^k$.

Montrer que, pour tout $k < n$, $\langle L_n \mid P_k \rangle = 0$. En déduire que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.

e) Préciser quelle est la base orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire la base orthonormée $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad R_n \in \mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_n)$;
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad \langle R_n \mid P_n \rangle > 0$.

Conseils

1) Normer le premier vecteur, projeter le second sur la droite vectorielle dirigée par le premier, déterminer un vecteur orthogonal, le normer....
2) Même cuisine...
3) a) Munir l'espace E d'un produit scalaire, interpréter les conditions données et faire le lien avec le cours sur l'orthogonalisation de Gram-Schmidt.
b) Considérer les polynômes $Q_n = \left((t^2 - 1)^n\right)^{(n)}$. Montrer qu'ils vérifient la première condition... Intégrer par parties.

4) b) Question de cours.
c) Intégrer par parties.

3 Conditionnement d'une matrice

La notion de conditionnement d'une matrice est utilisée pour mesurer la sensibilité des solutions d'un système linéaire aux données.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire canonique et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

1 **a)** On pose $A = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 19 \\ 17 \end{pmatrix}$. Résoudre le système linéaire $AX = B$.

b) On pose $B' = \begin{pmatrix} 19,2 \\ 16,9 \end{pmatrix}$. Résoudre $AX' = B'$.

c) On veut comparer la perturbation initiale à la perturbation finale du système.

Calculer les erreurs relatives $\dfrac{\|B'-B\|}{\|B\|}$ et $\dfrac{\|X'-X\|}{\|X\|}$.

Calculer leur quotient.

d) On procède de manière analogue en perturbant cette fois la matrice A et posant $A' = \begin{pmatrix} 10 & 8,9 \\ 9,1 & 8,1 \end{pmatrix}$.

Résoudre $A'Y = B$. Calculer $\dfrac{\|Y-X\|}{\|X\|}$.

2 On souhaite expliquer l'importance de la perturbation finale par rapport à la perturbation initiale.

a) Montrer que :

$$\frac{\|X'-X\|}{\|X\|} \leqslant \|A\| \quad \|A^{-1}\| \quad \frac{\|B'-B\|}{\|B\|};$$

$$\frac{\|Y-X\|}{\|Z\|} \leqslant \|A\| \quad \|A^{-1}\| \quad \frac{\|A'-A\|}{\|A\|}.$$

Le réel $\|A\| \quad \|A^{-1}\|$ est appelé conditionnement de la matrice A et noté $\mathrm{Cond}(A)$.

b) Calculer $\|A\|$ et $\|A^{-1}\|$ et en déduire $\mathrm{Cond}(A)$. Expliquer **1)c)**.

c) Calculer $\|A'-A\|$. Expliquer **1)d)**.

d) Quel est le conditionnement d'une matrice orthogonale ?

Conseils

2) a) Revoir les définitions et propriétés de la norme subordonnée.
b) A est une matrice symétrique. Utiliser ses valeurs propres.

4* Une propriété des bases orthonormales

Soit E un espace vectoriel euclidien. On considère n vecteurs non nuls $(e_1, e_2, .., e_n)$ de E tels que :

$$\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)^2.$$

1 Montrer que $(e_1, e_2, .., e_n)$ est une base de E.

2 Démontrer que, pour tous x et y de E, on a :

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)(y \mid e_i).$$

3 On note G (dite **matrice carrée de Gram**) la matrice $G = \big((e_i \mid e_j)\big)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]}$.

a) Montrer que $G^2 = G$.

b) Montrer que G est inversible.

c) Que peut-on en conclure sur la famille $(e_1, e_2, .., e_n)$?

Conseils

1) Pour x dans E, introduire $y = \sum_{i=1}^{n} (x_i \mid e_i) e_i$
2) Rechercher la forme polaire associée.
3) b) Étudier une combinaison linéaire nulle des colonnes de la matrice G.

5 Un hyperplan dont l'orthogonal n'est pas une droite

Soit E l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire :

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On considère $H = \{f \in E;\ f(0) = 0\}$.

1 Montrer que H est un hyperplan de E.

2 Déterminer l'orthogonal de H.

Conseil

1) Construire une forme linéaire dont H soit le noyau.

6* Une inégalité d'Hadamard

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 1)$ est muni de sa structure euclidienne canonique.

1 Déterminer toutes les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que ${}^{t}MM + M + {}^{t}M = 0$.

2 Montrer que, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les vecteurs colonnes sont notés $(C_1, \dots, C_n)$:

$$|\mathrm{Det} A| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|C_i\| .$$

Cette inégalité est appelée **inégalité d'Hadamard**.

3 Démontrer que, pour toute matrice M vérifiant la relation de la question **1**), on a $|\mathrm{Det} M| \leqslant 2^n$.

Conseils

1) Remarquer que $(A+\mathrm{I}_n)(B+\mathrm{I}_n) = A+B+AB+\mathrm{I}_n$.
2) Orthonormaliser les colonnes de M quand $\mathrm{Det} M$ n'est pas nul.

7 Réduction d'un endomorphisme défini à l'aide du produit scalaire

L'espace vectoriel est $E = \mathbb{R}^n$ $(n > 2)$, muni de sa norme euclidienne. On considère u et v deux vecteurs unitaires tels que $(\ u \mid v\ ) = 0$ et l'application f définie par :

$$\forall x \in E \quad f(x) = x + (\ u \mid x\ )v + (\ v \mid x\ )u.$$

Déterminer les éléments propres de l'application f.

Conseils

Remarquer que le plan $P = \mathrm{Vect}(u, v)$ est stable par f. Puis considérer la restriction de f à P et $P^{\perp}$.

8 Projection orthogonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $n \geqslant 3$ et p un entier tel que $0 < 2p < n$.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note I_n la matrice unité, U_n la matrice dont tous les termes ont la valeur 1 et s l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $s(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}$.

Enfin, M_p désigne la matrice définie par blocs :

$$M_p = U_n - \begin{pmatrix} (0) & (0) & (0) \\ (0) & U_{n-2p} & (0) \\ (0) & (0) & (0) \end{pmatrix}.$$

1 **a)** Montrer que M_p et U_n sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (admis en 3/2) et déterminer les dimensions de $\mathrm{Ker}\ (U_n)$ et $\mathrm{Ker}\ (M_p)$.

b) Calculer $\mathrm{tr}(M_p)$ et $\mathrm{tr}(M_p)^2$. En déduire les valeurs propres non nulles de M_p.

c) Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, M_p, M_p^2)$ est stable par le produit matriciel.

2 L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire défini par $\big(M \mid N\big) = \mathrm{tr}({}^{t}MN)$.

a) Soit $F = \mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, U_n)$. Déterminer l'orthogonal de F, le résultat étant exprimé à l'aide de la trace et de s.

b) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\alpha_0 \mathrm{I}_n + \beta_0 U_n$ sa projection orthogonale sur F.

Déterminer α_0 et β_0 en fonction de $\mathrm{tr}(M)$ et de $s(M)$.

Conseils

1) b) Calculer les traces demandées de deux manières différentes...
c) Déterminer un polynôme annulateur de M_p. En déduire que M_p^2 appartient à $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, M_p, M_p^2)$.

9* Élements propres d'un endomorphisme de $\mathcal{C}\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$

D'après ESTP.

On note E l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, à valeurs réelles.

Si f est dans E, on note F l'application de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad F(x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\big(2\,|x-y|\big)\, f(y)\mathrm{d}y.$$

1 Pour f et g appartenant à E, on pose $\big(\ f \mid g\big) = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Dans la suite du problème, E est muni de ce produit scalaire et de la norme associée.

2 **a)** Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et, pour tout x de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, calculer $F''(x) + 4F(x)$ en fonction de $f(x)$.

b) Comparer $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $F\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, puis $F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $F'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

On note A l'application de E dans E définie par $\forall f \in E \quad A(\ f) = F$.

3 Montrer que A est un endomorphisme injectif de E.

4 Montrer que :

$$\forall f \in E\ \forall g \in E \quad \big(A(\ f) \mid g\big) = \big(\ f \mid A(g)\big).$$

5 Déterminer l'image de l'endomorphisme A.

6 Soit f dans E, $f \neq 0$. Montrer que f est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ si, et seulement si :

$f \in \mathrm{Im}(A)$

et $\quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \lambda f''(x) + 4(\lambda - 1) f(x) = 0.$

7 Déterminer les éléments propres de A.

Conseils

1) Question de cours.
2) a) Partager l'intégrale en deux, en intégrant sur $\left[-\frac{\pi}{2}, x\right]$, puis sur $\left[x, \frac{\pi}{2}\right]$.
Ensuite développer vos sin.
4) Utiliser la formule de Fubini après avoir bien vérifié ses hypothèses.
5) Utiliser la question **2)**, et ne pas omettre la réciproque.
6) Vous devriez avoir besoin de **3)**.
7) Rechercher, comme l'indique la question **6)**, les solutions de l'équation différentielle qui vérifient les deux conditions trouvées en **2) b)**.

10 Pour s'entraîner. Espaces euclidiens

1 *ESTP.*

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 où $\wedge$ représente le produit vectoriel.

Soit quatre vecteurs a, b, c, d de E tels que a et b soient indépendants, c est orthogonal à a et d est orthogonal à b, c et d non nuls.

Calculer, si v existe, le déterminant de la famille (a, b, v).

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c, d pour qu'il existe au moins un vecteur v tel que :

$$a \wedge v = c \quad \text{et} \quad b \wedge v = d.$$

Montrer qu'alors v est unique.

2* Soit E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme auto-adjoint de E.

a) Montrer que, si l'endomorphisme f vérifie la condition :

$$\forall x \in E \quad \langle x \mid f(x)\rangle = 0,$$

alors f est l'endomorphisme nul.

b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\forall x \in E \quad \| f(x)\|^2 = \langle x \mid f(x)\rangle .$$

3 Soit A, B deux matrices symétriques réelles. On suppose qu'il existe un entier k tel que :

$$A^{2k+1} = B^{2k+1}.$$

Montrer que $A = B$.

4 Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace F d'équations :

$$x + y + z + t = 0 \,;\; x + 2y + 3z + 4t = 0.$$

a) Indiquer la dimension de F.

Donner une base de l'orthogonal de l'hyperplan d'équation $x + y + z + t = 0$.

Donner une base de $F^{\perp}$.

b) Donner la matrice, par rapport à la base canonique, de la symétrie orthogonale par rapport à $F^{\perp}$.

5 Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice dans la base canonique :

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & ba - c & ca + b \\ ab + c & b^2 & cb - a \\ ac - b & bc + a & c^2 \end{bmatrix},$$

avec $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Donner la nature de u.

6 E est un espace euclidien.

u, v sont deux endomorphismes symétriques positifs de E.

Montrer que $\quad 0 \leqslant \mathrm{tr}(uv) \leqslant \mathrm{tr}(u)\mathrm{tr}(v)$.

Conseils

1) Calculer le déterminant indiqué de deux manières différentes.
Puis résoudre la première équation et chercher parmi les solutions obtenues lesquelles vérifient la deuxième équation.
2) a) Regarder $(\, x + y \mid f(x + y)\,)$.
b) Traduire la condition, puis utiliser **a)**.
3) Utiliser les endomorphismes u, v canoniquement associés aux matrices et une base de vecteurs propres pour u.
4) a) Penser aux hyperplans.
Pour trouver une base de $F^{\perp}$, penser aux vecteurs de $F^{\perp}$ que vous connaissez.
b) Chercher une base orthonormée de $F^{\perp}$, puis écrire l'image d'un vecteur par la projection orthogonale sur $F^{\perp}$.
5) Éviter les « gros » calculs...
Considérer les vecteurs colonnes pour reconnaître le type de matrice. Puis un vecteur invariant non nul est (presque) évident.
6) Écrire la trace de uv en utilisant un produit scalaire et une base bien choisie.

11* Adjoint et norme d'un endomorphisme

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, a et b deux vecteurs non nuls et orthogonaux de E.

On définit u dans $\mathcal{L}(E)$ par :

$$u(x) = \langle a \mid x \rangle b - \langle b \mid x \rangle a.$$

1 Expliciter u^* et calculer $\|u\|$.

2 On suppose que $\|b\| \leqslant \|a\|$.

Trouver f dans $\mathcal{L}(E)$ vérifiant les trois conditions :

(i) $f^* = -f$; **(ii)** $\|f\| \leqslant 1$; **(iii)** $f(a) = b$.

Conseils

1) Calculer $\langle u(x) \mid y \rangle$ pour trouver u^*.
Utiliser une base orthonormée de E, bien choisie, pour exprimer un vecteur x unitaire, puis $u(x)$.

12* Construisons un automorphisme orthogonal...

Soit E un espace euclidien, $(u_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ et $(v_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ deux familles de vecteurs de E telles que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad \langle u_i \mid u_j \rangle = \langle v_i \mid v_j \rangle.$$

1 Montrer que les familles de vecteurs $(u_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ et $(v_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ ont même rang.

2 En déduire qu'il existe un automorphisme orthogonal f de E tel que $f(u_i) = v_i$ pour tout i dans $[\![1, n]\!]$.

Conseils

1) Prendre une base orthonormée $(e_j)_{j \in [\![1,p]\!]}$ de E, la matrice A de la famille $(u_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ relativement à cette base. Écrire le terme général de la matrice ${}^{t}AA$ en fonction de $(u_i \mid u_j)$.
2) Supposer la famille $(u_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$ ordonnée de telle sorte que la sous-famille $(u_j)_{j \in [\![1,r]\!]}$ soit une base de $\mathrm{Vect}(u_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$.
Montrer qu'alors la sous-famille $(u_j)_{j \in [\![1,r]\!]}$ est une base de $\mathrm{Vect}(v_j)_{j \in [\![1,n]\!]}$.

13 Bases et automorphismes orthogonaux

Soit E un espace vectoriel euclidien.

1 f est un endomorphisme de E.

a) Montrer que l'endomorphisme $f^* \circ f$ est un endomorphisme auto-adjoint positif.

b) Montrer qu'il existe une base orthonormale de E dont l'image par f est une famille orthogonale.

c) En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = s \circ u$, avec s un endomorphisme auto-adjoint et u un automorphisme orthogonal.

2 A et B sont deux sous-espaces vectoriels de E, de dimension p, munis chacun d'une base orthonormale, $(a_1, \dots, a_p)$ pour A et $(b_1, \dots, b_p)$ pour B.

On recherche une base orthonormale $(c_1, \dots, c_p)$ de B telle que :

$$\forall (i, k) \in [\![1, p]\!]^2 \quad \langle a_i \mid c_k \rangle = \langle a_k \mid c_i \rangle.$$

Pour cela, on pose $c_k = \sum_{i=1}^{p} x_{i,k} b_i$. On note :

$$X = \left(x_{i,k}\right)_{(i,k) \in [\![1,p]\!]^2} \quad \text{et} \quad M = \langle a_i \mid b_j \rangle_{(i,j) \in [\![1,p]\!]^2}.$$

Démontrer que le problème posé a au moins une solution.

3 Déduire de ce qui précède que, pour tout couple (A, B) de sous-espaces vectoriels de même dimension p, il existe un automorphisme orthogonal f tel que $f(A) = B$ et $f(B) = A$.

On pourra admettre le résultat de l'exercice précédent.

Conseils

1) a) Un endomorphisme auto-adjoint est diagonalisable...
2) Utiliser avec M la décomposition de la question précédente. Remarquer la propriété que doit posséder X.
3) Reprendre les bases $(a_1, \dots, a_p)$, $(b_1, \dots, b_p)$ et $(c_1, \dots, c_p)$ de la question précédente.
Puis construire $(v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_{2p})$ avec :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad v_i = a_i + c_i \ ; \ v_{i+p} = a_i - c_i.$$

À vous de continuer....

14* Matrices diagonalisables commutant avec leur transposée

1 E est un espace vectoriel euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et u un endomorphisme de E.

Montrer que F est stable par u^* si, et seulement si, $F^{\perp}$ est stable par u.

2 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et dont le spectre est $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Ces valeurs propres sont supposées distinctes.

a) Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure T et une matrice orthogonale P telles que :

$$A = {}^{t}PTP.$$

b) Démontrer que, si T est une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors :

$$ {}^{\mathrm{t}}TT = T\,{}^{\mathrm{t}}T \iff T \text{ diagonale.} $$

c) En déduire que $A\,{}^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}AA$ si, et seulement si :

$$ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AA). $$

Conseils

2) a) Raisonner par récurrence et utiliser **1)**.
b) Regarder d'abord le cas $n = 2$.
c) Regarder $\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AA)$, $\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}TT)$, $\mathrm{tr}(A^2)$...

15 Valeurs propres de matrices symétriques réelles

Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n, définie positive et r un réel strictement positif.

1 Montrer que la matrice $A + r\mathrm{I}_n$ est symétrique, définie positive.

2 On considère la matrice $B = (rI_n + A)^{-1}(rI_n - A)$. Montrer que B est symétique.

3 Montrer que les valeurs propres de B sont dans $]-1, 1[$.

Conseils

2) Calculer ${}^{\mathrm{t}}B$. Conclure en montrant que, si M est une matrice inversible telle que M et N commutent, alors M^{-1} et N commutent également.
3) Exprimer que λ est une valeur propre de B. En déduire, en fonction de λ, une valeur propre de la matrice A qui est symétrique, définie, positive.

16* Des matrices qui commutent

1 Soit A une matrice symétrique réelle. Montrer que la matrice A peut s'écrire comme un polynôme de la matrice $\exp(A)$.

2 Soit A et B deux matrices symétriques réelles. Montrer que les matrices $\exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent si, et seulement si, A et B commutent.

Conseils

1) Matrices symétriques réelles... le réflexe ! Ensuite, penser aux polynômes de Lagrange.
2) Si $\exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent, utiliser la question **1)**. Pour la réciproque, utiliser la continuité d'un endomorphisme bien choisi de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

17 Décomposition d'un endomorphisme

D'après E3A PC.

1 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. Montrer que l'on peut trouver au moins un automorphisme w et un projecteur p vérifiant $u = p \circ w$ (on pourra pour cela commencer par déterminer l'image de p).

2 Si E est muni d'une structure euclidienne, peut-on choisir pour w une isométrie et pour p un projecteur orthogonal ?

3 Montrer que le résultat obtenu en **1)** est faux si on suppose que l'espace vectoriel E n'est plus de dimension finie. (On pourra construire un endomorphisme simple sur $E = \mathbb{R}[X]$.)

Conseils

1) Analyser les images et noyaux des applications p et ω candidates à la décomposition.
2) Étudier les normes des vecteurs images.
3) Étudier, par exemple, la dérivation polynomiale.

18 Sur le groupe orthogonal

On considère $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $(\, x \mid y \,) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. On note $\mathcal{O}(E)$ le groupe orthogonal de E.

1 Déterminer tous les morphismes de groupes φ de $\mathcal{O}(E)$ dans $\mathbb{R}^{+*}$, c'est-à-dire :

$$ \forall (u, v) \in \mathcal{O}(E)^2 \quad \varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v). $$

2 Soit u un élément de $\mathcal{O}(E)$.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{I}_E - u)$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{I}_E - u)$ sont orthogonaux.

b) Étudier la convergence de la suite de terme général $W_N = \dfrac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u^k$. On précisera sa limite en cas de convergence.

Conseils

1) Déterminer l'image de l'identité, puis d'une réflexion quelconque.
2) Étudier les restrictions de u et de W_N aux deux sous-espaces $\mathrm{Ker}(\mathrm{I}_E - u)$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{I}_E - u)$.

19* Somme de deux automorphismes orthogonaux

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n, (n \geqslant 2)$.

1 **a)** Soit u un automorphisme orthogonal de E tel que $\mathrm{Sp}(u) = \varnothing$.

Montrer que E est somme directe de sous-espaces orthogonaux, de dimension 2, stables par u et étudier la restriction de u à ces sous-espaces. Que remarquez-vous concernant la dimension de E ?

b) Soit u_1, u_2 deux automorphismes orthogonaux de E tels que $\mathrm{Det}(u_1) = 1$; $\mathrm{Det}(u_2) = -1$.
Montrer que $\mathrm{Det}(u_1 + u_2) = 0$.

2 Déterminer les automorphismes orthogonaux u de E tels que $I_E + u$ soit encore un automorphisme orthogonal.

3 u et v sont deux éléments de $\mathcal{O}(E)$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $u + v$ soit dans $\mathcal{O}(E)$.

Conseils

1) a) Regarder une valeur propre complexe de u et sa conjuguée.
b) $u_1+u_2 = u_1(\mathrm{I}_E+u_1^{-1}u_2)$, puis étudier les valeurs propres de $u_1^{-1}u_2$.
2) Étudier d'abord le cas $n = 2$. Dans le cas général, déterminer la parité de n.

20* Utilisation de matrices symétriques réelles de rang 1

1 Soit A une matrice symétrique réelle, positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de rang $r > 0$.

Montrer qu'il existe r matrices $(L_1, \ldots, L_r)$ de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, linéairement indépendantes et telles que :

$$A = \sum_{i=1}^{r} {}^{t}L_i L_i .$$

2 Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétriques, réelles, positives.
On note C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i,\ j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad c_{i,\,j} = a_{i,\,j} b_{i,\,j} .$$

a) Montrer que C est une matrice symétrique positive.

b) Que peut-on dire de C si A et B sont symétriques, définies positives ?

3 On suppose de plus que $\forall (i,\ j) \in [\![1, n]\!]^2 \ \ a_{i,\,j} \neq 0$.

On définit la matrice A' par ses coefficients $a'_{i,\,j} = \dfrac{1}{a_{i,\,j}}$.

Montrer que A' est positive si, et seulement si, A est de rang 1.

Conseils

1) Réduire la matrice A, puis effectuer la décomposition demandée sur la matrice diagonale Δ obtenue...
2) a) Commencer par le cas $\mathrm{rg}(A) = 1$, puis regarder le cas général en utilisant **1)**.
b) Utiliser toujours la décomposition...
3) Lorsque A' est positive, considérer l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ et appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux formes bilinéaires symétriques définies par les matrices A et A' pour obtenir des relations entre $a_{i,\,j}$, $a_{i,i}$ et $a_{j,j}$.

21 Racines carrées de matrices symétriques définies positives

On considère l'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}$ des matrices symétriques réelles définies positives. Soit A dans $\mathcal{S}_n^{++}$.

1 **a)** Montrer qu'il existe une unique matrice B dans $\mathcal{S}_n^{++}$ telle que $B^2 = A$.

On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme P, de degré inférieur ou égal à $p - 1$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i} .$$

Exprimer ce polynôme en fonction des λ_i.

c) En déduire que la matrice B de $\mathcal{S}_n^{++}$, telle que : $B^2 = A$, est $B = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i - \lambda_j)} \prod_{j \neq i} (A - \lambda_j \mathrm{I})$.

d) Calculer B quand $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

2 **a)** Soit $u_0 = 1$, a un réel strictement positif et la suite u définie par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Montrer que, si A et B sont deux matrices symétriques réelles telles que $AB = BA$, il existe une matrice orthogonale Q telle que ${}^tQAQ$ et ${}^tQBQ$ soient diagonales.

3 Soit M une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}$ telle que $AM = MA$.

a) Justifier que M est inversible et que M^{-1} est dans $\mathcal{S}_n^{++}$.

b) Soit $N = \frac{1}{2}(M + M^{-1}A)$. Montrer que $AN = NA$ et que N est dans $\mathcal{S}_n^{++}$.

On définit alors la suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{S}_n^{++}$ par :

$$\begin{cases} B_0 = \mathrm{I}_n \\ \forall k \in \mathbb{N} \ \ B_{k+1} = \frac{1}{2}(B_k + B_k^{-1}A) \end{cases}.$$

c) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q telle que, pour tout k de $\mathbb{N}$, $Q^{-1}B_kQ$ soit une matrice diagonale D_k qu'on notera :

$$D_k = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(k)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2^{(k)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & & \alpha_n^{(k)} \end{pmatrix}.$$

d) Étudier la convergence de la suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et préciser sa limite.

Conseils

1) a) A est une matrice symétrique réelle donc...
b) Utiliser les polynômes de Lagrange.
c) Considérer la matrice $P(A) = {}^tQP(D)Q$...
2) a) Étude classique de suite récurrente. Étudier d'abord la fonction...
b) Diagonaliser d'abord A, puis utiliser le fait que A et B commutent...
3) a) Connaître les valeurs propres de A^{-1}.
b) Utiliser **2) b)**.
c) Si Q est une matrice orthogonale diagonalisant A et B_k, alors elle diagonalise...
d) Raisonner sur les valeurs propres des matrices B_k.

22* Valeurs propres d'une matrice de Hilbert

D'après Saint-Cyr.

Dans ce texte, on identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, ($n \geqslant 2$), muni de sa structure euclidienne canonique, à l'ensemble des matrices à n lignes et une colonne.

Le but de ce problème est l'étude de la matrice :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix},$$ appelée matrice de Hilbert.

1 Montrer que H a toutes ses valeurs propres réelles.

2 Soit, pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^n$:

$$q(X) = {}^tXHX.$$

a) Vérifier la relation suivante :

$$q(X) = \int_0^1 (x_1 + tx_2 + \cdots + t^{n-1}x_n)^2 \mathrm{d}t.$$

b) En déduire que :

(i) toutes les valeurs propres de H sont strictement positives ;

(ii) H est inversible.

c) Montrer que, pour tout X dans $\mathbb{R}^n$, ${}^tXH^{-1}X$ est un réel positif, qui est nul si, et seulement si, X est le vecteur nul.

3 Dans cette question, n est égal à 2.

a) Déterminer les valeurs propres α, β ($\alpha \leqslant \beta$) de H.

b) Soit E le plan affine euclidien rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On note C l'ensemble des points M de E tels que le vecteur $\overrightarrow{OM}$, de matrice X, vérifie l'équation :

$${}^tXHX = 1.$$

Reconnaître la nature de C, la tracer avec soin et interpréter géométriquement α et β.

4 On note H' la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ définie par :

$$H' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n-1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{2n-3} \end{pmatrix}.$$

La matrice H peut ainsi s'écrire, par blocs :

$$H = \left(\begin{array}{c|c} H' & T \\ \hline {}^tT & \frac{1}{2n-1} \end{array}\right), \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{2n-2} \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que la matrice H' est inversible.

b) Soit λ un réel non nul et $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$.

On note, par blocs $P = \left(\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_{n-1} & Y \\ 0 & \lambda \end{array}\right)$.

Calculer le produit par blocs ${}^tPHP$.

c) Montrer que :

$$\operatorname{Det}(H) = \operatorname{Det}(H')\left(\frac{1}{2n-1} - {}^{t}T H'^{-1} T\right).$$

d) En déduire que $\operatorname{Det}(H) \leqslant \dfrac{2^n n!}{(2n)!}$.

On note, dans la suite de ce problème α_n et β_n, la plus petite et la plus grande des valeurs propres de la matrice H d'ordre n.

5 **a)** Justifier, pour tout élément X de $\mathbb{R}^n$, les inégalités :

$$\alpha_n \parallel X \parallel^2 \leqslant q(X) \leqslant \beta_n \parallel X \parallel^2 .$$

b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln(n+1) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \leqslant 1 + \ln(n).$$

c) Calculer la somme des valeurs propres de H.

d) En déduire que :

$$n\alpha_n < \frac{1}{2}\ln(n) + \big(1 + \ln(2)\big).$$

6 **a)** Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un vecteur X non nul, dans $\mathbb{R}^n$, tel que : $\quad AX = 0 \quad$ et $\quad \max\limits_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i| = 1.$

Montrer que, pour tout i dans $[\![1,n]\!]$:

$$|a_{i,i}|\,|x_i| \leqslant \sum_{j\in[\![1,n]\!],\, j\neq i} |a_{i,j}|\,|x_j| .$$

En déduire qu'il existe un i dans $[\![1,n]\!]$ tel que :

$$|a_{i,i}| \leqslant \sum_{j\in[\![1,n]\!],\, j\neq i} |a_{i,j}| .$$

b) Soit λ une valeur propre de H, montrer qu'il existe i dans $[\![1,n]\!]$ tel que :

$$\left|\lambda - \frac{1}{2i-1}\right| \leqslant \sum_{j\in[\![1,n]\!],\, j\neq i} \frac{1}{i+j-1}.$$

c) Montrer alors l'inégalité, pour tout $n \geqslant 2$:

$$\beta_n < 1 + \ln(n).$$

Conseils

2) a) Calculer l'intégrale.
b) Soit X un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Alors $q(X)$...
0 n'est pas valeur propre de H.
c) Calculer ${}^{t}XH^{-1}X$ après avoir diagonalisé H.
3) b) Réduire l'équation de la conique pour l'identifier.
4) b) λ est donné non nul, choisir le vecteur Y pour pouvoir calculer le déterminant de ${}^{t}PHP$.
c) Récurrence sur n.
5) a) Reprendre le calcul de **2) c)**.
b) Faire le graphe de la fonction $\left(t \longmapsto \dfrac{1}{t}\right)$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et raisonner en termes d'aires...
c) Comment trouve-t-on la somme des valeurs propres d'une matrice ?
6) c) Utiliser **5) b)**.

23 Interprétation géométrique de la matrice de Hilbert

D'après Saint-Cyr.

Dans ce texte, on identifie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, ($n \geqslant 2$), muni de sa structure euclidienne canonique, à l'ensemble des matrices à n lignes et une colonne.

Le but de ce problème est l'interprétation géométrique de la matrice $H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$, appelée matrice de Hilbert. (L'étude des valeurs propres de cette matrice a fait l'objet de l'*exercice* précédent.)

Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, donnée. On désigne par F l'espace vectoriel des fonctions polynômes, de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur ou égal à $n-1$.

À la fonction f, on associe la suite des réels $(b_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall p \geqslant 1 \qquad b_p = \int_0^1 x^{p-1} f(x)\mathrm{d}x.$$

On désigne par B le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

1 **a)** Montrer que H a toutes ses valeurs propres réelles.

On admettra que ces valeurs propres sont strictement positives. (En fait, ce résultat a été établi dans la question **2)** de l'*exercice* précédent.)

b) Montrer que, pour tout V dans $\mathbb{R}^n$:

$${}^{t}VHV \geqslant 0 \quad \text{et} \quad {}^{t}VHV = 0 \iff V = 0.$$

On note alors U_0 l'unique élément de $\mathbb{R}^n$ défini par $HU_0 = B$.

2 Soit $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^n$ et soit Q l'élément de F défini, pour tout x de $[0, 1]$, par :

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i x^{(i-1)}.$$

Montrer que :

$$\int_0^1 (Q(t) - f(t))^2 \, dt = {}^{t}UHU - 2{}^{t}UB + \int_0^1 f^2(t)dt.$$

3 Soit l'application de F dans $\mathbb{R}$ définie, pour tout Q dans F, par :

$$g(Q) = \int_0^1 (Q(t) - f(t))^2 \, dt.$$

a) Montrer qu'il existe un unique élément Q_0 de F en lequel g atteint son minimum.

b) Préciser Q_0 en fonction de U_0.

c) En déduire une interprétation géométrique de H.

4 Dans cette question, $n = 2$ et f désigne la fonction :

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$x \longmapsto f(x) = x^2.$$

Déterminer explicitement Q_0 et le minimum de g dans ce cas.

5 Montrer que, si on suppose $\forall p \in \mathbb{N}^* \; b_p = 0$, alors on a :

$$\forall x \in [0, 1[\quad \int_0^1 \frac{f(t)}{1 - tx} dt = 0.$$

6 On suppose, dans cette question, que f est positive.

a) Exprimer, pour N entier naturel non nul, à l'aide d'une intégrale, la somme :

$$\sum_{p=1}^{N} b_p.$$

b) En déduire l'équivalence des deux propositions suivantes :

(i) la série $\sum b_p$ converge ;

(ii) la fonction h : $\left(t \longmapsto \dfrac{f(t)}{1 - t} \right)$ est intégrable sur $[0, 1[$.

c) Montrer que, si la fonction h ci-dessus définie, est intégrable sur $[0, 1[$, alors :

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{1 - t} dt = \sum_{p=1}^{+\infty} b_p.$$

Conseils

1) b) Écrire que H est diagonalisable et calculer ${}^{t}VHV$ en utilisant une matrice diagonale semblable à H.
2) Développer $Q^2(t)$ et intégrer...
3) a) Munir l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ d'un produit scalaire et interpréter $g(Q)$...
b) Exprimer $g(Q)$ en fonction de $g(Q')$, où Q' est l'élément de F associé à U_0. Puis utiliser **1) b)**
5) Fixer x dans $[0, 1[$, puis écrire un développement en série entière de $\dfrac{1}{1 - tx}$ et étudier la convergence uniforme de cette série de fonctions sur $[0, 1]$.
6) a) Classique...
b) Utiliser **6) a)** et un théorème sur la somme d'une série de fonctions positives et intégrables sur un intervalle...
c) Étudier la continuité en 1 des deux fonctions de x : $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} b_p x^p$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{1 - tx} \, dt$.

Algorithmes

1 Tridiagonalisation d'une matrice symétrique réelle. Matrices de Householder

La recherche des valeurs propres de matrices symétriques réelles peut s'effectuer en deux temps. Tout d'abord, on transforme la matrice donnée en une matrice tridiagonale symétrique avec des matrices de projection orthogonale.

Ensuite, la recherche des valeurs propres repose sur la méthode de dichotomie. Elle fera l'objet du problème suivant.

Un autre intérêt des matrices tridiagonales symétriques sera étudié un peu plus loin. La méthode de Choleski permet la résolution d'un système linéaire dont la matrice est tridiagonale plus rapidement que la méthode de Gauss.

Partie mathématique

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique. Soit $C = (c_{ij})$ une matrice symétrique réelle, d'ordre n, Id_n la matrice unité d'ordre n, v une matrice colonne à n lignes à éléments réels et $v' = {}^{t} v = (v_1, \ldots, v_n)$ sa transposée.

$\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne canonique.

Soit, pour i dans $[\![1,n]\!]$, les matrices colonnes e_i :

$$e_i = {}^t(\delta_{i1}, \ldots, \delta_{in}).$$

On associe à v la matrice carrée d'ordre n :

$$H[v] = \mathrm{Id}_n - 2\frac{vv'}{\|v\|^2} \quad \text{si} \quad v \neq 0 \ ; \quad H[0] = 0.$$

La matrice $H[v]$ est appelée matrice de Householder.

1 Montrer que $H[v]$ est la matrice d'une symétrie orthogonale. Donner $H[v]^{-1}$.

2 On pose $w = v - v_1 e_1$. Montrer que :

$$H[w + \|w\|e_2](v) = v_1 e_1 - \|w\|e_2.$$

3 Calculer les éléments de la première ligne et de la première colonne de $H[w + \|w\|e_2]$.

4 En déduire qu'il existe une matrice H_1 telle que :

$$H_1 C H_1^{-1} = C_1,$$

avec $C_1 = (c'_{ij})$, symétrique et $c'_{1j} = c'_{j1} = 0$ pour $3 \leqslant j \leqslant n$.

5 Montrer que toute matrice carrée symétrique est semblable à une matrice tridiagonale.

Partie informatique

6 Écrire un programme de trigonalisation d'une matrice symétrique réelle. Le tester sur un exemple.

Conseils

1) Faire une figure géométrique. Puis utiliser le cours sur les symétries orthogonales.

2 Valeurs propres d'une matrice tridiagonale réelle

La méthode de Givens de recherche des valeurs propres d'une matrice tridiagonale symétrique permet, avec la méthode de tridiagonalisation d'une matrice symétrique réelle, de déterminer des valeurs approchées de cette matrice. Elle consiste à séparer les valeurs propres cherchées, puis à construire, par la méthode de dichotomie, deux suites adjacentes convergeant vers les valeurs propres.

Les matrices tridiagonales interviennent en mécanique des vibrations et la détermination de leurs valeurs propres permet de calculer les modes propres de vibration de certaines structures.

Le résultat très ingénieux de la question **1)** sur les changements de signe des polynômes est dû à Charles Sturm (1803-1855), français né à Genève.

Partie mathématique

$(a_n)_{n\geqslant 1}, (b_n)_{n\geqslant 1}$ sont deux suites de nombres réels tels que, pour tout $n \geqslant 1, b_n \neq 0$.

Soit $(p_n)_n$ la suite de polynômes définie par :

$$p_0(x) = 1 \ ; \ p_1(x) = a_1 - x$$
$$\forall n \geqslant 2 \ \ p_n(x) = (a_n - x)p_{n-1}(x) - b_{n-1}^2 p_{n-2}(x)$$

1 Soit $n \geqslant 1$.

a) Étudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$ des fonctions p_n.

b) Montrer que, si le nombre x_n est racine de p_n, alors : $p_{n-1}(x)p_{n+1}(x) < 0$.

c) Montrer que $p_n(x)$ admet n racines réelles distinctes :

$$x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,n}$$

et que, si $n \geqslant 2$, pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$:

$$x_{n,k} < x_{n-1,k} < x_{n,k+1}.$$

d) Comparer les signes de $p_{n+1}(x)$ et de $p_n(x)$ pour x dans $]x_{n+1,k}, x_{n,k}[$ et pour x dans $]x_{n,k}, x_{n+1,k+1}[$.

On associe aux suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ introduites précédemment la suite des matrices $(A_n)_n$ à n lignes et colonnes, symétriques et tridiagonales de la forme :

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & \\ b_1 & a_2 & b_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & & & & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

2 Montrer que les racines de p_n sont les valeurs propres de la matrice A_n.

Pour tout x réel non nul, on pose :signe$(x) = \dfrac{x}{|x|}$ et, pour tout y réel et tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$\mathrm{sgn}(p_n(y)) = \begin{cases} \mathrm{signe}(p_n(y)) \text{ si } p_n(y) \neq 0 \\ \mathrm{signe}(p_{n-1}(y)) \text{ si } p_n(y) = 0. \end{cases}$$

On désigne par $N(n, y)$ le nombre d'éléments égaux à -1 dans l'ensemble

$$\{\mathrm{sgn}(p_{k-1}(y))\mathrm{sgn}(p_k(y))) \ ; \ 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

en prenant $\mathrm{sgn}(p_0(y)) = 1$.

3 Montrer que $N(n, y)$ est le nombre de racines du polynôme p_n inférieures strictement à y.

4 Montrer que les valeurs propres de A_n appartiennent au sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par :

$$\bigcup_{i=1}^{n} \left[a_i - |b_{i-1}| - |b_i|, a_i + |b_{i-1}| + |b_i|\right]$$

avec $b_0 = 0$.

5 On suppose n et i fixés, avec $1 \leqslant i \leqslant n$. Construire deux suites $(\alpha_k)_k$ et $(\beta_k)_k$ telles que :

$$\alpha_k \leqslant x_{n,i} \leqslant \beta_k$$
$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \lim_{k\to\infty} \beta_k = x_{n,i}$$

Partie informatique

6 Écrire un programme qui donne des valeurs approchées des valeurs propres d'une matrice tridiagonale réelle. L'appliquer à la matrice A_n, définie par : $a_k = 2$; $b_k = -1$.

Conseils

4) Utiliser la définition d'une valeur propre, écrire le système obtenu, et noter j l'indice tel que : $|x_j| = max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$.
5) Utiliser la question **3)**.

3 La méthode de Choleski

Cet exercice présente un algorithme de résolution d'un système linéaire dont la matrice est tridiagonale symétrique d'ordre n et régulière.

Cet algorithme utilise, dans un cas particulier, une méthode développée par le commandant d'artillerie Choleski, tué pendant la grande guerre.

Cette méthode est plus rapide que la méthode de Gauss. Si vous souhaitez plus de précisions sur ce sujet, vous pouvez vous référer au problème Ensait 1991, dont cet exercice est inspiré.

Partie mathématique

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & & \\ c_1 & a_2 & c_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & & & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & c_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

est tridiagonale symétrique, régulière, et on note $A^{(k)}$ la sous-matrice obtenue en conservant les k premières lignes et colonnes de A. On conviendra de prendre $A^{(0)} = 1$.

$P(\lambda) = \mathrm{Det}(A - \lambda \mathrm{Id}_n)$ est le polynôme caractéristique de A et $P_k(\lambda) = \mathrm{Det}(A^{(k)} - \lambda \mathrm{Id}_k)$ est le polynôme caractéristique de $A^{(k)}$.

On se propose de factoriser A sous la forme $A = LD^tL$, où D est une matrice diagonale d'éléments diagonaux $(d_1, \dots, d_n)$ et L une matrice bidiagonale :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & \\ l_1 & 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & & & & \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & l_{n-2} & 1 & 0 \\ & & & 0 & l_{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

1 **a** Montrer que les coefficients a_i, c_i, d_i, l_i sont liés par les relations (R) :

$$\begin{cases} d_1 = a_1 \\ \alpha l_{i-1}^{\beta} d_{i-1} + \gamma d_i = a_i \qquad 2 \leqslant i \leqslant n \\ \delta d_i l_i = c_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \end{cases}$$

où α, β, γ et δ sont des constantes à déterminer.

b) Montrer que le système (R) admet une solution si, pour tout i de $[\![1,n]\!]$: $d_i \neq 0$.

c) Montrer que la décomposition $A = LD^tL$ existe et est unique si, et seulement si, pour tout i de $[\![1,n]\!]$: $\dfrac{\mathrm{Det}A^{(i)}}{\mathrm{Det}A^{(i-1)}} \neq 0$.

2 L'objet de cette question est la résolution du système linéaire (S) , $AX = B$ où la matrice A est tridiagonale symétrique et régulière, écrite sous la forme $A = LD^tL$.

La méthode décrite ci-dessous est appelée méthode de Choleski. On pose :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

a) Montrer que (S) s'écrit $LZ = B$, et exprimer Z en fonction de D, L, X.

Déterminer les relations liant les z_i, l_i, b_i.

b) Montrer que la résolution de (S) se ramène alors à celle de (S_1), $DY = Z$ et exprimer Y en fonction de L et de X.
Déterminer les relations liant les z_i, d_i, y_i.

c) Montrer que la résolution de (S_1) se ramène alors à celle du système (S_2),${}^tLX = Y$.

Déterminer les relations liant les y_i, l_i, x_i.

Partie informatique

3 Écrire un programme de décomposition d'une matrice A tridiagonale, symétrique, régulière et d'ordre n.

Écrire un programme de résolution du système : $AX = Y$, où A est tridiagonale, symétrique, régulière et d'ordre n.

Tester vos programmes.

Conseils

1) c) Supposer que la décomposition existe. En déduire $\mathrm{Det}(A)$. Pour la réciproque, faire une récurrence.

4 Problème des moindres carrés. Décomposition QR

Lorsqu'un système linéaire $Ax = b$ n'admet pas de solution, on cherche un vecteur x tel que Ax soit « aussi proche que possible » de b.

Pour mesurer la distance entre Ax et b, on utilise alors la norme euclidienne, d'où l'appellation « moindres carrés ».

Nous retrouverons les matrices de Householder rencontrées dans l'*exercice 1 des Algorithmes*.

Partie mathématique

n et p sont deux entiers de $\mathbb{N}^*$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, $(n \geqslant 1)$, est muni de la norme euclidienne $\| \quad \|_2$, notée plus simplement $\| \quad \|$.

A désigne une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, b est un vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Le problème aux moindres carrés associé consiste à chercher x tel que :

$$\|b - Ax\| = \inf_{y \in \mathbb{R}^p} \|b - Ay\| \qquad \textbf{(E)}$$

Lorsque $n = p$ et lorsque A est inversible, il existe une unique solution x.

1 Montrer que le problème **(E)** admet toujours une solution. Préciser le nombre de solutions de **(E)**.

2 **a)** Montrer que le problème **(E)** équivaut à la résolution de l'équation linéaire : ${}^tAAx = {}^tAb$.

b) Montrer que la matrice ${}^tAA$ est symétrique, positive. À quelle condition est-elle symétrique, définie, positive ?

Dans la suite, C désigne une matrice carrée réelle d'ordre n.

3 **a)** Soit a un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, $(e_1, \dots, e_n)$ désignent les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Montrer qu'il existe un vecteur v non nul dans $\mathbb{R}^n$ de la forme :

$$v = a + \alpha e_1 \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$$

tel que la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\,(v)^\perp$ transforme a en un vecteur de $\mathrm{Vect}\,(e_1)$.

b) Montrer que l'image d'un vecteur quelqonque u de $\mathbb{R}^n$ par cette symétrie orthogonale est :

$$u - 2\frac{\langle u, v\rangle v}{\|v\|^2}.$$

En déduire que, en identifiant un vecteur et la matrice colonne de ses coordonnées, la matrice de cette symétrie est :

$$\mathrm{Id}_n - 2\frac{v\,{}^tv}{\|v\|^2}.$$

c) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1 telle que la première colonne de Q_1C ait au plus un terme non nul, le premier.

d) En déduire une méthode de construction d'une matrice orthogonale S telle que la matrice SC soit triangulaire supérieure.

On dit que la matrice C admet une factorisation QR.

4 Soit $Cx = d$ un système linéaire dans lequel la matrice C est supposée factorisée en QR et inversible.

Indiquer une méthode simple de résolution de ce système.

Partie informatique

5 Écrire un programme de décomposition QR d'une matrice carrée.

Écrire un programme de résolution du système $Cx = d$, utilisant la décomposition de C en QR.

Écrire un programme de recherche d'une solution d'un problème aux moindres carrés.

Conseils

1) a) Faire une figure et transformer cette question en géométrie...
2) b) Considérer une valeur propre de ${}^tAA$.
3) a) Faire une figure...
3) c) Attention aux dimensions des matrices...
4) Décomposer le système donné en deux systèmes successifs.

CORRIGÉS

1 Pour s'entraîner

1 **a)** Une base de F est donnée par :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc une matrice $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ est dans l'orthogonal de F si, et seulement si :

$$\langle M \mid U_1 \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle M \mid U_2 \rangle = 0.$$

Nous obtenons :

$$\begin{cases} x - t = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}.$$

Les éléments de $F^{\perp}$ sont les matrices :

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

b) Si on pose $U_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $U_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, alors (U_3, U_4) est une base de $F^{\perp}$.

La matrice B s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de $F^{\perp}$.

On doit avoir l'existence de (a, b, x, y) dans $\mathbb{R}^4$ tels que :

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}.$$

D'où le système :

$$\begin{cases} a + x = 1 \\ b + y = 0 \\ b - y = 1 \\ -a + x = 0 \end{cases}.$$

Sa résolution donne : $a = x = \dfrac{1}{2}$ et $b = -y = \dfrac{1}{2}$.

Le projeté orthogonal de B sur F est $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2 **a)** Utilisons d'abord la formule du binôme :

$$(1 - X)^n X^i = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} (-1)^k X^{i+k}.$$

Dérivons ensuite :

$$\left[(1 - X)^n X^i\right]^{(i-1)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} (-1)^k \frac{(i+k)!}{(k+1)!} X^{k+1}.$$

b) Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini par :

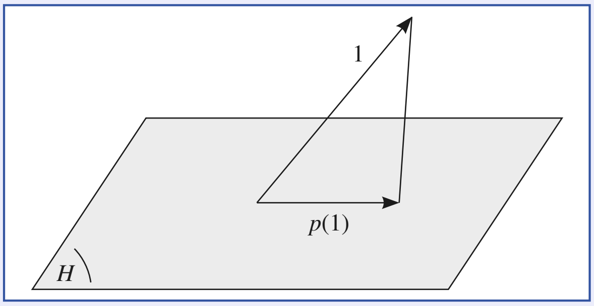
$$\langle P \mid Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

La question posée s'interprète alors comme la recherche du carré de la distance du polynôme 1 à l'hyperplan $H = \{P \in E\,;\ P(0) = 0\}$.

Appelons $p(1)$ le projeté orthogonal de 1 sur cet hyperplan.

Alors :

$$\inf_{(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + a_1 x + \dots + a_n x^n)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \|1 - p(1)\|^2.$$



Le vecteur $1 - p(1) = 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$ est caractérisé par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \left\langle 1 - p(1) \mid X^i \right\rangle = 0.$$

Montrer par récurrence que :

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \int_0^{+\infty} x^k \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = k!.$$

Nous obtenons la condition :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad i! - \sum_{k=1}^{n} a_k (i+k)! = 0.$$

Comparons avec le résultat de la première question dans lequel nous faisons $x = 1$. Nous obtenons :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad a_k = \frac{(-1)^k}{(k+1)!}\binom{k}{n}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\|1-p(1)\|^2 &= \|1\|^2 - \|p(1)\|^2 = \|1\|^2 - \langle 1 \mid p(1)\rangle \\ &= 1 - \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k x^k \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k k! = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\binom{k}{n} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{k+1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

2 Et Gram-Schmidt...

1 Notons :

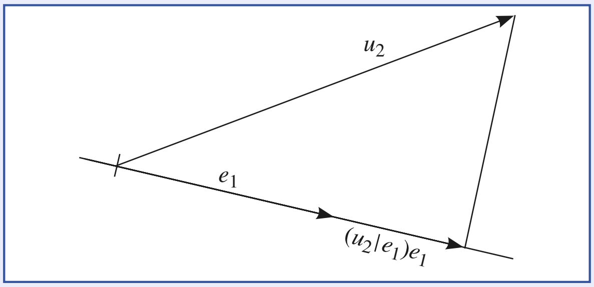
$$u_1 = (1,1,1)\,;\; u_2 = (1,0,1)\,;\; u_3 = (0,1,1).$$

Alors $\quad e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$

Ensuite, projetons orthogonalement le vecteur u_2 sur la droite vectorielle engendrée par e_1.

Nous obtenons

$$(u_2 \mid e_1)\, e_1 = \frac{2}{3}(1,1,1).$$



Le vecteur u_2 se décompose en somme de deux vecteurs qui sont orthogonaux :

$$u_2 = (u_2 \mid e_1)\, e_1 + \big(u_2 - (u_2 \mid e_1)\, e_1\big)$$

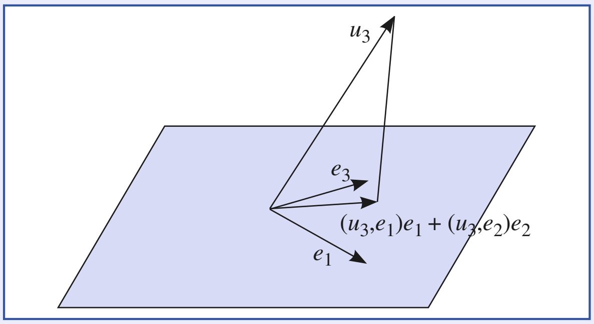
$$u_2 - (u_2 \mid e_1)\, e_1 = (1,0,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) = \frac{1}{3}(1,-2,1).$$

D'où :

$$e_2 = \frac{u_2 - (u_2 \mid e_1)\, e_1}{\|u_2 - (u_2 \mid e_1)\, e_1\|} = \frac{\sqrt{6}}{6}(1,-2,1).$$

Enfin, projetons orthogonalement le vecteur u_3 sur le plan vectoriel engendré par u_1, u_2 muni de la base orthonormée (e_1, e_2). Nous obtenons :

$$(u_3 \mid e_1)\, e_1 + (u_3 \mid e_2)\, e_2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}e_1 - \frac{\sqrt{6}}{6}e_2.$$



Le vecteur u_3 se décompose en somme de vecteurs orthogonaux :

$$u_3 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}e_1 - \frac{\sqrt{6}}{6}e_2\right) + \left(u_3 - \frac{2\sqrt{3}}{3}e_1 + \frac{\sqrt{6}}{6}e_2\right).$$

Enfin :

$$e_3 = \frac{u_3 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}e_1 + \dfrac{\sqrt{6}}{6}e_2}{\left\| u_3 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}e_1 + \dfrac{\sqrt{6}}{6}e_2 \right\|} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1,0,-1).$$

2 Notons $u_1 = X^2 - 1\,;\; u_2 = 3X + 1\,;\; u_3 = X^2 + X$.

Alors $e_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(X^2 - 1).$

Ensuite, projetons orthogonalement le vecteur u_2 sur la droite vectorielle engendrée par e_1. Nous obtenons :

$$(u_2 \mid e_1)\, e_1 = \frac{1}{2}(-X^2 + 1).$$

Le vecteur u_2 se décompose en somme de deux vecteurs qui sont orthogonaux :

$$u_2 = (u_2 \mid e_1)\, e_1 + \big(u_2 - (u_2 \mid e_1)\, e_1\big)$$

$$u_2 - (u_2 \mid e_1)\, e_1 = \frac{1}{2}X^2 + 3X + \frac{1}{2}.$$

D'où :

$$e_2 = \frac{u_2 - (u_2 \mid e_1)\, e_1}{\|u_2 - (u_2 \mid e_1)\, e_1\|} = \sqrt{\frac{2}{19}}\left(\frac{1}{2}X^2 + 3X + \frac{1}{2}\right).$$

Enfin, projetons orthogonalement le vecteur u_3 sur le plan vectoriel engendré par u_1, u_2 muni de la base orthonormée (e_1, e_2). Nous obtenons :

$$(u_3 \mid e_1)\, e_1 + (u_3 \mid e_2)\, e_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{7}{2}\sqrt{\frac{2}{19}}e_2.$$

Le vecteur u_3 se décompose en somme de vecteurs orthogonaux :

$$u_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{7}{2}\sqrt{\frac{2}{19}}e_2\right) + \left(u_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 - \frac{7}{2}\sqrt{\frac{2}{19}}e_2\right).$$

Enfin :

$$e_3 = \frac{u_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 - \frac{7}{2}\sqrt{\frac{2}{19}}e_2}{\left\| u_3 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 - \frac{7}{2}\sqrt{\frac{2}{19}}e_2 \right\|} = \frac{1}{19}(6X^2 - 2X + 6).$$

3 a) Munissons l'espace vectoriel E du produit scalaire :

$$\forall (P, Q) \in E^2 \quad (P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Interprétons ensuite les conditions imposées.

La première condition exprime que la base (P_n) cherchée est une base orthonormale de E.

La deuxième condition entraîne que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, la famille $(P_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que, pour tout $k \leqslant n$:

$$P_k \in \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^k).$$

Le *théorème d'orthogonalisation de Schmidt*, appliqué à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, établit, avec la condition supplémentaire portant sur le coefficient de plus haut degré des polynômes, l'existence et l'unicité d'une telle base dans $\mathbb{R}_n[X]$. Les polynômes ainsi construits ne dépendent pas de n. Il existe donc une unique base de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant les conditions données.

b) Soit n un entier et $Q_n = \left((t^2-1)^n\right)^{(n)}$.

Le polynôme Q_n est de degré n.

Soit n et m deux entiers distincts.

$$\begin{aligned}(Q_n \mid Q_m) &= \int_{-1}^{1} Q_n(t)Q_m(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^n\right)^{(n)} \left((t^2-1)^m\right)^{(m)}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Supposons $n < m$ et intégrons par parties :

$$\begin{aligned}(Q_n \mid Q_m) &= \left[\left((t^2-1)^n\right)^{(n)} \left((t^2-1)^m\right)^{(m-1)}\right]_{-1}^{1} \\ &\quad - \int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^n\right)^{(n+1)} \left((t^2-1)^m\right)^{(m-1)}\mathrm{d}t \\ &= -\int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^n\right)^{(n+1)} \left((t^2-1)^m\right)^{(m-1)}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

car -1 et 1 sont racines d'ordre m de $(t^2-1)^m$ et donc racines d'ordre 1 de $\left((t^2-1)^m\right)^{(m-1)}$.

Réitérons plusieurs fois. Nous obtenons :

$$\begin{aligned}&(Q_n \mid Q_m) \\ &\quad = (-1)^n \int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^n\right)^{(2n)} \left((t^2-1)^m\right)^{(m-n)}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or $\left((t^2-1)^n\right)^{(2n)} = (2n)!$

Donc :

$$\begin{aligned}(Q_n \mid Q_m) &= (-1)^n(2n)! \int_{-1}^{1} \left((t^2-1)^m\right)^{(m-n)}\mathrm{d}t \\ &= (-1)^n(2n)! \left[\left((t^2-1)^m\right)^{(m-n-1)}\right]_{-1}^{1} = 0.\end{aligned}$$

Si $n = m$, un calcul analogue donne :

$$(Q_n \mid Q_n) = (-1)^n(2n)! \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n\,\mathrm{d}t \neq 0.$$

Il suffit alors de choisir la suite $(a_n)_n$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n^2(-1)^n(2n)! \int_{-1}^{1} (t^2-1)^n\,\mathrm{d}t = 1 \text{ et } a_n > 0.$$

La suite $(a_n Q_n)_n$ vérifie les conditions imposées dans la question **3) a)**.

L'unicité établie dans cette question permet d'affirmer que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; P_n = a_n Q_n$.

Nous obtenons :

$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,; \quad a_1 = \sqrt{\frac{3}{8}}\,; \quad a_2 = \frac{\sqrt{10}}{16}.$$

Puis :

$$P_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,;\; P_1 = \sqrt{\frac{3}{8}}(2X)\,;\; P_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}(3X^2 - 1).$$

4 a) Pour tout P de E, la fonction $\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}P(x)\right)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

De plus, $\mathrm{e}^{-x}P(x) = o_{+\infty}(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})$.

Cette fonction est intégrable sur E.

b) *Question de cours.*

c) Il suffit de remarquer que, si P est un polynôme de degré p, alors :

$$\left(\mathrm{e}^{-x}P(x)\right)' = \mathrm{e}^{-x}(-P(x) + P'(x))$$

où $(-P(x) + P'(x))$ est un polynôme de même degré que P.

L_n est donc un polynôme de degré n.

d) Soit $k < n$. Alors :

$$\begin{aligned}(L_n \mid P_k) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} L_n(x) P_k(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{A \longrightarrow +\infty} \left[\left(\mathrm{e}^{-x} x^n\right)^{(n-1)} x^k \right]_0^A \\ &\qquad - k \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-x} x^n\right)^{(n-1)} x^{k-1}\,\mathrm{d}x \\ &= -k \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-x} x^n\right)^{(n-1)} x^{k-1}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Réitérons ce calcul. Nous obtenons :

$$(L_n \mid P_k) = (-1)^{k+1} k! \int_0^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-x} x^n\right)^{(n-k-1)} 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

Considérons deux entiers m, n tels que $m < n$.

Le polynôme L_m se décompose sur la base canonique $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$;

$$L_m = \sum_{i=0}^{m} a_i P_i.$$

Par conséquent :

$$(L_n \mid L_m) = \sum_{i=0}^{m} a_i\, (L_n \mid P_i) = 0.$$

La famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.

e) Les polynômes L_n ne sont pas nuls.

Notons $K_n = \dfrac{L_n}{\|L_n\|}$. La famille $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée de polynômes telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad K_n \in \mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^n)$$

De plus, pour tout n dans $\mathbb{N}$, vérifier que le coefficient dominant de K_n est $(-1)^n$.

Or, le vecteur R_n cherché est $R_n = \dfrac{P_n - p(P_n)}{\|P_n - p(P_n)\|}$, où p désigne la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1})$.

Donc $R_n = (-1)^n K_n$, car nous savons qu'une base orthonormée vérifiant ces conditions est unique.

3 Conditionnement d'une matrice

1 a) La matrice A est régulière et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) On obtient : $X' = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 3,8 \end{pmatrix}$.

c) $\dfrac{\|B' - B\|}{\|B\|} \approx 00,88$ et $\dfrac{\|X' - X\|}{\|X\|} \approx 2,6542$.

d) Le quotient vaut environ 301.

2 a) Les égalités : $X' - X = A^{-1}(B' - B)$ et $B = AX$ donnent, en prenant les normes :

$$\|(X' - X)\| \leqslant \|A^{-1}\| \|B' - B\| \qquad ; \qquad \|B\| \leqslant \|A\| \|X\|$$

D'où le premier résultat.

Puis : $A(Y - X) + (A' - A)Y = 0$. Soit :

$$Y - X = -A^{-1}(A' - A)Y.$$

Le second résultat s'en déduit en prenant les normes.

b) La matrice A est symétrique, réelle. Elle est diagonalisable et admet une base orthonormée de vecteurs propres (U, V), en identifiant un vecteur et la matrice colonne de ses coordonnées. Notons $AU = \alpha U$ et $AV = \beta V$. α et β sont les valeurs propres, $9 \pm \sqrt{82}$, de A. Pour tout vecteur $T = t_1 U + t_2 V$, on a :

$$AT = t_1 \alpha U + t_2 \beta V.$$

En déduire que :

$$\|A\| = \max(\alpha, \beta) = 9 + \sqrt{82}.$$

En procédant de même avec A^{-1}, on trouve :

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{9 - \sqrt{82}} = 9 + \sqrt{82}$$

Enfin :

$$\mathrm{Cond}(A) \approx 326.$$

Ce résultat explique la multiplication par 300 environ des erreurs relatives.

c) $A' - A = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 \\ 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$.

Cette matrice n'est pas symétrique. Nous devons revenir à la définition pour calculer sa norme.

Soit X un vecteur de norme 1. On pose : $X = \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \end{pmatrix}$.

Alors : $(A' - A)X = \begin{pmatrix} -0.1\sin(u) \\ 0.1(\sin(u) + \cos(u)) \end{pmatrix}$.

Et :

$$\begin{aligned}&\|(A' - A)X\| \\ &= 10^{-1} \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin(2u) - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos(2u)\right)}.\end{aligned}$$

En prenant $\theta = \mathrm{Arccos}\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, on obtient :

$$\|(A' - A)X\| = 10^{-1}\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}.$$

d) Puisqu'une matrice orthogonale, O, vérifie : $OO^{-1} = \mathrm{I}_2$, son conditionnement est 1.

4 Une propriété des bases orthonormales

1 Vérifier que $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille orthogonale en appliquant la relation à $x = e_k$. On note $y = \sum_{i=1}^{n} (x_i \mid e_i) e_i$. On a $\|x - y\| = 0$.

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E.

2 La décomposition de $\|x + y\|^2$ fournit :

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} (x+y \mid e_i)^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)(y \mid e_i).\end{aligned}$$

Le produit scalaire de x et y est donc :

$$(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)(y \mid e_i).$$

3 **a)** G est la matrice dont les coefficients sont $G_{i,j} = (\, e_i \mid e_j \,)$.

Soit $H = G^2$; on a, pour tous i et j de $[\![1, n]\!]$:

$$\begin{aligned}H_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} G_{i,k} G_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} (\, e_i \mid e_k \,)(\, e_k \mid e_j \,) \\ &= (\, e_i \mid e_j \,) = G_{i,j}\end{aligned}$$

d'après la question **2)** .

Donc $G^2 = G$.

G annule le polynôme scindé à racines simples $X^2 - X$. G est diagonalisable. C'est la matrice d'une projection, car $G^2 = G$.

G annule $X^2 - X$ donc ses valeurs propres sont racines du polynôme $X^2 - X$, c'est-à-dire dans $\{0, 1\}$.

b) Si on note $C_1, C_2, \cdots, C_n$ les colonnes de G, la relation $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j C_j = 0$ entraîne que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (\, e_i \mid e_j \,) = 0$$

puis :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad (\, e_i \mid \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \,) = 0.$$

Ceci veut dire que le vecteur $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ est dans l'orthogonal de E qui est l'espace vectoriel $\{0\}$.

La famille $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est une base de E. L'égalité $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j = 0$ entraîne que, pour tout j de $[\![1, n]\!]$, $\lambda_j = 0$.

Les colonnes de G sont indépendantes et donc G est inversible.

c) G est inversible et $G^2 = G$ donc $G = \mathrm{I}_n$.

La base $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ est donc une base orthonormale.

5 Un hyperplan dont l'orthogonal n'est pas une droite

1 L'application Φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par $\Phi(f) = f(0)$ est une forme linéaire sur E. Cette forme linéaire n'est pas nulle.

$f = \exp$, par exemple, n'annule pas Φ.

Donc $H = \{f \in E \ ; \ f(0) = 0\}$ est un hyperplan de E.

2 Prenons f un élément de $H^\perp$. f est orthogonal à toute application continue sur $[0,1]$ s'annulant en 0.

Considérons l'application g :

$$g : x \longmapsto x f(x).$$

Elle est dans H donc $(\ f \mid g\ ) = \int_0^1 t \cdot f^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

L'application $(t \longmapsto t \cdot f^2(t))$ est positive et continue sur $[0, 1]$, donc :

$$\forall t \in\,]0, 1] \quad t f^2(t) = 0.$$

Ainsi on obtient par continuité, $f(0) = 0$, donc $f = 0$.

D'où $f = 0$ et donc $H^\perp = \{0\}$.

Dans un espace vectoriel euclidien (donc de dimension finie) l'orthogonal d'un hyperplan est une droite. La propriété n'est plus automatiquement vraie si la dimension n'est pas finie.

6 Une inégalité d'Hadamard

1 On peut remarquer que :

$${}^t M M + M + {}^t M + \mathrm{I}_n = ({}^t M + \mathrm{I}_n)(M + \mathrm{I}_n).$$

Donc ${}^t M M + M + {}^t M = 0 \iff \mathrm{I}_n = ({}^t M + \mathrm{I}_n)(M + \mathrm{I}_n)$.

Ainsi ${}^t M M + M + {}^t M = 0$ si, et seulement si, la matrice $M + \mathrm{I}_n$ est une matrice orthogonale. L'ensemble des matrices M est donc formé des matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $M = P - \mathrm{I}_n$ avec P une matrice orthogonale quelconque.

2 On notera $B = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Si le déterminant de M est nul, on aura toujours :

$$|\mathrm{Det} M| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|C_i\| .$$

Sinon, les colonnes de M forment une base de $\mathbb{R}^n$, base que l'on peut orthonormaliser.

Appelons $B' = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base orthonormale obtenue par le procédé de Gram-Schmidt.

La calcul du déterminant par changement de base, donne :

$$\begin{aligned}\mathrm{Det} M &= \mathrm{Det}_B(C_1, \cdots, C_n)\\ &= \mathrm{Det}_B(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)\mathrm{Det}_{B'}(C_1, \ldots, C_n).\end{aligned}$$

$\mathrm{Det}_B(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ vaut 1 ou -1 puisque c'est le déterminant d'une matrice de passage entre deux bases orthonormales. En revanche, le déterminant $\mathrm{Det}_{B'}(C_1, \cdots, C_n)$ est triangulaire par construction de la base orthonormale par le procédé de Gram-Schmidt. Il suffit de calculer le produit des termes diagonaux. Le i-ème terme diagonal vaut $(\, C_i \mid \varepsilon_i\,)$, car la base B' est orthonormale.

En utilisant l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*, on obtient :

$$|\mathrm{Det}_{B'}(C_1, \cdots, C_n)| = \left|\prod_{i=1}^{n} (\, C_i \mid \varepsilon_i\,)\right| \leqslant \prod_{i=1}^{n} \|C_i\| .$$

Nous obtenons ainsi l'inégalité de Hadamard.

3 ▬ Appliquons l'inégalité de Hadamard à la matrice $M = P - \mathrm{I}_n$.

Les colonnes de P sont orthonormales et la colonne C_i de M est la colonne P_i de P à laquelle on retranche e_i. Donc :

$$\begin{aligned}\|C_i\|^2 = \|P_i - e_i\|^2 &= \|P_i\|^2 + \|e_i\|^2 - 2(\, P_i \mid e_i\,)\\ &= 1 + 1 - 2(\, P_i \mid e_i\,).\end{aligned}$$

Or : $\qquad |(\, P_i \mid e_i\,)| \leqslant \|\, P_i \,\|\|\, e_i \,\| = 1.$

Nous en déduisons que, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $\|C_i\|^2 \leqslant 4$ et donc $|\mathrm{Det} M| \leqslant 2^n$.

7 Réduction d'un endomorphisme défini à l'aide d'un produit scalaire

La famille (u, v) est orthonormale de E, donc libre. On peut donc la compléter en une base orthonormale de E : $B = (u, v, e_3, \cdots, e_n)$.

On a $f(u) = u + v$, $f(v) = v + u$ et :

$$\forall i \geqslant 3 \quad f(e_i) = e_i .$$

Dans cette base B, la matrice de f est donc :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & & & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Le rang de M est $n - 1$. Le plan $P = \mathrm{Vect}(u, v)$ est stable par f. Sur ce plan, la restriction de f possède 0 et 2 comme valeurs propres. Des vecteurs propres orthonormés associés sont $\frac{\sqrt{2}}{2}(u - v)$ pour la valeur propre 0 et $\frac{\sqrt{2}}{2}(u + v)$ pour la valeur propre 2. Sur l'orthogonal de P, f est l'identité donc de valeur propre 1.

Conclusion

f est diagonalisable, son spectre $\mathrm{Sp}(f) = \{0, 1, 2\}$ et les sous-espaces vectoriels propres sont :

- Vect $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(u - v)\right)$ pour la valeur propre 0 ;
- Vect $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(u + v)\right)$ pour la valeur propre 2 ;
- le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\,(u, v)^{\perp}$ pour la valeur propre 1.

8 Projection orthogonale dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

1 ▬ **a)** U_n et M_p sont diagonalisables, car elles sont symétriques réelles.

Le rang de U_n est 1, car Im $U_n = \mathrm{Vect}(V_1)$, avec :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1\\ \vdots\\ 1 \end{pmatrix}.$$

Le rang de M_p est 2 et Im $M_p = \mathrm{Vect}(V_1, V_2)$ avec :

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1\\ \vdots\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ \vdots\\ 1 \end{pmatrix}.$$

D'où $\dim \mathrm{Ker} U_n = n - 1$ et $\dim \mathrm{Ker} M_p = n - 2$.

b) Le calcul par blocs de M_p^2 donne :

$$M_p^2 = \begin{pmatrix} (n) & (2p) & (n) \\ (2p) & (2p) & (2p) \\ (n) & (2p) & (n) \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathrm{tr}(M_p) = 2p$ et $\mathrm{tr}(M_p^2) = 4np - 4p^2$.

La matrice M_p est diagonalisable.

0 est valeur propre d'ordre $n-2$. Il reste donc deux valeurs propres à déterminer pour lesquelles on a :

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2p \quad , \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 4np - 4p^2.$$

λ_1 et λ_2 vérifient donc $\lambda_1 + \lambda_2 = 2p$, $\lambda_1\lambda_2 = 4p^2 - 2np$.
Les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont solutions de l'équation $x^2 - 2px + 4p^2 - 2np = 0$.

Cette équation a pour solutions :

$$\lambda_1 = p + \sqrt{p(2n-3p)} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = p - \sqrt{p(2n-3p)}.$$

c) Le polynôme $P(X) = X(X-\lambda_1)(X-\lambda_2)$ est un polynôme annulateur de M_p, car M_p est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(M_p) = \{0, \lambda_1, \lambda_2\}$.

Comme $P(M_p) = 0$, M_p^3 est élément de $\mathrm{Vect}(\mathrm{I}_n, M_p, M_p^2)$.

Ce sous-espace vectoriel est bien stable par le produit matriciel.

2 **a)** $F = \mathrm{Vect}(I_n, U_n)$, donc : $F^\perp = (I_n)^\perp \cap (U_n)^\perp$

$$M \perp \mathrm{I}_n \iff \mathrm{tr}(M) = 0.$$
$$M \perp U_n \iff \left(M \mid U_n\right) = 0.$$

Ainsi :

$$M \in F^\perp \iff \mathrm{tr}(M) = 0 \text{ et } s(M) = 0.$$

b) $\overline{M} = \alpha_0 \mathrm{I}_n + \beta_0 U_n$ est la projection orthogonale de M sur F si, et seulement si, $M - \overline{M}$ est dans $F^\perp$.

On doit donc avoir :

$$(M - \overline{M} \mid \mathrm{I}_n) = 0 \quad \text{et} \quad (M - \overline{M} | U_n) = 0.$$

Traduisons :

$$(M - \overline{M} \mid \mathrm{I}_n) = 0 \iff \alpha_0(\mathrm{I}_n \mid \mathrm{I}_n) + \beta_0(U_n | \mathrm{I}_n) = (M|\mathrm{I}_n)$$

$$(M - \overline{M} \mid U_n) = 0 \iff \alpha_0(\mathrm{I}_n \mid U_n) + \beta_0(U_n \mid U_n) = (M \mid U_n).$$

Ce système donne :

$$\begin{cases} n\alpha_0 + n\beta_0 = \mathrm{tr}(M) \\ n\alpha_0 + n^2\beta_0 = s(M) \end{cases}.$$

On en déduit donc que :

$$\overline{M} = \frac{1}{n^2 - n}[n \cdot \mathrm{tr}(M) - s(M)] \cdot \mathrm{I}_n + \frac{1}{n^2 - n}[s(M) - \mathrm{tr}(M)]U_n.$$

9 Éléments propres d'un endomorphisme de $\mathcal{C}\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$

1 L'application définie sur $E \times E$ par :
$\left(f \mid g\right) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ est bilinéaire (par linéarité de l'intégrale) et symétrique. De plus, pour tout f de E :

$$\left(f \mid f\right) \geqslant 0.$$

Et $\left(f \mid f\right) = 0$ entraîne $f = 0$, car f est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2 **a)** Écrivons :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sin(2x - 2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y + \int_{x}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2y - 2x)\, f(y)\,\mathrm{d}y. \\ &= \sin(2x) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \cos(2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y - \cos(2x) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sin(2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y \\ &\quad + \cos(2x) \int_{x}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y - \sin(2x) \int_{x}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Les fonctions sin, cos, f sont continues sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Donc les fonctions :

$$x \longmapsto \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \cos(2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$x \longmapsto \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sin(2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y$$

$$x \longmapsto \int_{x}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y$$

et

$$x \longmapsto \int_{x}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

La fonction F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et :

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2\cos(2x) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \cos(2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y + 2\sin(2x) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sin(2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y \\ &\quad - 2\sin(2x) \int_{x}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y + 2\cos(2x) \int_{x}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

car les termes en $\sin(2x)\cos(2x)\, f(x)$ s'éliminent.

Un raisonnement analogue permet alors d'établir que F' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et :

$$\begin{aligned}F''(x) = -4\sin(2x)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \cos(2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y \\ + 4\cos(2x)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sin(2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y \\ - 4\cos(2x)\int_{x}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y \\ - 4\sin(2x)\int_{x}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y + 4f(x).\end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$F''(x) + 4F(x) = 4f(x).$$

b) Calculons :

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y$$

et :

$$F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(\pi + 2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y = -F\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

De même :

$$F'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2y)\, f(y)\,\mathrm{d}y = -F'\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

3 Pour tout f dans E, $A(f)$ est dans E.

Vérifier sans peine que A est un endomorphisme de E.

Enfin, si f est dans Ker A, alors $F = A(f) = 0$.

Donc $F'' + 4F = 0$.

f est nulle.

A est un endomorphisme injectif de E.

4 Soit f et g deux éléments de E.

$$\begin{aligned}\left(A(f) \mid g\right) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A(f)(x) g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2|x-y|\, f(y)\,\mathrm{d}y\right) g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

La fonction $\left((x, y) \longmapsto \sin(2|x-y|\, f(y)g(x)\right)$ est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^2$.

Nous pouvons appliquer le *théorème de Fubini* :

$$\begin{aligned}\left(A(f) \mid g\right) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2|x-y|\, g(x)\,\mathrm{d}x\right) f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A(g)(x)\, f(x)\,\mathrm{d}x = \left(A(g) \mid f\right).\end{aligned}$$

5 Nous avons établi, dans la question **2)**, que, si $F = A(f)$, alors F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et :

$$F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -F\left(\frac{\pi}{2}\right) \;;\quad F'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -F'\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

L'ensemble :

$$\left\{G \in \mathcal{C}^2\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right) \;;\; G\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -G\left(\frac{\pi}{2}\right)\right.$$

et

$$\left. G'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -G'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$ qui contient Im (A).

Réciproquement, soit G un élément de cet ensemble. Notons $g = \frac{1}{4}(G'' + 4G)$.

Cette application est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Posons $A(g) = H$.

L'application H vérifie $g = \frac{1}{4}(H'' + 4H)$ et :

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = -H\left(-\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad H'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -H'\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Les fonctions G et H vérifient la même équation différentielle $y'' + 4y = 4g$.

Les solutions de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 s'écrivent sous la forme :

$$y = a\cos(2x) + b\sin(2x) + y_0,$$

où y_0 désigne une solution particulière de l'équation.

La condition $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -y\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ détermine a en fonction de $y_0\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $-\, y_0\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

La condition $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -y'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ détermine b en fonction de $y_0'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $-\, y_0'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Nous en déduisons que $G = H$, puis $A(g) = G$.

Im A est donc le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \mathbb{R}\right)$ défini ci-dessus.

6 Soit f un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Alors f est dans Im A et $A(f) = \lambda f$.

Utilisons la relation calculée dans la question **2)**.

$$A(f)'' + 4A(f) = 4f.$$

Soit : $$\lambda f'' + 4\lambda f = 4f.$$

Nous obtenons la condition nécessaire :

$$\lambda f'' + 4(\lambda - 1)f = 0.$$

Réciproquement, soit f dans $\operatorname{Im} A$ telle que, pour tout x de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\lambda f''(x) + 4(\lambda - 1)f(x) = 0.$$

Puisque f est dans $\operatorname{Im} A$, il existe g dans E telle que $A(g) = f$. Alors $g = \frac{1}{4}(f'' + 4f)$.

Or, $\lambda(f'' + 4f) = 4f$.

De plus, A est injectif, donc 0 n'est pas valeur propre de A.

λ est non nul et $g = \frac{1}{\lambda}f$.

Soit $A(f) = A(\lambda g) = \lambda A(g) = \lambda f$.

f est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

7 ■ Nous sommes conduits, d'après la question précédente, à rechercher les solutions d'une équation différentielle de la forme $\lambda y'' + 4(\lambda - 1)y = 0$ qui vérifient de plus :

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -y\left(-\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -y'\left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Nous reconnaissons une équation différentielle linéaire d'ordre 2 homogène.

L'équation caractéristique associée est :

$$\lambda r^2 + 4(\lambda - 1) = 0.$$

Si $\lambda(\lambda - 1) < 0$, les solutions sont de la forme :

$$y = a\exp(\omega x) + b\exp(-\omega x).$$

Vérifier que les deux conditions supplémentaires imposent : $a = b = 0$.

Il n'y a pas d'élément propre dans ce cas.

Si $\lambda(\lambda - 1) > 0$, les solutions sont de la forme :

$$y = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x).$$

Vérifier que les deux conditions supplémentaires imposent :

$$a = b = 0 \quad \text{ou} \quad \cos\left(\omega\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Un vecteur propre n'est pas nul, donc :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \omega = 2k + 1.$$

De plus, $r^2 = \dfrac{4(1-\lambda)}{\lambda} = \mathrm{i}^2\omega^2$.

Nous calculons :

$$\lambda = \frac{4}{4 - \omega^2} = \frac{4}{4 - (2k+1)^2}.$$

Vérifier que tout λ de cette forme satisfait l'inégalité : $\lambda(\lambda - 1) > 0$.

Les valeurs propres sont les réels de la forme :

$$\lambda = \frac{4}{4 - (2k+1)^2}, \quad \text{avec} \quad k \text{ dans } \mathbb{Z}.$$

Le sous-espace propre associé à une telle valeur propre est le plan vectoriel :

$$\left\{a\cos\left(2\sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda}}x\right) + b\sin\left(2\sqrt{\frac{\lambda - 1}{\lambda}}x\right) \ ; \ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

10 Pour s'entraîner. Espaces euclidiens

1 ■ Supposons qu'un tel vecteur v existe. Alors :

$$\operatorname{Det}(a, b, v) = -\operatorname{Det}(a, v, b) = -a \wedge v \cdot b = -c \cdot b.$$

Mais aussi :

$$\operatorname{Det}(a, b, v) = \operatorname{Det}(b, v, a) = b \wedge v \cdot a = d \cdot a.$$

Nous obtenons donc la condition nécessaire d'existence de v :

$$c \cdot b + d \cdot a = 0.$$

Regardons si cette condition est suffisante. Supposons qu'elle soit vérifiée.

Cherchons d'abord à résoudre l'équation $a \wedge v = c$.

Considérons le vecteur e unitaire tel que la famille (a, e, c) soit orthogonale directe.

Ce vecteur e existe et est unique. De plus :

$$a \wedge e = \frac{\|a\|}{\|c\|}c \quad \text{donc} \quad a \wedge \frac{\|c\|}{\|a\|}e = c.$$

En effet, d'après l'énoncé, les quatre vecteurs a, b, c et d sont non nuls.

Le vecteur $u = \dfrac{\|c\|}{\|a\|}e$ est donc une solution de l'équation.

Un vecteur v de E est solution si, et seulement si :

$$a \wedge v = c = a \wedge u.$$

Cette égalité équivaut à :

$$a \wedge (v - u) = 0.$$

Donc :

$$\exists k \in \mathbb{R} \quad v = u + ka.$$

Déterminons alors, parmi ces vecteurs, lesquels vérifient la seconde égalité.

$$b \wedge (u + ka) = d \iff k(a \wedge b) = b \wedge u - d.$$

Le vecteur $a \wedge b$ est non nul. Il dirige la droite vectorielle orthogonale au plan engendré par a et b.

L'équation admet une solution unique si, et seulement si, les vecteurs $a \wedge b$ et $b \wedge u - d$ sont colinéaires.

Calculons :

$$\begin{aligned} a \cdot (b \wedge u - d) &= a \cdot (b \wedge u) - a \cdot d \\ &= -(a \wedge u) \cdot b - a \cdot d = 0\,; \\ b \cdot (b \wedge u - d) &= 0. \end{aligned}$$

Il existe donc un unique vecteur v tel que :

$$a \wedge v = c \quad \text{et} \quad b \wedge v = d.$$

2 **a)** Soit f un endomorphisme auto-adjoint de E vérifiant :

$$\forall x \in E \quad (\, x \mid f(x)\,) = 0.$$

Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (\, x + y \mid f(x + y)\,) = 0.$$

Ceci entraîne que :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad (\, x \mid f(y)\,) = -(\, f(x) \mid y\,).$$

Ainsi $f^* = -f$. Or $f^* = f$, donc $f = 0$.

b) On sait que :

$$\forall x \in E \quad \|\, f(x)\,\|^2 = (\, x \mid f(x)\,).$$

On a ainsi :

$$\forall x \in E \quad (\, x \mid (f^2 - f)(x)\,) = 0.$$

$f^2 - f$ est un endomorphisme auto-adjoint. En utilisant le résultat préliminaire, appliqué à $f^2 - f = 0$, on en déduit que $f^2 - f = 0$.

L'endomorphisme f est un projecteur auto-adjoint, c'est la projection orthogonale sur f.

Réciproquement, si f est la projection orthogonale sur $\operatorname{Im} f$, on sait que :

$$\forall x \in E \quad x = x - f(x) + f(x)$$

avec :

$$x - f(x) \in \operatorname{Ker} f \quad \text{et} \quad x - f(x) \perp f(x).$$

Donc $(\, x \mid f(x)\,) = (\, x - f(x) \mid f(x)\,) + (\, f(x) \mid f(x)\,)$.

Ceci prouve que :

$$\forall x \in E \quad \|\, f(x)\,\|^2 = (\, x \mid f(x)\,).$$

3 Soit u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et B. On a donc $u^{2k+1} = v^{2k+1}$.

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de vecteurs propres pour u et D et E les matrices de u et de v dans cette base. On a $D^{2k+1} = E^{2k+1}$, donc E^{2k+1} est diagonale et $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de vecteurs propres de v^{2k+1}.

L'endomorphisme v est diagonalisable. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est donc somme directe des sous-espaces vectoriels propres de v. Mais tout sous-espace vectoriel propre de v associé à une valeur propre λ est contenu dans le sous-espace vectoriel propre de v^{2k+1} associé à λ^{2k+1}. Donc v et v^{2k+1} admettent les mêmes sous-espaces vectoriels propres. Il en résulte que E est diagonale.

Or $2k + 1$ est impair et le corps de base est $\mathbb{R}$.

On en déduit que $D = E$, donc $u = v$ et finalement $A = B$.

4 **a)** Le sous-espace F est l'intersection de deux hyperplans distincts. Il a pour dimension 2.

La droite vectorielle orthogonale de l'hyperplan d'équation $x + y + z + t = 0$ est dirigée par le vecteur :

$$u = (1, 1, 1, 1).$$

La droite vectorielle orthogonale de l'hyperplan d'équation $x + 2y + 3z + 4t = 0$ est dirigée par le vecteur :

$$v = (1, 2, 3, 4).$$

Le sous-espace $F^\perp$ a pour dimension 2, contient u et v. Il admet pour base (u, v).

b) Construisons une base orthonormée de $F^\perp$ en orthonormalisant la base (u, v).

$$u_1 = \frac{u}{\|u\|} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)\,;$$

$$u_2 = \frac{v - (v \mid u_1)u_1}{\|v - (v \mid u_1)u_1\|} = \frac{\sqrt{5}}{10}(-3, -1, 1, 3).$$

Notons p la projection orthogonale sur $F^\perp$ et s la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$.

Pour tout w de $\mathbb{R}^4$:

$$p(w) = (w \mid u_1)u_1 + (w \mid u_2)u_2\,; \quad s(w) = -w + 2p(w).$$

Calculer $s(e_1)$, $s(e_2)$, $s(e_3)$, $s(e_4)$ pour obtenir la matrice :

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

5 Les vecteurs colonnes, C_1, C_2 et C_3 de la matrice ont pour norme 1. La matrice est orthogonale et :

$$C_3 = C_1 \wedge C_2.$$

Nous avons une matrice de rotation.

Cherchons les vecteurs invariants :

$$\begin{cases}(a^2-1)x+(ba-c)y+(ca+b)z=0\\(ab+c)x+(b^2-1)y+(cb-a)z=0\\(ac-b)x+(bc+a)y+(c^2-1)z=0\end{cases}.$$

Une solution (presque) évidente de ce système est (a,b,c).

Ce vecteur n'est pas nul.

Choisissons pour axe de la rotation, la droite vectorielle dirigée et orientée par (a,b,c).

L'angle θ vérifie $1+2\cos(\theta)=\mathrm{tr}(u)=1$. Donc :

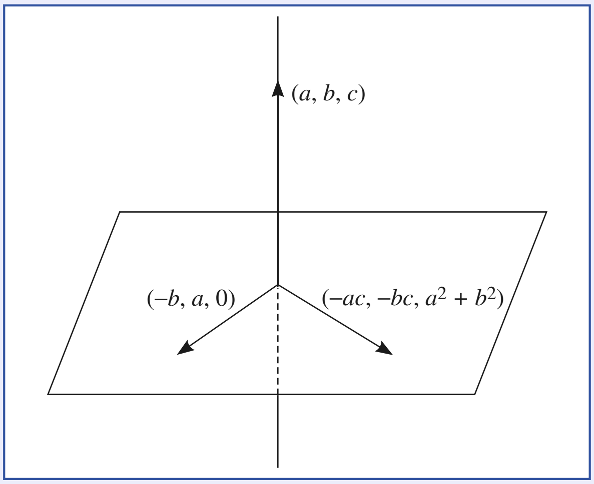
$$\cos(\theta)=0.$$

Le vecteur $(-b,a,0)$ est orthogonal à (a,b,c).
Il a pour image $(-ac,-bc,a^2+b^2)$.

Et :

$$\begin{pmatrix}-b\\a\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-ac\\-bc\\a^2+b^2\end{pmatrix}=(a^2+b^2)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

L'angle de la rotation est $\dfrac{\pi}{2}$.



6 ▬ Appelons $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une base orthonormée qui diagonalise v.

Alors :

$$0\leqslant \mathrm{tr}(uv)=\sum_{i=1}^n\langle uv(e_i)\mid e_i\rangle=\sum_{i=1}^n\lambda_i\,\langle u(e_i)\mid e_i\rangle$$
$$\leqslant \mathrm{tr}(u)\mathrm{tr}(v)$$

car, pour tout i, $\langle u(e_i)\mid e_i\rangle\geqslant 0$.

11 Adjoint et norme d'un endomorphisme

1 ▬ Pour tous vecteurs x et y de E, nous avons :

$$\begin{aligned}\langle u(x)\mid y\rangle&=\langle a\mid x\rangle\langle b\mid y\rangle-\langle b\mid x\rangle\langle a\mid y\rangle\\&=\langle x\mid\langle b\mid y\rangle a-\langle a\mid y\rangle b\rangle.\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$u^*(y)=\langle b\mid y\rangle a-\langle a\mid y\rangle b=-u(y).$$

Donc $u^*=-u$.

Notons $\left(e_1=\dfrac{a}{\|a\|},e_2=\dfrac{b}{\|b\|},e_3,\dots,e_n\right)$ une base orthonormée de E.

Soit $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ un vecteur unitaire de E.

Alors $u(x)=x_1\|a\|b-x_2\|b\|a$. Donc :

$$\begin{aligned}\|u(x)\|^2&=x_1^2\|a\|^2\|b\|^2+x_1^2\|a\|^2\|b\|^2\\&=(x_1^2+x_2^2)\|a\|^2\|b\|^2\leqslant\|a\|^2\|b\|^2.\end{aligned}$$

Nous en déduisons que $\|u\|^2\leqslant\|a\|^2\|b\|^2$.

Plus précisément, pour $x=\dfrac{a}{\|a\|}$:

$$u\left(\frac{a}{\|a\|}\right)=\|a\|b.$$

D'où $\|u\|=\|a\|\|b\|$.

2 ▬ Avec les vecteurs a et b donnés, nous avons :

$$u(a)=\|a\|^2b.$$

Posons $f=\dfrac{1}{\|a\|^2}u$. Vérifier que f convient.

12 Construisons un automorphisme orthogonal...

1 ▬ Considérons une base orthonormée $(e_j)_{j\in[\![1,p]\!]}$ de E, les matrices A et B des familles $(u_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ et $(v_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ respectivement relativement à cette base.

Alors :

$$\begin{aligned}{}^tAA&=\left(\sum_{k=1}^p\langle u_i\mid e_k\rangle\langle e_k\mid u_j\rangle\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\\&=\big(\langle u_i\mid u_j\rangle\big)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}.\end{aligned}$$

De même, ${}^tBB=\big(\langle v_i\mid v_j\rangle\big)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

Par conséquent, ${}^tAA={}^tBB$.

Nous en déduisons que $\|AX\|^2=\|BX\|^2$. Puis :

$$AX=0\iff BX=0.$$

Les matrices A et B ont même rang. Les deux familles de vecteurs ont également même rang.

2 Appelons r le rang commun des deux familles de vecteurs.

Supposons la famille $(u_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ ordonnée de telle sorte que la sous-famille $(u_j)_{j\in[\![1,r]\!]}$ soit libre.

En procédant avec les familles $(u_j)_{j\in[\![1,r]\!]}$ et $(v_j)_{j\in[\![1,r]\!]}$ comme ci-dessus, montrer que la famille $(v_j)_{j\in[\![1,r]\!]}$ est libre.

Supposons que $r < n$. Soit u_j, avec $j > r$. Alors :

$$\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_r)\in\mathbb{R}^r \quad u_j=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k u_k.$$

Montrons que $v_j=\sum_{k=1}^{r}\lambda_k v_k$.

En effet, grâce à l'hypothèse $\langle u_i \mid u_j\rangle=\langle v_i \mid v_j\rangle$:

$$\left\|v_j-\sum_{k=1}^{r}\lambda_k v_k\right\|^2=\left\|u_j-\sum_{k=1}^{r}\lambda_k u_k\right\|^2=0.$$

Si $r=\dim E$, l'application f définie par :

$$\forall j\in[\![1,r]\!] \quad f(u_j)=v_j,$$

est un automorphisme orthogonal (il conserve la norme) qui convient.

Si $r<\dim E$. Considérons un supplémentaire orthogonal, U, de $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_r)$, un supplémentaire orthogonal, V, de $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_r)$. Complétons $(u_1,\dots,u_r)$ en une base de E par l'adjonction d'une famille orthonormée $(u_{r+1},\dots,u_p)$ et $(v_1,\dots,v_r)$ en une base de E par l'adjonction d'une famille orthonormée $(v_{r+1},\dots,v_p)$. Enfin, définissons f par :

$$\forall j\in[\![1,r]\!] \quad f(u_j)=v_j\,;$$
$$\forall k\in[\![r+1,p]\!] \quad f(u_k)=v_k.$$

Vérifier que f est un automorphisme orthogonal, car les endomorphismes qu'il induit sur les deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux stables sont orthogonaux.

Il vérifie de plus la condition imposée.

13 Bases et automorphismes orthogonaux

1 **a)** Vérifier que $f^*\circ f$ est un endomorphisme auto-adjoint en cherchant son adjoint.

De plus, pour tout vecteur x de E :

$$\big(f^*\circ f(x)\mid x\big)=\langle f(x)\mid f(x)\rangle\geqslant 0.$$

b) Nous savons qu'il existe une base orthonormée, $(e_1,\dots,e_n)$, de vecteurs propres de $f^*\circ f$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ les valeurs propres correspondantes.

D'où :

$\forall(i,\ j)\in[\![1,n]\!]^2$

$$\langle f^*\circ f(e_i)\mid e_j\rangle=\langle f(e_i)\mid f(e_j)\rangle=\lambda_i\delta_{i,j}.$$

La famille $(f(e_1),\dots,f(e_n))$ est orthogonale.

L'endomorphisme f transforme la base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ en une famille orthogonale.

c) Supposons la base $(e_1,\dots,e_n)$ ordonnée de manière telle que les vecteurs $f(e_1),\dots,f(e_p)$ soient non nuls et que les vecteurs $f(e_{p+1}),\dots,f(e_n)$ soient nuls.

Posons, pour tout i de $[\![1,p]\!]$, $v_i=\dfrac{f(e_i)}{\|f(e_i)\|}$ et complétons la famille $v_1,\dots,v_p$ en une base orthonormée $(v_1,\dots,v_n)$ de E.

L'application linéaire u définie par :

$$\forall i\in[\![1,n]\!] \quad u(e_i)=v_i$$

est orthogonale.

Soit s l'application définie par :

$$\forall i\in[1,p] \quad s(v_i)=f(e_i) \qquad \forall i\in[\![1,p]\!] \quad s(v_i)=0.$$

La matrice de cette application dans une base orthonormale est diagonale, donc symétrique.

L'endomorphisme s est auto-adjoint. De plus, $f=s\circ u$.

Cette décomposition est dite « décomposition polaire de f ».

2 La matrice cherchée, X, est orthogonale puisqu'elle admet pour vecteurs colonnes les vecteurs $(c_1,\dots,c_p)$, relativement à la base $(b_1,\dots,b_p)$.

La matrice M de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ admet une décomposition polaire $M=SU$, avec S une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ symétrique et U une matrice de $\mathcal{O}_p(\mathbb{R})$.

On a donc $MU^{-1}=S$.

On prend pour X la matrice U^{-1}, on notera $(c_1,\dots,c_p)$ les vecteurs de B dont les coordonnées dans $(b_1,\dots,b_p)$ sont les colonnes de U^{-1}. On aura donc :

$$\forall k\in[\![1,p]\!] \quad c_k=x_{1,k}b_1+x_{2,k}b_2+\cdots+x_{p,k}b_p.$$

$(c_1,\dots,c_p)$ est bien une base de B.

Le calcul de $(a_i\mid c_k)$ donne :

$$(a_i\mid c_k)=\sum_{j=1}^{p}x_{j,k}(a_i\mid b_j).$$

On reconnaît l'élément $s_{i,k}$ de la matrice S. Comme S est symétrique, on en déduit que :

$$\forall(i,k)\in[\![1,p]\!]^2 \quad (a_i\mid c_k)=(a_k\mid c_i).$$

Ainsi, il existe une base orthonormale de B telle que :

$$\forall(i,k)\in[\![1,p]\!]^2 \quad (a_i\mid c_k)=(a_k\mid c_i).$$

3 Considérons A et B avec deux bases orthonormales $(a_1, \dots, a_p)$ pour A et $(b_1, \dots, b_p)$ pour B.

Notons $(c_1, \dots, c_p)$ la base orthonormale de B telle que :
$$\forall (i,k) \in [\![1,p]\!]^2 \quad (a_i \mid c_k) = (a_k \mid c_i).$$

On construit $(v_1, \cdots, v_p, v_{p+1}, \cdots, v_{2p})$ avec :
$$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad v_i = a_i + c_i \qquad v_{i+p} = a_i - c_i.$$

Et de même, pour une suite $(w_1, \cdots, w_p, w_{p+1}, \cdots, w_{2p})$ avec :
$$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad w_i = a_i + c_i \qquad w_{i+p} = c_i - a_i.$$

La condition imposée à $(c_1, \cdots, c_p)$ permet de remarquer que :
$$\forall (i,\ j) \in [\![1,2p]\!]^2 \quad (v_i \mid v_j) = (w_i \mid w_j).$$

Donc, il existe un automorphisme orthogonal f tel que :
$$\forall i \in [\![1,2p]\!] \quad f(v_i) = w_i.$$

Ainsi, pour tout i de $[\![1,p]\!]$, on a :
$$f(a_i + c_i) = a_i + c_i \quad \text{et} \quad f(a_i - c_i) = c_i - a_i.$$

Ceci prouve que $f(a_i) = c_i$ et $f(c_i) = a_i$. Donc :
$$f(A) = B \quad \text{et} \quad f(B) = A.$$

14 Matrices diagonalisables commutant avec leur transposée

1 Vu en cours.

2 **a)** On se place dans $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa base canonique orthonormale pour le produit scalaire usuel.On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Soit $HR(n)$ la propriété : pour tout espace vectoriel euclidien E, de dimension n, pour tout endomorphisme u de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$, il existe une base orthonormale de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

Si $n = 1$, la propriété est évidente.

Supposons $HR(n-1)$ vérifiée. On prend donc E un espace vectoriel euclidien de dimension n et u un endomorphisme de E.

u et u^* ont même polynôme caractéristique.

Le polynôme caractéristique de u est scindé donc également celui de u^*. Il existe donc une valeur propre de u^* dans $\mathbb{R}$ et un vecteur propre unitaire associé, noté e_n.

Soit $F = \mathrm{Vect}(e_n)$.

F est stable par u^* donc $F^\perp$ est stable par u.

Si on note $\bar{u}$ la restriction de u à $F^\perp$, son polynôme caractéristique divise celui de u, donc le polynôme caractéristique de $\bar{u}$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

En appliquant l'hypothèse de récurrence à $F^\perp$ et $\bar{u}$, il existe une base orthonormée $e' = (e_1, \cdots, e_{n-1})$ de $F^\perp$ dans laquelle $\bar{u}$ a une matrice triangulaire supérieure. Notons M_{n-1} cette matrice.

La base $e = (e_1, \cdots, e_n)$ est bien orthonormale et la matrice de u dans cette base est :
$$M = \begin{pmatrix} & & & \cdot \\ & M_{n-1} & & \vdots \\ & & & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Elle est bien triangulaire supérieure.

Conclusion

u étant un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$, il existe une base orthonormée dans laquelle u a une matrice triangulaire supérieure.

b) Soit T une matrice triangulaire supérieure réelle.

Si $n = 2$, on voit que :
$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$
se traduit par :
$$a^2 + b^2 = a^2\ ; \quad ab = bc\ ; \quad c^2 + b^2 = c^2.$$
D'où $b = 0$ et la matrice est diagonale.

On suppose la propriété vraie pour une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit T triangulaire supérieure dans $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tTT = T\,{}^tT$.

Écrivons T sous la forme :
$$T = \begin{pmatrix} & & & a_1 \\ & T' & & \vdots \\ & & & a_n \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n+1} \end{pmatrix}$$
avec T' triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'égalité ${}^tTT = T\,{}^tT$ entraîne :
$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 + a_{n+1}^2 = a_{n+1}^2 \quad \text{et} \quad {}^tT'T' = T'\,{}^tT'.$$

Donc $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ et T' est diagonale (d'après l'hypothèse de récurrence).

Ainsi T est elle-même diagonale.

La réciproque est évidente.

c) Notons $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures.

A est orthogonalement semblable à une matrice triangulaire :

$$\exists T \in \mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{R}) \ \exists U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \quad A = {}^{\mathrm{t}}UTU.$$

Supposons que $A^t A =^t AA$.

$$A^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}AA \iff T^{\mathrm{t}}T = {}^{\mathrm{t}}TT.$$

Si $A^{\mathrm{t}}A = {}^{\mathrm{t}}AA$, la matrice T est diagonale.

Comme T est diagonale et semblable à A :

$$\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AA) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}TT) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

Réciproquement, on suppose $\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AA) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

Les matrices A et T sont semblables, ainsi que $A^{\mathrm{t}}A$ et $T^{\mathrm{t}}T$. On a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \mathrm{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^{n} t_{i,i}^2.$$

Or, $\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AA) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}TT) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{i,j}^2$.

L'égalité $\mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}AA) = \mathrm{tr}({}^{\mathrm{t}}TT) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ entraîne que :

$$\forall i \neq j \quad t_{i,j} = 0.$$

Donc T est diagonale.

Dans ce cas, les matrices ${}^{\mathrm{t}}T$ et T commutent. Donc A et ${}^{\mathrm{t}}A$ commutent également.

15 Valeurs propres de matrices symétriques réelles

1 A est une matrice symétrique réelle, définie positive.

Elle est donc diagonalisable et ses valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont strictement positives.

La matrice $A + r\mathrm{I}_n$ est symétrique. Ses valeurs propres sont $\lambda_1 + r, \ldots, \lambda_n + r$ qui sont strictement positives. Elle est définie positive.

2 Soit B la matrice $B = (r\mathrm{I}_n + A)^{-1}(r\mathrm{I}_n - A)$.

On a ${}^{\mathrm{t}}B = (r\mathrm{I}_n - {}^{\mathrm{t}}A)(r\mathrm{I}_n + {}^{\mathrm{t}}A)^{-1} = (r\mathrm{I}_n - A)(r\mathrm{I}_n + A)^{-1}$. A est symétrique, de plus $(r\mathrm{I}_n - A)$ commute avec $r\mathrm{I}_n + A$.

Montrons que $(r\mathrm{I}_n + A)^{-1}$ commute avec $r\mathrm{I}_n - A$.

Soit M une matrice inversible. Si M et N commutent, alors M^{-1} et N commutent également :

$$MN = NM \implies M^{-1}MNM^{-1} = M^{-1}NMM^{-1}.$$

D'où ${}^{\mathrm{t}}B = B$ et B est symétrique.

3 Les valeurs propres de B sont réelles, car B est symétrique réelle.

Soit λ est une valeur propre de B. Il existe X vecteur non nul tel que $BX = \lambda X$. On en déduit que :

$$(r\mathrm{I}_n + A)^{-1}(r\mathrm{I}_n - A)X = \lambda X.$$

Multiplions par $r\mathrm{I}_n + A$:

$$(r\mathrm{I}_n - A)X = \lambda(r\mathrm{I}_n + A) \cdot X.$$

D'où $\quad (1 + \lambda)A.X = r(1 - \lambda)X$.

On ne peut pas avoir $\lambda = -1$, car alors $0 = 2rX$. C'est impossible puisque $r > 0$ et X non nul.

Donc $\quad AX = r\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}X$.

$r\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}$ est une valeur propre de A. Elle est strictement positive. Par conséquent, λ est dans $]-1, 1[$.

16 Des matrices qui commutent

1 La matrice A est symétrique réelle. Elle est donc diagonalisable.

Il existe une matrice inversible P et r réels distincts $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ tels que :

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix} P.$$

Nous savons qu'alors :

$$\exp(A) = P^{-1}\begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \exp(\lambda_r) \end{pmatrix} P.$$

Notons $\mu_1 = \exp(\lambda_1), \ldots, \mu_r = \exp(\lambda_r)$.

Appelons R le polynôme de degré au plus $r - 1$ tel que :

$$\forall j \in [\![1, r]\!] \quad R(\mu_j) = \lambda_j.$$

La matrice $R(\exp(A))$ est la matrice :

$$P^{-1}\begin{pmatrix} R(\mu_1) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & R(\mu_r) \end{pmatrix} P = A.$$

2 Supposons que les matrices $\exp(A)$ et $\exp(B)$ commutent.

La matrice $\exp(B)$ commute alors avec toute puissance de $\exp(A)$, donc avec tout polynôme de $\exp(A)$, donc avec A. Nous obtenons ensuite que A commute avec tout polynôme de $\exp(B)$, donc avec B.

Réciproquement, supposons que les matrices A et B commutent. La matrice A commute alors avec tout polynôme de la matrice B.

Considérons alors l'endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\Phi(X) = AX - XA$.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc Φ est continu.

La matrice $\exp(B)$ est la limite d'une suite convergente de matrices de la forme $(R_n(B))$, où (R_n) désigne une suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$. La continuité de Φ entraîne que la matrice A commute avec la matrice $\exp(B)$.

Montrer ensuite, de la même manière, que la matrice $\exp(B)$ commute avec la matrice $\exp(A)$.

17 Décomposition d'un endomorphisme

1 Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension n. Supposons qu'il existe p un projecteur et ω un automorphisme de E tels que $u = p \circ \omega$.

Un projecteur est déterminé par son image et son noyau. Comme ω est un automorphisme, on a $\omega(E) = E$, donc :

$$\mathrm{Im}(u) = p(\omega(E)) = \mathrm{Im}(p).$$

Ainsi, nécessairement, on a $\mathrm{Im}\,p = \mathrm{Im}\,u$.

Les vecteurs de $\mathrm{Im}(u)$ sont invariants par p.

Soit $(e_1, \ldots, e_k)$ une base de $\mathrm{Ker}\,u$. On la complète pour avoir une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et on notera $S = \mathrm{Vect}(e_{k+1}, \cdots, e_n)$.

L'application $\bar{u} = u_{|S}$ est un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}\,u$ (*tout supplémentaire du noyau de u est isomorphe à son image*).

Nous pouvons prendre comme base de $\mathrm{Im}\,u$ les vecteurs $(u(e_{k+1}), \ldots, u(e_n))$. On posera $\varepsilon_i = u(e_i)$ lorsque $k+1 \leqslant i \leqslant n$.

Complétons cette base de $\mathrm{Im}\,u$ pour former une base de E. Soit $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ cette nouvelle base et $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k)$.

On considère ω l'automorphisme de E transformant la base $(e_1, \cdots, e_n)$ en la base $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$. De même, soit p la projection sur $\mathrm{Im}\,u$ parallèlement à F.

Pour prouver que $u = p \circ \omega$, il suffit de prouver que ces applications coïncident sur une base de E. Soit donc $(e_1, \cdots, e_n)$ cette base :

$$\forall i \in [\![1, k]\!] \quad \omega(e_i) = \varepsilon_i \in F.$$

Donc $\quad p \circ \omega(e_i) = p(\varepsilon_i) = 0 = u(e_i)$.

De plus, $\quad \forall i \in [\![k+1, n]\!] \quad \omega(e_i) = \varepsilon_i \in \mathrm{Im}\,u$.

Puis, $\quad p \circ \omega(e_i) = p(\varepsilon_i) = \varepsilon_i = u(e_i)$.

Nous avons prouvé que $u = p \circ \omega$, avec ω un automorphisme et p un projecteur.

2 Supposons maintenant que E est euclidien.

Une isométrie conserve la norme. En revanche, si p est un projecteur orthogonal, on a toujours :

$$\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2 .$$

Donc $\quad \forall x \in E \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

La composée u d'un automorphisme orthogonal et d'un projecteur orthogonal vérifie donc :

$$\forall x \in E \ \|u(x)\| \leqslant \|x\| \qquad (*)$$

Donc si la norme de u subordonnée à la norme euclidienne de E est supérieure strictement à 1, on ne peut construire ω automorphisme orthogonal et p projecteur orthogonal tels que $u = p \circ \omega$.

3 Soit $E = \mathbb{R}[X]$, et u l'endomorphisme de dérivation : $P \longmapsto P'$ qui n'est pas injectif, car l'image des polynômes constants est nulle, mais u est surjectif.

Si on avait $u = p \circ \omega$, avec ω automorphisme et p projecteur, on aurait $\mathrm{Im}\,p = E$.

Puis $p = \mathrm{I}_E$ et donc $\omega = u$ qui n'est pas bijective.

18 Sur le groupe orthogonal

1 Prenons $u = v = \mathrm{I}_E$. Alors $\varphi(\mathrm{I}_E)^2 = \varphi(\mathrm{I}_E)$, donc $\varphi(\mathrm{I}_E) = 1$.

Pour toute réflexion s, on a $s^2 = \mathrm{I}_E$, donc $\varphi(s)^2 = 1$, puis $\varphi(s) = 1$.

Le groupe orthogonal étant engendré par les réflexions, tout automorphisme orthogonal est le produit d'un nombre fini de réflexions. Soit $u = s_1 \circ s_2 \cdots \circ s_p$; d'où $\varphi(u) = \varphi(s_1) \cdots \varphi(s_p) = 1$.

L'application φ est l'application constante égale à 1.

2 Fixons u dans $\mathcal{O}(E)$.

a) Soit x un élément quelconque de $\mathrm{Ker}(\mathrm{I}_E - u)$ et y un élément quelconque de $\mathrm{Im}(\mathrm{I}_E - u)$. On a donc $u(x) = x$ et il existe t dans E tel que $y = t - u(t)$.

Alors $(\, x \mid y \,) = (\, x \mid t \,) - (\, x \mid u(t) \,)$.

Or $(\, x \mid u(t) \,) = (\, u(x) \mid u(t) \,) = (\, x \mid t \,)$, car u conserve le produit scalaire. D'où $(\, x \mid y \,) = 0$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(\mathrm{I}_E - u)$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{I}_E - u)$ sont orthogonaux.

b) Étudions les restrictions de W_N aux sous-espaces $\operatorname{Ker}(\mathrm{I}_E - u)$ et $\operatorname{Im}(\mathrm{I}_E - u)$.

$$\forall x \in \operatorname{Ker}(\mathrm{I}_E - u) \quad W_N(x) = x.$$

$\forall x \in \operatorname{Im}(\mathrm{I}_E - u) \;\; \exists t \in E$

$$x = t - u(t) \;\; W_N(x) = \frac{t - u^N(t)}{N}.$$

L'application u conserve la norme, donc la quantité $t - u^N(t)$ est bornée ($\|t - u^N(t)\| \leqslant 2\,\|t\|$). Ainsi :

$$\forall x \in \operatorname{Ker}(\mathrm{I}_E - u) \qquad \lim_{N \longrightarrow +\infty} W_N(x) = x.$$

$\forall x \in \operatorname{Im}(\mathrm{I}_E - u)$

$$\lim_{N \longrightarrow +\infty} W_N(x) = \lim_{N \longrightarrow +\infty} \frac{t - u^N(t)}{N} = 0.$$

La limite W de $(W_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est donc la projection orthogonale sur $\operatorname{Ker}(\mathrm{I}_E - u)$.

19 Somme de deux automorphismes orthogonaux

1 **a)** Soit λ une valeur propre complexe de u et x un vecteur propre associé.

Notons B une base de E, A la matrice de u dans la base B et X le vecteur colonne associé à x.

Alors $AX = \lambda X$. Donc : $\overline{AX} = A\overline{X} = \overline{\lambda X}$. Puis :

$$A(X + \overline{X}) = 2\mathrm{Re}\,(\lambda X)$$

$$A(X - \overline{X}) = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}\,(AX) = 2\mathrm{i}\mathrm{Im}\,(\lambda X).$$

Vérifier que les vecteurs $X + \overline{X}, \mathrm{i}(X - \overline{X})$ forment une famille libre de vecteurs de E et que le sous-espace vectoriel $H = \operatorname{Vect}(X + \overline{X}, \mathrm{i}(X - \overline{X}))$ est stable par u.

L'automorphisme de ce sous-espace induit par u est un automorphisme orthogonal dont le spectre est vide. C'est une rotation de H.

Si $E = H$, nous avons terminé.

Dans le cas contraire, montrer que le sous-espace vectoriel $H^\perp$ est stable par u, que l'automorphisme induit par u sur ce sous-espace est un automorphisme orthogonal et terminer la démonstration.

La dimension de E est paire.

b) Nous savons que $u_1 + u_2 = u_1(\mathrm{I}_E + u_1^{-1}u_2)$.

L'automorphisme $u = u_1^{-1}u_2$ est un automorphisme orthogonal de déterminant -1.

Les valeurs propres réelles éventuelles d'un automorphisme orthogonal sont -1 et 1.

Si le spectre de u est vide, la question précédente permet d'affirmer que $\operatorname{Det}(u) = 1$.

Ce n'est pas le cas.

Si 1 est seule valeur propre de u, vérifier que le supplémentaire orthogonal du sous-espace propre E_{-1} est stable par u et que l'automorphisme induit par u sur ce sous-espace est un automorphisme orthogonal dont le spectre est vide. Nous obtenons encore $\operatorname{Det}(u) = 1$.

Nous en déduisons que -1 est valeur propre de u.

L'endomorphisme $u_1 + u_2$ n'est pas bijectif.

2 Étudions, dans un premier temps, le cas $n = 2$.

• Si u est une rotation, dans une base orthonormale de E, la matrice de u est :

$$A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

La matrice de $\mathrm{I}_E + u$ est dans cette base est :

$$\mathrm{I}_n + A = \begin{bmatrix} 1 + \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & 1 + \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Les deux colonnes de $\mathrm{I}_n + A$ sont orthogonales. Elles sont unitaires si, et seulement si : $2 + 2\cos(\theta) = 1$, c'est-à-dire si, et seulement si : $\cos(\theta) = -\dfrac{1}{2}$. $\mathrm{I}_E + u$ est donc orthogonal si, et seulement si : $\theta = \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou $\theta = \dfrac{4\pi}{3}[2\pi]$.

∗ Si u n'est pas une rotation, -1 est valeur propre de u, donc 0 est valeur propre de $\mathrm{I}_E + u$.

$\mathrm{I}_E + u$ n'est donc pas bijective. $\mathrm{I}_E + u$ ne peut pas être un automorphisme orthogonal.

Supposons $n \geqslant 2$ et u un automorphisme orthogonal tel que $\mathrm{I}_E + u$ soit un automorphisme orthogonal.

Si n est impair, u a une valeur propre dans $\mathbb{R}$, car le polynôme caractéristique est de degré impair. Cette valeur propre est 1 ou -1. Alors, $\mathrm{I}_E + u$ a 0 ou 2 comme valeurs propres, ce qui est impossible pour un automorphisme orthogonal, car son spectre réel est inclus dans $\{-1, 1\}$.

n est donc pair et u ne peut pas posséder de valeur propre réelle (-1 ou 1), car 0 ou 2 serait valeur propre de $\mathrm{I}_E + u$.

E se décompose en une somme directe de sous-espaces vectoriels de dimension 2, deux à deux orthogonaux, sous-espaces stables par u.

Sur chacun de ces plans, u est une rotation vectorielle. Ainsi, dans une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_n)$, adaptée à cette somme directe, la matrice A de u est constituée de blocs diagonaux de la forme :

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}.$$

Le cas $n = 2$ a fourni comme solutions :

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

avec $\theta = \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou $\theta = \dfrac{4\pi}{3}[2\pi]$.

L'endomorphisme u est donc tel qu'il existe une base orthonormale dans laquelle A la matrice de u est diagonale par blocs. Les blocs diagonaux sont de la forme :

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

avec $\theta = \dfrac{2\pi}{3}[2\pi]$ ou $\theta = \dfrac{4\pi}{3}[2\pi]$.

3 u et v sont deux automorphismes orthogonaux. On a $u + v = u(I_E + u^{-1}v)$.

Ainsi $u + v$ est un élément de $\mathcal{O}(E)$ si, et seulement si, $u^{-1}v$ vérifie les conditions du **2)**.

20 Utilisation de matrices symétriques réelles de rang 1

1 A est une matrice symétrique réelle positive.

Elle est diagonalisable dans une base orthonormale. Ses valeurs propres sont positives ou nulles.

Il existe une matrice orthogonale, P, et $D = \operatorname{diag}(a_1^2, a_2^2, \cdots, a_r^2, \cdots, 0)$ tels que $A = {}^tPDP$ avec, pour tout i de $[\![1, r]\!]$: $a_i \neq 0$.

De plus, $D = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \operatorname{diag}(0, 0, \cdots, a_i^2, 0, \cdots, 0)$ et $\operatorname{diag}(0, 0 \cdots, a_i^2, 0, \cdots, 0) = {}^t\Delta_i\Delta_i$, en notant :

$$\Delta_i = (0, 0, \cdots, a_i, 0, \cdots, 0).$$

On peut écrire :

$$A = {}^tP\sum_{i=1}^{r} {}^t\Delta_i\Delta_i P = \sum_{i=1}^{r} {}^tP{}^t\Delta_i\Delta_i P.$$

Les lignes Δ_i sont linéairement indépendantes, donc les lignes $L_i = \Delta_i P$ sont également linéairement indépendantes. Ainsi $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} {}^tL_iL_i$, avec la famille $(L_1, \ldots, L_r)$ libre.

2 **a)** Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques réelles positives. On note C la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad c_{i,j} = a_{i,j}.b_{i,j}.$$

Il est évident que C est une matrice symétrique réelle.

Prouvons d'abord le résultat lorsque $\operatorname{rg}(A) = 1$. Alors :

$$\exists L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}),\ L \neq 0, \quad A = {}^tLL.$$

Donc, si on note $L = (l_1, l_2, \cdots, l_n)$, on a :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n^2]\!] \quad a_{i,j} = l_il_j.$$

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Nous obtenons :

$${}^tXCX = \sum_{i,j} b_{i,j}a_{i,j}x_ix_j = \sum_{i,j} b_{i,j}l_il_jx_ix_j.$$

En notant X' le vecteur colonne défini par :

$X' = \begin{pmatrix} l_1x_1 \\ \vdots \\ l_nx_n \end{pmatrix}$, on obtient ${}^tXCX = {}^tX'BX' \geqslant 0$.

La matrice C est symétrique positive.

Si maintenant A est symétrique positive de rang $r > 1$, il existe r matrices lignes linéairement indépendantes, $(L_1, L_2, \cdots, L_r)$, telles que :

$$A = {}^tL_1L_1 + {}^tL_2L_2 + \cdots + {}^tL_rL_r.$$

Pour i élément de $[\![1, r]\!]$, on note $A_i = {}^tL_iL_i$ et C_i la matrice obtenue en faisant le produit des éléments de mêmes indices dans A_i et B. Les matrices C_i sont symétriques positives. Alors $C = C_1 + C_2 + \cdots + C_r$ est somme de r matrices symétriques positives. Elle est symétrique positive.

b) *Que se passe-t-il si A et B sont définies positives ?*

On a $r = n$. On reprend les notations précédentes. Soit X un vecteur tel que :

$${}^tXCX = 0, \text{ avec } C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n.$$

${}^tXCX = 0$ se traduit par :

$${}^tXC_1X + {}^tXC_2X + \cdots + {}^tXC_nX = 0.$$

Donc, $\forall i \in [\![1, n[\![\quad {}^tXC_iX = 0$ puisque ces réels sont positifs.

Si on note $L_k = (l_1^{(k)}, l_2^{(k)}, \ldots, l_n^{(k)})$ et $X'_k = \begin{pmatrix} l_1^{(k)}x_1 \\ \vdots \\ l_n^{(k)}x_n \end{pmatrix}$,

on a donc ${}^tXC_kX = {}^tX'_kBX'_k = 0$.

B est définie positive, donc $X'_k = 0$.

Nous obtenons le système $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad X'_k = 0$.

La somme des éléments de ce vecteur colonne donne :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \sum_{i=1}^{n} l_i^{(k)} \cdot x_i = 0.$$

La matrice de ce système a pour lignes $(L_1, L_2, \cdots, L_n)$, qui sont indépendantes. Donc le système est de Cramer. Il n'a qu'une seule solution : 0.

D'où $X = 0$ et donc C est définie positive.

3 La matrice A' est symétrique.

Supposons A de rang 1. Il existe une matrice L de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A = {}^tLL$.

Donc :

$${}^tXA'X = \sum_{i,j} \frac{1}{l_i}\frac{1}{l_j}x_ix_j = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{l_i}x_i\right)^2.$$

A' est symétrique positive.

Réciproquement, supposons A' symétrique positive.

Considérons l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$, muni de sa base canonique $(e_1, \dots, e_n)$, et la forme bilinéaire symétrique ϕ associée à la matrice A.

Nous savons que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad a_{i,j} = \phi(e_i, e_j).$$

Appliquons l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad a_{i,j}^2 \leqslant \phi(e_i, e_i)\phi(e_j, e_j) = a_{i,i}a_{j,j}.$$

La même inégalité appliquée à A' donne :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad \frac{1}{a_{i,j}^2} \leqslant \frac{1}{a_{i,j}}\frac{1}{a_{j,j}}.$$

Nous en déduisons que :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad a_{i,j}^2 = a_{i,i}a_{j,j}.$$

L'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz prouve l'existence de t réel tel que $\phi(e_i + te_j, e_i + te_j) = 0$.

Ainsi, en fixant $i = 1$ et en faisant varier j de 2 à n :

$$\exists t_j \in \mathbb{R} \quad \phi(e_1 + t_je_j, e_1 + t_je_j) = 0.$$

Le noyau de A contient $n - 1$ vecteurs indépendants $(e_1 + t_2e_2, e_1 + t_3e_3, \cdots, e_1 + t_ne_n)$.

D'où $\mathrm{rg}(A) \leqslant 1$. Mais A n'est pas nulle.

Finalement $\mathrm{rg}(A) = 1$.

21 Racines carrées de matrices symétriques définies positives

1 **a)** La matrice A est symétrique, définie positive. Elle est diagonalisable.

Plus précisément :

$$\exists Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \quad A = {}^tQ\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)Q.$$

Les λ_i sont positifs. Notons, pour tout i dans $[\![1, n]\!]$:

$$\mu_i = \sqrt{\lambda_i} \quad \text{et} \quad B = {}^tQ\mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)Q.$$

Par construction, la matrice B est symétrique, définie positive. Et $B^2 = A$.

Nous devons ensuite prouver que B est unique.

Soit B_1 une matrice symétrique, définie positive, telle que $B_1^2 = A$.

La matrice B_1 est diagonalisable. Tout vecteur propre de B_1 associé à la valeur propre μ est vecteur propre de A, associé à la valeur propre μ^2. Et E est somme directe des sous-espaces propres de B_1.

Donc, les sous-espaces propres de B_1 sont les sous-espaces propres de A. La matrice B_1 est la matrice B définie ci-dessus.

b) Les réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont distincts. Nous savons alors, grâce au cours sur les polynômes de Lagrange, qu'il existe un unique polynôme de degré inférieur ou égal à $p - 1$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \quad P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}.$$

Soit $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$. On note $L_i = \varphi^{-1}(e_i)$. On a :

$$\forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2 \quad L_i(\lambda_j) = \delta_i^j$$

donc :

$$L_i(X) = \prod_{j=1, j\neq i}^p \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

Le polynôme P est donc :

$$P(X) = \sum_{i=1}^p \sqrt{\lambda_i} \prod_{j=1, j\neq i}^p \frac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}.$$

c) Considérons la matrice $P(A)$.

A est diagonalisable.

Nous savons qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale Q telles que :

$${}^tQAQ = D.$$

On aura donc ${}^tQP(A)Q = P(D)$. La matrice $P(D)$ est diagonale. Ses valeurs propres sont les $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$, chacune avec la multiplicité $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda_i\mathrm{I}_n))$.

Nous en déduisons $P(D)^2 = D$, ce qui implique $P(A)^2 = A$.

La matrice A est symétrique réelle. De plus :

$$\mathrm{Sp}P(A) = \left(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}\right).$$

Ces valeurs propres sont strictement positives. La matrice $P(A)$ est dans $\mathcal{S}_n^{++}$.

Par unicité de la racine carrée symétrique positive de A, $P(A)$ est cette racine carrée. D'où :

$$B = \sum_{i=1}^p \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i - \lambda_j)} \prod_{j\neq i}(A - \lambda_j\mathrm{I}).$$

d) Calculer pour obtenir :

$$B = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2} & -1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2} \\ -1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2} & 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{pmatrix}.$$

2 ▬ a) On note f l'application définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$. Son tableau des variations est :

x	0		$\sqrt{a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

L'intervalle $]0, +\infty[$ est stable par f. Ainsi la suite (u_n) est définie et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n \geqslant \sqrt{a}.$$

On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\dfrac{a - u_n^2}{u_n}$.

La suite est décroissante à partir de l'indice $n = 1$, puisque u_n est minoré par $\sqrt{a}$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, minorée par $\sqrt{a}$, donc convergente. Sa limite l vérifie :

$$l \geqslant \sqrt{a} \quad \text{et} \quad l = f(l).$$

On en déduit que $l = \sqrt{a}$.

b) Les matrices A et B commutent et sont symétriques réelles. Elles sont séparément diagonalisables. On se propose de prouver qu'il existe une base propre commune et orthonormale. On notera a et b les endomorphismes canoniquement associés à A et B.

La matrice A est symétrique réelle. Elle est diagonalisable de même que a.

$$E = \mathbb{R}^n = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in Sp(A)}} \operatorname{Ker}(a - \lambda I_E).$$

A et B commutent donc chaque sous-espace $\operatorname{Ker}(a - \lambda I_E)$ est stable par b.

$b_{|\operatorname{Ker}(a - \lambda I_E)}$ est encore un endomorphisme auto-adjoint de $\operatorname{Ker}(a - \lambda I_E)$.

Il existe une base orthonormale de $\operatorname{Ker}(a - \lambda I_E)$ qui diagonalise la restriction de b à $\operatorname{Ker}(a - \lambda I_E)$. La réunion de ces bases est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. Cette base diagonalise B et A, car elle est constituée de vecteurs propres pour A et pour B.

3 ▬ a) La matrice M est inversible, car elle est définie positive. Son spectre est dans $\mathbb{R}^{+*}$. Il existe une matrice de passage orthogonale Q telle que :

$${}^{t}QMQ = \operatorname{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n).$$

Ainsi ${}^{t}QM^{-1}Q = \operatorname{diag}\left(\dfrac{1}{\alpha_1}, \cdots, \dfrac{1}{\alpha_n}\right)$.

La matrice M^{-1} est symétrique réelle avec un spectre dans $\mathbb{R}^{+*}$. Elle est dans $\mathcal{S}_n^{++}$.

b) Si $AM = MA$, alors $M^{-1}AM = A$. On en déduit que $M^{-1}A = AM^{-1}$.

A commute avec M et M^{-1}, elle commute avec N puisque $N = \dfrac{1}{2}(M + M^{-1}A)$.

La matrice A commute avec M. A et M sont des matrices symétriques réelles. Elles sont diagonalisables dans une même base orthonormale.

Il existe Q une matrice orthogonale telle que :

- ${}^{t}QAQ = \Delta$ soit une matrice diagonale réelle d'éléments diagonaux $\delta_{i,i}$ tous strictement positifs ;
- ${}^{t}QMQ = D$ soit une matrice diagonale réelle d'éléments diagonaux $d_{i,i}$ strictement positifs.

On en déduit que :

$$\begin{aligned} {}^{t}QNQ &= \frac{1}{2}{}^{t}QMQ + \frac{1}{2}({}^{t}QM^{-1}Q\,{}^{t}QAQ) \\ &= \frac{1}{2}D + \frac{1}{2}D^{-1}\Delta. \end{aligned}$$

${}^{t}QNQ$ est diagonale, de coefficients diagonaux :

$$\frac{1}{2}d_{i,i} + \frac{1}{2}\delta_{i,i} \cdot d_{i,i}^{-1}.$$

N est symétrique réelle définie positive.

c) D'après la question précédente, si Q est une matrice orthogonale diagonalisant A et B_k, celle-ci diagonalisera A et B_{k+1}.

Au départ, on dispose de A et $B_0 = I_n$.

Q est une matrice orthogonale diagonalisant A. Elle diagonalise aussi B_0 et donc, par suite, Q diagonalisera toutes les matrices B_k.

d) En utilisant les matrices diagonales semblables aux matrices B_k, A et B_{k+1}, alors :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \alpha_i^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(\alpha_i^{(k)} + \frac{\lambda_i}{\alpha_i^{(k)}}\right)$$

où $\alpha_i^{(k)}$ représente l'élément de la ligne i, colonne i de ${}^{t}QB_kQ$.

Avec l'initialisation $\alpha_i^{(0)} = 1$, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, chacune des suites $\alpha_i^{(k)}$ est convergente vers $\sqrt{\lambda_i}$.

Ainsi la suite (B_k) converge vers B, la racine carrée définie positive de A.

22 Valeurs propres d'une matrice de Hilbert

1 La matrice H est une matrice symétrique réelle. Elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Toutes ses valeurs propres sont donc réelles.

2 **a)** D'après la définition donnée :

$$q(x) = {}^{t}XHX$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} x_i^2 + \sum_{(i,\,j)\in[\![1n]\!]^2, i\neq j} \frac{1}{i+j-1} x_i x_j.$$

D'autre part :

$$\int_0^1 \left(x_1 + tx_2 + \cdots + t^{n-1}x_n\right)^2 \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{n} t^{2i-2}x_i^2 + \sum_{(i,\,j)\in[\![1n]\!]^2, i\neq j} t^{i+j-2}x_i x_j\right] \mathrm{d}t$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} x_i^2 + \sum_{(i,\,j)\in[\![1n]\!]^2, i\neq j} \frac{1}{i+j-1} x_i x_j = q(x).$$

b) Soit λ une valeur propre de H et X un vecteur propre associé. Alors :

$$q(X) = {}^{t}X(\lambda X) = \lambda({}^{t}XX) = \lambda \parallel X \parallel^2$$
$$= \int_0^1 \left(x_1 + tx_2 + \cdots + t^{n-1}x_n\right)^2 \mathrm{d}t.$$

Or, la fonction $\left(t \mapsto (x_1 + tx_2 + \cdots + t^{n-1}x_n)^2\right)$ est polynomiale, non nulle sur $[0, 1]$ (car le polynôme est non nul) et positive. Donc $q(X) > 0$ et $\lambda > 0$.

La matrice H a toutes ses valeurs propres réelles et strictement positives. 0 n'est pas valeur propre de H.

H est inversible.

c) La matrice H est symétrique réelle. Il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ telles que $H = {}^{t}PDP$.

Par conséquent $H^{-1} = P^{-1}D^{-1}P = {}^{t}PD^{-1}P$,

avec $D^{-1} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$.

Puis :

$${}^{t}XH^{-1}X = {}^{t}X{}^{t}PD^{-1}PX = {}^{t}(PX)D^{-1}(PX).$$

Notons $PX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors :

$${}^{t}XH^{-1}X = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} y_i^2 \geqslant 0.$$

Et ${}^{t}XH^{-1}X = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} y_i^2 = 0 \iff PX = 0.$

Enfin, $PX = 0 \iff X = 0$.

3 **a)** Ici, $n = 2$ et $H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de la matrice H est :

$$P_H(x) = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{12}.$$

D'où, $\alpha = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{13}}{6} < \beta = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{13}}{6}$.

b) C est définie par :

$${}^{t}XHX = 1 \iff q(X) = 1$$
$$\iff x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 1.$$

Cette équation est celle d'une conique. Dans le but de la préciser, nous devons réduire l'équation, donc diagonaliser H.

Une base de vecteurs propres associée à α et β est :

$$X_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2-\sqrt{13} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2+\sqrt{13} \end{pmatrix}.$$

Une base orthonormée de vecteurs propres associée à α et β est $u_1 = \frac{X_1}{\parallel X_1 \parallel}$, $X_2 = \frac{X_2}{\parallel X_2 \parallel}$.

Dans cette base, la conique C a pour équation :

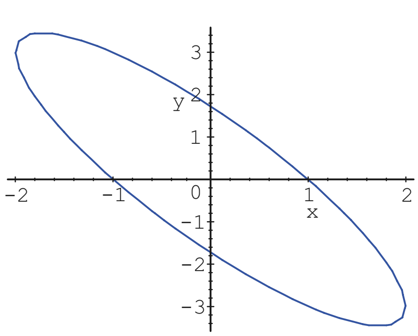
$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 = 1.$$

C'est une ellipse de demi grand-axe $a = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, de demi petit-axe $b = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ et d'excentricité donnée par :

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4\sqrt{13}.$$

Avec Maple

```
> with(plots) :
> implicitplot(x^2+y^2/3+x*y-1,x=-3..3,y=-4..4);
```



4 **a)** La matrice H' est une matrice de Hilbert d'ordre $n-1$.

D'après la question **2)**, elle est inversible.

b) Calculons le produit par blocs :

$$
{}^{t}PHP = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_{n-1} & 0 \\ {}^{t}Y & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H' & H'Y + \lambda T \\ {}^{t}T & {}^{t}TY + \dfrac{\lambda}{2n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H' & Z \\ {}^{t}Z & \mu \end{pmatrix},
$$

avec :

$$
\mu = {}^{t}YH'Y + \lambda {}^{t}YT + \lambda {}^{t}TY + \frac{\lambda^2}{2n-1} \quad \text{et} \quad Z = H'Y + \lambda T.
$$

c) Supposons λ donné et choisissons Y tel que $Z = 0$.

Soit $Y = -\lambda H'^{-1}T$. Alors :

$$
\mathrm{Det}({}^{t}PHP) = (\mathrm{Det}P)^2(\mathrm{Det}H) = \lambda^2 \mathrm{Det}H.
$$

Mais aussi, en calculant par blocs, avec $Z = 0$:

$$
\mathrm{Det}({}^{t}PHP) = \mu \mathrm{Det}(H') = \left(\lambda {}^{t}TY + \frac{\lambda^2}{2n-1}\right) \mathrm{Det}(H').
$$

Puisque $\lambda \neq 0$:

$$
\mathrm{Det}(H) = \mathrm{Det}(H') \left(\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{\lambda} {}^{t}TY \right) = \mathrm{Det}(H') \left(\frac{1}{2n-1} - {}^{t}TH'^{-1}T \right).
$$

d) D'après la question **2) c)**, ${}^{t}TH'^{-1}T$ est strictement positif. D'où :

$$
\mathrm{Det}(H) \leqslant \frac{1}{2n-1} \mathrm{Det}(H').
$$

Une récurrence simple vous permettra de conclure que :

$$
\mathrm{Det}(H) \leqslant \frac{2^n n!}{(2n)!}.
$$

5 **a)** Reprenons le calcul de **2) c)**) :

$$
q(X) = {}^{t}X {}^{t}PDPX = {}^{t}(PX)D(PX).
$$

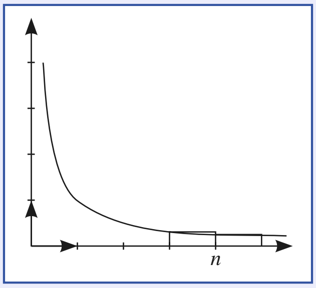
Notons $PX = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de H. Alors $q(X) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2$. Donc :

$$
\alpha_n \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \alpha_n \parallel PX \parallel^2 \leqslant q(X) \leqslant \beta_n \sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \alpha_n \parallel PX \parallel^2 .
$$

Or la matrice P est orthogonale, donc $\parallel PX \parallel = \parallel X \parallel$.

D'où le résultat.

b) Un petit schéma nous aide à reconnaître la comparaison entre l'aire sous la courbe d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ et celles des rectangles encadrant le graphe.



La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{t}\right)$ étant strictement décroissante et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$
\ln(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln(n) = 1 + \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}.
$$

c) La somme des valeurs propres de H est la trace de H : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1}$.

d) Puisque a_n est la plus petite valeur propre :

$$
na_n \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} = \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{i} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.
$$

Utilisons l'inégalité de la question précédente :

$$
na_n \leqslant 1 + \ln(2n) - \frac{1}{2}\ln(n+1) < 1 + \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(n).
$$

6 **a)** Supposons $AX = 0$, avec $\max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i| = 1$.

L'égalité $AX = 0$ se traduit par :

$$
\forall i \in [\![1,n]\!] \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = 0.
$$

D'où $\quad -a_{i,i}x_i = \displaystyle\sum_{j \in [\![1,n]\!], j \neq i} a_{i,j}x_j$. Et :

$$
\forall i \in [\![1,n]\!] \quad |a_{i,i}|\,|x_i| \leqslant \sum_{j \in [\![1,n]\!], j \neq i} |a_{i,j}|\,|x_j| .
$$

Le maximum des $|x_i|$ est atteint pour un indice i_0, donc :
$|x_{i_0}| = 1 \quad$ et $\quad \forall j \in [\![1,n]\!] \;\; j \neq i \implies |x_j| \leqslant 1$.

Nous en déduisons : $|a_{i_0,i_0}| \leqslant \displaystyle\sum_{j \in [\![1,n]\!], j \neq i_0} |a_{i_0,j}|$.

Vous reconnaissez la contraposée du *théorème d'Hadamard* :

Si, pour tout i dans $[\![1,n]\!]$, on a $|a_{i,i}| > \displaystyle\sum_{j \in [\![1,n]\!], j \neq i} |a_{i,j}|$, alors la matrice A est inversible.

b) Soit λ une valeur propre de H. La matrice $H - \lambda \mathrm{I}_n$ n'est pas inversible.

Il existe donc un vecteur $X \neq 0$ tel que :

$$(H - \lambda \mathrm{I}_n)X = 0.$$

Par linéarité, on peut imposer à X de vérifier :

$$\max_{i \in [\![1,n]\!]} |x_i| = 1.$$

La question **6) a)** permet de conclure qu'il existe i dans $[\![1,n]\!]$ tel que :

$$\left| \lambda - \frac{1}{2i-1} \right| \leqslant \sum_{j \in [\![1,n]\!], j \neq i} \frac{1}{i+j-1}.$$

c) Si $\beta_n \leqslant 1$, alors l'inégalité $\beta_n < 1 + \ln(n)$ est vérifiée.

Si $\beta_n > 1$, alors il existe i dans$[\![1,n]\!]$ tel que :

$$\left| \beta_n - \frac{1}{2i-1} \right| = \beta_n - \frac{1}{2i-1} \leqslant \sum_{j \in [\![1,n]\!], j \neq i} \frac{1}{i+j-1}.$$

Donc, d'après **5) b)** :

$$\beta_n < \sum_{j \in [\![1,n]\!]} \frac{1}{i+j-1} < \sum_{j \in [\![1,n]\!]} \frac{1}{j} < 1 + \ln(n).$$

23 Interprétation géométrique de la matrice de Hilbert

1 ▬ a) La matrice H est symétrique réelle. Toutes ses valeurs propres sont réelles.

b) Il existe une base orthonormée de vecteurs propres de H, donc :

$$\exists P \in \mathcal{O}_n \quad H = {}^{\mathrm{t}}P \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) P.$$

Soit V dans $\mathbb{R}^n$:

$${}^{\mathrm{t}}VHV = {}^{\mathrm{t}}(PV) \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)(PV).$$

Notons $Z = PV = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$. Alors :

$${}^{\mathrm{t}}VHV = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad {}^{\mathrm{t}}VHV = 0 \iff PV = 0.$$

La matrice P est régulière :

$${}^{\mathrm{t}}VHV = 0 \iff V = 0.$$

2 ▬ Calculons $\displaystyle\int_0^1 (Q(t) - f(t))^2 \, \mathrm{d}t$.

$$\int_0^1 (Q(t) - f(t))^2 \, \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 Q^2(t)\mathrm{d}t - 2\int_0^1 Q(t)f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t.$$

Vérifier en développant et intégrant Q^2 que :

$$\int_0^1 Q^2(t)\mathrm{d}t = {}^{\mathrm{t}}UHU.$$

De plus :

$$\int_0^1 Q(t)f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} u_i t^{(i-1)} \right) f(t)\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{i=1}^{n} u_i b_i = {}^{\mathrm{t}}UB.$$

3 ▬ a) Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire :

$$\langle g \mid h \rangle = \int_0^1 g(t)h(t)\mathrm{d}t.$$

La fonction g mesure le carré de la distance entre f et Q.

L'espace vectoriel F est un sous-espace de dimension finie de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.
Il admet un supplémentaire orthogonal. Le minimum de $g(Q)$ est atteint pour un unique polynôme Q_0 de F, qui est le projeté orthogonal de f sur F. Et ce minimum est le carré de la distance de f à F.

b) Posons $U = U_0 + V$. Alors :

$$g(Q) = {}^{\mathrm{t}}(U_0 + V)H(U_0 + V) - 2{}^{\mathrm{t}}(U_0 + V)B + \int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t$$
$$= {}^{\mathrm{t}}U_0HU_0 + {}^{\mathrm{t}}VHV + {}^{\mathrm{t}}U_0HV + {}^{\mathrm{t}}VHU_0 - 2{}^{\mathrm{t}}U_0HU_0$$
$$-2{}^{\mathrm{t}}VHU_0 + \int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t.$$

Or, ${}^{\mathrm{t}}U_0HV$ est réel :

$${}^{\mathrm{t}}\left({}^{\mathrm{t}}U_0HV\right) = {}^{\mathrm{t}}V\,{}^{\mathrm{t}}HU_0 = {}^{\mathrm{t}}VHU_0 = {}^{\mathrm{t}}U_0HV.$$

D'où, en notant Q' l'élément de F associé à U_0 :

$$g(Q) = g(Q') + {}^{\mathrm{t}}VHV.$$

La question **1) b)** permet d'affirmer que $g(Q) \geqslant g(Q')$ et que $g(Q)$ est minimal si, et seulement si, $V = 0$. Donc :

$$Q_0(x) = Q'(x).$$

c) La matrice $U_0 = H^{-1}B$ donne les coordonnées dans la base canonique de F du vecteur projeté orthogonal de f sur F.

4 ▬ Dans ce cas, $b_1 = \dfrac{1}{3}$ et $b_2 = \dfrac{1}{4}$. Puis :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Résoudre et obtenir $\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $Q_0(x) = x - \dfrac{1}{6}$. Puis :

$$g(Q_0) = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{6} - t^2 \right)^2 \mathrm{d}t = \frac{11}{180}.$$

5 Soit x fixé dans $[0,1[$. Pour tout t dans $[0,1]$, la série $\sum (tx)^p$ est une série géométrique, de raison positive strictement inférieure à 1. Elle converge et :
$$\sum_{p=0}^{+\infty}(tx)^p = \frac{1}{1-tx}.$$
D'où :
$$\forall x \in [0,1[\ \forall t \in [0,1] \quad \frac{f(t)}{1-tx} = \sum_{p=0}^{+\infty} f(t)(tx)^p.$$
De plus, f est continue sur $[0,1]$, donc majorée sur ce segment.
$$\forall x \in [0,1[\ \forall t \in [0,1] \qquad |f(t)(tx)^p| \leqslant x^p \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$
La convergence de la série de fonctions $\sum f(t)(tx)^p$ est donc normale sur $[0,1]$.

Nous pouvons donc écrire, pour tout x de $[0,1]$:
$$\int_0^1 \frac{f(t)}{1-tx}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{p=0}^{+\infty} f(t)(tx)^p\right)\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{p=0}^{+\infty} x^p \int_0^1 f(t)t^p\mathrm{d}t = 0.$$

6 **a)** C'est très classique :
$$\sum_{p=1}^{N} b_p = \sum_{p=1}^{N}\int_0^1 t^{p-1}f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\sum_{p=1}^{N} t^{p-1}\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 f(t)\frac{1-t^N}{1-t}\mathrm{d}t.$$
b) La fonction f est positive. Si la fonction h est intégrable sur $[0,1[$, alors :
$$\sum_{p=1}^{N} b_p = \int_0^1 f(t)\frac{1-t^N}{1-t}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 h(t)\mathrm{d}t.$$
La série $\sum b_p$ est à termes positifs et ses sommes partielles sont majorées. Elle converge.

Réciproquement, supposons que la série $\sum b_p$ converge.

La série de fonctions $\sum f(t)\dfrac{1-t^N}{1-t}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers la fonction $\dfrac{f(t)}{1-t}$.

Ces fonctions sont positives et intégrables sur $[0,1[$.

La fonction h est donc intégrable sur $[0,1[$ si, et seulement si, la série $\sum \int_0^1 f(t)\dfrac{1-t^N}{1-t}\mathrm{d}t$ converge.

C'est le cas, car nous retrouvons la série $\sum b_p$.

c) Nous avons établi, dans la question **5)**, que, pour tout x de $[0,1]$:
$$\int_0^1 \frac{f(t)}{1-tx}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{p=0}^{+\infty} f(t)(tx)^p\right)\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{p=0}^{+\infty} x^p \int_0^1 f(t)t^p\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty} x^p b_p.$$
La série entière $\sum b_p x^p$ converge normalement (les b_p sont positifs), donc uniformément sur $[0,1]$. Sa somme est continue sur $[0,1]$.

La fonction φ définie sur $[0,1[\times[0,1]$ par :
$$\varphi(t,x) = \frac{f(t)}{1-tx}$$
est continue sur cet ensemble.

Pour tout x de $[0,1]$, on a $\left|\dfrac{f(t)}{1-tx}\right| \leqslant \dfrac{f(t)}{1-t} = h(t)$ et la fonction h est intégrable sur $[0,1[$.

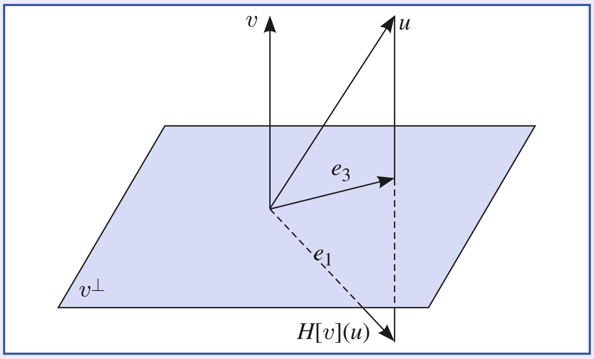
La fonction définie sur $[0,1]$ par :
$$g(x) = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-tx}\mathrm{d}t$$
est donc continue sur $[0,1]$. Par conséquent :
$$\lim_{x\longrightarrow 1}\int_0^1 \frac{f(t)}{1-tx}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t = \lim_{x\longrightarrow 1}\sum_{p=0}^{+\infty} x^p b_p$$
$$= \sum_{p=0}^{+\infty} x^p.$$

Algorithmes

1 Tridiagonalisation d'une matrice symétrique réelle. Matrices de Householder

Partie mathématique

1 Supposons $v \neq 0$. Soit u un vecteur orthogonal à v. Alors :
$$H[v](u) = u - \frac{2}{\|v\|}v({}^t vu)$$
$$= u - \frac{2}{\|v\|}v(0) = u.$$
Si $u = v$, alors :
$$H[v](v) = v - \frac{2}{\|v\|}v({}^t vv)$$
$$= v - \frac{2}{\|v\|}v(\|v\|)^2 = -v.$$



La matrice $H[v]$ est donc la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au sous-espace vectoriel $v^\perp$. Par conséquent : $H[v]^{-1} = H[v]$.

2 Vérifier que :

$$H[w + \|w\|e_2](v) = v_1 e_1 - \|w\|e_2$$

en montrant que :

$$v + (v_1 e_1 - \|w\|e_2) \in (w + \|w\|e_2)^\perp$$
$$v - (v_1 e_1 - \|w\|e_2) \in \mathrm{Vect}(v).$$

3 La première colonne de $H[w + \|w\|e_2]$ est donnée par $H[w+\|w\|e_2](e_1)$. Or le vecteur e_1 est orthogonal à $w + \|w\|e_2$. La première colonne de $H[w + \|w\|e_2]$ est ${}^t(1, 0, \cdots, 0)$.

La matrice d'une symétrie orthogonale relativement à une base orthonormée est symétrique. La première ligne de la matrice $H[w + \|w\|e_2]$ est donc : $(1, 0, \cdots, 0)$.

4 Notons v la première colonne de C, et $H_1 = H[w + \|w\|e_2]$ la matrice associée. D'après la question précédente :

$$H_1 C H_1 e_1 = H_1 C e_1 = H_1 v = v_1 e_1 - \|w\|e_2.$$

La matrice $C_1 = H_1 C H_1$ est symétrique. Donc :

$$C_1 = \begin{bmatrix} v_1 & -\|w\| & 0 & \cdots \\ -\|w\| & & & \\ 0 & & B_1 & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}.$$

5 Recommençons ce procédé avec B_1, de taille $n-1$. En nommant K_2 la matrice de Householder obtenue et en posant :

$$H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & & & \\ 0 & & K_2 & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

on aura : $H_2 C_1 H_2 = C_2$. Itérons :

$H_1 C H_1 = C_1; H_2 C_1 H_2 = C_2; \cdots; H_{n-1} C_{n-2} H_{n-1} = C_{n-1}$.

La matrice C_{n-1} est tridiagonale, symétrique et :

$$(H_{n-1} \cdots H_2 H_1) C (H_{n-1} \cdots H_2 H_1)^{-1}.$$

Partie informatique

6

Avec Maple

```
> restart:with(linalg) :
Warning, the protected names norm and trace
have been redefined and unprotected
> Householder:=proc(A)
local n,v,J,e1,e2,w,u,N,C,k,nm,K,v1,v2,v3,C1,
TriDiag;
global H;
N:=coldim(A);n:=N;
C:=A;
#Calcul des Hi
  for k to N-2 do
  v:=submatrix(C,1..n,1..1) :
  J:=array(identity,1..n,1..n) :
  e1:=submatrix(J,1..n,1..1) :
  e2:=submatrix(J,1..n,2..2) :
  w:=evalm(v-v[1,1]*e1);nm:=norm(w,2);
  u:=evalm(w+nm*e2);
#Pour éviter une division par 0.
   if norm(u,2)=0 then K:=J;C1:=C;
    else K:=evalm(J-(2/norm(u,2)^2)
      *(u&*transpose(u)));C1:=evalm(K&*C&*K);
   fi;
#On modifie la taille de K si k>1
#et on calcule la matrice tridiagonale.
   if k>1 then v1:=matrix(N-n,n,0);
   v2:=transpose(v1);
   v3:=stackmatrix(array(identity,1..N-n,
                               1..N-n),v2);
    K:=evalm(augment(v3,stackmatrix(v1,K)));
    H:=evalm(K&*H);
   else H:=evalm(K);TriDiag:=A;
   fi;
  TriDiag:=evalm(K&*TriDiag&*K):
  C:=submatrix(C1,2..n,2..n);n:=n-1;
  od;print(H,TriDiag);end :
> A:=matrix(4,4,[2,0,3,4,0,-1,1,-2,3,1,0,1,
                              4.,-2,1,-2]) :
> Householder(A);
```

$$\begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -.6000000000 & -.8000000000 \\ 0. & -.6277524473 & .6227304341 & -.4670478256 \\ 0. & .7784130422 & .5022019577 & -.3766514682 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2. & -5.000000000 & 0. & 0. \\ -5.000000000 & -.3200000000 & -1.592984620 & 0.790\,10^{-8} \\ 0. & -1.592984620 & -3.366633038 & 0914249886 \\ 0. & .790\,10^{-8} & 09142498848 & .6866330375 \end{bmatrix}$$

2 Valeurs propres d'une matrice tridiagonale réelle

Partie mathématique

1 **a)** Vérifier par récurrence que le degré de p_n est n. Puis :

$$P_n(x) \sim_{+\infty} (-x)p_{n-1}(x) \sim_{+\infty} \cdots \sim_{+\infty} (-x)^n.$$

D'où : $\lim\limits_{+\infty} p_n(x) = (-1)^n + (\infty)$.

En procédant de même : $\lim\limits_{+\infty} p_n(x) = +\infty$.

b) D'après la relation de définition des p_n :

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x_n) &= (a_{n+1} - x_n)p_n(x_n) - b_n^2 p_{n-1}(x_n) \\ &= -b_n^2 p_{n-1}(x_n). \end{aligned}$$

b_n n'est pas nul. Supposons $p_{n-1}(x_n) = 0$. Alors x_n est racine commune de p_n et de p_{n-1}. En utilisant de proche en proche la relation qui définit les p_n, on montre que x_n est aussi racine de p_1 puis de p_0. Ceci est impossible.

Par conséquent, $p_{n-1}(x_n)p_{n+1}(x_n) < 0$.

c) Raisonnons par récurrence. Pour $n = 2$, pas de difficulté.

Supposons que, pour un certain $n \geqslant 2$, le polynôme p_n admet n racines réelles distinctes, séparées par les $n - 1$ racines de p_{n-1}.

d) Les racines de p_n et de p_{n+1} sont simples. Ces polynômes sont positifs au voisinage de $-\infty$. Leurs signes sont donnés par le tableau.

x		$x_{n+1,K}$		$x_{n,K}$		$x_{n+1,K+1}$
$p_n(x)$	$(-1)^{K-1}$			0	$(-1)^K$	
$p_{n+1}(x)$		0	$(-1)^K$		$(-1)^K$	0

2 Calculons $q_n(x) = \mathrm{Det}(A_n - x\mathrm{Id}_n)$. En développant suivant la dernière colonne :

$$q_n(x) = (a_n - x)q_{n-1}(x) - b_{n-1}^2 q_{n-2}(x).$$

Et :

$$q_1(x) = a_1 - x \ ; \ q_2(x) = (a_2 - x)(a_1 - x) - b_1^2$$

Posons $q_0(x) = 1$. Nous obtenons, pour tout n : $q_n = p_n$.

Les racines de p_n sont les valeurs propres de la matrice A_n.

3 Fixons $y, n \geqslant 1$ et notons $s_k = \mathrm{sgn}(p_k(y))$.

Le nombre $N(n, y)$ est le nombre de changements de signe dans la suite finie $(s_k)_{k \leqslant n}$.

Nous devons établir que ce nombre est le nombre de racines de p_n strictement inférieures à y. Notons $m = N(n, y)$.

Vérifier le résultat pour $n = 2$.

Supposons le résultat vrai au rang n :

$$x_{n,1} < x_{n,2} < \cdots < x_{n,m} < y \leqslant x_{n,m+1}$$

x	$-\infty$	$x_{n,1}$		$x_{n-1,1}$		$x_{n,2}$		$x_{n-1,2}$		$\cdots$	$x_{n,n-1}$		$x_{n-1,n-1}$		$x_{n,n}$	$+\infty$
$p_{n-1}(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	$\cdots$		$(-1)^{n-2}$	0	$(-1)^n$		$(-1)^{n-1}$
$p_n(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	$\cdots$	0	$(-1)^{n-1}$		$(-1)^{n-1}$	0	$(-1)^n$
$p_{n+1}(x)$	$+$	$\boxed{-}$				$\boxed{+}$				$\cdots$	$\boxed{(-1)^{n-1}}$				$\boxed{(-1)^n}$	$(-1)^{n+1}$

On déduit de la dernière ligne du tableau les signes des $p_n(x_{n,k})$.

Pour tout k de $[\![1, n-1]\!]$, la fonction p_{n+1} est continue sur $[x_{n,k}, x_{n,k+1}]$ et $p_{n+1}(x_{n,k})p_{n+1}(x_{n,k+1}) < 0$.

Il existe donc une racine $x_{n+1,k+1}$ de p_{n+1} sur l'intervalle $]x_{n,k}, x_{n,k+1}[$.

Montrer également l'existence d'une racine $x_{n+1,1}$ de p_{n+1} sur $]-\infty, x_{n,1}[$ et d'une racine $x_{n+1,n+1}$ de p_{n+1} sur $]x_{n,n}, +\infty[$.

Nous avons ainsi obtenu au moins $n + 1$ racines, donc toutes les racines de p_{n+1}. Ces racines sont séparées par les racines de p_n.

• Si $y \leqslant x_{n+1,m+1}$

x	$x_{n,m}$	y	$x_{n+1,m+1}$	$x_{n,m+1}$
$p_n(x)$	0	$(-1)^m$		0
$p_{n+1}(x)$		$(-1)^m$	0	$(-1)^{m+1}$
$S_n S_{n+1}(x)$		$+$	$+$	$-$

par convention

Alors : $N(n+1, y) = m$.

• Si $y > x_{n+1,m+1}$

x	$x_{n,m}$	$x_{n+1,m+1}$	y	$x_{n,m+1}$
$p_n(x)$	0	$(-1)^m$		0
$p_{n+1}(x)$	0	$(-1)^m$	$(-1)^{m+1}$	0
$S_n S_{n+1}(x)$	+	+	−	

par convention

Alors : $N(n+1, y) = m+1$.

4 Soit λ une valeur propre de A, $X = (x_1, \cdots, x_n)$ un vecteur propre associé et j l'indice tel que $|x_j| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$. L'égalité $AX = \lambda X$ se traduit par le système :

$$\begin{cases} (\lambda - a_1)x_1 = \quad b_1x_2 \\ (\lambda - a_2)x_2 = b_1x_1 + b_2x_3 \\ \vdots \\ (\lambda - a_k)x_k = b_{k-1}x_{k-1} + b_kx_{k+1} \\ \vdots \\ (\lambda - a_n)x_n = b_{n-1}x_{n-1} \end{cases}$$

En regardant la ligne j :

$$|\lambda - a_j| \leqslant |b_{j-1}| + |b_j|.$$

L'indice j n'est pas connu. On peut conclure :

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} \left[a_i - |b_{i-1}| - |b_i|, a_i + |b_{i-1}| + |b_i|\right].$$

5 D'après la question précédente, nous savons que λ est dans $[m, M]$, avec :

$$m = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(a_i - |b_{i-1}| - |b_i|\right);$$
$$M = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(a_i + |b_{i-1}| + |b_i|\right).$$

Utilisons la méthode de dichotomie.

Notons $\alpha_0 = m$; $\beta_0 = M$.

Supposons les suites $(\alpha_k)_k$ et $(\beta_k)_k$ construites jusqu'au rang p.

On a : $\alpha_p \leqslant x_{n,i} \leqslant \beta_p$. Posons : $\gamma_p = \dfrac{\alpha_p + \beta_p}{2}$.

Deux cas peuvent se présenter.

• Si $N(n, \gamma_p) \geqslant i$, alors $x_{n,i} < \gamma_p$.

On pose : $\alpha_{p+1} = \alpha_p$; $\beta_{p+1} = \gamma_p$.

• Si $N(n, \gamma_p) < i$, alors $\gamma_p \geqslant x_{n,i}$.

On pose : $\alpha_{p+1} = \gamma_p$; $\beta_{p+1} = \beta_p$.

Les suites $(\alpha_k)_k$ et $(\beta_k)_k$ sont adjacentes et convergent vers $x_{n,i}$.

Partie informatique

6

Avec Maple

```
> restart :with(linalg) :
Warning, the protected names norm and trace
have been redefined and unprotected
> N:=proc(A,y)
local n,N1,p,q,r,s,k;
n:=coldim(A) :
p:=1 :q:=A[1,1]-y :
  if q=0 then q:=p;fi;
  s:=p*q :N1:=0 :
  if signum(s)=-1 then N1:=N1+1 :fi :
  for k from 2 to n do
r:=(A[k,k]-y)*q-A[k,k-1]^2*p :
  if r=0 then r:=q :fi :
  s:=q*r :
  if signum(s)=-1 then N1:=N1+1 : fi :
  p:=q :q:=r :
od :end :
> Givens:=proc(A,i,eps)
local n,j,m,M,a,b,c;
with(linalg);
n:=coldim(A);
m:=min(A[1,1]-abs(A[1,2]),
                        A[n,n]-abs(A[n,n-1]),
      seq(A[j,j]-abs(A[j,j-1])-abs(A[j,j+1]),
                                 j=2..n-1)) :
M:=max(A[1,1]+abs(A[1,2]),
                        A[n,n]-abs(A[n,n-1]),
      seq(A[j,j]+abs(A[j,j-1])+abs(A[j,j+1]),
                                 j=2..n-1)) :
a:=m;b:=M;c:=(a+b)/2;
  while abs(b-a)>eps do c:=(a+b)/2;
   if N(A,c) >=i then b:=c;
    else a:=c;
   fi;od;c;
end :
> A:=LinearAlgebra[BandMatrix]([-1,2,-1], 1, 6,
outputoptions=[storage=rectangular]) :
> Givens(A,3,10^(-5));
```

$$\frac{512865}{131072}$$

3 La méthode de Choleski

Partie mathématique

1 **a)** En calculant le produit $LD{}^tL$, on obtient les équations indiquées avec :

$$\alpha = \gamma = \delta = 1 \quad ; \quad \beta = 2.$$

b) Immédiat.

c) Si la décomposition $A = LD^tL$ existe, alors, pour tout k de $[\![1,n]\!]$, on a :

$$A^{(k)} = L^{(k)}D^{(k)t}L^{(k)}.$$

Par conséquent :

$$\operatorname{Det}(A^{(k)}) = \left[\operatorname{Det}(L^{(k)})\right]^2 \operatorname{Det}(D^{(k)}) = d_1 \cdots d_k.$$

La condition « pour tout i de $[\![1,n]\!]$: $d_i \neq 0$ » se traduit par : pour tout i de $[\![1,n]\!]$: $\dfrac{\operatorname{Det} A^{(i)}}{\operatorname{Det} A^{(i-1)}} \neq 0$.

Une récurrence va établir la réciproque.

Pour $n = 2$, les relations (R) s'écrivent :

$$a_1 = d_1 \quad ; \quad a_2 = d_1 l_1^2 + d_2 \quad ; \quad d_1 l_1 = c_1.$$

L'hypothèse s'écrit :

$$a_1 \neq 0 \quad ; \quad a_1 a_2 - c_1 c_2 \neq 0.$$

Le système possède une unique solution.

Supposons que, pour un certain $n \geqslant 2$, toute matrice A tridiagonale, symétrique, régulière et d'ordre n qui vérifie la propriété se décompose, de manière unique sous la forme : $A = LD^tL$.

Soit A une matrice tridiagonale, symétrique, régulière et d'ordre $n+1$ qui vérifie la propriété.

La recherche de la décomposition de A se traduit par le système (R) :

$$\begin{cases} d_1 = a_1 \\ l_{i-1}^2 d_{i-1} + d_i = a_i \qquad 2 \leqslant i \leqslant n+1 \\ d_i l_i = c_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \end{cases}$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à la matrice $A^{(n)}$ nous indique que le système :

$$\begin{cases} d_1 = a_1 \\ l_{i-1}^2 d_{i-1} + d_i = a_i \qquad 2 \leqslant i \leqslant n \\ d_i l_i = c_i \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1 \end{cases}$$

possède une unique solution et que $d_1 \cdots d_n \neq 0$.

Restent les équations :

$$l_n^2 d_n + d_{n+1} = a_{n+1} \quad \text{et} \quad d_n l_n = c_n$$

d_n est non nul. Donc l_n, puis d_{n+1} sont déterminés, de manière unique.

La décomposition de A existe et est unique.

2 **a)** Puisque A est factorisable, l'équation (S) s'écrit :

$$\begin{cases} D^tLX = Z \\ LZ = B \end{cases}$$

Et z_i, l_i, b_i sont liés par les relations :

$$\begin{cases} z_1 = b_1 \\ l_1 z_1 + z_2 = b_2 \\ \vdots = \vdots \\ l_{i-1} z_{i-1} + z_i = b_i \\ \vdots = \vdots \\ l_{n-1} z_{n-1} + z_n = b_n \end{cases}$$

b) En posant ${}^tLX = Y$, le système devient :

$$\begin{cases} DY = Z \\ LZ = B \end{cases}$$

Soit, pour tout i de $[\![1,n]\!]$: $d_i y_i = z_i$.

c) Finalement, on obtient :

$$\begin{cases} LZ = B \\ DY = Z \\ {}^tLX = Y \end{cases}$$

Et :

$$\begin{cases} x_1 + l_1 x_2 = y_1 \\ x_2 + l_2 x_3 = y_2 \\ \vdots = \vdots \\ x_{n-1} + l_{n-1} x_n = y_{n-1} \\ x_n = y_n \end{cases}$$

Ce système se résout très facilement, en remontant.

Partie informatique

3

Avec Maple

```
> restart:with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace
have been redefined and unprotected
> DecompLD:=proc(A)
local i,U,V,n,j;
global L,delta;
n:=coldim(A):U:=vector(n):V:=vector(n-1):
U[1]:=A[1,1]:
for i from 2 to n do
  if U[i-1]=0 then print(‘erreur‘);break;
   else V[i-1]:=A[i-1,i]/U[i-1]:
   U[i]:=A[i,i]-U[i-1]*V[i-1]^2:
  fi;od;
delta:=Matrix(n,n,U,shape=diagonal):
L:=Matrix(n,n,0);L[1,1]:=1:
for j from 2 to n do
L[j,j-1]:=V[j-1]:L[j,j]:=1:od:
end:
> A:=matrix(5,5,[2,-1,0,0,0,-1,2,-1,0,0,0,
        -1,2,-1,0,0,0,-1,2,-1,0,0,0,-1,2]):
```

```
> DecompLD(A);print(L,delta);
```

$$1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-2}{3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-4}{5} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

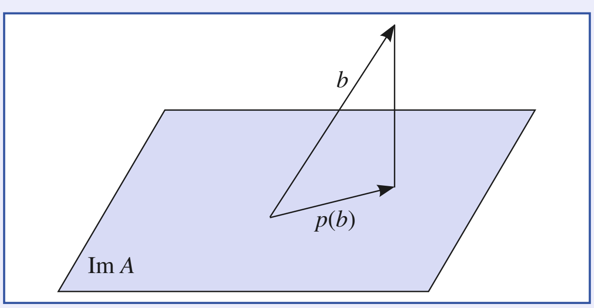
```
> Choleski:=proc(A,B)
local i,Z,Y,n,X;
n:=coldim(A):Z:=vector(n):Y:=vector(n):
X:=vector(n):
DecompLD(A);
# Calcul de Z
Z[1]:=B[1]:
for i from 2 to n do
Z[i]:=B[i]-Z[i-1]*L[i,i-1]:od:
# Calcul de Y
for i from 1 to n do Y[i]:=Z[i]/delta[i,i]:od:
# Calcul de X
X[n]:=Y[n]:
for i from n-1 to 1 by -1 do
X[i]:=Y[i]+L[i+1,i]*X[i+1]:od:
print(evalm(X));
end:
> Choleski(A,[1,2,3,4,5]);
```

$$\left[\frac{7}{6}, \frac{-4}{3}, \frac{9}{2}, \frac{-4}{3}, \frac{55}{6}\right]$$

4 Problème des moindres carrés. Décomposition *QR*

Partie mathématique

1



Notons p la projection orthogonale sur Im A.

On sait que le problème posé revient à déterminer x tel que $Ax = p(b)$.

Si Ker $A \bigcap$ Im $A = \varnothing$, le problème admet une unique solution.

Sinon, soit x_0 tel que $Ax_0 = p(b)$. Les solutions sont les vecteurs de $x_0 + \text{Ker } A$.

2 **a)** Résoudre (E) revient à chercher x tel que $Ax - b$ est orthogonal à Im A.

$$\begin{aligned} Ax - b \in \text{Im } A^{\perp} &\iff \forall u \in \mathbb{R}^p \quad \langle Ax - b, Au\rangle = 0 \\ &\iff \forall u \in \mathbb{R}^p \quad \langle Ax, Au\rangle = \langle b, Au\rangle \\ &\iff \forall u \in \mathbb{R}^p \quad \langle {}^tAAx, u\rangle = \langle {}^tAb, u\rangle \\ &\iff {}^tAAx = {}^tAb \end{aligned}$$

b) La matrice ${}^tAA$ est symétrique réelle. Elle admet donc une base orthogonale de vecteurs propres. Soit v un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

$$\begin{aligned} \langle {}^tAAv, v\rangle = \langle Av, Av\rangle &= \|Av\|^2 \\ &= \lambda\|v\|^2 \end{aligned}$$

Les valeurs propres de ${}^tAA$ sont positives. Cette matrice est symétrique, positive.
Elle est définie positive si, et seulement si, les valeurs propres sont strictement positives, si, et seulement si, A est injective.

3 **a)** Notons :

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

le vecteur cherché et λe_1 l'image du vecteur a par la symétrie orthogonale.

On doit avoir :

$$a + \lambda e_1 \in \text{Vect}\,(v)^{\perp} \quad ; \quad a - \lambda e_1 \in \text{Vect}\,(v).$$

Soit : $\langle a + \lambda e_1, a - \lambda e_1\rangle = 0$.

On en déduit :

$$\lambda = \pm\|a\|.$$

Vérifier que le choix de $v = a + \|a\|e_1$ permet de définir une symétrie orthogonale qui convient.

b) Le projeté orthogonal de u sur Vect$\,(v)$ est : $\langle u, \frac{v}{\|v\|}\rangle \frac{v}{\|v\|}$. D'où le résultat.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} u - 2\langle u, \frac{v}{\|v\|}\rangle \frac{v}{\|v\|} &= u - \frac{2}{\|v\|^2}({}^tvu)v \\ &= u - \frac{2}{\|v\|^2}v({}^tvu) \\ &= u - \frac{2}{\|v\|^2}(v{}^tv)u \end{aligned}$$

La matrice de la symétrie orthogonale est :

$$\text{Id}_n - \frac{2}{\|v\|^2}(v{}^tv).$$

c) Si la première colonne de C est nulle, il n'y a rien à faire.
Sinon, on note a le premier vecteur colonne de C, Q_1 la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $a + \|a\|e_1$. D'après la question précédente, la première colonne de Q_1C comporte au plus un terme non nul, le premier. Nous retrouvons les *matrices de Householder*.

d) Notons C_1 la matrice obtenue en conservant les $n-1$ dernières lignes et colonnes de C. Il existe une matrice R_2 orthogonale telle que la matrice $R_2 C_1$ ait au plus un terme non nul en première colonne, le premier.

On pose :

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & & & \\ 0 & & R_2 & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}.$$

La matrice Q_2 est orthogonale et :

$$Q_2 Q_1 C = \begin{bmatrix} 1 & * & \cdots & \cdots \\ 0 & & & \\ 0 & & R_2 C_1 & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}.$$

Les éléments des deux premières colonnes situés sous la diagonale sont nuls.

En itérant le procédé, on construit une matrice orthogonale $Q = Q_{n-1} \cdots Q_1$ telle que la matrice QC est triangulaire supérieure.

On a décomposé la matrice C sous la forme QR.

4 L'équation $Cx = d$ se traduit par $STx = d$, en décomposant C sous la forme QR : $C = ST$.

Soit :

$$\begin{cases} Tx = y \\ Sy = d \end{cases}$$

Or $Sy = d$ équivaut à $y = {}^t Sd$.

On calcule d'abord $y = {}^t Sd$, puis on résout le système triangulaire : $Tx = y$.

Partie informatique

5

Avec Maple

```
> restart:with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace
have been redefined and unprotected
> QR:=proc(A)
local n,J,e1,v,N,C,k,nm,R,v1,v2,v3,C1,c;
global S,T;
N:=coldim(A);n:=N;
C:=A;T:=array(identity,1..N,1..N):
#Calcul des Ri
 for k to N-1 do
 c:=submatrix(C,1..n,1..1):
 J:=array(identity,1..n,1..n):
 e1:=submatrix(J,1..n,1..1):
 v:=evalm(c+norm(c,2)*e1);nm:=norm(v,2);
# Pour éviter une division par 0.
  if nm=0 then R:=J;C1:=C;
  else R:=evalm(J-(2/nm^2)*(v&*transpose(v)));
  C1:=evalm(R&*C);
  fi;
#On modifie la taille de R
  if k>1 then v1:=matrix(N-n,n,0);
  v2:=transpose(v1);
  v3:=stackmatrix(array(identity,1..N-n,1..N-n),v2);
    R:=evalm(augment(v3,stackmatrix(v1,R)));
    S:=evalm(S&*R);T:=evalm(R&*T);
   else S:=evalm(R);T:=evalm(S&*A);
  fi;
 C:=submatrix(C1,2..n,2..n);n:=n-1;
 od;end:
> A:=matrix(4,4,[2.,0,5,-1,2,0,-2,1,0,-3,1,2,
                                    -1,2,0,2]):
> QR(A):evalm(S);evalm(T);
```

$$\begin{bmatrix} -.666666666 & -.1254294494 & -.7337914241 & -.0370561046 \\ -.6666666666 & -.1254294488 & .6448998267 & -.3520329849 \\ 0. & .8466487818 & -.1185221298 & -.5187854528 \\ .3333333333 & -.5017177964 & -.1777831951 & -.7781781789 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2.999999998 & .6666666666 & -1.999999997 & .6666666660 \\ 3.3\,10^{-19} & -3.543381938 & .4703604327 & .6898619720 \\ 6.893456254\,10^{-10} & -3.101894960\,10^{-10} & -5.077278903 & .7860806019 \\ -1.574884402\,10^{-10} & 3.921510890\,10^{-10} & -4\,10^{-9} & -2.908904144 \end{bmatrix}$$

```
> evalm(S&*T);
```

$$\begin{bmatrix} 1.999999996 & 1.713082800\,10^{-9} & 4.999999997 & -.9999999988 \\ 1.999999998 & -1.338091270\,10^{-9} & -2.000000003 & 1.000000002 \\ 3.5\,10^{-19} & -3.000000001 & .9999999987 & 2.000000004 \\ -.9999999992 & 2.000000000 & 3.512712716\,10^{-9} & 2.000000002 \end{bmatrix}$$

```
> RésolSyst:=proc(A,d)
local N,j,y,i;
global x;
N:=coldim(A):QR(A);y:=matrix(N,1);x:=matrix(N,1);
y:=evalm(transpose(S)&*transpose(d));
for i from N to 1 by -1 do
if T[i,i]=0 then print(‘erreur‘):break:
 else if i=N then x[N,1]:=y[N,1]/T[N,N]:
  else x[i,1]:=(y[i,1]-sum(T[i,j]*x[j,1],
                                j=i+1..N))/T[i,i]:
 fi:fi:od:
print(x);end:
> d:=matrix(1,4,[1,0,3,5]):
A:=matrix(4,4,[2.,0,5,-1,2,0,-2,1,0,-3,1,2,
                        -1,2,0,2]):
> RésolSyst(A,d);
```

$$\begin{bmatrix} -.2611464972 \\ .4840764338 \\ .6815286633 \\ 1.885350319 \end{bmatrix}$$

```
> MoindresCarres:=proc(A,b)
local C,d;
C:=evalm(transpose(A)&*A);
d:=evalm(transpose(A)&*transpose(b)):
RésolSyst(C,d);
end;
```

MoindresCarres := **proc**(A, b)
local C, d;
 C := *evalm*(‘&*’(*transpose*(A), A));
 d := *evalm*(‘&*’(*transpose*(A), *transpose*(b)));
 RésolSyst(C, d)
end proc

6 Espace préhilbertien complexe Espace hermitien

RAPPELS DE COURS

Dans ce chapitre, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

STRUCTURE D'ESPACE PRÉHILBERTIEN COMPLEXE

• *Produit scalaire et norme*

Un produit scalaire complexe φ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

• $\forall (x,\ y) \in E \times E \quad \varphi(x,\ y) = \overline{\varphi(y, x)}$ (*hermitienne*) ;

• $\forall (x, y_1, y_2) \in E^3 \ \ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \quad \varphi(x, \lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda\varphi(x, y_1) + \mu\varphi(x, y_2)$ (*linéarité à droite*) ;

• $\forall x \in E \quad \varphi(x,\ x) \geqslant 0$;

• $\forall x \in E \quad \varphi(x,\ x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$.

Un espace vectoriel complexe muni d'un produit scalaire est appelé *espace préhilbertien complexe.*

Une application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$, hermitienne et linéaire à droite, possède la propriété suivante :

$$\forall (x_1, x_2, y) \in E^3 \qquad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \quad \varphi(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \overline{\lambda}\varphi(x_1, y) + \overline{\mu}\varphi(x_2, y).$$

Elle est dite semi-linéaire à gauche.

Semi-linéaire à gauche et linéaire à droite, elle est qualifiée de *sesquilinéaire*.

Un espace préhilbertien complexe de dimension finie est appelé *espace hermitien.*

Dans ce chapitre, nous noterons $(\ |\ )$ le produit scalaire.

Alors, la fonction $\|\|$ de E dans $\mathbb{R}^+$, définie par $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$, est une norme sur E, dite norme associée au produit scalaire complexe ou *norme hermitienne*.

L'espace E est ainsi muni d'une structure d'espace vectoriel normé.

Lorsqu'il est complet, on l'appelle *espace de Hilbert.*

• Soit φ un produit scalaire sur E. Alors :

$$x = 0_E \Leftrightarrow \forall y \in E \quad (x \mid y) = 0.$$

• Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ. Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad |\varphi(x, y)|^2 \leqslant \varphi(x, x)\varphi(y, y) \quad (\textit{Inégalité de Cauchy-Schwarz.})$$

L'égalité a lieu si, et seulement si, la famille (x, y) est liée : $x = 0_E$ ou $(\exists k \in \mathbb{C})(y = kx)$.

• Soit E un espace préhilbertien complexe. On note $\| \|$ la norme hermitienne associée. Alors :

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad (\textit{Inégalité de Minkoswki.})$$

L'égalité a lieu si, et seulement si, la famille $(x,\ y)$ est positivement liée :

$$x = 0_E \quad \text{ou} \quad (\exists k \in \mathbb{R}_+)(y = kx).$$

• Pour tout x de E et tout x de E, on a :

– $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\ (x \mid y)$.

– $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\ (x \mid y)$.

– $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ (*Identité du parallélogramme.*)

– $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\mathrm{Re}\ (x \mid y)$.

– $(x \mid y) = \dfrac{1}{4}(\|y + x\|^2 - \|y - x\|^2 + i\|y + ix\|^2 - i\|y - ix\|^2)$ (*Identité de polarisation.*)

– $\|x\| = \sup\{|(x \mid y)| ; \|y\| \leqslant 1\} = \sup\{|(x \mid y)| ; \|y\| = 1\} = \sup\left\{\dfrac{|(x \mid y)|}{\|y\|}\ ;\ y \neq 0_E\right\}$.

CAS DE LA DIMENSION FINIE

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension n et $B = (e_1,\ \ldots, e_n)$ une base de E.

Notons X le vecteur colonne des coordonnées d'un vecteur x quelconque de E et Y celui d'un vecteur y quelconque dans E.

À toute matrice M de $\mathcal{M}_{n,\ p}(\mathbb{C})$ de coefficient général $m_{i,\ j}$, on associe la matrice $\overline{M}$ de $\mathcal{M}_{n,\ p}(\mathbb{C})$ de coefficient général $\overline{m_{i,\ j}}$. La matrice $\overline{M}$ est dite *matrice conjuguée* de M, la matrice $M^* = {}^t\overline{M}$ de $\mathcal{M}_{p,\ n}(\mathbb{C})$ est la *matrice transconjuguée de* M.

Une forme sesquilinéaire $(\ |\ )$ est entièrement déterminée par la matrice $A = (a_{i,\ j})_{i \in [\![1,\ n]\!],\ j \in [\![1,\ n]\!]}$ définie par :

$$\forall (i,\ j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad a_{i,\ j} = (e_i \mid e_j).$$

Alors $(x \mid y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,\ j}\, \overline{x_i}\, y_j = {}^t\overline{X} AY$.

La forme sesquilinéaire $(\ |\ )$ de matrice A dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est hermitienne si, et seulement si, la matrice A vérifie : $A^* = A$. On dit que A est une *matrice hermitienne.*

Soit A une matrice hermitienne, elle est dite *positive* lorsque $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \quad {}^t\overline{X} AX \geqslant 0$.

Elle est dite *définie positive* lorsque $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \quad X \neq 0 \Rightarrow {}^t\overline{X} AX > 0$.

La forme sesquilinéaire $(\ |\ )$ de matrice A dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ est un produit scalaire complexe si, et seulement si, la matrice A est hermitienne définie positive.

• Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et B une base de E.

Soit A la matrice hermitienne définie positive d'un produit scalaire $(\ |\ )$ sur E.

• Pour tout x de E et tout y de E, on a $(x \mid y) = {}^t\overline{X} AY$, en notant X et Y les vecteurs colonnes respectifs des coordonnées de x et de y dans la base B.

• Si P est la matrice de passage de la base B à la base B', alors la matrice de $(\ |\ )$ dans la base B' est $A' = {}^t\overline{P} AP$.

ORTHOGONALITÉ

Soit $(E, (\,|\,))$ un espace préhilbertien complexe et $\|\ \|$ la norme associée.

• *Vecteurs orthogonaux*

Un vecteur x de E est dit *unitaire* lorsque $\|x\| = 1$.

Un vecteur x est dit *orthogonal* à un vecteur y lorsque $(x \mid y) = 0$. On note $x \perp y$.

Soit A une partie de E, *l'orthogonal* de A est l'ensemble $\{x \in E\,;\, \forall a \in A \quad x \perp a\}$. On le note $A^{\perp}$ ou A°.

Deux sous-espaces F et G de E sont dit *orthogonaux* lorsque $\forall x \in F \quad \forall y \in G \quad x \perp y$.

Les sous-espaces F et G de E sont donc orthogonaux, si, et seulement si, $G \subset F^{\perp}$ (ou bien $F \subset G^{\perp}$).

• $\forall (x,\ y) \in E^2 \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow (x \mid y) \in i\mathbb{R}$ (*Théorème de Pythagore*.)

• Soit F un sous-espace de E. Alors :

- $F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$;
- $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$.

• *Familles orthogonales*

Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de E est *orthogonale* quand :

$$\forall i \in I \quad \forall j \in I \qquad i \neq j \Rightarrow (e_i \mid e_j) = 0$$

Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de E est *orthonormale* quand :

$$\forall i \in I \quad \forall j \in I \qquad (e_i \mid e_j) = \delta_i^j \qquad \text{où } \delta_i^j \text{ désigne le symbole de Kronecker.}$$

• Toute famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre.

Toute famille orthonormale est libre.

• (*Relation de Pythagore*)

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une famille orthogonale de E finie. Alors $\left\| \sum_{i \in I} e_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|e_i\|^2$

• Soit p dans $\mathbb{N}^*$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E.

Il existe une et une seule famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ orthonormale de E telle que :

$$\forall k \in [\![1, p]\!] \quad \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) \quad \text{et} \quad (e_k \mid \varepsilon_k) \in \mathbb{R}_+^*$$

(*Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*.)

Le procédé décrit au cours de cette démonstration permet de construire par récurrence la famille $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ en posant :

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, p-1]\!] \quad \varepsilon_{k+1} = \frac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|} \quad \text{avec} \quad e'_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (\varepsilon_i \mid e_{k+1})\varepsilon_i$$

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt se généralise sans difficulté aux familles libres dénombrables.

• Dans tout espace hermitien, il existe des bases orthonormales et le procédé de Gram-Schmidt permet d'en construire.

Dans un espace hermitien, toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale.

• Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale d'un espace vectoriel hermitien $(E, (\,|\,))$ et u un endomorphisme de E. Alors :

• $\forall x \in E \quad x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(e_i \mid x\big)\, e_i$;

• $\mathrm{Tr}(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(e_i \mid u(e_i)\big)$;

• $\mathrm{Det}(u) = \mathrm{Det}((e_i \mid u(e_j)))_{i \in [\![1,\, n]\!],\ j \in [\![1,\, n]\!]}$;

• pour tout vecteur $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, tout vecteur $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ de E :

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \big|\big(e_i \mid x\big)\big|^2} \quad \text{et} \quad (x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i = \sum_{i=1}^{n} \big(x \mid e_i\big)\ \big(e_i \mid y\big)$$

• ***Supplémentaires orthogonaux***

Deux sous-espaces F et G sont dits *supplémentaires orthogonaux* lorsque $E = F \oplus G$ et $F \perp G$. On note $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$.

• Si F et G sont supplémentaires orthogonaux, alors $G = F^{\perp}$ et $F = (F^{\perp})^{\perp}$.

Un sous-espace quelconque d'un espace préhilbertien complexe n'admet pas toujours de supplémentaire orthogonal.

On appelle *projecteur orthogonal* tout projecteur p de E tel que $\mathrm{Im}\ \ p$ et $\mathrm{Ker}\ p$ sont supplémentaires orthogonaux.

Un projecteur p d'image F est un projecteur orthogonal, si, et seulement si, F admet un supplémentaire orthogonal $G = F^{\perp}$et si $\mathrm{Ker}\ p = F^{\perp}$.

Si F admet un supplémentaire orthogonal, le seul projecteur orthogonal d'image F est la projection orthogonale d'image F et de direction $F^{\perp}$, on le note p_F.

• Soit a un élément de E et F un sous-espace de E. Alors :

– pour tout x de F, $\|a - x\| = d(a,\ F) \Leftrightarrow a - x \in F^{\perp}$;

– il existe au plus un vecteur x qui vérifie $\|a - x\| = d(a,\ F)$.

Si F admet un supplémentaire orthogonal, $p_F(a)$ est l'unique vecteur x de F tel que :

$$\|a - x\| = d(a,\ F) \quad \text{et} \quad \|a\|^2 = \|p_F(a)\|^2 + d(a,\ F)^2.$$

• Soit F un sous-espace de E de dimension finie. Alors :

– il admet un supplémentaire orthogonal ;

– $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$;

– $(F^{\perp})^{\perp} = F$;

– $\mathrm{codim}\ F^{\perp} = \dim F$;

– si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormale de F, alors :

$$\forall x \in E \quad p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (e_i \mid x) e_i$$

$$\forall x \in E \quad \sum_{i=1}^{p} |(e_i \mid x)|^2 \leqslant \|x\|^2 \quad (\textit{Inégalité de Bessel.})$$

• Soit $(E, (\,|\,))$ un espace hermitien et F un sous-espace de E. Alors :

– F admet un supplémentaire orthogonal ;

– $F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp} = E$;

– $\dim F^{\perp} = \dim E - \dim F = \operatorname{codim} F$;

– $(F^{\perp})^{\perp} = F$;

– on dispose de la projection orthogonale p_F sur F et, pour tout a de E, la distance de a au sous-espace F est $d(a,\ F) = \|a - p_F(a)\|$.

Si $(e_1, \ldots, e_k)$ est une base orthonormale de F, $p_F(a) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \left(e_i \,|\, a\right) e_i$.

• ***Somme directe orthogonale***

Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille finie de sous-espaces vectoriels de E orthogonaux deux à deux.

La somme est directe $\displaystyle\bigoplus_{i \in I} F_i$. Elle est dite *somme directe orthogonale*. On la note $\displaystyle\overset{\perp}{\bigoplus_{i \in I}} F_i$.

• Soit $(F_i)_{i \in [\![1,\, n]\!]}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \displaystyle\overset{\perp}{\bigoplus_{i \in [\![1,n]\!]}} F_i$.

Alors :

– pour tout $(x_1, \ldots, x_n)$ de $F_1 \times \cdots \times F_n$ et $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$, on a $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$ (théorème de Pythagore) ;

– pour tout i de I, soit p_i la projection sur F_i de noyau $\displaystyle\overset{\perp}{\bigoplus_{\substack{j \in I \\ j \neq i}}} F_j$.

On a $\displaystyle\sum_{i \in I} p_i = \mathrm{Id}_E, \quad p_i \circ p_i = p_i \quad \text{et} \quad p_i \circ p_j = 0_{L(E)}, \quad \text{pour } i \neq j.$

Les projecteurs p_i sont appelés les *projecteurs orthogonaux associés à la décomposition de* E *en somme directe orthogonale* $E = \displaystyle\overset{\perp}{\bigoplus_{i \in I}} F_i$.

SEMI-ISOMORPHISME CANONIQUE D'UN ESPACE HERMITIEN SUR SON DUAL

Soit $(E, (\,|\,))$ un espace hermitien. Notons E^* son dual.

Pour tout a de E, l'application $j(a) : x \longmapsto (a \mid x)$ est une forme linéaire sur E.

L'application $j : a \longmapsto j(a)$ est un semi-isomorphisme (semi-linéaire et bijectif) canonique de E sur son dual E^* :

$$\forall \varphi \in E^* \quad \exists\, !a \in E\ ; \quad \forall x \in E \qquad \varphi(x) = (a \mid x).$$

ÉNONCÉS

1 Une forme sesquilinéaire hermitienne

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et φ une forme sesquilinéaire sur E telle que :

$$\forall (x,\ x) \in E \times E \quad \varphi(x,\ x) \in \mathbb{R}$$

Montrer que φ est hermitienne.

Conseils

Calcul de $\varphi(x+y,\ x+y)$ et de $\varphi(x+\mathrm{i}y, x+\mathrm{i}y)$.

2 Applications $\mathbb{C}$ bilinéaires et sesquilinéaires

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

1 On considère une forme sesquilinéaire hermitienne h et notons f et g les applications de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall (x,\ y) \in E \times E \quad h(x,\ y) = g(x,\ y) + \mathrm{i} f(x,\ y).$$

Montrer que f et g sont $\mathbb{R}$-bilinéaires, que g est symétrique et que f est antisymétrique :

$$\forall (x,\ y) \in E \times E \quad f(y,\ x) = -f(x,\ y).$$

2 Soit g une application $\mathbb{R}$-bilinéaire de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$. On suppose que, pour tout x de E, l'application $y \longmapsto g(x,\ y)$ est $\mathbb{C}$-linéaire et que l'application f définie par :

$$\forall (x,\ y) \in E \times E \qquad f(x,\ y) = g(x,\ y) - g(y,\ x)$$

est à valeurs réelles.

Montrer qu'il existe une forme sesquilinéaire hermitienne h et une forme $\mathbb{C}$-bilinéaire symétrique l telles que $2\mathrm{i}g = h + l$.

Montrer que h et l sont uniques.

Conseils

Pour la question **2)**, calculer $2\mathrm{i}\, f$ et en déduire que la partie imaginaire de h est f.
Puis écrire $h = w + \mathrm{i}\, f$ où w est une forme $\mathbb{R}$-linéaire à valeurs réelles et exprimer $w(x,\ y)$ en fonction de f, x et y.

3 Une inégalité entre normes

Soit $(E, (\,|\,))$ un espace préhilbertien complexe. Montrer que :

$$\forall (a,\ b,\ c,\ d) \in E^4$$
$$\|a-c\|\|b-d\| \leqslant \|a-b\|\|c-d\| + \|a-d\|\ \|b-c\|.$$

Conseils

Utiliser l'application $x \longmapsto \dfrac{x}{\|x\|^2}$.

4 Une suite orthonormale dans $\mathbb{C}[X]$

Montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) dans $\mathbb{C}[X\ ]$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \deg P_n = n$$

et

$$\forall (m,\ n) \in \mathbb{N}^2 \quad \int_0^1 \frac{\overline{P_n(x)} P_m(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x = \delta_n^m$$

(δ_n^m, symbole de Kronecker, est égal à 1 si $m = n$ et 0 sinon.)

La suite (P_n) est-elle unique ?

Conseils

Choisir un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}[X]$.
Montrer par récurrence que, s'il existe une autre suite $(Q_n(X))$, alors, pour tout n, il existe un complexe λ de module 1 tel que $Q_n = \lambda P_n$.

5 Un produit scalaire sur $\mathbb{C}_n[X]$

1 Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$:

$$(P,\ Q) \longmapsto (P \mid Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})}\, Q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})\,\mathrm{d}\,\theta$$

est un produit scalaire hermitien sur E.

2 On considère un polynôme R de $\mathbb{C}[X]$ unitaire.

Montrer que la borne supérieure de l'ensemble :

$$\{|R(z)|\ ;\ |z| = 1\}$$

est supérieure ou égale à 1 et qu'elle est égale à 1 si, et seulement s'il existe un entier non nul m tel que $R = X^m$.

Conseils

2) Remarquer que $(1, X, \dots, X^n)$ est une base orthonormale pour $(\,|\,)$.

6 Image et noyau du produit d'une matrice avec sa matrice transconjuguée

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Comparer noyaux, images et rangs des endomorphismes canoniquement associés à A, A^*, AA^* et A^*A.

Conseils

Noter u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et A^*.
Comparer les noyaux de u et de $v \circ u$.

7 Distance d'un vecteur à un sous-espace dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

Soit n et p deux entiers naturels tels que $p \leqslant n$.

On considère une matrice A de $\mathcal{M}_{n,\,p}(\mathbb{C})$ et une matrice colonne B de $\mathcal{M}_{n,\,1}(\mathbb{C})$.

On note $(\,|\,)$ le produit scalaire hermitien défini par :

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,\,1}(\mathbb{C})^2 \quad (X \mid Y) = {}^{\mathrm{t}}\overline{X}Y$$

et $\|\ \|$ la norme associée sur $\mathcal{M}_{n,\,1}(\mathbb{C})$.

Si l'équation $AX = B$ d'inconnue X dans $\mathcal{M}_{p,\,1}(\mathbb{C})$ n'a pas de solution, on cherche X tel que $\|AX - B\|$ soit minimal.

On suppose que le rang de A est p.

1 Montrer qu'il existe une seule matrice X_0 de $\mathcal{M}_{p,\,1}(\mathbb{C})$ telle que :

$$\|AX_0 - B\| = \inf\,\{\|AX - B\|\ ;\ X \in \mathcal{M}_{p,\,1}(\mathbb{C})\}.$$

2 Montrer que X_0 est l'unique solution de :

$${}^{\mathrm{t}}\overline{A}AX = {}^{\mathrm{t}}\overline{A}B.$$

8 Quand le supplémentaire orthogonal n'existe pas

On munit $\mathbb{C}[X]$ du produit scalaire hermitien canonique. Soit φ une forme linéaire sur $\mathbb{C}[X]$ non nulle et H son noyau.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note $a_n = \varphi(X^n)$.

Montrer que H admet un supplémentaire orthogonal si, et seulement si, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}\,;\, a_n \neq 0\}$ est fini.

Montrer que $H^\perp$ admet cependant toujours un supplémentaire orthogonal.

Conseils

Distinguer les deux cas : (a_n) à support fini et (a_n) à support infini.
Déterminer $H^\perp$ dans les deux cas.

9 Spectre d'une matrice hermitienne

Montrer que le spectre de toute matrice hermitienne est réel.

Que peut-on dire lorsqu'elle est positive ? Définie positive ?

Conseils

Considérer une valeur propre λ dans $\mathbb{C}$, introduire un vecteur propre et, en utilisant les conjugués, montrer que $\overline{\lambda} - \lambda = 0$.

10* Déterminant de Gram

Soit $(E, (\,|\,))$ un espace hermitien de dimension p et n un entier de $[\![1, p]\!]$.

Pour n vecteurs quelconques $x_1, \dots, x_n$ de E, on appelle matrice de Gram $g(x_1, \dots, x_n)$ de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ la matrice dont le terme de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne est $(x_i \mid x_j)$.

On note $G(x_1, \dots, x_n)$ le déterminant de cette matrice, appelé « déterminant de Gram de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ ».

1 Montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si, et seulement si, $G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ et que le rang de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est celui de sa matrice de Gram.

2 Dans cette question, on suppose que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

Soit $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et x dans E. Montrer que :

$$d(x, F)^2 = \frac{G(x_1, \dots, x_n, x)}{G(x_1, \dots, x_n)}.$$

3 Établir les inégalités :

$$0 \leqslant G(x_1, \dots, x_n) \leqslant G(x_1) \dots G(x_n).$$

Étudier le cas d'égalité.

4 Plus généralement, montrer que :

$$\forall q \in [\![1, n-1]\!]$$
$$G(x_1, \dots, x_n) \leqslant G(x_1, \dots, x_q) G(x_{q+1}, \dots, x_n)$$

Étudier le cas d'égalité.

Conseils

1) Introduire un sous-espace H de E de dimension n contenant les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de H.
Exprimer $g(x_1, \dots, x_n)$ à l'aide de la matrice de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.
2) Calculer $G(x_1, \dots, x_n, x - p_F(x) + p_F(x))$ en notant p_F la projection orthogonale sur F.

11* Une inégalité d'Hadamard

D'après Mines Ponts, PC.

Étant donné une suite de n vecteurs indépendants $V_1, \dots, V_n$ de l'espace hermitien $\mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire canonique, soit $M(V_1, \dots, V_n)$ la matrice carrée d'ordre n dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs $V_1, \dots, V_n$.

1 Déterminer, lorsque les vecteurs $V_1, \dots, V_n$ sont deux à deux orthogonaux, le produit B :

$$B = {}^t\overline{M(V_1, \dots, V_n)}M(V_1, \dots, V_n).$$

Que vaut le module du déterminant de la matrice $M(V_1, \dots, V_n)$?

2 Soit $U_1, \dots, U_n$ les vecteurs de $\mathbb{C}^n$ définis de la manière suivante :

- $U_1 = V_1$;
- $U_2 = V_2 - p_1(V_2)$, où p_1 est la projection orthogonale sur $\mathbb{C}V_1$ et pour tout entier i de $[\![3, n]\!]$;
- $U_i = V_i - p_{i-1}(V_i)$, où p_{i-1} est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(V_1, \dots, V_{i-1})$.

Démontrer l'égalité :

$$\mathrm{Det} M(V_1, \dots, V_n) = \mathrm{Det} M(U_1, \dots, U_n).$$

3 Déduire des résultats précédents l'inégalité :

$$|\mathrm{Det} M(V_1, \dots, V_n)| \leqslant \|V_1\| \, \|V_2\| \dots \|V_n\|.$$

Démontrer qu'il y a égalité entre les deux membres de cette relation si, et seulement si, les vecteurs $V_1, \dots, V_n$ sont orthogonaux deux à deux.

12 Une propriété du déterminant d'une matrice hermitienne positive

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice hermitienne positive d'ordre n. Montrer que :

$$0 \leqslant \mathrm{Det} A \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Conseils

Pour montrer que $\mathrm{Det} A \geqslant 0$, montrer que les valeurs propres sont des réels positifs.
Considérer le cas $\mathrm{Det} A \neq 0$ et le produit scalaire associé à A.

13 Matrices unitaires

Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite unitaire si, et seulement si : $AA^* = A^*A = I_n$.

Notons U_n l'ensemble des matrices unitaires d'ordre n.

1 Montrer que U_n est un groupe multiplicatif. Est-il abélien ?

U_n est-il un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

2 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dans U_2.

a) Montrer qu'il existe un réel θ tel que $ad - bc = e^{i\theta}$. Ce réel θ est-il unique ?

b) Trouver la forme générale des matrices de U_2 au moyen des trois paramètres a, b et θ.

c) Si $z = re^{i\alpha}$, $z' = r^{-1}e^{i\alpha'}$ et $Z = Re^{i\beta}$ avec r, R, α, α' et β réels tels que $r > 0$, $R \geqslant 0$ et $\alpha - \alpha' \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on note $\gamma = \alpha + \alpha'$.

On suppose que $z + z' = Z + \overline{Z}e^{i\gamma}$. Montrer que $r = 1$.

En déduire que les valeurs propres d'une matrice de U_2 sont de module 1.

3 Soit $E = \mathbb{C}^n$ muni du produit scalaire canonique $(\mid)$, A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et u l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique.

Vérifier que A est unitaire si, et seulement si :

$$\forall (x, y) \in E \times E \quad (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y).$$

4 Soit A une matrice de U_n. On considère deux valeurs propres distinctes λ et μ.

Montrer que les sous-espaces propres associés sont orthogonaux.

5 Soit $U = \begin{pmatrix} \dfrac{2i}{3} & \dfrac{\sqrt{5}}{3} & 0 \\ -\dfrac{i\sqrt{5}}{3} & \dfrac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vérifier que U est unitaire.

Calculer ses valeurs propres et vérifier que leur module est 1.

Conseils

3) Penser à la trace et se ramener aux questions précédentes.

4) Pour tout x du sous-espace propre de u associé à λ et tout y du sous-espace propre de u associé à μ, on calcule $(u(x) \mid u(y))$.

14 Décomposition d'Iwasawa

On note U_n l'ensemble des matrices unitaires d'ordre n (*cf. exercice* précédent), T_n l'ensemble $\{T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\,;\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\ i < j \Rightarrow t_{i,j} = 0\}$ et TP_n l'ensemble $\{T \in T_n\ ;\ \forall i \in [\![1,n]\!]\ t_{i,i} > 0\}$.

1 **a)** Montrer que T_n est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Est-ce un groupe multiplicatif ?

b) Montrer que TP_n est un groupe multiplicatif. Est-ce un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

c) Soit V dans $TP_n \cap U_n$. Montrer que V est diagonale. En déduire $V = I_n$.

2 Pour $n = 3$, on considère la matrice :

$$B = \begin{pmatrix} 2i & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de E obtenue à partir des vecteurs lignes de B par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

En déduire qu'il existe un élément T de T_3 et un élément U de U_3 tels que $B = TU$.

3 Soit C une matrice de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Notons $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs lignes de C.

a) Montrer qu'il existe une base $(C'_1, \dots, C'_n)$ orthogonale de $\mathbb{C}^n$ telle que :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_k) = \mathrm{Vect}(C'_1, \dots, C'_k)$$

et $$(C_k \mid C'_k) \in \mathbb{R}_+^*$$

b) Montrer qu'il existe des scalaires $\beta_{i,j}$ tels que :

$$\forall j \in [\![2,n]\!] \quad C'_j = C_j - \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{i,j} C_i.$$

c) Soit U la matrice ayant pour ligne les vecteurs $W_i = \dfrac{C'_i}{\|C'_i\|}$. Montrer que U est unitaire.

d) Soit R la matrice définie par :

– pour tout $j > i$: $r_{i,j} = 0$,

– pour $j = i$: $r_{i,i} = \dfrac{1}{\|C'_i\|}$

– pour $j < i$: $r_{i,j} = \dfrac{-\beta_{i,j}}{\|C'_i\|}$.

Montrer que $U = RC$.

e) En déduire qu'il existe une matrice S de TP_n telle que $C = SU$.

Prouver l'unicité d'un tel couple (S, U).

Conseils

Dans la question **3)**, on orthogonalise, par le procédé de Schmidt, la base constituée par les vecteurs lignes.

15 Les endomorphismes normaux

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace hermitien de dimension n.

1 **Adjoint d'un endomorphisme**

a) Soit u un endomorphisme de E. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme v tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (u(x)|y) = (x|v(y)).$$

Pour la suite on notera u^* cet endomorphisme qui sera appelé adjoint de u. Un automorphisme qui vérifie $u^* = u$ est appelé endomorphisme auto-adjoint ou hermitien. Un automorphisme est unitaire si $u^* = u^{-1}$.

b) Si A est la matrice de u dans une base orthonormale, montrer que la matrice de u^* est ${}^t\overline{A}$.

c) Soit u et v deux endomorphismes de E, α et β deux complexes.

Vérifier les propriétés suivantes :

(i.) $(u^*)^* = u$

(ii.) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

(iii.) $(\alpha u + \beta v)^* = \overline{\alpha} u^* + \overline{\beta} v^*$

(iv.) Si u est inversible, alors u^* est inversible et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$

(v.) $\mathrm{Ker}\, u^* = (\mathrm{Im}\, u)^\perp$ et $\mathrm{Im}\, u^* = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$

(vi.) Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

2 **Les endomorphismes normaux**

Un endomorphisme u est dit « normal » lorsque :

$$u^* \circ u = u \circ u^*.$$

a) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i.) L'endomorphisme u est normal ;

(ii.) $\forall (x,y) \in E^2 \quad (u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y))$;

(iii.) $\forall x \in E \quad ||u(x)|| = ||u^*(x)||$.

b) Montrer que si l'endomorphisme u est normal, alors $\operatorname{Ker} u^* = \operatorname{Ker} u$ et $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

3 Réduction des endomorphismes normaux

a) Soit λ une valeur propre de u, montrer que $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de u^*, que les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ et $E_{\overline{\lambda}}(u^*)$ sont égaux et que $E_\lambda(u)^\perp$ est stable par u.

b) Soit λ et μ deux valeurs propres distinctes de u. Montrer que les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux.

c) Montrer qu'un endomorphisme est normal si, et seulement s'il existe une base orthonormale dans laquelle sa matrice est diagonale.

Donner quelques exemples.

d) Si u est normal, montrer qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ tel que $P(u) = u^*$. Étudier la réciproque.

e) Montrer qu'un endomorphisme u est normal si, et seulement si :

$$\operatorname{Tr}(u^*u) = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$$

où les $a_1, \ldots, a_n$ désignent les valeurs propres de u.

f) Soit v et w deux endomorphismes normaux.

Si l'endomorphisme $w \circ v$ est nul, montrer que $v \circ w$ est nul.

Si l'endomorphisme $w \circ v$ est normal, montrer que $v \circ w$ est normal.

Conseils

1) Utiliser des méthodes analogues aux démonstrations faites dans le cours dans le cas euclidien.
2) a) Pour montrer **(iii)** $\Longrightarrow$ **(ii)** utiliser l'identité de polarisation.
Pour montrer **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)** : se souvenir qu'un vecteur y est nul si, et seulement si :

$$\forall x \in E \quad (x \mid y) = 0.$$

b) Utiliser **(iii)**. Que dire du supplémentaire orthogonal de $\operatorname{Ker} u$?
3) a) Utiliser **1) c)**.
b) Prendre x et y dans chacun des sous-espaces propres et calculer de deux manières : $(u(x)|y)$.
c) Introduire le sous-espace F somme directe des sous-espaces propres de u et raisonner par l'absurde en constatant que, dans ce cas, $F^\perp$ n'est pas réduit au vecteur nul.
d) Penser aux polynômes d'interpolation de Lagrange.
e) Pour la réciproque, on pourra montrer que pour tout endomorphisme, il existe une base orthonormale dans laquelle sa matrice est triangulaire.
f) Utiliser **3) e)** pour la deuxième question.

CORRIGÉS

1 Une forme sesquilinéaire hermitienne

Soit $(x,\ y)$ dans $E \times E$.

$\varphi(x+y,\ x+y) = \varphi(x,\ x)+\varphi(x,\ y)+\varphi(y,\ x)+\varphi(y,y)$.

On en déduit que $\varphi(x,\ y)+\varphi(y,\ x)$ est un réel a.

$\varphi(x+\mathrm{i}y, x+\mathrm{i}y) = \varphi(x,\ x)+\mathrm{i}\varphi(x,\ y)-\mathrm{i}\varphi(y,\ x)+\varphi(y,\ y)$.

On en déduit que $\mathrm{i}\varphi(x,\ y)-\mathrm{i}\varphi(y,\ x)$ est un réel b.

Par conséquent :

$$\varphi(x,\ y) = \frac{1}{2}(a-\mathrm{i}\,b) \quad \text{et} \quad \varphi(y,\ x) = \frac{1}{2}(a+\mathrm{i}\,b)$$

D'où $\forall (x,\ y) \in E \times E \quad \varphi(y,\ x) = \overline{\varphi(x,y)}$.

2 Applications $\mathbb{C}$ bilinéaires et sesquilinéaires

1 L'application g est la partie réelle de h. Or h est sesquilinéaire. Donc :

$\forall (x,x') \in E \times E \quad \forall y \in E$

$$\begin{aligned} g(x+x',y) &= \mathrm{Re}\,(h(x+x',y)) \\ &= \mathrm{Re}\,(h(x,y)) + \mathrm{Re}\,(h(x',y)) \\ &= g(x,y)+g(x',\ y). \end{aligned}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall (x,\ y) \in E \times E$

$$\begin{aligned} g(\alpha x,\ y) &= \mathrm{Re}\,(h(\alpha x,y)) = \mathrm{Re}\,(\overline{\alpha}h(x,\ y)) \\ &= \mathrm{Re}\,(\alpha h(x,\ y)) = \alpha \mathrm{Re}\,(h(x,y)) \\ &= \alpha g(x,\ y). \end{aligned}$$

$\forall (y,y') \in E \times E \quad \forall x \in E$

$$\begin{aligned} g(x,y'+y) &= \mathrm{Re}\,(h(x,y'+y)) \\ &= \mathrm{Re}\,(h(x,y'))+\mathrm{Re}\,(h(x,y)) \\ &= g(x,y)+g(x,y'). \end{aligned}$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall (x,\ y) \in E \times E$

$$\begin{aligned} g(x,\alpha y) &= \mathrm{Re}\,(h(x,\alpha y)) = \mathrm{Re}\,(\alpha h(x,\ y)) \\ &= \alpha \mathrm{Re}\,(h(x,y)) = \alpha g(x,\ y). \end{aligned}$$

L'application g est $\mathbb{R}$-bilinéaire.

On démontre de même la $\mathbb{R}$-bilinéarité de f.

Soit $(x,\ y)$ quelconque dans $E \times E$. Alors :

$$h(x,\ y) = g(x,\ y)+\mathrm{i}\,f(x,\ y)$$

et

$$h(y,\ x) = g(y,\ x)+\mathrm{i}\,f(y,\ x).$$

Or la forme h est hermitienne. Donc :

$$g(y,\ x)+\mathrm{i}\,f(y,\ x) = g(x,\ y)-\mathrm{i}\,f(x,\ y).$$

On en déduit que g est symétrique et que f est antisymétrique.

2 Procédons par analyse et synthèse.

• Supposons que h et l conviennent. alors :

$\forall (x,\ y) \in E \times E$

$$2\mathrm{i}\,f(x,\ y) = h(x,\ y)-\overline{h(x,y)} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,(h(x,\ y)).$$

On en déduit $\mathrm{Im}\,(h) = f$. Ceci a un sens, car f est à valeurs réelles.

Par conséquent, h s'écrit :

$$\forall (x,\ y) \in E \times E \quad h(x,\ y) = w(x,\ y)+\mathrm{i}f(x,\ y)$$

où w est une forme $\mathbb{R}$-linéaire à valeurs réelles.

L'application h est $\mathbb{C}$-linéaire à droite. Donc :

$$h(x,\mathrm{i}\,y) = w(x,\mathrm{i}\,y)+\mathrm{i}\,f(x,\mathrm{i}y) = \mathrm{i}\,w(x,\ y)-f(x,\ y).$$

Or $w(x,\mathrm{i}\,y)$, $f(x,\mathrm{i}\,y)$, $w(x,\ y)$ et $f(x,\ y)$ sont des réels. Donc $w(x,\mathrm{i}\,y) = -f(x,\ y)$ et $f(x,\mathrm{i}\,y) = w(x,\ y)$.

On en déduit que h est déterminée de manière unique par l'expression :

$$\forall (x,\ y) \in E \times E \quad h(x,\ y) = f(x,\mathrm{i}\,y)+\mathrm{i}\,f(x,\ y).$$

On obtient ensuite l de manière unique :

$\forall (x,\ y) \in E \times E$

$$\begin{aligned} l(x,\ y) &= 2\mathrm{i}\,g(x,\ y)-f(x,\mathrm{i}\,y)-\mathrm{i}\,f(x,\ y) \\ &= -f(x,\mathrm{i}\,y)+\mathrm{i}\,[g(x,\ y)+g(y,x)]. \end{aligned}$$

• Réciproquement, montrons que ces deux applications conviennent.

On a $l+h = 2\mathrm{i}\,g$.

Vérifions que h est $\mathbb{C}$-linéaire à droite. Puisque g est $\mathbb{R}$-bilinéaire, l'application h l'est également.

Il suffit de vérifier que :

$$\forall (x,\ y) \in E \times E \quad h(x,\mathrm{i}\,y) = \mathrm{i}\,h(x,\ y).$$

Soit $(x,\ y)$ quelconque dans $E \times E$:

$$\begin{aligned} h(x,\mathrm{i}y)-\mathrm{i}\,h(x,\ y) &= f(x,-y)+\mathrm{i}\,f(x,\mathrm{i}\,y)-\mathrm{i}\,f(x,\mathrm{i}\,y)+f(x,\ y) \\ &= -f(x,y)+f(x,\ y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vérifions que h est hermitienne.

Soit $(x,\ y)$ quelconque dans $E\times E$.

$$\begin{aligned}h(y,\ x) &= f(y,\mathrm{i}\,x)+\mathrm{i}\,f(y,\ x)\\ &= f(y,\mathrm{i}\,x)-\mathrm{i}\,f(x,\ y)\\ &= [f(y,\mathrm{i}\,x)-f(x,\mathrm{i}\,y)]+f(x,\mathrm{i}\,y)-\mathrm{i}\,f(x,\ y)\\ &= [f(y,\mathrm{i}\,x)-f(x,\mathrm{i}\,y)]+\overline{h(x,y)}.\end{aligned}$$

Il suffit de montrer que $f(y,\mathrm{i}\,x)-f(x,\mathrm{i}\,y)=0$.

$$f(y,\mathrm{i}\,x)-f(x,\mathrm{i}\,y)= g(y,\mathrm{i}\,x)-g(x,\mathrm{i}\,y)-g(\mathrm{i}\,x,\ y)+g(\mathrm{i}\,y,\ x).$$

Or g est $\mathbb{C}$-linéaire à droite.

$$\begin{aligned}&f(y,\mathrm{i}\,x)-f(x,\mathrm{i}\,y)\\ &= \mathrm{i}\,g(y,\ x)-\mathrm{i}\,g(x,\ y)+\mathrm{i}\,g(\mathrm{i}\,x,\mathrm{i}\,y)-\mathrm{i}\,g(\mathrm{i}\,y,\ \mathrm{i}\,x)\\ &= -\mathrm{i}\,f(y,\ x)+\mathrm{i}\,f(\mathrm{i}\,x,\mathrm{i}\,y)\\ &= -\mathrm{i}[\,f(y,\ x)-f(\mathrm{i}\,x,\mathrm{i}\,y)].\end{aligned}$$

Or $f(y,\mathrm{i}\,x)-f(x,\mathrm{i}\,y)$ et $f(y,\ x)-f(\mathrm{i}\,x,\mathrm{i}\,y)$ sont des réels. On en déduit :

$$f(y,\ x)-f(\mathrm{i}\,x,\mathrm{i}\,y)=f(y,\mathrm{i}x)-f(x,\mathrm{i}\,y)=0.$$

Par conséquent, l'application h est hermitienne.

Vérifions que l est $\mathbb{C}$-linéaire à droite.

On a $l=2\mathrm{i}\,g-h$.

Or g et h sont $\mathbb{C}$-linéaires à droite. On en déduit que l est $\mathbb{C}$-linéaire à droite.

Vérifions que l est symétrique.

Soit $(x,\ y)$ quelconque dans $E\times E$.

$$l(y,\ x)=-f(y,\mathrm{i}\,x)+\mathrm{i}[g(y,\ x)+g(x,\ y)].$$

Nous avons vu que $f(y,\mathrm{i}\,x)-f(x,\mathrm{i}\,y)=0$. Donc :

$$l(y,\ x)=l(x,\ y).$$

En conclusion, l est $\mathbb{C}$-linéaire symétrique et h est sesquilinéaire hermitienne et ces applications vérifient $l+h=2\mathrm{i}\,g$.

3 Une inégalité entre normes

On note $x=a-b$, $y=a-d$ et $z=a-c$.

Nous avons donc à prouver :

$$\|z\|\,\|y-x\|\leqslant\|x\|\,\|z-y\|+\|y\|\,\|z-x\|.$$

Si $z=0$, on a bien $0\leqslant 2\|x\|\|y\|$.

Si $x=0$, on a bien $\|z\|\|y\|\leqslant\|y\|\,\|z\|$.

De même, pour $y=0$, l'inégalité est vérifiée.

Supposons maintenant que x, y et z sont non nuls.

Calculons :

$$\begin{aligned}\left\|\frac{y}{\|y\|^2}-\frac{x}{\|x\|^2}\right\|^2 &= \frac{1}{\|y\|^2}-\frac{(y\mid x)+(x\mid y)}{\|y\|^2\,\|x\|^2}+\frac{1}{\|x\|^2}\\ &= \frac{\|y-x\|^2}{\|y\|^2\,\|x\|^2}\end{aligned}$$

$$\left\|\frac{y}{\|y\|^2}-\frac{x}{\|x\|^2}\right\|=\frac{\|y-x\|}{\|y\|\ \|x\|}.$$

L'inégalité de Minkowski permet d'écrire :

$$\left\|\frac{y}{\|y\|^2}-\frac{x}{\|x\|^2}\right\|\leqslant\left\|\frac{z}{\|z\|^2}-\frac{y}{\|y\|^2}\right\|+\left\|\frac{z}{\|z\|^2}-\frac{x}{\|x\|^2}\right\|$$

D'où :

$$\frac{\|y-x\|}{\|y\|\ \|x\|}\leqslant\frac{\|z-y\|}{\|y\|\ \|z\|}+\frac{\|z-x\|}{\|z\|\ \|x\|}$$

On obtient l'inégalité souhaitée en multipliant l'inégalité précédente par $\|x\|\|y\|\|z\|$.

4 Une suite orthonormale dans $\mathbb{C}[X]$

• Soit f et g deux applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$.

L'application $h\ :x\longmapsto\dfrac{\overline{f(x)}g(x)}{\sqrt{x(1-x)}}$ est continue sur $]0,1[$.

L'application $|h|$ est dominée par $x\rightarrow\dfrac{\|f\|_\infty\|g\|_\infty}{\sqrt{1-x}}$ en 1 et par $x\rightarrow\dfrac{\|f\|_\infty\|g\|_\infty}{\sqrt{x}}$ en 0.

Or ces fonctions sont intégrables sur $[\,0,1]$.

La fonction h est intégrable sur $[0,1]$.

Ceci nous permet de définir l'application φ de $\mathbb{C}[X]\times\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}$ par :

$\forall(P,\ Q)\in\mathbb{C}[X]\times\mathbb{C}[X]$

$$\varphi(P,\ Q)=\int_0^1\frac{\overline{P(x)}Q(x)}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}\,x.$$

On vérifie facilement que l'application φ est linéaire à droite, hermitienne et positive.

Montrons qu'elle est définie positive.

On suppose que :

$$\int_0^1\frac{|P(x)|^2}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}\,x=0.$$

Or l'application $x\longmapsto\dfrac{|P(x)|^2}{\sqrt{x(1-x)}}$ est positive, continue et intégrable sur $]0,1[$. On en déduit la nullité de $P(x)$ pour x dans $]0,1[$.

Le polynôme P a donc une infinité de racines. C'est le polynôme nul.

L'application φ est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}[X]$.

• La suite (P_n) recherchée est une base orthonormale échelonnée en degré.

Le procédé d'orthonormalisation de Schmidt appliqué à la base canonique nous en fournit une.

• Supposons qu'il existe une autre suite (Q_n) répondant à la question. Montrons par récurrence sur n que, pour tout n, il existe un complexe λ de module 1 tel que $Q_n = \lambda P_n$.

Pour $n = 1$, on a l'existence d'un complexe λ tel que $Q_1 = \lambda P_1$. Les polynômes sont normés. Donc λ est de module 1.

Supposons que la propriété soit vérifiée jusqu'au rang $n-1$.

Le polynôme Q_n appartient à $\mathbb{C}_n[X]$ et n'appartient pas à $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Par conséquent, il s'écrit :

$$\sum_{0}^{n-1} a_k P_k + a P_n \quad \text{avec} \quad a \neq 0.$$

Il est orthogonal à $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Donc :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!] \quad a_k = \varphi(Q_n, P_k) = 0.$$

On en déduit $Q_n = a P_n$.

$$1 = \varphi(Q_n, Q_n) = |a|^2 \varphi(P_n, P_n) = |a|^2.$$

Par conséquent, a est un nombre complexe de module 1.

En conclusion, s'il existe une autre suite (Q_n) qui répond à la question alors, pour tout n, il existe un complexe λ de module 1 tel que $Q_n = \lambda P_n$.

5 Un produit scalaire sur $\mathbb{C}_n[X]$

1 Soit n dans $\mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{C}_n[X]$.

On vérifie facilement que l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{C}$:

$$(P,\ Q) \longmapsto (P \mid Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{i\theta})} Q(e^{i\theta})\, d\theta$$

est linéaire à droite et hermitienne positive.

Montrons qu'elle est définie positive.

Soit P dans E tel que $(P \mid P) = 0$.

$$\int_0^{2\pi} \overline{P(e^{i\theta})} P(e^{i\theta})\, d\theta = \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2\, d\theta = 0.$$

L'application $\theta \longmapsto |P(e^{i\theta})|^2$ est continue positive sur $[0,\ 2\pi]$. On en déduit que $P(z) = 0$, pour tout z de module 1.

Le polynôme P a donc une infinité de racines. C'est le polynôme nul.

L'application $(\,|\,)$ est un produit scalaire hermitien sur E.

2 Lorsque R est constant le résultat est immédiat.

Sinon, notons n le degré de R.

On vérifie facilement que $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base orthonormale de E.

Écrivons $R(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |R(e^{i\theta})|^2\, d\theta = 1 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 \geqslant 1.$$

Soit $S = \sup\{|R(z)|\ ;\ |z| = 1\}$.

On a $\displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |R(e^{i\theta})|^2\, d\theta \leqslant S^2$.

On en déduit $S \geqslant 1$ et $S = 1$ si, et seulement si, $|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2 = 0$.

$$S = 1 \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad R(X) = X^n.$$

6 Image et noyau du produit d'une matrice avec sa matrice transconjuguée

On munit $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire canonique.

Soit x un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^n$ et X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ la matrice colonne de ses coordonnées dans la base canonique.

Notons u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et A^*.

• On a $\operatorname{Ker} u \subset \operatorname{Ker}(v \circ u)$.

Montrons $\operatorname{Ker}(v \circ u) \subset \operatorname{Ker} u$.

Soit x dans $\operatorname{Ker}(v \circ u)$. Alors $A^*AX = 0$.

D'où ${}^t\overline{X} A^* A X = 0$. Or ${}^t\overline{X} A^* A X = \|AX\|^2$.

On en déduit $AX = 0$, puis x dans $\operatorname{Ker} u$.

En conclusion, $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(v \circ u)$.

On démontre de même que $\operatorname{Ker}(u \circ v) = \operatorname{Ker} v$.

• On a également $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im} v$.

De plus :

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im}(v \circ u) &= n - \dim \operatorname{Ker}(v \circ u) \\ &= n - \dim \operatorname{Ker} u = \dim \operatorname{Im} u. \end{aligned}$$

Or, $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^*)$. Donc $\dim \operatorname{Im} u = \dim \operatorname{Im} v$.

On en déduit $\dim \operatorname{Im}(v \circ u) = \dim \operatorname{Im} v$.

En conclusion, $\operatorname{Im}(v \circ u) = \operatorname{Im} v$.

On démontre de même que $\operatorname{Im}(u \circ v) = \operatorname{Im} u$.

• Pour les rangs, on a donc :

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^* = \operatorname{rg} A^*A = \operatorname{rg} AA^*.$$

7 Distance d'un vecteur à un sous-espace dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

1 Soit u l'application linéaire de $\mathcal{M}_{p,\,1}(\mathbb{C})$ dans $\mathcal{M}_{n,\,1}(\mathbb{C})$ définie par $X \longmapsto AX$.

Im u est un sous-espace de $\mathcal{M}_{n,\,1}(\mathbb{C})$.

$$\inf\{\|AX - B\|\ ;\ X \in \mathcal{M}_{p,\,1}(\mathbb{C})\} = \mathrm{d}(B, \mathrm{Im}\, u).$$

$\mathcal{M}_{n,\,1}(\mathbb{C})$ est de dimension finie.

Donc, il existe une seule matrice M_0 de Im u telle que :

$$\|M_0 - B\| = \inf\{\|AX - B\|\ ;\ X \in \mathcal{M}_{p,\,1}(\mathbb{C})\}$$

et, dans ce cas, M_0 est le projeté orthogonal de B sur Im u.

M_0 appartient à Im u.

Donc, il existe X_0 dans $\mathcal{M}_{p,\,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX_0 = M_0$.

Le rang de A est p donc u est injective.

On en déduit l'unicité de X_0.

2 $M_0 = p_{\mathrm{Im}\, u}(B)$

$$\Leftrightarrow \forall Z \in \mathrm{Im}\, u \quad M_0 - B \perp Z$$
$$\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{p,\,1}(\mathbb{R}) \quad (AX \mid M_0 - B) = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{p,\,1}(\mathbb{R}) \quad {}^{\mathrm{t}}(\overline{AX})(AX_0 - B) = 0$$
$$\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{M}_{p,\,1}(\mathbb{R}) \quad {}^{\mathrm{t}}\overline{X}({}^{t}\overline{A}AX_0 - {}^{\mathrm{t}}\overline{A}B) = 0$$
$$\Leftrightarrow {}^{\mathrm{t}}\overline{A}AX_0 - {}^{\mathrm{t}}\overline{A}B = 0$$

On en déduit que X_0 est l'unique solution de :

$${}^{\mathrm{t}}\overline{A}AX = {}^{\mathrm{t}}\overline{A}B.$$

8 Quand le supplémentaire orthogonal n'existe pas

Pour tout P de $\mathbb{C}[X]$, il existe une suite (α_n)de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ à support fini telle que $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n X^n$.

Alors $\varphi(P) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n a_n$.

$$H = \left\{P \in \mathbb{C}[X]\ ;\ \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n a_n = 0\right\}$$

Si la suite (a_n) est à support fini, notons :

$$P_0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{a_n} X^n \text{ et } D \text{ la droite engendrée par } P_0.$$

Alors $D \subset H^{\perp}$.

$$\varphi(P_0) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2 \neq 0.$$

Par conséquent, $P_0 \notin H$ et $H \oplus D = \mathbb{C}[X]$.

On en déduit $H \oplus H^{\perp} = \mathbb{C}[X]$.

L'hyperplan H admet un supplémentaire orthogonal et, dans ce cas, l'orthogonal de $H^{\perp}$ est H.

Si la suite (a_n) n'est pas à support fini, montrons par l'absurde que $H^{\perp} = \{0_E\}$.

Soit $Q = \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n X^n$, où la suite (β_n) de $\mathbb{C}^n$ est à support fini. On suppose que $Q \in H^{\perp}$ et que Q est non nul :

$$\forall P \in H \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{\alpha}_n \beta_n = 0.$$

Soit ψ l'application de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}$ définie, pour tout P, par $\psi(P) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \overline{\beta_n}$.

L'application ψ est une forme linéaire sur $\mathbb{C}[X]$. Elle est non nulle, car le polynôme Q est non nul.

Le noyau de ψ est un hyperplan. Il contient l'hyperplan H. Par conséquent, Ker $\psi = H$.

Les formes linéaires φ et ψ sont donc proportionnelles. Ceci est absurde, puisque le support de la suite (β_n) est fini alors que celui de la suite (a_n) ne l'est pas.

Par conséquent, $H^{\perp} = \{0_E\}$ et $H^{\perp}$ n'est pas un supplémentaire de H.

De plus, l'orthogonal de $H^{\perp}$ est $\mathbb{C}[X]$.

9 Spectre d'une matrice hermitienne

Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé.

On vérifie que λ est un réel :

$$AX = \lambda X.$$

Donc ${}^{\mathrm{t}}\overline{X}AX = \lambda\|X\|^2$.

De plus, ${}^{\mathrm{t}}\overline{X}A^* = \overline{\lambda}{}^{\mathrm{t}}\overline{X}$. On a donc également :

$${}^{\mathrm{t}}\overline{X}AX = \overline{\lambda}\|X\|^2.$$

On en déduit $(\overline{\lambda} - \lambda)\|X\|^2 = 0$. Or X est non nul.

Par conséquent, λ est un réel.

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}.$$

Si la matrice hermitienne A est positive, on a ${}^{\mathrm{t}}\overline{X}AX \geqslant 0$. Donc :

$$\lambda \geqslant 0.\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+.$$

Si la matrice hermitienne A est définie positive, on a ${}^{\mathrm{t}}\overline{X}AX > 0$, pour X non nul. Donc $\lambda > 0$.

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*.$$

10 Déterminant de Gram

1 Soit H un sous-espace de E de dimension n contenant les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de H.

Notons A la matrice de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, on a :

$$\begin{aligned}(x_i \mid x_j) &= \left(\sum_{k=1}^{n}(e_k \mid x_i)e_k \mid \sum_{l=1}^{n}(e_l \mid x_j)e_l\right)\\ &= \sum_{k=1}^{n}(e_k|x_i)\overline{(e_k \mid x_j)} = \sum_{k=1}^{n}\overline{a_{k,j}}\, a_{k,i}\end{aligned}$$

On en déduit $g(x_1, \dots, x_n) = A^*A$.

D'où $G(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{Det}A^*\mathrm{Det}A = |\mathrm{Det}A|^2$.

La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si, et seulement si : $\mathrm{Det}A \neq 0$.

Par conséquent, $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si, et seulement si : $G(x_1, \dots, x_n) \neq 0$.

D'autre part, nous avons vu dans l'*exercice* 6 que $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(A^*A)$.

Donc $\mathrm{rg}\; g(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{rg}\,(x_1, \dots, x_n)$.

2 Notons p_F la projection orthogonale sur F.

Un déterminant d'ordre $n+1$ est $(n+1)$-linéaire alterné. Donc :

$$\begin{aligned}&G(x_1, \dots, x_n, x)\\ &= G(x_1, \dots, x_n, x - p_F(x) + p_F(x))\\ &= G(x_1, \dots, x_n, x - p_F(x)) + G(x_1, \dots, x_n, p_F(x))\end{aligned}$$

La famille $(x_1, \dots, x_n, p_F(x))$ est liée.

Par conséquent, $G(x_1, \dots, x_n, p_F(x)) = 0$.

$$G(x_1, \dots, x_n, x) = G(x_1, \dots, x_n, x - p_F(x)).$$

Or $x - p_F(x)$ est orthogonal à F. Donc :

$$\begin{aligned}G(x_1, \dots, x_n, x) &= \begin{vmatrix} g(x_1, \dots, x_n) & 0_{n,1} \\ 0_{1,n} & \|x - p_F(x)\|^2 \end{vmatrix}\\ &= \|x - p_F(x)\|^2 G(x_1, \dots, x_n)\\ &= G(x_1, \dots, x_n)G(x - p_F(x)).\end{aligned}$$

On en déduit $\mathrm{d}(x, F)^2 = \dfrac{G(x_1, \dots, x_n, x)}{G(x_1, \dots, x_n)}$.

3 D'après la question **1)** :

$$G(x_1, \dots, x_n) = |\mathrm{Det}A|^2 \geqslant 0.$$

Si la famille est liée, l'inégalité est triviale.

Il suffit de faire la démonstration lorsque $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

Procédons par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, c'est immédiat.

On suppose le résultat démontré au rang $n - 1$.

Le vecteur x_n s'écrit $y_n + z_n$, avec :

$$y_n \perp \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1}) \text{ et } z_n \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

D'après la question **2)**, on a :

$$G(x_1, \dots, x_n) = G(x_1, \dots, x_{n-1})G(y_n).$$

Or $\|x_n\|^2 = \|y_n\|^2 + \|z_n\|^2$.

Donc $G(y_n) = \|y_n\|^2 \leqslant \|x_n\|^2 = G(x_n)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}G(x_1, \dots, x_n) &\leqslant G(x_1, \dots, x_{n-1})G(x_n)\\ &\leqslant G(x_1) \dots G(x_{n-1})G(x_n).\end{aligned}$$

D'où le résultat, pour tout n de $[\![1, p]\!]$.

L'inégalité devient une égalité si, et seulement si, pour tout k de $[\![1, n]\!]$, x_k est orthogonal à $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1})$. C'est-à-dire si, et seulement si, la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale.

Si la famille est liée, l'inégalité est stricte dès que les vecteurs sont tous non nuls. Il y a égalité si, et seulement si, l'un des vecteurs est nul.

En conclusion, il y a égalité si, et seulement si, la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale ou si l'un des vecteurs de la famille est nul.

4 Posons $x_1 = y_1$ et, pour tout k de $[\![2, n]\!]$, le vecteur x_k s'écrit $y_k + z_k$ avec $y_k \perp \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1})$ et $z_k \in \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1})$.

D'après la question **2)**, on montre par récurrence que :

$$G(x_1, \dots, x_n) = G(y_1, \dots, y_n)$$

et que :

$$G(x_1, \dots, x_q) = G(y_1, \dots, y_q).$$

Les vecteurs $y_1, \dots, y_n$ sont orthogonaux deux à deux. Donc :

$$\begin{aligned}G(y_1, \dots, y_n) &= G(y_1) \dots G(y_n)\\ &= G(y_1, \dots, y_q)G(y_{q+1}) \dots G(y_n)\end{aligned}$$

$$G(x_1, \dots, x_n) = G(x_1, \dots, x_q)G(y_{q+1}) \dots G(y_n).$$

Posons $x_{q+1} = y'_{q+1}$.

Pour tout k de $[\![q+2, n]\!]$, le vecteur x_k s'écrit :

$$y'_k + z'_k$$

avec :

$$y'_k \perp \mathrm{Vect}(x_{q+1}, \dots, x_{k-1})$$

et :

$$z'_k \in \mathrm{Vect}(x_{q+1}, \dots, x_{k-1}).$$

On a de la même manière :

$$G(x_{q+1}, \dots, x_n) = G(y'_{q+1}) \dots G(y'_n).$$

Or $\mathrm{Vect}(x_{q+1}, \dots, x_{k-1}) \subset \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1})$.

Le vecteur $z_k - z'_k$ appartient à $\mathrm{Vect}(x_{q+1}, \ldots, x_{k-1})$.

Or y_k est orthogonal à $\mathrm{Vect}(x_1, \ \ldots, x_{k-1})$.

Il est orthogonal à $z_k - z'_k$.

$$z_k - z'_k = y_k - y'_k$$
$$(y_k - y'_k \mid y_k) = 0$$
$$(y_k \mid y_k) = (y_k \mid y'_k).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\|y_k\|^2 = (y_k \mid y'_k) \leqslant \|y_k\| \, \|y'_k\|.$$

On en déduit $\|y_k\| \leqslant \| y'_k \|$.

Ceci prouve que :

$$G(y'_{q+1}) \ldots G(y'_n) \geqslant G(y_{q+1}) \ldots G(y_n).$$

Par conséquent :

$$G(x_1, \ldots, x_n) \leqslant G(x_1, \ldots, x_q) G(y'_{q+1}) \ldots, G(y'_n)$$
$$= G(x_1, \ldots, x_q) G(x_{q+1}, \ldots, x_n)$$

L'inégalité est une égalité si, et seulement si :

$G(y'_{q+1}) \ldots G(y'_n) = G(y_{q+1}) \ldots G(y_n)$ ou bien si :

$G(x_1, \ldots, x_q) = G(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

L'inégalité est une égalité si, et seulement si :

$\forall k \in [\![q+1, n]\!] \quad \|y_k\| = \|y'_k\|$ ou bien si :

$G(x_1, \ldots, x_q) = G(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Or :

$\|y_k\| = \|y'_k\| \Leftrightarrow \|z_k\| = \|z'_k\| \Leftrightarrow x_k \perp \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_q)$

L'inégalité est une égalité si, et seulement si :

$\mathrm{Vect}(x_1, \ \ldots, x_q) \perp \mathrm{Vect}(x_{q+1}, \ldots, x_n)$ ou si :

$(x_1, \ldots, x_q)$ est liée.

11 Une inégalité d'Hadamard

1 La famille $(V_1, \ldots, V_n)$ est alors une base orthogonale de $\mathbb{C}^n$.

$M(V_1, \ldots, V_n)$ est la matrice de passage de la base canonique à la base $(V_1, \ \ldots, V_n)$.

La matrice du produit scalaire est :

$$\begin{pmatrix} \|V_1\|^2 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \|V_2\|^2 & 0 \ \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \|V_n\|^2 \end{pmatrix}$$

dans cette base. Par conséquent :

$$\begin{pmatrix} \|V_1\|^2 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \|V_2\|^2 & 0 \ \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \|V_n\|^2 \end{pmatrix}$$
$$= {}^t\overline{M(V_1, \ldots, V_n)} I_n M(V_1, \ \ldots, V_n)$$
$$= {}^t\overline{M(V_1, \ldots, V_n)} M(V_1, \ldots, V_n).$$

Dans ce cas, le module du déterminant de la matrice $M(V_1, \ \ldots, V_n)$ est $\|V_1\| \, \|V_2\| \ldots \|V_n\|$.

2 Pour tout entier i de $[\![2, n]\!]$, $p_{i-1}(V_i)$ est une combinaison linéaire des vecteurs $V_1, \ \ldots, V_{i-1}$.

Or, on ne change pas la valeur d'un déterminant, si on retranche à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

Pour tout i de $[\![2, n]\!]$, on a :

$$\mathrm{Det} M(V_1, \ldots, V_{i-1}, U_i, \ldots, U_n)$$
$$= \mathrm{Det} M(V_1, \ \ldots, V_i, U_{i+1}, \ldots, \ U_n).$$

On obtient :

$$\mathrm{Det} M(V_1, \ldots, V_n) = \mathrm{Det} M(U_1, \ldots, U_n).$$

3 La famille $(U_1, \ldots, U_n)$ a été obtenue à partir de la famille $(V_1, \ldots, V_n)$ par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt. Elle est orthogonale.

D'après la question **1)**, on a :

$$|\mathrm{Det}(U_1, \ldots, U_n)| = \|U_1\| \ U_2\| \ldots \|U_n\|.$$

Or, $\|U_1\| = \|V_1\|$ et, pour tout k de $[\![2, n]\!]$, on a :

$$\|U_k\|^2 = \|V_k\|^2 - \|p_{k-1}(V_k)\|^2 \leqslant \|V_k\|^2.$$

On en déduit :

$$|\mathrm{Det} M(V_1, \ldots, V_n)| \leqslant \|V_1\| \, \|V_2\| \ldots \|V_n\|.$$

Étudions maintenant le cas d'égalité.

Si l'un des V_i est nul, il y a égalité.

Si les vecteurs $V_1, \ldots, V_n$ sont tous non nuls, il y a égalité si, et seulement si, pour tout k de $[\![2, n]\!]$, on a $p_{k-1}(V_k) = 0$. C'est-à-dire si, et seulement si, les $V_1, \ \ldots, V_n$ sont orthogonaux deux à deux.

12 Une propriété du déterminant d'une matrice hermitienne positive

• Montrons que Det A est un réel positif.

D'après l'*exercice* 9, les valeurs propres de A sont des réels positifs.

Le déterminant de A est le produit des valeurs propres. Il est donc réel et positif.

• Montrons que $\mathrm{Det}A \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i,\,i}$.

Soit φ la forme sesquilinéaire hermitienne positive de matrice A dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$.

Alors $\varphi(e_i, e_i) = a_{i,\,i}$. On en déduit que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad a_{i,\,i} \geqslant 0.$$

Par conséquent, $\prod_{i=1}^{n} a_{i,\,i} \geqslant 0$.

Si $\mathrm{Det}A = 0$, on a bien $\mathrm{Det}A \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i,\,i}$.

Si $\mathrm{Det}A \neq 0$, alors A est définie positive.

En effet, soit X dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que ${}^{\mathrm{t}}\overline{X}AX = 0$.

La démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz n'utilise que la positivité.

Donc elle s'applique ici et :

$$\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \quad {}^{\mathrm{t}}\overline{Y}AX = 0.$$

On en déduit $AX = 0$. Or A est inversible.

Par conséquent, $X = 0$.

Dans ce cas, l'application φ est un produit scalaire hermitien. On applique le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à la base $(e_1, \dots, e_n)$. On obtient une nouvelle base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ et la matrice de passage P est triangulaire supérieure.

La matrice de φ dans cette nouvelle base est I_n.

$$A = {}^{\mathrm{t}}\overline{P^{-1}}P^{-1}.$$

D'où $\mathrm{Det}A = \dfrac{1}{(\mathrm{Det}\ P)^2}$.

Or le procédé décrit au cours de cette démonstration permet de construire par récurrence la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ en posant :

$$\varepsilon_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, n-1]\!] \quad \varepsilon_{k+1} = \frac{e'_{k+1}}{\|e'_{k+1}\|}$$

avec $e'_{k+1} = e_{k+1} - q_k(e_{k+1})$, où q_k est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Par conséquent, le terme $p_{k,\,k}$ de P est $p_{k,k} = \dfrac{1}{\|e'_k\|}$.

Donc $\mathrm{Det}A = \prod_{i=1}^{n} \|e'_i\|^2$.

Le *théorème de Pythagore* assure :

$$\begin{aligned}\|e'_i\|^2 &= \varphi(e'_i, e'_i) = \varphi(e_i, e_i) - \varphi(p_{i-1}(x_i), p_{i-1}(x_i)) \\ &\leqslant \varphi(e_i, e_i) = a_{i,\,i}\end{aligned}$$

On en déduit $\mathrm{Det}A \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i,\,i}$.

13 Matrices unitaires

1 Montrons que U_n est un sous-groupe multiplicatif de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout A de U_n, A est inversible et $A^* = A^{-1}$.

Donc $U_n \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

$I_n \in U_n$. Donc $U_n \neq \varnothing$.

Soit A et B quelconques dans U_n.

$$\begin{aligned}(AB^{-1})^*(AB^{-1}) &= (AB^*)^*(AB^*) = (BA^*)(AB^*) \\ &= B(A^*A)B^* = BI_nB^* = BB^* = I_n\end{aligned}$$

Par conséquent, AB^{-1} appartient à U_n.

U_n est bien un sous-groupe multiplicatif de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

Il n'est pas abélien lorsque $n > 1$.

Pour $n \geqslant 2$, considérer la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & \mathrm{I}_{n-2,n-2} \end{pmatrix}$$

et la matrice $$B = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & \mathrm{I}_{n-2,n-2} \end{pmatrix}.$$

U_n n'est pas un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car la matrice nulle n'est pas unitaire.

2 **a)** $\mathrm{Det}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$

Or $\mathrm{Det}(AA^*) = 1$ et $\mathrm{Det}A^* = \overline{\mathrm{Det}A}$.

On en déduit $|\mathrm{Det}A|^2 = 1$.

Donc, il existe un réel θ tel que $ad - bc = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

Ce réel θ est unique à 2π près.

b) On effectue les produits AA^* et A^*A. On montre que $c = -\overline{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $d = \overline{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

On obtient $\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} & \overline{a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \end{pmatrix}$ avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

c) L'égalité $z + z' = Z + \overline{Z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\gamma}$ donne :

$$r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha} - rR(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\beta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\gamma-\beta)}) + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha'} = 0.$$

En divisant par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha'}$, on obtient :

$$r^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\alpha-\alpha')} - 2Rr\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha-\alpha'}{2}}\cos\left(\beta - \frac{1}{2}\gamma\right) + 1 = 0.$$

Le complexe $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha-\alpha'}{2}}$ est l'une des racines du polynôme $X^2 - 2XR\cos\left(\beta - \dfrac{1}{2}\gamma\right) + 1$. Les coefficients sont réels. Donc $re^{-i\frac{\alpha-\alpha'}{2}}$ est la deuxième racine. Le produit des racines est 1. On en déduit $r = 1$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b}e^{i\theta} & \overline{a}e^{i\theta} \end{pmatrix}$ une matrice de U_2.

Notons z et z' les deux valeurs propres de A.

$|\text{Det}A| = 1$. Donc $|zz'| = 1$.

On en déduit que z et z' s'écrivent $e^{i\frac{\alpha-\alpha'}{2}}$ et $e^{-i\frac{\alpha-\alpha'}{2}}$.

D'autre part, $z + z' = \text{Tr}A = a + \overline{a}e^{i\theta}$.

Si $\alpha - \alpha' \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on obtient $|z| = |z'| = 1$ d'après **c)**.

Si $\alpha - \alpha' \in 2\pi\mathbb{Z}$, r est solution de l'équation $X^2 - 2XR\cos(\beta - \alpha) + 1 = 0$. Elle admet une racine réelle si, et seulement si, son discriminant $-\sin^2(\beta-\alpha)$ est positif. Ceci impose $\sin^2(\beta - \alpha) = 0$, puis :

$$\beta \equiv \alpha[\pi].$$

Dans ce cas, la seule solution de l'équation est 1 et $r = 1$.

3 ▬ Notons X et Y les vecteurs colonnes des coordonnées de x et y dans la base canonique de E.

$$\begin{aligned}
&(\forall(x,\ y) \in E \times E \quad (u(x) \mid u(y)) = (x \mid y))\\
&\Leftrightarrow \forall(X,\ Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \quad {}^t\overline{AX}AY = {}^t\overline{X}Y\\
&\Leftrightarrow \forall(X,\ Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \quad {}^t\overline{X}A^*AY = {}^t\overline{X}Y\\
&\Leftrightarrow A^*A = I_n\\
&\Leftrightarrow A \in U_n
\end{aligned}$$

4 ▬ Soit λ et μ deux valeurs propres distinctes de A.

Pour tout x du sous-espace propre de u associé à λ et tout y du sous-espace propre de u associé à μ, on a :

$$(x \mid y) = (u(x) \mid u(y)) = (\lambda x \mid \mu y) = \overline{\lambda}\mu(x \mid y).$$

Or λ est de module 1. Donc $\overline{\lambda} = \dfrac{1}{\lambda}$. Comme $\lambda \neq \mu$, on a $\lambda\overline{\mu} \neq 1$, puis $(x \mid y) = 0$.

Les sous-espaces propres associés à λ et μ sont orthogonaux.

5 ▬ On vérifie que les vecteurs colonnes sont normés et orthogonaux. La matrice U est unitaire.

Recherchons ses valeurs propres.

Le polynôme caractéristique est :

$$(1 - X)(X^2 - \frac{2}{3}(1 + i)X + i).$$

Les valeurs propres sont 1, $e^{i\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{7}i}{3}$ et $e^{i\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{7}i}{3}$. Leur module est 1.

14 Décomposition d'Iwasawa

1 ▬ **a)** On vérifie que T_n est stable par combinaison linéaire, non vide et contenu dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. C'est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Ce n'est pas un groupe multiplicatif puisqu'il existe des éléments non inversibles (0 par exemple).

b) Vérifions que TP_n est un sous-groupe multiplicatif de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

Les matrices de TP_n sont triangulaires inférieures et les termes de la diagonale sont non nuls. Donc :

$$TP_n \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{C}).$$

$I_n \in TP_n(\mathbb{C})$. Par conséquent, $TP_n(\mathbb{C}) \neq \varnothing$.

Soit T et R quelconques dans TP_n.

La matrice R^{-1} est également triangulaire inférieure. En effet, si on supprime la ligne j et la ligne i de la transposée avec $i < j$, on obtient une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale contient 0.

Les cofacteurs d'indice $(i,\ j)$, où $i < j$, sont nuls.

Le produit de deux matrices triangulaires inférieures est une matrice triangulaire inférieure.

La matrice TR^{-1} est triangulaire inférieure et inversible. Elle appartient à TP_n.

L'ensemble TP_n est un sous-groupe multiplicatif de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$.

Ce n'est pas un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ puisqu'il ne contient pas 0.

c Soit V dans $TP_n \cap U_n$.

$V^{-1} \in TP_n$, car TP_n est un groupe.

D'autre part, $V^{-1} = V^*$. On en déduit que V^* est triangulaire inférieure, puis que V est triangulaire supérieure. La matrice V est diagonale.

La matrice diagonale V est unitaire. Donc, pour tout i de $[\![1, n]\!]$, on a $|v_{i,i}|^2 = 1$. De plus $v_{i,i}$ est dans $\mathbb{R}_+^*$. Donc $v_{i,\,i} = 1$. On en déduit $V = I_n$.

2 ▬ Notons B_1, B_2 et B_3 les vecteurs lignes de la matrice B. Ils sont indépendants et forment une base de $\mathbb{C}^3$. Par le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, on obtient trois vecteurs B'_1, B'_2 et B'_3 orthogonaux, tels que :

$$B'_1 = B_1, \quad B'_2 = B_2 + \alpha B_1, \quad \text{et} \quad B'_3 = B_3 + \beta B_2 + \gamma B_1$$

On écrit que les produits scalaires des B'_i pris deux à deux sont nuls.

On obtient $\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{9}$, $\beta = \gamma = 0$.

On normalise les vecteurs B'_1, B'_2 et B'_3.

$$\|B'_1\| = 3, \quad \|B'_2\| = 2 \quad \text{et} \quad \|B_3\| = 1$$

Soit U la matrice de lignes $B_1'' = \frac{1}{3}B_1'$, $B_2'' = \frac{1}{2}B_2'$ et $B_3'' = B_3'$.

$$U = \begin{pmatrix} \frac{2i}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3} & 0 \\ -\frac{i\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle est unitaire (*cf. exercice* 13).

On exprime les changements de bases à l'aide de matrices découpées en blocs.

Soit T la matrice telle que :

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} B_1'' \\ B_2'' \\ B_3'' \end{pmatrix}.$$

On obtient $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{5}}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De plus $\begin{pmatrix} B_1'' \\ B_2'' \\ B_3'' \end{pmatrix} = U$. Donc $B = TU$.

3 Soit C une matrice de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$. Notons $C_1, \dots, C_n$ les vecteurs lignes de C.

a) La matrice C est inversible. Les vecteurs $C_1, \dots, C_n$ sont indépendants. Ils constituent une base de E.

Le procédé d'orthogonalisation de Schmidt assure l'existence d'une base $(W_1, \dots, W_n)$ orthogonale telle que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_k) = \operatorname{Vect}(W_1, \dots, W_k)$$

et $(C_k \mid W_k) \in \mathbb{R}_+^*$.

b) On construit, par récurrence, la famille $(W_1, \dots, W_p)$ en posant :

$$W_1 = \frac{C_1}{\|C_1\|} \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, p-1]\!] \quad W_{k+1} = \frac{C'_{k+1}}{\|C'_{k+1}\|}$$

avec $C'_{k+1} = C_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (W_i \mid C_{k+1}) W_i$.

Or : $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \operatorname{Vect}(C_1, \dots, C_k) = \operatorname{Vect}(W_1, \dots, W_k)$

Donc il existe des scalaires $\beta_{i,j}$ tels que :

$$\forall j \in [\![2, n]\!] \quad C'_j = C_j - \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{i,j} C_i.$$

c) Soit U la matrice ayant pour lignes les vecteurs $\frac{C_i}{\|C_i\|}$.

Elle est unitaire car les vecteurs lignes sont normés et orthogonaux deux à deux.

d) Soit R la matrice définie par :

pour tout $j > i : r_{i,j} = 0$, pour $j = i : r_{i,i} = \frac{1}{\|C_i'\|}$ et pour $j < i : r_{i,j} = \frac{-\beta_{i,j}}{\|C_i'\|}$.

On constate que :

$$\begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix} = U \quad \text{et que} \quad \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

Or $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$. Donc $U = RC$.

e) La matrice R appartient à TP_n. Elle est donc inversible et $S = R^{-1}$ est également dans TP_n.

On a $C = SU$.

Montrons l'unicité d'un tel couple (S, U). Supposons qu'il existe un autre couple (S', U') de $TP_n \times U_n$, tel que $C = S'U'$.

Alors $S'^{-1}S = U'U^{-1}$.

La matrice $S'^{-1}S$ appartient à TP_n, car TP_n est un groupe multiplicatif. De même, $U'U^{-1}$ appartient à U_n.

D'après la question **1) c)**, on a $S'^{-1}S = U'U^{-1} = I_n$. D'où $S = S'$ et $U = U'$.

15 Les endomorphismes normaux

1 **a)** et **b)** Soit X le vecteur colonne des coordonnées de x dans une base orthonormale de E et Y celui de y :

$$(u(x)|y) = {}^t(\overline{AX})Y = {}^t\overline{X}({}^t\overline{A}Y)$$

On en déduit que l'endomorphisme v existe et que sa matrice dans la même base est ${}^t\overline{A}$.

c) Les quatre premiers points sont triviaux. Montrons que $\operatorname{Ker} u^* = (\operatorname{Im} u)^\perp$.

$x \in \operatorname{Ker} u^* \iff u^*(x) = 0$;

$x \in \operatorname{Ker} u^* \iff \forall y \in E (y|u^*(x)) = 0$;

$x \in \operatorname{Ker} u^* \iff \forall y \in E (u(y)|x) = 0$;

$x \in \operatorname{Ker} u^* \iff x \in (\operatorname{Im} u)^\perp$.

On montre que $\operatorname{Im} u^* = (\operatorname{Ker} u)^\perp$ à partir de l'égalité précédente en comparant les dimensions.

On suppose que le sous-espace F est stable par u, montrons que $F^\perp$ est stable par u^*. Soit y dans $F^\perp$. Pour tout x de F on a :

$$(x|u^*(y)) = (u(x)|y) = 0$$

car $u(x)$ est dans F. On en déduit que $u^*(y)$ est dans $F^\perp$.

2 **a)** Montrons **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)**.

Soit x et y quelconques dans E.

$$\begin{aligned}(u(x)|u(y)) &= (x|u^*u(y)) = (x|uu^*(y))\\ &= (u^*(x)|u^*(y)).\end{aligned}$$

En appliquant **(ii)** à $y = x$, on obtient **(iii)**.

Montrons **(iii)** $\Longrightarrow$ **(ii)**.

Soit x et y quelconques dans E.

$$\begin{aligned}(u(x)|u(y)) = &\frac{1}{4}(||u(x)+u(y)||^2 - ||u(y)-u(x)||^2\\ &+\mathrm{i}||u(y)+\mathrm{i}u(x)||^2 - \mathrm{i}||u(y)-\mathrm{i}u(x)||^2)\\ = &\frac{1}{4}(||u(x+y)||^2 - ||u(y-x)||^2 + \mathrm{i}||u(y+\mathrm{i}x)||^2\\ &-\mathrm{i}||u(y-\mathrm{i}x)||^2)\\ = &\frac{1}{4}(||u^*(x+y)||^2 - ||u^*(y-x)||^2\\ &+\mathrm{i}||u^*(y+\mathrm{i}x)||^2 - \mathrm{i}||u^*(y-\mathrm{i}x)||^2).\end{aligned}$$

On en déduit, par linéarité de u^* :

$$(u(x)|u(y)) = (u^*(x)|u^*(y)).$$

Montrons **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)**.

D'après **(ii)**, on a : $\forall x \in E \quad \forall y \in E$

$(x|u^*u(y) - uu^*(y)) = 0.$

Par conséquent, $\forall x \in E \quad u^*u(y) - uu^*(y) = 0_E$.

Puis $uu^* = u^*u$.

b) Soit x quelconque dans E.

$x \in \mathrm{Ker}\, u \Longleftrightarrow u(x) = 0_E \Longleftrightarrow ||u(x)|| = 0.$

D'après **(iii)**, on en déduit :

$$x \in \mathrm{Ker}\, u \Longleftrightarrow ||u^*(x)|| = 0 \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\, u^*.$$

D'où : $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^*$.

• De plus $\mathrm{Im} u = (\mathrm{Ker}\, u^*)^\perp = (\mathrm{Ker}\, u)^\perp$.

Or, $\mathrm{Ker}\, u \oplus (\mathrm{Ker}\, u)^\perp = E$.

Par conséquent, $E = \mathrm{Im} u \oplus \ker u$.

3 **a)** L'endomorphisme $u - \lambda \mathrm{I}_E$ commute avec son adjoint car u est normal. Il est donc normal.

Par conséquent :

$$\mathrm{Ker}\,(u - \mathrm{I}_E) = \mathrm{Ker}\,(u^* - \bar{\lambda}\mathrm{I}_E).$$

On en déduit que $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de u^* et :

$$E_\lambda(u) = E_{\bar{\lambda}}(u^*).$$

D'autre part, $E_{\bar{\lambda}}(u^*)$ est stable par u^* et son orthogonal $E_\lambda(u)^\perp$ est stable par u.

b) Soit x dans $\mathrm{Ker}\,(u - \lambda \mathrm{I}_E)$ et y dans $\mathrm{Ker}\,(u - \mu \mathrm{I}_E)$.

$(u(x)|y) = (\lambda x|y) = \bar{(}x|y)$

$(u(x)|y) = (x|u^*(y))$.

Or $\mathrm{Ker}\,(u - \mu \mathrm{I}_E) = \mathrm{Ker}\,(u^* - \bar{\mu}\mathrm{I}_E)$.

Par conséquent, $(u(x)|y) = (x|\mu y) = \mu(x|y)$

d'où $(\bar{\lambda} - \bar{\mu})(x|y) = 0$.

Or $\bar{\lambda} \neq \bar{\mu}$. Donc $(x|y) = 0$.

En conclusion : $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux.

c) Montrons que, si u est normal, alors il existe une base orthonormale dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Soit $F = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$. Montrons que $F = E$.

Si $F \neq E$. Alors $F^\perp \neq \{0_E\}$.

D'après la question **1)**, le sous espace F est stable par u^*. Donc $F^\perp$ est stable par u.

Soit v la restriction de u à $F^\perp$.

$F^\perp \neq \{0_E\}$. Donc v admet au moins une valeur propre λ complexe.

λ est également une valeur propre de u. Ceci contredit la définition de F.

En conclusion, $E = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ et u est diagonalisable.

Les sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux. On peut construire une base orthogonale dans laquelle la matrice de u est diagonale.

Réciproquement, soit u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ orthonormale dans laquelle la matrice de u est :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots 0 & a_n \end{pmatrix}.$$

La matrice de u^* dans cette même base est :

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots 0 & \bar{a}_n \end{pmatrix}$$

car la base $(e_1, \cdots, e_n)$ est orthonormale.

Ces deux matrices diagonales commutent.

On en déduit que u est un endomorphisme normal.

d) Les valeurs propres a_i ne sont pas nécessairement distinctes. Notons J la partie de $[\![1, n]\!]$ telle que $\mathrm{Sp}(u) = \{a_i \,; i \in J\}$ avec, pour tout i et tout j de J distincts, les complexes a_i et a_j distincts.

On introduit le polynôme d'interpolation de Lagrange P défini par :

$$P(X) = \sum_{i \in J} \left(\bar{a}_i \prod_{\substack{j \in J \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j} \right).$$

Alors : $\forall k \in [\![1, n]\!] \quad P(a_k) = \bar{a}_k$.

On en déduit $\bar{A} = P(A)$. Puis $P(u) = u^*$.

Réciproquement, s'il existe un polynôme P tel que $u^* = P(u)$, on sait que $P(u)$ commute avec u. Par conséquent, u est normal.

e) Si u est normal, il existe une base orthonormale dans laquelle les matrices respectives de u et u^* sont :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots 0 & a_n \end{pmatrix}$$

et

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \bar{a}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \cdots 0 & \bar{a}_n \end{pmatrix}.$$

On en déduit $\mathrm{Tr}(u\, u^*) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$.

Réciproquement, on suppose que :

$$\mathrm{Tr}(u^* u) = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$$

où $a_1, \cdots, a_n$ désignent les valeurs propres de u.

L'endomorphisme u est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

Montrons par récurrence sur la dimension de E qu'on peut trouver une base orthonormale dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

Cette propriété est vérifiée lorsque $\dim E = 1$.

Supposons cette propriété vérifiée pour $\dim E = n$ et pour tout endomorphisme de E.

Soit E un espace hermitien de dimension $n + 1$ et u un endomorphisme de E.

Il existe un hyperplan H stable par u. Alors $E = H \oplus H^{\perp}$.

Il existe une base $(e_1, \cdots, e_n)$ orthonormale dans laquelle la matrice de la restriction de u à H est triangulaire supérieure. Choisissons e_{n+1} unitaire dans $H^{\perp}$. La base $(e_1, \cdots, e_{n+1})$ est orthonormale et la matrice de u est triangulaire supérieure dans cette base.

Appliquons ceci à l'endomorphisme u qui vérifie $\mathrm{Tr}(u^* u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$.

Il existe une base $(e_1, \cdots, e_n)$ orthonormale dans laquelle la matrice de T est triangulaire supérieure de diagonale $(a_1, \cdots, a_n)$.

Dans cette même base, la matrice de u^* est $\bar{T}$.

Notons $T = (t_{i,j})_{i \in [\![1,n]\!], j \in [\![1,n]\!]}$.

Le i-ième terme de la diagonale de $\bar{T}T$ est :

$$|a_i|^2 + \sum_{k=1}^{i-1} |t_{k,i}|^2.$$

Or $\mathrm{Tr}(\bar{T}T) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$.

Ceci n'est possible que si :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \forall k \in [\![1, i-1]\!] \quad t_{k,i} = 0.$$

On en déduit que T est une matrice diagonale.

L'endomorphisme u est normal.

f) On suppose que l'endomorphisme $w \circ v$ est nul. Alors $\mathrm{Im}\, v \subset \mathrm{Ker}\, w$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\, w = (\mathrm{Ker}\, w^*)^{\perp} &= (\mathrm{Ker}\, w)^{\perp} \subset (\mathrm{Im}\, v)^{\perp} \\ &\subset \mathrm{Ker}\, v^* = \mathrm{Ker}\, v. \end{aligned}$$

L'endomorphisme $v \circ w$ normal.

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}((vw)^*(vw)) &= \mathrm{Tr}(w^* v^* v w) = \mathrm{Tr}(v w^* v^* v) \\ &= \mathrm{Tr}(v^* w v v^*) = \mathrm{Tr}((wv)(wv)^*) \\ &= \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 \end{aligned}$$

où $(a_1, \cdots, a_n)$ désignent les valeurs propres de $w \circ v$.

Or, on peut montrer que $w \circ v$ et $v \circ w$ ont les mêmes valeurs propres avec les mêmes ordres de multiplicité.

Donc $v \circ w$ est un endomorphisme normal.

7 Géométrie affine et euclidienne

Ce chapitre est au programme des concours.

Nous vous invitons à réviser le cours étudié en première année.

RAPPELS DE COURS

RÉDUCTION D'UNE CONIQUE

Soit une conique d'équation :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \text{ avec } b \neq 0,$$

pour **réduire l'équation de la conique :**

• on écrit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et on diagonalise la matrice A ;

• on choisit une base orthonormée de vecteurs propres de $A, (\vec{u}, \vec{v})$ et on écrit l'équation de la conique dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$;

• on effectue éventuellement une translation de l'origine, de manière à simplifier les termes de degré 1 dans l'équation de la conique.

Pour **déterminer la nature d'une conique** sans en réduire l'équation, on calcule $\mathrm{Det}(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$:

• si $\mathrm{Det}(A) > 0$, la conique (C) est une ellipse, ou un singleton ou l'ensemble vide ;

• si $\mathrm{Det}(A) < 0$, la conique (C) est une hyperbole ou la réunion de deux droites sécantes ;

• si $\mathrm{Det}(A) = 0$, la conique (C) est une parabole, ou la réunion de deux droites parallèles, ou une droite, ou l'ensemble vide.

RÉDUCTION D'UNE QUADRIQUE

Soit une quadrique d'équation :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx + gx + hy + iz + j = 0.$$

Pour **réduire l'équation de la quadrique** :

• on écrit $A = \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix}$ et on diagonalise la matrice A ;

• on choisit une base orthonormée de vecteurs propres de A, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ et on écrit l'équation de la quadrique dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$; celle-ci est de la forme :

$$\alpha x'^2 + \beta y'^2 + \gamma z'^2 + kx' + ly' + mz' + j = 0$$

où α, β et γ sont les valeurs propres de A associées à $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ respectivement ;

• on effectue éventuellement une translation de l'origine, de manière à simplifier les termes de degré 1 dans l'équation de la quadrique.

É N O N C É S

1 Pour s'entraîner

1 **a)** Déterminer la fonction φ telle qu'une droite d'équation $y = mx + p$ est tangente à la courbe $\mathcal{E}$ d'équation $y = e^x$ si, et seulement si : $p = \varphi(m)$.

b) Déterminer la fonction ψ telle qu'une droite d'équation $y = mx + p$ est tangente à la courbe $\mathcal{L}$ d'équation $y = \ln(x)$ si, et seulement si : $p = \psi(m)$.

c) Déterminer le nombre de tangentes communes aux courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$.

Que peut-on dire de leurs pentes ? Ce résultat était-il prévisible ?

2 On considère quatre droites D_1, D_2, Δ_1 et Δ_2 telles que :

$$D_1 \cap D_2 = \{I\}\ ; \quad \Delta_1 \cap \Delta_2 = \{J\}\ ; \quad I \neq J.$$

Pour simplifier les calculs, on convient de noter, $D_1(x, y)$ ou D_1, l'équation de la droite D_1.

Ainsi : $D_1 = a_1x + b_1y + c_1$.

De même pour les autres droites.

a) Montrer que toute droite passant par I admet une équation de la forme $\alpha D_1 + \beta D_2$, avec $(\alpha, \beta) \neq 0$.

Étudier la réciproque.

b) En déduire une expression simple d'une équation de la droite (IJ).

3 Déterminer les sphères de l'espace tangentes aux plans :

$\mathcal{P}\ :\ x + y - z = 1\ ;\quad \mathcal{Q}\ :\ -2x + y + 3z = 6\ ;$
$\mathcal{R}\ :\ 2x - 3y - z = 5\ ;$

4 **a)** Dans le plan, on considère un cercle $\mathcal{C}$ et cinq points distincts M_1, M_2, M_3, M_4 et M situés sur $\mathcal{C}$.

Montrer que le produit des distances de M aux droites (M_1M_2) et (M_3M_4) est égal au produit des distances de M aux droites (M_1M_3) et (M_2M_4).

b) Qu'en déduire dans le cas de $2n + 1$ points distincts situés sur $\mathcal{C}$?

5 Soit $\mathcal{E}$ un espace euclidien orienté de dimension 3 où $\wedge$ représente le produit vectoriel. Soit quatre vecteurs a, b, c et d de $\mathcal{E}$ tels que a et b soient indépendants, c est orthogonal à a et d orthogonal à b.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c et d pour qu'il existe au moins un vecteur v tel que :

$$a \wedge v = c\ ; \qquad b \wedge v = d.$$

Montrer qu'alors v est unique.

6 Soit $ABCDE$ un polygone régulier convexe du plan euclidien.

a) Calculer le rapport des longueurs AI et AJ où I et J sont respectivement les intersections du segment $[A, C]$ avec les segments $[B, D]$ et $[B, E]$.

b) Donner une équation du second degré, à coefficients entiers, ayant ce nombre pour racine.

Conseils

1) Écrire l'équation de la tangente en un point.
c) Comment sont les courbes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{L}$?
3) Penser aux cercles équidistants de deux droites dans le plan...
4) a) Utiliser le cercle trigonométrique.
5) Calculer de deux manières différentes (a, b, v) pour mettre en évidence une condition...
Pour la réciproque, résoudre d'abord l'équation $a \wedge v = c$...
6) a) Faire une figure. Traquer les valeurs des angles, les triangles isocèles..
Puis utiliser la formule du cours

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

2 Point de Gergonne d'un triangle

Soit ABC un triangle, et A', B', C' trois points appartenant respectivement aux côtés $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, distincts des sommets du triangle. Soit $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ six réels tels que A' est le barycentre de $(B, \alpha), (C, \alpha')$, B' le barycentre de $(C, \beta), (A, \beta')$, C' le barycentre de $(C, \gamma), (A, \gamma')$.

1 Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes si, et seulement si, $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$.

2 Dans cette question, A', B' et C' sont les points de contact du cercle inscrit dans le triangle avec les côtés. Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes. Leur point d'intersection est appelé point de Gergonne du triangle.

Calculer ses coordonnées barycentriques par rapport à A, B, C en fonction des côtés a, b, c du triangle.

Conseil
Utiliser des barycentres.

3 Le théorème de Desargues

Gérard Desargues (1591-1661) propose en 1626, à Paris, sans succès, une approche nouvelle de la géométrie.
Déçu, il retourne à Lyon. Nous lui devons le mot « involution ».

1 Trois droites deux à deux distinctes du plan, d_1, d_2, d_3 sont concourantes en O.

Les points A, A' sur d_1, les points B, B' sur d_2 et les points C, C' sur d_3 sont tels que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, ainsi que les droites (BC) et $(B'C')$.

Montrer, par deux méthodes différentes, que les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles.

2 Même question en supposant maintenant les droites d_1, d_2, d_3 parallèles.

Conseils
1) Regarder le schéma et essayer de le voir à trois dimensions, de l'imaginer dans l'espace...
2) Idem.

4 Paraboloïde hyperbolique

L'espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère l'ensemble S des points M de E dont les coordonnées (x, y, z) dans ce repère vérifient l'équation :

$$z = xy + x + y. \qquad \textbf{(1)}$$

1) Démontrer que l'intersection de S avec un plan parallèle au plan (yOz) est une droite, dont on donnera une représentation paramétrique. Même question avec un plan parallèle au plan (zOx).

2 Démontrer que, par tout point M_0 de S, il passe deux droites (et deux seulement) incluses dans S.

3 On considère un nouveau repère $(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ défini par :

$$\overrightarrow{OO'} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \quad ; \quad \vec{i}' = \vec{i} + \vec{j} \quad ;$$
$$\vec{j}' = \vec{i} - \vec{j} \quad ; \quad \vec{k}' = \vec{k}.$$

a) Établir les formules de changement de repère.

b) Déterminer l'équation de S dans le nouveau repère.

c) Quelles sont les intersections de S avec des plans parallèles à $(y'\,O\,z')$, $(z'\,O\,x')$ et $(x'\,O\,y')$?

Conseil
2) On pourra chercher un vecteur $\vec{u}$ tel que pour tout réel k, le point $M_0 + k\vec{u}$ appartienne à S.

5 Intersection d'un tétraèdre et d'un plan

Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace affine $\mathcal{E}$ définissant un tétraèdre $[ABCD]$.

On appelle I, J, K les isobarycentres respectifs des triplets (A, B, C), (B, C, D) et (D, A, B) et Π le plan défini par I, J, K.

1 Démontrer que les droites (IK) et (CD) sont parallèles.

2 Démontrer que le plan Π et le plan $\mathcal{P} = (ACD)$ sont parallèles.

3 Démontrer que le plan Π et le plan $\mathcal{Q} = (BCD)$ sont sécants et préciser leur intersection.

4 En déduire la détermination et la construction de la section du tétraèdre $[ABCD]$ par le plan Π.

5 Soit G l'isobarycentre du triplet (I, J, K). Démontrer que la droite (BG) passe par L, isobarycentre du triplet (A, C, D).

Conseils
1) Plusieurs méthodes sont possibles.
Écrire une relation vectorielle liant les points I, A, B, C, puis K, A, B, D.
2) Regarder les plans vectoriels associés aux plans affines...
3) Utiliser J et la première question.
4) Regarder l'intersection de Π et de chacune des faces du tétraèdre.
5) Utiliser des barycentres. La droite (BG) est l'ensemble des barycentres de B et G .

6 Quadrilatère tangent à une sphère

L'espace $\mathbb{R}^3$ est un espace euclidien.

Un quadrilatère $(ABCD)$ de l'espace est tangent à une sphère $(\mathcal{S})$.

Nous allons montrer que les points de tangence sont coplanaires.

Nous supposerons que le quadrilatère n'est pas contenu dans un plan.

Les quatre points A, B, C et D forment un repère quelconque de l'espace.

Nous allons travailler avec des coordonnées barycentriques dans ce repère.

Lorsque M est barycentre de $((A, x), (B, y), (C, z), (D, t))$, avec la condition $x+y+z+t \neq 0$, on dit que (x, y, z, t) est un système de coordonnées barycentriques du point M.

1 On considère quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4 de coordonnées barycentriques (x_i, y_i, z_i, t_i) pour i dans $[\![1, 4]\!]$.

Montrer que les quatre points sont coplanaires si, et seulement si :

$$\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_4 \\ y_1 & \cdots & y_4 \\ z_1 & \cdots & z_4 \\ t_1 & \cdots & t_4 \end{vmatrix} = 0.$$

2 Donner la forme de l'équation de la sphère en coordonnées barycentriques.

3 Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la droite (AB) soit tangente à $(\mathcal{S})$.

Donner les coordonnées du point de tangence.

4 Démontrer que les points de tangence sont coplanaires.

5 Que remarquez-vous ?

Conseils

1) Les points $M_1, \ldots, M_4$ sont coplanaires si, et seulement si, l'un d'entre eux est barycentre des trois autres.
Supposer M_4 barycentre de M_1, M_2, M_3 et l'écrire comme barycentre de A, B, C, D...
2) La sphère de centre I et de rayon R est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{IM}^2 = R^2$.
Mais le repère n'est pas orthonormé....
3) La droite (AB) est l'ensemble des barycentres de A et B.
Chercher une condition sur les coefficients $a, b, c, \cdots$ apparus dans l'équation de la sphère pour que la droite soit tangente à S.
4) Utiliser la question **1)**.
5) Regarder l'équation établie dans la question **2)**.

7 Des distances dans l'espace

d_1 et d_2 sont deux droites de l'espace euclidien non coplanaires, k, a, deux réels.

1 Montrer qu'il existe une droite δ, et une seule, perpendiculaire à d_1 et d_2.

La préciser.

2 Déterminer l'ensemble des points M tels que :
$d(M, d_1)^2 + kd(M, d_2)^2 = a$.

Conseils

1) Classique. À savoir faire **ABSOLUMENT**.
2) Choisir le repère.
La droite δ rencontre d_1 en B et d_2 en C.
Notons O le milieu de $[B, C]$ et prenons pour axe (Oz) la droite (BC).
Les droites d_1, d_2 se projettent en d_1', d_2' sur le plan passant par O et perpendiculaire à (BC).
Choisir les axes $(x'x)$ et $(y'y)$.

8 Cercle, projection et perpendiculaires

D'après Ensam.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $a > 0$ une constante réelle et u un paramètre décrivant $\mathbb{R}$. On considère un point variable M défini par son affixe ae^{iu} et $\mathcal{C}$ le cercle décrit par le point M.

1 **a)** On désigne par P et Q les projections orthogonales de M sur les axes et par H le projeté orthogonal de l'origine sur la droite (PQ).

Déterminer, en fonction de u, les coordonnées du point H.

b) La tangente en M au cercle $\mathcal{C}$ coupe, en général, les axes en U et V. Soit alors W le point se projetant orthogonalement en U et V sur les axes.

Déterminer, en fonction de u, les coordonnées du point W.

Que peut-on dire de la position relative des points O, H, W ?

2 Soit $\mathcal{R}$ la courbe décrite par W (que l'on ne demande pas de construire).

On mène par O la perpendiculaire à la tangente à $\mathcal{R}$ en W, cette droite coupant la droite (PQ) en I.

a) Déterminer, en fonction de u, les coordonnées du point I.

b) Montrer que les droites (PQ) et (IM) sont perpendiculaires.

Conseils

1) Faire une figure et contrôler vos calculs.
a) Caractériser le projeté orthogonal H.

9 Suite de cercles

1 On considère, dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé, un ensemble de cercles définis par :

(i) $\mathcal{C}$ est centré en $(0,1)$ et passe par $(0,0)$;

(ii) $\mathcal{C}'$ est tangent extérieurement à $\mathcal{C}$, tangent à l'axe $(x'x)$ et centré en A d'abscisse $a>0$;

(iii) $\mathcal{C}''$ est tangent extérieurement à $\mathcal{C}$ et à $\mathcal{C}'$, tangent à l'axe $(x'x)$ et centré en B d'abscisse $b<a$.

Montrer qu'il existe une fonction φ d'expression très simple telle que : $b=\varphi(a)$.

Calculer les rayons de $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ en fonction de a.

2 Étudier la suite définie par : $a_0=a$, $a_{n+1}=\varphi(a_n)$.

Conseil

Commencer par la figure, puis exprimer que deux cercles sont tangents extérieurement...

10 Cercle, tangente et lieu de points...

D'après ESTP.

a désigne une constante positive donnée $(0<a)$.

On munit $\mathbb{R}^2$ euclidien d'un repère orthonormé d'axes (Ox) et (Oy) et on considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation :

$x^2+y^2-2ax=0.$

Deux points P et Q décrivent l'axe des y de façon que $\overline{OQ}=2\overline{OP}$.

De P et Q, on peut en général mener deux tangentes à $\mathcal{C}$ autres que (Oy), et se coupant en M.

Déterminer l'ensemble Γ des positions de M quand P décrit l'axe des y .

Préciser la nature de Γ.

Conseils

Plusieurs démarches sont possibles...
Nous vous proposons la suivante :
– paramétrer le cercle,
– donner l'équation de la tangente en un point du cercle,
– déterminer l'intersection de cette tangente avec l'axe $(y'y)$,
– à vous de jouer.....

11 Vecteurs unitaires dans l'espace faisant entre eux un angle fixe

L'espace affine euclidien est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1 Déterminer trois vecteurs unitaires faisant entre eux des angles de mesure $\dfrac{\pi}{4}$.

2 Déterminer l'ensemble des réels α de $[0,\pi]$ tels qu'il existe trois vecteurs unitaires faisant entre eux des angles de mesure α.

Conseils

1) Considérer un tétraèdre déterminé par les trois vecteurs...
2) Fixer la base (triangle équilatéral) d'un tel tétraèdre et faire varier le sommet de manière à conserver trois faces égales...

12 Produit vectoriel et équation

A,B,C,D sont quatre points de l'espace affine euclidien et a,b, deux scalaires réels non tous deux nuls.

L'objectif de l'exercice est de trouver l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M vérifiant la condition :

$$a\left(\overrightarrow{MA}\wedge\overrightarrow{MB}\right)=b\left(\overrightarrow{MC}\wedge\overrightarrow{MD}\right).$$

1 Déterminer $\mathcal{E}$ lorsque les points A,B,C,D ne sont pas coplanaires.

2 Déterminer $\mathcal{E}$ lorsque les points A,B,C,D sont coplanaires.

Conseils

1) Distinguer les cas :
M appartient à (AB) ;
M appartient à (CD) ;
M n'appartient ni à (AB), ni à (CD).
2) Transformer la condition imposée en écrivant $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}$,...

13 Tétraèdre équifacial

$ABCD$ est un tétraèdre équifacial, c'est-à-dire que ses quatre faces ont la même aire.

Nous allons montrer que les faces sont égales.

1 Appelons I le milieu de $[C,D]$, H le projeté orthogonal de I sur (AB), C' et D' les projetés orthogonaux de C,D sur (AB).

Montrer que $CC'=DD'$.

2 Montrer que H est le milieu de $[C', D']$.

3 Quelle est la perpendiculaire commune aux droites (CD) et (AB) ?

4 Conclure.

Conseils

1) Égalité des aires...
2) Considérer $\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB} = 0$ et utiliser la relation de Chasles.
3) Montrer que $HC = HD$.

14 Le théorème du papillon

1 (C) est le cercle de centre I et de rayon R et P un point quelconque du plan.

Une droite (D) passant par P recoupe le cercle en M, N.

Montrer que $\overline{PM}\,\overline{PN} = PI^2 - R^2$.

Examiner le cas où la droite (MN) est une tangente à (C) passant par P.

Le réel $PI^2 - R^2$ ne dépend que de la distance de P à (C). Il est appelé puissance de P par rapport à (C).

2 *Théorème du papillon*

$(\mathcal{C})$ est un cercle du plan et K un point intérieur à $(\mathcal{C})$. Trois cordes du cercle, $[AB]$, $[ST]$ et $[MN]$ passent par K et K est le milieu de $[AB]$. Les cordes $[MT]$ et $[SN]$ recoupent respectivement en P, Q les segments $[KA]$ et $[KB]$.

Montrer que K est le milieu de $[PQ]$.

3 Six points distincts A, A', B, B', C, C' du plan appartiennent à une même conique $(\mathcal{C})$.

On suppose qu'il existe un point P tel que :

$$\overline{PA}\;\overline{PA'} = \overline{PB}\;\overline{PB'} = \overline{PC}\;\overline{PC'}.$$

Montrer que cette conique est un cercle.

Conseils

1) Ramener à un produit scalaire et utiliser la relation de Chasles avec le milieu J de $[M, N]$.
2) Une méthode possible parmi d'autres....
choisir un repère de centre K, dont l'axe $(y'y)$ contient A, B ;
déterminer les coordonnées de M en fonction de celles de N, puis celles de S en fonction de celles de T ;
calculer l'ordonnée de P, Q qui sont des barycentres...
3) Choisir un repère du plan d'origine P qui simplifie l'équation de la conique, puis écrire qu'il existe trois droites passant par P et rencontrant $\mathcal{C}$ en des points tels que $\overline{PA}\;\overline{PA'} = \overline{PB}\;\overline{PB'} = \overline{PC}\;\overline{PC'}$...

15 Affixes des racines d'un polynôme

D'après E4A.

$\mathcal{P}$ désigne le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont n points distincts deux à deux de $\mathcal{P}$ dont les affixes respectives sont notées $a_1, a_2, \cdots, a_n$. $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points $A_1, A_2, \cdots, A_n$.

On note $\Gamma(\mathcal{E})$ l'ensemble des points M de P n'appartenant pas à $\mathcal{E}$ et vérifiant la relation :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(MA_k)^2}\overrightarrow{MA_k} = \vec{0}.$$

1 Soit M un point de $\mathcal{P}$, n'appartenant pas à $\mathcal{E}$, d'affixe z. Montrer que M appartient à $\Gamma(\mathcal{E})$ si, et seulement si, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - a_k} = 0$.

2 On considère le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k).$$

a) On pose $R(X) = \dfrac{Q'(X)}{Q(X)}$.

Déterminer la décomposition en éléments simples de $R(X)$ dans le corps $\mathbb{C}(X)$.

b) En déduire que $\Gamma(\mathcal{E})$ est l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ dont l'affixe z est racine du polynôme Q'.

c) En déduire que si p est le nombre d'éléments de $\Gamma(\mathcal{E})$, on a : $1 \leqslant p \leqslant n - 1$.

d) Dans le cas particulier où $n = 2$, préciser $\Gamma(\mathcal{E})$.

Dans la suite de l'exercice, on suppose $n \geqslant 3$.

3 Soit r une rotation du plan $\mathcal{P}$. Établir que : $r\big(\Gamma(\mathcal{E})\big) = \Gamma\big(r(\mathcal{E})\big)$.

On dit que l'ensemble $\mathcal{E}$ forme un polygone régulier à n côtés si, et seulement s'il est invariant par une rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$

4 Montrer que si $\mathcal{E}$ forme un polygone régulier, alors $\Gamma(\mathcal{E})$ est réduit à un seul point que l'on précisera.

5 Réciproquement, montrer que si $\Gamma(\mathcal{E})$ est un singleton, alors $\mathcal{E}$ forme un polygone régulier (on pourra commencer par déterminer le polynôme Q').

6 Dans cette question, on suppose $n = 3$, $a_1 = \alpha + i\beta$, $a_2 = \alpha - i\beta$, $a_3 = -2\alpha$ où α et β sont des réels strictement positifs.

a) Déterminer les affixes des éléments de $\Gamma(\mathcal{E})$. Vérifier les résultats établis aux questions **4)** et **5)**.

b) On note (x, y) le couple des coordonnées d'un point M de $\mathcal{P}$. On suppose que $\alpha\sqrt{3} > \beta$. Soit (ε) l'ellipse de $\mathcal{P}$ d'équation : $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{3y^2}{\beta^2} = 1$.

(i) Indiquer les coordonnées des foyers de (ε).

(ii) Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de (ε). Déterminer l'équation de la tangente en M_0 à l'ellipse (ε).

(iii) Démontrer que l'ellipse (ε) est tangente aux trois côtés du triangle $A_1A_2A_3$ en leurs milieux.

Conseils

2) a) Considérer un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur lequel $Q(x) > 0$. Puis dériver $\ln Q$.
3) Utiliser **2) b)**.
4) Montrer que $r(\Gamma(\mathcal{E})) = \Gamma(\mathcal{E})$ et regarder le cardinal de $\Gamma(\mathcal{E})$.
5) Utiliser **2) b)**.

16 Triangles équilatéraux ayant leurs sommets sur une hyperbole

D'après E4A.

$\mathcal{P}$ désigne le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, k est un réel strictement positif. On note (x, y) les coordonnées d'un point M de $\mathcal{P}$.

Soit (γ) l'hyperbole équilatère d'équation cartésienne : $xy = k$.

1 On considère trois points A, B, C de (γ), deux à deux distincts, dont les abscisses sont notées respectivement a, b, c.

a) Déterminer les coordonnées (α, β) du centre de gravité G du triangle ABC.

b) Déterminer les coordonnées (λ, μ) de l'orthocentre H du triangle ABC.

Vérifier que H appartient à (γ).

2 On suppose, dans cette question, que ABC est un triangle équilatéral.

a) Que peut-on dire de G et H ?

b) Montrer que a, b, c sont les racines du polynôme $P(X)$ avec :

$$P(X) = X^3 - 3\lambda X^2 - 3\frac{k^2}{\lambda^2}X + \frac{k^2}{\lambda}.$$

c) On appelle sommets de (γ) les points d'intersection de (γ) avec la droite d'équation $y = x$. On suppose que H n'est pas l'un des sommets de (γ).
Montrer que l'intersection du cercle circonscrit au triangle ABC avec (γ) contient un point D distinct de A, B, C.
Préciser les coordonnées de D.

3 Soit r un réel non nul et $Q(X)$ le polynôme défini par :

$$Q(X) = X^3 - 3rX^2 - 3\frac{k^2}{r^2}X + \frac{k^2}{r}.$$

a) Déterminer le signe du produit $Q(0)Q(r)$.
En déduire que $Q(X)$ admet trois racines réelles deux à deux distinctes et non nulles notées r_1, r_2, et r_3.

b) Soit R_1, R_2 et R_3 les points de (γ) d'abscisses respectives r_1, r_2 et r_3.
Démontrer que le triangle $R_1R_2R_3$ est équilatéral.

4 Donner une construction géométrique permettant d'obtenir tous les triangles équilatéraux dont les sommets appartiennent à (γ).

Conseils

1) b) Écrire les équations de deux hauteurs.
2) b) Utiliser les relations entre coefficients et racines.
2) c) Écrire l'équation du cercle, sans rompre la symétrie entre A, B, C.
3) b) Utiliser encore les relations entre coefficients et racines.
4) Pour r fixé, comment construire le triangle équilatéral associé ?

17 Établissement de l'orbite d'une étoile double

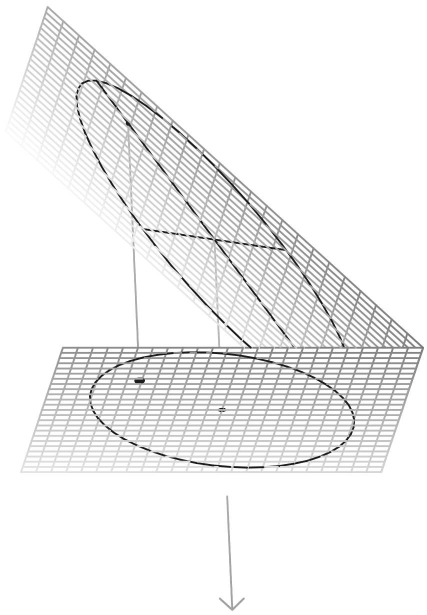
Préliminaire

Soit (E) une ellipse. Étudier le lieu du milieu d'une corde parallèle à une droite donnée. Que dire si cette corde est parallèle à un axe de l'ellipse ?

Un peu d'astronomie

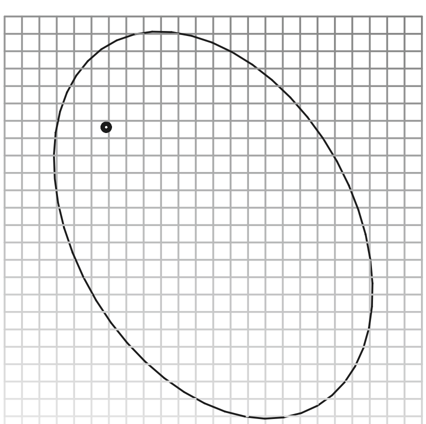
Une étoile double est un système de deux étoiles proches, qui gravitent autour de leur centre de gravité. Par un changement de référentiel, on peut considérer que l'une des deux étoiles, Σ, est fixe et que la deuxième, Σ', parcourt une ellipse $(\mathcal{E})$ dont l'un des foyers est Σ. On note Ω le centre de l'ellipse $(\mathcal{E})$, et Π son plan.

Depuis la Terre, cette orbite est vue en perspective, ce qui ne permet pas de mesurer directement ses différents paramètres. L'image de l'orbite dans un téléscope terrestre est l'image (E) de l'ellipse $(\mathcal{E})$ par la projection orthogonale p sur un plan (P) perpendiculaire à la direction Terre-Étoile. On note S, S' les projetés respectifs des points Σ, Σ'. On désigne par Δ la droite intersection des plans P et Π.



Doc. 1

Une série de photographies sur une période de révolution donne la figure ci-dessous, où S est l'image de l'étoile fixe Σ et (E) celle de l'orbite de Σ' (l'échelle est de 1 cm pour 1 seconde d'arc, angle vu depuis la Terre) :



Doc. 2

Toutes les constructions demandées dans le problème concernent cette figure, que l'on reproduira avec soin (dans un concours, elle serait donnée en document annexe).

1 Montrer que (E) est encore une ellipse. Le point S est-il un foyer de (E) ?

2 Montrer que le centre de (E) est le point O, image de Ω par la projection p. Proposer une méthode de construction géométrique du point O. Construire les images par p des axes de l'ellipse $(\mathcal{E})$.

3 Déduire des constructions précédentes une valeur approchée de l'excentricité e de l'ellipse $(\mathcal{E})$.

4 Montrer que l'on peut alors construire point par point l'image (C) du cercle principal (Γ) de l'ellipse $(\mathcal{E})$ par la projection p. Quelle est la nature de la courbe (C) ?

5 En cherchant les cercles de centre O tangents à (C) (ce n'est pas une construction géométrique rigoureuse, mais seulement approchée), déterminer la droite passant par O et parallèle à Δ.

En déduire une valeur approchée du demi-grand axe a de l'ellipse $(\mathcal{E})$, puis de son demi-petit axe b et de sa demi-distance focale c.

6 Construire la perpendiculaire à Δ passant par O. En déduire une valeur approchée de l'angle i des plans P et Π.

7 On désigne par α une mesure de l'angle des droites Δ et $(\Omega\Sigma)$, et β une mesure de l'angle des droites Δ et (OS). Montrer que :

$$\tan\beta = \tan\alpha \, \cos i .$$

En déduire une valeur approchée de l'angle α.

8 Représenter l'orbite $(\mathcal{E})$ dans son plan, en faisant figurer la droite passant par Σ et parallèle à Δ (appelée ligne des nœuds).

Conseils

Une ellipse est l'image d'un cercle par une affinité.
2) Utiliser le résultat de la question préliminaire.
3) Si une projection ne conserve pas les longueurs, elle conserve les rapports de longueur.
4) Encore une affinité...
6) et **7)** Utiliser des projections.

18 Les théorèmes de Pappus et de Pascal

Ce problème a pour but la démonstration des théorèmes de Pappus et de Pascal.

À cette fin, nous manipulerons des équations de courbes sous une forme simplifiée, avec un minimum de coordonnées analytiques.

On appelle polynôme des variables X, Y une application A de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, qui à (n, m) associe $A(n, m) = a_{nm}$, et telle que $\{(n, m); a_{nm} \neq 0\}$ est fini. On note alors :

$$A(X, Y) = \sum_{(n,m)} a_{nm} X^n Y^m.$$

Le polynôme nul est la fonction nulle.

Si un polynôme A est non nul, on appelle degré de A l'entier :

$$d = \max\{n + m\,;\, a_{nm} \neq 0\}.$$

On associe à tout polynôme A des variables X, Y la fonction polynôme, notée également A :

$$\begin{aligned} A \,:\, \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto A(x, y). \end{aligned}$$

Par exemple : $X^2Y - 3XY^3$ est un polynôme des variables X, Y.

La fonction polynôme associée est définie par :

$$A(x, y) = x^2y - 3xy^3.$$

On identifie, pour simplifier le langage, polynôme et fonction polynôme.

Si x_0 est fixé, la fonction $(y \to A(x_0, y))$ est une fonction polynôme de la variable y.

De même si on fixe y_0.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On appelle courbe algébrique définie par le polynôme A l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $A(x, y) = 0$. Cette courbe est notée A.

Ainsi, la droite $d = x - y + 2$, le cercle $C = 2(x^2 + y^2)$, le couple de droites $A = (x - y - 4)(x + 2y + 5)$ sont des courbes algébriques. Une conique est une courbe algébrique définie par un polynôme de degré 2.

1 Montrer que les droites d_1, d_2 et d_3 sont parallèles ou concourantes si, et seulement s'il existe trois réels non tous nuls λ_1, λ_2 et λ_3 tels que $\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3 = 0$.

2 Montrer que les droites d_1 et d_2 sont parallèles ou perpendiculaires si, et seulement s'il existe deux réels non tous nuls λ_1 et λ_2 tels que $\lambda_1 d_1^2 + \lambda_2 d_2^2$ soit un cercle.

3 **a)** Montrer que, si C est un polynôme de degré $n > 0$, et d une droite dont $n + 1$ points appartiennent à C, alors d est contenue dans C.

b) Montrer que la droite d est contenue dans la courbe C si, et seulement s'il existe une courbe algébrique A telle que $C = dA$.

c) Ce résultat est-il encore exact si une courbe algébrique quelconque est substituée à d ?

4 Soit d_1 et d_2 deux droites sécantes en un point P et C une courbe algébrique.

Montrer que C est tangente à d_2 en P si, et seulement s'il existe un réel λ et un polynôme A tels que :

$$C = \lambda d_1^2 + d_2 A.$$

5 Soit (d_1, d_2) et (d_3, d_4) deux couples de droites sécantes définissant les quatre points A, B, C et D.

Montrer que les coniques passant par ces quatre points sont les courbes :

$C = \lambda d_1 d_2 + \mu d_3 d_4$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

6 **a)** On donne deux droites d_1 et d_2 se coupant en un point A. Montrer qu'une droite d passe par A si, et seulement s'il existe deux réels non tous deux nuls λ, μ tels que $d = \lambda d_1 + \mu d_2$.

b) On donne deux droites d_1 et d_2 se coupant en un point A, et deux droites d_3 et d_4 se coupant en un point B distinct de A. À chaque droite $d = \lambda d_1 + \mu d_2$ passant par A, on associe la droite $d' = \lambda d_3 + \mu d_4$ passant par B.

Quelle est la courbe décrite par le point d'intersection M de d et d' ?

7 **a)** C est un cercle, t_1 et t_2 deux droites tangentes au cercle en T_1 et T_2 respectivement.

On note d la droite (T_1T_2).

Montrer qu'il existe λ tel que $C = \lambda d^2 + t_1 t_2$.

b) Les droites t_3, t_4 sont deux autres tangentes au cercle en T_3, T_4 respectivement.

On note d' la droite (T_3T_4).

On note A, B, C, D les points d'intersection respectifs de t_1 et t_3, t_1 et t_4, t_2 et t_4, t_2 et t_3.

Montrer que les points A, B, C, D sont cocycliques si, et seulement si, les droites d, d' sont perpendiculaires ou parallèles.

8 On appelle cubique toute courbe définie par un polynôme de degré 3.

a) Soit Γ une cubique, d une droite coupant Γ en A, B, C, d' une droite coupant Γ en A', B', C'.

Les points A, B, C, A', B', C' sont supposés distincts.

On appelle A'', B'', C'' les points où les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ recoupent Γ.

Montrer que A'', B'', C'' sont alignés.

b) Γ, d, d' étant donnés, combien d'alignements obtient-on avec ce théorème ?

c) *Le théorème de Pappus*

On considère trois droites distinctes δ_1, δ_2 et δ_3.

Deux droites d et d' rencontrent ces trois droites en A, B, C et B', C', A' respectivement.

On appelle A'', B'', C'' les points d'intersection respectifs de (AA') et δ_2,(BB') et δ_3, (CC') et δ_1.

Montrer que les points A'', B'' et C'' sont alignés.

9 *Le théorème de Pascal*

On considère une conique C non réduite à l'ensemble vide, un point, une ou deux droites.

M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 et M_6 sont six points distincts de cette conique.

On note I, J, K les points d'intersection respectifs de (M_1M_2) et (M_4M_5),(M_2M_3) et (M_5M_6),(M_3M_4) et (M_6M_1).

Montrer que les points I, J, K sont alignés.

Conseils

1) Noter $d_1 = u_1x+v_1y+h_1$; $d_2 = u_2x+v_2y+h_2$; $d_3 = u_3x + v_3y + h_3$ et regarder le système :

$$\begin{cases} d_1 = 0 \\ d_2 = 0 \\ d_3 = 0 \end{cases}.$$

2) Mêmes notations...

3) a) Choisir un repère tel que la droite d soit l'axe $(x'x) : d = y$.

b) Idem.

4) Choisir votre repère...

5) Même conseil pour commencer.

Puis considérer une conique :

$$K = ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey$$

passant par les quatre points.

Et chercher λ,μ tels que : $C = \lambda d_1d_2 + \mu d_3d_4$.

Ne pas oublier la réciproque.

6) b) Les coordonnées de M vérifient le système...

7) a) Utiliser la question **5)** et regarder le degré de A.

7) b) Utiliser **7) a)** pour exprimer C, puis **5)** pour écrire l'équation générale d'une conique passant par les quatre points. À quelle condition une telle conique est-elle un cercle ? La question **2)** peut vous aider...

8) a) Considérer le polynôme $Q = \Gamma - \lambda abc$ où λ est tel que $Q(P) = 0$, avec P le point d'intersection de d et d'.

Puis utiliser la question **3)**.

c) Utiliser la cubique $\delta_1\delta_2\delta_3$.

9) Considérer la cubique $\Gamma = C\delta$, avec δ la droite (IK).

Puis appliquer la question **8) a)**.

19 Cône de révolution contenant une ellipse

Donner la nature du lieu des sommets des cônes de révolution contenant une ellipse d'excentricité $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Conseil

Quel est le lien entre le sommet du cône et le grand axe de l'ellipse ?

20 Ensemble de normales à une surface

Soit S la surface d'équation cartésienne $z = \operatorname{Arctan}\frac{y}{x}$.

Trouver l'équation de l'ensemble des normales à S aux points de l'axe (Ox).

Conseil

Écrire l'équation implicite de la surface S pour trouver une expression simple du vecteur normal en un point.

21 Une surface de révolution

Équation de la surface de révolution d'axe D d'équations $x = y$ et $z = 0$ et de directice la courbe C d'équations $xy = 1$ et $z = 0$.

Conseil

Deviner l'allure géométrique de cette surface. Puis, se placer dans un repère adapté.

CORRIGÉS

1 Pour s'entraîner

1 **a)** La tangente à la courbe E au point d'abscisse x_0 a pour équation :

$$y = \mathrm{e}^{x_0}x + \mathrm{e}^{x_0} - \mathrm{e}^{x_0}x_0.$$

Nous en déduisons : $p = \varphi(m) = m(1 - \ln(m))$.

b) De même, la tangente à la courbe L au point d'abscisse x_0 a pour équation :

$$y = \frac{x}{x_0} - 1 + \ln(x_0).$$

D'où :

$$p = \psi(m) = -1 - \ln(m).$$

c) Étudions la fonction $\varphi - \psi$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$z(m) = \varphi(m) - \psi(m) = m(1 - \ln(m)) + 1 + \ln(m)$.

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

m	0	1	2		$+\infty$
$z''(m)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$z'(m)$	$+\infty$	1	$-$		$-\infty$
$z(m)$	$-\infty$	$+$	$+$		$-\infty$

La fonction $\varphi - \psi$ s'annule deux fois sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Il existe donc deux tangentes communes aux courbes E et L.

Or, les fonctions qui définissent ces graphes sont réciproques l'une de l'autre.

Les graphes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

On peut conjecturer qu'il en est de même de ces tangentes car le symétrique de l'une sera encore tangente aux deux courbes. La vérification en est très simple.

Soit m tel que $\varphi(m) - \psi(m) = 0$. Alors :

$$m - m\ln(m) + 1 + \ln(m) = 0.$$

Donc : $\dfrac{1}{m}(m - m\ln(m) + 1 + \ln(m)) = 0$.

Soit : $1 + \ln\left(\dfrac{1}{m}\right) + \dfrac{1}{m} - \dfrac{1}{m}\ln\left(\dfrac{1}{m}\right) = 0$.

Le réel $\dfrac{1}{m}$ est donc aussi solution. Deux droites symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ ont leurs pentes inverses l'une de l'autre.

2 **a)** Soit D une droite passant par I, distincte de D_1 et D_2 car si D est l'une de ces droites, le résultat est immédiat.

Notons $K(x_0, y_0)$ un point de D distinct de I.

L'équation $\alpha D_1(x_0, y_0) + \beta D_2(x_0, y_0) = 0$ comporte deux inconnues α, β et les coefficients $D_1(x_0, y_0)$, $D_2(x_0, y_0)$ sont non nuls. Elle admet des solutions non nulles. Vérifier que, si (α, β) est l'une de ces solutions, l'ensemble d'équation $\alpha D_1 + \beta D_2$ est bien une droite. Le coefficient de x ou celui de y est non nul.

Réciproquement, si α et β sont deux réels tels que l'équation $\alpha D_1 + \beta D_2$ soit celle d'une droite, cette droite passe par I.

b) Si J est sur D_1, L'équation de D_1 convient.

Sinon, on cherche α et β tels que :

$$\alpha D_1(x_J, y_J) + \beta D_2(x_J, y_J) = 0.$$

Puisque $D_1(x_J, y_J) \neq 0$, on peut supposer que : $\beta = 1$.

On obtient :

$$D_2(x_J, y_J)D_1(x, y) - D_1(X_J, y_J)D_2(x, y) = 0$$

3 Les trois plans sont sécants en I.

Vous savez depuis le collège que l'ensemble des centres des cercles du plan tangents à deux droites sécantes données est la réunion des deux bissectrices de ces droites.

De même, si un point est équidistant des trois plans, il appartient au plan bissecteur de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, et au plan bissecteur de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$. Réciproquement, tout point appartenant à ces plans bissecteurs est équidistant des trois plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$. Il est donc le centre d'une sphère tangente aux trois plans.

Déterminons une équation des plans $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ bissecteurs de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.

$M \in \mathcal{B} \bigcup \mathcal{B}'$

$$\iff \frac{|x + y - z - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{|-2x + y + 3z - 6|}{\sqrt{14}}$$

$$\iff 14(x + y - z - 1)^2 = 3(-2x + y + 3z - 6)^2$$

$$\iff \left[\sqrt{14}(x + y - z - 1) + \sqrt{3}(-2x + y + z - 6)\right]$$

$$\left[\sqrt{14}(x + y - z - 1) - \sqrt{3}(-2x + y + z - 6)\right] = 0.$$

Les deux plans bissecteurs $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ ont pour équations :

$\mathcal{B}$ $\sqrt{14}(x+y-z-1)+\sqrt{3}(-2x+y+z-6)=0.$

$\mathcal{B}'$ $\sqrt{14}(x+y-z-1)-\sqrt{3}(-2x+y+z-6)=0.$

Déterminons une équation des plans $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ bissecteurs de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$.

$$\begin{aligned} &M \in \mathcal{C} \bigcup \mathcal{C}' \\ &\iff \quad \frac{|x+y-z-1|}{\sqrt{3}} = \frac{|2x-3y-z-5|}{\sqrt{14}} \\ &\iff \quad 14(x+y-z-1)^2 = 3(2x-3y-z-5)^2. \end{aligned}$$

Les deux plans bissecteurs $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ ont pour équations :

$\mathcal{C}$ $\sqrt{14}(x+y-z-1)+\sqrt{3}(2x-3y-z-5)=0.$

$\mathcal{C}'$ $\sqrt{14}(x+y-z-1)-\sqrt{3}(2x-3y-z-5)=0.$

Le point I d'intersection de $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ appartient aux plans $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{C}, \mathcal{C}'$. Ces plans sont sécants.

Les sphères de l'espace tangentes aux plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ sont les sphères centrées sur l'une des droites $\mathcal{B} \bigcap \mathcal{C}$, $\mathcal{B} \bigcap \mathcal{C}'$, $\mathcal{B}' \bigcap \mathcal{C}$ et $\mathcal{B}' \bigcap \mathcal{C}$ et tangentes au plan $\mathcal{P}$.

4 ▬ **a)** Montrons que la propriété est vraie lorsque $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique.

Elle sera alors vraie pour tout cercle.

Nous pouvons aussi choisir pour M le point d'affixe 1.

Pour i dans $[\![1,4]\!]$, les points M_i ont pour affixe e^{ia_i}, avec a_i réels.

La droite (M_iM_j) $(i \neq j)$ a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x-\cos(a_i) & -\sin\left(\dfrac{a_i+a_j}{2}\right) \\ y-\sin(a_i) & \cos\left(\dfrac{a_i+a_j}{2}\right) \end{vmatrix} = 0.$$

Soit :

$$x\cos\left(\frac{a_i+a_j}{2}\right)+y\sin\left(\frac{a_i+a_j}{2}\right)-\cos\left(\frac{a_i-a_j}{2}\right)=0.$$

La distance de M à cette droite est donc :

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \left|\cos\left(\frac{a_i+a_j}{2}\right)-\cos\left(\frac{a_i-a_j}{2}\right)\right|. \\ &= 2\left|\sin(a_i)\sin(a_j)\right| \end{aligned}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} d(M,(M_1M_2))d(M,(M_3M_4)) &= 4\left|\Pi_{i=1}^{2}\sin(a_i)\right| \\ &= d(M,(M_1M_3))d(M,(M_2M_4)). \end{aligned}$$

b) Soit $2n+1$ points distincts sur le cercle, $M_1, \cdots, M_{2n}, M$.

Le calcul précédent permet d'affirmer que le produit $\Pi_{i=0}^{n-1} d(M, M_{2i+1}M_{2i+2}))$ ne dépend pas de l'ordre dans lequel les points sont numérotés.

5 ▬ Supposons qu'un tel vecteur v existe. Alors :

$(a,b,v)=(b,v,a)=(b\wedge v).a=(v,a,b)=-(a\wedge v).b.$

Nous obtenons la condition nécessaire : $a.d=-b.c$.

Réciproquement, supposons cette condition vérifiée.

Pour commencer, cherchons les solutions de l'équation : $a \wedge v = c$.

La famille $(a, c, a\wedge c)$ est une base orthogonale de E.

Le vecteur $v=\alpha a+\beta c+\gamma a\wedge c$ est solution de cette équation si, et seulement si :

$$\beta = 0; \qquad \gamma = -\frac{1}{\|\ a\ \|^2}.$$

Notons $w = -\dfrac{1}{\|\ a\ \|^2} a \wedge c$.

L'ensemble des solutions de l'équation $a \wedge v = c$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $v = w + \alpha a$, avec α réel.

Un tel vecteur est solution de l'équation $b \wedge v = d$ si, et seulement si :

$$b \wedge w + \alpha b \wedge a = d.$$

Les vecteurs a et b sont linéairement indépendants, donc $b \wedge a \neq 0$.

Il existe un réel α solution si, et seulement si, les vecteurs $d - b\wedge w$ et $b \wedge a$ sont liés.

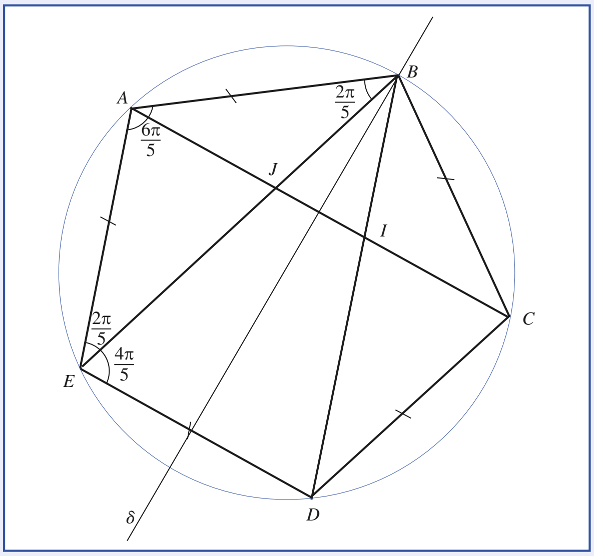
Cette condition équivaut à $d - b \wedge w$ orthogonal à a et à b. Or :

$$\begin{aligned} (d-b\wedge w).a &= d.a-(b\wedge w).a = d.a-(w,a,b) \\ &= d.a+c.b=0 \end{aligned}$$

$(d-b\wedge w).b = d.b-(b,w,b)=0.$

La condition $a.d=-b.c$ est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un vecteur v satisfaisant les égalités souhaitées. Losque la condition est vérifiée, ce vecteur est unique.

6 ▬ **a)**



Chacun des angles intérieurs du pentagone régulier mesure $\dfrac{6\pi}{5}$.

De nombreux triangles sont isocèles, ainsi ABE (deux côtés égaux), AJB (deux angles égaux) et BJI (un axe de symétrie δ).

Considérons IJB.

La formule rappelée en cours, dans un triangle ABC, avec les notations usuelles : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ donne, dans ce triangle :

$$\frac{IJ}{\sin\frac{2\pi}{5}} = \frac{BJ}{\sin\frac{4\pi}{5}} = \frac{AJ}{\sin\frac{4\pi}{5}} = \frac{AJ+IJ}{\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}}$$
$$= \frac{AI}{\sin\frac{2\pi}{5}+\sin\frac{4\pi}{5}}.$$

D'où :

$$\frac{AI}{AJ} = 1 + \frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{4\pi}{5}}.$$

b) $u = 1 + \dfrac{1}{2\cos\frac{2\pi}{5}}$. Il est classique de calculer $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ en factorisant $z^5 - 1$.

La calculatrice donne :

$$u = 1 + \frac{\sin\frac{2\pi}{5}}{\sin\frac{4\pi}{5}} = \frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}-1} = 2+\sqrt{5}.$$

Donc :

$$u^2 = 9 + 4\sqrt{5} = 9 + 4(u-2).$$

L'équation cherchée est :

$$u^2 - 4u - 1 = 0.$$

2 Point de Gergonne d'un triangle

1 Supposons que les droites (AA'), (BB') et (CC') soient concourantes en un point G. Comme $G \in (AA')$, G est un barycentre de A et A', c'est-à-dire qu'il existe un réel x tel que G est le barycentre de $\{(A,x),(B,\alpha),(C,\alpha')\}$.

De même, il existe deux réels y et z tels que G est le barycentre de (A,β'), (B,y) et (C,β) et le barycentre de (A,γ), (B,γ') et (C,z).

Ces coefficients sont proportionnels :

$$\frac{x}{\beta'} = \frac{\alpha}{y} = \frac{\alpha'}{\beta} \quad \text{et} \quad \frac{x}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma'} = \frac{\alpha'}{z}.$$

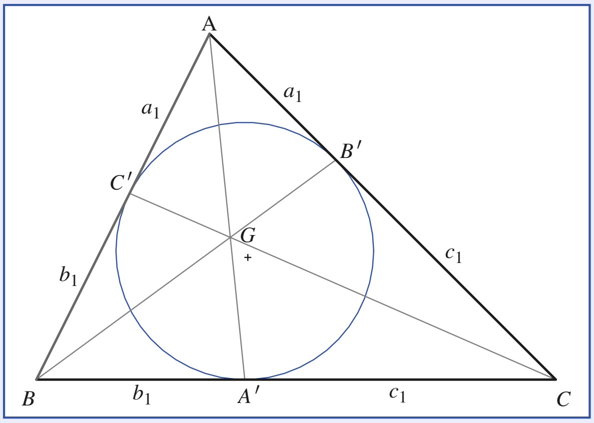
On en déduit : $x = \dfrac{\alpha'\beta'}{\beta} = \dfrac{\alpha\gamma}{\gamma'}$, d'où : $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma'$.

Réciproquement, cette relation implique que les barycentres des systèmes :

$\left((A,\dfrac{\alpha\gamma}{\gamma'}),(B,\alpha),(C,\alpha')\right)$, $\left((A,\beta'),(B,\dfrac{\alpha\beta}{\alpha'}),(C,\beta)\right)$ et $\left((A,\gamma),(B,\gamma'),(C,\dfrac{\beta\gamma}{\beta'})\right)$ sont confondus.

Ce point étant un barycentre de A, A', de B, B' et de C, C', il appartient aux trois droites $(AA'), (BB'), (CC')$, qui sont donc concourantes.

2 Par symétrie, $AB' = AC' = a_1$, $BC' = BA' = b_1$ et $CA' = CB' = c_1$.



On a :

$$c_1\overrightarrow{A'B} + b_1\overrightarrow{A'C} = \vec{0}\,;$$

A' est donc barycentre de $\{(B,c_1),(C,b_1)\}$, c'est-à-dire avec les notations de la question **1)** : $\alpha = c_1$, $\alpha' = b_1$.

De même : $\beta = a_1$, $\beta' = c_1$ et $\gamma = b_1$, $\gamma' = a_1$.

En définitive, $\alpha\beta\gamma = \alpha'\beta'\gamma' = a_1b_1c_1$: les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en un point G.

D'après les résultats de la question **1)**, G est le barycentre du système $((A,b_1c_1),(B,c_1a_1),(C,a_1b_1))$. Calculons ces coefficients en fonction des côtés a, b, c du triangle ; on a le système :

$$\begin{cases} b_1 + c_1 = a \\ c_1 + a_1 = b \\ a_1 + b_1 = c \end{cases}.$$

D'où :

$$a_1 = \frac{-a+b+c}{2}, \quad b_1 = \frac{a-b+c}{2}, \quad c_1 = \frac{a+b-c}{2}.$$

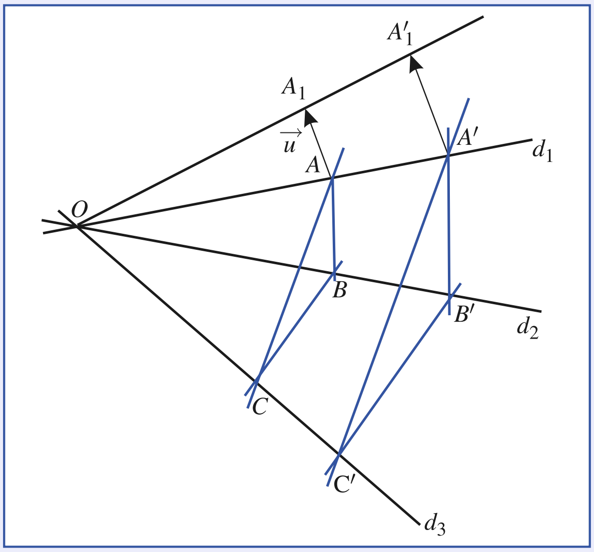
En définitive, le point G (appelé point de Gergonne du triangle) est le barycentre du système :

$$\big((A,(a-b+c)(a+b-c)),$$
$$(B,(a+b-c)(-a+b+c)),$$
$$(C,(-a+b+c)(a-b+c))\big)$$

3 Le théorème de Desargues

1 Première méthode

Si les droites d_1, d_2, d_3 n'étaient pas coplanaires, les plans (ABC) et $(A'B'C')$ seraient parallèles et le résultat immédiat.



Doc. 1

Ce n'est pas le cas. Nous allons donc nous y ramener.

Considérons un vecteur $\overrightarrow{u}$ qui n'appartient pas à la direction du plan contenant d_1, d_2, d_3.

Notons $A_1 = A + \overrightarrow{u}$; $A'_1 = A' + \lambda \overrightarrow{u}$ avec : $\lambda = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.

Alors :

$$\overrightarrow{OA'_1} = \overrightarrow{OA'} + \lambda \overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{OA_1}.$$

Les points O, A_1 et A'_1 sont alignés. Nommons δ la droite (OA_1).

Les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, ainsi que (AA_1) et $(A'A'_1)$.

Les plans (AA_1B) et $(A'A'_1B')$ sont donc parallèles.

Ils rencontrent donc le plan (δ, d_2) suivant des droites parallèles (A_1B) et (A'_1B').

Les plans (A_1BC) et $(A'_1B'C')$ sont aussi parallèles, d'où le parallélisme des droites (A_1C) et (A'_1C').

La projection conserve le parallélisme.

Projetons sur le plan (d_1, d_2) parallèlement à la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{u}$.

Les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles.

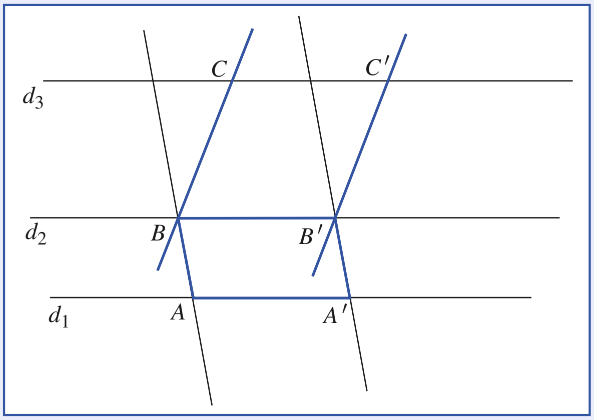
Deuxième méthode

Le *théorème de Thalès* donne :

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}.$$

Et réciproquement, les droites (AC) et $(A'C')$ sont parallèles.

2 Première méthode



Doc. 2

En prenant un vecteur $\overrightarrow{u}$ n'appartenant pas au plan (d_1, d_2) et en considérant :

$$A_1 = A + \overrightarrow{u}\ ; \quad A'_1 = A' + \overrightarrow{u}\ ; \quad \delta = (A_1A'_1),$$

Montrer le résultat souhaité.

Deuxième méthode

Considérer une troisième droite $(A''B'')$ parallèle à (AB), rencontrant d_1 en A'' et d_2 en B'', ainsi qu'une droite $(B''C'')$ parallèle à (BC), rencontrant d_3 en C''.

Puis utiliser le théorème de Thalès. Tout roule !

4 Paraboloïde hyperbolique

1 Un plan parallèle à (yOz) a pour équation $x = x_0$. L'intersection avec S est donc la droite représentée par les équations :

$$x = x_0\ ; \qquad z = x_0 y + y + x_0.$$

C'est-à-dire, paramétriquement :

$$x = x_0\ ; \qquad y = \lambda\ ; \qquad z = x_0 + \lambda(1 + x_0).$$

C'est la droite passant par le point $A_0(x_0, 0, x_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(0, 1, 1 + x_0)$.

De même, un plan parallèle à (zOx) a pour équation $y = y_0$.

L'intersection avec S est donc la droite représentée par les équations :

$$y = y_0\ ; \qquad z = y_0 x + x + y_0.$$

C'est-à-dire, paramétriquement :

$$x = \lambda\ ; \qquad y = y_0\ ; \qquad z = y_0 + \lambda(1 + y_0).$$

C'est la droite passant par le point $B_0(0, y_0, y_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{v}(1, 0, 1 + y_0)$.

2 Soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de S ; cherchons un vecteur $\vec{u} = (a, b, c)$ tel que pour tout réel k, le point $M = M_0 + k\vec{u}$, de coordonnées $(x_0 + ka,\ y_0 + kb,\ z_0 + kc)$ appartienne à S :

$\forall k \in \mathbb{R} \quad z_0 + kc = (x_0 + ka)(y_0 + kb) + x_0 + ka + y_0 + kb$

ce qui équivaut à :

$\forall k \in \mathbb{R}$

$ab\,k^2 + (ay_0 + bx_0 + a + b - c)\,k + x_0y_0 + x_0 + y_0 - z_0 = 0$

Pour que ce polynôme en k soit nul pour tout k, il faut et il suffit que tous ses coefficients soient nuls :

$$\begin{cases} ab = 0 \\ ay_0 + bx_0 + a + b - c = 0 \\ x_0y_0 + x_0 + y_0 - z_0 = 0 \end{cases}.$$

(La dernière égalité traduit le fait que $M_0 \in S$.)

On obtient donc :

$$\begin{cases} a = 0 \\ b(x_0 + 1) - c = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 0 \\ a(y_0 + 1) - c = 0 \end{cases}.$$

Il existe donc deux droites distinctes passant par M_0 et contenues dans S : elles sont respectivement dirigées par les vecteurs $\vec{u}_1 = (0, 1, x_0 + 1)$ et $\vec{u}_2 = (1, 0, y_0 + 1)$.

3 **a)** Effectuons le changement de repère :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Soit :

$$\begin{cases} x = x' + y' - 1 \\ y = x' - y' - 1 \\ z = z' - 1 \end{cases}.$$

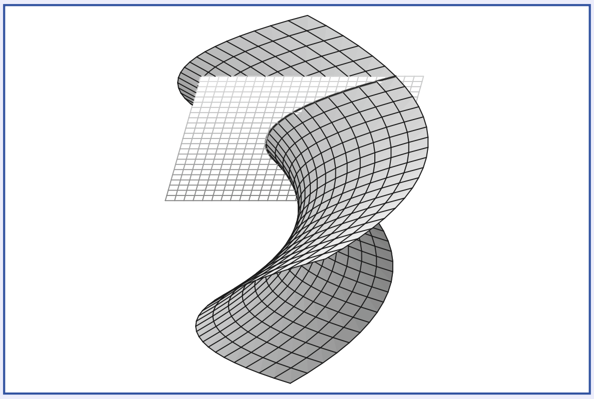
b) L'équation de S dans le nouveau repère est :

$z' - 1 = (x' + y' - 1)(x' - y' - 1) + x' + y' - 1 + x' - y' - 1$

soit : $z' = x'^2 - y'^2$ (S est un paraboloïde hyperbolique).

c) L'intersection de S avec un plan parallèle à $(y'Oz')$ a pour équations :

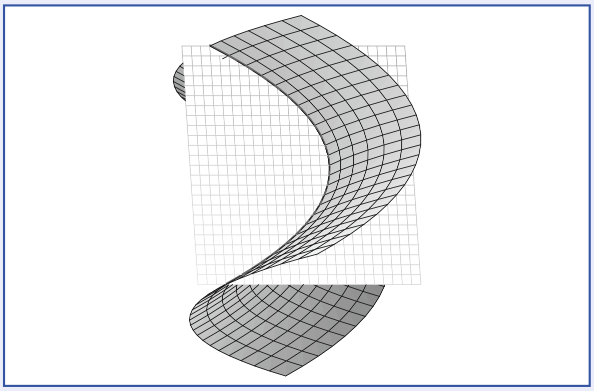
$\begin{cases} x' = x'_0 \\ z' = -y'^2 + x'^2_0 \end{cases}$: c'est une parabole.



Doc. 1

L'intersection de S avec un plan parallèle à $(z'Ox')$ a pour équations :

$\begin{cases} y' = y'_0 \\ z' = x'^2 + y'^2_0 \end{cases}$: c'est également une parabole.

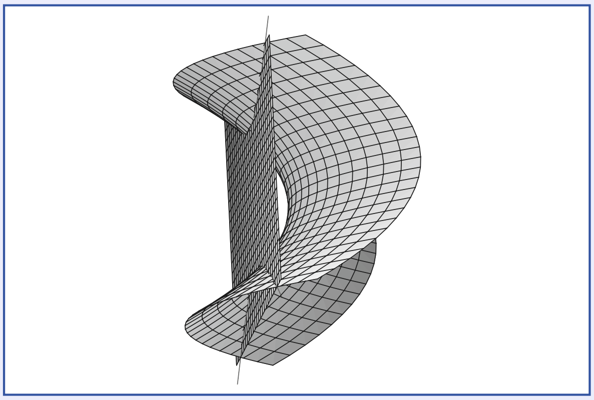


Doc. 2

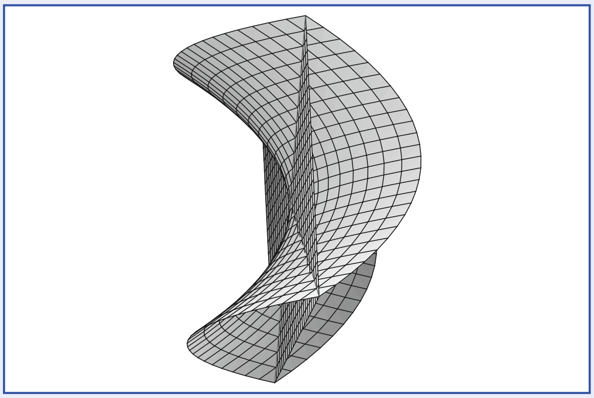
L'intersection de S avec un plan parallèle à $(x'Oy')$ a pour équations :

$$\begin{cases} z' = z'_0 \\ x'^2 - y'^2 = z'_0 \end{cases}.$$

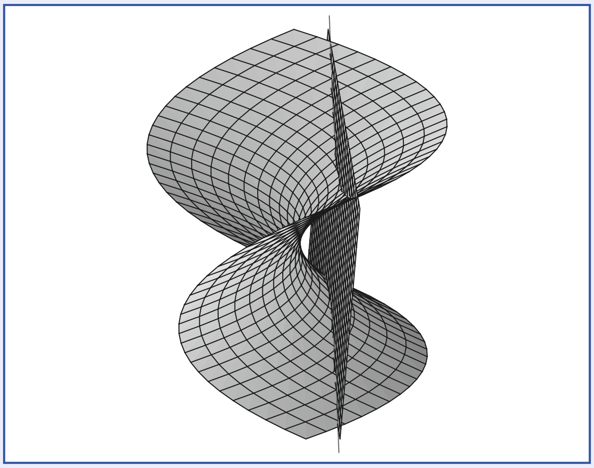
Pour $z'_0 \neq 0$, c'est une hyperbole équilatère ; pour $z'_0 = 0$, c'est la réunion des deux axes Ox' et Oy'.



Doc. 3



Doc. 4

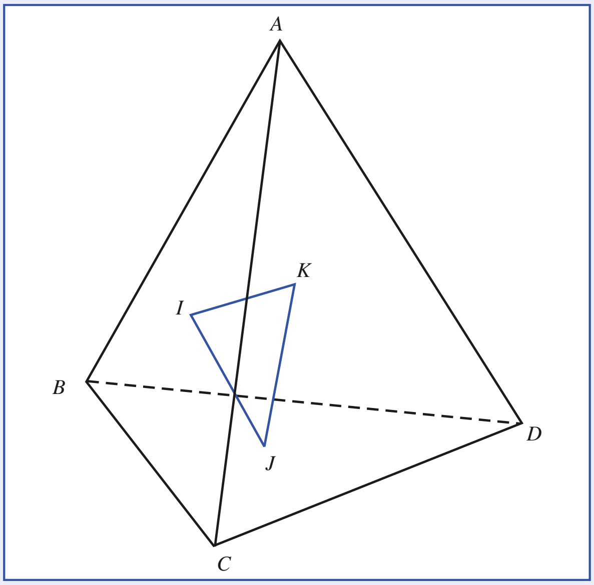


Doc. 5

5 Intersection d'un tétraèdre et d'un plan

1 I est barycentre du système $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$, donc :

$$\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right).$$



De même, puisque K est barycentre du système $\{(D,1),(A,1),(B,1)\}$:

$$\overrightarrow{DK} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}\right).$$

Nous en déduisons :

$$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{DK}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}.$$

Les droites (IK) et (CD) sont parallèles.

2 Nous démontrerions de manière analogue que les droites (IJ) et (AD) sont parallèles.

Le plan affine Π admet pour plan vectoriel associé le plan $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{IK},\overrightarrow{IJ})$.

Le plan affine (ACD) admet pour plan vectoriel associé le plan $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{AD})$.

Les deux plans vectoriels coïncident, les plans affines sont parallèles.

3 Le point J appartient aux deux plans. La droite passant par J et dirigée par $\overrightarrow{IK}$ est contenue dans chacun de ces plans car le vecteur $\overrightarrow{IK}$ est un vecteur directeur de chacun des deux plans.

Les plans sont distincts. Leur intersection est donc la droite passant par J et dirigée par $\overrightarrow{IK}$.

4 Le plan Π est parallèle au plan (ACD). Il rencontre le plan (BCD) suivant la droite passant par J et parallèle à (DC), le plan (ABC) suivant la droite passant par I et parallèle à (AC) et le plan (ABD) suivant la droite passant par K et parallèle à (AD).

5 I est barycentre du système $\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$.

J est barycentre du système $\{(B,1),(C,1),(D,1)\}$.

K est barycentre du système $\{(D,1),(A,1),(B,1)\}$.

Donc le point G, isobarycentre des points I, J, K est barycentre du système $\{(A,2),(B,3),(C,2),(D,2)\}$.

G est donc barycentre de $(B,3)$ et de l'isobarycentre L de A, C, D.

Il appartient à la droite (BL).

6 Quadrilatère tangent à une sphère

1 Les points $M_1, \cdots, M_4$ sont coplanaires si, et seulement si, l'un d'entre eux est barycentre des trois autres.

Si le point M_4 est barycentre de $((M_1,u),(M_2,v),(M_3,w))$, alors il est barycentre de :

$$\big((A, ux_1+vx_2+wx_3),(B, uy_1+vy_2+wy_3),\\ (C, uz_1+vz_2+wz_3),(D, ut_1+vt_2+wt_3)\big).$$

Or M_4 est barycentre de :

$$\big((A,x_4),(By_4),(C,z_4),(D,t_4)\big).$$

Donc, si M_4 est barycentre de M_1, M_2, M_3, la dernière colonne du déterminant $\begin{vmatrix} x_1 & \cdots & x_4 \\ y_1 & \cdots & y_4 \\ z_1 & \cdots & z_4 \\ t_1 & \cdots & t_4 \end{vmatrix}$ est combinaison linéaire des autres. Ce déterminant est nul.

Réciproquement, si le déterminant est nul, une de ses colonnes est combinaison linéaire des autres.

Le point correspondant est barycentre des trois autres. Les quatre points sont alors coplanaires.

2 Soit M un point de coordonnées barycentriques (x, y, z, t).

Notons I le centre de la sphère et R son rayon.

M appartient à $(\mathcal{S})$ si, et seulement si : $\overrightarrow{IM}^2 = R^2$.

Or :

$$\overrightarrow{IM} = \frac{x}{x+y+z+t}\overrightarrow{IA} + \frac{y}{x+y+z+t}\overrightarrow{IB} + \frac{z}{x+y+z+t}\overrightarrow{IC} + \frac{t}{x+y+z+t}\overrightarrow{ID}$$

Soit :

$$\left(x\overrightarrow{IA} + y\overrightarrow{IB} + z\overrightarrow{IC} + t\overrightarrow{ID}\right)^2 = (x+y+z+t)^2 R^2.$$

Puis :

$$x^2\left(\overrightarrow{IA}^2 - R^2\right) + y^2\left(\overrightarrow{IB}^2 - R^2\right) + z^2\left(\overrightarrow{IC}^2 - R^2\right) + t^2(\overrightarrow{ID}^2 - R^2) + 2xy\left(\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} - R^2\right) + \cdots = 0.$$

Une équation barycentrique de $\mathcal{S}$ est donc de la forme :

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 + 2exy + 2fxz + 2gxt + 2hyz + 2iyt + 2jzt = 0.$$

3 La droite (AB) est l'ensemble des points M de coordonnées barycentriques $(x, y, 0, 0)$ avec $x + y \neq 0$.

L'équation donnant les coordonnées barycentriques $(x, y, 0, 0)$ des points d'intersection de (AB) et de $\mathcal{S}$ est :

$$ax^2 + by^2 + 2exy = 0. \qquad (*)$$

Puisque $(x, y) \neq 0$, en considérant soit $\dfrac{y}{x}$, soit $\dfrac{x}{y}$, nous pouvons dire que la droite (AB) est tangente à $\mathcal{S}$ si, et seulement si, l'équation $at^2 + 2et + b = 0$ ou l'équation $bt^2 + 2et + a = 0$ admet une solution double.

Nous obtenons la condition : $e^2 = ab$.

Cette condition est satisfaite si, et seulement s'il existe α et β réels tels que :

$$a = \alpha^2\,; \qquad b = \beta^2\,; \qquad e = \alpha\beta.$$

L'équation **(*)** devient alors :

$$(\alpha x + \beta y)^2 = 0.$$

Le point de tangence T_1 a pour coordonnées barycentriques $(-\beta, \alpha, 0, 0)$.

4 En procédant de même avec la droite (BC), nous trouvons :

$$c = \gamma^2\,; \qquad T_2(0, -\gamma, \beta, 0).$$

Avec (CD) : $d = \delta^2$; $T_3(0, 0, -\delta, \gamma)$.

Avec (DA) : $T_4(-\delta, 0, 0, \alpha)$.

Le déterminant $\begin{vmatrix} -\beta & 0 & 0 & -\delta \\ \alpha & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -\delta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$ est nul.

Les quatre points de tangence sont coplanaires.

5 La forme générale de l'équation établie à la fin de la question **2)** n'est pas spécifique d'une sphère.
Nous avons montré plus généralement que, si un quadrilatère de l'espace est tangent à une surface dont l'équation barycentrique est de cette forme, les points de tangence sont coplanaires.
Une telle surface est appelée une *quadrique de l'espace*.

7 Des distances dans l'espace

1 Notons $A_1, \overrightarrow{u_1}$ (respectivement $A_2, \overrightarrow{u_2}$) un point et un vecteur directeur de d_1 (respectivement d_2).
Les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont linéairement indépendants.
Si une droite perpendiculaire commune à d_1 et d_2 existe, elle est dirigée par $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$.
De plus, elle est alors contenue dans le plan défini par $A_1, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$.
Elle est aussi contenue dans le plan défini par $A_2, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$.
Ces plans ne sont pas parallèles car les vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$ sont linéairement indépendants.
Leur intersection est une droite δ perpendiculaire à d_1 et d_2 car dirigée par $\overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2}$.
Cette droite est la perpendiculaire commune à d_1 et d_2.

2 La droite δ rencontre d_1 en B et d_2 en C.

Notons O le milieu de $[B, C]$ et prenons pour axe (Oz) la droite (BC).
Le plan passant par O et perpendiculaire à (BC) est dirigé par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.
Les droites d_1 et d_2 se projettent en d_1' et d_2' sur le plan passant par O et perpendiculaire à (BC).
Les droites d_1' et d_2' sont dirigées respectivement par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. Elles ne sont donc pas parallèles.

Prenons pour axes (Ox) et (Oy) les bissectrices des droites d_1' et d_2'. Construisons, avec ces axes un repère orthonormé.

Dans ce repère, la droite d_1 a une équation de la forme :

$$\begin{cases} z = h \\ y = px \end{cases},$$

avec h et p réels et $p \neq 0$. Quitte à permuter les axes, nous pouvons supposer $p > 0$. La droite d_2 a pour équation :

$$\begin{cases} z = -h \\ y = -px \end{cases}.$$

Les plans d'équation $z = h$ et $y = px$ sont perpendiculaires.

Par conséquent, pour un point $M(x, y, z)$:

$$d(M, d_1)^2 = (z - h)^2 + \frac{(y - px)^2}{1 + p^2}\ ;$$

$$d(M, d_2)^2 = (z + h)^2 + \frac{(y + px)^2}{1 + p^2}.$$

Posons, pour simplifier : $p = \tan\theta$, avec θ dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Alors : $d(M, d_1)^2 + kd(M, d_2)^2 = a$ équivaut à :

$$(z - h)^2 + (y - x\tan\theta)^2\cos^2\theta + k(z + h)^2 + k(y + x\tan\theta)^2\cos^2\theta = a.$$

Soit à :

$$(1 + k)z^2 + (1 + k)\sin^2\theta x^2 + (1 + k)\cos^2\theta y^2 + (k - 1)xy\sin 2\theta + 2h(k - 1)z + h^2 - a = 0.$$

Si $k = -1$, l'équation se réduit à :

$$-2xy\sin 2\theta - 4hz + h^2 - a = 0.$$

$\sin 2\theta$ n'est pas nul.

Nous obtenons, dans tous les cas, l'équation d'une quadrique.

La matrice associée à la forme bilinéaire est :

$$M = \begin{bmatrix} (1 + k)\sin^2\theta & \frac{k - 1}{2}\sin 2\theta & 0 \\ \frac{k - 1}{2}\sin 2\theta & (1 + k)\cos^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & (1 + k) \end{bmatrix}.$$

Son déterminant est :

$$\Delta = k(k + 1)\sin^2(2\theta).$$

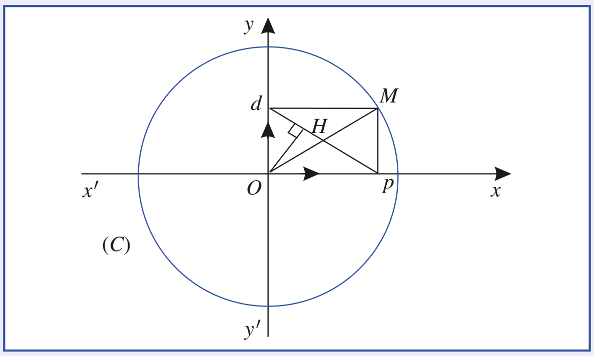
Si $k(k + 1) > 0$, la quadrique est de type ellipsoïde.

Si $k(k + 1) < 0$, la quadrique est de type hyperboloïde ou cône elliptique.

Si $k(k + 1) = 0$, la quadrique est de type paraboloïde ou cylindre.

8 Cercle, projection et perpendiculaires

1 a)



Doc. 1

Les coordonnées de P et Q sont :

$$P(a\cos(u), 0)\ ; \qquad Q(0, a\sin(u)).$$

L'équation de la droite (PQ), lorsque $u \neq 0 \left(\text{mod}\frac{\pi}{2}\right)$, est :

$$\frac{x}{a\cos(u)} + \frac{y}{a\sin(u)} - 1 = 0.$$

Un vecteur normal à cette droite est le vecteur $\overrightarrow{n}(\sin(u), \cos(u))$.

Le point $H(x_H, y_H)$ est le projeté orthogonal de O sur la droite (PQ) si, et seulement si :

$$\begin{cases} H \in (PQ) \\ \exists\lambda \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{OH} = \lambda\overrightarrow{n} \end{cases}.$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} \exists\lambda \in \mathbb{R}\ x_H = \lambda\sin(u),\ y_H = \lambda\cos(u) \\ \frac{\lambda}{a}\left(\tan(u) + \frac{1}{\tan(u)}\right) = 1 \end{cases}.$$

Nous obtenons : $H\left(\frac{a}{2}\sin(2u)\sin(u), \frac{a}{2}\sin(2u)\cos(u)\right)$.

Lorsque $u = 0 \left(\text{mod}\frac{\pi}{2}\right)$, on peut dire que H est en O, ce qui correspond au résultat du calcul.

b) La tangente en M au cercle C est normale au vecteur $(\cos(u), \sin(u))$.

Son équation est :

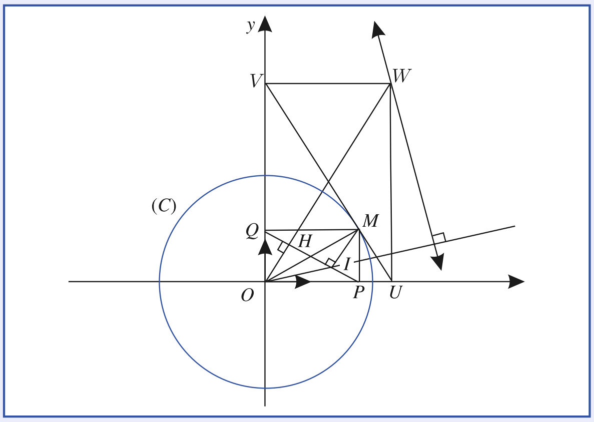
$$\cos(u)(x - a\cos(u)) + \sin(u)(y - a\sin(u)) = 0.$$

Soit : $x\cos(u) + y\sin(u) - a = 0$.

Lorsque $u \neq 0 \left(\text{mod}\frac{\pi}{2}\right)$, elle coupe les axes en $U\left(\frac{a}{\cos(u)}, 0\right)$ et $V\left(0, \frac{a}{\sin(u)}\right)$.

Le point W a pour coordonnées $\left(\frac{a}{\cos(u)}, \frac{a}{\sin(u)}\right)$.

Les points O, H, W sont alignés.



Doc. 2

2 ▬ **a)** La tangente à $\mathcal{R}$ en W est dirigée par le vecteur :

$$\left(\frac{\sin(u)}{\cos^2(u)}, -\frac{\cos(u)}{\sin^2(u)}\right).$$

Lorsque $u \neq 0 \ (\text{mod}\,\frac{\pi}{2})$, la perpendiculaire à cette tangente passant par O est donc la droite passant par O et dirigée par le vecteur :

$$\left(\frac{\cos(u)}{\sin^2(u)}, \frac{\sin(u)}{\cos^2(u)}\right).$$

Elle a pour équation : $y = \tan^3(u)x$.

En déduire les coordonnées de $I(a\cos^3(u), a\sin^3(u))$, vérifiées également lorsque $u = 0 \ \left(\text{mod}\,\frac{\pi}{2}\right)$.

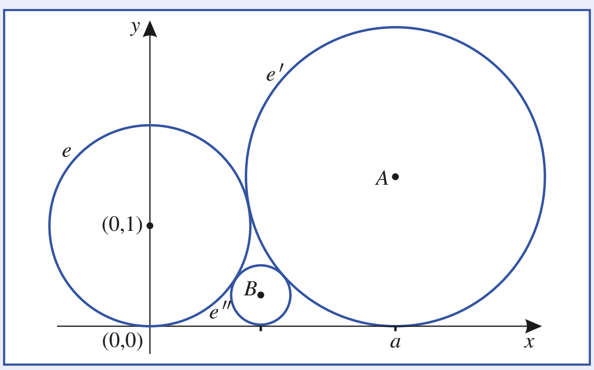
b) Calculons $\overrightarrow{IM}$. Ce vecteur a pour coordonnées $(a\cos(u)\sin^2(u), a\cos^2(u)\sin(u))$.

Il est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$ de la première question.

Les droites (PQ) et (IM) sont perpendiculaires.

9 Suite de cercles

1 ▬



Notons r', r'' les rayons des cercles C', C'' .

On sait que deux cercles sont tangents extérieurement si, et seulement si, la distance de leurs centres est la somme de leurs rayons.

Avec C et C' , nous obtenons :

$$a^2 + (r' - 1)^2 = (1 + r')^2.$$

Soit : $a^2 = 4r'$.

Avec C et C'', nous obtenons $b^2 = 4r''$.

Avec C' et C'' : $(a - b)^2 = 4r'r''$.

Le réel b est donc solution de l'équation :

$$b^2(a^2 - 4) + 8ab - 4a^2 = 0.$$

Si $a = 2$, alors $b = 1$.

Sinon, l'équation admet deux solutions : $\dfrac{2a}{a+2}, \dfrac{2a}{2-a}$.

Il paraît clair que, lorsque C et C' sont fixés, un seul cercle C'' convient.

Vérifions-le.

Si $a > 2$, $\dfrac{2a}{2-a}$ est négatif.

Si $0 < a < 2$, alors $\dfrac{2a}{2-a} > a$.

Cette solution est à exclure.

Nous obtenons $b = \varphi(a) = \dfrac{2a}{a+2}$.

Puis : $r' = \dfrac{a^2}{4}$; $r'' = \dfrac{a^2}{(a+2)^2}$.

2 ▬ La fonction φ est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ car $\varphi'(a) = \dfrac{4}{(2+a)^2}$.

L'intervalle $[0, +\infty[$ est stable par φ et nous savons que $b = \varphi(a) < a$.

La suite $(a_n)_n$ est donc positive et décroissante. Elle converge.

La continuité de φ sur $[0, +\infty[$ permet de calculer la limite ℓ car :

$$\ell = \varphi(\ell) = \frac{2\ell}{(2+\ell)}.$$

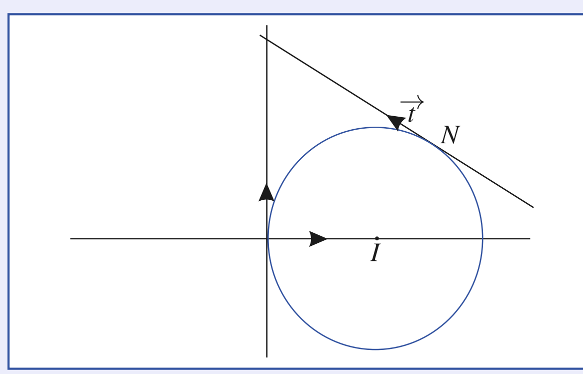
La suite $(a_n)_n$ converge vers 0.

10 Cercle, tangente et lieu de points

Notons I le centre du cercle, N un point quelconque de ce cercle, $\overrightarrow{t}$ un vecteur directeur de la tangente en N au cercle $\mathcal{C}$. Nous pouvons choisir :

$$I(a, 0)\,; \qquad N\big(a(1+\cos(\varphi)), a\sin(\varphi)\big)\,;$$
$$\overrightarrow{t} = \big(-\sin(\varphi), \cos(\varphi)\big),$$

avec $\varphi \in [0, 2\pi[$.



La tangente en N au cercle admet donc pour équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = a(1+\cos(\varphi)) - \lambda\sin(\varphi) \\ y = a\sin(\varphi) + \lambda\cos(\varphi) \qquad (\lambda \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Études l'intersection de cette tangente avec $(y'y)$.

Le point d'intersection, lorsqu'il existe, admet pour paramètre λ tel que :

$$\lambda \sin(\varphi) = a(1 + \cos(\varphi)).$$

Si $\varphi = \pi$ ou 0, la tangente est verticale. Ce cas ne nous intéresse pas dans l'exercice.

Si $\varphi \neq 0$ et $\varphi \neq \pi$, la tangente en N rencontre l'axe $(y'y)$ en le point $\left(0, a \cot\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)\right)$ obtenu pour la valeur $\lambda = a \cot\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)$.

Considérons alors deux points distincts N_1, N_2 du cercle, de paramètres φ_1, φ_2 dans $]0, \pi[\bigcup]\pi, 2\pi[$.

Les tangentes en N_1, N_2 au cercle rencontrent l'axe $(y'y)$ en P, Q respectivement.

L'énoncé impose la condition : $\overline{OQ} = 2\overline{OP}$.

Cette condition se traduit par : $\cot\left(\dfrac{\varphi_2}{2}\right) = 2 \cot\left(\dfrac{\varphi_1}{2}\right)$, d'où :

$$\tan\left(\frac{\varphi_1}{2}\right) = 2 \tan\left(\frac{\varphi_2}{2}\right).$$

Ces tangentes sont bien définies car $\dfrac{\varphi_1}{2}$ et $\dfrac{\varphi_2}{2}$ sont dans $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\bigcup\left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Notons $t_1 = \tan\left(\dfrac{\varphi_1}{2}\right)$; $t_2 = \tan\left(\dfrac{\varphi_2}{2}\right)$.

t_1 et t_2 décrivent $\mathbb{R}^*$.

Une équation cartésienne de la tangente en N_1 au cercle s'obtient en éliminant λ_1 dans son équation paramétrique.

$$\begin{cases} x = a(1 + \cos(\varphi_1)) - \lambda_1 \sin(\varphi_1) \\ y = a \sin(\varphi_1) + \lambda_1 \cos(\varphi_1) \quad (\lambda_1 \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$y \sin(\varphi_1) + x \cos(\varphi_1) - a(1 + \cos(\varphi_1)) = 0.$$

Or :

$$\sin(\varphi_1) = \frac{2t_1}{1 + t_1^2} ; \qquad \cos(\varphi_1) = \frac{1 - t_1^2}{1 + t_1^2}.$$

D'où :

$$2t_1 y + (1 - t_1^2)x - 2a = 0.$$

Une équation cartésienne de la tangente en N_2 au cercle est :

$$2t_2 y + (1 - t_2^2)x - 2a = 0.$$

Les coordonnées du point M s'obtiennent en résolvant :

$$\begin{cases} 4t_2 y + (1 - 4t_2^2)x - 2a = 0 \\ 2t_2 y + (1 - t_2^2)x - 2a = 0 \end{cases}.$$

$$x_M = \frac{2a}{1 + 2t_2^2} ; \ y_M = \frac{3at_2}{1 + 2t_2^2}.$$

L'ensemble des points M est donc contenu dans la courbe définie paramétriquement par :

$$x = \frac{2a}{1 + 2t^2} \quad ; \quad y = \frac{3at}{1 + 2t^2} \quad (t \in \mathbb{R}^*).$$

Recherchons une équation cartésienne de cet ensemble en éliminant le paramètre t.

x ne s'annule pas et $t = \dfrac{2y}{3x}$.

L'élimination de t conduit à l'équation :

$$9x^2 + 8y^2 = 18ax.$$

Cette équation est l'équation d'une ellipse. Mais tous les points de l'ellipse sont-ils des points M ? ? ? ?

La réciproque doit être étudiée.

Soit R un point de l'ellipse, distinct de O.

Son abscisse n'est pas nulle. En posant $t = \dfrac{2y_R}{3x_R}$, ses coordonnées s'écrivent :

$$x_R = \frac{2a}{1 + 2t^2} ; \ y_R = \frac{3at}{1 + 2t^2}.$$

Mais t doit être non nul. Le point $(2a, 0)$ de l'ellipse n'est pas un point M.

L'ensemble des points M est donc l'ellipse, privée des points O et $(2a, 0)$.

Précisons cette ellipse.

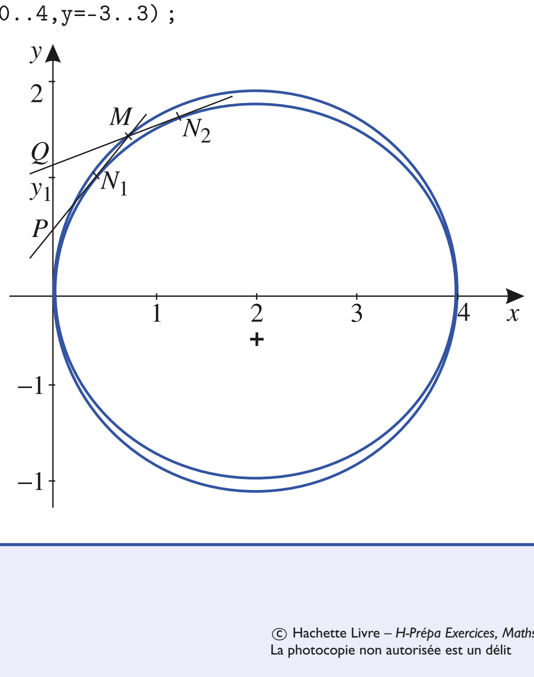
$9(x - a)^2 + 8y^2 = 9a^2$.

Le centre de l'ellipse est le point $I(a, 0)$, son grand axe est vertical et son petit axe horizontal.

Ses paramètres sont : $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}a$ et a.

Avec Maple

```
> implicit plot(x^2+y^2-4*x,9*x^2+8*x^2-36*x,
x=0..4,y=-3..3) ;
```

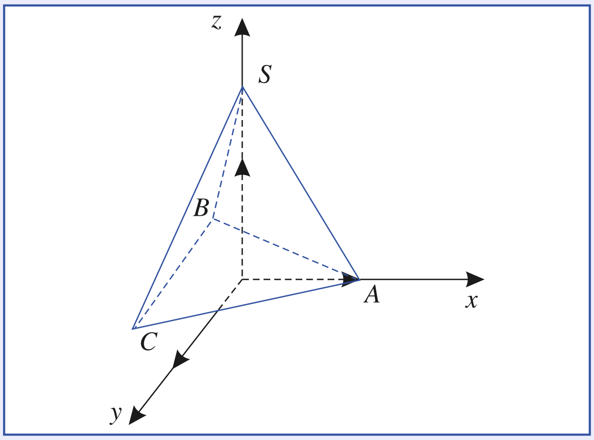


11 Vecteurs unitaires dans l'espace faisant entre eux un angle fixe

1 Considérons les points A, B, C du plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'affixes $1, j, j^2$. Ils forment un triangle équilatéral.

Notons S le point de coordonnées $(0, 0, a)$ avec $a > 0$.

$SABC$ est un tétraèdre dont les faces SAB, SAC et SBC sont égales.



Considérons le triangle SAB.

Nous avons : $SA = \sqrt{a^2+1}$; $AB = \sqrt{3}$.

Donc :

$$\begin{aligned} AB^2 &= SA^2 + SB^2 - 2SA.SB\cos(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}) \\ &= 2(a^2+1)(1-\cos(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB})) \end{aligned}$$

Nous allons chercher a pour que les vecteurs $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$ fassent entre eux des angles de $\frac{\pi}{4}$.

$$a^2+1 = \frac{3}{2(1-\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{3}{2-\sqrt{2}}.$$

D'où : $a = \sqrt{\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2}}$.

Le choix de $S(0, 0, \sqrt{\dfrac{4+3\sqrt{2}}{2}})$ permet d'obtenir trois vecteurs $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}$ faisant entre eux des angles de $\frac{\pi}{4}$. Il suffit ensuite de multiplier ces vecteurs par $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}$ pour construire trois vecteurs unitaires qui conviennent.

2 Faisons varier a de 0 à $+\infty$ pour trouver l'ensemble des réels α de $[0, \pi]$ tels qu'il existe trois vecteurs unitaires faisant entre eux des angles de mesure α.

$$1-\cos(\alpha) = \frac{3}{2a^2+2}.$$

D'où :

$$\cos(\alpha) = \frac{2a^2-1}{2a^2+2}.$$

La fonction $(a \to \dfrac{2a^2-1}{2a^2+2})$ croît de $-\dfrac{1}{2}$ à 1 lorsque a varie de 0 à $+\infty$.

a	0		$+\infty$
$\cos(\alpha)$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

Par conséquent, l'ensemble cherché est $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$ car la valeur 0 est atteinte par trois vecteurs unitaires confondus.

12 Produit vectoriel et équation

1 Si M appartient à (AB),alors $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = 0$ et $\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD} \neq 0$.

Si $a \neq 0$ et $b = 0$, le point M appartient à $\mathcal{E}$. Donc : $(AB) \subset \mathcal{E}$.

Si $ab \neq 0$, le point M n'appartient pas à $\mathcal{E}$.

Si M appartient à (CD),alors $\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD} = 0$ et $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} \neq 0$.

Si $a = 0$ et $b \neq 0$, le point M appartient à $\mathcal{E}$. Donc : $(CD) \subset \mathcal{E}$.

Si $ab \neq 0$, le point M n'appartient pas à $\mathcal{E}$.

Si M n'appartient ni à (AB), ni à (CD), les vecteurs $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MD}$ sont non nuls et colinéaires.

Les plans (MAB) et (MCD) sont donc confondus.

C'est impossible car les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

Par conséquent, dans ce cas, si $ab \neq 0$, l'ensemble $\mathcal{E}$ est vide.

Si $a = 0$ et $b \neq 0$: $(CD) = \mathcal{E}$.

Si $a \neq 0$ et $b = 0$: $(AB) = \mathcal{E}$.

2 Supposons A, B, C, D coplanaires.

La condition équivaut à :

$$a\left(\overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB})\right) = b\left((\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD})\right).$$

Soit à :

$$\overrightarrow{MA} \wedge (a\overrightarrow{AB} - b\overrightarrow{CD}) = b(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}). \qquad (*)$$

Notons $\overrightarrow{v} = a\overrightarrow{AB} - b\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{u} = b(\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD})$.

Nous devons chercher l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \wedge \vec{v} = \vec{u}.$$

Supposons d'abord $ab \neq 0$.

Si $\vec{u} = \vec{v} = 0$, les points A, B, C, D sont alignés, a et b sont tels que : $a\overrightarrow{AB} - b\overrightarrow{CD} = 0$ et l'ensemble cherché est l'ensemble des points de l'espace.

Si $\vec{v} = 0$ et $\vec{u} \neq 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, mais pas les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

Dans ce cas, aucun point M n'est solution.

Si $\vec{v} \neq 0$ et $\vec{u} = 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires, mais pas les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Dans ce cas, l'ensemble des solutions est la droite passant par A et dirigée par $\vec{v}$.

Si $\vec{v} \neq 0$ et $\vec{u} \neq 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux car les quatre points sont coplanaires.

On pose $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$, et on cherche $\overrightarrow{MA}$ sous la forme $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$.

on obtient : $\overrightarrow{MA} = -\dfrac{1}{\|\vec{v}\|^2}\vec{u} \wedge \vec{v} + \lambda\vec{v}$, où λ est un réel quelconque.

L'ensemble $\mathcal{E}$ cherché est donc la droite passant par le point $A + \dfrac{1}{\|\vec{v}\|^2}\vec{u} \wedge \vec{v}$ et dirigée par $\vec{v}$.

• Si $b = 0$, la condition $(*)$ devient : $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB} = 0$. Si $A = B$, tout point M convient.

Sinon, l'ensemble $\mathcal{E}$ cherché est la droite (AB).

• Si $a = 0$, la condition $(*)$ devient :

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}.$$

Si les points A, C, D ne sont pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont linéairement indépendants.

Et le point M doit appartenir au plan défini par A, B, C.

Cherchons M sous la forme :

$$\overrightarrow{MA} = \alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AD}.$$

Alors : $-\alpha - \beta = 1$.

D'où :

$$\overrightarrow{MA} = \alpha\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AD}.$$

Les points M, C, D sont alignés et l'ensemble $\mathcal{E}$ est la droite (DC).

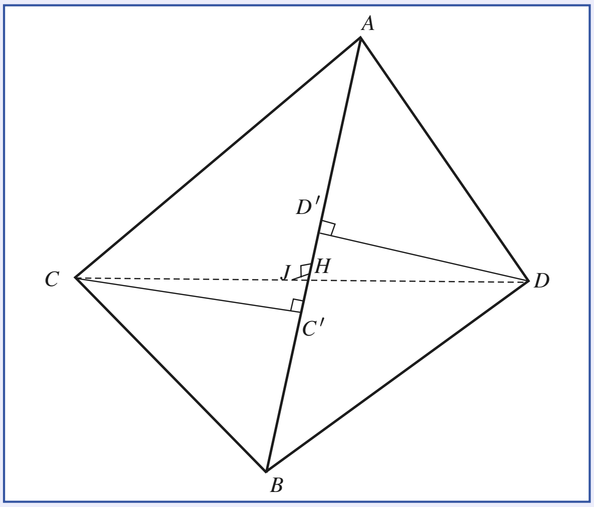
Si les points A, C, D sont alignés, la condition $(*)$ devient : $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{DC} = 0$.

Si $C = D$, tout point M convient.

Si $C \neq D$, l'ensemble $\mathcal{E}$ est la droite (DC).

13 Tétraèdre équifacial

1



L'égalité des aires des triangles ACB et ADB entraîne que $CC' = DD'$.

2 Considérons l'expression :

$\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB} = 0.$

Avec la relation de Chasles :

$(\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CC'}).\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DD'}).\overrightarrow{AB} = 0.$

En tenant compte des vecteurs orthogonaux :

$$\overrightarrow{HC'}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HD'}.\overrightarrow{AB} = 0.$$

H est le milieu de $[C', D']$.

3 Les triangles $CC'H$ et $DD'H$ sont rectangles et :

$$CC' = DD' \,; \quad HC' = HD'.$$

D'où : $HC = HD$.

Le point H appartient au plan médiateur de $[C, D]$.

La droite (HJ) est donc perpendiculaire à (CD).

Elle est la perpendiculaire commune aux droites (CD) et (AB).

4 Nous avons montré que la perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD) passe par le milieu I de $[C, D]$. H est donc aussi le milieu de $[A, B]$ car les arêtes du tétraèdre jouent le même rôle.

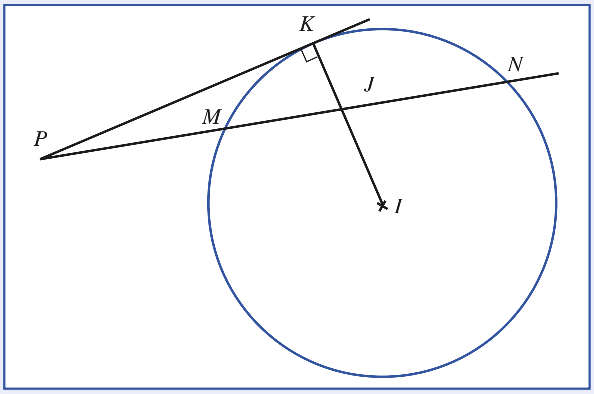
La droite (JH) est axe de symétrie pour le tétraèdre.

Donc : $AC = BD$. De même : $BC = AD$; $AB = CD$.

Les quatre faces du tétraèdre sont égales.

14 Le théorème du papillon

1



Doc. 1

Notons J le milieu de $[M, N]$.

$$\overline{PM}\,\overline{PN} = \overrightarrow{PM}\,\overrightarrow{PN} = (\overrightarrow{PJ} + \overrightarrow{JM}).(\overrightarrow{PJ} + \overrightarrow{JN})$$
$$= PJ^2 - JM^2.$$

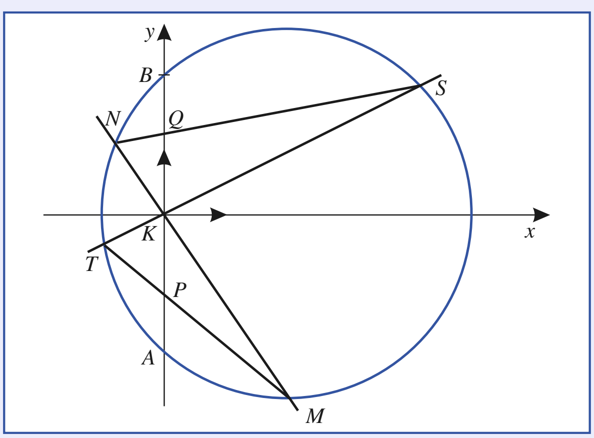
Et Pythagore...

$$\overline{PM}\,\overline{PN} = PI^2 - IJ^2 - JN^2 = PI^2 - R^2.$$

Lorsque la droite (MN) est tangente à (C) en K, les points M et N sont confondus en K :

$$\overline{PK}^2 = PK^2 = PI^2 - R^2.$$

2



Doc. 2

Considérons un repère orthonormé $(K, \vec{i}, \vec{j})$ tel que l'axe des ordonnées soit porté par la droite (AB). Notons $(0, b)$ les coordonnées de B et supposons $b > 0$.

Alors A a pour coordonnées $(0, -b)$ et :

$$\overline{KM}\,\overline{KN} = \overline{KT}\,\overline{KS} = -b^2.$$

Appelons (x_N, y_N) les coordonnées de N et cherchons les coordonnées de M.

Le point M est caractérisé par :

$$M \in (KN)\ ;\ \overline{KM}\,\overline{KN} = -b^2.$$

Ses coordonnées (x_M, y_M) sont solutions du système :

$$\begin{cases} x_M y_N = x_N y_M \\ x_N x_M + y_n y_M = -b^2 \end{cases}.$$

Résoudre et obtenir :

$$x_M = -\frac{b^2 x_N}{x_N^2 + y_N^2}\ ;\ y_M = -\frac{b^2 y_N}{x_N^2 + y_N^2}.$$

Appelons de même (x_T, y_T) les coordonnées de T. Les coordonnées de S s'en déduisent :

$$x_S = -\frac{b^2 x_T}{x_T^2 + y_T^2}\ ;\ y_S = -\frac{b^2 y_T}{x_T^2 + y_T^2}.$$

Il reste à contrôler que P et Q ont des ordonnées opposées.

Le point P est barycentre de (M, t) et $(T, 1 - t)$.

Son abscisse est nulle, donc t vérifie :

$$t x_M + (1 - t) x_T = 0.$$

Nous en déduisons y_P. Et de même y_Q.

Avec Maple

```
> restart:xm :=-b^2*xn/(xn^2+yn^2);
ym:=-b^2*yn/(xn^2+yn^2);
```

$$xm := -\frac{b^2\, xn}{xn^2 + yn^2}$$
$$ym := -\frac{b^2\, yn}{xn^2 + yn^2}$$

```
> xs:=-b^2*xt/(xt^2+yt^2);
ys:=-b^2*yt/(xt^2+yt^2);
```

$$xs := -\frac{b^2\, xt}{xt^2 + yt^2}$$
$$ys := -\frac{b^2\, yt}{xt^2 + yt^2}$$

```
> yp:=xm/(xm-xt)*yt-xt*ym/(xm-xt);
```

$$yp := -\frac{b^2\, xn\, yt}{(xn^2 + yn^2)\left(-\frac{b^2\, xn}{xn^2 + yn^2} - xt\right)} + \frac{xt\, b^2\, yn}{(xn^2 + yn^2)\left(-\frac{b^2\, xn}{xn^2 + yn^2} - xt\right)}$$

```
> yq:=xn/(xn-xs)*ys-xs*yn/(xn-xs);
```

$$yq := -\frac{xn\, b^2\, yt}{\left(xn + \frac{b^2\, xt}{xt^2 + yt^2}\right)(xt^2 + yt^2)} + \frac{b^2\, xt\, yn}{(xt^2 + yt^2)\left(xn + \frac{b^2\, xt}{xt^2 + yt^2}\right)}$$

```
> simplify(yp) ;
```

$$\frac{(xn\, yt - xt\, yn)\, b^2}{b^2\, xn + xt\, xn^2 + xt\, yn^2}$$

```
> simplify(yq) ;
```

$$-\frac{(xn\, yt - xt\, yn)\, b^2}{xn\, xt^2 + xn\, yt^2 + b^2\, xt}$$

Les valeurs obtenues pour y_P et y_Q sont opposées si, et seulement si :

$$b^2 x_N + x_T x_N^2 + x_T y_N^2 - b^2 x_T - x_N x_T^2 - x_N y_T^2 = 0 \quad (*)$$

Or l'équation : $b^2 x + x_T x^2 + x_T y^2 - b^2 x_T - x x_T^2 - x y_T^2 = 0$ est celle d'un cercle, cercle qui passe par les points T, A, B.

C'est le cercle circonscrit à ce triangle.

La condition (*) traduit le fait que les points N, T, A, B sont cocycliques.

Elle est vérifiée et les points P, Q sont symétriques par rapport à K.

3 Considérons un repère d'origine P tel que l'équation de la conique dans ce repère soit de la forme :

$$ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0,$$

c'est-à-dire ne contienne pas de terme en xy.

L'énoncé permet alors d'affirmer qu'il existe trois réels distincts m_1, m_2 et m_3 tel que, pour tout i dans $[\![1, 3]\!]$, la droite d'équation $y = m_i x$ rencontre la conique C en deux points M, N tels que le produit scalaire $\overrightarrow{PM}\,\overrightarrow{PN}$ soit constant.

L'équation donnant les abscisses des points d'intersection est :

$$x^2(a + bm_i^2) + x(c + dm_i) + e = 0.$$

Cette équation doit admettre deux racines x_1, x_2 (donc $a + bm_i^2 \neq 0$) telles que :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PM}\,\overrightarrow{PN} &= x_1x_2 + m_i^2 x_1 x_2 = (1 + m_i^2)x_1x_2 \\ &= (1 + m_i^2)\frac{e}{a + bm_i^2} = A.\end{aligned}$$

Il existe donc un réel A tel que l'équation en m :

$$m^2 e + e = aA + bAm^2$$

admet trois racines distinctes m_1, m_2 et m_3.

Nous pouvons en déduire que le polynôme en m : $m^2(e - bA) + (e - aA)$ est le polynôme nul.

D'où : $e = aA = bA$.

Les points A, A', B, B', C, C' sont supposés distincts. Donc A n'est pas nul.

Puis $a = b$.

La conique est un cercle.

15 Affixes des racines d'un polynôme

1 Le point M appartient à $\Gamma(\mathcal{E})$ si, et seulement si : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{|z - a_k|^2} = 0$, ce qui équivaut à : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\bar{z} - \bar{a}_k} = 0$,

ou encore, en conjuguant, à : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - a_k} = 0.$

2 a) $\dfrac{Q'(X)}{Q(X)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{X - a_k}$ où m_k est l'ordre de multiplicité du pôle a_k. Les points $A_1, A_2, \cdots, A_n$ étant distincts deux à deux, les pôles $a_1, a_2, \cdots, a_n$ sont tous simples, et par conséquent :

$$R(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - a_k}.$$

b) D'après la question **1)**, le point M appartient à $\Gamma(\mathcal{E})$ si, et seulement si : $R(z) = 0$, ce qui équivaut à $Q'(z) = 0$. $\Gamma(\mathcal{E})$ est donc l'ensemble des images dans le plan complexe des racines du polynôme Q'.

c) Q' est un polynôme de degré $n - 1$: il a donc au plus $n - 1$ racines distinctes. De plus, comme $n - 1 \geqslant 1$, il a au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Le cardinal de $\Gamma(\mathcal{E})$ est donc compris entre 1 et $n - 1$.

d) Si $n = 2$, $Q(X) = (X - a_1)(X - a_2)$, et $Q'(X) = 2X - (a_1 + a_2)$. Le polynôme Q' a une seule racine : $z = \dfrac{a_1 + a_2}{2}$; l'ensemble $\Gamma(\mathcal{E})$ est le singleton $\{I\}$ où I désigne le milieu du segment $[A_1A_2]$.

3 Soit r une rotation d'angle θ. Si M est le point d'affixe z, le point $r(M)$ a pour affixe $\mathrm{e}^{i\theta}z + b$ où b est l'affixe du point $r(O)$.

$M \in \Gamma\big(r(E)\big)$ équivaut à $\widetilde{Q}'(z) = 0$ où :

$\widetilde{Q}'(X) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - \mathrm{e}^{i\theta}a_k - b)$. Par conséquent :

$$r(M) \in \Gamma\big(r(\mathcal{E})\big) \iff \widetilde{Q}'(\mathrm{e}^{i\theta}z + b) = 0.$$

Or $\widetilde{Q}(\mathrm{e}^{i\theta}X + b) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{i\theta}(X - a_k) = \mathrm{e}^{in\theta}Q(X)$, d'où en dérivant :

$$\mathrm{e}^{i\theta}\widetilde{Q}'(\mathrm{e}^{i\theta}X + b) = \mathrm{e}^{in\theta}Q'(X).$$

D'où l'équivalence :

$$\widetilde{Q}'(\mathrm{e}^{i\theta}X + b) = 0 \iff Q'(z) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$r(M) \in \Gamma\big(r(\mathcal{E})\big) \iff M \in \Gamma(\mathcal{E}) \qquad \textbf{(1)}$$

On peut alors démontrer la double inclusion :

• si $M' \in r\big(\Gamma(\mathcal{E})\big)$, il existe $M \in \Gamma(\mathcal{E})$ tel que :

$M' = r(M)$. D'après **(1)**, $M' \in \Gamma\big(r(\mathcal{E})\big)$, d'où :

$$r\big(\Gamma(\mathcal{E})\big) \subset \Gamma\big(r(\mathcal{E})\big) \ ;$$

• si $M' \in \Gamma\big(r(\mathcal{E})\big)$, d'après **(1)** : $r^{-1}(M') \in \Gamma(\mathcal{E})$, d'où $M' \in r\big(\Gamma(\mathcal{E})\big)$, d'où :

$$\Gamma\big(r(\mathcal{E})\big) \subset r\big(\Gamma(\mathcal{E})\big).$$

En définitive : $\quad \Gamma\big(r(\mathcal{E})\big) = r\big(\Gamma(\mathcal{E})\big).$

4 ▬ Si $\mathcal{E}$ est l'ensemble des n sommets d'un polygone régulier, $r(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ où r est la rotation d'angle $\dfrac{2\pi}{n}$ ayant pour centre l'isobarycentre des points de $\mathcal{E}$. On a alors $r\big(\Gamma(\mathcal{E})\big) = \Gamma\big(r(\mathcal{E})\big) = \Gamma(\mathcal{E})$.

$\Gamma(\mathcal{E})$ est donc aussi l'ensemble des sommets d'un polygone régulier à n côtés. Comme Card$\Gamma(\mathcal{E}) \leqslant n-1$, ces points sont confondus et $\Gamma(\mathcal{E})$ est un singleton.

5 ▬ Réciproquement, supposons que $\Gamma(\mathcal{E}) = \{\omega\}$. On a alors $Q'(X) = \lambda(X-\omega)^{n-1}$, d'où :

$$Q(X) = \frac{\lambda}{n}\big((X-\omega)^n + k\big).$$

Comme le polynôme Q est unitaire, $\lambda = n$. Cherchons les racines de Q :

$$Q(z) = 0 \iff (z-\omega)^n = -k \iff z = \omega + \alpha_j$$

où les α_j sont les n racines n-ièmes de $(-k)$. $\mathcal{E}$ est un polygone régulier à n côtés dont le centre est le point d'affixe ω.

6 ▬ **a)** On a, dans ce cas :

$$Q(X) = (X-\alpha-i\beta)(X-\alpha+i\beta)(X+2\alpha)$$

d'où :

$$\begin{aligned} Q'(X) &= (X-\alpha-i\beta)(X-\alpha+i\beta) \\ &\quad + (X-\alpha-i\beta)(X+2\alpha) + (X-\alpha+i\beta)(X+2\alpha) \\ &= (X-\alpha)^2 + \beta^2 + 2(X-\alpha)(X+2\alpha) \\ &= 3X^2 + \beta^2 - 3\alpha^2 \end{aligned}$$

$$Q'(z) = 0 \iff X^2 = \alpha^2 - \frac{\beta^2}{3}.$$

$\Gamma(\mathcal{E})$ est l'ensemble des images des deux racines carrées du nombre complexe $\alpha^2 - \dfrac{\beta^2}{3}$.

On vérifie que $\Gamma(\mathcal{E})$ est un singleton si, et seulement si : $\alpha^2 - \dfrac{\beta^2}{3} = 0$, c'est-à-dire si, et seulement si :

$$a_1 = \alpha(1+i\sqrt{3}) = 2\alpha e^{\frac{i\pi}{3}} \ ;$$

$$a_2 = \alpha(1-i\sqrt{3}) = 2\alpha e^{-\frac{i\pi}{3}} \ ; \qquad a_3 = -2\alpha$$

$\mathcal{E}$ est alors un triangle équilatéral.

b) (ε) est une ellipse de demi-grand-axe α, de demi-petit-axe $\dfrac{\beta}{\sqrt{3}}$, donc de demi-distance-focale :

$$c = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\beta^2}{3}}.$$

(i) Les coordonnées des foyers de (ε) sont donc :

$$\left(\sqrt{\alpha^2-\frac{\beta^2}{3}}, 0\right) \quad \text{et} \quad \left(-\sqrt{\alpha^2-\frac{\beta^2}{3}}, 0\right).$$

(ii) L'équation de la tangente à (ε) en M_0 est :

$$\frac{xx_0}{\alpha^2} + \frac{3yy_0}{\beta^2} = 1.$$

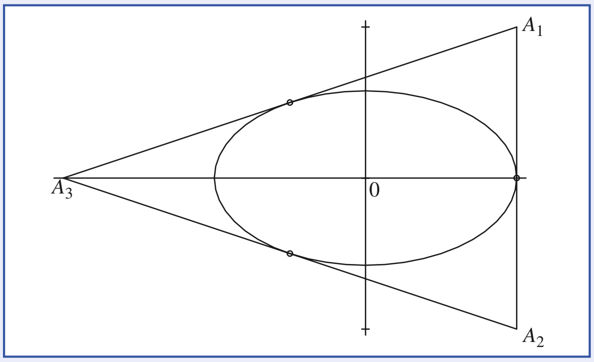
(iii) Les milieux des côtés du triangle $A_1A_2A_3$ ont pour affixes : $\alpha, -\dfrac{\alpha+i\beta}{2}, -\dfrac{\alpha-i\beta}{2}$, c'est-à-dire pour coordonnées : $(\alpha, 0)$, $\left(-\dfrac{\alpha}{2}, -\dfrac{\beta}{2}\right)$, et $\left(-\dfrac{\alpha}{2}, \dfrac{\beta}{2}\right)$.

On vérifie aisément que ces trois points appartiennent à l'ellipse (ε). Les tangentes à (ε) en ces points ont pour équations :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha} = 1 \ D_1 \\ -\dfrac{x}{2\alpha} - \dfrac{3y}{2\beta} = 1 \ D_2 \\ -\dfrac{x}{2\alpha} + \dfrac{3y}{2\beta} = 1 \ D_3 \end{cases}.$$

On vérifie que A_1 et A_2 appartiennent à D_1, A_2 et A_3 appartiennent à D_2, A_3 et A_1 appartiennent à D_3.

L'ellipse (ε) est donc tangente aux trois côtés du triangle $A_1A_2A_3$ en leurs milieux.



16 Triangles équilatéraux ayant leurs sommets sur une hyperbole

1 ▬ **a)** Le centre de gravité du triangle est l'isobarycentre des points A, B et C.

Donc : $\alpha = \dfrac{a+b+c}{3}$; $\beta = \dfrac{k}{3}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)$.

b) H est l'orthocentre du triangle si, et seulement si :

$$\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC} = 0.$$

Ceci équivaut à :

$$\begin{cases} (a-\lambda)(c-b)+k\left(\dfrac{k}{a}-\mu\right)\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}\right)=0 \\ (b-\lambda)(c-a)+k\left(\dfrac{k}{b}-\mu\right)\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}\right)=0 \end{cases}$$

Soit : $\lambda=-\dfrac{k^2}{abc}$; $\mu=-\dfrac{abc}{k}$.

Donc H appartient à (γ).

2 **a)** Puisque le triangle est équilatéral, la hauteur issue de A est aussi la médiane issue de A et elle est médiatrice du segment $[B,C]$. Les points G et H sont confondus.

b) $G=H \iff \begin{cases} \dfrac{a+b+c}{3}=-\dfrac{k^2}{abc} \\ \dfrac{k}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=-\dfrac{abc}{k} \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} a+b+c=-\dfrac{3k^2}{abc} \\ ab+bc+ca=-\dfrac{3(abc)^2}{k^2} \end{cases}$$

Notons $\lambda=\dfrac{a+b+c}{3}$. Alors les réels a,b,c sont racines de :

$$P(X)=X^3-3\lambda X^2-3\frac{k^2}{\lambda^2}X+\frac{k^2}{\lambda}.$$

c) Supposons que H n'est pas l'un des sommets de (γ).

Le cercle circonscrit au triangle ABC a pour équation :

$$(x-\lambda)^2+(y-\frac{k}{\lambda})^2=R^2,$$

avec $R=HA=HB=HC$.

Afin de ne pas détruire la symétrie en a, b et c, prenons :

$R^2=\dfrac{1}{3}(HA^2+HB^2+HC^2)$

$=\dfrac{1}{3}\left((a-\lambda)^2+k^2\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{\lambda}\right)^2\cdots+(c-\lambda)^2+k^2\left(\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{\lambda}\right)^2\right).$

Tous calculs faits :

$$(x-\lambda)^2+\left(y-\frac{k}{\lambda}\right)^2=4\left(\lambda^2+\frac{k^2}{\lambda^2}\right),$$

soit :

$$x^2-2x\lambda+y^2-2y\frac{k}{\lambda}=3\left(\lambda^2+\frac{k^2}{\lambda^2}\right).$$

Les abscisses des points d'intersection sont les solutions de l'équation :

$$x^4-2\lambda x^3-3\left(\lambda^2+\frac{k^2}{\lambda^2}\right)x^2-2\frac{k^2}{\lambda}x+k^2=0.$$

Cette équation se factorise :

$$\left(x^3-3\lambda x^2-3\frac{k^2}{\lambda^2}x+\frac{k^2}{\lambda}\right)(x+\lambda)=0.$$

L'intersection du cercle et de l'hyperbole contient aussi le point $D\left(-\lambda,-\dfrac{k}{\lambda}\right)$.

De plus : $P(-\lambda)=\dfrac{4}{\lambda}(k^2-\lambda^4)\neq 0$, car le point H n'est pas un sommet de l'hyperbole.

L'intersection du cercle et de l'hyperbole est bien constituée de quatre points distincts.

3 **a)** $Q(0)Q(r)=-2\dfrac{k^2}{r^2}(r^4+1)<0$.

La fonction polynôme Q est continue sur $\mathbb{R}$. Elle s'annule entre 0 et r.

Elle tend vers $-\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$.

Si $r<0$, $Q(0)$ est négatif. Q s'annule entre $-\infty$ et r, entre r et 0 et entre 0 et $+\infty$.

Si $r>0$, $Q(0)$ est positif. Q s'annule entre $-\infty$ et 0, entre 0 et r et entre r et $+\infty$.

Q admet donc trois racines réelles deux à deux distinctes et non nulles.

b) Les points R_1,R_2,R_3 ayant pour abscisses r_1,r_2,r_3 racines de $Q(X)$, nous avons :

$$r_1+r_2+r_3=3r\ ;\quad r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3=-3\frac{k^2}{r^2}\ ;$$

$$r_1r_2r_3=-\frac{k^2}{r}.$$

Donc :

$$\begin{cases} \dfrac{r_1+r_2+r_3}{3}=-\dfrac{k^2}{r_1r_2r_3} \\ \dfrac{k}{3}\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}\right)=-\dfrac{r_1r_2r_3}{k} \end{cases}.$$

L'orthocentre et le centre de gravité du triangle $R_1R_2R_3$ sont donc confondus.

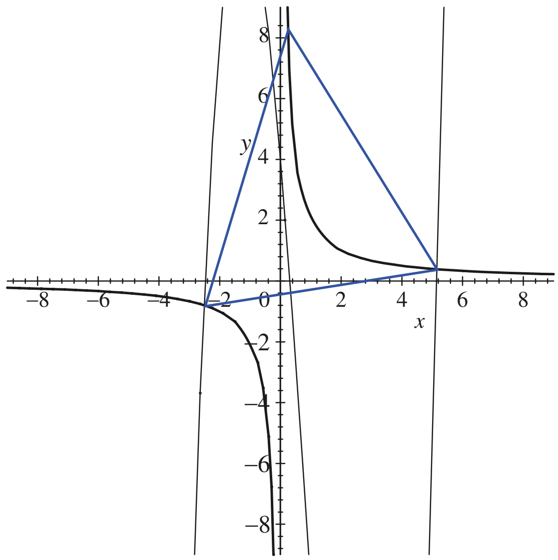
Le triangle est équilatéral.

4 Fixons un réel r non nul et traçons le graphe de la fonction $\left(x\rightarrow x^3-3rx^2-3\dfrac{k^2}{r^2}x+\dfrac{k^2}{r}\right)$ dans le plan $\mathcal{P}$. Ce graphe coupe l'axe $(x'x)$ en trois points distincts. Les droites verticales passant par ces points rencontrent l'hyperbole en trois points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, d'après la question **3) b)**.

La question **2) b)** permet d'affirmer que nous obtenons ainsi tous les triangles équilatéraux dont les sommets sont inscrits sur l'hyperbole.

Avec Maple

```
> L:=plot(2/x,x=-9..9,y=-9..9) : >
J:=plot(x^3-3*x^2-12*c+4,x=-9..9,y=-9..9) :
> with plot : > display(L,J) ;
```



17 Établissement de l'orbite d'une étoile double

Préliminaire

Dans le cas d'un cercle, il est évident par symétrie que le lieu du milieu d'une corde parallèle à une droite donnée est un diamètre du cercle. Une ellipse quelconque est l'image d'un cercle par une affinité, qui, par son caractère affine, conserve les notions de parallèles, de milieu et d'alignement. Il en résulte que le lieu cherché est une corde de l'ellipse passant par le centre.

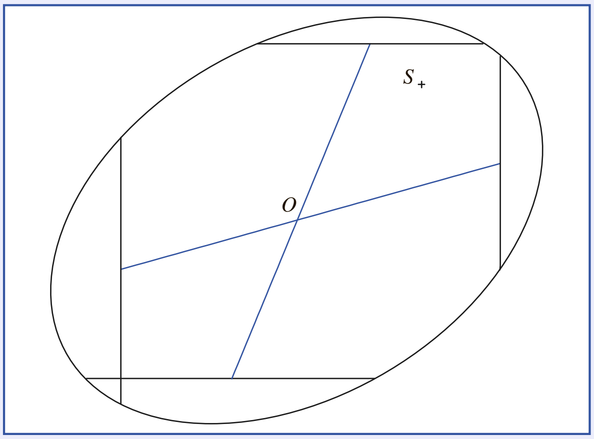
Faute de cette idée, on peut trouver le résultat par le calcul, mais c'est plus long...

Si la corde initiale est parallèle à l'un des axes de l'ellipse, il est clair par symétrie que le lieu est la corde incluse dans l'autre axe.

Un peu d'astronomie

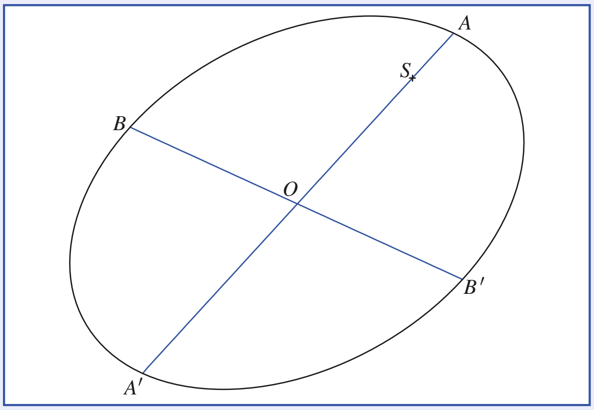
1 (E) est l'intersection d'un cylindre elliptique par un plan, c'est donc une ellipse. Le foyer est défini par des relations métriques qui ne se conservent pas par projection : le point S n'a donc aucune raison d'être un foyer de (E).

2 D'après le résultat de la question préliminaire, le centre Ω de l'ellipse $(\mathcal{E})$ est le point de concours de tous les lieux des milieux des cordes parallèles à une droite donnée. Cette propriété se conservant par projection, le point O projeté de Ω est le centre de l'ellipse (E). Il suffit pour le construire de tracer deux paires de cordes parallèles dont on joint les milieux.



Doc. 1

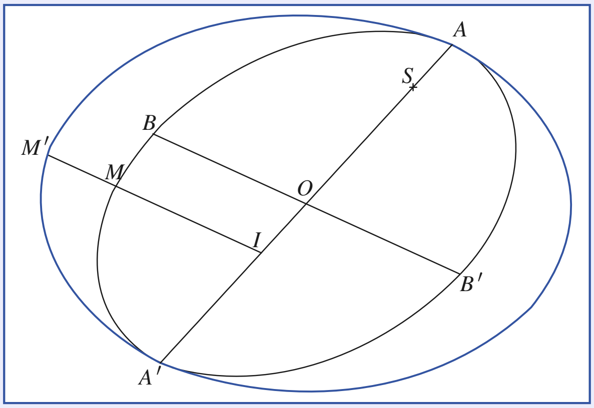
Connaissant le point O on peut tracer la droite (OS), image par p du grand-axe de $(\mathcal{E})$. En joignant les milieux de deux cordes parallèles à (OS), on obtient l'image du petit-axe.



Doc. 2

3 La projection conservant les rapports de longueur sur une même droite, l'excentricité de l'ellipse $(\mathcal{E})$ est $e = \dfrac{OS}{OA}$, soit aux erreurs de mesure près : $e \simeq 0.73$.

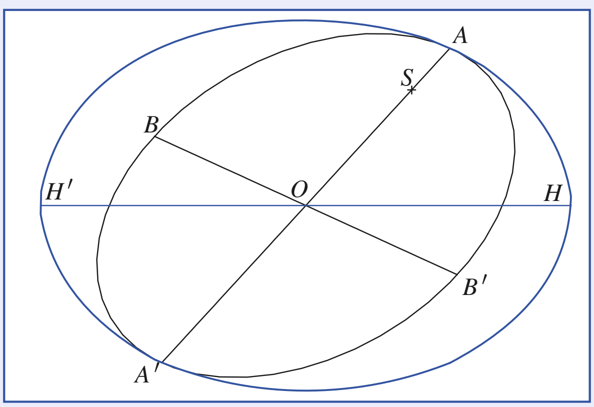
4 Le cercle principal de $(\mathcal{E})$ est l'image de $(\mathcal{E})$ par l'affinité dont la base est le grand axe, la direction le petit axe et le rapport $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{1-e^2}}$, soit approximativement 1.46. Par la projection p, l'image du cercle (Γ) est une ellipse (C), image de (E) par l'affinité de base (AA'), de direction (BB') et de rapport 1.46. On peut construire cette ellipse point par point.



Doc. 3

$$IM' = 1.46 \cdot IM$$

5 ▬ En cherchant les points de (C) les plus éloignés de O, on obtient le grand-axe $[HH']$ de l'ellipse (C), qui est l'image par p du diamètre du cercle (Γ) parallèle à Δ.



Doc. 4

Les longueurs sur une droite parallèle à Δ se conservant par projection, on peut mesurer directement le demi-grand axe de $(\mathcal{E})$:

$$a = OH \simeq 3.8.$$

On en déduit la demi-distance focale :

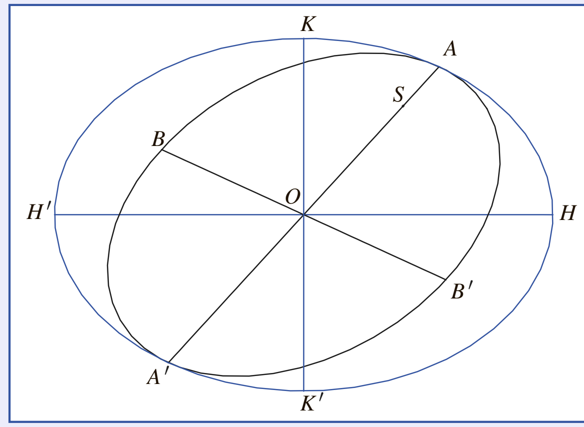
$$c = ea \simeq 2.8,$$

et le demi-petit axe :

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \simeq 2.6.$$

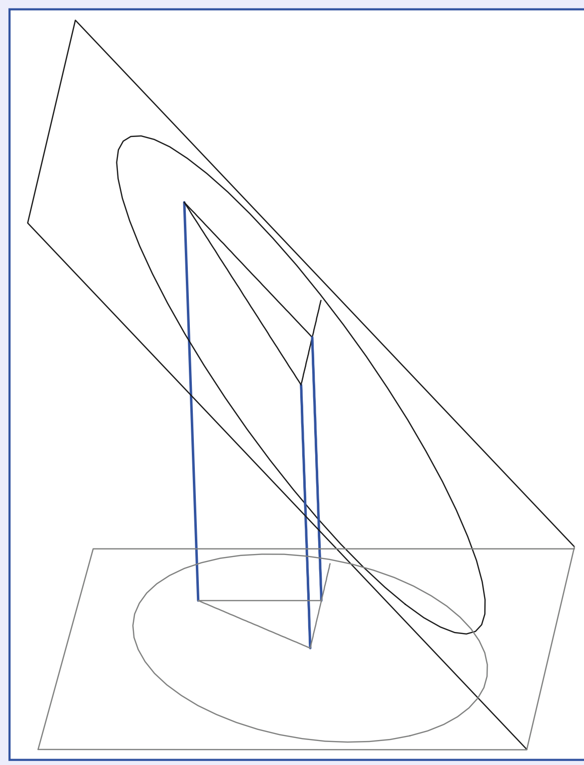
6) Le diamètre du cercle (Γ) perpendiculaire à Δ se projette suivant le petit axe de l'ellipse (C), et sa longueur est multipliée par le cosinus de l'angle i. D'où :

$$\cos i = \frac{OK}{OH} \simeq 0.71, \qquad \text{et} \qquad i \simeq 45^o.$$



Doc. 5

7 ▬ Soit Λ le projeté orthogonal de Σ sur la parallèle à Δ passant par Ω, et L le projeté orthogonal de S sur la parallèle à Δ passant par O.



Doc. 6

On a :

$$\tan\alpha = \frac{\Sigma\Lambda}{\Omega\Lambda} \quad \text{et} \quad \tan\beta = \frac{SL}{OL}.$$

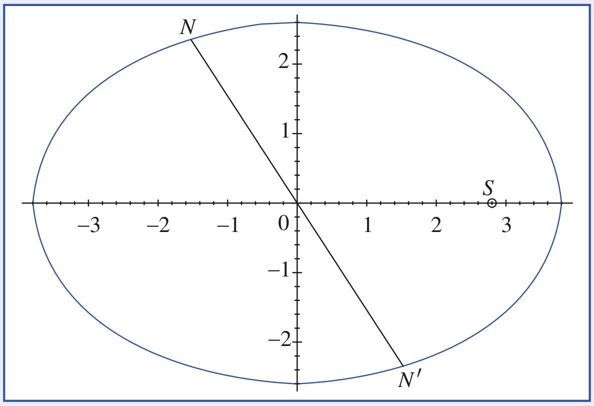
Or $OL = \Omega\Lambda$, d'où :

$$\frac{\tan\beta}{\tan\alpha} = \frac{SL}{\Sigma\Lambda} = \cos i.$$

On peut mesurer sur la figure $\tan\beta \simeq 1.09$; d'où :

$$\tan\alpha = \frac{\tan\beta}{\cos i} \simeq 1.54 \quad \alpha \simeq 57°.$$

8 Nous pouvons maintenant représenter l'orbite $(\mathcal{E})$ dans son plan :



Doc. 7

$a = 3.8$; $b = 2.6$; $c = 2.8$.

18 Les théorèmes de Pappus et de Pascal

1 Notons :

$$d_1 = u_1x + v_1y + h_1;$$
$$d_2 = u_2x + v_2y + h_2; \ .$$
$$d_3 = u_3x + v_3y + h_3$$

Le système : $\begin{cases} d_1 = 0 \\ d_2 = 0 \\ d_3 = 0 \end{cases}$ dont les inconnues sont x, y est de rang $\leqslant 2$.

L'existence des réels non tous nuls $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que : $\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3 = 0$ équivaut à la dépendance linéaire des lignes du système, donc au fait que l'une des lignes, par exemple la première, est combinaison linéaire des autres.

Si les lignes 2 et 3 sont linéairement indépendantes, donc les droites d_2 et d_3 sécantes, la droite d_1 passe par le point d'intersection, et réciproquement.

Si les lignes 2 et 3 sont linéairement dépendantes, donc les droites d_2 et d_3 parallèles, la droite d_1 leur est parallèle, et réciproquement.

2 Conservons les notations de la question précédente.

$\lambda_1 d_1^2 + \lambda_2 d_2^2 = \lambda_1(u_1x + v_1y + h_1)^2 + \lambda_2(u_2x + v_2y + h_2)^2$.

$\lambda_1 d_1^2 + \lambda_2 d_2^2$ est un cercle si, et seulement si :

$$\begin{cases} \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 = \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 \\ \lambda_1 u_1 v_1 + \lambda_2 u_2 v_2 = 0 \end{cases} .$$

Le déterminant de ce système dont les inconnues sont λ_1, λ_2 est :

$$\begin{vmatrix} u_1^2 - v_1^2 & u_2^2 - v_2^2 \\ u_1v_1 & u_2v_2 \end{vmatrix} = (u_1u_2 + v_1v_2)(u_1v_2 - u_2v_1).$$

Il existe des réels non nuls λ_1, λ_2 tels que $\lambda_1 d_1^2 + \lambda_2 d_2^2$ soit un cercle si, et seulement si, les droites d_1, d_2 sont parallèles ou perpendiculaires.

3 **a)** Choisissons un repère tel que la droite d soit l'axe $(x'x)$: $d = y$.

Puisqu'il existe $n+1$ points de d appartenant à C, l'équation $C(x, 0) = 0$ dont les solutions sont les abscisses des points d'intersection de d et de C admet $n + 1$ racines distinctes.

Or cette équation est un polynôme en x de degré $\leqslant n$.

Ce polynôme est nul. Tout point de d appartient à C.

La droite d est contenue dans C.

b) Conservons le même repère.

Si la droite d est contenue dans C, tout point $M(x, 0)$ appartient à C, donc : $C(x, 0) = 0$.

$C(x, 0)$ est le polynôme nul de $\mathbb{R}[X]$.

Le polynôme $C(x, y)$, considéré comme polynôme en y, a un terme constant $C(x, 0)$ nul.

Il s'écrit donc $C(x, y) = yA(x, y)$.

Réciproquement, si $C(x, y) = yA(x, y)$, la droite $d = y$ est contenue dans C.

c) Considérons les courbes algébriques :

$$A = x^2 + y^2 ; \quad C = xy.$$

La courbe A est contenue dans C, mais il n'existe pas de courbe algébrique B telle que : $C = AB$.

Toutefois, si A, B, C sont trois courbes algébriques telles que : $C = AB$, alors A est contenue dans C.

4 Choisissons le repère tel que les axes $(x'x)$ et $(y'y)$ soient portés par les droites d_2 et d_1.

P est alors l'origine du repère.

C est tangente à d_2 en P si, et seulement si, le système :

$$\begin{cases} C(x, y) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

admet la solution double $x = 0$.

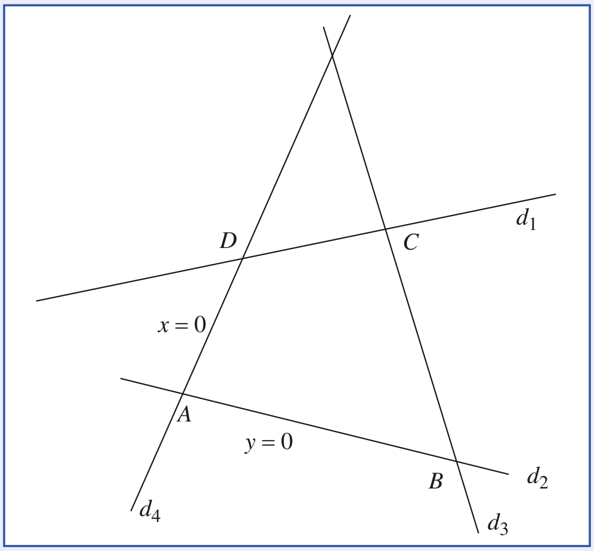
Cette condition équivaut à dire que le polynôme en x, $C(x, 0)$, admet la racine double $x = 0$.

Il est donc de valuation $\geqslant 2$.

Il existe un réel λ et un polynôme A tels que :

$$C = \lambda x^2 + yA = \lambda d_1^2 + d_2 A.$$

5



Doc. 1

Remarquons d'abord que toute équation de la forme :

$C = \lambda d_1 d_2 + \mu d_3 d_4$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$

est l'équation d'une conique passant par les quatre points.

Montrons la réciproque.

Choisissons le repère tel que les axes $(x'x)$ et $(y'y)$ soient portés par les droites d_2 et d_4.

Alors : $d_2 = y$; $d_4 = x$.

Notons : $d_1 = ux + vy + h$; $d_3 = u'v + v'y + h'$.

A est alors l'origine du repère.

Soit $K = ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey$ une conique passant par les quatre points.

Les coefficients a, b, c, d, e vérifient les conditions :

$$\begin{cases} ax_B^2 + \quad + \quad + dx_B + \quad = 0 \\ ax_C^2 + by_C^2 + 2cx_C y_C + dx_C + ey_C = 0 \\ \quad + by_D^2 + \quad + \quad + ey_D = 0 \end{cases}$$

Nous cherchons λ, μ tels que :

$$K = \lambda y(ux + vy + h) + \mu x(u'x + v'y + h').$$

En identifiant les deux équations de K, nous obtenons :

$$\lambda v = b\ ; \quad \mu u' = a.$$

Ces relations fixent λ et μ car $u'v \neq 0$.

En effet, d_2 et d_3 sont sécantes, ainsi que d_1 et d_4.

Avec ces valeurs pour λ et μ, la courbe :

$$K' = \lambda y(ux + vy + h) + \mu x(u'x + v'y + h')$$

est une conique passant par les points A, B, C, D.

Écrivons K' sous la forme :

$$K' = ax^2 + by^2 + 2c'xy + d'x + e'y.$$

Les coefficients a, b, c', d', e' vérifient les conditions :

$$\begin{cases} ax_B^2 + \quad + \quad + d'x_B + \quad = 0 \\ ax_C^2 + by_C^2 + 2c'x_C y_C + d'x_C + e'y_C = 0 \\ \quad + by_D^2 + \quad + \quad + e'y_D = 0 \end{cases}.$$

Nous en déduisons :

$$x_B \neq 0 \implies d' = d\ ; \qquad y_D \neq 0 \implies e' = e\ ;$$
$$x_C y_C \neq 0 \implies c' = c.$$

Ce qu'il fallait démontrer....

6 **a)** Pour tout couple non nul de réels (λ, μ), la courbe $d = \lambda d_1 + \mu d_2$ est une droite passant par A.

Réciproquement, si B est un point distinct de A, les réels $d_1(x_B, y_B)$ et $d_2(x_B, y_B)$ ne sont pas simultanément nuls.

La courbe $d = -d_1(x_B, y_B)d_2 + d_2(x_B, y_B)d_1$ est une droite passant par A et B.

C'est la droite (AB).

b) Appelons Γ la courbe décrite par le point d'intersection M de d et d'.

Le point $M(x, y)$ appartient à Γ si, et seulement s'il existe (λ, μ) non nul tel que :

$$\begin{cases} \lambda d_1(x, y) + \mu d_2(x, y) = 0 \\ \lambda d_3(x, y) + \mu d_4(x, y) = 0 \end{cases}.$$

Cette condition équivaut à :

$$d_1(x, y)d_4(x, y) - d_2(x, y)d_3(x, y) = 0.$$

La courbe Γ est la conique : $\Gamma = d_1 d_4 - d_2 d_3$.

7 **a)** D'après la question **4)**, il existe un réel λ et une courbe algébrique A tels que :

$$C = \lambda d^2 + t_1 A.$$

Or, le polynôme C est de degré 2 et t_1 de degré 1.

A est donc de degré 1, A est une droite.

D'autre part : $C(T_2) = 0$.

D'où : $A(T_2) = 0$.

Cette droite passe par T_2 et T_2 appartient à d.

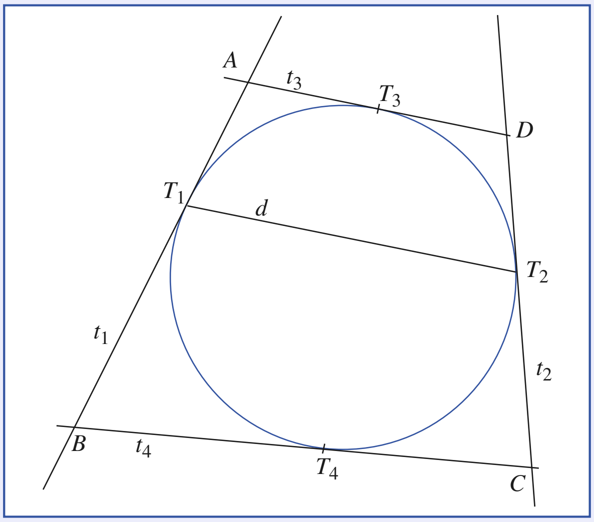
Réutilisons la question **4)**.

Le cercle C est tangent en T_2 à A.

Par conséquent : $A = t_2$ et :

$$C = \lambda d^2 + t_1 t_2.$$

b)



Doc. 2

En utilisant la question précédente, nous savons qu'il existe deux réels λ, μ tels que :

$C = \lambda d^2 + t_1 t_2$ et $C = \mu d'^2 + t_3 t_4$.

Nous savons aussi, grâce à la question **5)**, que les coniques passant par A, B, C, D sont de la forme :

$K = \alpha t_1 t_2 + \beta t_3 t_4$, avec α, β réels.

D'où :
$$K = (\alpha + \beta)C - (\alpha\lambda d^2 + \beta\mu d'^2).$$

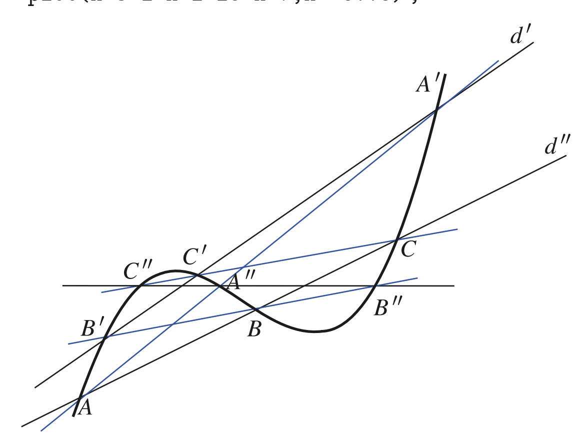
Par conséquent, K est un cercle si, et seulement s'il existe α, β tels que $\alpha\lambda d^2 + \beta\mu d'^2$ est un cercle.

Nous avons montré dans la question **2)** que ceci équivaut à dire que d et d' sont parallèles ou perpendiculaires.

8 ▬ a)

Avec Maple

```
> plot(x^3+2*x^2-25*x-7,x=-8..8);
```



Notons a, b, c les droites $(AA'), (BB'), (CC')$.

Si les droites d et d' sont sécantes, appelons P leur point d'intersection.

Puisque A, B, C, A', B', C' sont distincts, P n'appartient à aucune des droites a, b, c.

Soit $Q = \Gamma - \lambda abc$, avec $\lambda = \dfrac{\Gamma(P)}{a(P)b(P)c(P)}$.

Le polynôme Q est de degré $\leqslant 3$.

La courbe Q contient quatre points de d ; A, B, C, P.

D'après **3) a)**, la droite d est contenue dans Q.

D'après **3) b)**, il existe un polynôme A tel que : $Q = dA$.

De plus, le degré de A est $\leqslant 2$.

Mais les points A', B', C' sont contenus dans Γ, donc dans Q, donc dans A.

La droite d' est contenue dans A, d'où :
$$A = d'R.$$

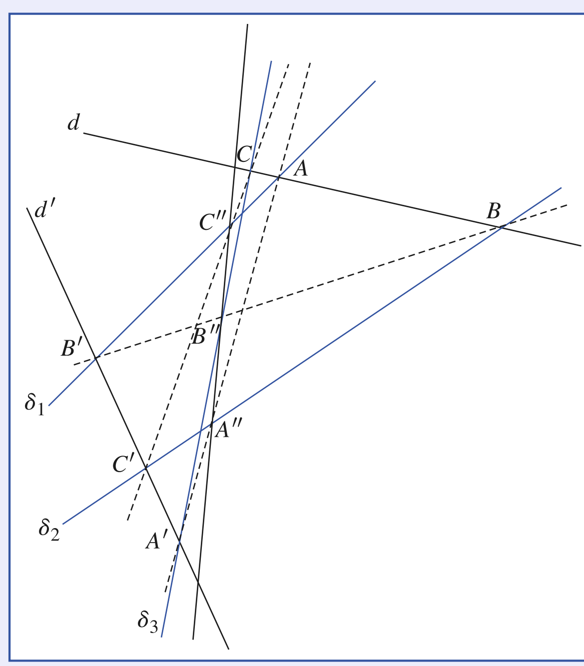
Le degré de R est inférieur ou égal à 1.

R est une droite. Les points A'', B'', C'' appartiennent à Γ, donc à A, puis à R.

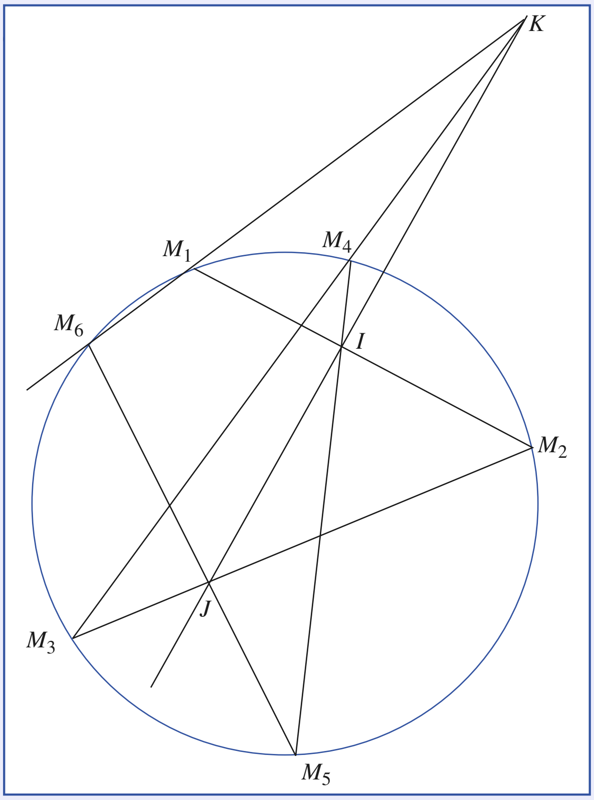
Ces points sont alignés.

b) Nous obtenons six alignements.

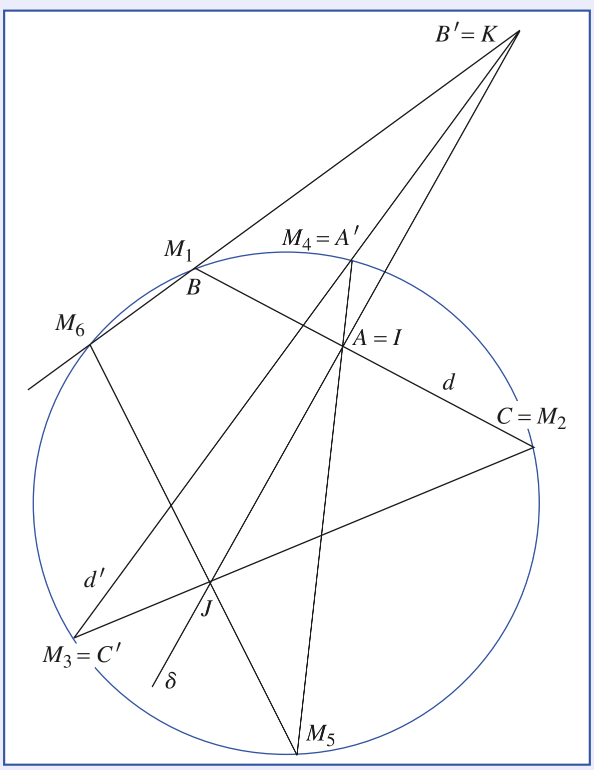
c) Considérer la conique $\Gamma = \delta_1\delta_2\delta_3$ et appliquer le résultat de **8) a)**.



Doc. 3



Doc. 4



Doc. 5

Nous allons utiliser la question **8) a)**.

Notons d la droite (M_1M_2), d' la droite (M_3M_4), δ la droite (IK).

Considérons la cubique $\Gamma = C\delta$.

Γ coupe d en I, M_1, M_2.

Γ coupe d' en M_4, K, M_3.

(IM_4) coupe Γ en M_5, (KM_1) coupe Γ en M_6, (M_2M_3) coupe Γ en L.

D'après la question **8) a)**, les points M_5, M_6, L sont alignés.

Donc L est le point d'intersection de (M_2M_3) et (M_5M_6).

$L = J$ et les points I, J, K sont alignés.

19 Cône de révolution contenant une ellipse

On choisit un repère orthonomé dans lequel l'ellipse a pour équations :

$$z = 0 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La relation $\dfrac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$, donne : $a = b\sqrt{2}$.

On obtient l'équation : $x^2 + 2y^2 = 2b^2$.

Le grand axe de l'ellipse est l'intersection du plan de l'ellipse et du plan perpendiculaire contenant le sommet du cône. Les sommets des cônes de révolution contenant l'ellipse sont dans le plan d'équation $y = 0$.

Réciproquement soit $S(X, 0, Z)$ les coordonnées d'un point de ce plan. Cherchons une condition pour qu'il soit le sommet d'un cône de révolution contenant cette ellipse.

Un point $M(x, y, z)$ sera sur le cône si, et seulement si, la droite (SM) rencontre l'ellipse : il existe λ tel que :

$(X + \lambda(x - X))^2 + 2(\lambda y)^2 = 2b^2 \quad \text{et} \quad Z + \lambda(z - Z) = 0.$

On obtient l'équation d'une quadrique :

$$(Xz - Zx)^2 + 2Z^2y^2 = 2b^2(z - Z)^2.$$

Étudions la matrice de la forme quadratique associée :

$$\begin{pmatrix} Z^2 & 0 & -XZ \\ 0 & 2Z^2 & 0 \\ -XZ & 0 & X^2 - 2b^2 \end{pmatrix}.$$

Le cône sera de révolution si, et seulement si, elle a une valeur propre double. La seule possibilité est $2Z^2$ valeur propre double.

On obtient la condition : $2Z^2(Z^2 - X^2 + b^2) = 0$.

On trouve l'hyperbole d'équations : $Y = 0$ et $Z^2 - X^2 + b^2 = 0$.

20 Ensemble de normales à une surface

La surface S a pour équation implicite :

$$\operatorname{Arctan}\frac{y}{x} - z = 0.$$

On exprime le vecteur normal en tout point à l'aide des dérivées partielles de la fonction :

$$f : (x, y, z) \longmapsto \operatorname{Arctan}\frac{y}{x} - z.$$

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x, y, z) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\vec{j} - \vec{k}.$$

La normale en $M(x, 0, 0)$ est dirigée par le vecteur $\vec{j} - x\vec{k}$ colinéaire à $\overrightarrow{\operatorname{grad}} f(x, 0, 0)$.

Un représentation paramétrique est : $\begin{cases} X = x \\ Y = t \\ Z = -tx \end{cases}$ où t décrit $\mathbb{R}$ et x décrit $\mathbb{R}^*$.

On obtient la surface d'équation $Z = -XY$ privée de la droite (OY) en éliminant t et x. Il s'agit d'un paraboloïde hyperbolique privé d'une génératrice.

21 Une surface de révolution

On constate qu'il s'agit d'une hyperbole du plan d'équation $z = 0$ d'axe focale : la première bissectrice que l'on fait tourner autour de cette bissectrice. On devine qu'il s'agit d'une hyperboloïde de révolution à deux nappes .

Dans le nouveau repère $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ défini par :

$$\vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} + \vec{j}), \quad \vec{I} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{i} + \vec{j}), \quad \vec{K} = \vec{k}$$

cette hyperbole a pour équations :

$$Z = 0 \quad \text{et} \quad X^2 - Y^2 = 2.$$

La surface de révolution est d'axe (OX).

Donc son équation est :

$$X^2 - Y^2 - Z^2 = 2.$$

En revenant dans le repère initial on obtient l'équation $2xy - z^2 = 2$.

8 Géométrie différentielle*

RAPPELS DE COURS

ÉTUDE D'UNE COURBE

La tangente en un point d'une courbe définie paramétriquement est dirigée par le premier vecteur dérivé non nul, s'il existe.

• Les formules suivants permettent de **calculer la courbure** :

$$c(t) = \frac{\left[\overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}\,M}{\mathrm{d}\,t}}, \overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}^2\,M}{\mathrm{d}\,t^2}}\right]}{\left\|\overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}\,M}{\mathrm{d}\,t}}\right\|^3}.$$

• Avec le repère de Frénet :

$$\overrightarrow{\frac{\mathrm{d}\,M}{\mathrm{d}\,t}} = \frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}\overrightarrow{T(t)}$$

$$\overrightarrow{\frac{\mathrm{d}^2\,M}{\mathrm{d}\,t^2}} = \frac{\mathrm{d}^2\,s}{\mathrm{d}\,t^2}\overrightarrow{T(t)} + c(t)\left(\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}\right)^2\overrightarrow{N(t)}.$$

• Dans le cas d'une courbe paramétrée par $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{\frac{\mathrm{d}\,M}{\mathrm{d}\,t}} = x'(t)\,\vec{i} + y'(t)\,\vec{j}$$

$$\overrightarrow{\frac{\mathrm{d}^2\,M}{\mathrm{d}\,t^2}} = x''(t)\,\vec{i} + y''(t)\,\vec{j}$$

$$c(t) = \frac{(x'y'' - y'x'')}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

* Vous pourrez, à ce sujet, consulter le passionnant site Internet : perso.club-internet.fr/rferreol/encyclopedie

• Lorsque l'arc est défini en coordonnées polaires par $\rho = \rho(\theta)$

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = \rho(\theta)\overrightarrow{u}(\theta)$$
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\,\theta} = \rho'\overrightarrow{u}(\theta) + \rho\,\overrightarrow{v}(\theta)$$
$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\,\theta^2} = (\rho'' - \rho)\overrightarrow{u}(\theta) + \rho'\overrightarrow{v}(\theta)$$
$$c(\theta) = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.$$

• Pour **déterminer le rayon de courbure**, on peut :

– utiliser les tableaux précédents et la définition $R = 1/c$;

– exprimer $\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}$, puis $\overrightarrow{T}$ et $\varphi = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T})$; alors :

$$R = \frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,\varphi} = \frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}\frac{\mathrm{d}\,t}{\mathrm{d}\,\varphi};$$

– écrire :

$$R = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}\,s}{\mathrm{d}\,t}\right)^3}{\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\,t}, \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\,t^2}\right]}.$$

• La **tangente en un point régulier $M(a, b)$** d'une courbe plane définie par une représentation implicite $f(x, y) = 0$ est la droite passant par M et normale au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(a, b)$.

ÉTUDE D'UNE SURFACE

• Pour montrer qu'**un point M d'une surface est régulier** :

– si la surface est définie par une équation cartésienne explicite $z = g(x, y)$, avec g de classe $\mathcal{C}^1$, on rappelle que tout point de cette surface est régulier ;

– si la surface est définie par une équation cartésienne implicite, $f(x, y, z) = 0$, avec f de classe $\mathcal{C}^1$, on vérifie que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f(M) \neq 0$;

– si la surface est définie par une représentation paramétrique, $M = \varphi(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$, on vérifie que les vecteurs $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)$ sont linéairement indépendants.

• **Plan tangent en un point régulier M d'une surface :**

– si la surface est définie par une représentation implicite $f(x, y, z) = 0$ et $M = (a, b, c)$, l'équation du plan tangent en M est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c)(X - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c)(Y - b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)(Z - c) = 0\,;$$

– si la surface est définie par une représentation paramétrique, $M = \varphi(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$ et $M = \varphi(u,v)$, l'équation du plan tangent en M est :

$$\begin{vmatrix} X - x(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ Y - y(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \\ Z - z(u,v) & \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix} = 0\ ;$$

– si la surface est définie par une représentation cartésienne explicite, on se ramène à l'un des cas ci-dessus.

• **Normale en un point régulier** M d'une surface :

– si la surface est définie par une représentation implicite $f(x,y,z) = 0$ et $M = (a,b,c)$, la normale est la droite :

$$(a,b,c) + \mathbb{R}\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(a,b,c)\ ;$$

– si la surface est définie par une représentation paramétrique $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ et $M = \varphi(u,v)$, la normale est la droite :

$$D = N + \mathbb{R}\ \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\ ;$$

– si la surface est définie par une représentation cartésienne explicite, on se ramène à l'un des cas ci-dessus.

• Pour étudier en un point la **courbe définie par l'intersection de deux surfaces**, on vérifie :

– si le point est régulier sur chacune des deux surfaces ;

– si les deux surfaces ne sont pas tangentes en ce point.

On peut alors conclure que :

le point est régulier sur la courbe ;

la tangente en ce point est l'intersection des deux plans tangents en ce point aux deux surfaces.

ÉNONCÉS

1 Pour s'entraîner avec les coordonnées polaires

1 Donner les équations polaires :

a) du cercle de diamètre $[O, A]$, avec $A(2a, 0)$ et $a > 0$;

b) du cercle de diamètre $[O, A]$, avec $A(0, 2a)$ et $a > 0$;

c) du cercle de diamètre $[O, A]$, avec $A(2a, 2a\tan(\alpha))$;

d) du cercle de centre $I(a, b)$ et de rayon R ;

e) d'une droite.

2 Reconnaître la nature de la courbe d'équation polaire :

$$\rho = \frac{3}{1+2\cos(\theta)}.$$

Déterminer ses éléments caractéristiques.

Donner l'allure de la courbe sans étude de cette courbe.

3 Faire de même avec :

$$\rho = \frac{6}{2+\cos(\theta)}.$$

4 *D'après ESTP.*

Construire la courbe définie en coordonnées polaires par :

$$\rho = \frac{\sin\theta}{\sqrt{3} - 2\cos\theta}.$$

Préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

5 Construire les courbes d'équations polaires :

a) $\rho = \sin(2\theta)$;

b) $\rho = \sin(4\theta)$;

c) $\rho = \sin(3\theta)$;

d) $\rho = \sin(1.5\theta)$;

e) $\rho = \sin(2.1\theta)$.

6 *D'après ESTP.*

a) Tracer la courbe d'équation polaire :

$$\rho = a\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}, \ (a > 0).$$

b) Déterminer une équation cartésienne du troisième degré de cette courbe.

c) Calculer l'aire de la boucle déterminée par le point double.

7 **a)** Tracer la courbe définie en coordonnées polaires par :

$\rho = \sin^2\theta(\sin\theta + \sin 2\theta)$ pour $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

b) Calculer l'aire ainsi définie.

Conseils

1) Faire des figures, utiliser les triangles rectangles et les projections orthogonales...

2) et **3)** Ne pas hésiter à revoir le cours...

4) L'étude commence par la détermination du domaine de définition, puis du domaine d'étude.

Pour l'étude de la branche infinie, effectuer un développement limité.

Ne pas calculer ρ'. Il est inutile.

5) Utiliser la périodicité et l'imparité. Traduire ces propriétés en termes de symétrie pour la courbe.

6) b) Soit $M(x, y)$ un point de la courbe.

Calculer x; $a - x$; $(a - x)\rho$.

Ne pas oublier la réciproque..

7) a) Un amour de courbe...

2 Pour s'entraîner avec les coordonnées paramétriques

1 On considère la courbe Γ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y - \sqrt{3}z = 1 \end{cases}$$

a) Donner la nature de Γ.

Déterminer la nature de la courbe C, projetée orthogonale de Γ sur (xOy).

Donner une équation cartésienne de C.

Préciser C.

b) Déterminer une paramétrisation de C.

En déduire une paramétrisation de Γ.

2 *Oral ENS.*

Soit $\phi_1, \dots, \phi_6$ les arcs paramétrés de $]0,1]$ dans $\mathbb{C}$ définis par :

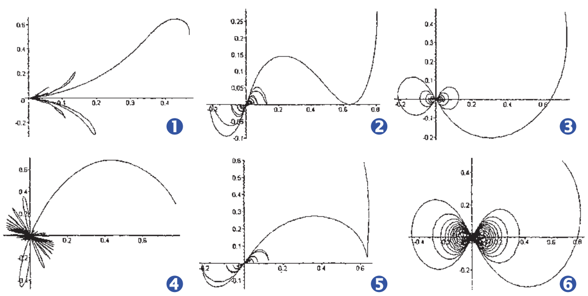
$$\phi_1(t) = t\sin\frac{1}{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\cos t^4}{\sqrt{t}}} \qquad \phi_2(t) = t\sin\frac{1}{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cos\frac{1}{t}}$$

$$\phi_3(t) = t\sin\frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cos\frac{1}{t^2}} \qquad \phi_4(t) = t\sin\frac{1}{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cos^2\frac{1}{t}}$$

$$\phi_5(t) = t\sin\frac{1}{t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{\left|\cos\frac{1}{t}\right|}} \qquad \phi_6(t) = \sqrt[3]{t}\sin^2\frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sin\frac{1}{\sqrt{t}}}$$

Afin d'effectuer une étude locale de ces arcs au voisinage de 0, on les a représentés dans ce voisinage. Les *figures* sont données ci-dessous.

Retrouver, par des arguments mathématiques simples, quel arc chaque figure représente.



Conseils

1) a) Pour déterminer une équation cartésienne de C, exprimer qu'un point $M(x, y, 0)$ du plan (xOy) appartient à C si, et seulement si...
b) On paramètre une ellipse en utilisant $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

3 Suite d'arcs paramétrés

D'après Icare.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Pour tout $n \geqslant 1$, on note $\mathcal{C}_n$ l'arc paramétré de point courant $M_n(t)$, dont les coordonnées sont :

$$x_n(t) = \cos^n(t)\,; \quad y_n(t) = \sin^n(t)\,, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

On désigne par L_n la longueur de $\mathcal{C}_n$.

1 **a)** Donner l'allure des courbes $\mathcal{C}_n$.

b) Exprimer L_n à l'aide d'une intégrale définie, en utilisant le changement de variable $u = \cos(2t)$.

2 Calculer L_4 et L_5.

3 On note :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \; A = M_n(0), B = M_n\left(\frac{\pi}{2}\right), I_n = M_n\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad I_nA + I_nB \leqslant L_n \leqslant OA + OB.$$

En déduire : $\lambda = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} L_n$.

Conseil

3) Majorer L_n en majorant $\sqrt{x_n'^2(t) + y_n'^2(t)}$.

4 Rayon de courbure en un point d'une courbe définie implicitement

D'après ESTP.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) dans le plan muni d'un repère orthonormé, vérifient l'égalité $\left|z + z^2\right| = 1$, où $z = x + \mathrm{i}y$.

1 Déterminer un polynôme P tel que $P(x, y) = 0$ soit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point M appartienne à $\mathcal{C}$.

2 Déterminer le point S de $\mathcal{C}$ de coordonnées $(a, 0)$ avec $a > 0$.

3 Déterminer le rayon de courbure en S à $\mathcal{C}$.

Conseil

3) Utiliser le théorème des fonctions implicites.

5 Courbe à courbure constante tracée sur une sphère

Soit $\mathcal{S}$ une sphère de centre O de rayon R, et γ une courbe paramétrée de classe $\mathfrak{C}^2$ tracée sur $\mathcal{S}$.

1 Montrer que le rayon de courbure en tout point de γ est inférieur ou égal à R.

2 Déterminer γ si en tout point le rayon de courbure est R.

3 Plus généralement, déterminer γ si le rayon de courbure est constant.

Conseils

1) Dériver deux fois la relation $\overrightarrow{OM}^2 = R^2$ et appliquer Cauchy-Schwarz.
2) Cas d'égalité de Cauchy-Schwarz.
Puis dériver $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{T}$.
3) Montrer que le point I, projeté orthogonal de O sur la droite $(M, \overrightarrow{N})$ est fixe.

6 Un exemple de courbe tracée sur une sphère

On considère la courbe paramétrée Γ de l'espace définie par :

$x(t) = 2\cos(t) - \cos(2t)\,;\; y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t)\,;$
$z(t) = 2\sqrt{2}\cos\dfrac{t}{2}.$

1 Montrer que Γ est tracée sur une sphère $\mathcal{S}$ de centre O.

2 Montrer que la tangente en tout point de Γ fait un angle constant avec l'axe (Oz).

3 Étudier et tracer les projections de Γ sur les plans (xOy), (yOz) et (xOz).

4. Donner l'allure de la courbe Γ sur la sphère $\mathcal{S}$.

Conseil

2) Étudier en particulier le cas des points stationnaires.

7 Pentagone, arcs de cercles et séries de Fourier

D'après ESTP.

Soit $a = \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$. Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le pentagone étoilé régulier $(A_0A_1A_2A_3A_4)$ dont les sommets appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ et tels que $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OA_k}\right) = \dfrac{4\pi}{5}k$. On posera $A_5 = A_0$.

1 Pour k entre 0 et 4, on note Γ_k l'arc du cercle circonscrit au triangle OA_kA_{k+1} défini par $x^2 + y^2 \geqslant a^2$. Donner l'allure de la réunion Γ des Γ_k.

2 Donner une équation polaire $\rho = f(\theta)$ de l'arc Γ_0 pour $0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{4\pi}{5}$ par rapport au repère de pôle O et d'axe polaire $\vec{i}$.

3 Même problème pour Γ et $0 \leqslant \theta \leqslant 4\pi$.

4 Développer en série de Fourier la fonction F de période $\dfrac{4\pi}{5}$ coïncidant avec f entre 0 et $\dfrac{4\pi}{5}$.

Conseils

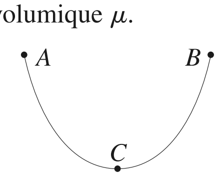
1) Un tracé soigné.
2) Noter I le centre du cercle, K le symétrique de O par rapport à I.
Calculer le rayon du cercle.
$\overrightarrow{OM}$ s'obtient en projetant orthogonalement $\overrightarrow{OK}$ sur (OM).
4) Revoir si nécessaire les formules du *cours*...

8 La corde et le pont

1 On considère une corde métallique de masse m, de longueur l, de section σ, de masse volumique μ.

La corde a ses extrémités A et B fixées à la même altitude.

On note T_0 la tension au point C, milieu de la corde.



Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note (x, y) les coordonnées d'un point de la corde.

a) En utilisant l'équation fondamentale de la dynamique, écrire une équation intrinsèque de la corde liant l'abscisse curviligne s et l'angle ϕ de la tangente avec l'axe $(x'x)$.

b) En déduire une équation différentielle non linéaire d'ordre 2 vérifiée par la fonction $y = y(x)$.

c) Résoudre cette équation pour déterminer une équation cartésienne de la courbe décrite par la corde.

Cette courbe est appelée chaînette.

d) Calculer le rayon de courbure de la chaînette en un point.

e) Calculer la valeur numérique de la différence des ordonnées entre les points A et C, dans le cas d'une corde de guitare longue de 1 m.

On prendra : $\mu = 7.10^3$ kg.m^{-3} ; $\sigma = 3$ mm^2 ; $g = 9.81$ m.s^{-1} ; $T_0 = 2,5.10^3$ N.

2 Considérer les câbles d'un pont suspendu. En négligeant la masse des câbles devant celle du pont et en supposant que le pont est entièrement suspendu, déterminer la forme du câble.

Conseils

1) b) L'équation obtenue lie ϕ et s. La dériver pour obtenir une équation différentielle liant $\mathrm{d}\phi$ et $\mathrm{d}s$.
En dérivant ensuite $\tan\phi = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, éliminer $\mathrm{d}\phi$ pour obtenir une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par la fonction $y = y(x)$.
e) Utiliser la question **1) a)**.
2) Modifier l'équation obtenue dans la question **1) a)**.

9 Centres de courbure en O d'une famille de coniques

D'après ESTP.

Soit k un paramètre réel. On considère dans un repère orthonormé d'axes (Ox) et (Oy) la conique $\mathcal{C}_k$ d'équation : $x^2 + y^2 - 2kxy + 2(ky - x) = 0$.

1 Préciser la nature de $\mathcal{C}_k$ lorsque k varie.

2 Donner la direction des axes de $\mathcal{C}_k$.

3 Donner le centre de courbure Ω_k à $\mathcal{C}_k$ au point O et construire le lieu décrit par Ω_k lorsque k varie.

Conseil

Revoir le cours si nécessaire...

10 La lemniscate de Bernoulli

D'après ESTP.

Au moins huit mathématiciens célèbres du XVIII[e] siècle portent le nom suisse de **Bernoulli**. **Johann** et son frère **Jacques** furent, après Newton et Leibniz, les fondateurs de l'analyse. Johann écrivit en 1691 et 1692 le premier livre d'analyse, mais la partie concernant le calcul intégral ne fut publiée qu'en 1742 et celle relative au calcul différentiel en 1924. L'idée de la représentation des fonctions sous forme de séries trigonométriques est dûe à **Daniel** Bernoulli, à propos de la théorie des cordes vibrantes, cinquante ans avant Fourier.

1 Étude et graphe de la courbe d'équation polaire $\rho^2 = \cos(2\theta)$.

2 Déterminer l'aire du domaine délimité par cette courbe.

3 Calculer le rayon de courbure en un point de la courbe en fonction de θ.

4 Soit θ_1 et θ_2, deux réels tels que : $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dfrac{\pi}{4}$.
On appelle $\mathcal{L}_1$ (respectivement $\mathcal{L}_2$) l'arc de la lemniscate obtenu pour θ dans $[0, \theta_1]$ (respectivement $\left[\theta_2, \dfrac{\pi}{4}\right]$).
Montrer que $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ ont même longueur si, et seulement si : $\sqrt{2}\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) = 1$.

Conseils

3) Calculer φ en fonction de θ.
4) Calculer les longueurs de L_1 et L_2, puis poser $u = \cos\theta$ dans les intégrales....

11 Point fixe d'un ensemble de droites

D'après BanquePT.

Le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par p un réel strictement positif fixé et par $\mathcal{P}$ la courbe de représentation paramétrique :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \frac{t^2}{2p}\vec{i} + t\vec{j}.$$

1 Reconnaître et représenter graphiquement $\mathcal{P}$.

Indiquer la position du foyer et de la directrice de $\mathcal{P}$.

2 Former une équation cartésienne de la normale en $M(t)$ à $\mathcal{P}$.

3 Discuter, suivant les valeurs du nombre réel θ, l'existence et le nombre de points $M(t)$ de $\mathcal{P}$ différents de $M(\theta)$ tels que la normale en $M(t)$ à $\mathcal{P}$ passe par $M(\theta)$.

4 Montrer que les droites coupant $\mathcal{P}$ en deux points distincts tels que les normales à $\mathcal{P}$ en ces points se coupent sur $\mathcal{P}$, passent par un point fixe à déterminer.

Conseils

1) Revoir le cours, si nécessaire.
3) On a une équation dont t est l'inconnue, et θ un paramètre.
4) Écrire l'équation de $M(t_1)M(t_2)$ lorsque ces deux points existent, et utiliser l'équation de la question **3)** pour $t_1 + t_2$ et $t_1 t_2$.

12 Coniques passant par O

1 Écrire l'équation générale d'une conique passant par O.

2 Déterminer la nature de cette conique lorsque O est un point singulier.

3 Écrire une équation de la tangente en O lorsque O est un point régulier. Donner un exemple et faire une figure.

Conseil

2) Faire une rotation du repère.

13 Un cylindre

On considère la surface (S) d'équation $x^2 + y^2 = a$, $(a > 0)$.

1 Préciser la nature de cette surface.

2 Déterminer les droites contenues dans la surface.

3 Déterminer les points réguliers de la surface et le plan tangent en un tel point. Que remarquez-vous ?

Conseil

2) Les calculs sont inutiles.

14* Loxodromies de la sphère

On considère la sphère S de centre O et de rayon $R > 0$. On appelle cercles méridiens de la sphère les cercles intersections de la sphère avec un plan vertical, c'est-à-dire contenant l'axe (Oz), et loxodromies de la sphère les courbes tracées sur la sphère et coupant sous un angle α constant $\left(\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ les cercles méridiens de la sphère. Le produit scalaire usuel est noté $\cdot$ et la norme associée $\| \|$.

1 Paramétrer la sphère.

2 En utilisant cette paramétrisation, déterminer les loxodromies de la sphère.

Conseil

2) Si un méridien est défini par θ constant, utiliser θ comme paramètre pour chercher les loxodromies lorsqu'elles ne sont pas les cercles méridiens.

15 Cône tangent à une sphère

D'après ESIM.

Soit $E = \mathbb{R}^3$, et $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un repère orthonormé direct. On note Σ la sphère de centre O et de rayon 1.

On dit qu'un cône $\mathcal{C}$ de sommet S est tangent à Σ si, et seulement si, ses génératrices sont tangentes à Σ. On pourra utiliser que, dans ce cas, le cône est de révolution et que $\mathcal{C} \cap \Sigma$ est un cercle C.

On dit que $\mathcal{C}$ est circonscrit à Σ le long de C.

1 Soit $\mathcal{R}' = (O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ un repère orthonormé et Π le plan d'équation cartésienne dans $\mathcal{R}'$:

$$ax+by+cz = h \quad \text{avec} \quad a^2+b^2+c^2 = 1 \quad \text{et} \quad h \in [-1, 1]$$

a) Déterminer le rayon du cercle $C = \mathcal{C} \cap \Sigma$.

b) On suppose de plus $h \neq O$. Déterminer dans le repère $\mathcal{R}'$ les coordonnées de S, sommet du cône circonscrit à Σ le long de C.

c) Inversement, soit S de coordonnées (α, β, γ) dans$\mathcal{R}'$ telles que $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 1$. Déterminer les équations cartésiennes du cercle intersection de Σ et du cône de sommet S tangent à Σ.

On définit ainsi une application bijective de l'ensemble des cercles, autre que les grands cercles, tracés sur Σ sur l'extérieur de la sphère .

2 Considérons les vecteurs :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}(\theta) = \cos(\theta)\,\overrightarrow{i} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{j},$$

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}(\theta) = -\sin(\theta)\,\overrightarrow{i} + \cos(\theta)\,\overrightarrow{j}$$

et le repère orthonormé $R_\theta = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{k})$.

Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation cartésienne dans $\mathcal{R}$: $4z^2(x^2 + y^2) = 1$.

a) Déterminer l'intersection $\Sigma \cap \mathcal{S}$.Comparer en un point de l'intersection, les plans tangents aux deux surfaces.

b) Donner une représentation paramétrique en coordonnées cylindriques de $\mathcal{S}$.

3 Soit S le point de $\mathcal{S}$ défini par $\overrightarrow{OS} = \rho\overrightarrow{u} + \frac{1}{2\rho}\overrightarrow{k}$ avec $\rho^2 \neq \frac{1}{2}$.

Montrer que parmi les tangentes à $\mathcal{S}$ en S, deux sont tangentes à Σ.

On donnera un vecteur directeur de chacune de ces deux droites dans le repère R_θ.

4 Soit γ une courbe tracée sur $\mathcal{S}$ définie paramétriquement par :

$$\theta \mapsto \overrightarrow{OS}(\theta) = \rho(\theta)\overrightarrow{u} + \frac{1}{2\rho(\theta)}\overrightarrow{k} \text{ où } \rho \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 .$$

a) Montrer que les tangentes à (γ) en S sont tangentes à Σ si, et seulement si :

$$\forall\theta \qquad \rho^2 \neq \frac{1}{2} \text{ ou } \rho'(\theta)^2 = \rho(\theta)^4.$$

Dans la suite on choisira $\rho(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

b) Déterminer dans le repère R_θ les coordonnées du point $M(\theta)$, intersection de Σ et de la tangente a (γ) issue de $S(\theta)$. Soit (Γ) la courbe décrite par le point $M(\theta)$.

c) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{S(\theta)M(\theta)}$ et le vecteur $\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}$ sont orthogonaux.

Conseils

1) a) Faire un dessin et utiliser le théorème de Pythagore.

b) Utiliser le théorème de Pythagore et les symétries du problème.

c) Reprendre le raisonnement du **1) b)** en utilisant un vecteur normal unitaire.

2) a) Prouver que $\Sigma \cap \mathcal{S}$ est intersection de la sphère avec deux plans de la forme $z =$ constante.

b) Observer et utiliser que $\mathcal{S}$ est engendrée par une demi-méridienne à déterminer.

3) Utiliser une expression de la distance d'un point à une droite dans l'espace affine euclidien de dimension 3.

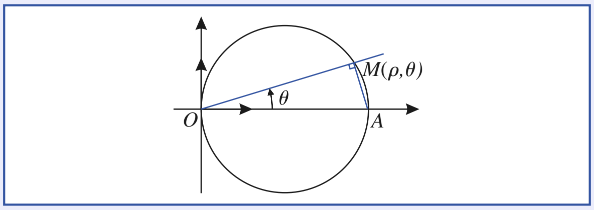
4) b) Écrire les équations paramétriques de la tangente en S.

c) dériver par rapport à θ l'expression $\overrightarrow{OM}^2 = 1 = \overrightarrow{OS}^2 - \overrightarrow{SM}^2$.

CORRIGÉS

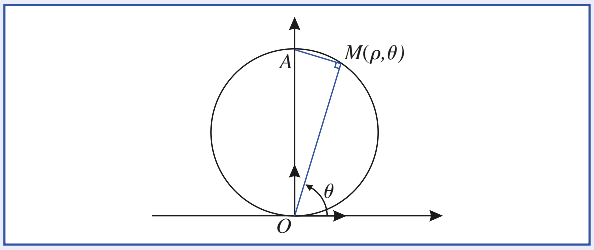
1 Pour s'entraîner avec les coordonnées polaires

1 **a)** Le point A se projette orthogonalement en $M(\rho, \theta)$ sur (OM).



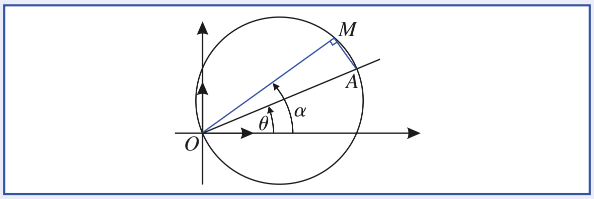
D'où l'équation cherchée : $\rho = 2a\cos(\theta)$.

b) Le point A se projette orthogonalement en $M(\rho, \theta)$ sur (OM).



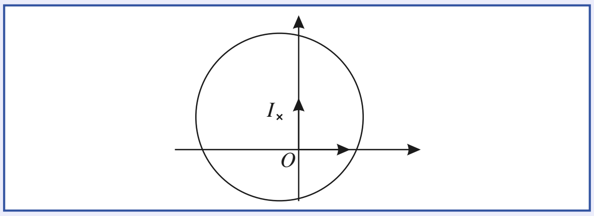
D'où l'équation cherchée : $\rho = 2a\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = 2a\sin(\theta)$.

c) Le point A se projette orthogonalement en $M(\rho, \theta)$ sur (OM).



D'où l'équation cherchée : $\rho = 2a\cos(\theta - \alpha)$.

d) Supposons que le cercle ne passe pas par O.



Il est toujours possible d'écrire une équation cartésienne du cercle :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0.$$

Puis de traduire en coordonnées polaires :

$$\rho^2 - 2a\rho\cos(\theta) - 2b\rho\sin(\theta) + c = 0.$$

e) Si la droite est horizontale, distincte de $(x'x)$, elle admet une équation polaire de la forme :

$$\rho\sin(\theta) = a.$$

Si la droite est $(x'x)$, elle admet pour équation polaire : $\theta = 0 \pmod{\pi}$.

Si la droite est verticale, distincte de $(y'y)$, elle admet une équation polaire de la forme :

$$\rho\cos(\theta) = a.$$

Si la droite est $(y'y)$, elle admet pour équation polaire :

$$\theta = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Si la droite passe par O et est distincte des axes, elle admet une équation polaire de la forme :

$$\theta = \alpha \pmod{\pi}.$$

Dans les autres cas, une équation cartésienne de cette droite est de la forme :

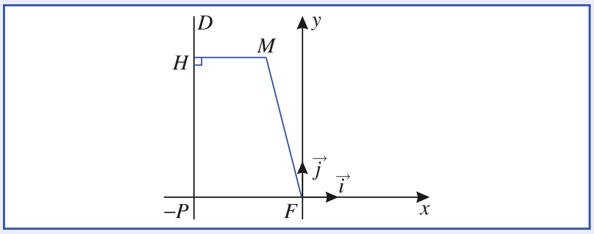
$$y = ax + b.$$

Une équation polaire est alors : $\rho\sin(\theta) = a\rho\cos(\theta) + b$.

2 L'équation donnée est de la forme $\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta)}$, avec $e = 2$.

Il s'agit d'une hyperbole d'excentricité 2 et de paramètre $p = 3$.

La directrice a pour équation $x = -3$.

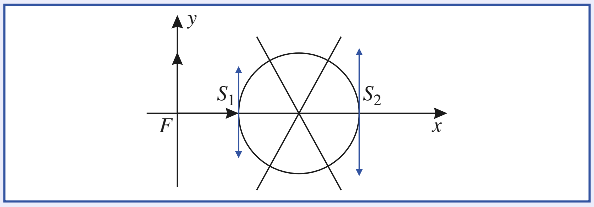


L'axe $(x'x)$ est un axe de symétrie de l'hyperbole.

Les asymptotes ont pour direction $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$, $\theta = \dfrac{4\pi}{3}$.

Les sommets s'obtiennent en prenant $\theta = 0$, puis $\theta = \pi$. Ils ont pour coordonnées $S_1(1, 0)$, $S_2(3, 0)$.

Le centre de symétrie est le point $(2, 0)$.



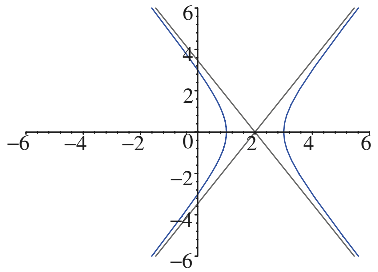
Nous en déduisons :

$$c = 1, \qquad a = \frac{c}{e} = \frac{1}{2}, \qquad b = \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le tracé ne pose plus de problème...

Avec Maple

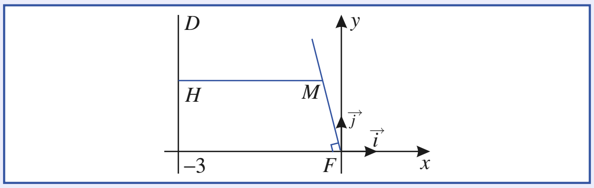
```
> with(plots) :
> polarplot(3/(1+2*cos(t)),view=[-6..6,-6..6]);
```



3 L'équation donnée est de la forme $\rho = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta)}$, avec $e = \dfrac{1}{2}$.

Il s'agit d'une ellipse d'excentricité $\dfrac{1}{2}$ et de paramètre $p = 3$.

La directrice a pour équation $x = -3$.

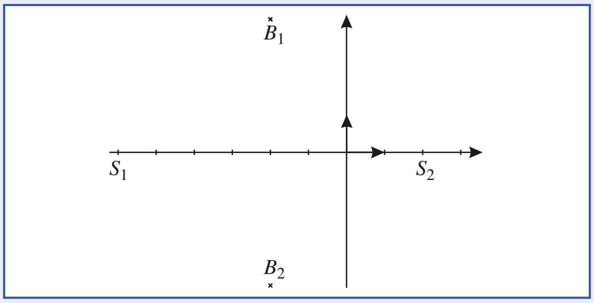


L'axe $(x'x)$ est un axe de symétrie de l'ellipse.

Les sommets s'obtiennent en prenant $\theta = 0$, puis $\theta = \pi$.

Ils ont pour coordonnées $S_1(2, 0)$ et $S_2(-6, 0)$.

Le centre de symétrie est le point $(-2, 0)$.

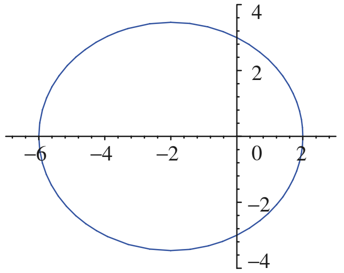


Nous en déduisons : $c = 2$, $a = 4$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = 2\sqrt{3}$.

Le tracé ne pose plus de problème...

Avec Maple

```
> with(plots) :
> polarplot(6/(2+cos(t)),
view=[-7..3,-4..4],scaling=constrained);
```



4 Le domaine de définition de la fonction ρ est $\mathbb{R} - \left\{\pm\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right\}$.

Cette fonction est périodique, de période 2π, et impaire.

Nous allons donc l'étudier sur $[0, \frac{\pi}{6}[\bigcup]\frac{\pi}{6}, \pi]$. Puis nous compléterons le graphe obtenu en effectuant une symétrie d'axe $(y'y)$.

Le calcul de ρ' *a priori* est inutile. Le signe seul de ρ est important.

θ	0		$\frac{\pi}{6}$		π
$\rho(\theta)$	0	$-$	$\|$	$+$	

Nous remarquons que $\rho(0) = 0$. La courbe passe par le pôle pour $\theta = 0$.

En ce point, la tangente est dirigée par le vecteur d'angle polaire 0.

Cette tangente est l'axe $(x'x)$.

Lorsque θ tend vers $\dfrac{\pi}{6}$, la courbe possède une branche infinie.

$$\rho(\theta)\sin(\theta - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sin\theta\sin(\theta - \frac{\pi}{6})}{\sqrt{3} - 2\cos\theta} = 2\frac{\sin\theta\sin(\theta - \frac{\pi}{6})}{\cos(\frac{\pi}{6}) - \cos\theta}.$$

Or, la fonction cos est dérivable en $\dfrac{\pi}{6}$:

$$\cos\theta =_{\frac{\pi}{6}} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) + o\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right).$$

D'où : $$\rho(\theta)\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) \sim_{\frac{\pi}{6}} 2.$$

Notons $u_{\frac{\pi}{6}}, v_{\frac{\pi}{6}}$ les vecteurs $\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ et $\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

La courbe possède une asymptote dont l'équation dans le repère $(O, u_{\frac{\pi}{6}}, v_{\frac{\pi}{6}})$ a pour équation : $y = 2$.

Précisons la position de la courbe par rapport à son asymptote en effectuant un développement limité de $\rho(\theta)\sin(\theta-\frac{\pi}{6})$ au voisinage de $\frac{\pi}{6}$ à l'ordre 1.

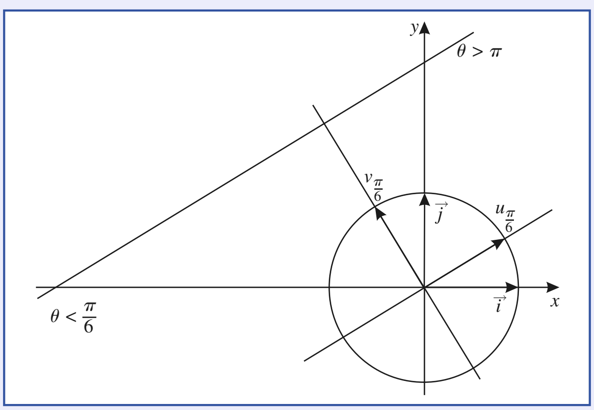
$\sin\theta =_{\frac{\pi}{6}} \sin\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}(\theta-\frac{\pi}{6})^2+o((\theta-\frac{\pi}{6})^2).$

Donc :

$$\sin\theta\sin(\theta-\frac{\pi}{6})$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}(\theta-\frac{\pi}{6})^2+o((\theta-\frac{\pi}{6})^2)\right)\left((\theta-\frac{\pi}{6})+o((\theta-\frac{\pi}{6})^2)\right)$$
$$=\frac{1}{2}(\theta-\frac{\pi}{6})+\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\frac{\pi}{6})^2+o((\theta-\frac{\pi}{6})^2).$$

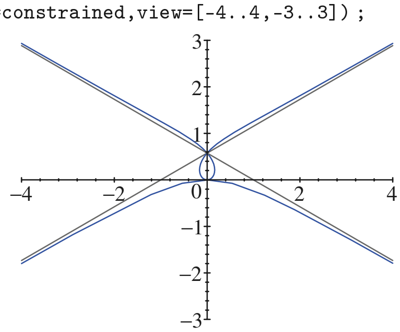
$$\rho(\theta)\sin(\theta-\frac{\pi}{6}) =_{\frac{\pi}{6}} 2\frac{(\theta-\frac{\pi}{6})+\sqrt{3}(\theta-\frac{\pi}{6})^2+o((\theta-\frac{\pi}{6})^2)}{(\theta-\frac{\pi}{6})+\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\frac{\pi}{6})^2+o((\theta-\frac{\pi}{6})^2)}$$
$$=2\frac{1+\sqrt{3}(\theta-\frac{\pi}{6})+o(\theta-\frac{\pi}{6})}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta-\frac{\pi}{6})+o(\theta-\frac{\pi}{6})}=2+\sqrt{3}(\theta-\frac{\pi}{6})+o(\theta-\frac{\pi}{6}).$$

La position de la courbe par rapport à l'asymptopte s'en déduit en regardant le signe de $\sqrt{3}(\theta-\frac{\pi}{6})$ lorsque θ tend vers $\frac{\pi}{6}$.



Avec Maple

```
> with(plots) :
> polarplot(sin(t)/(sqrt(3)-2*cos(t)),
scaling=constrained,view=[-4..4,-3..3]) ;
```



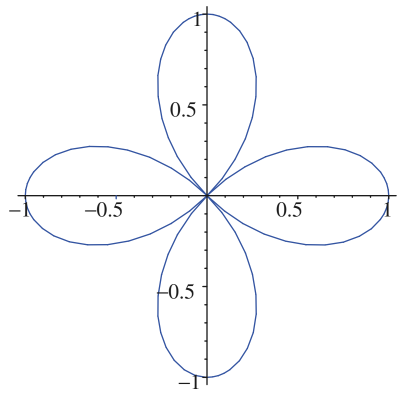
5 ■ **a)** La fonction $(\theta \to \sin(2\theta))$ est définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période π et impaire.

Nous l'étudions sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et compléterons le graphe par une symétrie par rapport à O et une symétrie par rapport à (Oy).

θ	0			$\frac{\pi}{2}$
ρ	0	+	+	0

Avec Maple

```
> polarplot((sin(2*t)),scaling=constrained) ;
```



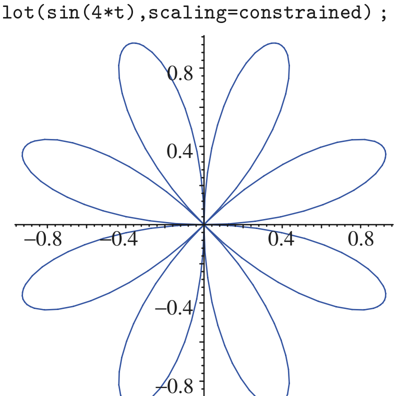
b) La fonction $(\theta \longrightarrow \sin(4\theta))$ est définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période $\frac{\pi}{2}$ et impaire.

Nous l'étudions sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et compléterons le graphe par une symétrie par rapport à (Oy) pour récupérer la restriction de la courbe à $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$. Puis nous effectuerons trois fois successivement la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ pour obtenir la totalité de la courbe.

θ	0			$\frac{\pi}{4}$
ρ	0	+	+	0

Avec Maple

```
> polarplot(sin(4*t),scaling=constrained) ;
```



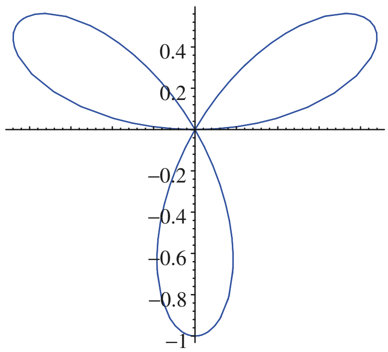
c) La fonction $(\theta \to \sin(3\theta))$ est définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période $\dfrac{2\pi}{3}$ et impaire.

Nous l'étudions sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ et compléterons le graphe par une symétrie par rapport à (Oy) pour récupérer la restriction de la courbe à $\left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$. Puis nous effectuerons deux fois successivement la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ pour obtenir la totalité de la courbe.

θ	0				$\dfrac{\pi}{3}$
ρ	0	$+$	$+$	$+$	0

Avec Maple

```
> polarplot(sin(3*t),scaling=constrained) ;
```



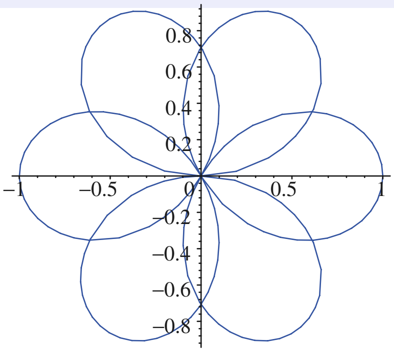
d) La fonction $(\theta \to \sin(1.5\theta))$ est définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période $\dfrac{4\pi}{3}$ et impaire.

Nous l'étudions sur $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$ et compléterons le graphe par une symétrie par rapport à (Oy) pour récupérer la restriction de la courbe à $\left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$. Puis nous effectuerons deux fois successivement la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{4\pi}{3}$ pour obtenir la restriction de la courbe à $\left[-\dfrac{2\pi}{3}, 2\pi + \dfrac{4\pi}{3}\right]$. Nous aurons alors la courbe complète.

θ	0				$2\dfrac{\pi}{3}$
ρ	0	$+$	$+$	$+$	0

Avec Maple

```
> polarplot(sin(1.5*t),t=-2*Pi/3..10*Pi/3,
scaling=constrained) ;
```



e) La fonction $(\theta \to \sin(2.1\theta))$ est définie sur $\mathbb{R}$, périodique, de période $\dfrac{2\pi}{2.1}$ et impaire.

Nous l'étudions sur $[0, \dfrac{\pi}{2.1}]$ et compléterons le graphe par une symétrie par rapport à (Oy) pour récupérer la restriction de la courbe à $\left[-\dfrac{\pi}{2.1}, \dfrac{\pi}{2.1}\right]$.

Nous devons ensuite chercher deux entiers k et k' tels que :

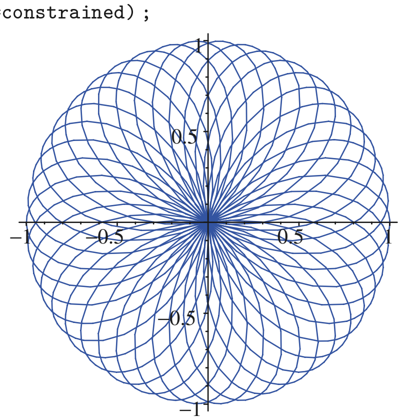
$$k\frac{2\pi}{2.1} = 2k'\pi.$$

$k' = 10$ et $k = 20$ conviennent.

La courbe complète sera obtenue en effectuant vingt fois la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{2.1}$.

Avec Maple

```
> with(plots) :
> polarplot(sin(2.1*t),t=0..20*Pi,
scaling=constrained) ;
```



6 **a)** La fonction ρ est définie *a priori* pour $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\,\pi)$.

Toutefois :

$\sin\theta =_{\frac{\pi}{2}} 1 + o(\theta - \dfrac{\pi}{2})$; $\cos(\theta) =_{\frac{\pi}{2}} -(\theta - \dfrac{\pi}{2}) + o(\theta - \dfrac{\pi}{2})$.

Elle peut donc être prolongée par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$ par : $\rho(\dfrac{\pi}{2}) = 0$.

De plus, ρ est périodique de période 2π. Elle est ainsi définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$, pour k dans $\mathbb{Z}$.

Nous l'étudions et la construisons sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

θ	$-\frac{\pi}{2}$			0		$\frac{\pi}{2}$			π			$3\frac{\pi}{2}$
$\rho(\theta)$	$+\infty$	$+$		a	$+$	0	$-$	$-$	$-a$	$-$	$-$	$-\infty$

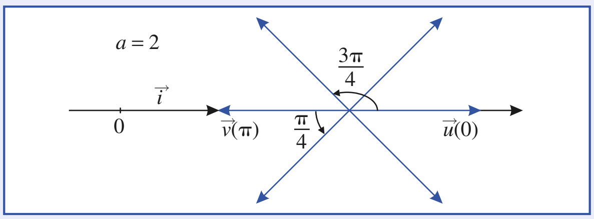
La courbe passe au pôle en $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Sa tangente est dirigée par le vecteur d'angle polaire $\dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire le vecteur $\vec{j}$.

Déterminons la tangente aux points de paramètres $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

Nous devons calculer :

$$\tan V = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)} = \frac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \frac{(\cos(\theta))^2}{-1+\sin(\theta)} = -\cos(\theta).$$

D'où les tangentes aux points de paramètres $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.



Étudions ensuite la branche infinie.
Il suffit d'étudier lorsque θ tend vers $-\dfrac{\pi}{2}$ par valeurs supérieures ou inférieures.

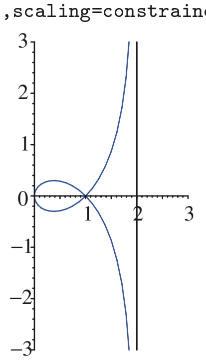
La courbe admet une direction asymptotique dans la direction de l'axe $(y'y)$.

$$\lim_{\theta \longrightarrow -\pi/2} \rho(\theta)\cos(\theta) = 2a.$$

La courbe admet donc la droite d'équation $x = 2a$ pour asymptote. De plus : $x = \rho(\theta)\cos(\theta) < 2a$.

Avec Maple

```
> with(plots) :
> polarplot((1-sin(t))/(cos(t)),t=-Pi/2..3*Pi/2,
view=[0..3,-3..3],scaling=constrained) ;
```



La courbe se situe à gauche de son asymptote.

b) Soit $M(x, y)$ un point de la courbe. Alors :

$x = a(1 - \sin\theta)$; $\quad a - x = a\sin\theta$; $\quad (a - x)\rho = ay$.

Élevons au carré :

$$(a-x)^2(x^2+y^2) = a^2y^2.$$

Soit : $\qquad (a-x)^2x^2 + x(x-2a)y^2 = 0.$

Puis : $\qquad x\left[(a-x)^2x + (x-2a)y^2\right] = 0.$

Or le seul point de la courbe dont l'abscisse est nulle est O.

Donc, tout point M de la courbe vérifie l'équation :

$$(a-x)^2x + (x-2a)y^2 = 0.$$

Réciproquement, soit $M(x, y)$ un point dont les coordonnées vérifient :

$$(a-x)^2x + (x-2a)y^2 = 0.$$

En reprenant, à l'envers, le calcul précédent :

$$(a-x)^2(x^2+y^2) = a^2y^2.$$

Puis : $\quad (a - \rho\cos\theta)\rho = \pm a\rho\sin\theta = a\rho\sin(\pm\theta).$

D'où : $\qquad \rho = \dfrac{a(1-\sin(\pm\theta))}{\cos\theta}.$

L'équation $\rho = \dfrac{a(1+\sin\theta)}{\cos\theta}$ est aussi une équation polaire de la courbe car elle est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

Une équation cartésienne de cette courbe est donc :

$$(a-x)^2x + (x-2a)y^2 = 0.$$

c) En utilisant la formule établie grâce à celle de Green-Riemann :

$$A = \int_0^{\pi} \frac{\rho^2}{2}\mathrm{d}\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2 \mathrm{d}\theta.$$

$$A = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi}\left(1 + 2\tan^2\theta - 2\frac{\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$A = \frac{a^2}{2}\left[2\frac{\sin\theta - 1}{\cos\theta} - \theta\right]_0^{\pi} = \frac{a^2}{2}(4-\pi) \text{ unités d'aire.}$$

7 ▬ **a)** La fonction $(\theta \to \sin^2\theta(\sin\theta + \sin 2\theta))$ est 2π-périodique, impaire.

La totalité de la courbe s'obtient donc après une étude sur $[0, \pi]$, le tracé correspondant est une symétrie d'axe $(y'y)$.

Étudions le signe de ρ sur $[0, \pi]$.

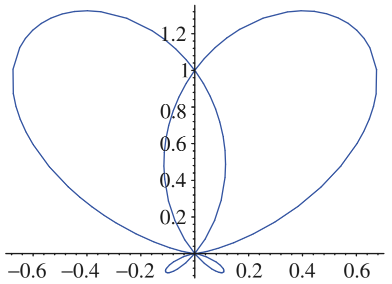
$$\sin\theta = \sin(-2\theta) \iff \begin{cases} \theta = -2\theta + 2k\pi \text{ ou} \\ \theta = \pi + 2\theta + 2k'\pi \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \theta = \dfrac{2}{3}k\pi \text{ ou} \\ \theta = -\pi + 2k'\pi \end{cases}.$$

θ	0		$2\dfrac{\pi}{3}$		π
ρ	0	$+$	0	$-$	0

Avec Maple

```
> with(plots) :
> polarplot((sin(t))^2*(sin(t)+sin(2*t)),t=0..2*Pi);
```



b) En utilisant la formule établie grâce à celle de Green-Riemann :

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^2}{2} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta (\sin \theta + \sin 2\theta)^2 \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (5 \sin^6 \theta - 4 \sin^8 \theta + 4 \sin^6 \theta \cos \theta) \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{5}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta \mathrm{d}\theta - 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 \theta \mathrm{d}\theta + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta \cos \theta \mathrm{d}\theta.$$

Les deux premières intégrales se calculent par linéarisation et la dernière en posant $u = \sin \theta$ ou .... l'utilisation d'un logiciel de calcul formel.

$$A = \frac{15}{64}\pi + \frac{4}{7} \text{ unités d'aire.}$$

2 Pour s'entraîner avec les coordonnées paramétriques

1 ▬ a) Γ est l'intersection de la sphère de centre O et de rayon 1 et d'un plan.

La distance de O à ce plan est : $d = \dfrac{1}{\sqrt{4}} < 1$.

Le plan coupe la sphère suivant un cercle.

La courbe $\mathcal{C}$ est alors une ellipse.

Soit $M(x, y, 0)$ un point de (xOy).

Le point M appartient à $\mathcal{C}$ si, et seulement si :

$$\exists z \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y - \sqrt{3}z = 1 \end{cases}.$$

Cette condition équivaut à :

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{3}(y-1)^2 = 1.$$

Soit : $x^2 + \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}(y - \dfrac{1}{4})\right)^2 = \dfrac{11}{12}$

b) L'ellipse $\mathcal{C}$ peut se paramétrer :

$$x(t) = 2\sqrt{\frac{3}{11}}\cos(t)\,;\ y(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{\sqrt{11}}\sin(t),\ t \in [0, 2\pi].$$

Nous en déduisons une paramétrisation du cercle Γ :

$$x(t) = 2\sqrt{\frac{3}{11}}\cos(t)\,; \qquad y(t) = \frac{1}{4} + \frac{3}{\sqrt{11}}\sin(t)\,;$$

$$z(t) = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\sin(t) \qquad t \in [0, 2\pi].$$

2 ▬ Pour chaque i dans $[\![1, 6]\!]$, $|\phi_i(t)|$ tend vers 0 avec t.

L'argument de $\phi_1(t)$ tend vers $+\infty$, ceux de $\phi_2(t)$, $\phi_3(t)$, $\phi_6(t)$ varient entre -1 et 1, ceux de $\phi_4(t)$, $\phi_5(t)$ entre 0 et 1.

Par conséquent, le *schéma* ④ est celui de ϕ_1. Les *schémas* ② et ⑤ sont à partager entre ϕ_4 et ϕ_5. La fonction ϕ_5 présente une infinité de points de non-dérivabilité. Son *graphe* est le ⑤. Le ② est celui de ϕ_2.

Dans ϕ_6, le coefficient de l'exponentielle est positif. Le *graphe* de ϕ_6 est le ①.

De plus : $\phi_2\left(\dfrac{2}{\pi}\right) = \dfrac{2}{\pi} \simeq 0.6$ Le *graphe* de ϕ_2 est le ①

et nous vérifions que celui de ϕ_3 est le ⑥ avec $\phi_3\left(\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\right)$.

3 Suite d'arcs paramétrés.

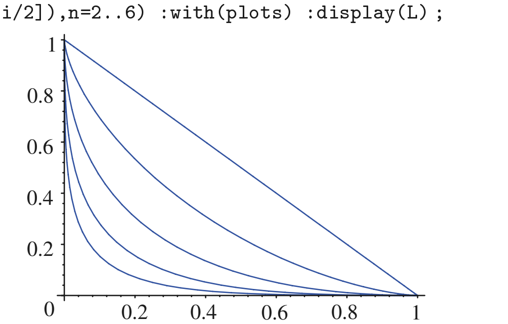
1 ▬ a) Effectuons une étude rapide de la courbe $\mathcal{C}_n$.

$x_n'(t) = n\cos^{n-1}(t)(-\sin(t))$; $y_n'(t) = n\sin^{n-1}(t)\cos(t)$.

t	0	0		$\frac{\pi}{2}$
$x_n'(t)$	0	$-$	$-$	0
$x_n(t)$	1	$\searrow$		0
$y_n(t)$	0	$\nearrow$		1
$y_n'(t)$	0	$+$	$+$	0

Avec Maple

```
> L :=seq(plot([(cos(t))^n,(sin(t))^n,
t=0..Pi/2]),n=2..6) :with(plots) :display(L) ;
```



b) Nous savons que :

$$L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{x_n'^2(t) + y_n'^2(t)}\mathrm{d}t$$

$$= n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\cos(t)\sqrt{\cos^{2n-4}(t)+\sin^{2n-4}(t)}\mathrm{d}t$$

Posons $u = \cos(2t)$.

$$L_n = \frac{n}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\left(\frac{u+1}{2}\right)^{n-2}+\left(\frac{1-u}{2}\right)^{n-2}}\mathrm{d}u.$$

2 Allons-y pour L_4 et L_5.

$$L_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{u^2+1}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\sinh^{-1}(1)}^{\sinh^{-1}(1)}\cosh^2(v)\mathrm{d}v,$$

en posant $u = \sinh(v)$.

$$L_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})\right] \text{ unités de longueur.}$$

$$L_5 = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\left(\frac{u+1}{2}\right)^3+\left(\frac{1-u}{2}\right)^3}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{5}{8}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+3u^2}\mathrm{d}u = \frac{5}{8}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{3}},$$

en posant : $3u = v$.

$$L_5 = \frac{5\sqrt{3}}{24}\left[2\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})\right] \text{ unités de longueur.}$$

3 La plus courte distance entre deux points est donnée par la ligne droite.

Le point I_n appartient à $\mathcal{C}_n$, donc : $I_nA + I_nB \leqslant L_n$.

D'autre part :

$$L_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{x_n'^2(t)+y_n'^2(t)}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}[|x_n'(t)|+|y_n'(t)|]\mathrm{d}t.$$

La fonction x_n' est négative et la fonction y_n' est positive sur l'intervalle.

$$L_n \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}[-x_n'(t)+y_n'(t)]\mathrm{d}t = 2 = OA+OB.$$

Calculons $I_nA + I_nB$.

$$I_nA + I_nB = 2\sqrt{\left(1-\frac{1}{2^{n/2}}\right)^2+\frac{1}{2^n}}.$$

La limite de L_n est 2.

4 Rayon de courbure en un point d'une courbe définie implicitement

1 Nous avons :

$$\left|z+z^2\right|^2 = (z+z^2)(\bar{z}+\bar{z}^2) = z\bar{z}+z\bar{z}z+z\bar{z}\bar{z}+(z\bar{z})^2$$

$$= (x^2+y^2)+2x(x^2+y^2)+(x^2+y^2)^2$$

$$= x^4+y^4+2x^2y^2+2x^3+2xy^2+x^2+y^2.$$

D'où :

$$P(x,y) = x^4+y^4+2x^2y^2+2x^3+2xy^2+x^2+y^2-1.$$

2 $P(x,0) = 0 \iff x^4+2x^3+x^2-1 = 0.$

Soit : $(x^2+x)^2-1 = 0.$

Enfin, puisque $a > 0$: $a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}.$

3 Nous constatons que :

$$P(a,0) = 0\,;\ \frac{\partial P}{\partial x}(a,0) = 4a^3+6a^2+2a = 2\sqrt{5} \neq 0$$

et la fonction P est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Appliquons le *théorème des fonctions implicites*.

Il existe :

- deux réels strictement positifs α et β ;
- une fonction φ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I =]-\beta,\beta[$ telle que :

$\forall (x,y) \in]a-\alpha, a+\alpha[\times]-\beta,\beta[$

$$P(x,y) = 0 \iff x = \varphi(y).$$

De plus, pour tout y de I :

$$\varphi'(y) = -\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y}(\varphi(y),y)}{\dfrac{\partial P}{\partial x}(\varphi(y),y)}.$$

En particulier : $\varphi'(0) = 0$.

Le calcul de $\varphi''(y)$ s'effectue à partir de :

$$\forall y \in I \quad \varphi'(y)\frac{\partial P}{\partial x}(\varphi(y),y)+\frac{\partial P}{\partial y}(\varphi(y),y) = 0.$$

En dérivant sur I :

$$\varphi''(y)\frac{\partial P}{\partial x}(\varphi(y),y)+\varphi'(y)\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}(\varphi(y),y)$$

$$+(\varphi'(y))^2\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(\varphi(y),y)+\varphi'(y)\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}(\varphi(y),y)$$

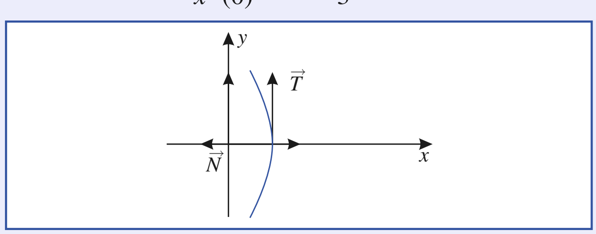
$$+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(\varphi(y),y) = 0$$

En $(a,0)$: $2\sqrt{5}\varphi''(0)+6 = 0$.

Soit : $\varphi''(0) = -\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$.

Orientons la courbe dans le sens des y croissants.

Alors : $R = \dfrac{(1+x'(0))^{3/2}}{-x''(0)} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.



5 Courbe à courbure constante tracée sur une sphère

1 Pour tout point M de γ, $\overrightarrow{OM}^2 = R^2$.

En dérivant : $\overrightarrow{OM} \cdot \dfrac{d\overrightarrow{M}}{ds} = 0$.

Soit : $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{T} = 0$.

En dérivant une seconde fois, on obtient :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} + \overrightarrow{T}^2 = 0.$$

Avec $\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = c\overrightarrow{N}$, où c est la courbure de γ, et $\overrightarrow{T}^2 = 1$.

D'où : $\overrightarrow{OM} \cdot c\overrightarrow{N} + 1 = 0$, et par conséquent :

$$c = -\frac{1}{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{N}}.$$

D'après l'*inégalité de Cauchy-Schwarz*,

$$|\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{N}| \leqslant ||\overrightarrow{OM}|| \cdot ||\overrightarrow{N}||,$$

c'est-à-dire : $\qquad |\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{N}| \leqslant R.$

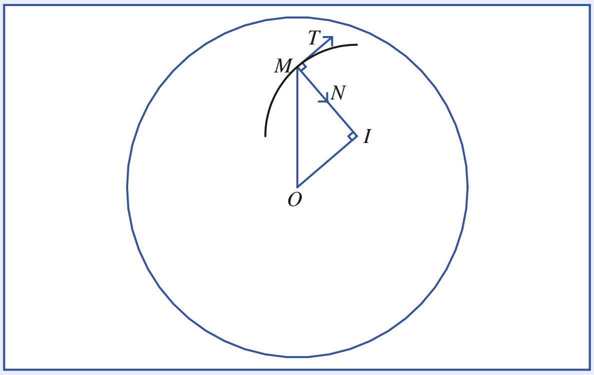
D'où, en définitive $|c| \geqslant \dfrac{1}{R}$. La courbure en M est supérieure ou égale à $\dfrac{1}{R}$, donc le rayon de courbure en M est inférieur ou égal à R.

2 Le cas d'égalité est celui de Cauchy-Schwarz : il est réalisé si, et seulement si, $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{N}$ sont colinéaires : $\overrightarrow{OM} = -R\overrightarrow{N}$. Considérons dans ce cas le vecteur : $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{T}$, et calculons sa dérivée :

$$\frac{d\overrightarrow{V}}{ds} = \overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \overrightarrow{OM} \wedge \frac{1}{R}\overrightarrow{N} = \overrightarrow{0}.$$

M appartient donc au plan passant par O et orthogonal à $\overrightarrow{V}$. L'intersection de ce plan avec $\mathcal{S}$ est un grand cercle de $\mathcal{S}$; l'arc γ est une partie de ce cercle.

3 Désignons par I le projeté orthogonal de O sur la droite $(M, \overrightarrow{N})$. Nous allons montrer que le point I est fixe.



• Nous avons établi à la question **1)** que :

$$\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{N} = \frac{1}{c} = r,$$

où r désigne le rayon de courbure de γ, supposé constant.

$$\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{N} = \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{N} = r$$

d'où $||\overrightarrow{MI}|| = r$.

En dérivant $\overrightarrow{MI}^2 = r^2$, on obtient :

$$\overrightarrow{MI} \cdot \left(\frac{d\overrightarrow{I}}{ds} - \frac{d\overrightarrow{M}}{ds}\right) = 0$$

$\overrightarrow{MI}$ est colinéaire à $\overrightarrow{N}$, donc orthogonal à $\overrightarrow{T}$, il reste :

$$\overrightarrow{MI} \cdot \frac{d\overrightarrow{I}}{ds} = 0.$$

$\dfrac{d\overrightarrow{I}}{ds}$ est orthogonal à $\overrightarrow{N}$.

• De plus, $OI^2 = OM^2 - MI^2 = R^2 - r^2$; en dérivant :

$$\overrightarrow{OI}.\frac{d\overrightarrow{I}}{ds} = 0.$$

$\dfrac{d\overrightarrow{I}}{ds}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OI}$.

• Enfin, $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{T} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{T} + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{T} = 0$;

En dérivant, on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{I}}{ds}.\overrightarrow{T} + \overrightarrow{OI}.\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = 0.$$

$\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \dfrac{\overrightarrow{N}}{R}$ est orthogonal à $\overrightarrow{OI}$, donc : $\dfrac{d\overrightarrow{I}}{ds}.\overrightarrow{T} = 0$.

En définitive, le vecteur $\dfrac{d\overrightarrow{I}}{ds}$ est orthogonal aux trois vecteurs $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{OI}$.

Ces vecteurs étant non nuls et orthogonaux deux à deux, ils forment une base de l'espace ; on en déduit que $\dfrac{d\overrightarrow{I}}{ds}$ est nul. Le point I est fixe. Le point M appartient au plan passant par O et orthogonal à $\overrightarrow{OI}$. L'intersection de ce plan avec la sphère $\mathcal{S}$ est un cercle. L'arc γ est une partie de ce cercle.

6 Un exemple de courbe tracée sur une sphère

1 Soit M le point de Γ de paramètre t.

$$\begin{aligned} OM^2 &= x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 \\ &= 4\cos^2 t - 4\cos t \cos 2t + \cos^2 t + 4\sin^2 t \\ &\qquad - 4\sin t \sin 2t + \sin^2 t + 8\cos^2 \frac{t}{2} \\ &= 5 - 4\cos t + 8\cos^2 \frac{t}{2} \\ &= 1 + 8\sin^2 \frac{t}{2} + 8\cos^2 \frac{t}{2} = 9 \end{aligned}$$

D'où : $OM = 3$; le point M appartient à la sphère de centre O de rayon 3.

2 En tout point régulier, la tangente est dirigée par le vecteur $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}$ de coordonnées :

$$x'(t) = -2\sin t + 2\sin(2t) = -2\sin t(1-2\cos t)$$
$$= -4\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}(1-2\cos t)\ ;$$
$$y'(t) = 2\cos t - 2\cos 2t = 2(1-\cos t)(1+2\cos t)$$
$$= 4\sin^2\frac{t}{2}(1+2\cos t)\ ;$$
$$z'(t) = -\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}.$$

$$\left\|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right\|$$
$$= \left|\sin\frac{t}{2}\right|\sqrt{16\cos^2\frac{t}{2}(1-2\cos t)^2 + 16\sin^2\frac{t}{2}(1+2\cos t)^2 + 2}$$
$$= \left|\sin\frac{t}{2}\right|\sqrt{16 - 64\cos t\left(\cos^2\frac{t}{2} - \sin^2\frac{t}{2}\right) + 64\cos^2 t + 2}$$
$$= 3\sqrt{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right|.$$

Le point est régulier si $t \neq 2k\pi$. L'angle des vecteurs $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}$ et $\overrightarrow{k}$ a pour cosinus :

$$\cos\alpha = \frac{\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}.\overrightarrow{k}}{\left\|\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right\|} = \frac{-\sqrt{2}\sin\dfrac{t}{2}}{3\sqrt{2}\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|} = \pm\frac{1}{3}.$$

L'angle de droites entre la tangente et l'axe (Oz) est donc Arccos$\dfrac{1}{3}$. Si $t = 2k\pi$, le point est stationnaire. Effectuons un développement limité à l'ordre 2 pour $t = 2k\pi + h$:

$$x(t) = 2\left(1 - \frac{h^2}{2} + o\left(h^2\right)\right) - \left(1 - 2h^2 + o(h^2)\right)$$
$$= 1 + h^2 + o(h^2)\ ;$$
$$y(t) = 2\left(h + o(h^2) - (2h + o(h^2)\right) = o(h^2)\ ;$$
$$z(t) = (-1)^k\left(2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}h^2 + o(h^2)\right).$$

La tangente est donc dirigée par le vecteur $\overrightarrow{V}$ de coordonnées $\left(1, 0, (-1)^{k+1}\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$. L'angle que fait ce vecteur avec $\overrightarrow{k}$ a pour cosinus :

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{V}\cdot\overrightarrow{k}}{||\overrightarrow{V}||\ ||\overrightarrow{k}||} = \frac{(-1)^{k+1}\dfrac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{8}}} = (-1)^{k+1}\frac{1}{3}.$$

L'angle de droites entre la tangente et l'axe (Oz) est encore arccos $\dfrac{1}{3}$.

3 La projection de Γ sur le plan (xOy) est définie par :

$$x(t) = 2\cos t - \cos(2t)\ ;\ y(t) = 2\sin t - \sin(2t).$$

C'est un arc de période 2π, vérifiant pour tout t :

$$x(-t) = x(t)\ ; \qquad y(-t) = -y(t)\ ;$$

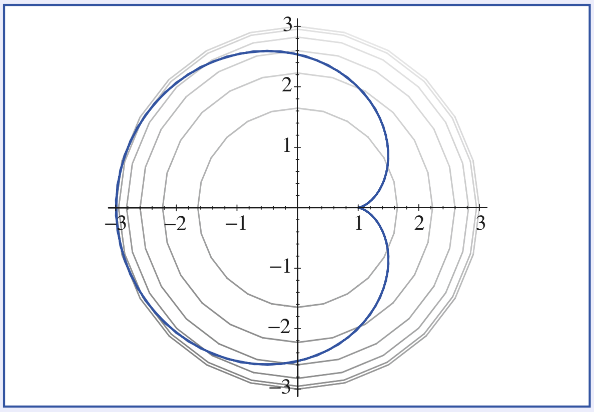
il est invariant par symétrie par rapport à l'axe (Ox). On peut restreindre l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$. Les fonctions x et y sont dérivables et :

$$x'(t) = 62\sin t(1-2\cos t)\ ;\ y'(t) = 2(1-\cos t)(1+2\cos t).$$

D'où le tableau de variations.

Le point $t = 0$ est stationnaire ; un développement limité donne : $x(t) = 1+t^2+o(t^2)$ $\quad y(t) = o(t^2)$. La tangente est donc parallèle à (Ox) ; par symétrie, il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce.

il s'agit d'une cardioïde :



La projection de Γ sur le plan (yOz) est définie par :

$$y(t) = 2\sin t - \sin 2t\ ; \qquad z(t) = 2\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}.$$

C'est un arc de période 4π, vérifiant pour tout t :

$$y(t+2\pi) = y(t)\ ; \qquad z(t+2\pi) = -z(t)\ ;$$

il est invariant par la symétrie d'axe (Oy). De plus : $y(-t) = -y(t)$ et $z(-t) = z(t)$; l'arc est invariant par la symétrie d'axe (Oz). On peut restreindre l'étude à l'intervalle $[0, \pi]$. Les fonctions y et z sont dérivables et :

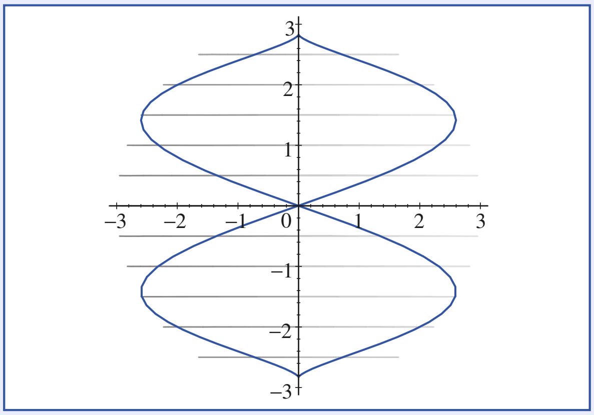
$$y'(t) = 2(1-\cos t)(1+2\cos t)\ ;\ z'(t) = -\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}.$$

D'où le tableau de variations.

Au point $t = 0$:

$$y(t) = o(t^2) \quad z(t) = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 + o(t^2).$$

La tangente est dirigée par (Oz) ; par symétrie, il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce.



La projection de Γ sur le plan (xOz) est définie par :

$$x(t) = 2\cos t - \cos 2t\ ; \qquad z(t) = 2\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}.$$

C'est un arc de période 4π, vérifiant pour tout t :

$$x(t+2\pi) = y(t); \qquad z(t+2\pi) = -z(t)\ ;$$

il est invariant par la symétrie d'axe (Ox). De plus : $x(-t) = x(t)$ et $z(-t) = z(t)$; l'arc est parcouru en entier sur $\mathbb{R}_+$. On peut restreindre l'étude à l'intervalle $[0,\pi]$. Les fonctions x et z sont dérivables et :

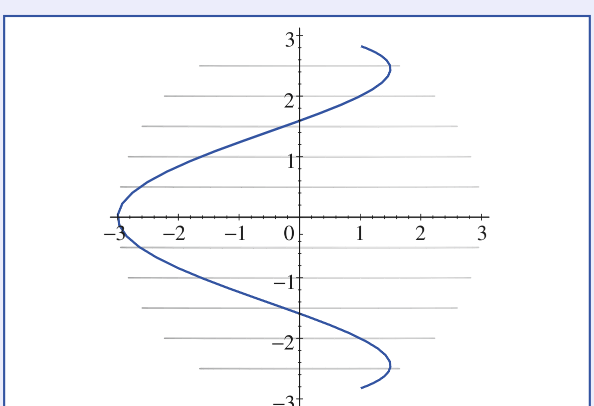
$$x'(t) = -2\sin t(1-2\cos t)\ ; \qquad z'(t) = -\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}.$$

D'où le tableau de variations.

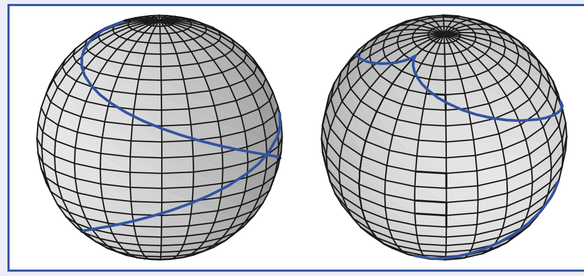
Au point $t = 0$:

$$x(t) = 1 + t^2 + o(t^2) \quad z(t) = 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}t^2 + o(t^2).$$

La tangente est dirigée par le vecteur $\left(1, -\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$; comme les arcs sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$ se superposent, il s'agit d'un point de rebroussement de deuxième espèce.



4 Allure de la courbe sur la sphère $\mathcal{S}$:

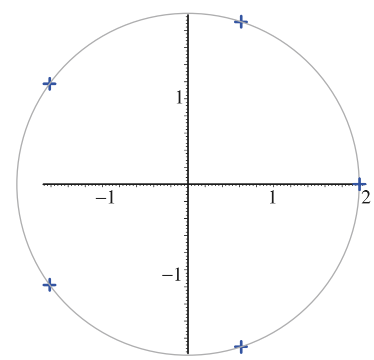


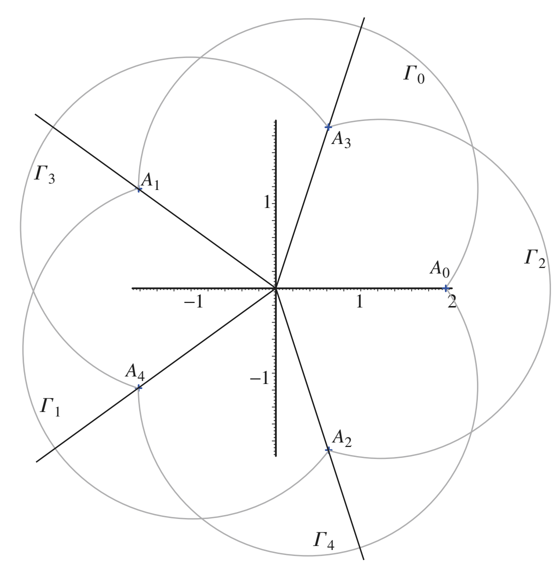
7 Pentagone, arcs de cercles et séries de Fourier

1

Avec Maple

```
> a:=2:w:=4*Pi/5:
> plot({[a*cos(0),a*sin(0)],[a*cos(w),a*sin(w)],
[a*cos(2*w),a*sin(2*w)],[a*cos(3*w),a*sin(3*w)],
[a*cos(4*w),a*sin(4*w)]},style=point,
scaling=constrained);
```





2 Notons I le centre du cercle circonscrit au triangle OA_0A_1, J le milieu de $[0, A_1]$, R le rayon du cercle. Les points O, I, A_3 sont alignés.

Nous avons :
$$OJ = \frac{a}{2}; \qquad OI = R = \frac{a}{2\cos\dfrac{2\pi}{5}}.$$
Nous pouvons en déduire une équation polaire de l'arc Γ_0 :
$$0 \leqslant \theta \leqslant \frac{4\pi}{5}\ ; \quad \rho = 2R\cos\left(\frac{2\pi}{5}-\theta\right) = \frac{a\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}-\theta\right)}{\cos\dfrac{2\pi}{5}}.$$

3 Une équation polaire de Γ est :
$$\begin{cases} 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{4\pi}{5}\ ;\ \rho = \dfrac{a\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}-\theta\right)}{\cos\dfrac{2\pi}{5}} \\ \dfrac{4\pi}{5} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{8\pi}{5}\ ;\ \rho = \dfrac{a\cos\left(\dfrac{6\pi}{5}-\theta\right)}{\cos\dfrac{2\pi}{5}} \\ \dfrac{8\pi}{5} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{12\pi}{5}\ ;\ \rho = \dfrac{a\cos(2\pi-\theta)}{\cos\dfrac{2\pi}{5}} \\ \dfrac{12\pi}{5} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{16\pi}{5}\ ;\ \rho = \dfrac{a\cos\left(\dfrac{14\pi}{5}-\theta\right)}{\cos\dfrac{2\pi}{5}} \\ \dfrac{16\pi}{5} \leqslant \theta \leqslant 4\pi\ ;\ \rho = \dfrac{a\cos\left(\dfrac{18\pi}{5}-\theta\right)}{\cos\dfrac{2\pi}{5}} \end{cases}.$$

4 La fonction F est $\dfrac{4\pi}{5}$-périodique et :
$$\forall t \in \left[0, \frac{4\pi}{5}\right] \quad F(t) = \frac{a\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}-t\right)}{\cos\dfrac{2\pi}{5}}.$$
Elle est continue sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall t \in \left[0, \frac{4\pi}{5}\right] \quad F(-t) = F\left(\frac{4\pi}{5}-t\right) = F(t).$$
Elle est paire.
Calculons ses coefficients de Fourier :
$$b_n = 0;\ a_n = \frac{5}{2\pi}\frac{a}{\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)}\int_0^{\frac{4\pi}{5}}\cos\left(\frac{2\pi}{5}-t\right)\cos\left(n\frac{5}{2}t\right)\mathrm{d}t.$$

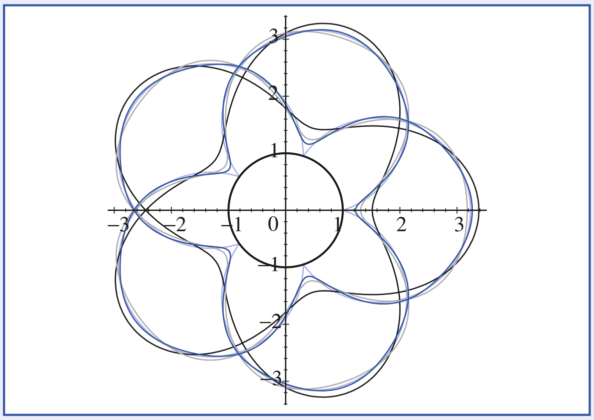
Avec Maple

```
> assume(n,integer):
(5/(2*Pi*cos(2*Pi/5)))*int(cos(2*Pi/5-t)
*cos(5*n*t/2),t=0..4*Pi/5);
```
$$-5\,\frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\pi\left(\frac{1}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\right)(2+5\,n\tilde{})(-2+5\,n\tilde{})}$$
```
> simplify(%);
```
$$-20\,\frac{\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{\pi(\sqrt{5}-1)(2+5\,n\tilde{})(-2+5\,n\tilde{})}$$

La fonction F est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

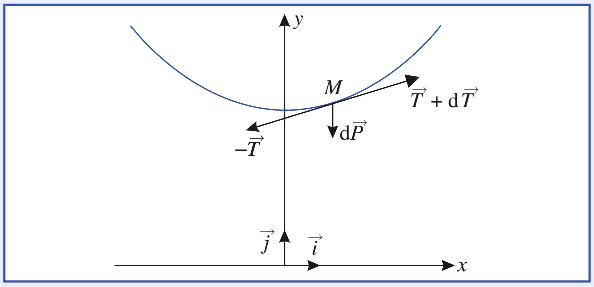
La série de Fourier de F converge vers F pour la norme N_2.

Elle converge aussi vers F uniformément sur $\mathbb{R}$.
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{5a}{4\pi\cos\frac{2\pi}{5}}\int_0^{\frac{4\pi}{5}}\left[\cos\left(\frac{2\pi}{5}+\left(\frac{5n}{2}-1\right)t\right)\right. \\ &\qquad\left. +\cos\left(\frac{2\pi}{5}-\left(\frac{5n}{2}+1\right)t\right)\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{5a}{4\pi\cos\frac{2\pi}{5}}\left(\frac{2}{5n-2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{5}+\frac{5n-2}{2}t\right)\right]_0^{\frac{4\pi}{5}}\right. \\ &\qquad\left. -\frac{2}{5n+2}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{5}-\frac{5n+2}{2}t\right)\right]_0^{\frac{4\pi}{5}}\right) \\ &= \frac{5a}{2\pi\cos\dfrac{2\pi}{5}}\left(\frac{1}{5n-2}\sin\frac{2\pi(5n-1)}{5}\right. \\ &\qquad\left. +\frac{1}{5n+2}\sin\frac{2\pi(5n+1)}{5}-\frac{4}{25n^2-4}\sin\frac{2\pi}{5}\right). \end{aligned}$$
En particulier :
$$a_0 = \frac{5a}{\pi}\tan\frac{2\pi}{5}.$$
La n-ième somme partielle de la série de Fourier de F s'écrit :
$$S_n(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{p=1}^{n}a_p\cos\frac{5px}{2}.$$
La *figure* suivante représente l'arc Γ et les arcs d'équation polaire $\rho = S_n(\theta)$ pour $n = 1, 2, 3$.



8 La corde et le pont

1 **a)** L'équation fondamentale de la dynamique permet d'écrire :
$$\overrightarrow{T} + \mathrm{d}\overrightarrow{T} - \overrightarrow{T} - \mu g\sigma\mathrm{d}s\,\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}.$$
Soit : $\mathrm{d}\overrightarrow{T} = \mu\sigma\mathrm{d}sg\,\overrightarrow{j}$.



Intégrons, en prenant C pour origine des abscisses curvilignes :

$$\overrightarrow{T} = T_0 \overrightarrow{i} + \mu g \sigma s \overrightarrow{j}.$$

D'où : $\tan\phi = \dfrac{\mu g \sigma s}{T_0} = \dfrac{s}{a}$, en posant $a = \dfrac{T_0}{\mu g \sigma}$.

b) Dérivions l'équation intrinsèque $\tan\phi = \dfrac{s}{a}$.

$(1+\tan^2\phi)\mathrm{d}\phi = \dfrac{\mathrm{d}s}{a}$.

De plus : $\tan\phi = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Donc : $$(1+\tan^2\phi)\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}.$$

Orientons la courbe dans le sens des x croissants.

Nous obtenons :

$$a\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}^2 x} = \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}.$$

Ou encore : $ay'' = \sqrt{1+y'^2}$.

c) Résolvons l'équation différentielle en effectuant un changement de fonction inconnue.

Posons $y'(x) = \sinh(z(x))$.

La fonction sinh réalise un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Alors : $y''(x) = \cosh(z(x))z'(x)$.

L'équation différentielle devient $z'(x) = \dfrac{1}{a}$.

Nous en déduisons :

$$z(x) = \frac{x}{a}\ ; \qquad y'(x) = \sinh(\frac{x}{a}).$$

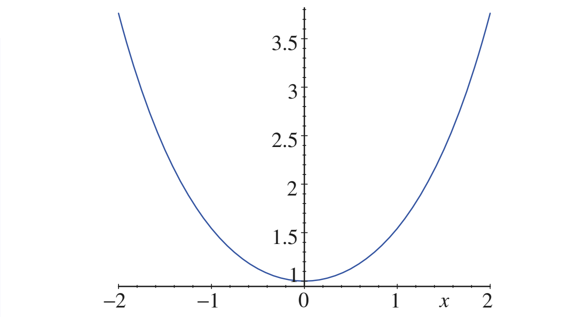
Puis :

$$y(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + C = \frac{T_0}{\mu g \sigma}\cosh\left(\mu g \sigma \frac{x}{T_0}\right) - \frac{T_0}{\mu g \sigma}.$$

En prenant $a = 1$.

Avec Maple

```
> plot(cosh(x),x=-2..2);
```



d) La question **1) a)** permet d'écrire :

$$s = a\tan\phi = a\sinh\left(\frac{x}{a}\right).$$

D'où : $R = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\phi} = \dfrac{T_0}{\mu g \sigma}\cosh^2(\mu g \sigma \dfrac{x}{T_0})$.

e) Le point C correspond à $x = y = 0$.

Au point A : $s = \dfrac{1}{2}$m. Donc, en ce point :

$$x = \frac{T_0}{\mu g \sigma}\operatorname{Argsh}\left(\frac{\mu g \sigma}{2T_0}\right).$$

En déduire l'ordonnée de A :

$$y = 0.01\ \text{mm}.$$

2) On substitue à la masse $\mu\sigma\mathrm{d}s$ la masse $\mu\sigma\mathrm{d}x$ de l'élément de tablier du pont.

D'où : $\overrightarrow{T} = T_0\overrightarrow{i} + \mu g \sigma x \overrightarrow{j}$.

Et finalement l'équation différentielle :

$$y' = \frac{\mu g \sigma x}{T_0} = \frac{x}{a}.$$

En intégrant, nous obtenons la forme du câble : elle est parabolique.

9 Centres de courbure en O d'une famille de coniques

1 Nous savons que l'équation fournie est celle d'une conique et qu'une rotation d'angle α bien choisi de la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ nous permet d'obtenir une équation ne comportant plus de terme en xy.

Si nous regardons l'expression $x^2 + y^2 - 2kxy$, nous constatons que x et y jouent le même rôle. Ceci signifie que la droite d'équation $y = x$ est axe de symétrie pour les coniques dont l'équation est de la forme :

$$x^2 + y^2 - 2kxy + ax + ay + b = 0.$$

Effectuons une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

La matrice de passage est : $P = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Donc, en notant (x, y) les coordonnées d'un point M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et (X, Y) ses coordonnées dans le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$: $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \end{cases}$.

L'équation de $\mathcal{C}_k$ dans le repère $(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ est :
$X^2(1-k) + Y^2(1+k) + \sqrt{2}X(k-1) + \sqrt{2}Y(k+1) = 0.$

• Si k est dans $]-\infty, -1[$, la courbe est une hyperbole.

• Si $k = -1$, l'équation est $X(X - \sqrt{2}) = 0$, la courbe est la réunion de deux droites.

• Si k est dans $]-1, 0[$ ou dans $]0, 1[$, la courbe est une ellipse.

• Si $k = 0$, elle est un cercle.

• Si $k = 1$, la courbe est la réunion de deux droites.

• Si k est dans $]1, +\infty[$, la courbe est une hyperbole.

2 ▬ Lorsque la courbe est une ellipse ou une hyperbole, précisons ses axes en travaillant dans le nouveau repère.

Son équation s'écrit alors :

$$(1-k)\left(X - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (1+k)\left(Y + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 = 0.$$

Le centre de symétrie de la conique est le point $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Les axes sont les droites parallèles aux axes passant par ce point.

3 ▬ Plusieurs méthodes peuvent être envisagées.

Travaillons toujours dans le nouveau repère, avec $k \neq \pm 1$.

Au voisinage du point O, la courbe a pour équation :

$$Y = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{1 - (1-k)\left(x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1+k}}$$

Soit :

$$Y = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{\frac{\dfrac{1+k}{2} + \sqrt{2}x(1+k) + x^2(k-1)}{1+k}}.$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.

Elle admet donc un développement limité en ce point à l'ordre 2 et les coefficients nous donnent les dérivées $y'(0)$, $y''(0)$.

Avec Maple

```
> y:=-sqrt(2)/2+sqrt((1-(1-k)
*(x-sqrt(2)/2)^2)/(1+k));
```

$$y := -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1 - (1-k)\,(x - \frac{1}{2}\sqrt{2})^2}{1+k}}$$

```
> y:=series(y,x,3);
```

$$y := \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}k}{1+k}}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}k}{1+k}}\,(1-k)\sqrt{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}k}\,x + \sqrt{\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}k}{1+k}}\left(\frac{1}{2}\,\frac{-1+k}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}k} - \frac{1}{4}\,\frac{(1-k)^2}{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}k)^2}\right)x^2 + \mathrm{O}(x^3)$$

```
> simplify(y);
```

$$-\frac{-1+k}{1+k}\,x + \frac{\sqrt{2}\,(-1+k)}{(1+k)^2}\,x^2 + \mathrm{O}(x^3)$$

Nous en déduisons :

$$y'(0) = \frac{1-k}{1+k}\,; \qquad y''(0) = \frac{2\sqrt{2}(k-1)}{(k+1)^2}.$$

Puis, en orientant la courbe dans le sens des X croissants :

$$R = \frac{(1 + y'(0)^2)^{3/2}}{y''(0)} = \frac{(k^2+1)^{3/2}}{(k-1)\,|k+1|}.$$

Un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{T}$ et de même sens est :

$$\overrightarrow{u} = \left(1, \frac{1-k}{1+k}\right).$$

D'où :

$$\overrightarrow{T} = \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} = \left(\frac{|1+k|}{\sqrt{2(k^2+1)}}, \frac{1-k}{\operatorname{sgn}(1+k)\sqrt{2(k^2+1)}}\right).$$

Puis : $\overrightarrow{N} = \left(-\dfrac{1-k}{\operatorname{sgn}(1+k)\sqrt{2(k^2+1)}}, \dfrac{|1+k|}{\sqrt{2(k^2+1)}}\right)$.

Les coordonnées de C_k sont : $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\dfrac{k^2+1}{k+1}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\dfrac{k^2+1}{k-1}\right)$.

Réciproquement, tout point de la courbe définie paramétriquement par :

$x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\dfrac{k^2+1}{k+1}$, $\quad y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\dfrac{k^2+1}{k-1}$ est un point C_k.

Étudions la courbe ainsi définie.

Le domaine de définition est $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

$$x'(k) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{k^2+2k-1}{(k+1)^2}; \qquad y'(k) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{k^2-2k-1}{(k-1)^2}.$$

k	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1\sqrt{2}$		0		$-1+\sqrt{2}$		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$x'(k)$		$+$	0	$-$	$\Vert$		$-$				0	$+$		$+$		$+$	
$x(k)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\left(\dfrac{2}{3}+\sqrt{2}\right)$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$2-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y(k)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$2+\sqrt{2}$	$\searrow$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$ $-\sqrt{2}$ $\searrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$2+\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(k)$		$+$		$+$			0		$-$			$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Étudions les branches infinies.

Les droites d'équation :

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

sont asymptotes à la courbe.

Lorsque $|k|$ tend vers $+\infty$:

$$\begin{aligned} x(k) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{k^2+1}{k\left(1+\dfrac{1}{k}\right)}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^3}+o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(k-1+\frac{2}{k}-\frac{2}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\ y(k) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{k^2+1}{k\left(1-\dfrac{1}{k}\right)}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k}+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(k+1+\frac{2}{k}+\frac{2}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right). \end{aligned}$$

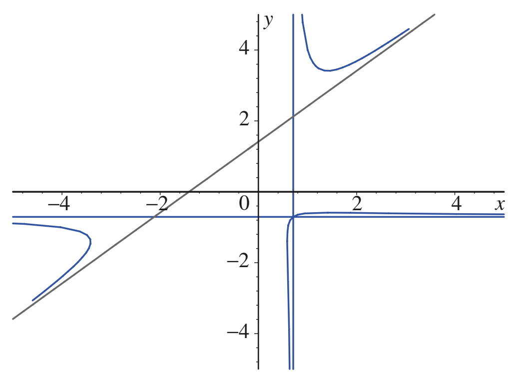
D'où :

$$y(k)-x(k) = \sqrt{2}\left(1+\frac{2}{k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right).$$

La droite d'équation $y - x = \sqrt{2}$ est asymptote à la courbe lorsque k tend vers $\pm\infty$ et la courbe est toujours au-dessus de son asymptote.

Avec Maple

```
> plot({[((k^2+1)/(k+1))*sqrt(2)/2,((k^2+1)/(k-1))
*sqrt(2)/2,k=-5..5],[t,t+sqrt(2),t=-5..5]},
x=-5..5,y=-5..5);
```



10 La lemniscate de Bernoulli

1 Étudions la courbe d'équation $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$. Nous complèterons ensuite par symétrie par rapport à O.

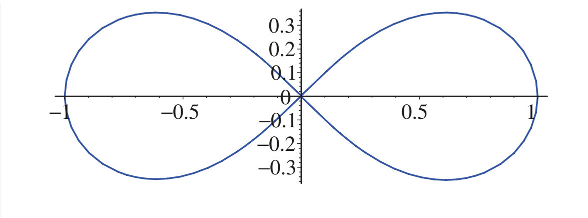
La fonction $(\theta \to \sqrt{\cos(2\theta)})$ est définie sur les intervalles de la forme $\left[-\dfrac{\pi}{4}+k\pi, \dfrac{\pi}{4}+k\pi\right]$, périodique, de période π, et paire. Nous l'étudierons sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et compléterons le graphe par la symétrie de centre O et celle d'axe $(x'x)$.

θ	0			$\dfrac{\pi}{4}$
$\rho(\theta)$	1	$+$	$+$	0

Nous obtenons la lemniscate de Bernoulli.

Avec Maple

```
> with(plots) :
> polarplot(sqrt(cos(2*t)),scaling=constrained) ;
```



2 ▬ Notons K le domaine compact du plan délimité par la courbe et situé dans le quart de plan :

$\{(x, y)\,;\, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.

Alors l'aire cherchée est : $A = 4 \displaystyle\int\!\!\int_K \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Effectuons un passage en coordonnées polaires :

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{\sqrt{\cos(2\theta)}} r\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta$$

Que donnerait de la *formule de Green-Riemann* ?

Directement, en appliquant le résultat établi dans *Analyse,* page 298 nous obtenons :

$A = 4\displaystyle\int\!\!\int_K \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2\theta)}{2}\mathrm{d}\theta = 1$ unité d'aire.

3 ▬ Considérons la courbe située dans le quart de plan $\{(x, y)\,;\, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ et orientons-la dans le sens des θ croissants. Alors :

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\mathrm{d}\theta.$$

Notons $(\vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ la base orthonormée définie par :

$\vec{u}(\theta) = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}\ ;\ \vec{v}(\theta) = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$.

Nous dérivons : $\overrightarrow{OM} = \rho(\theta)\vec{u}(\theta)$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{T} &= \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\\ &= \sqrt{\cos(2\theta)}\left(\sqrt{\cos(2\theta)}\vec{v}(\theta) - \frac{\sin(2\theta)}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\vec{u}(\theta)\right).\end{aligned}$$

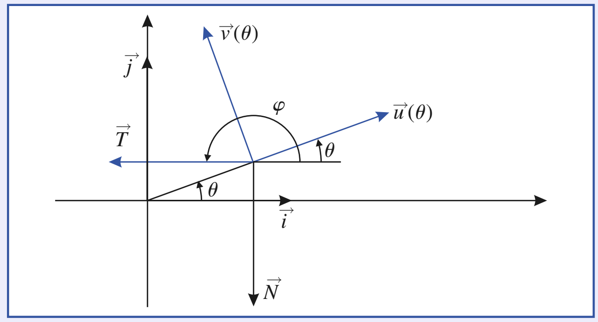
Soit : $\overrightarrow{T} = -\sin(2\theta)\vec{u}(\theta) + \cos(2\theta)\vec{v}(\theta)$.

Puis : $\overrightarrow{T} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\theta\right)\vec{u}(\theta) + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2\theta\right)\vec{v}(\theta)$.

D'où : $\overrightarrow{T} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 3\theta\right)\vec{i} + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 3\theta\right)\vec{j}$.

Et : $\overrightarrow{N} = -\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 3\theta\right)\vec{i} + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 3\theta\right)\vec{j}$.

Par conséquent : $\varphi = \dfrac{\pi}{2} + 3\theta$, en notant $\varphi = \widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{T})}$.



Nous pouvons déterminer R grâce à la formule :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\overrightarrow{N}}{R}.$$

En dérivant $\overrightarrow{R}$ et considérant la coordonnée suivant $\vec{i}$: $R = \dfrac{1}{3\sqrt{\cos(2\theta)}}$.

Autre méthode possible : $c = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = 3\sqrt{\cos 2\theta}$.

Puis R...

4 ▬ Les arcs L_1, L_2 ont respectivement pour longueur :

$$l_1 = \int_0^{\theta_1} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}}\ ; \qquad l_2 = \int_{\theta_2}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}}.$$

Posons $t = \cos(\theta)$.

$$l_1 = \int_{\cos(\theta_1)}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{2t^2-1}}\ ;$$

$$l_2 = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\cos(\theta_2)} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{2t^2-1}}.$$

Puis effectuons dans la seconde intégrale le changement de variables défini par $v = \dfrac{1}{t\sqrt{2}}$.

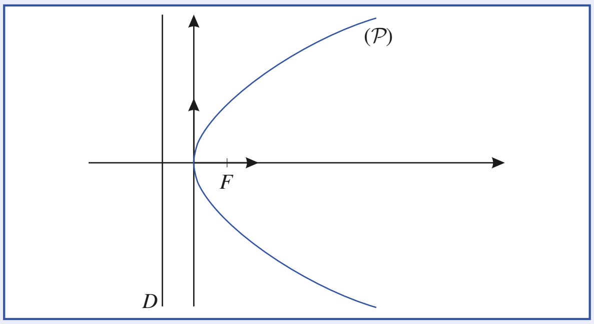
$$l_2 = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}\cos(\theta_2)}}^{1} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{2v^2-1}}.$$

La fonction $\left(u \rightarrow \displaystyle\int_u^1 \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{2v^2-1}}\right)$ est strictement décroissante sur $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right[$.

Donc : $l_1 = l_2 \iff \cos(\theta_1) = \dfrac{1}{\sqrt{2}\cos(\theta_2)}$.

11 Point fixe d'un ensemble de droites

1 ▬ $\mathcal{P}$ est la parabole de sommet O, de foyer $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ et de directrice la droite d'équation : $x = -\dfrac{p}{2}$.



2 ▬ Nous savons que :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t^2}{2p} \\ t \end{pmatrix} \quad ; \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{t}{p} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Une équation cartésienne de la normale en $M(t)$ à $\mathcal{P}$ est :

$$\left(x - \frac{t^2}{2p}\right)\frac{t}{p} + (y - t) = 0.$$

3 ▬ La normale en $M(t)$ passe par $M(\theta)$ ssi :

$$\left(\frac{\theta^2}{2p} - \frac{t^2}{2p}\right)\frac{t}{p} + (\theta - t) = 0.$$

Cette équation a pour inconnue t. Nous cherchons le nombre de solutions t. Elle équivaut à :

$$(\theta - t)[t(\theta + t) + 2p^2] = 0.$$

Or $\theta \neq t$. Donc : $t^2 + \theta t + 2p^2 = 0$.

Le discriminant de l'équation est $\Delta = \theta^2 - 8p^2$.

Si θ est dans $]-2\sqrt{2}p, 2\sqrt{2}p[$, il n'existe pas de point $M(t)$ tel que la normale en $M(t)$ à $\mathcal{P}$ passe par $M(\theta)$.

Si θ est dans $\{-2\sqrt{2}p, 2\sqrt{2}p\}$, il existe un point $M(t)$ tel que la normale en $M(t)$ à $\mathcal{P}$ passe par $M(\theta)$.

Si θ est dans $\mathbb{R}\backslash[-2\sqrt{2}p, 2\sqrt{2}p]$, il existe deux points $M(t)$ tels que la normale en $M(t)$ à $\mathcal{P}$ passe par $M(\theta)$.

4 ▬ Lorsque θ est dans $\mathbb{R} - [-2\sqrt{2}p, 2\sqrt{2}p]$, il existe deux points $M(t_1), M(t_2)$ tels que la normale en ces points à $\mathcal{P}$ passe par un point de $\mathcal{P}$.

La droite $M(t_1)M(t_2)$ a pour équation :

$$(2px - t_1^2) - (y - t_1)(t_1 + t_2) = 0.$$

Utilisons : $t_1 + t_2 = -\theta$; $t_1 t_2 = 2p^2$.

L'équation de $M(t_1)M(t_2)$ devient :

$$2px + \theta y + 2p^2 = 0.$$

Cette droite passe par le point $J(-p, 0)$.

12 Coniques passant par O

1 ▬ L'équation d'une conique passant par O est de la forme :

$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey = 0$$

avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

2 ▬ En un point (x_0, y_0) de la conique, le vecteur gradient de f est :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ f(x_0, y_0) = (2ax_0 + 2by_0 + d, 2bx_0 + 2cy_0 + e).$$

Donc, $\overrightarrow{\text{grad}}\ f(0,0) = (d, e)$ et O est un point singulier si, et seulement si, $d = e = 0$.

Dans ce cas, la conique a pour équation :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0.$$

On sait qu'une rotation du repère permet d'écrire l'équation de la conique sous la forme :

$$\lambda X^2 + \mu Y^2 = 0.$$

λ et μ sont les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

Donc, $\lambda + \mu = a + c$ et $\lambda\mu = ac - b^2$.

- $\lambda\mu > 0$, la conique se réduit au point O.
- $\lambda\mu = 0$, elle est une droite passant par O.
- $\lambda\mu < 0$, la conique se décompose en la réunion de deux droites sécantes en O.

3 ▬ Si $(d, e) \neq (0, 0)$, le point O est un point régulier et la tangente en ce point a pour équation :

$$dx + ey = 0.$$

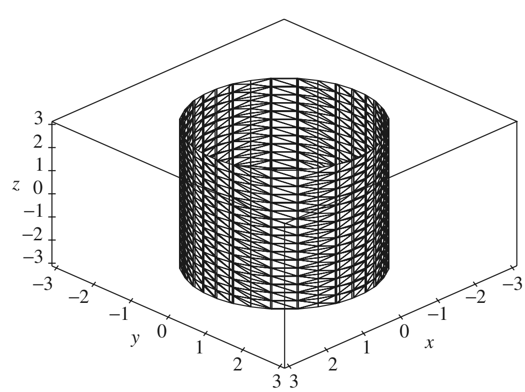
Par exemple, $f(x, y) = y - x^2$.

13 Un cylindre

1 ▬ Cette surface est l'ensemble des points situés à la distance $\sqrt{a}$ de l'axe (Oz). Il s'agit du cylindre de révolution d'axe (Oz) dont l'intersection avec le plan (xOy) est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a}$.

Avec Maple

```
> with(plots) :
implicitplot3d(x^2+y^2=4,x=-3..3,
y=-3..3,z=-3..3,num
points=4000,axes=BOXED) ;
```



2 Les droites contenues dans la surface sont les droites parallèles à (Oz) et passant par un point du cercle de centre O et de rayon $\sqrt{a}$. On les appelle les génératrices du cylindre.

Le cylindre (S) est la réunion de ces génératrices.

3 On pose $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - a$. Le cylindre est la surface définie par l'équation implicite $F(x, y, z) = 0$. En un point (x_0, y_0, z_0) de (S), on a :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = 2x_0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = 2y_0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Donc : $\overrightarrow{\text{grad}}\, F(x_0, y_0, z_0) \neq \overrightarrow{0}$. Tout point de (S) est régulier.

Le plan tangent en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ a pour équation :

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0.$$

Il contient la génératrice du cylindre passant par M_0.

14 Loxodromies de la sphère

1 On utilise les coordonnées sphériques. La sphère S est paramétrée par $\Phi : (\varphi, \theta) \mapsto (x, y, z)$ avec :

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta \\ y = R\sin\varphi\sin\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

avec : $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$.

2 Si $\alpha = 0$, les loxodromies de la sphère sont les cercles méridiens.

Si $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, les loxodromies de la sphère sont les cercles parallèles, cercles intersection de la sphère avec un plan horizontal .

On suppose $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. Les cercles méridiens (θ est constant) ne sont plus solutions et on cherche les loxodromies en choisissant θ pour paramètre.

Soit $\varphi : (\theta \mapsto \varphi(\theta))$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $[0, \pi]$ et C la courbe paramétrée par $(\theta \mapsto M(\theta))$; les coordonnées de $M(\theta)$ étant définies par :

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi(\theta)\sin\theta \\ y = R\sin\varphi(\theta)\sin\theta \\ z = R\cos\theta \end{cases}.$$

On a : $\qquad \overrightarrow{OM}(\theta) = R\sin\theta\overrightarrow{e_{\varphi(\theta)}} + R\cos\theta\vec{k}.$

Puis :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = R\cos\theta\overrightarrow{e_{\varphi(\theta)}} + R\sin\theta\varphi'(\theta)\overrightarrow{e_{\varphi(\theta)+\pi/2}} - R\sin\theta\vec{k}.$$

Tout point de la courbe est régulier.

D'autre part, la tangente au cercle méridien au point $M(\theta, \varphi)$ de ce cercle est dirigée par le vecteur :

$$\frac{\partial\overrightarrow{\Phi}}{\partial\theta}(\varphi, \theta) = R\cos\theta\overrightarrow{e_\varphi} - R\sin\theta\vec{k}.$$

Les tangentes à la courbe C et au cercle méridien au point d'intersection $M(\theta, \varphi(\theta))$ font un angle α si, et seulement si :

$$\frac{\partial\overrightarrow{\Phi}}{\partial\theta}(\varphi, \theta)\cdot\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = \left\|\frac{\partial\overrightarrow{\Phi}}{\partial\theta}(\varphi, \theta)\right\| \left\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)\right\| \cos\alpha.$$

On obtient : $\qquad \left[1 + \sin^2\theta\varphi'^2(\theta)\right]\cos^2\alpha = 1.$

La condition se traduit par l'équation différentielle :

$$\varphi'(\theta) = \pm\frac{\tan\alpha}{\sin\theta}.$$

Le signe utilisé indique simplement si l'on tourne d'*est en ouest* ou d'*ouest en est* sur la sphère.

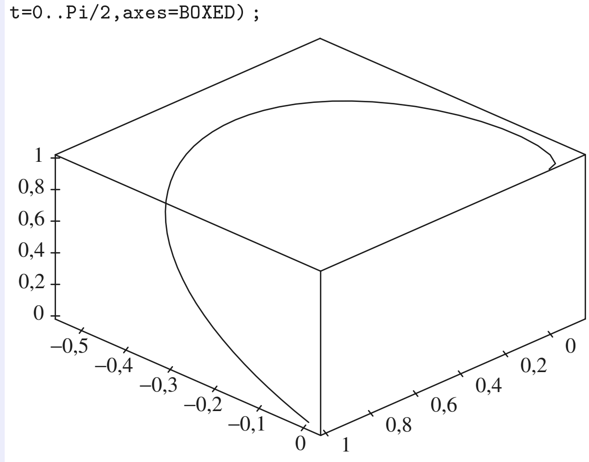
Les loxodromies de la sphère sont alors les courbes tracées sur la sphère définies par :

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = R\sin\theta\,\overrightarrow{e_{\varphi(\theta)}} + R\cos\theta\,\vec{k}$$

avec $\varphi(\theta) = \pm\tan\alpha\ln\left(\tan\dfrac{\theta}{2}\right) + c.$

Avec Maple

```
> restart :with(plots) :
spacecurve([sin(t)*cos(ln(tan(t/2))),
sin(t)*sin(ln(tan(t/2))),cos(t)],
t=0..Pi/2,axes=BOXED) ;
```



15 Cône tangent à une sphère

1 a) L'équation de Π s'interprète en :

$$M/n\Pi \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{n} = h$$

où $\overrightarrow{n} = (a, b, c)$ apparaît comme un vecteur unitaire normal à Π.

Le plan $(O, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{n})$ est plan de symétrie pour Σ comme pour Π. On se ramène à une vision plane.

On applique le *théorème de Pythagore* au triangle OJH, ce qui donne : $r = HJ = \sqrt{1-h^2}$.

b) Comme son plan Π est perpendiculaire à $(O, \overrightarrow{n})$ et que son centre H est sur la droite $(O, \overrightarrow{n})$, (C) possède la symétrie de révolution autour de $(O, \overrightarrow{n})$. Par conséquent, S est sur $(O, \overrightarrow{n})$: $\exists \in \mathbb{R} \qquad \overrightarrow{OS} = t\overrightarrow{n}$.

Par le théorème de Pythagore, on a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OS}^2 &= \overrightarrow{OJ}^2 + \overrightarrow{JS}^2 \\ &= 1 + \overrightarrow{SH}^2 + \overrightarrow{HJ}^2 \\ &= 1 + (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OS})^2 + 1 - h^2 \\ t^2 &= 1 + h^2t^2 - 2ht + 1 - h^2 \end{aligned}$$

On en déduit que $t = \dfrac{1}{h}$ et donc $S\left(\dfrac{a}{h}, \dfrac{b}{h}, \dfrac{c}{h}\right)$.

c) Inversement si $S(\alpha, \beta, \gamma)$ est sommet d'un cône circonscrit à Σ si, et seulement s'il existe h tel que $\alpha = \dfrac{a}{h}$, $\beta = \dfrac{b}{h}, \gamma = \dfrac{c}{h}$ avec : $(a, b, c) = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}(\alpha, \beta, \gamma)$.

On a donc $h = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$ et le plan Π est $ax + by = cz = h$ soit en simplifiant par les dénominateurs :

$$(C)\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

2 a) $$(\Sigma) \cap (\mathcal{S})\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ (x^2+y^2)4z^2 = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 - z^2 \\ 4z^2(1-z^2) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Ainsi $(\Sigma) \cap (\mathcal{S})$ est constituée de deux cercles

$$\begin{cases} z = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ x^2+y^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Comparaison des plans tangents en un point M de $(\Sigma) \cap (\mathcal{S})$.

Sur Σ, le gradient en $M(x, y, z)$ est colinéaire à (x, y, z) ; ce même gradient sur $\mathcal{S}$ est $\begin{pmatrix} xz^2 \\ yz^2 \\ z(x^2+y^2) \end{pmatrix}$.

Le point M est sur $\mathcal{S} \cap \Sigma$,on a donc $x^2 + y^2 = z^2$. Les deux gradients sont colinéaires. Les plans tangents sont confondus.

b) On voit que $\mathcal{S}$ peut être engendré par une demi-méridienne $z\rho = \dfrac{1}{2}$ (une rotation d'angle π l'amenant sur $z\rho = -\dfrac{1}{2}$).

On a donc $\overrightarrow{OS} = \rho\overrightarrow{u}(\theta) + \dfrac{1}{2\rho}\overrightarrow{k}$. Ainsi :

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = \dfrac{1}{2\rho} \end{cases} \qquad \rho > 0 \qquad \theta \in [0, 2\pi].$$

3 Une droite tangente à $\mathcal{S}$ en S est une droite du plan tangent en $\mathcal{S}$ à S. Elle est définie par S et $\overrightarrow{W} = \alpha\dfrac{\partial \overrightarrow{S}}{\partial\rho} + \beta\dfrac{\partial \overrightarrow{S}}{\partial\theta}$, soit :

$$\overrightarrow{W} = \alpha\left[\overrightarrow{u}(\theta) - \frac{1}{2\rho^2}\overrightarrow{k}\right] + \beta\rho\overrightarrow{v}(\theta).$$

Cette droite (D) est tangente à $\mathcal{S}$ si, et seulement si : $d(O, (D)) = 1$.

On sait que $d(O, (D)) = \dfrac{||\overrightarrow{OS} \wedge \overrightarrow{W}||}{||\overrightarrow{W}||}$.

On a sans problème : $\overrightarrow{OS} \wedge \overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} -\beta/2 \\ \alpha/\rho \\ \beta\rho^2 \end{pmatrix}$.

Ainsi l'écriture de $d(O, (D))^2 = 1$ donne $\beta^2 = \dfrac{\alpha^2}{\rho^4}$ si $(2\rho^2 - 1)^2 \neq 0$.

On prendra par exemple $\alpha = \rho$ et $\beta = \pm\dfrac{1}{\rho}$ et l'on a ainsi deux directions de tangentes :

$$\overrightarrow{W}_+ = \begin{pmatrix} \rho \\ 1 \\ -\dfrac{1}{2\rho} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{W}_- = \begin{pmatrix} \rho \\ -1 \\ -\dfrac{1}{2\rho} \end{pmatrix}.$$

4 a) Le vecteur $\dfrac{d\overrightarrow{S}}{d\theta} = \rho'\overrightarrow{u} + \rho\overrightarrow{v} - \dfrac{\rho'}{2\rho^2}\overrightarrow{k}$ définit la tangente dans tous les cas soit ici $\dfrac{d\overrightarrow{S}}{d\theta} = \rho'\dfrac{\partial\overrightarrow{S}}{\partial\rho} + \dfrac{\partial\overrightarrow{S}}{\partial\theta}$ (la courbe est tracée sur $\mathcal{S}$).

Il suffit de reprendre le calcul du **3)** avec $\alpha = \rho'$ et $\beta = 1$ pour avoir :

la droite $(S, \dfrac{d\overrightarrow{S}}{d\theta})$ est tangente à Σ si, et seulement si, $\rho^2 = 1/2$ ou $\rho'^2 = \rho^4$.

On a pour tout θ : $(\rho' - \rho^2)(\rho' + \rho^2) = 0$.

On sait que, en général, cela ne donne pas :

$\forall\theta \qquad \rho' - \rho^2 = 0$ ou $\forall\theta \qquad \rho' + \rho^2 = 0$.

Ce serait une faute monumentale que de l'écrire sans justification.

Or on sait que, $\rho \neq 0$. Si on pose $F(\theta) = \dfrac{\rho'}{\rho^2}$ on a pour tout θ , $F(\theta)^2 = 1$.

La fonction F est continue. Si F prenait les valeurs 1 et -1, elle devrait prendre les valeurs intermédiaires ce qui est absurde.

On a donc soit $F(\theta) = 1$, soit $F(\theta) = -1$.

$$\forall\theta \in \mathbb{R} \quad \frac{\rho'}{\rho^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \forall\theta \in \mathbb{R} \quad \frac{\rho'}{\rho^2} = -1,$$

ce qui donne comme solutions :

$$\rho = \frac{1}{\theta - \theta_0} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{1}{\theta_0 - \theta}.$$

L'invariance par les rotations d'axe $(0, \overrightarrow{k})$ était évidemment prévisible.

b) On prend $\rho = 1/\theta$. Ainsi la tangente en S à pour équations paramétriques :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OS} + \lambda \frac{d\overrightarrow{S}}{d\theta},$$

ce qui donne comme coordonnées :

$$X = \frac{1}{\theta} - \frac{\lambda}{\theta^2}, \quad Y = \frac{\lambda}{\theta}, \quad Z = \frac{\theta}{2} + \frac{\lambda}{2}.$$

X, Y, Z étant les coordonnées dans le repère R_θ.

Le point M de contact est évidemment caractérisé sur la tangente par :

$$\overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{SM} = 0 \iff \overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{M'(\theta)} = 0.$$

On obtient alors $-\dfrac{1}{\theta^2}\left(\dfrac{1}{\theta} - \dfrac{\lambda}{\theta^2}\right) + \dfrac{\lambda}{\theta^2} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\lambda}{2}\right) = 0.$

Et : $\lambda = \theta \dfrac{2 - \theta^2}{2 + \theta^2}$.

Ce qui donne : $M(\theta) \begin{pmatrix} \dfrac{2\theta}{2+\theta^2} \\ \dfrac{2-\theta^2}{2+\theta^2} \\ \dfrac{2\theta}{2+\theta^2} \end{pmatrix}$ dans le repère R_θ.

c) On a $\overrightarrow{OM}^2 = 1 = \overrightarrow{OS}^2 - \overrightarrow{SM}^2$.

En dérivant par rapport à θ, on obtient :

$$0 = \overrightarrow{OS}\frac{d\overrightarrow{S}}{d\theta} - \overrightarrow{SM}\left[\frac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} - \frac{d\overrightarrow{S}}{d\theta}\right].$$

D'où $\overrightarrow{SM}\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta} = \overrightarrow{OS}\dfrac{d\overrightarrow{S}}{d\theta} + \overrightarrow{SM}\dfrac{d\overrightarrow{S}}{d\theta} = \overrightarrow{OM}\dfrac{d\overrightarrow{S}}{d\theta} = 0$ par construction.

On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{SM}$ est orthogonal à $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{d\theta}$.

PARTIE

2 ANALYSE

9 Topologie

RAPPELS DE COURS

$(E, \| \ \|_E)$, $(F, \| \ \|_F)$ et $(G, \| \ \|_G)$ sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, que nous noterons simplement E et F, A est une partie de E.

SUITES EXTRAITES

• ***Suite extraite d'une suite u***

Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, alors l'application :

$v = u \circ \varphi : \mathbb{N} \longrightarrow E, n \longmapsto v_n = u_{\varphi(n)}$, est appelée une *suite extraite* de u.

Elle est notée $v = (u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ou, plus simplement $(u_{\varphi(n)})$.

Si (u_n) est une suite de l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ convergeant vers la limite l, alors toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers l.

• ***Valeur d'adhérence d'une suite***

Un vecteur a de E est appelé *valeur d'adhérence* de la suite u s'il existe une suite extraite de (u_n) convergeant vers a.

L'élément a est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si, et seulement si, toute boule de centre a, non vide, contient une infinité de termes de la suite :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geqslant N \text{ et } u_n \in B(a, \ \varepsilon)).$$

Si (u_n) est une suite d'éléments de E convergeant vers l, l est l'unique valeur d'adhérence de la suite (u_n).

NORMES ÉQUIVALENTES

Deux *normes* N_1 et N_2 sur le même espace vectoriel E sont dites *équivalentes* si, et seulement si :

$$\exists (a, \ b) \in (\mathbb{R}^{+*})^2 \ \ \forall x \in E \quad a \ N_1(x) \leqslant N_2(x) \leqslant b \ N_1(x).$$

Dans ce cas, une suite (u_n) d'éléments de E converge vers un élément l de E relativement à la norme N_1 si, et seulement si, elle converge vers l pour la norme N_2.

VOISINAGES. OUVERTS, FERMÉS

Une partie V de E est appelée *voisinage* de a quand elle contient une boule ouverte non vide de centre a, c'est-à-dire :

$$\exists r > 0 \quad B(a,r) \subset V.$$

On notera $\mathcal{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

Une partie O de l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ est un *ouvert* de E lorsqu'elle est un voisinage de chacun de ses points, c'est-à-dire :

$$\forall a \in O \quad \exists r > 0 \quad B(a,\ r) \subset O.$$

Une partie F de l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ est un *fermé* de E lorsque son complémentaire dans E, $\complement_E F$, est un ouvert de E et réciproquement.

Toute réunion de voisinages de a est un voisinage de a.

Toute intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a.

L'ensemble des ouverts de l'espace vectoriel normé E est appelé *topologie* de E.

Toute réunion d'ouverts est un ouvert.

Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Si (u_n) est une suite convergente de E, de limite l, alors tout ouvert de E contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Une partie O de A est un ouvert relatif à A si, et seulement si, O est l'intersection d'un ouvert de E avec A.

Une partie F de A est un fermé relatif à A si, et seulement si, F est l'intersection d'un fermé de E avec A.

INTÉRIEUR, ADHÉRENCE D'UNE PARTIE, PARTIE DENSE

Un élément a de A est appelé point intérieur à la partie A si A est un voisinage de a. L'ensemble des points intérieurs à la partie A de E est appelé *intérieur de la partie* A, noté $\overset{\circ}{A}$

Soit a un élément de E, on dit que a est un *point adhérent* à la partie A si tout voisinage de a rencontre A, c'est-à-dire si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(a) \quad V \cap A \neq \varnothing.$$

L'ensemble des points adhérents à A est appelé l'adhérence de A et il est noté $\overline{A}$.

Soit A et B deux parties de E telles que $A \subset B$. A est dite *dense* dans B si B est contenu dans l'adhérence de A c'est-à-dire : $B \subset \overline{A}$.

Un *point frontière* de A est un point adhérent à A n'appartenant pas à l'intérieur de A.

La *frontière* de A est l'ensemble des points frontière de A, c'est-à-dire : $\overline{A} - \overset{\circ}{A}$, ou encore, ce qui revient au même : $\overline{A} \cap \overline{\complement A}$.

• *Caractérisation séquentielle d'un point adhérent, d'une partie fermée*

Un point a de E est adhérent à A si, et seulement si, a est limite d'une suite de points de A.

A est fermée si, et seulement si, toute suite d'éléments de A, convergente dans E, converge dans A.

Soit A, B deux parties de E telles que $A \subset B$. A est dense dans B si, et seulement si, tout élément de B est limite d'une suite d'éléments de A.

LIMITE EN UN POINT

Considérons un point a adhérent à A et un point b de F.

On dit que f admet b comme *limite* au point a si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \quad (\|x - a\|_E \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leqslant \varepsilon).$$

L'application f admet b comme limite en a si, et seulement si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(b) \quad \exists W \in \mathcal{V}(a) \quad f(W \cap A) \subset V.$$

Si f admet en a la limite b, alors b est adhérent à $f(A)$.

• *Caractérisation séquentielle des limites*

Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

– il existe b dans F tel que l'application f admet b comme limite en a ;

– il existe b dans F tel que, pour toute suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers a dans $(E, \| \ \|_E)$, la suite $(f(u_n))$ converge vers b dans $(F, \| \ \|_F)$;

– pour toute suite (u_n) d'éléments de A qui converge vers a dans $(E, \| \ \|_E)$, la suite $(f(u_n))$ converge dans $(F, \| \ \|_F)$.

• *Composition des applications*

Si f est une application de A dans B qui admet comme limite b au point a, alors :

– le point b est adhérent à B ;

– si, de plus, l'application $g \ : \ B \longrightarrow G$ admet la limite c en b, l'application $g \circ f$ admet c comme limite en a.

En d'autres termes : $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = \lim\limits_{y \to b} g(y)$.

CONTINUITÉ

L'application f est *continue au point* a de A si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in A \quad \|x - a\|_E \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leqslant \varepsilon \ ;$$

ou, ce qui revient au même, si :

$$\forall W \in \mathcal{V}(f(a)) \ \exists V \in \mathcal{V}(a) \quad f(V \cap A) \subset W.$$

On dit que l'application f est *continue sur* A (ou *continue de* A *dans* F) si f est continue en tout point de A.

• *Caractérisation séquentielle de la continuité*

L'application f est continue au point a de A si, et seulement si, pour toute suite (x_p) d'éléments de A qui converge vers a dans $(E, \| \ \|_E)$, la suite $(f(x_p))$ converge vers $f(a)$ dans $(F, \| \ \|_F)$.

• *Topologie et continuité*

Soit f une application d'une partie A de E, à valeurs dans F. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

– f est continue ;

– l'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé relatif à A ;

– l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert relatif à A.

• *Continuité et parties denses*

Soit f une application continue d'un espace vectoriel normé, $(E, \| \ \|)$, dans un espace vectoriel normé $(F, \| \ \|)$. L'image de toute partie dense dans E par f est une partie dense dans $f(E)$.

Deux applications continues sur A qui coïncident sur une partie dense de A coïncident sur A.

SUITES DE CAUCHY

Une suite (u_n) de l'espace vectoriel normé, $(E, \| \|)$, est appelée *suite de Cauchy* de E lorsqu'elle vérifie la condition :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall (p, q) \in \mathbb{N}^2 \quad (p \geqslant N \text{ et } q \geqslant N \Rightarrow \|u_p - u_q\| \leqslant \varepsilon).$$

Toute suite convergente de E est une suite de Cauchy de E.

Toute suite de Cauchy de $(E, \| \|)$ est bornée.

Toute suite de Cauchy de $(E, \| \|)$ qui possède au moins une valeur d'adhérence l converge vers l.

ESPACE VECTORIEL NORMÉ COMPLET

Un *espace vectoriel normé* $(E, \| \|)$ est dit *complet* si toute suite de Cauchy de cet espace converge. Un espace vectoriel normé complet est appelé un *espace de Banach*.

Un espace vectoriel normé dont la norme est associée à un produit scalaire est appelé *espace préhilbertien* (réel ou complexe). Si, de plus, cet espace est complet, il est appelé *espace de Hilbert.*

Une partie A de E est *complète* si toute suite de Cauchy d'éléments de A converge dans A.

• Soit A une partie complète de E, alors A est une partie fermée de E.

Soit A, B deux parties de E telles que :

– B est une partie complète de E ;

– A est une partie fermée de E ;

– $A \subset B$;

alors A est une partie complète de E.

CONTINUITÉ UNIFORME

L'application f de A dans F est dite *uniformément continue* sur A lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x, y) \in A^2 \quad (\|x - y\|_E \leqslant \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leqslant \varepsilon).$$

Toute application uniformément continue sur A est continue sur A.

• Soit f une application uniformément continue d'une partie A de E dans F. Alors l'image par f de toute suite de Cauchy (u_n) de E est une suite de Cauchy $(f(u_n))$ de F.

• Soit f une application de E dans F. Alors f est uniformément continue si et seulement si, pour toutes suites (x_n) et (y_n) telles que la suite $(x_n - y_n)$ converge vers 0_E, la suite $(f(x_n) - f(y_n))$ converge vers 0_F.

CONNEXITÉ PAR ARCS

Soit A une partie de E. On appelle *chemin* dans A toute application continue de $[0, 1]$ dans A et *arc* dans A toute image d'un chemin de A.

Une partie A de E est dite *connexe par arcs* si, pour tous a et b de A, il existe un arc d'origine a et d'extrémité b contenu dans A.

Toute partie convexe est connexe par arcs.

• *Ensemble étoilé*

Un ensemble U de E est dit *étoilé* de E s'il existe un point a de U, tel que, pour tout b de U, le segment $[a, b]$ est contenu dans U, c'est-à-dire :

$$\exists a \in U \quad \forall b \in U \quad [a, b] \subset U.$$

Tout étoilé est connexe par arcs.

• *Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$*

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.

• *Continuité et parties connexes par arcs*

Soit A une partie de E et une application continue $f \ : \ A \longrightarrow F$. Alors, si B est une partie de A, connexe par arcs dans E, la partie $f(B)$ est connexe par arcs dans F.

Théorème des valeurs intermédiaires : Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et f une application continue d'une partie A de E, connexe par arcs, dans $\mathbb{R}$. Alors $f(A)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

COMPACITÉ

• Soit A une partie de E. A est une partie *compacte* de E si, de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une suite convergente dans A.

Toute réunion finie de parties compactes est compacte.

Toute intersection de parties compactes est compacte.

Tout produit de compact est compact pour la topologie produit.

Tout compact est fermé et borné.

• Soit A une partie compacte de E. Alors toute partie B, contenue dans A et fermée, est une partie compacte de E.

Toute partie compacte de E est une partie complète de E.

• Soit A une partie compacte de E. Alors toute suite de A admettant une unique valeur d'adhérence converge.

• *Continuité et compacité*

• Soit A une partie de $(E, \| \ \|_E)$ et f une application continue de A dans F, alors, si K est une partie compacte de E, contenue dans A, $f(K)$ est une partie compacte de F.

• Soit A une partie compacte non vide de l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_E)$ et f une application continue de A dans $\mathbb{R}$. Alors f est bornée et atteint ses bornes sur A.

• *Uniforme continuité et compacité*

Théorème de Heine : A étant une partie compacte de E et f une application continue de A dans F, alors f est uniformément continue sur A.

TOPOLOGIE D'UN ESPACE VECTORIEL NORMÉ DE DIMENSION FINIE

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.

– Toutes les normes sur E sont équivalentes.

– *Théorème de Bolzano Weierstrass :* Les compacts de E sont les parties fermées, bornées de E.

– Tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

• *Convergence des suites dans un espace vectoriel normé de dimension finie*

Une suite vectorielle (u_n) converge vers l si et seulement si, les suites numériques $(u_{n\ j})$ de ses coordonnées convergent vers les composantes de l.

• *Caractérisation des applications continues à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie*

Soit un point a adhérent à A, l'application f de A dans F admet en a la limite L si, et seulement si, les applications coordonnées de f admettent en a des limites égales aux coordonnées de L.

L'application f est continue sur A si et seulement si les applications coordonnées de f sont continues sur A.

APPLICATIONS LINÉAIRES CONTINUES

• *Caractérisation des applications linéaires continues*

Soit f une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est continue sur E ;
- f est continue en 0_E ;
- f est bornée sur la boule unité fermée, $BF = \{x \in E / \|x\|_E \leqslant 1\}$;
- f est bornée sur la sphère unité, $S = \{x \in E / \|x\|_E = 1\}$;
- $\exists K \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E$;
- f est lipchitzienne sur E ;
- f est uniformément continue sur E.

Lorsque E est un espace vectoriel de dimension finie toute application linéaire de E dans F est continue.

• *Une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{LC}(E, F)$*

L'ensemble $\mathcal{LC}(E,\ F)$ des applications linéaires continues de $(E, \|\ \|_E)$ dans $(F, \|\ \|_F)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des application linéaires de E dans F, $\mathcal{L}(E, F)$. L'application N de $\mathcal{LC}(E, F)$ dans $\mathbb{R}^+$: $f \longmapsto \|f\| = \sup\{\|f(x)\|_F \,;\, \|x\|_E \leqslant 1\}$ est une norme sur $\mathcal{LC}(E, F)$, appelée *norme subordonnée* à $\|\ \|_E$ et $\|\ \|_F$.

Pour tout x de E, on a : $\|f(x)\|_F \leqslant \|f\|\|x\|_E$.

$$\|f\| = \min\{k \,;\ \forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leqslant k\|x\|_E\}.$$

$$\|f\| = \sup\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} ;\ x \in E\backslash\{0_E\}\} = \sup\{\|f(x)\|_F \,; \|x\|_E = 1\}$$
$$= \sup\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}\ ;\ x \in \mathrm{BF}(0_E, 1)\backslash\{0_E\}\}.$$

Pour tout u de $\mathcal{LC}(E, F)$ et tout v de $\mathcal{LC}(F, G)$, l'application linéaire $v \circ u$ est continue de E dans F et on a : $\|v \circ u\| \leqslant \|v\|\|u\|$.

L'algèbre $\mathcal{LC}(E)$ des endomorphismes continus de E, munie de la norme $\|\ \|$ subordonnée à $\|\ \|_E$, est une algèbre normée unitaire.

• *Continuité des applications bilinéaires*

Soit B une application bilinéaire de $E \times F$ dans G, alors B est continue sur $E \times F$ si, et seulement si :

$$\exists K \in \mathbb{R} \ \forall (x, y) \in E \times F \quad \|B(x, y)\|_G \leqslant K\|x\|_E\|y\|_F.$$

Lorsque E et F sont de dimension finie toute application B bilinéaire de $E \times F$ dans G est continue.

ÉNONCÉS

1 Pour s'entraîner

1 Montrer que l'application :

$$N : (x, y) \longmapsto \sup_{t\in[0,1]} |x + ty|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Donner une représentation graphique de $BF(0, 1)$.

2 Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et T l'application de E dans E :

$$u \longmapsto \begin{cases} u & \text{si} \|u\| \leqslant 1 \\ \dfrac{u}{\|u\|} & \text{si} \|u\| \geqslant 1 \end{cases}.$$

Montrer que T est lipschitzienne

3 Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et A une partie non vide de E telle que :

$$\forall x \in A \quad \forall t \geqslant 0 \quad tx \in A.$$

On suppose A ouvert. Montrer que : $A = E$.

4 Étudier l'existence d'une limite en $(0, 0)$ pour les fonctions suivantes :

a) $f : (x, y) \longmapsto \dfrac{xy}{x + y}$.

b) $g : (x, y) \longmapsto \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$.

5 Étudier la continuité de la fonction f définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

6 Montrer que l'ensemble $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ où a et b sont des réels strictement positifs, est un fermé de $(\mathbb{R}^2, \|\ \|_\infty)$.

7 Déterminer :

a) tous les fermés de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$;

b) tous les ouverts de $\mathbb{R}$ contenus dans $\mathbb{Q}$;

c) un exemple de partie de $\mathbb{R}$ qui ne soit pas l'intersection d'un ouvert et d'un fermé de $\mathbb{R}$.

8 Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans E. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en posant : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \dfrac{u_1 + \ldots u_n}{n}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy.

9 Montrer que $]0, 1]$ et $]0, 1[$ ne sont pas homéomorphes.

10 Soit $(E, \|\ \|_E)$ un espace vectoriel normé, A une partie fermée non vide de E et B un compact de E tel que $A \cap B = \varnothing$. Montrer que :

$$\exists \delta > 0 \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B \quad d(a, b) \geqslant \delta.$$

11 Soit $E = \mathbb{C}_n[X]$ et $z_1, \ldots, z_p$, p nombres complexes distincts deux à deux.

On définit N sur E par : $N(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} |P(z_i|$.

a) À quelle condition N est-elle une norme ?

b) On suppose $p \geqslant n + 1$. Montrer qu'il existe A réel positif tel que :

$$\forall P \in E \quad N(P') \leqslant AN(P).$$

Conseils

1) Remarquer que $t \longmapsto x + ty$ est une application affine.

2) Écrire $\|u - v\| = \|u - v + v - \dfrac{v}{\|v\|}\|$ et $\|\dfrac{u}{\|u\|} - \dfrac{v}{\|v\|}\| = \|\dfrac{u - v}{\|u\|} + \dfrac{v}{\|u\|} - \dfrac{v}{\|v\|}\|$.

3) Montrer tout d'abord que $0_E \in A$.

4) Utiliser les coordonnées polaires et la norme euclidienne.

5) Exprimer f à l'aide de produits et composées de fonctions continues.

6) Introduire une fonction continue.

7) Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

8) Majorer soigneusement la norme de $v_{p+r} - v_p$.

9) Que dire de l'image d'un connexe par arcs par une application continue ?

10) Raisonner par l'absurde pour introduire une suite du compact.

11) 2) Introduire une application linéaire continue.

2 Une distance non associée à une norme

Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé.

1 Soit d la distance associée. Montrer qu'elle vérifie les propriétés suivantes :

(i) $\forall (x, y, t) \in E^3 \qquad d(x + t, y + t) = d(x, y)$

(ii) $\forall (x, y) \in E^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x, y)$.

2 Soit d une distance vérifiant **(i)** et **(ii)**. Montrer que l'application : $x \longmapsto d(x,0)$ est une norme sur E.

3 On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $|| \ ||_2$ et on pose pour (x,y) dans $\mathbb{R}^2$:

$d(x,y) = ||x||_2 + ||y||_2$ si $||x||_2 \neq ||y||_2$,

$d(x,y) = ||x-y||_2$ sinon.

a) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$.

b) Décrire les boules $BF((0,1),r)$ selon les valeurs de r.

c) Montrer que la distance d n'est pas associée à une norme.

Conseils

Travailler avec des distances, sans revenir chaque fois à une norme. Dans un espace vectoriel normé les boules sont convexes.

3 Des normes équivalentes sur $\mathbb{R}^2$

Soit λ un réel. L'application :

$$N_\lambda : (x,y) \longmapsto \sqrt{x^2 + 2\lambda xy + y^2}$$

définit-elle une norme sur $\mathbb{R}^2$. Comparer les deux normes N_λ et N_μ.

Conseil

Trouver un produit scalaire associé.

4 Deux normes sur l' espace des suites bornées

Soit $(E, || \ ||)$ l'espace vectoriel des suites complexes bornées. On définit sur E les applications :

$$N : u \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \text{ et } N' : u \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{n!}.$$

Vérifier que ce sont des normes et les comparer.

Conseil

Observer la suite lim de suites $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n^p = 2^n$ si $n \leqslant p$ et 0 sinon.

5* Comparaison de boules

Soit $(E, || \ ||)$ un espace vectoriel normé non réduit au vecteur nul. Soit (a,b) dans E^2, $r > 0$ et $s > 0$. Montrer que :

1 $B(a+b, r+s) = B(a,r) + B(b,s)$.

2 $B(a,r) \cap B(b,s) \neq \varnothing \iff ||a-b|| < r+s$.

3 $B(a,r) \subset B(b,s) \Longrightarrow ||a-b|| < s-r$.

4 $B(a,r) = B(b,s) \iff (a,r) = (b,s)$.

Conseils

1) Faire un dessin.
2) Introduire l'élément $\dfrac{s}{r+s}a + \dfrac{r}{r+s}b$.
3) Dans un espace vectoriel normé, les boules fermées sont les adhérences des boules ouvertes. Pour $a \neq b$, considérer le point $a + \dfrac{r}{||a-b||}(b-a)$.
4) Se déduit de la question précédente.

6 Une fonction lipschitzienne

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé $(E, || \ ||)$ et f une application de A dans $\mathbb{R}$ lipschitzienne de rapport k.

1 Vérifier que l'application :

$g : x \longmapsto \sup_{t\in A} \{f(t) - k||x-t||\}$ est définie sur E.

2 Montrer que g prolonge f et qu'elle est lipschitzienne de rapport k.

Conseil

Ne pas oublier de prouver l'existence de la borne supérieure introduite.

7 Premiers termes du développement limité d'une suite définie implicitement

Soit la fonction $f_n : x \longmapsto x^{n+1} + x^n + x^2 + 2x - 1$.

1 Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $]0,1[$.

2 Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3 Calculer sa limite l.

4 Montrer que $\lim \dfrac{n(l-x_n)}{l} = 0$.

5 Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{l-x_n}{l^n} = \left(\dfrac{x_n}{l}\right)^n \dfrac{x_n+1}{x_n+1+\sqrt{2}}$.

En déduire que $l - x_n \sim \dfrac{l^n}{2}$.

Conseils

1) Trouver une bijection.
2) Remarquer que : $f_{n+1}(x_n) < 0$, puis montrer que la suite est croissante.
3) Étudier $\lim x_n^{n+1}$.

4) Vérifier :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n^{n+1} + x_n^n + x_n^2 - l^2 + 2x_n - 2l = 0$$

et $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant l - x_n \leqslant l^n \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

5) Remarquer que : $n \ln \dfrac{x_n}{l} \sim \dfrac{n(x_n - l)}{l}$.

En déduire : $\lim \left(\dfrac{x_n}{l}\right)^n$.

8 Un produit d'ouverts

Soit $(E, \| \ \|_E)$, $(F, \| \ \|_F)$ et $(G, \| \ \|_G)$ trois espaces vectoriels normés, A un ouvert de l'espace vectoriel normé produit $E \times F$ et B un ouvert de l'espace vectoriel normé produit $F \times G$. On définit :

$$B \circ A = \{(x, z) \in E \times G ;\ \exists y \in F\ (x, y) \in A\ (y, z) \in B\}.$$

Montrer que l'ensemble $B \circ A$ est un ouvert de $E \times G$.

Conseil

Bien comprendre comment est construit $B \circ A$.

9 Intersection d'ouverts et de fermés

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, A un ouvert de $(E, \| \ \|)$ et B une partie de E.

1 Montrer que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

2 A-t-on $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A \cap B}$?

3 Donner un exemple d'ouverts A et B tels que $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ soient deux à deux distincts.

Conseil

Un point est adhérent à un ensemble si, et seulement si, tout voisinage de ce point rencontre l'ensemble.

10 Une caractérisation de fermés

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé, $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de E et A une partie de E.
Montrer que :

$$A \text{ fermé} \iff \forall i \in I \quad A \cap U_i \text{ est un fermé de } U_i.$$

Conseil

Penser à la caractérisation des fermés par les suites.

11 Une fonction continue sur une partie dense

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{p+q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q},\ p \wedge q = 1 \end{array} \right\}.$$

Montrer qu'en tout point la fonction f admet une limite à gauche et à droite. La fonction f est-elle continue ?

Conseil

Pour $\varepsilon > 0$ donné, étudier le cardinal de l'ensemble $A(\varepsilon) = \{x \in \mathbb{Q} ; f(x) > \varepsilon\}$

12* Topologie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1 Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$) est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp $\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$).

2 Soit F un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant une matrice inversible.

Montrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \cap F$ est dense dans F.

3 Soit k dans $[\![1, n]\!]$.

Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à k est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4 Soit p un entier inférieur strictement à n. Montrer que l'ensemble des matrices de rang p est d'intérieur vide et d'adhérence égale à l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à p.

Conseils

1) Le spectre d'une matrice est fini.
2) Prendre A dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \cap F$ et étudier $M + xA$ pour M dans F.
3) Utiliser une caractérisation des matrices de rang p à l'aide des déterminants extraits.
4) Raisonner par l'absurde puis utiliser **1)**. Utiliser une autre caractérisation des matrices de rang p.

13* L'espace de Hilbert $\left(l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \| \ \|_2\right)$

Montrer que $(l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \| \ \|_2)$ est complet

Conseils

Revenir aux sommes partielles chaque fois que l'on souhaite écrire la limite d'une somme infinie.

14* Stabilité d'une boule par une isométrie

Soit $(E, || \ ||)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $B = BF(0,1)$ et f une isométrie telle que $f(B) \subset B$. Pour tout x de B, on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $x_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ \ x_{n+1} = f(x_n)$.

Montrer que, pour tout entier q, l'élément x_q est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire que $f(B) = B$.

Conseil

Extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, puis construire une suite extraite de limite x_q.

15 Recouvrement d'un compact contenu dans un ouvert

Soit $(E, || \ ||)$ un espace vectoriel normé, U un ouvert de E et K un compact de E tel que $K \subset U$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que : $\forall x \in K \quad B(x, r) \subset U$.

Conseil

Raisonner par l'absurde.

16 Application primitive

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $|| \ ||_1$ et $F = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $N : f \longmapsto ||f||_\infty + ||f'||_\infty$. On définit l'application T, par :

$$\forall f \in E \ \forall x \in [0,1] \quad T(f)(x) = \int_0^x f.$$

Étudier la continuité de l'application T et calculer si possible sa norme subordonnée dans les cas suivants :

1 T de E dans E muni de $|| \ ||_1$.

2 T de E muni de $|| \ ||_1$ dans F muni de $N : f \longmapsto ||f||_\infty + ||f'||_\infty$.

Conseil

Faire attention au choix des normes.

Algorithme

Accélération de convergence de suites

D'après ESIM.

Nous allons étudier deux algorithmes d'accélération de convergence de suites convergeant vers $\ln x$.

L'idée d'accélérer la convergence par moyenne pondérée entre deux suites est due à Euler.

Il est alors possible d'utiliser, comme seconde suite, la première décalée d'un rang en posant :

$$x_n = \frac{aS_n + bS_{n+1}}{a+b}.$$

En itérant ce processus, on obtient le procédé d'extrapolation de Richardson.

Richardson était un météorologue anglais. Il a publié sa méthode en 1927.

Partie mathématique

Soit $(S_n)_n$,$(T_n)_n$,$(C_n)_n$ les suites définies par les relations de récurrence suivantes, dans lesquelles x désigne un réel strictement supérieur à 1.

$$S_0 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \ ; \quad S_0 = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \ ;$$

$$C_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + C_n}{2}} \ ; \quad S_{n+1} = \frac{S_n}{C_{n+1}} \ ; \quad T_n = \frac{S_n}{C_n}.$$

1 On pose $\varphi = \ln x$.

Montrer que, pour tout naturel n, on a :

$$S_n = 2^n \operatorname{sh}\frac{\varphi}{2^n} \ ; \quad T_n = 2^n \operatorname{th}\frac{\varphi}{2^n}.$$

En déduire que les suites $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$ sont adjacentes et convergent vers $\ln x$, avec, pour tout n : $T_n \leqslant \ln x \leqslant S_n$.

2 Dans cette partie, on considère les suites $(W_n)_n = \left(\dfrac{aS_n + bT_n}{a+b}\right)_n$ avec a et b réels tels que $a + b \neq 0$.

a) Montrer que les suites $(W_n)_n$ ainsi définies convergent vers $\ln x$ et donner un équivalent de $\ln x - W_n$.

b) Montrer qu'il existe un choix de a et b, un réel λ et une suite, notée $(u_n)_n$, correspondant à ce choix tels que :

$$u_n - \ln x \sim \frac{\lambda}{16^n}.$$

Préciser a, b, λ et n.

En regardant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - \ln x}{S_n - \ln x}$, expliquer comment le choix de $(u_n)_n$ accélère la convergence vers $\ln x$.

3 Dans cette partie, on accélère la convergence de la suite $(S_n)_n$ par la méthode de Richardson.

a) Montrer qu'il existe a, b réels tels que le choix de la suite $\left(\dfrac{aS_n + bS_{n+1}}{a+b}\right)_n$ accélère la convergence vers $\ln x$.

b) On construit les trois suites $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n$ vérifiant :

$$x_n = \frac{4S_{n+1} - S_n}{3} \; ; \quad y_n = \frac{16x_{n+1} - x_n}{15} \; ;$$
$$z_n = \frac{64y_{n+1} - y_n}{63}.$$

Montrer qu'il existe des constantes α, β, γ telles que :

$$x_n = \ln x + \frac{\alpha}{16^n} + \frac{\beta}{64^n} + \frac{\gamma}{256^n} + o\left(\frac{1}{256^n}\right)$$

puis des constantes α' et β' telles que :

$$y_n = \ln x + \frac{\alpha'}{64^n} + \frac{\beta'}{256^n} + o\left(\frac{1}{256^n}\right)$$

puis une constante α'' telle que :

$$z_n = \ln x + \frac{\alpha''}{256^n} + o\left(\frac{1}{256^n}\right).$$

Partie informatique

4 Donner un algorithme de calcul de $(S_n)_n$, $(C_n)_n$, $(T_n)_n$.

Écrire un programme calculant $\ln x$ à ε près et utilisant les suites $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$.

Écrire un programme donnant les quatre premières valeurs de $(S_n)_n$ et $(u_n)_n$, les trois premières valeurs de $(x_n)_n$, les deux premières valeurs de $(y_n)_n$ et la première valeur de $(z_n)_n$.

Conseils

2) a) Utiliser des développements limités.
3) a) Idem.

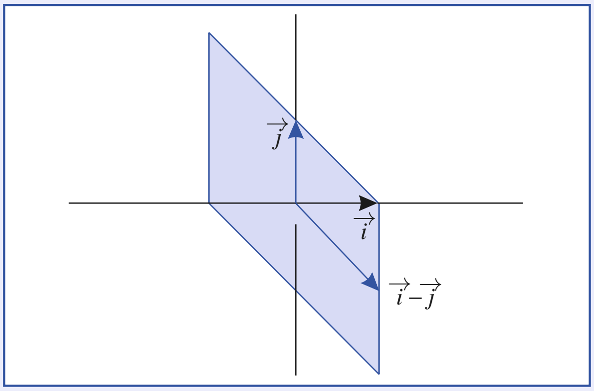
CORRIGÉS

1 Pour s'entraîner

1 Comme l'application $t \longmapsto x + ty$ est affine, on a :

$$N(x, y) = ||(x, x + y)||_\infty .$$

La norme N est la norme infinie associée à la base $(\vec{i} - \vec{j}, \vec{j})$. La boule unité est :



2 On vérifie : $\forall (u, v) \in E^2 \ ||T(u) - T(v)|| \leqslant 2||u - v||$ en discutant suivant les cas $||u|| \leqslant 1$, $||u|| \geqslant 1$. Étudions seulement les deux cas suivants, les autres sont simples :

Si $||u|| \leqslant 1$ et $||v|| \geqslant 1$ on a :

$$||T(u) - T(v)|| = ||u - \frac{v}{||v||}|| \leqslant ||u - v|| + ||v - \frac{v}{||v||}||$$

$$||T(u) - T(v)|| \leqslant ||u - v|| + ||v|| \left(1 - \frac{1}{||v||}\right)$$

$$\leqslant ||u - v|| + ||v|| - 1$$

$$||T(u) - T(v)|| \leqslant ||u - v|| + ||v|| - ||u|| \leqslant 2||u - v||.$$

Si $||u|| \geqslant ||v|| \geqslant 1$ on a :

$$||T(u) - T(v)|| = ||\frac{u}{||u||} - \frac{v}{||v||}||$$

$$\leqslant \frac{1}{||u||}(||u - v|| + ||v - v\frac{||u||}{||v||}||)$$

$$||T(u) - T(v)|| \leqslant \frac{1}{||u||}(||u - v|| - ||v|| + ||u||)$$

$$||T(u) - T(v)|| \leqslant \frac{2}{||u||}||u - v|| \leqslant 2||u - v||.$$

3 Soit a dans A non vide. Pour $t = 0$ on obtient $ta = 0_E$ dans A.

De plus A est ouvert. Il est voisinage de chacun de ses points. Il existe $r > 0$ tel que $B(0_E, r) \subset A$. Ainsi, pour tout x de E non nul on a $\frac{x}{||x||}\frac{r}{2} \in A$. On multiplie par $t = 2\frac{||x||}{r}$ et on obtient : $x \in A$.

4 **a)** $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x, -x + x^2) = -1$ et : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x, -x + \sqrt{x}) = 0$. L'application f n'a pas de limite en $(0, 0)$

b) En coordonnées polaires on obtient :

$$g(x, y) = r(\cos^3\theta + \sin^3\theta).$$

Puis $|g(x, y)| \leqslant 2r$. On en déduit :

$$\lim_{(x,y) \longrightarrow (0,0)} g(x, y) = 0.$$

5 La fonction g définie par :

$$g(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}$. On a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = yg(xy)$.

On en déduit la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$, comme composée et produit de fonctions continues.

6 C'est l'image réciproque du fermé $]-\infty, 1]$ de $\mathbb{R}$ par l'application continue : $(x, y) \longmapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

7 **a)** Un fermé de $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Q}$ contient $\overline{\mathbb{Q}}$. Or $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Donc, le seul fermé de $\mathbb{R}$ contenant $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$.

b) $\mathbb{Q}$ ne contient aucun intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Donc l'intérieur de $\mathbb{Q}$ est vide. Le seul ouvert de $\mathbb{R}$ contenu dans $\mathbb{Q}$ est l'ensemble $\varnothing$.

c) Si $\mathbb{Q}$ est l'intersection d'un fermé F et d'un ouvert O, alors $F = \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q} = O$. On en déduit $O = \varnothing$. C'est absurde. Donc l'ensemble $\mathbb{Q}$ répond à la question.

8 La suite u est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe N tel que :

$$\forall (p, r) \in \mathbb{N}^2 \quad p \geqslant N \Longrightarrow ||u_{p+r} - u_p|| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $p \geqslant N$ on écrit :

$$\|v_{p+r} - v_p\| = \frac{1}{p(p+r)}\|p\sum_{k=p+1}^{p+r} u_k - r\sum_{k=1}^{p} u_k\|$$

$$\leqslant \frac{1}{p(p+r)}(\|p\sum_{k=p+1}^{p+r} u_k - r\sum_{k=N+1}^{p} u_k - rNu_{N+1}\|$$

$$+ \|rNu_{N+1} - r\sum_{k=1}^{N} u_k\|)$$

$$\leqslant \frac{1}{p(p+r)}(pr\varepsilon + rN\|u_{N+1}\| + r\sum_{k=1}^{N}\|u_k\|)$$

$$\leqslant \varepsilon + \frac{1}{p}(N\|u_{N+1}\| + \sum_{k=1}^{N}\|u_k\|).$$

Il existe un entier naturel N' indépendant de r tel que, pour $p \geqslant N'$, on a :

$$\frac{1}{p}\left(N\|u_{N+1}\| + \sum_{k=1}^{N}\|u_k\|\right) \leqslant \varepsilon.$$

En conclusion, pour $p \geqslant \max(N, N')$ et pour tout r entier naturel, on a : $\|v_{p+r} - v_p\| \leqslant 2\varepsilon$.

9 Par l'absurde, soit f un homéomorphisme de $]0,1]$ dans $]0,1[$. La restriction de $]0,1[$ dans $]0, f(1)[\cup]f(1),1[$ est encore un homéomorphisme. Or $]0,1[$ est connexe par arcs alors que $]0, f(1)[\cup]f(1),1[$ ne l'est pas. Ceci est absurde car l'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

10 Montrons par l'absurde que :
$\exists\,\delta > 0\ \forall a \in A\ \forall b \in B\quad d(a,b) \geqslant \delta$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists a_n \in A\ \exists b_n \in B\quad d(a_n,b_n) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
L'ensemble B est compact. Il existe une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que : $(b_{\varphi(n)})$ converge vers b dans B.

Or $\forall n \in \mathbb{N}\quad d(a_{\varphi(n)}, b_{\varphi(n)}) \leqslant \dfrac{1}{\varphi(n)+1}$. On en déduit que $(a_{\varphi(n)})$ converge également vers b. Or cette suite est dans A et A est fermé. Donc $b \in A \cap B$ ce qui est absurde.

11 **a)** La vérification est triviale.

b) Le seul point à vérifier est :
$\forall P \in \mathbb{C}_n[X]\quad (N(P) = 0 \Longrightarrow P = 0)$. Or $N(P) = 0$ se traduit en : $\forall i \in [\![1,p]\!]\quad P(z_i) = 0$.

Donc : $N(P) = 0 \Longrightarrow P = 0$ si, et seulement si, le nombre de racines p du pôlynôme est toujours supérieur à son degré. Donc N est une norme si, et seulement si, $p > n$.

c) L'application linéaire de $\mathbb{C}_n[X]$ dans lui-même définie par : $P \longmapsto P'$ est continue car $\mathbb{C}_n[X]$ est de dimension finie. Cette continuité assure l'existence de A.

2 Une distance non associée à une norme

1 Simple vérification si on exprime les distances à l'aide de la norme.

2 • Soit $N : x \mapsto d(x,0)$. Les propiétés des distances assurent les deux premiers points : $\forall x \in E\quad N(x) \geqslant 0$ et $\forall x \in E\quad N(x) = 0 \Longrightarrow x = 0$. La propriété **(ii)** permet d'écrire : $\forall x \in E\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\quad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.
• Soit x, y dans E. On a :
$N(x+y) = d(x+y, 0) = d(x, -y)$ en appliquant **(i)**.
Puis $N(x+y) \leqslant d(x,0) + d(0,-y)$. De **(ii)** on déduit $d(0,-y) = d(0,y)$.
Finalement : $N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$. L'application N est une norme sur E.

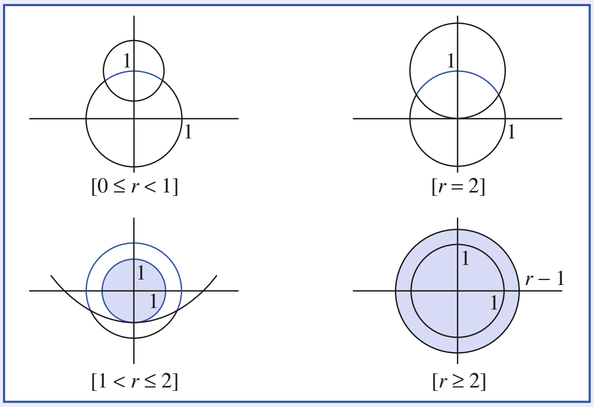
3 **a)** On vérifie la définition d'une distance en distinguant successivement tous les cas qui interviennent.

b) On obtient les deux cas suivants :

$$d((x,y),(0,1)) \leqslant r \Longleftrightarrow \begin{cases} (x,y) \in S_2((0,0),1) \\ (x,y) \in B_2((0,1),r) \end{cases}$$

ou
$$\begin{cases} (x,y) \notin S_2((0,0),1) \\ (x,y) \in B_2((0,0),r-1) \end{cases}$$

Selon les valeurs de r les boules $BF((0,1),r)$ sont les suivantes :



c) La distance d n'est pas associée à une norme car les boules obtenues ne sont pas convexes.

3 Des normes équivalentes sur $\mathbb{R}^2$

Étudions la condition $N_\lambda(x) = 0$. Elle est équivalente, si on écarte la solution nulle, à une équation du second degré dont le discriminant est $\lambda^2 - 1$. Une condition nécessaire est $|\lambda| < 1$. Réciproquement, dans ce cas, on vérifie que N_λ est la norme associée au produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$:

$$((x, y), (x'y')) \longmapsto xx' + \lambda(xy' + x'y) + yy'.$$

Par conséquent N_λ est une norme sur $\mathbb{R}^2$ si, et seulement si, $|\lambda| < 1$.

Soit λ et μ telles que $|\lambda| < 1$ et $|\mu| < 1$. Les deux normes N_λ et N_μ sont équivalentes car la dimension de $\mathbb{R}^2$ est finie. Un calcul plus précis donne pour $\lambda < \mu$:

$$\sqrt{\frac{1+\lambda}{1+\mu}} N_\mu \leqslant N_\lambda \leqslant \sqrt{\frac{1-\lambda}{1-\mu}} N_\mu.$$

4 Deux normes sur l'espace des suites bornées

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Donc :

$$\frac{|u_n|}{2^n} = O\left(\frac{1}{2^n}\right) \quad \text{et} \quad \frac{|u_n|}{n!} = O\left(\frac{1}{n!}\right).$$

On en déduit, par comparaison directe, que les séries $\sum \frac{|u_n|}{2^n}$ et $\sum \frac{|u_n|}{n!}$ convergent. On vérifie facilement que ce sont des normes.

On constate que $\displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{2^n}{n!} = \mathrm{e}^2$. On en déduit :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n!} \leqslant \frac{\mathrm{e}^2}{2^n}.$$

Par conséquent : $N' \leqslant \mathrm{e}^2 N$.

Montrons par l'absurde qu'elles ne sont pas équivalentes. Sinon, il existerait un réel $\alpha > 0$ tel que $N \leqslant \alpha N'$. On considère la suite de suites $(u^p)_{p\in\mathbb{N}}$ définie par $N(u^p) = 2^n$ si $n \leqslant p$ et 0 sinon. Alors $N(u^p) = p+1$ et $N'(u^p) = \mathrm{e}^2$. On en déduit : $\forall p \in \mathbb{N} \quad \alpha(p+1) \leqslant \mathrm{e}^2$. Ceci est absurde.

Les normes N et N' ne sont pas équivalentes.

5 Comparaison de boules

1 Montrons que $B(a+b, r+s) \subset B(a,r) + B(b,s)$.

Soit x dans $B(a+b, r+s)$. On vérifie que $x = u + v$ avec u dans $B(a,r)$ et v dans $B(b,s)$en posant : $u = a + \frac{r}{r+s}(x-a-b)$ et $v = b + \frac{s}{r+s}(x-a-b)$.

Par conséquent : $x \in B(a,r) + B(b,s)$.

Montrons que $B(a,r)+B(b,s) \subset B(a+b, r+s)$. Soit x dans $B(a,r)+B(b,s)$. Alors x s'écrit $x = u+v$ avec u dans $B(a,r)$ et v dans $B(b,s)$.

Par conséquent : $||x-a-b|| \leqslant ||u-a||+||v-b|| < r+s$.

2 Montrons que :

$$B(a,r) \cap B(b,s) \neq \varnothing \Longrightarrow ||a-b|| < r+s.$$

On suppose qu'il existe un élément x dans $B(a,r) \cap B(b,s)$.

Alors : $||a-b|| \leqslant ||a-x|| + ||x-b|| < r+s$.

Montrons que : $||a-b|| < r+s \Longrightarrow B(a,r) \cap B(b,s) \neq \varnothing$.

On suppose que : $||a-b|| < r+s$.

Alors l'élément $\frac{s}{r+s}a + \frac{r}{r+s}b$ appartient à l'intersection $B(a,r) \cap B(b,s)$.

3 Montrons que $B(a,r) \subset B(b,s) \Longrightarrow ||a-b|| < s-r$

On suppose que $B(a,r) \subset B(b,s)$.

Alors on a également : $BF(a,r) \subset BF(b,s)$. Si $a = b$, le point $a' = a + re$, où e est un vecteur unitaire, est dans $B(a,r)$ donc dans $B(a,s)$. On en déduit $0 \leqslant s-r$.

Sinon, on considère le point $c = a + \frac{r}{||a-b||}(b-a)$ qui appartient à la boule $BF(a,r)$. Il appartient également à la boule $BF(b,s)$. On en déduit $||b-c|| \leqslant s$, puis que $||a-b|| - r \leqslant s$.

4 Montrons que : $B(a,r) = B(b,s) \Longrightarrow (a,r) = (b,s)$. D'après la question précédente, on en déduit $||a-b|| \leqslant s-r$ et $||a-b|| \leqslant r-s$. Or l'un des deux réels $r-s, s-r$ est négatif ou nul. Donc $a = b$, puis $r = s$.

La réciproque est immédiate.

6 Une fonction lipschitzienne

1 On introduit l' application h de $A \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$h(t,x) = f(t) - k||x-t||.$$

Soit a dans A fixé. On a :

$$\forall (t,x) \in A \times E \quad h(t,x) \leqslant f(a) + k||x-a||.$$

On en déduit que $\sup_{t\in A}\{f(t) - k||x-t||\}$ existe pour tout x de E et que :

$$\forall a \in A \quad g(x) \leqslant f(a) + k||x-a||.$$

2 En particulier, si x est dans A, on peut choisir $a = x$. On obtient $g(x) \leqslant f(x)$. Pout $t = x$,on a $h(x,x) = f(x)$. Donc $f(x) \leqslant g(x)$.

Par conséquent l'application g prolonge f.

On a : $\forall (x,y) \in E^2 \quad \forall t \in A$

$$h(t,x) \leqslant k||x-y|| + h(t,y) \leqslant k||x-y|| + g(y).$$

On en déduit : $\forall (x,y) \in E \quad g(x) \leqslant k||x-y|| + g(y)$.

On montre de même que :

$$\forall (x,y) \in E \quad g(y) \leqslant k||x-y|| + g(x).$$

L'application g est lipschitzienne de rapport k.

7 Premiers termes du développement limité d'une suite définie implicitement

Soit la fonction $f_n : x \longmapsto x^{n+1} + x^n + x^2 + 2x - 1$

1 On vérifie que l'application f_n est strictement croissante et continue sur $]0, 1[$ que : $f_n(0) = -1$ et que : $f_n(1) = 4$.

Donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $]0, 1[$.

2 Vérifier que $f_{n+1}(x_n) < 0$. Vous en déduisez que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

On a $f_n\left(\dfrac{1}{2}\right) > 0$. La suite est majorée par $\dfrac{1}{2}$. Elle converge et sa limite est dans $[0, \dfrac{1}{2}]$.

3 On a : $x_n^{n+1} + x_n^n + x_n^2 + 2x_n - 1 = 0$.

Or : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant x_n^n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Donc $\lim x_n^n = 0$ et $\lim x_n^{n+1} = 0$.

Par conséquent : $l^2 + 2l - 1 = 0$ et $l \geqslant 0$. Puis : $l = \sqrt{2} - 1$.

4 On écrit : $x_n^{n+1} + x_n^n + x_n^2 + 2x_n - l^2 - 2l = 0$.

On en déduit : $l - x_n = x_n^n \dfrac{x_n + 1}{x_n + l + 2}$.

Puis : $0 \leqslant n\dfrac{l - x_n}{l} \leqslant nl^{n-1}\dfrac{l + 1}{l + 2}$.

Par conséquent : $\lim \dfrac{n(l - x_n)}{l} = 0$.

5 On a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{l - x_n}{l^n} = \left(\frac{x_n}{l}\right)^n \frac{x_n + 1}{x_n + 1 + \sqrt{2}}.$$

On remarque : $n \ln \dfrac{x_n}{l} \sim \dfrac{n(x_n - l)}{l}$.

Or d'après la question précédente : $\lim \left(\dfrac{x_n}{l}\right)^n = 1$.

On obtient : $l - x_n \sim \dfrac{l^n}{2}$.

8 Un produit d'ouverts

Montrons que $B \circ A$ est voisinage de chacun de ses points.

Soit (x_0, z_0) dans $B \circ A$. Il existe un élément y_0 de F tel que $(x_0, y_0) \in A$ et $(y_0, z_0) \in B$.

L'ensemble A est un ouvert. Il existe $r_1 > 0$ tel que $BO(x_0, r_1) \times BO(y_0, r_1) \subset A$.

L'ensemble B est un ouvert. Il existe $r_2 > 0$ tel que $BO(y_0, r_2) \times BO(z_0, r_2) \subset B$.

Donc, pour tout $(x, y) \in BO(x_0, r) \times BO(z_0, r)$, le couple (x, y_0) est dans A et le couple (y_0, z) est dans B.

On en déduit, pour $r = \min(r_1, r_2)$, que :

$$BO(x_0, r) \times BO(z_0, r) \subset B \circ A.$$

Ainsi $B \circ A$ est un voisinage de (x_0, z_0).

9 Intersection d'ouverts et de fermés

1 Montrons que $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$.

Soit x dans $A \cap \overline{B}$, montrons que tout voisinage V de x rencontre $A \cap B$: $V \cap (A \cap B) \neq \varnothing$.

L'ensemble A est un ouvert contenant x, c'est un voisinage de x. Donc $V \cap A$ est un voisinage de x.

Or x est adhérent à B. Donc $(V \cap A) \cap B \neq \varnothing$. D'où $x \in \overline{A \cap B}$

2 Réviser les propriétés de l'adhérence avec l'inclusion. On obtient $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A \cap B}$

3 On peut choisir $A =]0, 1[\cup]3, 5[$ et $B =]2, 3[\cup]4, 6[$.

Alors : $A \cap \overline{B} = [4, 5[$, $\overline{A} \cap B =]4, 5]$, $\overline{A \cap B} = [4, 5]$ et $\overline{A} \cap \overline{B} = \{3\} \cup [4, 5]$.

10 Une caractérisation de fermés

L'implication A fermé $\Longrightarrow \forall i \in I \quad A \cap U_i$ est un fermé de U_i est immédiate par définition de la topologie induite.

Réciproquement, on suppose que, pour tout i de I, $A \cap U_i$ est un fermé relatif à U_i. Montrons que A est fermé.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de A convergeant vers l dans E.

Il existe i_0 dans I tel que $l \in U_{i_0}$.

Or U_{i_0} est un ouvert. Donc il existe un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad x_{n_0} \in U_{i_0}.$$

La suite $(x_n)_{n\geqslant n_0}$ du fermé $A \cap U_{i_0}$ converge dans $A \cap U_{i_0}$. Donc $l \in A$.

11 Une fonction continue sur une partie dense

Soit $\varepsilon > 0$ et x_0 dans $]0, +\infty[$.

L'ensemble $A(\varepsilon)$ est fini. Il existe $\alpha > 0$ tel que : $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap A(\varepsilon) = \varnothing$. En conclusion :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \alpha > 0\ \forall x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\}$$
$$0 \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon.$$

En tout point la fonction f admet une limite à gauche et à droite nulles.

La fonction f est continue en x_0 si, et seulement si, $f(x_0) = 0$.

Le domaine de continuité est $\mathbb{R}^{+*} \setminus \mathbb{Q}$.

12 Topologie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1 Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le spectre de M est fini. Donc la matrice $M - \frac{1}{n} I_n$ est inversible à partir d'un certain rang n_0. De plus la suite $(M - \frac{1}{n} I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M.

L'ensemble $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il est ouvert car $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{K}^*$ de $\mathbb{K}$ par l'application continue Det.

2 Soit A dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \cap F$. Pour x dans $\mathbb{K}$ la matrice $M + xA$ est dans F.

Or : $M + xA = (MA^{-1} + xI_n)A$.

La matrice $M + xA$ est inversible si, et seulement si, $-x$ n'appartient pas au spectre de MA^{-1}.

On en déduit qu'il existe n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0 \quad M + \frac{1}{n} A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \cap F.$$

La suite $(M + \frac{1}{n} I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers M.

Par conséquent : $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \cap F$ est dense dans F.

3 Soit k dans $[\![1, n]\!]$. Une matrice est de rang rang inférieur ou égal à k si, et seulement si, tous les déterminants extraits d'ordre strictement supérieurs à k sont nuls. On en déduit que l'ensemble $E(k)$ des matrices de rang inférieur ou égal à k est l'intersection d'un nombre fini d'images réciproques du singleton $\{0\}$ par des applications continues. C'est une intersection de fermés. Donc un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4 Soit p un entier inférieur strictement à n. Montrons par l'absurde que l'ensemble $A(p)$ des matrices de rang p est d'intérieur vide.

On suppose qu'il existe une matrice M dans $\overset{\circ}{A(p)}$. D'après la question **1)**, il existe une suite $(\mathcal{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de matrices de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ qui converge vers M. Or $\overset{\circ}{A(p)}$ est un voisinage de M. Les matrices $\mathcal{M}_n$ sont dans $\overset{\circ}{A(p)}$, donc dans $A(p)$ à partir d'un certain rang. Ceci est absurde, car ces matrices sont de rang n.

D'après **3)** l'ensemble $E(p)$ est fermé. Or il contient $A(p)$. Par conséquent : $\overline{A(p)} \subset E(p)$. Montrons la deuxième inclusion. Soit M une matrice de rang $k \leqslant p$. Il existe deux matrices inversibles telles que $M = PJ_kQ$ où J_k est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$J_k = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en deduit que M est la limite de la suite de matrices $(\mathcal{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A(p)$ définie par :

$$\mathcal{M}_n = \begin{pmatrix} I_k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} I_{p-k} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit : $\overline{A(p)} = E(p)$.

13 L'espace de Hilbert $(l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \| \ \|_2)$

Soit $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R}), \| \ \|_2)$.

Pour tout m de $\mathbb{N}$, notons $(u_{n,m})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite u_m.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists (m, p) \in \mathbb{N}^2$$

$$m \geqslant N \quad \text{et} \quad p \geqslant N \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (u_{n,m} - u_{n,p})^2 \leqslant \varepsilon^2$$

On en déduit que, pour tout n fixé :

$$m \geqslant N \quad \text{et} \quad p \geqslant N \Rightarrow |(u_{n,m} - u_{n,p}| \leqslant \varepsilon.$$

La suite $(u_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle est bornée :

$$\exists M > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad N_2(u_m) \leqslant M.$$

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N} \ \ \forall m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} u_{k,m}^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,m}^2 \leqslant M^2.$$

On peut passer à la limite quand m tend vers $+\infty$ car la somme est finie.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^{n} l_k^2 \leqslant M^2.$$

La série de réels positifs $\sum l_n^2$ converge.

• Fixons $\varepsilon > 0$ et $m \geqslant N$. On a :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad p \geqslant N \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (u_{n,m} - u_{n,p})^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Or, pour tout q dans $\mathbb{N}$:

$$\sum_{n=0}^{q} (u_{n,m} - u_{n,p})^2 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (u_{n,m} - u_{n,p})^2.$$

Donc : $\forall p \in \mathbb{N} \ \ \forall q \in \mathbb{N}$

$$p \geqslant \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{q} (u_{n,m} - u_{n,p})^2 \leqslant \varepsilon^2$$

On peut faire tendre p vers $+\infty$ car la somme est finie. On obtient :

$$\forall q \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{q}(u_{n,m} - l_n)^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

puis : $$\sum_{n=0}^{\infty}(u_{n,m} - l_n)^2 \leqslant \varepsilon^2.$$

Par conséquent, la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de $l^2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ tend vers $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $(l^2(\mathbb{N},\mathbb{R}), \| \, \|_2)$.

On en déduit que toute suite de Cauchy de $(l^2(\mathbb{N},\mathbb{R}), \| \, \|_2)$ converge.

L'espace $(l^2(\mathbb{N},\mathbb{R}), \| \, \|_2)$ est un espace de Hilbert.

14 Stabilité d'une boule par une isométrie

L'espace $(E, \| \, \|)$ est de dimension finie, donc la boule unité fermée $B = BF(0,1)$ est un compact. Il existe une suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans B. Elle est de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N} \; \forall k \geqslant k_0 \; \forall k' \geqslant k_0 \quad \|x_{\varphi(k)} - x_{\varphi(k')}\| \leqslant \varepsilon.$$

Soit q un entier naturel fixé. Il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(k_1) \geqslant q$.

Or, pour tout $k \geqslant k_1$, on a : $x_{\varphi(k)} = f^{\varphi(k)-q}(x_q)$. Comme f est une isométrie telle que $f(B) \subset B$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\|x_{\varphi(k)} - x_{\varphi(k')}\| &= \|f^{\varphi(k)-q}(x_{\varphi(k')-\varphi(k)+q}) - f^{\varphi(k)-q}(x_q)\| \\ &= \|x_{\varphi(k')-\varphi(k)+q} - x_q\|.\end{aligned}$$

On pose $K = \max(k_0, k_1)$. Par conséquent :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall k \geqslant K \; \forall k' \geqslant K$$
$$\|x_{\varphi(k')-\varphi(k)+q} - x_q\| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon = 1$, on choisit $k \geqslant K(1)$ et $k' \geqslant K(1)$, puis on pose $\psi(0) = \varphi(k') - \varphi(k) + q$. On suppose construit un entier $\psi(n)$ tel que :

$$\psi(0) < \psi(1) < \cdots < \psi(n)$$

et $$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad \|x_{\psi(k)} - x_q\| \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

On fixe $k \geqslant K(n+1)$. La fonction $k' \longmapsto \varphi(k') - \varphi(k) + q$ est strictement croissante, donc il existe $k' \geqslant K(n+1)$ tel que : $\varphi(k') - \varphi(k) + q > \psi(n)$.

On pose : $\psi(n+1) = \varphi(k') - \varphi(k) + q$.

On a donc construit par récurrence une suite extraite de limite x_q. Pour tout entier q, l'élément x_q est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Montrons maintenant que : $B \subset f(B)$.

Soit x dans B fixé. On considère la suite construite comme précédemment à partir de l'élément x. Pour $q = 0$, on obtient x valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

À partir du rang 1, les éléments de cette suite sont dans $f(B)$. Donc $x \in \overline{f(B)}$.

Or B est un compact et f est continue. Donc $f(B)$ est un compact. En particulier il est fermé. Donc : $\overline{f(B)} = f(B)$. Puis $x \in f(B)$.

15 Recouvrement d'un compact contenu dans un ouvert

Montrons par l'absurde qu'il existe $r > 0$ tel que : $\forall x \in K \quad B(x, r) \subset U$.

On suppose :

$$\forall r > 0 \quad \exists x \in K \quad \exists y \in B(x, r) \quad y \notin U.$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in K \quad \exists y_n \in E$$
$$\|x_n - y_n\| \leqslant \frac{1}{2^n} \quad y_n \notin U.$$

L'ensemble K est un compact. Il existe une suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $l \in K$. Vérifier que la suite $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers l. Or U est un ouvert , son complémentaire F est un fermé qui contient la suite $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Par conséquent $l \in F$. Ceci est absurde car l appartient à K qui est contenu dans U.

16 Application primitive

L' application f est continue. Donc l'application T, définie par :

$$\forall f \in E \; \forall x \in [0,1] \quad T(f)(x) = \int_0^x f$$

est linéaire à valeurs dans F.

De plus :$\forall f \in E \; \forall x \in [0,1] \quad T(f)'(x) = f(x)$.

1 On a :

$\forall x \in [0,1]$

$$|T(f)(x)| \leqslant \left|\int_0^x f\right| \leqslant \int_0^x |f| \leqslant \int_0^1 |f| = \|f\|_1.$$

On en déduit : $\|T(f)\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |T(f)| \leqslant \|f\|_1$.

L'application T est continue E dans E muni de la norme $\| \, \|_1$ et $\|T\| \leqslant 1$.

En considérant la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall x \in [0,1] \quad f_n(x) = (1-x)^n$ vérifier que $\|T\| = 1$.

2 Montrons par l'absurde que T n'est pas continue de E muni de la norme $\| \, \|_1$ dans F muni de la norme $N : f \longmapsto \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$.

En effet, sinon, il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall f \in E \quad \|T(f)\|_\infty + \|T(f)'\|_\infty \leqslant \alpha \|f\|_1.$$

On en déduit : $\forall f \in E \quad ||T(f)'||_\infty \leqslant \alpha ||f||_1$.
Puis : $\forall f \in E \quad ||f||_\infty \leqslant \alpha ||f||_1$, ce qui n'est pas.

Algorithme

Accélération de convergence de suites

Partie mathématique

1 Effectuons une récurrence.

Pour $n = 0$: $S_0 = \operatorname{sh}\varphi \quad ; \quad T_0 = \operatorname{th}\varphi$

Supposons que, pour un certain $n \geqslant 0$, on ait :

$$S_n = 2^n \operatorname{sh}\frac{\varphi}{2^n} \quad ; \quad T_n = 2^n \operatorname{th}\frac{\varphi}{2^n}.$$

Alors : $C_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+C_n}{2}} = \sqrt{\operatorname{ch}^2\dfrac{\varphi}{2^{n+1}}} = \operatorname{ch}\dfrac{\varphi}{2^n}$

$$S_{n+1} = 2^n \frac{\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2^n}}{\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2^{n+1}}} = 2^{n+1}\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2^{n+1}}$$

$$T_{n+1} = 2^{n+1}\operatorname{th}\frac{\varphi}{2^{n+1}}.$$

La relation est vraie pour tout n.

De plus :

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{1}{\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2^{n+1}}} \leqslant 1, \qquad \frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{2\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2^n}}{1+\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2^n}} \geqslant 1.$$

La suite $(S_n)_n$ est décroissante et la suite $(T_n)_n$ est croissante.

$$S_n - T_n = 2^n\left(\operatorname{sh}\frac{\varphi}{2^n} - \operatorname{th}\frac{\varphi}{2^n}\right)$$
$$= 2^n \operatorname{th}\frac{\varphi}{2^n}\left(\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2^n} - 1\right) \sim \varphi\left(\operatorname{ch}\frac{\varphi}{2^n} - 1\right).$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}(S_n - T_n) = 0$.

Les suites $(S_n)_n$ et $(T_n)_n$ sont adjacentes.

Or : $S_n \sim \varphi$. Ces suites convergent vers $\ln x$.

Pour tout n :$T_n \leqslant \ln x \leqslant S_n$.

2 **a)** La suite $(W_n)_n$ converge vers $\ln x$ et :

$$\ln x - W_n = \frac{a(\ln x - S_n) + b(\ln x - T_n)}{a+b}.$$

Or :

$$\ln x - S_n = \varphi - 2^n \operatorname{sh}\frac{\varphi}{2^n} = 2^n\left(\frac{\varphi}{2^n} - \operatorname{sh}\frac{\varphi}{2^n}\right).$$

b) On pose :$u = \dfrac{\varphi}{2^n}$.u tend vers 0.

Avec $\operatorname{sh} u = u + \dfrac{u^3}{6} + \dfrac{u^5}{5!} + o(u^5)$ on obtient, si $2b - a \neq 0$:

$$a(\ln x - S_n) + b(\ln x - T_n) = \left(\frac{2b-a}{6}\right)\frac{\varphi^3}{2^{2n}} + o\left(\frac{\varphi^3}{2^{2n}}\right)$$

Si $2b - a \neq 0$: $\ln x - W_n \sim \dfrac{2b-a}{a+b}\dfrac{\varphi^3}{6.2^{2n}}$.

Si $2b - a = 0$, on obtient : $u_n - \ln x \sim \dfrac{\varphi^5}{20.16^n}$.

On accélère la convergence vers $\ln x$ car :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n - \varphi}{S_n - \varphi} = 0.$$

3 **a)** *Le procédé d'extrapolation de Richardson*

En utilisant encore des développements limités :

$$S_n = \varphi + \frac{\varphi^3}{3!}\frac{1}{4^n} + \frac{\varphi^5}{5!}\frac{1}{16^n} + \cdots + \frac{\varphi^9}{9!}\frac{1}{256^n} + o\left(\frac{1}{256^n}\right)$$

En notant $h_n = \dfrac{1}{4^n}$, on obtient :

$$S_n = \varphi + \frac{\varphi^3}{3!}h_n + \frac{\varphi^5}{5!}h_n^2 + \cdots + \frac{\varphi^9}{9!}h_n^4 + o(h_n^4)$$

$$S_{n+1} = \varphi + \frac{\varphi^3}{3!}\frac{1}{4}h_n + \frac{\varphi^5}{5!}\frac{1}{16}h_n^2 + \cdots + \frac{\varphi^9}{9!}\frac{1}{256}h_n^4 + o(h_n^4)$$

$$\frac{aS_n + bS_{n+1}}{a+b} = \varphi + \frac{\varphi^3}{3!}\frac{4a+b}{4(a+b)}h_n + \frac{\varphi^5}{5!}\alpha_1 h_n^2 + \cdots + \frac{\varphi^9}{9!}\gamma_1 h_n^4 + o(h_n^4)$$

On remarque que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\dfrac{aS_n + bS_{n+1}}{a+b} - \ln x}{S_n - \ln x} = 0 \iff 4a + b = 0.$$

b) La suite $(x_n)_n$ correspond au choix de a et b tels que : $4a + b = 0$.

Alors il existe des constantes α, β, γ telles que :

$$x_n = \ln x + \frac{\alpha}{16^n} + \frac{\beta}{64^n} + \frac{\gamma}{256^n} + o\left(\frac{1}{256^n}\right).$$

En itérant le procédé avec la suite $(x_n)_n$, on montre qu'il existe des constantes α' et β' telles que :

$$y_n = \ln x + \frac{\alpha'}{64^n} + \frac{\beta'}{256^n} + o\left(\frac{1}{256^n}\right).$$

On recommence avec $(y_n)_n$. Il existe une constante α'' telle que :

$$z_n = \ln x + \frac{\alpha''}{256^n} + o\left(\frac{1}{256^n}\right).$$

Partie informatique

4 $x \leftarrow 2$

$S \leftarrow \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)$

$C \leftarrow \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$

$T \leftarrow S/C$

Pour n de 1 à N faire

$$C \leftarrow \sqrt{\frac{1+C}{2}}$$

$$S \leftarrow \frac{S}{C}$$

$$T \leftarrow \frac{S}{C}$$

finfaire

Avec Maple

```
> Limite :=proc(x,epsilon)
local S,C,T ;
S :=(x-1/x)/2 ;C :=(x+1/x)/2 ;T :=S/C ;
while evalf(S-T)>epsilon do
     C :=sqrt((1.+C)/2) ;S :=S/C ;T :=S/C ; od ;
end ;
```

$Limite := \mathbf{proc}(x, epsilon)$
$\mathbf{local}\ S, C, T;$
$S := 1/2 * x - 1/2 * x^{-1};$
$C := 1/2 * x + 1/2 * x^{-1};$
$T := S * C^{-1};$
$\mathbf{while}\ epsilon < evalf(S - T)\ \mathbf{do}$
$C := sqrt(1/2 * 1. + 1/2 * C);$
$S := S * C^{-1};$
$T := S * C^{-1}$
$\mathbf{end\ do};$
$\mathbf{end\ proc};$

```
> Limite(2,10^(-6)) ;
```

0.6931467585

```
> evalf(ln(2)) ;
```

0.6931471806

```
> Comparaison :=proc(a)
local S,C,T,M,i,u,x,y,z ;
S:=(a-1./a)/2 ;C:=(a+1/a)/2 ;T:=S/C ;u:=(2*S+T)/3 ;
with(linalg) :
M :=matrix(4,5,0) ;M[1,1] :=S ;M[1,2] :=u ;
for i from 2 to 4 do
  C:=sqrt((1.+C)/2) ;S :=S/C ;T :=S/C ;u:=(2*S+T)/3 ;
  M[i,1]:=S ;M[i,2]:=u ;x:=(4*S-M[i-1,1])/3 ;
  M[i-1,3]:=x ;
  if i>2 then y :=(16*x-M[i-2,3])/15 ;M[i-2,4] :=y ;
     if i=4 then z:=(64*y-M[1,4])/63 ;M[1,5]:=z ;fi ;
  fi ;
od ;
print(M) ;
end :
> Comparaison(2) ;
```

$$\begin{pmatrix} 0.7500000000 & 0.7000000000 & 0.6928090413 & 0.6931474210 & 0.6931471805 \\ 0.707107810 & 0.6936267428 & 0.6931262722 & 0.6931471842 & 0 \\ 0.6966213994 & 0.6931781000 & 0.6931458771 & 0 & 0 \\ 0.6940147577 & 0.6931491283 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10 Séries numériques

RAPPELS DE COURS

Dans ce chapitre, $u = (u_n)_n$ désigne une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_E)$ de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$ qui est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

QUELQUES DÉFINITIONS

• La série $\sum u_n$ est dite convergente lorsque la suite $(S_n)_n$ de ses sommes partielles converge.
Lorsque la série $\sum u_n$ converge, et uniquement dans ce cas, on note sa somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et on peut définir la suite $(R_n)_n$ des restes par $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

• Une série $\sum u_n$ est dite absolument convergente lorsque la série $\sum \|u_n\|_E$ converge.
• Toute série absolument convergente est convergente et :

$$\left\| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right\|_E \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_E .$$

• Une série convergente et non absolument convergente est dite semi-convergente.

QUELQUES PROPRIÉTÉS

• Si la série $\sum u_n$ converge, alors u_n tend vers 0.
Lorsque u_n ne tend pas vers 0, la série est dite grossièrement divergente.
• Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, f une application linéaire de E dans F et $\sum u_n$ une série convergente d'éléments de E.

Alors la série $\sum f(u_n)$ d'éléments de F converge et :

$$f\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(u_n).$$

• Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes de réels ou de complexes.

On appelle produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum w_n$ définie par :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} .$$

Le produit de Cauchy des séries absolument convergentes $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est une série absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

• L'espace vectoriel normé $l^1(\mathbb{N},\mathbb{C})$ des séries absolument convergentes, muni du produit de Cauchy et de la norme $N : \left(u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|\right)$ est une algèbre normée contenant la sous-algèbre des suites à support fini.

• L'ensemble $l^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$ telles que la série $\sum |u_n|^2$ converge, munie de $\mathbb{N}_2 : u \to \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2}$ est un espace vectoriel normé.

QUELQUES CRITÈRES DE CONVERGENCE

• La somme de deux séries convergentes est convergente.

• Une série de réels positifs converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est bornée.

• Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de réels positifs telles que $u_n \sim v_n$. Elles sont de même nature.

• Comparaison à une série de Riemann

Soit $\sum u_n$ une série de réels telle qu'il existe un réel α et un réel $l \neq 0$ vérifiant $u_n \sim \frac{l}{n^\alpha}$.

La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si : $\alpha > 1$.

• Comparaison d'une série de réels positifs à une intégrale

Soit f une application continue par morceaux et décroissante de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}^+$. Alors :

la série $\sum f(n)$ converge :

– si, et seulement si, f est intégrable sur $[0,+\infty[$

– si, et seulement si, la suite $\left(\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ a une limite.

• Critère de Cauchy

• Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de E. Cette série converge si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left\|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right\|_E \leqslant \varepsilon.$$

• Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de E et $\sum v_n$ une série de réels positifs telles que $u_n = O(v_n)$.

Si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ est absolument convergente.

• Règle de d'Alembert

Soit $\sum u_n$ une série telle que la suite $\left(\frac{||u_{n+1}||}{||u_n||}\right)$ converge vers l.

Si $l > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Si $l < 1$, la série $\sum u_n$ converge, absolument.

• ***Comparaison logarithmique***

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de réels strictement positifs et un entier N tels que :

$$\forall n \geqslant N \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Alors :

$$u_n = O(v_n).$$

Si la série $\sum v_n$ converge, la série $\sum u_n$ converge.

Si la série $\sum u_n$ diverge, la série $\sum v_n$ diverge.

• ***Critère spécial des séries alternées***

Soit $\sum u_n$ une série alternée de réels telle que la suite $\left(|u_n|\right)_n$ tend vers 0 en décroissant. Alors :

– la série $\sum u_n$ converge ;

– sa somme est comprise entre deux sommes partielles successives quelconques ;

– pour tout entier n, le reste $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ a même signe que u_{n+1} et $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leqslant |u_{n+1}|$.

TRANSFORMATION D'ABEL

On considère une suite $(a_n)_n$ de réels positifs et une suite $(b_n)_n$ d'éléments de E.

On note $B_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} b_j$, et $B_{-1} = 0$. On écrit alors la somme $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$, en remplaçant b_k par $B_k - B_{k-1}$ et on regroupe les termes en B_k :

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} B_k(a_k - a_{k+1}) + a_{n+p}B_{n+p} - a_{n+1}B_n.$$

SUITES ET SÉRIES

• La suite $(v_n)_n$ converge si, et seulement si, la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge.

• *Formule de Stirling* : $n! \sim \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

SOMMATION DES RELATIONS DE COMPARAISON

• Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de E et $\sum v_n$ une série de réels positifs. On suppose que la série $\sum v_n$ est convergente.

Lorsque $\sum u_n$ converge, on peut comparer les restes respectifs r_n et r'_n des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Si $u_n = o(v_n)$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente et $r_n = o(r'_n)$.

Si $u_n \sim v_n$, alors la série $\sum u_n$ est une série à termes positifs convergente et $r_n \sim r'_n$.

Si $u_n = O(v_n)$, alors la série $\sum u_n$ est absolument convergente et $r_n = O(r'_n)$.

• Soit $\sum u_n$ une série d'éléments de E et $\sum v_n$ une série de réels positifs. On suppose que la série $\sum v_n$ est divergente.

On peut comparer les sommes partielles respectives S_n et S'_n des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Si $u_n = o(v_n)$, alors $S_n = o(S'_n)$.

Si $u_n \sim v_n$, alors la série $\sum u_n$ est une série à termes positifs divergente et $S_n \sim S'_n$.

Si $u_n = O(v_n)$, alors $S_n = O(S'_n)$.

• ***Moyenne de Césaro***

Soit $(u_n)_n$ une suite de limite l.

Alors la suite v de terme général $v_n = \dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers l.

SÉRIES D'UNE ALGÈBRE NORMÉE DE DIMENSION FINIE

$(A, +, \times, \circ, \| \;\|)$ est une algèbre normée de dimension finie, d'élément unité e.

• Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes de $(A, +, \times, \circ, \| \;\|)$.

Le produit de Cauchy $\sum w_n$ de ces deux séries, défini par :

$$w_n = \sum_{p+q=n} u_p \circ v_q = \sum_{k=0}^{n} u_p \circ v_{n-p}$$

est une série absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right) \circ \left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right).$$

• Soit u un élément de A tel que $\|u\| < 1$.

Alors la série $\sum u^n$ est absolument convergente, $e - u$ est inversible et $(e-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

En particulier :

– $A = \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel normé de dimension finie ;

– $A = \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

• Soit u un élément de A. Alors la série $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ est absolument convergente.

L'application $\left(u \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u^n}{n!}\right)$ est l'application exponentielle sur A, notée exp.

En particulier :

– si $A = \mathbb{C}$, $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$;

– si $A = \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $\exp(M) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{M^n}{n!}$;

– si $A = \mathcal{L}(E)$, où E est un espace vectoriel normé de dimension finie, $\exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{u^n}{n!}$.

SUITE DOUBLE DE RÉELS OU COMPLEXES

Soit $u = (u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ une suite double de réels ou complexes.

Si, pour tout q dans $\mathbb{N}$, la série $\sum_p |u_{p,q}|$ converge et si la série $\sum_q \left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\right)$ converge, alors :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right).$$

Si, pour tout p dans $\mathbb{N}$, la série $\sum_q |u_{p,q}|$ converge et si la série $\sum_p \left(\sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}|\right)$ converge, alors :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right).$$

ÉNONCÉS

1 Pour s'entraîner

Étudier la nature des séries suivantes :

a) $\sum n^{\frac{5}{2}} \exp(-n^{\frac{3}{2}})$; **b)** $\sum (n^{\frac{1}{n}} - 1)$;

c) $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{2n + (-1)^n}}$; **d)** $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n + 1 + (-1)^n\sqrt{n}}}$;

e) $\sum \dfrac{\mathrm{i}^n}{n}$ avec $\mathrm{i}^2 = -1$. **f)** $\sum (\mathrm{e}^{\mathrm{Arctan}\,\frac{n-1}{n+1}} - \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}})$;

g) $\sum \left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{n^b}\right)\right)^{n^a}$ $a > 0 ; b > 0$;

h) $\sum \dfrac{i(n)}{n^2}$, où i désigne une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans lui-même.

Conseils

a) Comparer à une série de Riemann.
b) Faire un développement asymptotique, puis utiliser la comparaison à une intégrale.
c) Équivalent, mais attention au signe.
d) Idem.
e) Regarder certaines sommes partielles.
f) Chercher un équivalent du terme général.
g) Effectuer un développement asymptotique du logarithme du terme général.
h) Noter S_n les sommes partielles et regarder $S_{2n} - S_n$.

2 Autres études

1 Soit $u_0 = 0$; $\forall n \geqslant 1$ $u_n = \sqrt[4]{n + u_{n-1}}$.

Nature des séries $\sum \dfrac{1}{u_n^2}$; $\sum \dfrac{(-1)^n}{u_n}$. Donner un développement asymptotique à deux termes de $\dfrac{(-1)^n}{u_n}$.

2 Soit u une suite de $\mathbb{R}^{+*}$. On suppose que $-\dfrac{\ln u_n}{\ln n}$ tend vers L.

Montrer que, si $L > 1$, la série $\sum u_n$ converge et, si $L < 1$, la série $\sum u_n$ diverge.

Conseils

1) Montrer que $\forall n \geqslant 2$ $u_n \leqslant \sqrt{n}$ et conclure pour $\sum \dfrac{1}{u_n}$.

Effectuer un développement asymptotique de $\dfrac{1}{u_n}$ pour étudier $\sum \dfrac{(-1)^n}{u_n}$.

2) Comparer à une série de Riemann.

3* Groupement de termes

Convergence et somme de la série numérique $\sum u_n$, où :

$$u_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{si } n \text{ est divisible par } \mathrm{E}(\sqrt{n}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Conseil

Effectuer des groupements de termes.

4* Série dépendant de deux paramètres

On pose, pour tout $n > 0$, $u_n = \dfrac{1}{n^a}\displaystyle\int_0^n \dfrac{\mathrm{Arctan}\, t}{t^b}\,\mathrm{d}t$.

Discuter, suivant a, b, la nature de la série $\sum u_n$.

(Cet exercice utilise le cours sur l'*intégrabilité*.)

Conseils

D'abord, ne pas omettre l'existence de l'intégrale. Puis chercher un équivalent de u_n.

5* Critère de condensation de Cauchy

Soit (u_n) une suite dont les termes tendent vers 0 en décroissant.

1 Montrer que la série $\sum u_n$ et la série $\sum v_n$, où $v_n = 2^n u_{2^n}$, sont de même nature.

Ce résultat fut établi par Cauchy. Vous pourrez vous amuser à vérifier qu'il reste valable si un entier $p > 1$ est substitué à 2.

2 Étudier les séries :

$$\sum \frac{1}{n(\ln n)^k} \;;\quad \sum \frac{1}{n.\ln(n).(\ln(\ln n))^k}.$$

Conseil

1) Encadrer $u_{2^{n-1}} + u_{2^{n-1}+1} + \cdots + u_{2^n-1}$.

6 Absolument convergente ? Simplement convergente ?

Soit $\alpha > 0$ et la série $\sum (-1)^n \left(1 - \cos \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

Trouver les réels α tels que la série est :

– absolument convergente ;

– convergente, mais pas absolument convergente.

7* Sur la règle de Kummer

Les procès-verbaux de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux (1907-1908) contiennent le texte suivant, dû à M.H. Padé.

« Kummer a fait connaître (Journal de Crelle, 1885 XIII, page 171.) *un critère qui permet de décider, dans certains cas, de la convergence ou de la divergence d'une série à termes positifs* $a_0 + a_1 + \cdots$.

La première partie de ce critère consiste en ce que la série proposée est convergente quand il existe une suite illimitée de nombres positifs P_n *tels que l'on ait* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} P_n a_n = 0$, *et, à partir d'une certaine valeur de* n *:*

$$P_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - P_{n+1} > \alpha > 0,$$

α *désignant un nombre indépendant de* n.

On serait aisément porté à s'exagérer le degré de généralité de cette règle, en raison de l'indétermination très grande qu'elle semble laisser dans le choix des nombres P_n. *En fait, elle n'est qu'une modification du critère général, appliqué depuis Gauss, qui se déduit du principe de la comparaison des séries et qui peut être énoncé ainsi : une série à termes positifs est convergente lorsque,* c_n *étant le terme général d'une série convergente, on a, à partir d'une certaine valeur de* n_0 *:* $\dfrac{a_n}{c_n} < A$, *A étant une constante positive quelconque ; elle ne peut rien donner de plus que ce que donne ce critère lui-même...*

La règle de Kummer se trouve ainsi établie et l'on voit, de plus, que la condition $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} P_n a_n = 0$ *qu'elle comporte est superflue. »*

Montrer qu'une série à termes strictement positifs converge si, et seulement si, elle vérifie la règle de Kummer et que la condition $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} P_n a_n = 0$ est effectivement superflue.

Conseil

Penser à utiliser, lorsque la série $\sum a_n$ converge, la suite des restes.

8* Série $\sum u_n^2 \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$

Soit u_0 dans $]0,1[$ et, pour tout n, $u_{n+1} = u_n^2 \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$, où $\mathrm{E}(x)$ est la partie entière de x.

1 Montrer que la suite (u_n) est stationnaire ou bien converge vers 0.

2 Pour quelles valeurs de u_0 a-t-on $\lim u_n = \dfrac{1}{2}$?

3 On suppose que $\lim u_n = 0$ et on pose :

$$p_n = \mathrm{E}\left(\frac{1}{u_n}\right).$$

Établir l'existence d'un entier r tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad p_{n+1} \leqslant p_n + r.$$

En déduire la nature de $\sum u_n$.

9 Équivalent d'un reste de série convergente

D'après E3A.

Soit f une fonction convexe, décroissante de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, de limite nulle en $+\infty$.

1 **a)** Donner un exemple d'une telle fonction f.

b) Montrer que $x_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p f(p)$ est défini, pour tout n de $\mathbb{N}$.

2 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2x_n - (-1)^{n+1} f(n+1) = \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p (f(p) - f(p+1))$$

et en déduire que la série $\sum x_n$ est convergente.

3 On suppose de plus que $f(p)$ est équivalent à $f(p+1)$ lorsque p tend vers $+\infty$.

Déterminer un équivalent de x_n lorsque n tend vers l'infini.

Conseils

2) Majorer la somme $\sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p(f(p)-f(p+1))$ par $f(n+1)-f(n+2)$.

3) Utiliser la majoration indiquée ci-dessus.

10* Des séries extraites de la série harmonique

D'après ESTP.

On considère la série à termes réels positifs $\sum a_n$ et on note $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ sa n-ième somme partielle. On désigne par $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition de $\mathbb{N}^*$, où les P_n sont finis et non vides, c'est-à-dire :

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n \ ; \ \forall (i,j)\in\mathbb{N}^2 \ \ i\neq j \Rightarrow P_i \bigcap P_j = \varnothing \ ;$$

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad 0 < \mathrm{card}(P_n) < +\infty.$$

On note $b_n = \sum_{k\in P_n} a_k$.

1 Prouver que les deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature.

2 Pour k dans $\mathbb{N}^*$, U_k est l'ensemble des entiers x dont l'écriture en base 10 comporte k chiffres ($10^{k-1} \leqslant x < 10^k$) tous distincts de 1.

a) Calculer $u_k = \mathrm{card}U_k$.

b) On définit $a_n = 0$ si l'écriture en base 10 de n comporte un 1, $\frac{1}{n}$ sinon.

Prouver que la série $\sum a_n$ est convergente.

3 Pour k dans $\mathbb{N}$, on définit l'ensemble R_k des entiers dont l'écriture en base 10 comporte exactement k chiffres et ne contient pas la suite des chiffres 1789.

a) On note $r_k = \mathrm{card}R_k$. Calculer r_{10}.

b) On pose $a_n = 0$ si l'écriture de n en base 10 comporte la suite des chiffres 1789, $\frac{1}{n}$ sinon.

Déterminer la nature de la série $\sum a_n$.

Conseils

1) Utiliser des majorations pour comparer les sommes partielles.

2) b) Utiliser la première question.

3) b) Considérer l'écriture d'un entier n en base 10 000. Comment traduire la présence de la suite de chiffres 1789 dans l'écriture en base 10 de n ?

11* Une méthode d'accélération de convergence

1 Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, convergentes et telles que $u_n \sim v_n$. On note (R_n) et (T_n) les suites respectives de leurs restes.

a) Montrer que $R_n \sim T_n$.

b) a est un réel strictement supérieur à 1, donner un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^a}$.

2 On considère une série à termes strictement positifs $\sum x_n$ telle que :

$$\exists \alpha > 1 \ \exists k\in\mathbb{N}^* \ \exists (a_0, a_1, \dots, a_k)\in\mathbb{R}^{k+1} \quad a_0\neq 0$$
$$x_n = \frac{a_0}{n^\alpha} + \frac{a_1}{n^{\alpha+1}} + \cdots + \frac{a_k}{n^{\alpha+k}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+k+1}}\right).$$

a) Montrer que la série $\sum x_n$ converge. On note S sa somme, (S_n) la suite des sommes partielles et (R_n) la suite des restes. Donner un équivalent de R_n.

On pose $u_n = \frac{b_0}{n^{\alpha-1}} + \frac{b_1}{n^\alpha} + \cdots + \frac{b_k}{n^{\alpha+k-1}}$ et $y_n = u_n - u_{n+1}$.

b) Montrer qu'il est possible de choisir $(b_0, b_1, \dots, b_k)$ tels que $x_n - y_n = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+k+1}}\right)$.

c) Montrer que $|S-(S_n+u_{n+1})| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha+k}}\right)$.

Qu'en conclure ?

3 *Application* : soit $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e} - \frac{a}{n}$.

a) Pour quelle valeur de a la série $\sum x_n$ converge-t-elle ?

b) Déterminer (a_0, a_1, a_2) tels que :

$$x_n = \frac{a_0}{n^2} + \frac{a_1}{n^3} + \frac{a_2}{n^4} + O\left(\frac{1}{n^5}\right).$$

c) Déterminer ensuite (b_0, b_1, b_2) vérifiant les conditions de la question **2)b)**.

d) Calculer S_{100} et $S_{100} + u_{101}$.

Conseils

1) a) Traduire l'équivalence de u_n et v_n en encadrant $u_n - v_n$.

2) a) Utiliser **1)** et la comparaison à une intégrale.

b) Calculer y_n et donner un développement asymptotique de y_n.

c) D'après la question précédente, il existe A et un entier naturel N tels que :

$$\forall n \geqslant N \quad |x_n - y_n| \leqslant \frac{A}{n^{\alpha+k+1}}.$$

Considérer $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}(x_j - y_j)$.

12* Des logarithmes et des séries

D'après ESTP.

On pose ici $L_k(x) = \ln(\ln(\ldots(\ln x)\ldots))$, où le symbole ln figure k fois. Ainsi :

$L_0(x) = x, \quad L_1(x) = \ln x, \quad L_2(x) = \ln(\ln x))\ldots$

1 Étudier la nature de la série $\left(\sum a_n\right)_{n\geqslant 2}$, avec :

$a_n = (L_1(n))^{-L_1(n)}$.

2 Étudier la nature de la série $\left(\sum b_n\right)_{n\geqslant 2}$ avec :

$b_n = (L_2(n))^{-L_2(n)}$.

3 Préciser l'ensemble J des entiers $j \geqslant 0$ pour lesquels la série $\sum c_n(j)$ converge, avec :

$c_n(j) = (L_j(n))^{-L_1(n)}$.

4 Préciser l'ensemble K des entiers $k \geqslant 1$ pour lesquels la série $\sum d_n(k)$ converge, avec :

$d_n(k) = (L_1(n))^{-L_k(n)}$.

5 Soit N le plus petit entier tel que $c_n(2) \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ si $n \geqslant N$.

Calculer le nombre de chiffres de N en base 10.

Conseils

1), 2), 3) et **4)** Comparer les termes généraux des séries au terme général d'une série de Riemann bien choisie.
5) Encadrer tout entier p ayant k chiffres en base 10.

13 Série $\sum \dfrac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

D'après E4a.

Cet exercice utilise l'intégrabilité.

1 Soit a et b deux réels, $a < b$, et f une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Montrer que :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) - \frac{1}{2}\int_a^b (b-x)(x-a)\,f''(x)\mathrm{d}x.$$

2 Soit g l'application de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}.$$

Montrer que g'' est intégrable sur $[1, +\infty[$.

3 Pour tout n entier naturel non nul, on pose :

$$u_n = \frac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$$
$$v_n = \int_n^{n+1} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$
$$w_n = v_n - \frac{1}{2}(u_n + u_{n+1}).$$

a) Montrer que w_n est le terme général d'une série absolument convergente.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = 2\cos 1 - 2\cos\sqrt{n+1}$.

Prouver que la suite $(\cos n)$ n'est pas convergente.

En déduire la nature de la série de terme général v_n.

c) Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Conseils

1) Calculer $\displaystyle\int_a^b (b-x)(x-a)\,f''(x)\mathrm{d}x$.
2) Revoir les critères d'intégrabilité.
3 a) Utiliser la question **1)**.
b) Considérer $\cos(n+1)$, $\cos(n-1)$...

14* Nature de la série $\sum \dfrac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(t) = \dfrac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ et on pose, pour tout entier naturel non nul N :

$$I_N = \left[(2N\pi)^2, \left(2N\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2\right]$$

et
$$J_N = \int_{(2N\pi)^2}^{(2N\pi+\pi/2)^2} f(t)\mathrm{d}t.$$

1 Calculer J_N.

2 On pose $V_N = \displaystyle\sum_{n=\mathrm{E}((2N\pi)^2)+1}^{\mathrm{E}((2N\pi+\pi/2)^2)-1} \frac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

Montrer que $V_N \geqslant 1$ et en déduire la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

Conseil

2) Comparer V_N et J_N.

15* Un exercice d'oral

D'après la revue de l'APMEP.

À tout entier $n \geqslant 2$, on associe son plus grand facteur premier $p(n)$.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n \times p(n)^\alpha}$.

On note P l'ensemble des nombres premiers.

Boîte à outils

1 Calculer la somme des inverses de tous les entiers n'ayant pas de facteur premier autre que p, où p est un entier premier fixé.

2 En déduire la somme des inverses de tous les entiers n'ayant pas de facteur premier strictement supérieur à q, où q est un entier fixé.

Cette somme est notée T_q.

3 En déduire la somme des inverses de tous les entiers n tels que $p(n) = q$.

4 Montrer que :

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ \forall q \geqslant 2 \ \ (\ln(T_q))^2 \leqslant a\sqrt{\ln q} + b.$$

Le plat de résistance...

5 Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n \times p(n)^\alpha}$.

Conseils

3) Un entier n tel que $p(n) = q$ est le produit de q par un entier tel que...

4) Faire apparaître $\displaystyle\sum_{p \in P, p \leqslant q} \frac{1}{p}$. Utiliser $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln n + 1$.

Algorithme

Accélération de convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

Partie mathématique

On se propose d'obtenir, de plusieurs manières différentes, une valeur approchée de la somme S de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$, en accélérant la convergence de la série.

On pose :

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \ ; \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \ ; \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

1 Montrer que :

a) $R_n \sim \dfrac{1}{n}$.

b) $S_n + \dfrac{1}{n}$ est une valeur approchée par excès de S.

c) $\left| S - \left(S_n + \dfrac{1}{n} \right) \right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

La première méthode consiste à approximer S par $S_n + \dfrac{1}{n}$.

2 La deuxième méthode est due à Stirling.

Notons, pour tout k dans $\mathbb{N}$, f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f_0(x) = \frac{1}{x} \ ; \quad f_k(x) = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+k)} \quad \text{si} \quad k \geqslant 1$$

Δ est l'application qui associe à une fonction f continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ la fonction Δf définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$(\Delta f)(x) = f(x+1) - f(x).$$

a) Exprimer Δf_{k-1} en fonction de k et de f_k pour $k \geqslant 1$.

b) Établir, pour tout nombre entier naturel $k \geqslant 1$, la convergence de la série $\sum f_k(p)$ et vérifier que :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}.$$

c) Établir la relation suivante pour $p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$:

$$\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} (k-1)!\, f_k(p) = \frac{q!}{p} f_q(p).$$

d) En déduire, pour $n \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$, en posant $S'_n = S_n + \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\cdots(n+k)}$:

$$0 \leqslant S - S'_n \leqslant \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}$$

e) Expliciter S'_n et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

3 La troisième méthode, dite d'Euler-Mac Laurin, utilise un développement asymptotique du reste R_n, pour approximer S.

Dans l'*exercice* 2, page 315,, nous montrons qu'il existe une suite unique de polynômes définis par les conditions suivantes :

$$P_0(X) = 1\,; \quad \forall n \geqslant 1 \;\; P'_n(X) = nP_{n-1}(X)$$

et

$$\int_0^1 P_n(t)\mathrm{d}t = 0.$$

On pose, pour tout entier naturel n : $B_n = P_n(0)$.

Ces polynômes sont appelés polynômes de Bernoulli et le nombre B_n n-ième nombre de Bernoulli.

Nous montrons aussi que :

- $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = 0$ pour $n \geqslant 2$ et $B_{2k+1} = 0$ pour $k \geqslant 1$;
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n(1) = (-1)^n P_n(0)$.

a) Établir, pour $p \geqslant 1$, la relation suivante :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+p)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) + \sum_{k=1}^{q} B_{2k}\left(\frac{1}{p^{2k+1}} - \frac{1}{(p+1)^{2k+1}}\right) = (2q+2)\int_0^1 \frac{P_{2q+1}\mathrm{d}x}{(x+p)^{2q+3}}.$$

b) En déduire, pour tout $n \geqslant 1$et $q \geqslant 1$:

$$\left| R_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{B_{2k}}{n^{2k+1}} \right| \leqslant \frac{\sup_{t\in[0,1]} |P_{2q+1}(t)|}{n^{2q+2}}.$$

c) Expliciter $S''_n = S_n + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \sum_{k=1}^{q} \frac{B_{2k}}{n^{2k+1}}$ et l'inégalité précédente lorsque $q = 2$.

Partie informatique

4 Le but du programme est de calculer S avec une précision fixée $\varepsilon > 0$.

Comparer, avec la calculatrice, les résultats obtenus en calculant S_n, $S_n + \frac{1}{n}$ pour différentes valeurs de n.

Écrire une procédure de calcul de S, en approchant S par $S_n + \frac{1}{n}$.

Écrire une procédure de calcul de S, par la méthode de Stirling pour $q = 2$.

Écrire une procédure de calcul de S, par la méthode d'Euler-Mac Laurin pour $p = 2$.

Conseils

1) Utiliser une intégrale
2 b) Récurrence sur q.
2 c) Fixer n et $N \geqslant n+1$.
Puis sommer les relations obtenues de $n+1$ à N.
Enfin, faire tendre N vers $+\infty$.
3 a) Récurrence et intégrations par parties...
3 b) Sommer les relations obtenues de n à N et faire tendre N vers $+\infty$.

C O R R I G É S

1 Pour s'entraîner

a) On remarque que $n^{5/2}\exp(-n^{3/2}) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

La série converge.

b) $u_n = n^{1/n} - 1 = \frac{\ln n}{n} + O\left(\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2\right)$.

Donc $u_n \sim \frac{\ln n}{n}$.

Or, pour $n \geqslant 3$: $\frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$

La série $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge.

La série $\sum u_n$ diverge.

c) Remarquons que :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+(-1)^n}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}}.$$

Toutefois, cet équivalent ne suffit pas pour conclure, car le terme général de la série n'est pas de signe constant.

Mais : $$\frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}} + u_n.$$

Avec $u_n \sim -\frac{1}{4n\sqrt{2n}}$. La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}}$ converge, car elle vérifie le critère spécial des séries alternées.

La série $\sum u_n$ converge, car il s'agit d'une série à termes négatifs à partir d'un certain rang et la série $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+(-1)^n}}$ est somme de deux séries convergentes, elle converge.

d) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1+(-1)^n\sqrt{n}}} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Cette fois encore, l'équivalent ne permet pas de conclure, car la série n'est pas de signe constant.

Posons : $$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1+(-1)^n\sqrt{n}}} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Alors : $u_n \sim \frac{-1}{2n}$.

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1+(-1)^n\sqrt{n}}}$, somme d'une série convergente et d'une série divergente, diverge.

e) Notons (S_n) la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{\mathrm{i}^n}{n}$. Alors :

$$S_{4n+4} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\mathrm{i}}{4k+1} - \frac{1}{4k+2} - \frac{\mathrm{i}}{4k+3} + \frac{1}{4k+4}\right)$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2\mathrm{i}}{(4k+1)(4k+3)} - \frac{2}{(4k+2)(4k+4)}\right).$$

Les séries à termes positifs $\sum \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$ et $\sum \frac{1}{(4k+2)(4k+4)}$ convergent.

La suite (S_{4n}) admet donc une limite complexe. De plus :

$$\forall k \in \{4n+1, 4n+2, 4n+3\} \quad |S_{4n} - S_k| \leqslant \frac{3}{4n+1}.$$

Nous en déduisons que les suites $(S_{4n+1}), (S_{4n+2}), (S_{4n+3})$ convergent et ont la même limite que la suite (S_{4n}).

La série $\sum \frac{\mathrm{i}^n}{n}$ converge.

f) Cherchons un équivalent de u_n.

$$u_n = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}(\mathrm{e}^{\mathrm{Arctan}\,\frac{n-1}{n+1} - \frac{\pi}{4}} - 1) \sim \mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{Arctan}\,\frac{n-1}{n+1} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Or : $\mathrm{Arctan}\,\dfrac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} - \mathrm{Arctan}\,1 = \mathrm{Arctan}\,\dfrac{-1}{n} \sim -\dfrac{1}{n}$.

La série diverge.

g) Posons $u_n = \left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^b}\right)\right)^{n^a} = \mathrm{e}^{n^a \ln\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^b}\right)}$.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^b}\right) = \frac{1-\tan\frac{1}{n^b}}{1+\tan\frac{1}{n^b}} = 1 - \frac{2}{n^b} + \frac{2}{n^{2b}} + o\left(\frac{1}{n^{2b}}\right)$$

Donc $\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^b}\right)\right) = -\frac{2}{n^b} + o\left(\frac{1}{n^{2b}}\right)$. Et :

$$n^a \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{n^b}\right)\right) = -2n^{a-b} + o(n^{a-2b}).$$

Et enfin $u_n = \mathrm{e}^{-2n^{a-b} + o(n^{a-2b})}$.

- Si $a > b$, $n^2 u_n$ tend vers 0 et la série converge.
- Si $a \leqslant b$, la série est grossièrement divergente.

h) Notons (S_n) la suite des sommes partielles.

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{i(k)}{k^2} \geqslant \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{8n} \geqslant \frac{1}{8}.$$

La série diverge.

2 Autres études

1 On montre par récurrence que :

$$\forall n \geqslant 2 \quad \sqrt[4]{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n}.$$

Puis $\forall n \geqslant 2 \quad \sqrt[4]{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt[4]{n + \sqrt{n-1}}$.

D'où $u_n \sim \sqrt[4]{n}$. La série $\sum \frac{1}{u_n^2}$ diverge.

La suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ tend vers 0 et on vérifie que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

La série $\sum \frac{(-1)^n}{u_n}$ converge car elle vérifie le critère spécial des séries alternées.

Précisons : $\frac{u_n}{\sqrt[4]{n}} = \sqrt[4]{1 + \frac{u_{n-1}}{n}} = 1 + \frac{1}{4}\frac{u_{n-1}}{n} + o\left(\frac{u_{n-1}}{n}\right)$

$$= 1 + \frac{1}{4n^{3/4}} + o\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right).$$

Et $u_n = \sqrt[4]{n} + \frac{1}{4\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Enfin : $\frac{1}{u_n} = \frac{1}{\sqrt[4]{n}}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{4n^{3/4}} + o\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)}\right)$

$$= \frac{1}{n^{1/4}} - \frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n^{7/4}}\right).$$

Soit : $\frac{(-1)^n}{u_n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{4n^{3/4}} + o\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right)}\right)$

$$= \frac{(-1)^n}{n^{1/4}} - \frac{(-1)^n}{4n} + O\left(\frac{1}{n^{7/4}}\right).$$

Nous retrouvons la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{u_n}$.

2 Montrer que, pour n suffisamment grand :

- si $L > 1$, on a $u_n \leqslant n^{-\frac{1+L}{2}}$;
- si $L < 1$, on a $u_n \geqslant n^{-\frac{1+L}{2}}$,

et conclure.

3 Groupement de termes

Lorsque n croît, la partie entière de $\sqrt{n}$ se modifie si n est un carré.

Considérons les entiers n compris entre deux carrés consécutifs, p^2 et $(p+1)^2$.

Notons $v_p = \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} u_n$.

Dans l'intervalle $[\![p^2, (p+1)^2 - 1]\!] = [\![p^2, p^2+2p]\!]$, les seuls multiples de p sont p, $p(p+1)$, $p(p+2)$. Donc :

$$v_p = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{p(p+2)}.$$

Si (S_n) est la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$, on a :

$$S_{(p+1)^2-1} = \sum_{k=1}^{p} v_k = \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p(p+1)} + \frac{1}{p(p+2)}\right)$$

La convergence des séries $\sum \frac{1}{p^2}$, $\sum \frac{1}{p(p+1)}$, et $\sum \frac{1}{p(p+2)}$ entraîne la convergence de la suite $(S_{(p+1)^2-1})$, extraite de la suite (S_n).

Or la suite (S_n) est croissante. Elle est donc majorée et converge. De plus :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} + \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p(p+1)} \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p(p+2)}$$

$$= \frac{\pi^2}{6} + \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) + \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2p} - \frac{1}{2(p+2)}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{6} + \frac{7}{4}.$$

4 Série dépendant de deux paramètres

- Étudions d'abord les conditions d'existence de l'intégrale.

La fonction $\left(t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^b}\right)$ est continue et positive sur $]0, n]$.

Pour t proche de 0 : $\frac{\operatorname{Arctan} t}{t^b} \sim \frac{1}{t^{b-1}}$.

La fonction est donc intégrable sur $]0, n]$ si, et seulement si $b < 2$.

Nous nous limitons maintenant à $b < 2$.

- Supposons $b \neq 1$. Nous pouvons faire une intégration par parties :

$$\int_0^n \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^b}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\operatorname{Arctan} t}{(1-b)t^{b-1}}\right]_0^n - \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}}.$$

Soit :

$$u_n = \frac{\operatorname{Arctan} n}{(1-b)n^{a+b-1}} - \frac{1}{n^a}\int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}}.$$

• Si $b > 0$, vérifier, de manière analogue à ce qui précède, que la fonction ϕ :

$$\left(t \mapsto \frac{1}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}}\right)$$

est intégrable sur $]0, +\infty[$.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}}$ admet donc une limite réelle l_b lorsque n tend vers $+\infty$.

Nous pouvons même préciser que cette limite est non nulle car la fonction ϕ est continue, de signe constant et non nulle sur $]0, +\infty[$.

Lorsque $b > 1$, nous obtenons :

$$u_n \sim -\frac{l_b}{n^a}.$$

Dans ce cas, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si : $a > 1$.

Lorsque $0 < b < 1$, nous obtenons :

$$u_n \sim \frac{\pi}{2(1-b)n^{a+b-1}}.$$

Dans ce cas, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si : $a + b > 2$.

• Si $b \leqslant 0$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{(1-b)(1+t^2)t^{b-1}}$ tend vers $+\infty$ avec n.

Revenons à l'expression de u_n pour en déterminer un équivalent.

$$u_n = \frac{1}{n^a}\int_0^n \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^b}\mathrm{d}t.$$

La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} t}{t^b}\right)$ est positive et intégrable sur $[0, n]$, mais ne l'est pas sur $]0, +\infty[$.
L'intégrale tend donc vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Nous en déduisons $\displaystyle\int_0^n \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^b}\mathrm{d}t \sim \int_1^n \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^b}\mathrm{d}t$.

Puis :

$$\frac{\pi}{4}\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^b} \leqslant \int_1^n \frac{\operatorname{Arctan} t}{t^b}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^b}.$$

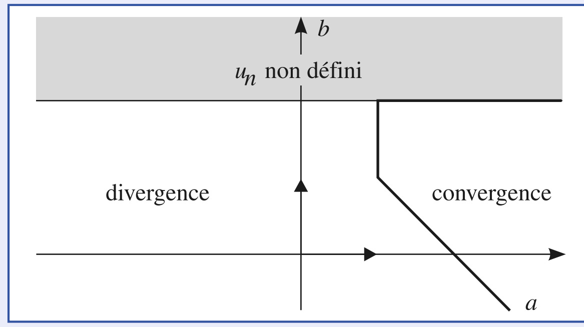
La série $\sum u_n$ converge si, et seulement si $a + b > 2$.

• Et enfin, que se passe-t-il si $b = 1$?

Raisonner (et non résonner comme on lit souvent dans les copies...) comme ci-dessus pour obtenir :

$$\frac{\pi}{4}\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_1^n \frac{\operatorname{Arctan} t}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Puis, en comparant à une série de Riemann, conclure que la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si : $a > 1$.



5 Le critère de condensation de Cauchy

1 ▬ Notons S_n, T_n les suites des sommes partielles respectives des séries $\sum u_n$; $\sum v_n$.

Alors : $\displaystyle\frac{v_n}{2} = 2^{n-1}u_{2^n} \leqslant u_{2^{n-1}} + u_{2^{n-1}+1} + \cdots + u_{2^n-1}$

$$\leqslant 2^{n-1}u_{2^{n-1}} = v_{n-1}.$$

Sommons, pour $n \geqslant 2$:

$$\frac{1}{2}T_n \leqslant S_{2^n-1} \leqslant T_{n-1}.$$

Nous savons qu'une série à termes positifs converge si, et seulement si ses sommes partielles sont majorées.

Les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

2 ▬ Notons $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^k}$. Alors :

$$v_n = 2^n u_{2^n} = \frac{1}{n^k(\ln 2)^k}$$

La série $\sum v_n$ converge si, et seulement si $k > 1$.

Notons $U_n = \dfrac{1}{n.\ln(n).(\ln(\ln n))^k}$. Alors :

$$V_n = 2^n U_{2^n} = \frac{1}{n\ln(2)(\ln n + \ln(\ln 2))^k} \sim \frac{1}{n\ln(2)(\ln n)^k}$$

Nous reconnaissons, avec $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^k}$, une *série de Bertrand*.

Elle converge si, et seulement si, la suite $\left(\displaystyle\int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^k}\right)$ converge, c'est-à-dire si, et seulement si, la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln t)^k}\right)$ est intégrable sur $[2, +\infty[$.

En calculant $\displaystyle\int_2^n \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^k}$, on montre que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln n(\ln(\ln n))^k}$ converge si, et seulement si, $k > 1$.

On peut s'amuser à étudier de même :

$\displaystyle\sum \frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)(\ln(\ln(\ln n)))^k}$, etc.

6 Absolument convergente ? Simplement convergente ?

Notons $u_n = (-1)^n \left(1 - \cos \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

Alors $|u_n| = 1 - \cos \dfrac{1}{n^\alpha} \sim \dfrac{1}{2n^{2\alpha}}$.

La série $\sum u_n$ est absolument convergente si, et seulement si : $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

α est strictement positif. Donc $1 - \cos \dfrac{1}{n^a}$ décroît. La série $\sum u_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées.

Elle converge simplement lorsque $0 < \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}$.

7 Sur la règle de Kummer

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe une suite (P_n) de nombres positifs, un réel $\alpha > 0$ et un entier N tels que :

$$\forall n \geqslant N \quad P_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - P_{n+1} > \alpha > 0.$$

Nous en déduisons :

$$\forall n \geqslant N \quad 0 < a_{n+1} < \frac{P_n a_n - P_{n+1} a_{n+1}}{\alpha}.$$

La suite $(a_n P_n)$ est donc positive et décroissante à partir d'un certain rang. Elle converge.

La série $\sum (P_n a_n - P_{n+1} a_{n+1})$ est alors convergente, ainsi que la série $\sum a_n$.

Réciproquement, soit $\sum a_n$ une série convergente à termes strictement positifs.

Notons (R_n) la suite de ses restes. Pour tout entier n :

$$a_{n+1} = R_n - R_{n+1} < \frac{R_n - R_{n+1}}{\frac{1}{2}}$$

Il suffit alors de poser $R_n = a_n P_n$ pour obtenir l'inégalité :

$$\forall n \geqslant N \quad P_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - P_{n+1} > \frac{1}{2} > 0$$

8 Série $\sum u_n^2 \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$

1 Montrer par récurrence que, pour tout n, $u_n > 0$. La suite u est donc bien définie, et :

$$\forall n \geqslant 0 \quad u_n^2 \left(\frac{1}{u_n} - 1\right) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n^2 \left(\frac{1}{u_n}\right).$$

La suite u, décroissante et positive, converge vers l.

Supposons la suite u non stationnaire : $\forall n \;\; u_n > l$.

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$f(x) = x^2 \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right).$$

La fonction f est continue en tout réel $a > 0$ tel que :

$$\frac{1}{a} \notin \mathbb{N}$$

Supposons $l \neq 0$.

Si $\dfrac{1}{l}$ n'est pas un entier, alors $l = l^2 \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{l}\right)$.

On en déduit que $\dfrac{1}{l}$ est un entier non nul.

Pour n assez grand, nous avons : $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{u_n}\right) = \dfrac{1}{l} - 1$.

Puis $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_{n+1} = l^2 \left(\dfrac{1}{l} - 1\right) = l - l^2$.

Donc $l = l - l^2$, soit $l = 0$.

Cette conclusion contredit l'hypothèse $l \neq 0$.

Nous pouvons conclure que la suite u est stationnaire ou converge vers 0.

De plus, nous remarquons que, si la suite u est stationnaire, alors $\dfrac{1}{u_n} = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$.

2 Dans ce cas, la suite u est stationnaire.

Soit p le plus petit entier tel que $u_p = \dfrac{1}{2}$.

Si $p > 0$, alors $\dfrac{1}{2} = u_{p-1}^2 \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{u_{p-1}}\right)$.

Remarquer que, si $u_n > 1$, alors $u_{n+1} = 0$ et si $u_n = 1$, la suite est stationnaire.

L'égalité $\dfrac{1}{2} = u_{p-1}^2 \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{u_{p-1}}\right)$, la décroissance de la suite et le choix de p imposent :

$$\forall n \leqslant p - 1 \quad u_n \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[.$$

Or $\forall x \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right] \quad \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

Donc $\forall n \leqslant p - 1 \quad u_{n+1} = u_n$.

Puis $u_{p-1} = u_0^{2^{p-1}}$. Finalement $u_0 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^p}}$.

3 Pour tout n, $1 \leqslant p_n \leqslant \dfrac{1}{u_n} \leqslant p_n + 1$.

Puis $u_{n+1} = u_n^2 p_n$ et :

$$p_{n+1} \leqslant \frac{1}{u_{n+1}} \leqslant \frac{1}{p_n}\left(\frac{1}{u_n}\right)^2 \leqslant \frac{(p_n+1)^2}{p_n} \leqslant p_n + 2 + \frac{1}{p_n} \leqslant p_n + 3$$

Soit $\forall n \quad p_n \leqslant p_0 + 3n$. D'où $u_n \geqslant \dfrac{1}{p_0 + 3n}$.

La série $\sum u_n$ diverge.

9 Équivalent d'un reste de série convergente

1 **a)** La fonction $\left(x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ convient.

b) La série $\sum(-1)^p f(p)$, définie pour $n \geqslant p$, vérifie le critère spécial des séries alternées. Elle converge.

2 Calculons :

$$\begin{aligned}
2x_n - (-1)^{n+1} f(n+1) &= \sum_{p=n+1}^{+\infty} 2(-1)^p f(p) - (-1)^{n+1} f(n+1)\\
&= (-1)^{n+1}\left[f(n+1) - 2\sum_{p=2}^{+\infty}(-1)^p f(n+p)\right]\\
&= \sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p (f(p) - f(p+1)).
\end{aligned}$$

D'où :

$$x_n = \frac{1}{2}\left((-1)^{n+1} f(n+1) + \sum_{p=n+1}^{+\infty}(-1)^p(f(p) - f(p+1)\right)$$

La série alternée $\sum(-1)^{n+1} f(n+1)$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Elle converge.

Considérons la série alternée :

$$\sum(-1)^p (f(p) - f(p+1)).$$

La convexité de f permet d'écrire, pour tout $p \geqslant 1$:

$$f(p+1) \leqslant \frac{1}{2}(f(p) + f(p+2)).$$

La valeur absolue $f(p) - f(p+1)$ du terme général de la série alternée $\sum(-1)^p (f(p) - f(p+1))$ tend vers 0 en décroissant.

Cette série vérifie le critère spécial des séries alternées. Nous en déduisons :

$$\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p (f(p) - f(p+1))\right| \leqslant f(n+1) - f(n+2)$$

Puisque f tend vers 0 en $+\infty$, la série :

$\sum\left(\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p (f(p) - f(p+1))\right)$ converge absolument, donc converge.

Somme de deux séries convergentes, la série $\sum x_n$ converge.

3 La majoration :

$$\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p (f(p) - f(p+1))\right| \leqslant f(n+1) - f(n+2)$$

et l'hypothèse $f(n+1) \sim f(n+2)$ permettent d'affirmer que :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} (-1)^p (f(p) - f(p+1)) = o(f(n+1)).$$

Finalement $x_n \sim \dfrac{1}{2}(-1)^{n+1} f(n+1)$.

10 Des séries extraites de la série harmonique

1 Puisque (P_n) est une partition de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists p \in \mathbb{N}^* \quad [\![1, n]\!] \subset \bigcup_{i\in[\![1,p]\!]} P_i.$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k\in P_i} a_k\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} b_i.$

La divergence de la série $\sum a_k$ implique celle de la série $\sum b_k$.

Réciproquement, les P_n sont finis, donc :

$$\forall p \in \mathbb{N} \ \exists m \in \mathbb{N}^* \quad \bigcup_{i\in[\![1,p]\!]} P_i \subset [\![1, m]\!].$$

D'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} b_i \leqslant \sum_{j=1}^{m} a_j.$

La divergence de la série $\sum b_k$ implique celle de la série $\sum a_k$.

2 **a)** Un nombre de U_k se construit en prenant son premier chiffre dans $[\![2, 9]\!]$ et les suivants dans $[\![2, 9]\!] \bigcup \{0\}$. Il y a $8 \times 9^{k-1}$ choix possibles.

b) P est l'ensemble des naturels contenant le chiffre 1.

La famille $P \bigcup \left\{\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} U_k\right\}$ réalise une partition de $\mathbb{N}^*$ telle que les U_k sont finis et non vides.

Les réels a_n sont positifs. Appliquons le résultat de la première question.

Or $\displaystyle b_n = \sum_{k\in U_n} a_k = \sum_{k\in U_n} \frac{1}{k} \leqslant 8 \times (0,9)^{n-1}.$

La série $\sum b_n$ converge (série géométrique de raison 0,9). Par conséquent, la série $\sum a_n$ converge.

3 ▬ **a)** Pour construire un nombre de 10 chiffres comportant la séquence 1789, on doit choisir parmi sept possibilités l'emplacement du 1. Ensuite, les 3 chiffres suivants sont fixés. Restent alors 6 chiffres à compléter. Le premier chiffre ne peut être un 0.

Il y a $10^6 + 6 \times 10^5 \times 9$ nombres comportant une ou deux fois la séquence 1789. Mais les nombres comportant deux fois cette séquence ont été comptés deux fois.

Ce sont ceux qui commencent par la séquence (3×10^2) et... les autres $(3 \times 9 \times 10)$.

Au total :

$$\begin{aligned} r_{10} &= (10^{10} - 10^9) \\ &\quad - (10^6 + 6 \times 10^5 \times 9 - 3 \times 9 \times 10 - 3 \times 10^2) \\ &= 8.993.600.570. \end{aligned}$$

b) Remarquons que 1789 est un chiffre en base 10 000. Notons $P_k = \left\{x \in \mathbb{N}^*;\ 10^{4(k-1)} \leqslant x < 10^{4k}\right\}$.

Un naturel de P_k s'écrit avec k chiffres dans la base 10 000.

La suite de chiffres 1789 n'apparaît pas dans l'écriture de x en base 10 si, et seulement si le nombre 1789 n'apparaît pas dans l'écriture de x en base 10 000, ni dans celle de la partie entière de $\dfrac{x}{10}$ en base 10 000, ni dans celle de la partie entière de $\dfrac{x}{100}$, ni dans celle de $\dfrac{x}{1\,000}$.

Soit x dans P_k. Pour écrire x en base 10 000 sans le chiffre 1789, il y a au plus $(9\,999)^k$ possibilités. De même pour $E\left(\dfrac{x}{10}\right)$, pour $E\left(\dfrac{x}{100}\right)$ et pour $E\left(\dfrac{x}{1\,000}\right)$. Finalement $\operatorname{card}(R_k) \leqslant 4 \times (9\,999)^k$.

On termine alors comme dans la question **2**). La série $\sum a_n$ converge.

11 Une méthode d'accélération de convergence

1 ▬ **a)** L'équivalence de u_n et de v_n s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N \quad -\varepsilon v_n \leqslant u_n - v_n \leqslant \varepsilon v_n$$

Fixons $\varepsilon > 0$ et sommons. Pour tout $n \geqslant N$, on obtient : $-\varepsilon T_n \leqslant S_n - T_n \leqslant \varepsilon T_n$.

Les suites (S_n) et (T_n) sont donc équivalentes.

b) En particulier, pour tout $a > 1$, on a :

$$\frac{1}{n^{a-1}} - \frac{1}{(n+1)^{a-1}} \sim \frac{a-1}{n^a}.$$

D'où $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^a} \sim \frac{1}{(a-1)n^{a-1}}$.

2 ▬ **a)** La convergence de la série à termes positifs $\sum x_n$ découle de $x_n \sim \dfrac{a_0}{n^\alpha}$ et $\alpha > 1$.

De plus, la question précédente permet d'affirmer que $R_n \sim \dfrac{a_0}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

b) Calculons y_n.

$$\begin{aligned} y_n = u_n - u_{n+1} &= \sum_{i=0}^{k} b_i \left(\frac{1}{n^{\alpha+i-1}} - \frac{1}{(n+1)^{\alpha+i-1}}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k} b_i \frac{1}{n^{\alpha+i-1}} \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(\alpha+i-1)}\right). \end{aligned}$$

Or, pour tout i de 0 à k, il existe $k+1-i$ réels c_{ij} tels que :

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(\alpha+i-1)} = 1 + \sum_{j=1}^{k+1-i} \frac{c_{ij}}{n^j} + O\left(\frac{1}{n^{k+2-i}}\right).$$

D'où $\dfrac{1}{n^{\alpha+i-1}}\left(1 - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{-(\alpha+i-1)}\right)$

$$= -\sum_{j=1}^{k+1-i} \frac{c_{ij}}{n^{\alpha+i+j-1}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+k+1}}\right).$$

Posons $p = i + j - 1$ et $-c_{ij} = d_{ip}$. On obtient :

$$\frac{1}{n^{\alpha+i-1}}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(\alpha+i-1)}\right) = \sum_{p=i}^{k} \frac{d_{ip}}{n^{\alpha+p}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+k+1}}\right).$$

Puis :

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{i=0}^{k} b_i \frac{1}{n^{\alpha+i-1}}\left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-(\alpha+i-1)}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k} b_i \sum_{p=i}^{k} \frac{d_{ip}}{n^{\alpha+p}} + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+k+1}}\right) \\ &= \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{n^{\alpha+p}} \left(\sum_{i=0}^{p} d_{ip} b_i\right) + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+k+1}}\right). \end{aligned}$$

Donc :

$$x_n - y_n = \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{n^{\alpha+p}} \left(a_p - \sum_{i=0}^{p} d_{ip} b_i\right) + O\left(\frac{1}{n^{\alpha+k+1}}\right)$$

Les coefficients cherchés doivent vérifier, pour tout p dans $[\![0, k]\!]$: $a_p - \displaystyle\sum_{i=0}^{p} d_{ip} b_i = 0$.

Ce système est linéaire et triangulaire.

Les éléments diagonaux de la matrice du système sont les $d_{ii} = -c_{i1}$.

Or $c_{i1} = -(\alpha + i - 1)$. Il ne s'annule pas. Le système admet une unique solution $(b_0, b_1, \ldots, b_k)$.

c) Il existe un réel A et un entier naturel N tels que :

$$\forall n \geqslant N \quad |x_n - y_n| \leqslant \frac{A}{n^{\alpha+k+1}}$$

Notons U_n le reste d'ordre n de la série absolument convergente $\sum (x_n - y_n)$. On a :

$$\sum_{j=1}^{+\infty}(x_j - y_j) = \sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j) + U_n.$$

De plus :

$$|U_n| \leqslant \sum_{j=n+1}^{+\infty} |x_j - y_j| \leqslant A \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{j^{\alpha+k+1}}.$$

Nous savons que :

$$\sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{j^{\alpha+k+1}} \sim \frac{1}{(\alpha+k)n^{\alpha+k}}.$$

Il existe donc un entier N tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{j^{\alpha+k+1}} \leqslant \frac{2}{(\alpha+k)n^{\alpha+k}}.$$

Puis, pour tout $n \geqslant N$, $|U_n| \leqslant \dfrac{2A}{(\alpha+k)n^{\alpha+k}}$. Or :

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j) = S_n - u_1 + u_{n+1} \text{ et } \sum_{j=1}^{+\infty}(x_j - y_j) = S - u_1.$$

Finalement, pour tout $n \geqslant N$:

$$|U_n| = |S - (S_n + u_{n+1})| \leqslant \frac{2}{(\alpha+k)n^{\alpha+k}}.$$

Nous en concluons que $S + u_{n+1}$ est une meilleure valeur approchée de S que S_n car :

$$|R_n| \sim \frac{a_0}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

3 ▬ **a)** Cherchons un équivalent de x_n.

$$x_n = \exp\left(1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \mathrm{e} - \frac{a}{n}$$
$$= -\frac{\mathrm{e} + 2a}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum x_n$ converge si, et seulement si $a = -\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

b) Utilisons *Maple*.

Avec Maple

```
> restart:x:=n->(1+1/n)ˆn-exp(1)
  +exp(1)/(2*n)) ;
```

$$x := n \to \left(1 + \frac{1}{n}h\right)^n - \mathbf{e} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{e}}{n}$$

```
> series(subs(n=1/u,x(n)),u,6) ;
```

$$\frac{11}{24}\mathbf{e}u^2 - \frac{7}{16}\mathbf{e}u^3 + \frac{2\,447}{5\,760}\mathbf{e}u^4 + \mathrm{O}(u^5)$$

c) Utilisons de nouveau *Maple*.

Avec Maple

```
> u:=n->b0/n+b1/nˆ2+b2/nˆ3 ;
```

$$u := n \to \frac{b0}{n} + \frac{b1}{n^2} + \frac{b2}{n^3}$$

```
> y:=n->u(n)-u(n+1) ;
```

$$y := n \to \mathrm{u}(n) - \mathrm{u}(n+1)$$

```
> s:=series(subs(n=1/u,x(n)-y(n)),u,5) ;
```

$$s := \left(\frac{11}{24}\mathbf{e} - b0\right)u^2 + \left(b0 - 2\,b1 - \frac{7}{16}\mathbf{e}\right)u^3$$
$$+ \left(3\,b1 - b0 + \frac{2447}{5760}\mathbf{e} - 3\,b2\right)u^4 + \mathrm{O}(u^5)$$

```
> sol:=solve({op(1,s),op(3,s),op(5,s)},{b0,b1,b2}) ;
```

$$sol := \left\{b0 = \frac{11}{24}\mathbf{e},\ b2 = -\frac{13}{17280}\mathbf{e},\ b1 = \frac{1}{96}\mathbf{e}\right\}$$

d) Dans cet exemple, nous avons $\alpha = 2$, $k = 2$.

Avec Maple

```
> assign(sol);Digits:=20 :
> S100:=evalf(sum(x(n),n=1..100)) ;
```

$$S100 := 1.2581425829030833\,6$$

```
> evalf(S100+u(101)) ;
```

$$1.2704807940095665603$$

12 Des logarithmes et des séries

1 ▬ Comparons a_n au terme général d'une *série de Riemann*.

$$a_n = \mathrm{e}^{-\ln n \ln(\ln n)}$$

Il existe n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, on a $\ln(\ln n) \geqslant 2$.

Alors, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $0 \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

La série $\sum a_n$ converge.

2 ▬ Écrivons : $b_n = \exp(-\ln(\ln n)\ln(\ln(\ln n)))$

D'où $\ln(\ln n)\ln(\ln(\ln n)) = o(\ln n)$.

Puis, pour n assez grand, $b_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.

La série $\sum b_n$ diverge.

3 ▬ Nous avons : $c_n(j) = \exp(-\ln(n)\ln(L_j(n)))$.

Puisque $L_j(n)$ tend vers $+\infty$ avec n, on a :

$$\exists n_j \quad \forall n \geqslant n_j \quad \ln(L_j(n)) \geqslant 2.$$

Puis, pour tout $n \geqslant n_j$, $0 \leqslant c_n(j) \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
Et donc $J = \mathbb{N}$.

4 Ici, $d_n(k) = \exp(-L_k(n)\ln(\ln n))$.

Pour tout $k \geqslant 2$, on a $L_k(n)\ln(\ln n) = o(\ln n)$.

Nous en déduisons que, pour tout $k \geqslant 2$, la série $\sum d_n(k)$ diverge et $K = \{1\}$.

5 Résolvons l'inégalité :

$$c_n(2) \leqslant \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \ln(\ln(\ln n)) \geqslant 2$$
$$\Leftrightarrow n \geqslant e^{(e^{(e^2)})}$$

Or $e^{(e^{(e^2)})} \approx 5,8 \times 10^{702}$.

De plus, p a k chiffres en base 10 si, et seulement si :

$$10^{k-1} \leqslant p < 10^k$$

Cette condition équivaut à :

$$\ln(k-1) + \ln(\ln 10) \leqslant \ln(\ln p) < \ln k + \ln(\ln 10).$$

Pour obtenir $\ln(\ln N) \geqslant e^2$, il suffit d'avoir :

$$\ln(k-1) \geqslant e^2 - \ln(\ln 10) \approx 6,555.$$

Tester 702 et 703 et vérifier que le nombre de chiffres de N est 703.

13 Série $\sum \frac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

1 En intégrant par parties deux fois successivement, on trouve :

$$\int_a^b (b-x)(x-a)\, f''(x)\mathrm{d}x$$
$$= (b-a)(f(a)+f(b)) - 2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

D'où le résultat.

2 La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1,+\infty[$. Donc g'' est continue sur $[1,+\infty[$ et :

$$g'(x) = \frac{\cos\sqrt{x}}{2x} - \frac{\sin\sqrt{x}}{2x^{3/2}}$$
$$g''(x) = -\frac{\sin\sqrt{x}}{4x^{3/2}} - \frac{\cos\sqrt{x}}{2x^2} - \frac{\cos\sqrt{x}}{4x^2} + 3\frac{\sin\sqrt{x}}{4x^{5/2}}$$

De plus, au voisinage de $+\infty$:

$$g''(x) = O\left(\frac{1}{4x^{3/2}}\right).$$

Donc la fonction g'' est intégrable sur $[1,+\infty[$.

3 **a)** Nous remarquons que w_n s'écrit :

$$w_n = \int_n^{n+1} g(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(g(n)+g(n+1))$$
$$= -\frac{1}{2}\int_n^{n+1}(n+1-x)(x-n)g''(x)\mathrm{d}x.$$

Nous en déduisons :

$$|w_n| \leqslant \frac{1}{2}\int_n^{n+1}|g''(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Puisque la fonction g'' est intégrable sur $[1,+\infty[$, la série $\sum \int_n^{n+1}|g''(x)|\,\mathrm{d}x$ est convergente.

La série $\sum w_n$ est donc absolument convergente.

b) Calculons $\sum_{k=1}^n v_k$.

$$\sum_{k=1}^n v_k = \int_1^{n+1} g(x)\mathrm{d}x = \left[-2\cos\sqrt{x}\right]_1^{n+1}$$
$$= -2\cos\sqrt{n+1} + 2\cos 1.$$

Supposons la suite $(\cos n)$ convergente vers un réel α.

La formule $\cos(n+1) = \cos n\cos 1 - \sin n\sin 1$ permet d'affirmer la convergence de la suite $(\sin n)$ vers un réel β.

De plus, α et β doivent vérifier :

$$\alpha = \alpha\cos 1 - \beta\sin 1.$$

La suite $(\sin(2n))$ converge vers β. Donc :

$$\beta = 2\alpha\beta \quad ; \qquad \alpha^2 + \beta^2 = 1.$$

Vérifier que ces relations sont incompatibles.

La convergence de la série $\sum v_n$ équivaut à la convergence de la suite $(\cos\sqrt{n})$. Or la suite $(\cos n)$ est une suite extraite de la suite $(\cos\sqrt{n})$.

Sa divergence entraîne celle de la série $\sum v_n$.

c) Remarquons que $u_n + u_{n+1} = 2(v_n - w_n)$. La convergence de la série $\sum w_n$ et la divergence de la série $\sum v_n$ entraînent la divergence de la série $\sum u_n$.

14 Nature de la série $\sum \frac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

1 Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale. On obtient :

$$J_N = \int_{2N\pi}^{2N\pi+\pi/2} 2\cos u\,\mathrm{d}u = 2.$$

2 Remarquons d'abord que, pour tout entier N, on a :

$$\left(2N\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 - (2N\pi)^2. = 2N\pi^2 + \frac{\pi^2}{4} \geqslant 2.$$

La suite (V_N) est donc bien définie.

Étudions la fonction f sur l'intervalle I_N.

$$f'(t) = -\frac{\sqrt{t}\sin\sqrt{t} + \cos\sqrt{t}}{2t^{3/2}}.$$

La fonction f est décroissante et positive sur I_N. D'où :

$$V_N \geqslant \int_{\mathrm{E}((2N\pi)^2)+1}^{\mathrm{E}((2N\pi+\pi/2)^2)} \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{I_N} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{(2N\pi)^2}^{\mathrm{E}((2N\pi)^2)+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\mathrm{E}((2N\pi+\pi/2)^2)}^{((2N\pi+\pi/2)^2)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Or, pour tout t de I_N, on a $|f(t)| \leqslant \frac{1}{2N\pi}$. D'où :

$$\int_{(2N\pi)^2}^{\mathrm{E}((2N\pi)^2)+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2N\pi} \ ;$$

$$\int_{\mathrm{E}((2N\pi+\pi/2)^2)}^{((2N\pi+\pi/2)^2)} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2N\pi}.$$

Finalement, $V_N \geqslant 1$.

La série $\sum \frac{\cos\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ diverge.

15 Un exercice d'oral

1 ▬ La somme cherchée est $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p^k} = \frac{p}{p-1}$.

2 ▬ Soit p_1 et p_2 deux nombres premiers distincts.

La somme des inverses des entiers n'ayant pas d'autre facteur premier que p_1 ou p_2 est :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{p_1^k} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{p_2^j} = \frac{p_1}{p_1-1}\,\frac{p_2}{p_2-1}.$$

Par conséquent, la somme des inverses de tous les entiers n'ayant pas de facteur premier supérieur à q est :

$$T_q = \prod_{p\in P, p\leqslant q} \frac{p}{p-1}.$$

3 ▬ Un entier n tel que $p(n) = q$ est le produit de q par un entier n'ayant pas de facteur premier strictement supérieur à q.

La somme de tous les inverses des entiers tels que $p(n) = q$ est $\frac{T_q}{q}$.

4 ▬ $\ln(T_q) = \sum_{p\in P, p\leqslant q} \ln\left(\frac{p}{p-1}\right) \leqslant \sum_{p\in P, p\leqslant q} \frac{1}{p-1}$.

Notons $u_p = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$.

La série $\sum u_p$ converge. Sa somme est 1.

Nous obtenons $\ln(T_q) \leqslant \sum_{p\in P, p\leqslant q} \frac{1}{p} + 1$.

Puis : $\left(\ln(T_q)\right)^2 \leqslant \left(\sum_{p\in P, p\leqslant q} \frac{1}{p}\right)^2 + 1 + 2\sum_{p\in P, p\leqslant q} \frac{1}{p}$.

Remarquons que les termes $\frac{1}{p^2}$ et $\frac{2}{p_1 p_2}$ dans le développement de $\left(\sum_{p\in P, p\leqslant q} \frac{1}{p}\right)^2$ sont tous distincts.

En effet, si p_1 et p_2 sont impairs, la fraction $\frac{2}{p_1 p_2}$ est irréductible et la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers est unique.

Si p_1 est pair, alors $p_1 = 2$ et $\frac{2}{p_1 p_2} = \frac{1}{p_2}$.

D'où la majoration :

$$\left(\sum_{p\in P, p\leqslant q} \frac{1}{p}\right)^2 \leqslant 2\sum_{k=1}^{q^2} \frac{1}{k} \leqslant 2(\ln(q^2)+1).$$

Enfin : $\qquad (\ln(T_q))^2 \leqslant 6\ln q + 5.$

5 ▬ Pour $\alpha \leqslant 0$, la série donnée est divergente. (Comparaison avec la série harmonique.)

Soit $\alpha > 0$ fixé. Notons S la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{1}{n \times p(n)^\alpha}$.

$$S_N = \sum_{n\leqslant N} \frac{1}{n \times p(n)^\alpha}.$$

Regroupons dans cette somme les termes n ayant même $p(n) = q$.

$$S_N \leqslant \sum_{q\in P, q\leqslant N} \frac{T_q}{q^{1+\alpha}}.$$

Or, l'inégalité établie dans la question **4)** montre que :

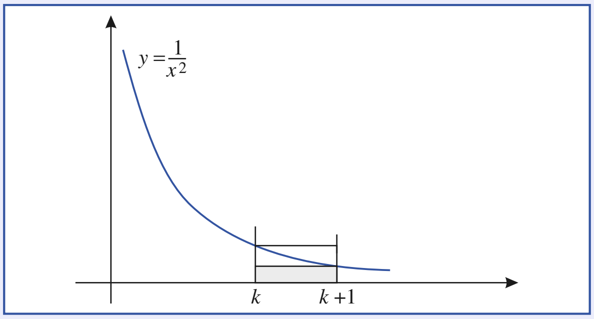
$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall q \geqslant N \quad T_q \leqslant q^{\alpha/2}.$$

La série $\sum \frac{T_q}{q^{1+\alpha}}$ converge, donc la série $\sum \frac{1}{n \times p(n)^\alpha}$ converge.

Algorithme

Accélération de convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$.

1 ▬ a) La fonction $(x \mapsto \frac{1}{x^2})$ est décroissante et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.



Nous en déduisons, pour tout $k \geqslant 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

Soit : $$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

Puis : $$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{N}.$$

Faisons tendre N vers $+\infty$. On obtient :

$$\frac{1}{n+1} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{D'où :} \quad R_n \sim \frac{1}{n}.$$

b) Immédiat.

c) $|S - S_n| = |R_n| \leqslant \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n^2}$.

2 ▬ a) $\Delta f_{k-1}(x) = f_{k-1}(x+1) - f_{k-1}(x) = -k f_k(x)$

b) Calculons une somme partielle :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=n+1}^{N} f_k(p) &= -\frac{1}{k} \sum_{p=n+1}^{N} \Delta f_{k-1}(p) \\
&= -\frac{1}{k} \sum_{p=n+1}^{N} \big(f_{k-1}(p+1) - f_{k-1}(p)\big) \\
&= -\frac{1}{k} \big(f_{k-1}(N+1) - f_{k-1}(n+1)\big).
\end{aligned}$$

D'où la convergence de la série dont la somme est :

$$\sum_{p=n+1}^{+\infty} f_k(p) = \frac{1}{k} f_{k-1}(n+1) = \frac{1}{k} \frac{1}{n(n+1)\cdots(n+k)}.$$

c) $p \geqslant 1, q \geqslant 1$.

Effectuons une récurrence sur q.

Pour $q = 1$, le résultat est vérifié.

Supposons que, pour un certain $q \geqslant 1$, la relation est vraie. Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q+1} (k-1)!\, f_k(p) &= \frac{q!}{p} f_q(p) - q!\, f_q(p) \frac{1}{p+q+1} \\
&= \frac{(q+1)!}{p} f_{q+1}(p).
\end{aligned}$$

d) Fixons n et $N \geqslant n+1$ et utilisons la relation de la question précédente.

Pour tout $q \geqslant 1$ et tout p de $[\![n+1, N]\!]$, on a :

$$0 \leqslant \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1} q(k-1)!\, f_k(p) = \frac{q!}{p} f_q(p).$$

D'où, en sommant :

$$0 \leqslant \sum_{p=n+1}^{N} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=n+1}^{N} \sum_{k=1}^{q} (k-1)!\, f_k(p) = \sum_{p=n+1}^{N} \frac{q!}{p} f_q(p)$$

$$0 \leqslant \sum_{p=n+1}^{N} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} \left((k-1)! \sum_{p=n+1}^{N} f_k(p) \right) = \sum_{p=n+1}^{N} \frac{q!}{p} f_q(p)$$

$$0 \leqslant \sum_{p=n+1}^{N} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} \left((k-1)! \sum_{p=n+1}^{N} f_k(p) \right) \leqslant \sum_{p=n+1}^{N} \frac{q!}{n+1} f_q(p)$$

Les trois suites $\left(\sum_{p=n+1}^{N} \frac{1}{p^2} \right)_N$, $\left(\sum_{p=n+1}^{N} f_k(p) \right)_N$ et $\left(\sum_{p=n+1}^{N} f_q(p) \right)_N$ ont une limite lorsque N tend vers $+\infty$.

On peut effectuer un passage à la limite :

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(k-1)!}{k(n+1)\cdots(n+k)} \\
&\leqslant \frac{q!}{n+1} \sum_{p=n+1}^{+\infty} f_q(p) = \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}.
\end{aligned}$$

Soit :

$$0 \leqslant S - S'_n \leqslant \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\cdots(n+q)}.$$

e) Pour $q = 2$:

$$S'_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

$$0 \leqslant \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leqslant \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}.$$

3 **a)** Démonstration par récurrence sur q.

Pour $q = 1$, la relation est :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+p)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{p^3} - \frac{1}{(p+1)^3}\right)$$
$$= 4\int_0^1 \frac{P_3 \mathrm{d}x}{(x+p)^5}.$$

En intégrant deux fois par parties, vérifier le résultat souhaité.

Supposons la relation vérifiée pour un certain $q \geqslant 1$.

Calculons $(2q+4)\displaystyle\int_0^1 \frac{P_{2q+3}(x)\mathrm{d}x}{(x+p)^{2q+5}}$.

$$(2q+4)\int_0^1 \frac{P_{2q+3}(x)}{(x+p)^{2q+5}}\mathrm{d}x$$
$$= (2q+4)\left[-\frac{P_{2q+3}}{(2q+4)(x+p)^{2q+4}}\right]_0^1$$
$$+ (2q+3)\int_0^1 \frac{P_{2q+2}(x)}{(x+p)^{2q+4}}\mathrm{d}x$$
$$= (2q+3)\int_0^1 \frac{P_{2q+2}(x)}{(x+p)^{2q+4}}\mathrm{d}x$$
$$= (2q+3)\left[-\frac{P_{2q+2}}{(2q+3)(x+p)^{2q+3}}\right]_0^1$$
$$+ (2q+2)\int_0^1 \frac{P_{2q+1}(x)}{(x+p)^{2q+3}}\mathrm{d}x\, B_{2q+2}\left(\frac{1}{p^{2q+3}} - \frac{1}{(p+1)^{2q+3}}\right)$$
$$+ (2q+2)\int_0^1 \frac{P_{2q+1}(x)}{(x+p)^{2q+3}}\mathrm{d}x.$$

La formule demandée est établie par récurrence.

b) Fixons $q \geqslant 1$ et $n \geqslant 1$. Puis sommons la relation établie dans la question précédente des rangs n à $N > n$.

On obtient :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(N+1)^2} - \sum_{p=n+1}^{N} \frac{1}{p^2}$$
$$+ \sum_{k=1}^{q} B_{2k}\left(\frac{1}{n^{2k+1}} - \frac{1}{(N+1)^{2k+1}}\right)$$
$$= (2q+2)\sum_{j=n}^{N}\int_0^1 \frac{P_{2q+1}(x)}{(x+j)^{2q+3}}.$$

Par conséquent :

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(N+1)^2} - \sum_{p=n+1}^{N} \frac{1}{p^2}\right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{q} B_{2k}\left(\frac{1}{n^{2k+1}} - \frac{1}{(N+1)^{2k+1}}\right)\right|$$
$$\leqslant \sum_{j=n}^{N} \sup_{t\in[0,1]} |P_{2q+1}(t)| \int_0^1 \frac{1}{(x+j)^{2q+3}}$$
$$\leqslant \sup_{t\in[0,1]} |P_{2q+1}(t)| \left(\frac{1}{n^{2q+2}} - \frac{1}{(N+1)^{2q+2}}\right).$$

Chaque membre a une limite lorsque N tend vers $+\infty$:

$$\left|R_n - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{B_{2k}}{n^{2k+1}}\right| \leqslant \frac{\sup_{t\in[0,1]} |P_{2q+1}(t)|}{n^{2q+2}}.$$

c) Lorsque $q = 2$:

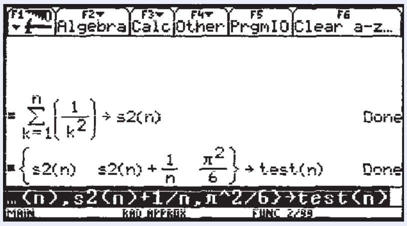
$$S''_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{B_2}{n^3} + \frac{B_4}{n^5}$$
$$\left|\frac{\pi^2}{6} - S''_n\right| \leqslant \frac{\sup_{t\in[0,1]} |P_5(t)|}{n^6}.$$

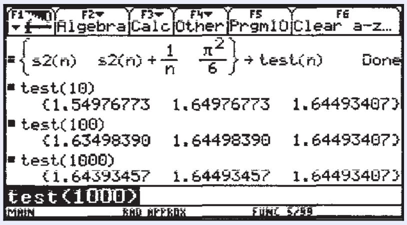
Vérifier que :

$$\sup_{t\in[0,1]} |P_5(x)| = \sup_{t\in[0,1]} \left|x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x\right| \leqslant 1.$$

Partie informatique

4





Accélération de la convergence

Avec Maple

```
> Somme1:=proc(eps)
  local n,k ;
  global S ;
  n:=floor(evalf((1/eps)^(1/2)))+1 ;
  S:=0 ;
  for k to n do S :=S+1/k^2 ;od ;
  S:=S+1/n ;
  end ;
> Somme1(10^(-4)) ;evalf(Somme1(10^(-4))) ;evalf(Pi^2/6) ;
```

$$\frac{16313741175583426208738696282428174483528535578211950397393941824\backslash 01371158984171865610 1}{991727085937512089304510102003742869359\backslash 631293234060741242553033835098897687169484800 0}$$

$$1.644982920$$

La méthode de Stirling

Avec Maple

```
> Somme2 :=proc(eps)
  local n,k ;
  global S ;
  n:=floor(evalf((1/eps)^(1/3)))+1 ; S:=0 ;
  for k to n do S :=S+1/k^2 ;od ;
  S:=S+1/(n+1)+1/(2*(n+1)*(n+2)) ;
  end ;
> Somme2(10^(-6)) ;evalf(Somme2(10^(-6))) ;
```

$$\frac{1680264801702437376897980798840873475879694861854515817946800979 6\backslash 902669407230926958184 03}{10214788985156374519836454050638551 55\backslash 440420232031082563479829624850151864617784569344000}$$

$$1.644933443$$

La méthode d'Euler-Mac Laurin

Avec Maple

```
> Bernoulli:=proc(p)
  local i,j ;
  global B ;
  B[0]:=1 ;B[1]:=-1/2 ;
  for i to p do B[2*i]:=B[1] ;
    for j to i do
    B[2*i]:=B[2*i]+binomial(2*i,2*j)
    *B[2*(i-j)]/(2*j+1) ;
    od ;
   B[2*i]:=-B[2*i] ;B[2*i+1]:=0 ;
  od ;
  end :
```

```
> Bernoulli(9) :B[5] ;B[8] ;
```

$$0$$

$$\frac{-1}{30}$$

```
> Somme3:=proc(eps)
  local n,k ;
  global S ;
  n:=floor(evalf((1/eps)^(1/6)))+1 ;
  S:=0 ;
  for k to n do S:=S+1/k^2 ;od ;
  S:=S+1/n-1/(2*(n^2))+B[2]/n^3+B[4]/n^5 ;
  end :
> Somme3(10^(-6)) ;evalf(Somme3(10^(-6))) ;
```

$$\frac{336467404243}{204547654080}$$

$$1.644934066$$

11 Dérivation, intégration

RAPPELS DE COURS

DÉRIVATION

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé E de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Ces fonctions sont dites vectorielles.

• *Dérivation composante par composante*

Soit $B = (e_j)_{j \in [\![1,p]\!]}$ une base de E et k dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

L'application f est dans $\mathcal{C}^{(k)}(I, E)$ si, et seulement si, pour tout j de $[\![1, p]\!]$, l'application coordonnée f_j est dans $\mathcal{C}^{(k)}(I, \mathbb{K})$.

Dans ce cas, si k est dans $\mathbb{N}$: $\quad \forall\, x \in I \quad f^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} f_j^{(k)}(x) e_j.$

• *L'espace vectoriel* $\mathcal{C}^{(k)}(I,\ \mathbb{K})$

Formule de Leibniz : Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \geqslant 1$) de I dans $\mathbb{K}$.

La fonction fg est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout $p \leqslant k$:

$$(fg)^{(p)} = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} f^{(j)} g^{(p-j)}.$$

L'ensemble $\mathcal{C}^{(k)}(I, \mathbb{K}) = \mathcal{C}^{(k)}(I)$ est une sous-algèbre de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{C}^0(I)$.

• $\mathcal{C}^k$*-difféomorphismes*

I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'intérieurs non vides et k est un élément de $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Une application φ de J dans I est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de J dans I si :

– φ est bijective ;

– φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J ;

– φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I .

Si φ est une application de classe $\mathcal{C}^k$ d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle induit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de J sur l'intervalle $\varphi(J)$ si : $\quad \forall t \in J \quad \varphi'(t) \neq 0.$

INTÉGRATION SUR UN SEGMENT

$I = [a, b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

• *Positivité de l'intégrale*

La fonction f est **continue** et positive sur I. Alors :

$$\int_I f \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \int_I f = 0 \iff f = 0.$$

• *Une inégalité fondamentale*

La fonction f est continue par morceaux de $[a, b]$ dans E. Alors :

$$\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\| \leqslant (b-a)\,\|f\|_\infty .$$

La valeur moyenne de f sur le segment $[a, b]$ est le vecteur de E :

$$\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f .$$

• *Trois normes sur* $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$

• La norme sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ définie par $\|f\|_1 = \displaystyle\int_{[a,b]} |f|$, est appelée norme de la convergence en moyenne.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'application définie sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ par $< f|g >= \displaystyle\int_{[a,b]} fg$, est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, l'application définie sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ par $< f|g >= \displaystyle\int_{[a,b]} \overline{f}g$, est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$.

La norme associée à ces produits scalaires est :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_{[a,b]} |f|^2}.$$

Elle est appelée *norme de la convergence en moyenne quadratique.*

• Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

Alors :

– la suite $(f_n)_n$ converge en moyenne vers f : $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$;

– $\displaystyle\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_{[a,b]} f_n = \int_{[a,b]} f.$

• Soit $\sum u_n$ une série d'applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{K}$, qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers S.

Alors la série numérique $\displaystyle\sum \int_{[a,b]} u_n$ est convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{[a,b]} u_n \right) = \int_{[a,b]} S = \int_{[a,b]} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x.$$

• Soit $\sum u_n$ une série d'applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$, qui converge normalement sur $[a,b]$ vers S.

Alors, en notant S la fonction somme de la série :

– la série numérique $\sum \|u_n\|_1$ est convergente ;

– la fonction S est continue sur $[a,b]$ et :

$$\left|\int_{[a,b]} S\right| \leqslant \|S\|_1 \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_1 \leqslant (b-a) \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|_\infty .$$

• Pour toute application f de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$:

$$\|f\|_2 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_\infty \quad ; \quad \|f\|_1 \leqslant \sqrt{b-a}\,\|f\|_2 .$$

• *Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral*

Soit f une application continue par morceaux de I dans E et a un point de I.

– si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I, alors F_1 et F_2 diffèrent d'une constante :

$$\exists V \in E \quad \forall x \in I \quad F_1(x) = F_2(x) + V \ ;$$

– la fonction F définie en posant $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a ;

– si G est une primitive de f sur l'intervalle I, alors :

$$\forall (u,v) \in I^2 \quad G(v) - G(u) = \int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Conséquence : si f est une application continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de I dans E, alors :

$$\forall (a,x) \in I^2 \quad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

• *Intégration par parties*

Les applications f et V sont continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'un intervalle I dans $\mathbb{K}$ et dans E respectivement.

Alors :

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \int_a^b f'(x)V(x)\,\mathrm{d}x = \big[f(x)V(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x)V'(x)\,\mathrm{d}x.$$

• *Changement de variables*

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi([a,b]) \subset I$ et f une application continue de I dans E. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Conséquence : Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, φ une application strictement monotone et de classe $\mathcal{C}^1$ de J dans I et f une application continue par morceaux de I dans E. Alors :

$$\forall (a,b) \in J^2 \quad \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

• *Inégalité des accroissements finis*

Soit $[a,b]$ un segment contenu dans I et f une application continue de I dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $]a,b[$.

On suppose qu'il existe un réel λ tel qu'en tout point t de $]a,b[$ en lequel f est dérivable, on a : $\|f'(t)\| \leqslant \lambda$. Alors : $\|f(b)-f(a)\| \leqslant \lambda(b-a)$.

Conséquences :

• L'application f est continue de I dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I.

f est lipschitzienne sur I si, et seulement si, f' est bornée sur I.

• k est un entier strictement positif et f une application de $[a,b]$ dans E telle que :

– f est continue sur $[a,b]$;

– f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b[$;

– pour tout r de $[\![1,k]\!]$, $f^{(r)}$ a une limite l_r en b, $(l_r \in E)$.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a,b]$ et, pour tout r de $[\![1,k]\!]$, $f^{(r)}(b)=l_r$.

• *Les formules de Taylor*

• *Formule de Taylor avec reste intégral*

L'application f est de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans E, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur I. Alors :

$$\forall (a,b)\in I^2 \quad f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x.$$

• *Inégalité de Taylor-Lagrange*

L'application f est de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans E, de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ par morceaux sur I. Alors :

$$\forall (a,b)\in I^2 \quad \left\| f(b)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)\right\| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\sup_{t\in[\min(a,b),\max(a,b)]}\left\|f^{(n+1)}\right\|.$$

• *La formule de Taylor-Young*

L'application f est de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans E. Alors, elle admet en tout point a de I un développement limité à l'ordre n donné par : $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+o((x-a)^n)$.

• *Relèvement*

$$\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}\ ;\ |z|=1\}$$

• L'application $\begin{pmatrix}]-\pi,\pi[\ \to \mathbb{U}\setminus\{-1\} \\ \theta \mapsto e^{i\theta}\end{pmatrix}$ est bijective.

Sa bijective réciproque est l'application Argument, notée Arg. Elle est définie par :

$$\begin{aligned}\mathrm{Arg}\ :\ \mathbb{U}\setminus\{-1\} &\to]-\pi,\pi[\\ x+\mathrm{i}y &\mapsto \mathrm{Artan}\frac{y}{1+x}.\end{aligned}$$

Elle est continue sur $\mathbb{U}\setminus\{-1\}$ et ne peut être prolongée en une application continue sur $\mathbb{U}$.

• Soit n un entier naturel non nul. Pour toute application f de $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{U})$, il existe une fonction θ de $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$ telle que $f=e^{i\theta}$.

La fonction θ est appelée un relèvement de f

INTÉGRABILITÉ

I est un intervalle de $\mathbb{R}$, d'intérieur non vide, et $\mathcal{CM}(I,\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

• *Intégrales généralisées convergentes*

• Soit f une fonction de $\mathcal{CM}([a,b[,\mathbb{K})$, $(b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$. On dit que l'intégrale sur $[a,b[$ de f converge si la fonction $\left(x \mapsto \int_a^x f\right)$ a une limite lorsque x tend vers $+\infty$.

Cette limite est alors notée $\int_a^b f$ ou $\int_{[a,b[} f$.

On définit de même les intégrales généralisées $\int_a^b f$ pour une fonction f de $\mathcal{CM}(]a,b],\mathbb{K})$, $\big(a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}\big)$.

Lorsque f est dans $\mathcal{CM}(]a,b[,\mathbb{K})$, $\big((a,b) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}\big)$ et que les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent, c étant un réel de $]a,b[$, on dit que l'intégrale $\int_a^b f$ converge et on note :

$$\int_{]a,b[} f = \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

• I étant un intervalle de $\mathbb{R}$, une fonction f de $\mathcal{CM}(I,\mathbb{R})$ est dite intégrable sur I si l'intégrale $\int_I |f|$ converge.

On dit aussi que l'intégrale de f sur I est absolument convergente.

• La fonction f est intégrable sur I si, et seulement s'il existe un réel positif M tel que, pour tout segment $[a,b]$ contenu dans I, on ait : $\int_{[a,b]} f \leqslant M$.

• *Méthode pratique*

Une fonction f est intégrable sur I si :

– elle est continue par morceaux sur $]\inf I, \sup I[$ ou $]\inf I, \sup I]$ ou $[\inf I, \sup I[$;

– elle vérifie, suivant les cas ainsi mis en évidence, un critère d'intégrabilité local en $\inf I$, $\sup I$ ou global, éventuellement sur un intervalle de la forme $]\inf I, c]$ ou $[c, \sup I[$, avec c dans I.

• *Critères d'intégrabilité globaux*

La fonction f est continue par morceaux sur I.

Si elle vérifie l'un des critères suivants, elle est intégrable sur I.

• *Critère par comparaison de fonctions*

Il existe une fonction g positive, continue par morceaux et intégrable sur I telle que : $|f| \leqslant g$.

• *Critère utilisant une primitive de $|f|$.*

Il existe une primitive F de $|f|$ bornée sur I.

• *Critère utilisant les segments contenus dans I*

Il existe une suite croissante de segments $[a_n,b_n]$ de réunion I telle que la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} |f|\right)_n$ est bornée.

• *Critère de majoration par une constante*

Il existe une constante M telle que, pour tout segment $[a,b]$ contenu dans I : $\int_a^b f \leqslant M$.

• *Critères d'intégrabilité locaux*

La fonction f est continue par morceaux sur $[a,b[$.

Si elle vérifie l'un des deux critères suivants, elle est intégrable sur $[a,b[$.

• Il existe une fonction g continue par morceaux, positive et intégrable sur $[a, b[$ telle que $f =_b O(g)$.

• Il existe une fonction g continue par morceaux, positive et intégrable sur $[a, b[$ telle que $f \sim_b g$.

On pourra procéder de manière analogue avec un intervalle $]a, b]$.

• *Critère par comparaison avec une série*

La fonction f est dans $\mathcal{CM}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ et décroissante.

Si la série $\sum f(n)$ converge, f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

• *Propriétés*

• L'ensemble $\mathfrak{I}(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et l'application L de $\mathfrak{I}(I, \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$, définie par $L(f) = \int_I f$, est une forme linéaire.

• Pour toute fonction f intégrable sur I : $\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$.

Si la fonction f est continue, positive et intégrable sur I, alors :

$$\int_I f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0.$$

• *Changement de variables*

• Soit f une fonction intégrable sur un intervalle I et φ une bijection d'un intervalle J sur I, de classe $\mathcal{C}^1$ sur J. Alors :

– $(f \circ \varphi)\varphi'$ est intégrable sur J ;

– $\int_I f = \int_J (f \circ \varphi)|\varphi'|$.

• En notant a et b les extrémités de J, a_1 et b_1 les limites en a, b respectivement de φ :

$$\int_{a_1}^{b_1} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

• *Espaces vectoriels normés de fonctions intégrables*

• Les fonctions continues et intégrables de I dans $\mathbb{K}$ constituent un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Cet espace vectoriel est muni de la norme $\| \quad \|_1$, dite de la convergence en moyenne et définie par $\|f\|_1 = \int_I |f|$.

• Le produit de deux fonctions de carré intégrable sur I est intégrable sur I.

L'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$, de carré intégrable sur I, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

Cet espace vectoriel E est muni du produit scalaire $< f|g >= \int_I \overline{f} g$.

La norme définie par ce produit scalaire est appelée *norme de la convergence en moyenne* :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2}.$$

Si f et g sont deux fonctions de E :

$$|< f|g >| \leqslant \|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2\,\|g\|_2\,.$$

FONCTIONS DÉFINIES PAR L'INTÉGRALE SUR UN INTERVALLE D'UNE FONCTION INTÉGRABLE SUR CET INTERVALLE

I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, A une partie de $\mathbb{R}^n$.

• Continuité

Soit $f : ((x,t) \mapsto f(x,t))$ une fonction de $A \times J$ dans $\mathbb{K}$. Si :

– f est continue par rapport à la première variable x ;

– f est continue par morceaux par rapport à la deuxième variable t ;

– il existe φ dans $\mathfrak{I}(J, \mathbb{R}^+)$ telle que $\forall (x,t) \in A \times J \quad |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ *(hypothèse de domination).*

Alors :

– pour tout x de A, la fonction $(t \mapsto f(x,t))$ est intégrable sur J,

– la fonction F, définie sur A par $F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$, est continue sur A.

Remarques

• *Les hypothèses de continuité sont vérifiées en particulier lorsque f est continue sur $A \times J$.*

• *Lorsque A et J sont deux segments de $\mathbb{R}$, l'hypothèse de domination est toujours vérifiée.* $\left(\varphi(t) = \sup\limits_{x \in I, t \in J} |f(x,t)|.\right)$

• *Le théorème s'applique aussi si l'hypothèse de domination est vérifiée seulement sur tout compact de A.*

• *Lorsque J est un segment de $\mathbb{R}$, les deux remarques précédentes permettent de dire que l'hypothèse de domination est toujours vérifiée.*

• Dérivabilité

Soit $f : ((x,t) \mapsto f(x,t))$ une fonction de $I \times J$ dans $\mathbb{K}$. Si :

– pour tout x de I, la fonction $(t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J ;

– f admet une dérivée partielle par rapport à la première composante, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$;

– cette dérivée partielle est continue par rapport à la première variable x et continue par morceaux par rapport à la seconde, t ;

– il existe φ dans $\mathfrak{I}(J, \mathbb{R}^+)$, telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t) \quad \left(\textit{hypothèse de domination de } \frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_J f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et :

$$F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarques

• *Les hypothèses de continuité sont vérifiées en particulier lorsque f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont continues sur $I \times J$.*

• *Lorsque I et J sont deux segments de $\mathbb{R}$, l'hypothèse de domination est toujours vérifiée.* $\left(\varphi(t) = \sup\limits_{x \in I, t \in J} \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|.\right)$

• *Le théorème s'applique aussi si l'hypothèse de domination est vérifiée seulement sur tout segment de I.*

• *Lorsque J est un segment de $\mathbb{R}$, les deux remarques précédentes permettent de dire que l'hypothèse de domination est toujours vérifiée.*

INTÉGRALES DOUBLES SUR UN PRODUIT D'INTERVALLES

• Intégrale double sur un produit cartésien de deux segments

Théorème de Fubini

Soit f une application continue sur $[a,b] \times [c,d]$ à valeurs complexes, alors :

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

Cette valeur commune est l'intégrale double :

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

• Intégrale double sur un produit cartésien de deux intervalles

Une fonction f continue, réelle positive sur un produit $I \times I'$ de deux intervalles est intégrable sur $I \times I'$ s'il existe un réel positif M tel que, pour tout segment J contenu dans I et tout segment J' contenu dans I' :

$$\iint_{J\times J'} f \leq M.$$

On pose :

$$\iint_{I\times I'} f = \sup_{J,J'} \iint_{J\times J'} f.$$

Une fonction f continue à valeurs complexes sur un produit $I \times I'$ de deux intervalles est intégrable sur $I \times I'$ si $|f|$ l'est.

• Intégrale double sur un compact simple

Une partie élémentaire de $\mathbb{R}^2$ est une partie A de $\mathbb{R}^2$ pouvant se définir des deux manières suivantes :

Il existe un segment $[a,b]$ et deux fonctions continues f_1 et f_2 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f_1 < f_2 \text{ sur }]a,b[\quad \text{et} \quad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ a \leq x \leq b \text{ et } f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\right\}.$$

Et il existe un segment $[c,d]$ et deux fonctions continues g_1 et g_2 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$g_1 < g_2 \text{ sur }]c,d[\quad \text{et} \quad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ c \leq y \leq d \text{ et } g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\right\}.$$

Une partie simple est une réunion finie de parties élémentaires dont les intérieurs sont deux à deux disjoints.

Soit A une partie simple de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction réelle ou complexe continue sur A. On note $\hat{f}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall x \in A \quad \hat{f}(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \forall x \notin A \quad \hat{f}(x) = 0.$$

Alors les intégrales $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ ont un sens et prennent la même valeur. Cette valeur est appelée l'intégrale double de f sur A et notée : $\displaystyle\iint_A f$.

• ***Comment montrer qu'une fonction est intégrale et calculer son intégrale***

• Une fonction réelle ou complexe f, continue sur un produit $I \times I'$ de deux intervalles, est intégrable sur $I \times I'$ si, et seulement s'il existe une suite croissante de compacts simples $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réunion $I \times I'$ sur lesquels f est intégrable et tels que la suite $\left(\int_{A_n} |f|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Dans ce cas :

$$\iint_{I\times I'} f = \lim \iint_{A_n} f.$$

• Soit f une fonction réelle ou complexe, continue sur un produit $I \times I'$ de deux intervalles. On suppose qu'il existe une fonction positive F intégrable sur $I \times I'$ telle que :

$$\forall (x, y) \in I \times I' \quad |f(x, y)| \leqslant F(x, y).$$

Alors f est intégrable sur $I \times I'$.

• Soit f une fonction réelle ou complexe, continue sur un produit $I \times I'$ de deux intervalles. On suppose que :

– pour tout x de I, la fonction $y \longmapsto f(x, y)$ est intégrable sur I' ;

– la fonction $x \longmapsto \int_{I'} |f(x, y)|\mathrm{d}y$ est intégrable sur I.

Alors f est intégrable sur $I \times I'$ et :

$$\iint_{I\times I'} f = \int_I \left(\int_{I'} f(x, y)\mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x.$$

• *Utilisation des coordonnées polaires*

Une fonction f continue sur $(\mathbb{R}^+)^2$ est intégrable sur $(\mathbb{R}^+)^2$ si, et seulement si, la fonction $(r, \theta) \longmapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)r$ est intégrable sur $[0, +\infty[\times[0, \dfrac{\pi}{2}]$.

Dans ce cas :

$$\iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} f = \iint_{[0,+\infty[\times[0,\frac{\pi}{2}]} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$

ÉNONCÉS

1 Pour s'entraîner... avec la dérivation

1 f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 0, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Étudier la suite :

$$u_n = f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{2n}\right).$$

2 Soit P le polynôme réel défini par :

$$P(X) = (X^2+1)^n \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}X^{n-1}}\left[\frac{X - \text{cotan}\varphi}{X^2+1}\right].$$

a) Montrer que P est de degré n.

b) Déterminer les racines de P.

3 On pose $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et D l'application de E dans E, définie par : $D(f) = f'$.

Existe-t-il T dans $\mathcal{L}(E)$ tel que : $T \circ T = D$?

4 Les matrices A, B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

f est la fonction $(t \mapsto \text{Det}(A + tB))$.

Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$. Et donner $f'(0)$.

Conseils

1) Écrire un développement limité de f au voisinage de 0.

2) a) Récurrence classique.

b) Décomposer dans $\mathbb{C}[X]$, la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{X - \cot\varphi}{X^2+1}$ en éléments simples, puis la dériver ...

3) Supposer que T existe. Que dire de Ker T, Ker T^2 ?

4) Revoir le cours sur les déterminants. f est une fonction polynôme...

2 Polynômes

D'après ESIEE, Amiens.

Notons $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions polynômes, $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n ($n \in \mathbb{N}^*$).

On considère également, pour n entier, les fonctions polynômes :

$$U_0(x) = P_0(x) = 1\,; \quad \forall n \geqslant 1 \quad U_n(x) = (x^2-1)^n\,;$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n U_n}{\mathrm{d}x^n}(x).$$

1 Soit L_n l'application définie sur $\mathcal{P}_n$ par :

$$L_n(P) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((x^2-1)\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}\right).$$

a) Montrer que L_n est un endomorphisme de $\mathcal{P}_n$.

b) Donner la matrice M_n de L_n dans la base canonique de $\mathcal{P}_n$.

c) Montrer que L_n est diagonalisable.

2 Montrer que :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (x-1)^{n-k}(x+1)^k.$$

En déduire $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

3 Calculer directement P_1, P_2, P_3.

4 **a)** Vérifier les relations :

$$U'_{n+1}(x) - 2(n+1)xU_n(x) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

$$(x^2-1)U'_n(x) - 2nxU_n(x) = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

b) En dérivant $n+1$ fois **(1)** et **(2)**, montrer que la suite (P_n) vérifie :

$$P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x) \qquad \textbf{(3)}$$

$$L_n(P_n) = n(n+1)P_n. \qquad \textbf{(4)}$$

5 Montrer que, pour $n \geqslant 1$, P_n est exactement de degré n et calculer le coefficient a_n de x^n dans P_n.

6 Montrer que les polynômes $P_0, \cdots, P_n$ forment une base de $\mathcal{P}_n$.

Conseils

2) Utiliser la formule de Leibniz pour calculer $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x-1)^n(x+1)^n\right)$.

4) b) Dériver $n+1$ fois les relations **(1)** et **(2)**.

3 Pour s'entraîner... avec l'intégration

1 Limite de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n^2-k^2}.$$

2 Étude de la suite $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k}$.

3 La fonction f est de classe $\mathcal{C}^3$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Donner un équivalent de $\int_0^1 f - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

4 Pour tout x dans $[0,1[$ écrit avec son développement décimal propre $x = 0, a_1a_2a_3\cdots$, on note : $f(x) = 0, a_2a_1a_3\cdots$. Et on prend $f(1) = 1$.

a) Étudier la continuité de f.

b) Calculer $\int_0^1 f$.

5 **a)** f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, T-périodique.

Montrer que, pour tout réel u, il existe x dans $[0,T]$ tel que $f(x+u) - f(x) = 0$.

b) En déduire que, pour tout réel $d \leqslant 20\,000$ km, il existe toujours deux points de la Terre distants géodésiquement de d et à même température.

6 Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\Pi_{k=1}^n \sqrt{1+\frac{k}{n}}\right)^{\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})}$.

7 La fonction f est continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b |f|^n\right)^{\frac{1}{n}} = \|f\|_\infty .$$

8 Nature de la série de terme général :

$$u_n = \ln\left(\frac{n-1+\sqrt{2n^2+2}}{n+1}\right) + \ln\left(\frac{n+1+\sqrt{2n^2+2}}{n-1}\right) - \ln\left(3+2\sqrt{2}\right).$$

Conseils

1) Sommes de Riemann...

2) Encadrer $\frac{1}{k}$ avec des intégrales...

3) Écrire la différence :

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left[f(u) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\mathrm{d}u,$$

puis appliquer une formule de Taylor à une primitive F de f sur $[0,1]$.

4) Calculer $f(x) - x$ en utilisant la partie entière.

5) a) On sait que : $\int_u^{u+T} f = \int_0^T f$.

6) Prendre ln $\left(\Pi_{k=1}^n \sqrt{1+\frac{k}{n}}\right)^{\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})}$

La fonction sin est périodique et une somme de Riemann est aussi cachée ici...

7) f est continue sur un segment, donc ...
Se placer sur un intervalle sur lequel $|f| \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon$, où ε est un réel strictement positif fixé et intégrer..

4 Le théorème de Fubini...

1 Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}y}{1+y\cos(x)}\,\mathrm{d}x$.

2 Montrer ensuite que :

$$I = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k(x)\,\mathrm{d}x.$$

Conseils

1) Ne pas oublier de justifier l'application du théorème de Fubini.

2) Écrire $\frac{1}{1+y\cos(x)}$ en faisant intervenir la somme des N premiers termes d'une série géométrique.

5* Une équation intégrale

On se propose de résoudre le problème suivant. g est une fonction continue sur l'intervalle $[0,1]$ telle que :

$$g(1) = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x,$$

et on cherche les fonctions f continues sur $[0,+\infty[$ telles que les deux conditions suivantes soient réalisées

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = g(x) \qquad \textbf{(1)}$$

$$\forall x \geqslant 1, \quad f(x) = \int_{x-1}^x f(y)\,\mathrm{d}y \qquad \textbf{(2)}$$

1 Soit f_1 et f_2 deux solutions du problème et $h = f_1 - f_2$.

a) Montrer que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1,+\infty[$. Que peut-on dire en 1 ?

b) Déterminer une équation différentielle vérifiée par h sur $]1,2]$ et en déduire que h est nulle sur cet intervalle.

c) Prouver que h est nulle sur $\mathbb{R}^+$. Quelle conclusion peut-on en tirer ?

2 ▬ **a)** Montrer que les conditions :

$$\forall x \in [0,1], \quad g_0(x) = g(x)$$

$$\forall n \geqslant 1, \quad \begin{cases} g_n(0) = g_{n-1}(1) \\ \forall x \in [0,1], \quad g_n'(x) - g_n(x) = -g_{n-1}(x) \end{cases}$$

définissent une suite de fonctions $(g_n)_{n\geqslant 1}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0,1]$ et expliciter g_n à l'aide de g_{n-1}.

b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$g_n(1) - g_n(0) = \int_0^1 \big(g_n(y) - g_{n-1}(y)\big)\,\mathrm{d}\,y.$$

et en déduire que pour tout $n \geqslant 0$, $g_n(1) = \displaystyle\int_0^1 g_n(y)\,\mathrm{d}y$.

c) Vérifier que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $x \in [0,1]$,

$$g_n(x) = \int_0^x g_n(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^1 g_{n-1}(y)\,\mathrm{d}y.$$

d) On définit maintenant la fonction F sur $[0,+\infty[$ de la manière suivante : pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout $x \in [n, n+1[$:

$$F(x) = g_n(x-n)$$

Montrer que F est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que pour tout $x \geqslant 1$:

$$F(x) = \int_{x-1}^x F(y)\,\mathrm{d}y.$$

Conseils

1) b) Prendre la limite en 1 pour obtenir la valeur de la constante qui apparaît dans la résolution.
c) Mettre en place une récurrence à partir de la question précédente.
2) a) Procéder par récurrence.
c) À x fixé, intégrer la relation $g_n' = g_n - g_{n-1}$ entre 0 et x.
d) Regarder la limite de F à droite et gauche aux points entiers (les seuls qui posent problème) pour obtenir la continuité de F.
Utiliser la relation de **2) c)** pour exprimer $F(x) = g_n(x-n)$.

6 Pour s'entraîner... avec les fonctions intégrables

1 ▬ Nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n^a}\int_0^n \frac{\operatorname{Arctan} x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}\,x.$$

2 ▬ On note f une fonction continue, positive, décroissante et intégrable sur l'intervalle $]0,1]$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\,x = \lim_{x\mapsto 0+} \sum_{1\leqslant n\leqslant \frac{1}{x}} x f(nx).$$

3 ▬ Montrer que la fonction H définie par :

$$H(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^x - 1}\,\mathrm{d}\,x$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée sous forme intégrale.

Conseils

1) Calculer l'intégrale, après avoir justifié son existence en faisant une intégration par parties.
2) Fixer $0 < x < \dfrac{1}{2}$ et prendre $N = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
Il ne reste plus qu'à encadrer $\displaystyle\int_{kx}^{(k+1)x} f(t)\,\mathrm{d}\,t$....
3) Théorème de cours... Reprendre une à une toutes les étapes sans en négliger aucune.
Patience et longueur de temps font plus que force, ni que rage !

7 Transformée de Laplace et convolution

D'après Icare et Air.

On considère E l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante :

f est d'ordre exponentiel à l'infini, c'est-à-dire : $\forall \alpha > 0 \quad \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x} f(x) = 0$.

1 ▬ Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

2 ▬ Pour f dans E, on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}\,t$.

a) Montrer que, pour tout réel strictement positif, l'application $(t \longmapsto \mathrm{e}^{-tx} f(t))$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

b) Soit L l'application de E dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$, définie par $L(f) = F$.

Montrer que L est une application linéaire.

3 ▬ Soit f, g et h les applications définies sur $\mathbb{R}^+$ par :
$\forall n \geqslant 1 \;\; f(x) = x^n$; $g(x) = \sin(x)$; $h(x) = |\sin(\pi x)|$.
Calculer $L(f), L(g)$ et $L(h)$.

4 ▬ f et g étant deux éléments de E, pour x réel positif fixé, on définit $(f \star g)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}\,t$.

a) Montrer que, pour tous f et g dans E, la fonction $f \star g$ est dans E.

b) Montrer que $L(f \star g) = L(f) \times L(g)$.

5 ▬ On considère la fonction J_0 de Bessel définie sur $\mathbb{R}^+$ par $J_0(x) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x \sin t)\,\mathrm{d}\,t$.

a) Montrer que J_0 est dans E.

b) Écrire J_0 sous la forme : $J_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

c) Exprimer $L(J_0)$ sous forme de la somme d'une série. $\left(\text{On pourra utiliser } \int_0^{\pi} (\sin t)^{2n}\,\mathrm{d}t = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\pi.\right)$

d) Donner un développement en série de $\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-1/2}$. En déduire $L(J_0)$.

6 **a)** Calculer $L(J_0 \star J_0)$.

b) En admettant que :

$\forall (f,g) \in E^2 \quad L(f) = L(g) \Longrightarrow f = g,$

en déduire $J_0 \star J_0$.

Conseils

2) a) Utiliser $\mathrm{e}^{-tx} = \mathrm{e}^{-t\frac{x}{2}}\mathrm{e}^{-t\frac{x}{2}}$.

3) En intégrant de 0 à n, faire apparaître les sommes partielles d'une série.

4) b) Pas simple... Écrire $L(f \star g)$ sous la forme d'une limite d'intégrales de 0 à n.

Identifier (avec un schéma !) le domaine du plan sur lequel intégrer et appliquer soigneusement le théorème de Fubini.

Un petit coup de convergence dominée pour conclure...

5) a) Le plus simple possible...

b) Utiliser un développement en série entière de $(x \longmapsto \cos(x \sin t))$.

c) Comment permuter une intégrale et une somme lorsque les fonctions sont continues sur $[0, \pi]$?

8 Intégrabilité et convergence de séries

1 Soit f une fonction définie et continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de réels positifs de limite infinie. On note :

$$I_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer qu'il est équivalent de dire que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que $\sum (I_n)$ est une série convergente.

2 Soit λ un réel strictement positif. Calculer :

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\lambda \sin^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

En déduire, pour $k \in \mathbb{N}$ et $\alpha, \beta > 0$, un encadrement de :

$$J_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{t^{\alpha}}{1+t^{\beta}\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

En déduire pour quelles valeurs des réels $\alpha, \beta > 0$ la fonction $\left(t \mapsto \frac{t^{\alpha}}{1+t^{\beta}\sin^2(t)}\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

3 On considère la fonction :

$$f \;:\; x \mapsto x.\exp(-x^6 \sin^2(x)).$$

a) Montrer que $\left(x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}\right)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. On note :

$$J = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

b) Montrer que :

$$\forall u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \frac{2u}{\pi} \leqslant \sin(u).$$

c) Montrer que f est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Conseils

1) Traduire l'intégrabilité en terme de majoration.

2) Pour le calcul de la première intégrale, essayer de poser $t = \tan(x)$. Pour J_k, se ramener à $[0, \pi]$ et encadrer grossièrement.

3) b) Penser à la convexité.

c) Introduire $u_n = n\pi + \pi/2$. Plus précisément, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, trouver une majoration du type

$$\int_{n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant c_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-d_n u^2}\,\mathrm{d}u.$$

9* Une suite de fonctions

1 Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour $x \in [0, +\infty[$, la fonction $\left(t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n\right)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. On définit alors sur $\mathbb{R}^+$ la fonction f_n par la formule :

$$f_n(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Étudier la continuité de f_n.

2 Montrer que, pour tout x dans $]0, +\infty[$, la fonction $(t \mapsto \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin(t)}{t})$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On définit alors la fonction f_1 sur $]0, +\infty[$ par la formule :

$$f_1(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Étudier la continuité de f_1.

3 Pour $n \geqslant 1$ et $x > 0$, établir l'inégalité : $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{x}$. En déduire la limite de $f_n(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4 Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par la formule :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u_k(x) = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-xt}\,\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

a) Établir l'encadrement :

$$\forall k \geqslant 1\ \forall x \in [0,+\infty[,\ \frac{2\mathrm{e}^{-(k+1)\pi x}}{(k+1)\pi} \leqslant |u_k(x)| \leqslant \frac{2\mathrm{e}^{-k\pi x}}{k\pi}.$$

b) Montrer que la série de fonctions $\sum u_k$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la série $\sum |u_k|$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$, sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et, pour $a > 0$, sur l'intervalle $[a,+\infty[$.

c) Déduire de ce qui précède que la fonction f_1 définie à la question **2)** admet un prolongement par continuité en $x = 0$. On continuera à nommer f_1 la fonction ainsi prolongée.

5 Pour quelles valeurs du réel α, la fonction $(t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha})$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?

6 Montrer que, pour $n \geqslant 1$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, et que l'on a, pour $k \geqslant 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n^{(k)} = 0$.

7 **a)** Trouver une expression simple de f_1' sur $]0,+\infty[$.

Expliciter alors f_1 sur $[0,+\infty[$. Donner la valeur de la somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

b) Calculer f_2''. En déduire une expression explicite de f_2 sur $[0,+\infty[$.

c) Exprimer f_3'' au moyen de la fonction f_1.

Conseils

1) Trouver une fonction dominant la fonction sous l'intégrale indépendante de $x \geqslant 0$.
2) Pour tout $a > 0$, trouver une fonction dominant la fonction sous l'intégrale indépendante de $x \geqslant a$.
4) a) Commencer par justifier que :

$$|u_k(x)| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-xt}\,\frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Encadrer alors la fonction sous l'intégrale.
b) Pour la convergence uniforme de $\sum(u_k)$, majorer (uniformément) le reste en utilisant le critère spécial des séries alternées.
c) Utiliser la question précédente pour obtenir une propriété de la somme de la série $\sum(u_n)$. Relier à f_1.
5) Le cas $\alpha > 1$ est simple ; déduire le cas $\alpha = 1$ de l'étude de $\sum |u_n(0)|$; déduire alors le cas $\alpha < 1$.
6) Pour la limite de $f_n^{(k)}$, on peut, par exemple, majorer grossièrement $|f_n^{(k)}(x)|$ (se débarrasser du sinus) puis poser le changement de variable $u = xt$.
7) a) $f_1'(x)$ se calcule avec des intégrations par parties ou en interprétant $f_1'(x)$ comme une partie imaginaire. En primitivant, on obtient f_1 a une constante près à déterminer.
b) Même tactique ! Ne pas se décourager pas devant les calculs. En particulier, calculer toutes les primitives de fractions rationnelles (par décomposition en éléments simples).

10 Comparaison à une intégrale de Riemann au voisinage de l'infini

1 Soit f une fonction continue sur $(\mathbb{R}^+)^2$.

a) On suppose qu'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que la fonction :

$$(x,y) \longmapsto (x^2+y^2)^\alpha f(x,y)$$

soit bornée au voisinage de l'infini. Montrer que f est intégrable sur $(\mathbb{R}^+)^2$.

b) On suppose qu'il existe un réel $\alpha \leqslant 1$ et un réel $k > 0$ tels que :

$$(x^2+y^2)^\alpha |f(x,y)| \geqslant k$$

au voisinage de l'infini.

Montrer que f n'est pas intégrable sur $(\mathbb{R}^+)^2$.

2 **a)** Montrer que l'application :

$$(x,y) \longmapsto \frac{1}{(x+y+1)^\alpha}$$

est intégrable sur $(\mathbb{R}^+)^2$ si, et seulement si : $\alpha > 2$.

Calculer son intégrale pour $\alpha > 2$.

b) Existence et calcul de :

$$\iint_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^\alpha}.$$

Conseil

Utiliser les coordonnées polaires.

11 Où l'on intègre successivement suivant chacune des variables

Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{+*2} ; x + y < 1\}$.

1 Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{12}$.

2 En déduire $\displaystyle\iint_A \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+1)^2 - y^2}$.

Conseils

1) Utiliser le théorème d'intégration terme à terme.
2) Travailler sur une suite croissante de compacts, puis se ramener à une intégrale simple à laquelle on applique le théorème de convergence dominée.

12 Comparaison avec une série double

Soit f une fonction positive, continue sur $\mathbb{R}^{+2}$ dont les applications partielles sont décroissantes.

1 Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+2}$ si, et seulement si, la suite $\displaystyle\left(\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} f(p,q)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

2 En déduire la nature des séries doubles :

- $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(p^2+q^2+1)^\alpha}$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}$,
$\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha}$, $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}$;
- $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(ap+bq)^\alpha}$, où a et b sont deux nombres complexes non nuls dont le rapport n'est pas réel.

Conseil

Travailler sur les pavés $[0, n]^2$.

13 Comparaison à une somme de Riemann au voisinage de O

Soit f une fonction complexe, continue sur l'ensemble :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < y^2 + y^2 \leqslant R\}.$$

1 On suppose qu'il existe un réel $\alpha < 1$ tel que la fonction :

$$(x, y) \longmapsto (x^2 + y^2)^\alpha f(x, y)$$

soit bornée au voisinage de l'origine.

Montrer que f est intégrable sur D.

2 On suppose qu'il existe un réel $\alpha \geqslant 1$ et un réel $k > 0$ tels que :

$$(x^2 + y^2)^\alpha |f(x, y)| \geqslant k$$

au voisinage de l'origine.

Montrer que f n'est pas intégrables sur D.

Conseil

Utiliser les coordonnées polaires.

14 Où une intégrale double permet le calcul d'une intégrale simple

Soit f la fonction $(x, y) \longmapsto y\exp(-(x^2+1)y^2)\cos(2ax)$ où a est un réel fixé.

1 Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+2}$ et que :

$$\iint_{\mathbb{R}^{+2}} f = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2ax)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

2 Montrer que l'application F :

$$z \longmapsto \int_0^{+\infty} \exp(-t^2)\cos(zt)\,\mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$.

En déduire :

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad F(z) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right).$$

3 Soit G l'application :

$$z \longmapsto \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^{+\infty} \exp(-t^2 - \frac{z^2}{t^2})\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. En déduire :

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad G(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-2|z|).$$

4 Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2ax)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

Conseils

1) Intégrer d'abord par rapport à y puis par rapport à x.
2) et **3)** N'oubliez pas les hypothèses de domination.

Algorithmes

1 Une forme linéaire sur l'espace des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n

D'après, X.ESPCI, PC.

Partie mathématique

On fixe un entier n dans $\mathbb{N}$ et on désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n. On considère la forme linéaire L sur E définie par :

$$\forall P \in E \quad L(P) = \int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x.$$

1 Déterminer l'image par L de la fonction polynomiale P telle que $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$.

Déterminer la dimension du noyau de L, puis une base de ce noyau.

2 On considère des nombres réels $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ tels que :

$$-1 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n \leqslant 1.$$

a) Montrer que, pour tout i , $0 \leqslant i \leqslant n$, il existe une fonction polynomiale P_i dans E telle que :

$$P_i(x_i) = 1 \quad \text{et} \quad P_i(x_j) = 0 \quad \text{pour} \quad j \neq i.$$

b) Montrer qu'il existe une unique famille de nombres réels $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ telle que :

$$\forall P \in E \quad L(P) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

3 On suppose que, pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n$, $x_{n-i} = -x_i$. Montrer que $\lambda_{n-i} = \lambda_i$.

En déduire que, si n est pair, toute fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à $n+1$ vérifie :

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

4 Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$.

a) On pose $M_{n+1} = \sup_{x \in [-1,1]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$.

Déterminer des réels positifs α et β tels que :

$$\left| \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i) \right| \leqslant M_{n+1} \left(\alpha + \beta \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i| \right)$$

où les $(\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sont les nombres réels déterminés à la question **2)** .

b) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur l'intervalle $[-1, 1]$, que n est pair et que les points $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sont choisis tels que :

$$x_{n-i} = -x_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Modifier la majoration précédente en utilisant $M_{n+2} = \sup_{x \in [-1,1]} \left| f^{(n+2)}(x) \right|$.

Partie informatique

5 On suppose que n est pair et que les points $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ sont choisis tels que :

$$x_{n-i} = -x_i, \quad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Écrire un programme qui calcule une valeur approchée de $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Le tester en prenant $n = 4$.

Conseils

1) Utiliser le cours sur les formes linéaires.
2) a) Ne pas oublier les polynômes de Lagrange.
b) Pour l'unicité, de même que pour l'existence, utiliser les fonctions P_i.
3) Montrer que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i^{n+1} = 0$.
4) a) Utiliser la question **2)** et l'inégalité de Taylor-Lagrange.
Considérer une fonction polynomiale de Taylor de f en 0.

2 Polynômes de Bernoulli

Partie mathématique

A. 1 Soit f une fonction définie continue sur $[0, 1]$, à valeurs réelles. Montrer que les conditions ci-dessous définissent une unique fonction F continuement dérivable sur $[0, 1]$:

$$F' = f, \quad \int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

et exprimer F l'aide de G : $\left(x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \right)$.

2 Montrer que les conditions :

$$B_0 = 1, \quad B'_{n+1} = B_n$$

$$\text{et} \quad \int_0^1 B_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{pour tout } n \geqslant 0$$

définissent une unique suite de fonctions polynômes. Ces polynômes sont appelés polynômes de Bernoulli.

Préciser le degré de B_n et son terme de plus haut degré et expliciter les polynômes B_1, B_2, B_3 et B_4.

3 ▬ Montrer, pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$B_n(0) = B_n(1).$$

4 ▬ On définit une suite de polynômes C_n en posant, pour tout n entier naturel :

$$C_n(X) = (-1)^n B_n(1-X).$$

Montrer que la suite $(C_n)_n$ vérifie les conditions de la question **2)** définissant la suite $(B_n)_n$ et en déduire que $(C_n)_n = (B_n)_n$. Qu'en déduit-on pour les graphes des B_n et pour les valeurs, lorsque n est impair supérieur ou égal à 3, de $B_n(0)$, $B_n(1/2)$ et $B_n(1)$?

5 ▬ Montrer que les polynômes B_{2m+1} (pour $m \in \mathbb{N}$) ne s'annulent pas sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ (on pourra procéder par récurrence sur m).

En déduire que les polynômes $B_{2m}(X) - B_{2m}(0)$ sont de signe constant sur $[0, 1]$.

B.1 ▬ Montrer pour N entier naturel non nul :

$$\forall t \in]0,1[, \quad 1 + 2\sum_{k=1}^{N} \cos(2k\pi t) = \frac{\sin((2N+1)\pi t)}{\sin(\pi t)}.$$

2 ▬ Montrer que pour tout entier $n > 0$, la fonction ϕ_n ci-dessous définie sur $]0, 1[$ est prolongeable par continuité à $[0, 1]$ et que le prolongement est continûment dérivable :

$$\forall t \in]0,1[, \quad \phi_n(t) = \frac{B_n(t) - B_n(0)}{\sin(\pi t)}.$$

On exploitera le fait que 0 *et* 1 *sont racines du polynôme* $B_n - B_n(0)$.

3 ▬ Montrer que, pour toute fonction f continûment dérivable sur $[0, 1]$, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^1 f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

4 ▬ Pour k et n entiers strictement positifs, on définit :

$$I_{n,k} = \int_0^1 B_n(t)\cos(2k\pi t)\,\mathrm{d}t.$$

Trouver une relation entre $I_{n,k}$ et $I_{n-2,k}$ et en déduire selon la parité de n, l'expression de $I_{n,k}$ en fonction de n et de k.

5 ▬ En utilisant la formule établie au **B.1)**, trouver, pour $N \geqslant 1$ entier naturel, une expression de :

$$\int_0^1 \phi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)\,\mathrm{d}t$$

en fonction de m, N et $B_{2m}(0)$.

En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}$ en fonction de $m \geqslant 1$ et de $B_{2m}(0)$.

Donner les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ et de $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

6 ▬ Montrer, pour tout m entier naturel non nul, la majoration $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leqslant 2$ et en déduire la majoration $|B_{2m}(0)| \leqslant \dfrac{4}{(4\pi^2)^m}$.

Partie informatique

7 ▬ Écrire une procédure de calcul des polynômes de Bernoulli jusqu'à un degré n, sur une calculatrice.

Conseils

A.1) Que dire de deux primitives sur un intervalle ?
2) Raisonner par récurrence.
3) B_n est une primitive de B_{n_1} : en déduire une expression de $B_n(0) - B_n(1)$.
5) Dans l'étape de récurrence, on pourra raisonner par l'absurde et aboutir à une contradiction avec le théorème de Rolle.
B.1) Introduire la série géométrique de raison $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t}$.
2) Avec l'indication fournie, on peut écrire $\phi_n(t) = Q_n(t)\dfrac{t(1-t)}{\sin(\pi t)}$ où Q_n est un polynôme. Il suffit d'étudier la fraction.
3) Intégrer par parties (f est de classe $\mathcal{C}^1$).
4) Effectuer une double intégration par parties.

3* Calcul de l'exponentielle sur un ordinateur

D'après ENS, Lyon.

Au niveau « bas », un ordinateur ne sait calculer qu'un tout petit nombre de fonctions : addition, soustraction, multiplication, division, comparaisons.

Nous allons étudier des méthodes utilisées par des ordinateurs pour approcher la fonction exponentielle dans $[-1, 1]$ par un polynôme.

On supposera connue une constante $E = 2,718281828$ pour les procédures demandées.

Soit N un entier supérieur ou égal à 2. Notons $\mathcal{P}_N$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à N.

A.1 ▬ Montrer qu'il existe un unique polynôme P dans $\mathcal{P}_N$ tel que :

$$\forall Q \in \mathcal{P}_N \quad \int_{-1}^{1} (P(x)-\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{1} (Q(x)-\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Par la suite, on définira dans $\mathcal{C}[-1,1]$ le produit scalaire :

$$< f, g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

et on admettra que la famille de polynômes $(W_i)_{i\in[\![0,N]\!]}$ définie par :

$$W_0 = 1\,; \quad W_1(x) = x\,;$$

$\forall i \in [\![2, N]\!]$

$$W_i(x) = \frac{2i-1}{i} W_{i-1}(x)x - \frac{i-1}{i} W_{i-2}(x)$$

est orthogonale pour le produit scalaire.

Nous admettrons plus précisément que :

$\forall (i,j) \in [\![0,N]\!]^2$

$$\deg(W_i) = i\,; \quad < W_i, W_j >= \frac{2}{2i+1}\delta_{ij},$$

où δ_{ij} représente le *symbole de Kronecker*.

2 Écrire une procédure de calcul des polynômes W_i pour i dans $[\![0,N]\!]$.

3 Donner les coordonnées du polynôme P dans la base $(W_i)_{i\in[\![0,N]\!]}$.

4 **a)** Montrer que, pour tout $n > 0$:

$$I_n = \int_{-1}^{1} x^n \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e} - \frac{(-1)^n}{\mathrm{e}} - nI_{n-1}.$$

b) Utiliser ce résultat pour écrire une procédure qui calcule le polynôme P dans la base canonique de $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}$.

5 Écrire une procédure qui calcule $P(x)$ pour tout réel x de $[-1,1]$ en utilisant un minimum d'opérations arithmétiques.

6 Écrire une procédure qui calcule une valeur approchée de $\exp(x)$ pour tout réel x.

B. Une autre méthode basée sur la limite :

$$\lim_{p\longrightarrow+\infty} \left(1+\frac{x}{p}\right)^p = \mathrm{e}^x.$$

1 Écrire une procédure qui retourne, en fonction de x et de n, la valeur de $\left(1+\frac{x}{2^n}\right)^{2^n}$, en effectuant un nombre de multiplications qui est une fonction affine de n.

2 On définit une fonction r_n qui mesure l'erreur relative commise en approchant e^x par $\left(1+\frac{x}{2^n}\right)^{2^n}$:

$$\mathrm{e}^x = \left(1+\frac{x}{2^n}\right)^{2^n}(1+r_n(x)).$$

Donner, pour x dans $[0,1]$ et $n \geqslant 1$, un majorant de $r_n(x)$.

En déduire une procédure qui calcule l'exponentielle d'un réel x de $[0,1]$ avec une erreur $r_n(x)$ majorée par ε, où ε est un réel strictement positif quelconque.

C. Une méthode n'utilisant pas de multiplication est très utilisée par les circuits intégrés de calcul des fonctions mathématiques.

Elle n'utilise que les multiplications par une puissance de 2, car ces multiplications, sur un ordinateur représentant les nombres en base 2, se réduit à un simple décalage de chiffres vers la droite ou vers la gauche.

On pose, pour i dans $\mathbb{N}^*$, $l_i = \ln(1+2^{-i})$.

On suppose que l'on dispose d'une procédure *decale*(x,n) telle que : *decale*(x,n)=$x2^n$.

Soit N un entier supérieur ou égal à 2. On suppose également que les N premiers termes l_i sont mémorisés dans une liste de réels L (on a $L[i] = l_i$ pour i dans $[\![0, N-1]\!]$).

1 Montrer que la série $\sum l_i$ est convergente, et montrer que pour tout i : $l_{i+1} \geqslant \frac{1}{2} l_i$.

En déduire que, pour tout i : $l_i \leqslant \sum_{k=i+1}^{+\infty} l_k$.

2 En déduire que, pour tout u_0 compris entre 0 et $\sum_{i=0}^{+\infty} l_i$, la suite (u_i) définie par :

$$u_{i+1} = \begin{cases} u_i \text{ si } u_i < l_i \\ u_i - l_i \text{ si } u_i \geqslant l_i \end{cases} \quad \text{converge vers 0.}$$

3 Soit u_0 compris entre 0 et $\sum_{i=0}^{+\infty} l_i$.

Trouver la limite de la suite de terme général v_i, définie par :

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ \text{si } u_i < l_i \text{ alors } \begin{cases} u_{i+1} = u_i \\ v_{i+1} = v_i \end{cases} \\ \text{si } u_i \geqslant l_i \text{ alors } \begin{cases} u_{i+1} = u_i - l_i \\ v_{i+1} = v_i + 2^{-i} v_i \end{cases} \end{cases}.$$

4 En déduire une procédure donnant une approximation A de l'exponentielle de tout réel u_0 compris entre 0 et $\sum_{i=0}^{+\infty} l_i$. Donner un encadrement simple de $\frac{\mathrm{e}^{u_0}}{A}$.

Conseils

A. 1) Utiliser un produit scalaire et la distance associée à ce produit scalaire.
3) Utiliser la formule de projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel muni d'une base orthogonale.
4) b) N'utiliser que des opérations élémentaires...
5) Connaître l'algorithme de Horner.
6) Savoir que $e^{x+1} = e^x e$ et définir une fonction puissance...
B. 2) Calculer $r_n(x)$, poser $m = 2^n$;

$$f_m(x) = e^x \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{-m} - 1.$$

Majorer $f_m(x)$ pour tout x de $[0, 1]$ par $f_m(1)$, et continuer de majorer...
C. 2) Montrer, sans peine, que la suite (u_i) est positive et décroissante.
Supposer sa limite $l > 0$. Alors, pour i assez grand, $u_i > l_i$. Ensuite, à vous de jouer...
3) Considérer la suite :

$$i_0 < i_1 < \cdots < i_k < \cdots$$

(finie ou non) des indices i pour lesquels $u_i \geqslant l_i$ et I l'ensemble de ces indices.
Exprimer u_0 en fonction des l_k pour k dans I...

CORRIGÉS

1 Pour s'entraîner... avec la dérivation

1 La dérivabilité de f en 0 se traduit par un développement limité :

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f(0) + \frac{1}{n}f'(0) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \left\| f\left(\frac{1}{n}\right) - f(0) - \frac{1}{n}f'(0)\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{n}.$$

En sommant :

$$\forall n \geqslant N \quad \left\| u_n - (n+1)f(0) - \left(\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}\right)f'(0)\right\| \leqslant \varepsilon \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}.$$

Posons $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$ et utilisons la comparaison avec une intégrale. Nous savons que, pour tout $k \geqslant 2$:

$$\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

D'où, pour tout $n \geqslant 2$: $\displaystyle\int_n^{2n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant v_n \leqslant \int_{n-1}^{2n}\frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Puis : $\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right) \leqslant v_n \leqslant \ln\left(2+\dfrac{2}{n-1}\right)$.

La suite $(v_n)_n$ converge donc vers $\ln 2$.

Finalement :

- si $f(0) = 0$, la suite $(u_n)_n$ converge vers $\ln(2)f'(0)$;
- si $f(0) \neq 0$, la suite $(u_n)_n$ diverge.

2 **a)** Remarquons que $\mathrm{cotan}\varphi$ impose $\varphi \neq k\pi$, pour k dans $\mathbb{Z}$.

Montrons d'abord que P est un polynôme de degré n.

Effectuons une récurrence en considérant les dérivées successives de la fraction rationnelle :

$$F(X) = \frac{X - \mathrm{cotan}\varphi}{X^2+1}.$$

Pour $n = 1$: $\quad F(X) = \dfrac{P_1(X)}{(X^2+1)} = \dfrac{P(X)}{(X^2+1)}$.

Alors P est un polynôme de degré 1 et de coefficient dominant 1.

Supposons que, pour un certain $n \geqslant 1$, on ait :

$F^{(n-1)}(X) = \dfrac{P_n(X)}{(X^2+1)^n}$, avec P_n un polynôme de degré n et de coefficient dominant $(-1)^{n-1}(n-1)!$.

Alors :

$$F^{(n)}(X) = \frac{(X^2+1)P_n'(X) - 2nXP_n(X)}{(X^2+1)^{n+1}} = \frac{P_{n+1}(X)}{(X^2+1)^{n+1}},$$

avec $P_{n+1}(X) = (X^2+1)P_n'(X) - 2nXP_n(X)$.

P_{n+1} est donc un polynôme de degré inférieur ou égal à $n+1$.

Le coefficient de X^{n+1} dans P_{n+1} est :

$(-1)^{n-1}n(n-1)! - 2n(-1)^{n-1}(n-1)! = (-1)^n n!$.

b) Décomposons, dans $\mathbb{C}[X]$, la fraction rationnelle F en éléments simples :

$$F(X) = \frac{X - \mathrm{cotan}\,\varphi}{X^2+1} = \frac{1}{2\sin(\varphi)}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{2}+\varphi)}}{x+\mathrm{i}} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}-\varphi)}}{x-\mathrm{i}}\right).$$

Nous en déduisons :

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}X^{n-1}}\left[\frac{X - \mathrm{cotan}\varphi}{X^2+1}\right] = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2\sin(\varphi)}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{2}+\varphi)}}{(x+\mathrm{i})^n} + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}-\varphi)}}{(x-\mathrm{i})^n}\right).$$

Puis :

$$P(x) = 0 \iff (x-\mathrm{i})^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{2}+\varphi)} = -(x+\mathrm{i})^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}-\varphi)}.$$

Les complexes i, $-\mathrm{i}$ ne sont pas solutions.

$$P(x) = 0 \iff \frac{(x-\mathrm{i})^n}{(x+\mathrm{i})^n} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-2\varphi)} = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}.$$

L'équation complexe $z^n = \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}$ admet pour racines :

$z_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}(-\frac{\varphi}{n}+\frac{k\pi}{n})}$, avec k dans $[\![0, n-1]\!]$.

Pour tout k de $[\![0, n-1$ tel que $z_k \neq 1$, nous obtenons :

$$x_k = \mathrm{i}\frac{1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(-\frac{\varphi}{n}+\frac{k\pi}{n})}}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(-\frac{\varphi}{n}+\frac{k\pi}{n})}} = \mathrm{cotan}\left(\frac{\varphi}{n} - \frac{k\pi}{n}\right).$$

Or, $\varphi \neq k\pi$, donc $\dfrac{\varphi}{n} - \dfrac{k\pi}{n} \neq 0 \ (\mathrm{mod}\pi)$.

Le polynôme P admet donc n racines : $x_k = \mathrm{cotan}\left(\dfrac{\varphi}{n} - \dfrac{k\pi}{n}\right)$, pour k dans $[\![0, n-1]\!]$.

3 Supposons que T existe. On a alors :

$$\mathrm{Ker}\,T^2 = \mathrm{Ker}\,D\,; \quad \dim \mathrm{Ker}\,T^2 = 1.$$

Et : $\quad \mathrm{Ker}\,T \subset \mathrm{Ker}\,T^2$; $\mathrm{Ker}\,T \neq \{0\}$.

Nous en déduisons : $\mathrm{Ker}\,T = \mathrm{Ker}\,T^2$.

Puis : $\operatorname{Ker} T^4 = \operatorname{Ker} T^3 = \operatorname{Ker} T^2$.

Soit : $\operatorname{Ker} D^2 = \operatorname{Ker} D$.

Ceci est faux. T n'existe pas.

4 Nous avons établi dans le cours que l'application f est une fonction polynôme. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, en notant $c_1, c_2, \cdots, c_n$ les colonnes de A et $k_1, k_2, \cdots, k_n$ celles de B :

$$f(t) - f(0) = \operatorname{Det}(c_1 + tk_1, c_2 + tk_1, \cdots, c_n + tk_n) - \operatorname{Det}(c_1, c_2, \cdots, c_n)$$
$$= t\left(\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Det}(c_1, \cdots, k_j, c_{j+1}, \cdots, c_n)\right) + P(t),$$

où P est un polynôme de degré supérieur à 1.

Par conséquent :

$$f'(0) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Det}(c_1, \cdots, k_j, c_{j+1}, \cdots, c_n).$$

2 Polynômes

1 **a)** Soit P une fonction polynôme de $\mathcal{P}_n$. Le degré de $(x^2-1)\dfrac{\mathrm{d}\,P}{\mathrm{d}\,x}$ est inférieur ou égal à $n+1$.

Donc $L_n(P)$ est dans $\mathcal{P}_n$.

La linéarité de L_n découle de la linéarité de la dérivation.

b) Calculons $L_n(x^k)$.

$L_n(1) = 0$; $\forall k \geqslant 1$ $L_n(x^k) = k(k+1)x^k - k(k-1)x^{k-2}$.

La matrice M_n est :

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 2 & & & \\ & & \ddots & -k(k-1) & \\ & & & k(k+1) & \\ 0 & & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

c) La matrice M_n est triangulaire supérieure.

Ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux. Ils sont deux à deux distincts.

La matrice et l'endomorphisme L_n sont diagonalisables.

2 Calculons d'abord, avec la *formule de Leibniz* :

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\,x^n}\left((x-1)^n(x+1)^n\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} n(n-1)\cdots (n-k+1)(x-1)^{n-k} n(n-1)\cdots(k+1)(x+1)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(x-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}(x+1)^k$$

D'où : $$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(x-1)^{n-k}(x+1)^k.$$

Par conséquent : $P_n(1) = 1;\ P_n(-1) = (-1)^n$.

3 Allons-y... Les questions faciles permettent, en concours, de gagner des petits points....

$$P_1(x) = x\ ;\ P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)\ ;\ P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}.$$

4 **a)** Dérivons :

$(\mathbf{1})$: $U'_{n+1}(x) = \left((x^2-1)^{n+1}\right)' = (n+1)(x^2-1)^n 2x = 2(n+1)xU_n(x)$.

$(\mathbf{2})$: $(x^2-1)U'_n(x) = (x^2-1)n(x^2-1)^{n-1}2x = 2nxU_n(x)$.

b) Dérivons $n+1$ fois la relation $(\mathbf{1})$:

$$2^{n+1}(n+1)!P'_{n+1}(x) - 2(n+1)2^n n!\left(xP'_n(x) + (n+1)P_n(x)\right) = 0.$$

D'où :

$(\mathbf{3})$: $P'_{n+1}(x) = xP'_n(x) + (n+1)P_n(x)$.

Dérivons ensuite $n+1$ fois la relation $(\mathbf{2})$ et simplifions par $2^n n!$:

$$(x^2-1)P''_n(x) + (n+1)2xP'_n(x) + (n+1)nP_n(x) - 2nxP'_n(x) - 2n(n+1)P_n(x) = 0.$$

Or : $(x^2-1)P''_n(x) + 2xP'_n(x) = L_n(P_n)$

Donc : $L_n(P_n) = n(n+1)P_n(x)$.

5 Utilisons la définition de P_n. Le terme dominant de U_n est x^{2n}. Le polynôme P_n est donc de degré n et le coefficient de x^n dans P_n pour $n \geqslant 1$ est :

$$\frac{1}{2^n n!}2n(2n-1)\cdots(2n-n+1) = \frac{\binom{2n}{n}}{2^n}.$$

Nous vérifions avec la question **3)**.

6 Les polynômes $P_0, \cdots, P_n$ sont non nuls, de degrés distincts inférieurs ou égaux à n. Ils forment une base de $\mathcal{P}_n$.

3 Pour s'entraîner... avec l'intégration

1 Nous reconnaissons une *somme de Riemann* de la fonction $\left(x \mapsto \sqrt{1-x^2}\right)$, continue sur $[0,1]$.

Donc : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} u_n = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = I.$

Posons $x = \sin t$, avec t dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. $I = \frac{\pi}{4}$.

2 Par définition : $u_n = \sum\limits_{j=n^2+1}^{(n+1)^2} \frac{1}{j}$.

La fonction $\left(t \mapsto \frac{1}{t}\right)$ est continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Donc : $\quad \forall j \geqslant 1 \quad \int_j^{j+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{j} \leqslant \int_{j-1}^{j} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

Sommons les inégalités obtenues :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \int_{n^2+1}^{(n+1)^2+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant u_n \leqslant \int_{n^2}^{(n+1)^2} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Soit : $\ln\left(\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\right)$.

Donc : $$\lim_{x\longrightarrow+\infty} u_n = 0.$$

3 Notons F une primitive de f sur $[0,1]$. Alors :

$$\Delta_n = \int_0^1 f - \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[f(u) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\mathrm{d}u.$$

$$\Delta_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

Utilisons l'*inégalité de Taylor-Lagrange* appliquée à la fonction F, de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[0,1]$.

$$\left|F\left(\frac{k+1}{n}\right) - F\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}F'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}F''\left(\frac{k}{n}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{6n^3}F^{(3)}\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{24n^4} \sup_{t\in[0,1]} \left|F^{(4)}(t)\right|.$$

Notons : $M_4 = \sup\limits_{t\in[0,1]} \left|F^{(4)}(t)\right|$.

Nous obtenons :

$$\frac{1}{6n^3}\sum_{k=0}^{n-1} F^{(3)}\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{M_4}{24n^4}\frac{n(n-1)}{2}$$
$$\leqslant n\Delta_n - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}F''\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{6n^3}\sum_{k=0}^{n-1} F^{(3)}\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{M_4}{24n^4}\frac{n(n-1)}{2}$$

Or : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} F''\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 F'' = f(1) - f(0).$

Et : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{1}{6n^3}\sum\limits_{k=0}^{n-1} F^{(3)}\left(\frac{k}{n}\right) = 0.$

En déduire : $\quad \Delta_n \sim \frac{f(1)-f(0)}{n}$.

4 **a)** Calculons $f(x) - x$.

$$f(x) - x = \frac{a_2 - a_1}{10} + \frac{a_1 - a_2}{100} = \left[\mathrm{E}(100x) - 11\mathrm{E}(10x)\right]\frac{9}{100}.$$

La fonction f est donc continue par morceaux sur $[0,1]$.

Les points de discontinuité de f sont les $\frac{k}{100}$, avec k dans $[0,99]$.

b) Utilisons $f(x) - x$ pour évaluer $\int_0^1 f$.

$$\int_0^1 \mathrm{E}(100x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{99}\int_{\frac{k}{100}}^{\frac{k+1}{100}} k\,\mathrm{d}x = \frac{1}{100}\sum_{k=0}^{99} k = \frac{99}{2}$$

$$\int_0^1 \mathrm{E}(10x)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}.$$

D'où : $$\int_0^1 f = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

5 **a)** Puisque f est continue et T-périodique, nous savons que, pour tout réel u :

$$\int_u^{u+T} f = \int_0^T f = \int_0^T f(u+v)\,\mathrm{d}v.$$

D'où : $$\int_0^T (f(u+v) - f(v))\,\mathrm{d}v = 0.$$

La fonction $(v \mapsto f(u+v) - f(v))$ est continue sur $[0,T]$. Elle est donc nulle ou s'annule sur $[0,T[$.

b) Appelons f la fonction température en un point de l'équateur de la Terre.

Nous la supposons continue. Elle est périodique, de période la longueur de l'équateur.

Conclure en appliquant la question **a)**.

6 Notons : $u_n = \left(\Pi_{k=1}^n \sqrt{1+\frac{k}{n}}\right)^{\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})}$.

Alors : $v_n = \ln(u_n) = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1}\right)\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

Remarquons que :

$$\sin(2\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+1} - 2n\pi\right)$$
$$= \sin\left(2\pi\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}\right) \sim \frac{\pi}{n}.$$

Et puisque la fonction ln est continue sur $[1,2]$:

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_1^2\ln(t)\,\mathrm{d}t=2\ln 2-1.$$

D'où : $\displaystyle\lim_{n\longrightarrow+\infty}v_n=\pi\ln\frac{4}{\mathrm{e}}$.

La fonction exp est continue sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}u_n=\left(\frac{4}{\mathrm{e}}\right)^{\pi}.$$

7 ▬ La fonction f est continue sur un segment, donc bornée et atteint ses bornes.

Notons $M=\|f\|_\infty=f(c)$, avec c dans $[a,b]$.

Supposons c dans $]a,b[$ pour simplifier la rédaction et fixons $\varepsilon>0$.

Puisque f est continue, il existe $\alpha>0$ tel que :

$$\forall x\in]c-\alpha,c+\alpha[\quad |f(x)|\geqslant M-\varepsilon.$$

D'où :

$$\int_a^b|f(x)|^n\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{c-\alpha}^{c+\alpha}|f(x)|^n\,\mathrm{d}x\geqslant 2\alpha(M-\varepsilon)^n.$$

Nous en déduisons :

$$\left(\int_a^b|f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\geqslant(M-\varepsilon)(2\alpha)^{\frac{1}{n}}.$$

Or, $(2\alpha)^{\frac{1}{n}}$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.

Au-delà d'un certain rang, on a donc :

$$\left(\int_a^b|f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\geqslant(M-2\varepsilon).$$

De plus :

$$\left(\int_a^b|f(x)|^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant\left(\int_a^b M^n\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant M(b-a)^{\frac{1}{n}}.$$

Puisque $(b-a)^{\frac{1}{n}}$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, nous pouvons conclure :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\int_a^b|f|^n\right)^{\frac{1}{n}}=\|f\|_\infty.$$

Raisonner de manière analogue si c est en a ou en b.

8 ▬ Nous pouvons écrire :

$$u_n=\ln\left(\frac{n-1+\sqrt{2n^2+2}}{n+1}\right)+\ln\left(\frac{n+1+\sqrt{2n^2+2}}{n-1}\right)-\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$$

$$u_n=\ln\left(1-\frac{2}{n+1}+\sqrt{2+2\frac{-2}{n+1}+\frac{4}{(n+1)^2}}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n-1}+\sqrt{2+2\frac{2}{n-1}+\frac{4}{(n-1)^2}}\right)-\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, u_n tend vers :

$$2\ln(1+\sqrt{2})-\ln(3+2\sqrt{2})=0.$$

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\ln(1+x+\sqrt{2+2x+x^2}).$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc un développement limité à tout ordre au voisinage de 0. Nous obtiendrons ce développement limité en intégrant un développement limité de $f'(x)$.

$$\begin{aligned}f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)^{-1/2}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{2}x+o(x)\right).\end{aligned}$$

D'où : $f(x)=\ln(1+\sqrt{2})+\dfrac{x}{\sqrt{2}}-\dfrac{x^2}{4\sqrt{2}}+o(x^2)$.

Nous en déduisons :

$$u_n=-\frac{2}{\sqrt{2}(n+1)}+\frac{2}{\sqrt{2}(n-1)}-\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)^2}-\frac{1}{\sqrt{2}(n-1)^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$u_n=-\sqrt{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)-\sqrt{2}\left(-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}n^2}-\frac{1}{\sqrt{2}n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$u_n=\frac{\sqrt{2}}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum u_n$ converge.

4 Le théorème de Fubini...

1 ▬ La fonction $\left((x,y)\mapsto\dfrac{1}{1+y\cos(x)}\right)$ est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\times[0,1]$.

D'après le théorème de Fubini : $I=\displaystyle\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+y\cos(x)}\,\mathrm{d}y$.

Calculons $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{1+y\cos(x)}$ en posant $u=\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

• Si $y \neq 1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+y\cos(x)} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2(1-y)+(1+y)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\left[\operatorname{Arctan}\left(u\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\right).$$

• Si $y = 1$: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos(x)} = \int_0^1 \mathrm{d}u = 1.$

D'où, en considérant que la fonction obtenue est prolongée par continuité en 1 :

$$I = \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-y^2}}\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\right)\mathrm{d}y$$

$$= \left[-2\operatorname{Arctan}^2\left(\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\right)\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{8}.$$

2 ▬ Pour tout $(y,x))$ dans $[0,1] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $N > 0$:

$$\frac{1}{1+y\cos(x)} = \sum_{k=0}^{N}(-y\cos(x))^k + \frac{(-y\cos(x))^{N+1}}{1+y\cos(x)}.$$

Donc :

$$I = \sum_{k=0}^{N}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 (-y\cos(x))^k\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 \frac{(-y\cos(x))^{N+1}}{1+y\cos(x)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=0}^{N}\frac{(-1)^k}{k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k(x)\,\mathrm{d}x + R_N.$$

Et : $\displaystyle |R_N| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 y^{N+1}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2(N+1)}.$

D'où : $\displaystyle I = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^k(x)\,\mathrm{d}x.$

5 Une équation intégrale

1 ▬ h est nulle sur $[0,1]$, continue sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie :

$$\forall x \geqslant 1, \quad h(x) = \int_{x-1}^{x} h(y)\,\mathrm{d}y.$$

a) La continuité de h sur $\mathbb{R}^+$ nous donne le caractère $\mathcal{C}^1$ de $\left(x \mapsto \displaystyle\int_{x-1}^{x} h(y)\,\mathrm{d}y\right)$ sur $[1,+\infty[$.

h est dérivable en tout point de $]1,+\infty[$ (avec continuité de la dérivée) et dérivable à droite en 1 avec :

$$\forall x > 1, \quad h'(x) = h(x) - h(x-1)$$

h est nulle sur $[0,1]$ et est donc dérivable à gauche en 1. Les dérivées à droite et gauches sont égales. h est dérivable en 1 avec $h'(1) = 0$.

b) D'après ce qui précède :

$$\forall x \in]1,2], \quad h'(x) - h(x) = 0.$$

Il existe donc une constante c telle que $\forall x \in]1,2]$, $h(x) = c\mathrm{e}^x$. h est continue et nulle en 1. Quand x tend vers 1, on obtient $c = 0$. h est donc nulle sur $]1,2]$.

c) On montre alors par récurrence que, pour tout entier n, h est nulle sur $[n, n+1]$. On en déduit que le problème posé possède au plus une solution.

2 ▬ **a)** Prouvons par récurrence sur $n \geqslant 1$ que g_n est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

• $\begin{cases} y(0) = g(1) \\ \forall x \in [0,1],\ y'(x) - y(x) = -g(x) \end{cases}$

est un *problème de Cauchy* lié à une équation différentielle linéaire d'ordre 1, sous forme résolue, et g est continue. Il existe une unique solution, g_1.

On peut la préciser puisque l'on sait que la solution générale de l'équation sur $[0,1]$ est :

$$x \mapsto \mathrm{e}^x\left(c - \int_0^x \mathrm{e}^{-t}g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

La condition $g_1(0) = g(1)$ donne la constante c et on obtient :

$$\forall x \in [0,1], \quad g_1(x) = \mathrm{e}^x\left(g(1) - \int_0^x \mathrm{e}^{-t}g(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Supposons g_{n-1} bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$;

$\begin{cases} y(0) = g_{n-1}(1) \\ \forall x \in [0,1], y'(x) - y(x) = -g_{n-1}(x) \end{cases}$

est un problème de Cauchy lié à une équation différentielle linéaire d'ordre 1, sous forme résolue, et g est continue. Il existe une unique solution, g_n. Comme ci-dessus, on montre que :

$$\forall x \in [0,1],\ g_n(x) = \mathrm{e}^x\left(g_{n-1}(1) - \int_0^x \mathrm{e}^{-t}g_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

b) On sait que $\forall t \in [0,1],\ g_n'(t) = g_n(t) - g_{n-1}(t)$.

On intègre cette égalité entre 0 et 1 pour obtenir la relation demandée. On prouve alors par récurrence sur $n \geqslant 0$ que :

$$g_n(1) = \int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

• $g_0 = g$ et la relation est vraie par hypothèse au rang 0.

• Supposons la relation vraie pour un rang $n \geqslant 0$. On a alors :

$$g_{n+1}(1) = g_{n+1}(0) + \int_0^1 (g_{n+1}(t) - g_n(t))\ \mathrm{d}t$$
$$= g_n(1) + \int_0^1 g_{n+1}(t)\ \mathrm{d}t - \int_0^1 g_n(t)\,\mathrm{d}t$$

et avec le résultat au rang n, on obtient la relation au rang $n+1$.

c) On sait que : $\forall t \in [0,1], \quad g_n'(t) = g_n(t) - g_{n-1}(t)$.

Pour $x \in [0,1]$ fixé, on intègre cette égalité entre 0 et x :

$$g_n(x) - g_n(0) = \int_0^x g_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x g_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^x g_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^1 g_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 g_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

La question précédente donne :

$$\int_0^1 g_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t = g_{n-1}(1) = g_n(0)$$

et on en déduit l'égalité demandée.

d) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$; distinguons trois cas.

• Si $x_0 \notin \mathbb{N}$ et $n = E(x_0)$; on a $F(x) = g_n(x-n)$ sur $[n, n+1[$ et x_0 est intérieur à cet intervalle.

La continuité de g_n en $x_0 - n$ donne celle de F en x_0.

• Si x_0 est dans $\mathbb{N}^*$, alors :

$$\forall x \in [x_0, x_0+1[\quad F(x) = g_{x_0}(x - x_0).$$

Et : $\quad \forall x \in [x_0 - 1, x_0[, \ F(x) = g_{x_0-1}(x - x_0 + 1)$.

On en déduit que F admet une limite à droite et à gauche en x_0 :
$$F(x_0^+) = g_{x_0}(0) \quad \text{et} \quad F(x_0^-) = g_{x_0-1}(1)$$

et ainsi $F(x_0^+) = F(x_0^-) = F(x_0)$ ce qui donne la continuité de F en x_0.

• Si $x_0 = 0$, on montre de même que F est continue à droite en x_0. On a donc F continue sur $\mathbb{R}^+$. Soit $x \geqslant 1$ et $n = \mathrm{E}(x)$:

$$F(x) = g_n(x-n) = \int_0^{x-n} g_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_{x-n}^1 g_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_n^x g_n(y-n)\ \mathrm{d}y + \int_{x-1}^n g_{n-1}(y-n+1)\,\mathrm{d}y.$$

On a posé : $y = t + n$ dans la première intégrale et $y = t + n - 1$ dans la seconde.

Comme $]n, x[\subset [n, n+1[$ et $]x-1, n[\subset]n-1, n[$, on a donc :

$$F(x) = \int_n^x F(y)\,\mathrm{d}y + \int_{x-1}^n F(y)\,\mathrm{d}y = \int_{x-1}^x F(y)\,\mathrm{d}y.$$

6 Pour s'entraîner... avec les fonctions intégrables

1 La fonction $\left(x \mapsto \dfrac{\mathrm{Arctan}\, x}{\sqrt{x}}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et se prolonge par continuité en 0.

Effectuons une intégration par parties :

$$\int_0^n \frac{\mathrm{Arctan}\, x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{n}\mathrm{Arctan}\, n - 2\int_0^n \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= 2\sqrt{n}\mathrm{Arctan}\, n - 4\int_0^{\sqrt{n}} \frac{u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$$
$$= 2\sqrt{n}\mathrm{Arctan}\, n + \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{2}u}{1+\sqrt{2}u+u^2}\,\mathrm{d}u - \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\sqrt{2}u}{1-\sqrt{2}u+u^2}\,\mathrm{d}u$$
$$= 2\sqrt{n}\mathrm{Arctan}\, n + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\frac{n+\sqrt{2n}+1}{n-\sqrt{2n}+1}\right)$$
$$-\sqrt{2}\left(\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2n}+1\right) + \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{2n}-1\right)\right).$$

Donc : $\displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{Arctan}\, x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \sim 2\sqrt{n}\mathrm{Arctan}\, n$.

Puis :
$$u_n \sim \frac{2\mathrm{Arctan}\, n}{n^{a-1/2}} \sim \frac{\pi}{n^{a-1/2}}.$$

La série converge si, et seulement si $a > \dfrac{3}{2}$.

2 Fixons $0 < x < \dfrac{1}{2}$ et notons $N = \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Puisque f est continue, positive et décroissante sur $]0,1]$, pour tout k dans $[\![1, N-1]\!]$:

$$xf((k+1)x) \leqslant \int_{kx}^{(k+1)x} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant xf(kx).$$

En sommant, nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{N-1} xf((k+1)x) \leqslant \int_0^{Nx} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Et : $$\int_x^{Nx} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} xf(kx).$$

Donc :

$$\int_x^{Nx} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} xf(kx) \leqslant \sum_{k=1}^{N} xf(kx)$$
$$= \sum_{k=0}^{N} xf((k+1)x) \leqslant \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or $\quad 0 \leqslant 1 - Nx < x$.

La fonction f est intégrable sur $]0,1]$. Donc :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \int_x^{Nx} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Puis : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{x \mapsto 0+} \sum_{1 \leqslant n \leqslant \frac{1}{x}} xf(nx).$

3 Notons h la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$ par : $h(t,x) = \dfrac{\sin(xt)}{e^x - 1}$.

La fonction h est continue par rapport à t et continue par rapport à x.

$$\forall A>0\ \forall x>0\ \forall t\in[-A,A] \quad |h(t,x)| \leqslant \frac{|xt|}{e^x-1} \leqslant \frac{Ax}{e^x-1}$$

La fonction $\left(x \mapsto \dfrac{x}{e^x-1}\right)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car elle se prolonge par continuité en 0 et :

$$\frac{x}{e^x-1} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

La fonction H est continue sur $\mathbb{R}$.

Allons plus loin.

La fonction h admet sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$, à tout ordre $p \geqslant 1$, une dérivée partielle par rapport à t, d'ordre p :

$$\frac{\partial^p h}{\partial t^p}(x,t) = \frac{x^p \sin\left(xt + p\frac{\pi}{2}\right)}{e^x-1}.$$

Cette dérivée est continue sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$. De plus :

$$\left|\frac{\partial^p h}{\partial t^p}(x,t)\right| \leqslant \frac{x^p}{e^x-1}.$$

La fonction $\left(x \mapsto \dfrac{x^p}{e^x-1}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, elle peut être prolongée par continuité en 0 ($p \geqslant 1$), et elle est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Nous pouvons en déduire que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall p \geqslant 1 \quad H^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin\left(xt + p\frac{\pi}{2}\right)}{e^x-1}\, dx.$$

7 Transformée de Laplace et convolution

1 E est une partie non vide de l'espace vectoriel $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

Soit a, b deux réels et f, g deux fonctions de E.

La fonction $af + bg$ est continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

Fixons un réel $\alpha > 0$.

$$e^{-\alpha x}(af(x) + bg(x)) = e^{-\frac{\alpha}{2}x} af(x) + e^{-\frac{\alpha}{2}x} bg(x).$$

En conclure que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} e^{-\alpha x}(af(x) + bg(x)) = 0$.

E est un sous-espace vectoriel de $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

2 **a)** Soit $x > 0$.

L'application $(t \longmapsto e^{-tx} f(t))$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

De plus $\quad e^{-tx} f(t) t^2 = e^{-\frac{x}{2}t} f(t) \times e^{-\frac{x}{2}t} t^2$.

Donc : $\qquad e^{-tx} f(t) =_{+\infty} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

L'application $(t \longmapsto e^{-tx} f(t))$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

b) La linéarité de L découle de la linéarité de l'intégrale.

3 Vérifier d'abord que les fonctions f, g, h sont dans E.

Soit $A > 0$, $x > 0$ et $n \geqslant 1$.

$$\int_0^A e^{-tx} t^n\, dt = \left[\frac{e^{-tx}}{-x} t^n\right]_0^A - \int_0^A \frac{e^{-tx}}{-x} n t^{n-1}\, dt.$$

Faisons tendre A vers $+\infty$. Nous obtenons :

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} t^n\, dt = \frac{n}{x} \int_0^{+\infty} e^{-tx} t^{n-1}\, dt.$$

En déduir par récurrence que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} t^n\, dt = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

D'où : $\qquad L(f)(x) = \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

Calculons maintenant $L(g)$. Soit $A > 0$.

$$\int_0^A e^{-tx} \sin(t)\, dt = \mathrm{Im}\left(\int_0^A e^{-t(x-i)}\, dt\right) = \mathrm{Im}\left(\left[-\frac{e^{-t(x-i)}}{x-i}\right]_0^A\right).$$

Soit :

$$\int_0^A e^{-tx} \sin(t)\, dt = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{-A(x-i)}}{i-x} - \frac{1}{i-x}\right).$$

Faisons tendre A vers $+\infty$. Nous obtenons :

$$L(g)(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t)\, dt = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{x-i}\right) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Et puis maintenant $L(h)$. Soit $A > 0$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} |\sin(\pi t)|\, dt = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^n e^{-tx} |\sin(\pi t)|\, dt.$$

Soit $n > 0$.

$$\begin{aligned}\int_0^n e^{-tx} |\sin(\pi t)|\, dt &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} e^{-tx} |\sin(\pi t)|\, dt \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 e^{-(k+u)x} \sin(\pi u)\, du \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{-kx} \int_0^1 e^{-ux} \sin(\pi u)\, du.\end{aligned}$$

Calculons $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-ux}\sin(\pi u)\,\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{e}^{-ux}\sin(\pi u)\,\mathrm{d}u &= \operatorname{Im}\left(\int_0^1 \mathrm{e}^{u(-x+\mathrm{i}\pi)}\,\mathrm{d}u\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{u(-x+\mathrm{i}\pi)}}{-x+\mathrm{i}\pi}\right]_0^1\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{-x+\mathrm{i}\pi}-1}{-x+\mathrm{i}\pi}\right)\\ &= \operatorname{Im}\left(\frac{(\mathrm{e}^{-x}+1)(x+\mathrm{i}\pi)}{x^2+\pi^2}\right)\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-ux}\sin(\pi u)\,\mathrm{d}u = \frac{\pi(\mathrm{e}^{-x}+1)}{x^2+\pi^2}.$$

D'où :

$$\int_0^n \mathrm{e}^{-tx}\,|\sin(\pi t)|\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{e}^{-kx}\frac{\pi(\mathrm{e}^{-x}+1)}{x^2+\pi^2}.$$

Puis :

$$L(h)(x) = \frac{\pi(\mathrm{e}^{-x}+1)}{(x^2+\pi^2)(1-\mathrm{e}^{-x})}.$$

4 **a)** Posons $t = ux$ dans l'intégrale qui définit $f \star g$.

$$\forall x \geqslant 0 \quad f\star g(x) = \int_0^1 f(ux)g(x(1-u))x\,\mathrm{d}u$$

La fonction $((u,x) \longmapsto f(ux)g(x(1-u))x)$ est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}^+$.

Donc la fonction $f\star g$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Fixons ensuite $\alpha > 0$. Soit $x \geqslant 0$.

$$\mathrm{e}^{-\alpha x}(f\star g)(x) = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}x}\int_0^x \left(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}t}f(t)\right)\left(\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}(x-t)}g(x-t)\right)\mathrm{d}t.$$

Les fonctions continues $\left(t\longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}t}f(t)\right)$ et $\left(t\longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}(x-t)}g(x-t)\right)$ tendent vers 0 en $+\infty$.

Elles sont bornées. Notons M_f, M_g deux réels positifs tels que :

$$\forall x\geqslant 0\quad \left|\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}t}f(t)\right| \leqslant M_f\ ;\quad \left|\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}(x-t)}g(x-t)\right| \leqslant M_g.$$

Alors : $\quad \forall x\geqslant 0\quad \left|\mathrm{e}^{-\alpha x}(f\star g)(x)\right| \leqslant x\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2}x}M_fM_g.$

La fonction $(t\longmapsto \mathrm{e}^{-\alpha x}(f\star g)(x))$ tend vers 0 en $+\infty$.

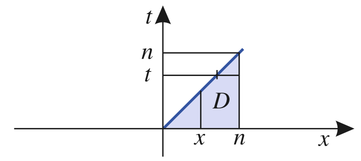
b) Soit f et g deux fonctions de E.

Nous savons que, pour tout y positif :

$$L(f\star g)(y) = \lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_0^n \mathrm{e}^{-yx}\left(\int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

Si n est fixé, la fonction $\left((t,x)\longmapsto \mathrm{e}^{-yx}f(t)g(x-t)\right)$ est continue sur le domaine :

$$D = \{(t,x)\,;\, 0\leqslant x\leqslant n\,, 0\leqslant t\leqslant x\}\,.$$



Utilisons le *théorème de Fubini* sur ce domaine.

$$\begin{aligned}&\int_0^n \mathrm{e}^{-yx}\left(\int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\ &\quad= \int_0^n \mathrm{e}^{-ty}f(t)\left(\int_t^n \mathrm{e}^{-y(x-t)}g(x-t)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Posons $x - t = u$.

$$\begin{aligned}&\int_0^n \mathrm{e}^{-yx}\left(\int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\\ &\quad= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ty}\chi_{[0,n]}(t)f(t)\left(\int_0^{n-t} \mathrm{e}^{-u}g(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Notons $(h_n)_n$ la suite de fonctions définies par :

$$h_n(t) = \mathrm{e}^{-ty}\chi_{[0,n]}(t)f(t)\left(\int_0^{n-t}\mathrm{e}^{-u}g(u)\,\mathrm{d}u\right).$$

Et appliquons le théorème de convergence dominée.

Les fonctions h_n sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$.

La suite de fonctions $(h_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction h définie par :

$$\begin{aligned}h(t) &= \mathrm{e}^{-ty}f(t)\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}g(u)\,\mathrm{d}u\right)\\ &= \mathrm{e}^{-ty}f(t)L(g)\end{aligned}$$

La fonction h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Et enfin :

$$\begin{aligned}\forall n\geqslant 1\quad |h_n(t)| &\leqslant \mathrm{e}^{-ty}f(t)\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}|g(u)|\,\mathrm{d}u\right)\\ &= \mathrm{e}^{-ty}f(t)L(|g|).\end{aligned}$$

Or la fonction $\left(t\longmapsto \mathrm{e}^{-ty}f(t)L(|g|)\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le théorème de convergence dominée permet de conclure que la suite :

$$\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ty}\chi_{[0,n]}(t)f(t)\left(\int_0^{n-t}\mathrm{e}^{-u}g(u)\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t\right)_n$$

converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty}h(t)\,\mathrm{d}t = L(f)L(g)$. D'où le résultat.

5 **a)** La fonction J_0 est continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Elle appartient donc à E.

b) En développant le cosinus en série entière, on obtient :

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^{2n}\sin(t)^{2n}}{(2n)!}\,\mathrm{d}t.$$

x étant fixé, on note $f_n : t \mapsto (-1)^n \dfrac{x^{2n}\sin(t)^{2n}}{(2n)!}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [0, \pi], \ |f_n(t)| \leqslant \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Le majorant est le terme général d'une série convergente. On a donc convergence normale sur $[0, \pi]$ de $\sum f_n$.

La convergence normale (et donc uniforme) sur $[0, \pi]$ permet alors d'intervertir :

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_0^{\pi}\sin(t)^{2n}\,\mathrm{d}t\ x^{2n} = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}x^{2n}$$

c) On a, pour $x > 0$:

$$L(J_0)(x) = \int_0^{+\infty} J_0(t)e^{-tx}\ \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\sum_{n\geqslant 0} g_n(t)\ \mathrm{d}t$$

où $\quad g_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}t^{2n}e^{-tx}$.

En procédant exactement comme à la question **5) b)**, on montre que :

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{t^{2n}}{(2^n n!)^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{ch}(x\sin(u))\ \mathrm{d}u = 3J_1(t).$$

On remarque alors que :

$$\forall N \geqslant 0,\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ \left|\sum_{n=0}^{N} g_n(t)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}|g_n(t)| = J_1(t)e^{-tx}.$$

Ceci permet de dominer les sommes partielles de $\sum(g_n)$ par une fonction intégrable (J_1 est bornée et $x > 0$). Comme les g_n sont continues et que la série converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction continue, on peut utiliser le théorème de convergence dominée pour intervertir et écrire :

$$L(J_0)(x) = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{(-1)^n}{(2^n n!)^2}\int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-tx}\ \mathrm{d}t\right).$$

Le changement de variable $u = tx$ transforme l'intégrale en $K_{2n} = \dfrac{1}{x^{2n+1}}\displaystyle\int_0^{+\infty} u^{2n}e^{-u}\ \mathrm{d}u$.

Une intégration par parties donne une relation entre K_n et K_{n-1} et on prouve alors par récurrence que $K_n = n!$.

On a finalement :

$$L(J_0)(x) = \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n(2n)!}{x^{2n+1}(2^n n!)^2}.$$

d) La formule du binôme permet d'écrire, pour tout $p > 1$:

$$\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}u^n$$

$$\left(1+\frac{1}{p^2}\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{1}{p^{2n}}.$$

Nous en déduisons : $\quad L(J_0)(x) = \dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{-1/2}$.

6 ▬ a) Utilisons la question **4) b)**.

$$L(J_0\star J_0)(x) = (L(J_0)(x))^2 = \frac{1}{x^2+1}.$$

b) Nous en déduisons : $\quad J_0\star J_0(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

8 Intégrabilité et convergence de séries

1 ▬ f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, le seul problème d'intégrabilité est celui au voisinage de $+\infty$. Soit $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) = \int_{u_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On sait que f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si, et seulement si, F est majorée.

Notons $K_n = I_0 + \cdots + I_n$; (K_n) est une suite croissante et elle converge si, et seulement si, elle est majorée.

• Si f est intégrable, la suite $(K_n) = (F(u_{n+1}))$ est majorée et converge donc.

• Réciproquement, si la suite (K_n) converge, on note K sa limite. On a donc $\forall n,\ K_n \leqslant K$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. La suite (u_n) tend vers $+\infty$.

$\exists n_0 \quad \forall n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant x.$

La fonction F est croissante :

$$F(x) \leqslant F(u_{n_0}) = K_{n_0-1} \leqslant K.$$

F est donc bornée et f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2 ▬ La fonction $f : \left(x \mapsto \dfrac{1}{1+\lambda\sin^2(x)}\right)$ est continue, π-périodique et paire. L'intégrale proposée est donc bien définie et on a :

$$I = \int_0^{\pi} f = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f.$$

Le changement de variable $t = \tan(x)$ donne, pour $a \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$\int_0^a f = \int_0^{\tan(a)}\frac{1}{1+t^2(1+\lambda)}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{1+\lambda}}\left[\mathrm{Arctan}\left(t\sqrt{1+\lambda}\right)\right]_0^{\tan(a)}.$$

En faisant tendre a vers $\dfrac{\pi}{2}$, on obtient alors :

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\lambda\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{1+\lambda}}.$$

Remarquons en outre que la π-périodicité indique aussi que :

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{1}{1+\lambda\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sqrt{1+\lambda}}.$$

De façon simple, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall t \in [k\pi, (k+1)\pi]$$
$$\frac{(k\pi)^\alpha}{1+((k+1)\pi)^\beta \sin^2(t)} \leqslant \frac{t^\alpha}{1+t^\beta \sin^2(t)} \leqslant \frac{((k+1)\pi)^\alpha}{1+(k\pi)^\beta \sin^2(t)}$$

En intégrant cette inégalité et avec le calcul fait plus haut, on obtient, pour tout k :

$$\frac{k^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+((k+1)\pi)^\beta}} \leqslant J_k \leqslant \frac{(k+1)^\alpha \pi^{\alpha+1}}{\sqrt{1+(k\pi)^\beta}}.$$

En particulier, on montre sans problèmes que :

$$J_k \underset{\infty}{\sim} \frac{\pi^{\alpha+1-\frac{\beta}{2}}}{k^{\frac{\beta}{2}-\alpha}}.$$

Avec la question **1)** et par comparaison aux séries de Riemann, la fonction proposée est intégrable si, et seulement si :

$$\frac{\beta}{2} - \alpha > 1.$$

3 **a)** $\left(x \mapsto e^{-x^2}\right)$ étant continue sur $[0, +\infty[$, le seul problème d'intégrabilité est au voisinage de $+\infty$. Or :

$$e^{-x^2} =_{+\infty} o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

La fonction $(x \mapsto e^{-x^2})$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

b) Il suffit de faire une étude de fonction ou, mieux, d'utiliser la concavité de la fonction sin sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Notons $I_n = \displaystyle\int_{n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

En effectuant le changement de variable $u = x - n\pi$, on obtient :

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (u+n\pi) e^{-(n\pi+u)^6 \sin^2(u)}\,du.$$

On peut alors utiliser :

$$\forall u \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \; n\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant n\pi + u \leqslant n\pi + \frac{\pi}{2}$$

pour majorer I_n :

$$I_n \leqslant \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)\sin^2(u)}\,du$$
$$\leqslant 2\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)\sin^2(u)}\,du,$$

la deuxième majoration résultant de la parité de $u \mapsto \sin^2(u)$.

En utilisant la question précédente, on obtient alors :

$$\int_{n\pi-\frac{\pi}{2}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \leqslant c_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-d_n u^2}\,du$$

avec $\quad c_n = 2\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) \quad$ et $\quad d_n = \dfrac{4}{\pi^2}\left(n\pi - \dfrac{\pi}{2}\right)^6$

Effectuons le changement de variable $v = \sqrt{d_n}u$ dans le majorant de I_n ; on obtient :

$$0 \leqslant I_n \leqslant w_n \int_0^{\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)^3} e^{-v^2}\,dv \leqslant J w_n$$

où on a :

$$w_n = \pi \frac{n\pi + \frac{\pi}{2}}{\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^3} \sim \frac{1}{\pi^3 n^2}.$$

Le majorant est le terme général d'un série convergente. La série $\sum I_n$ converge. Avec la question **1)**, f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

9 Une suite de fonctions

1 Soit $g_n : \left((x,t) \mapsto e^{-xt}\left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^n\right)$.

La fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{+*}$.

$$\forall x \geqslant 0, \; \forall t > 0, \; |g_n(x,t)| \leqslant \phi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t^2} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 1 & \text{si } t \in]0,1[\end{cases}$$

La fonction ϕ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}^+$. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2 La fonction g_1 est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ et, pour tout $a > 0$:

$$\forall x \geqslant a \; \forall t > 0, \quad |g_1(x,t)| \leqslant e^{-at}.$$

La fonction majorante est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$. La fonction f_1 est donc définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3 Pour tout t, on a $|g_n(x,t)| \leqslant e^{-xt}$.

La fonction $(t \mapsto e^{-xt})$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour $x > 0$.

$$\forall x > 0, \; |f_n(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^+} |g_n(x,t)|\,dt \leqslant \int_{\mathbb{R}^+} e^{-xt}\,dt = \frac{1}{x}$$

Par comparaison : $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = 0.$

4 **a)** Soit $x \geqslant 0$.

La fonction $(t \mapsto g_1(x,t))$ est de signe constant sur $[k\pi, (k+1)\pi]$ et donc :

$$|u_k(x)| = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{e^{-xt}}{t}|\sin(t)|\,dt.$$

Par décroissance de $\left(t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{t}\right)$ sur l'intervalle, nous en déduisons que :

$$\frac{2e^{-(k+1)\pi x}}{(k+1)\pi} = \frac{e^{-(k+1)\pi x}}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\,dt$$
$$\leqslant |g_1(x,t)| \leqslant \frac{e^{-k\pi x}}{k\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\,dt = \frac{2e^{-k\pi x}}{k\pi}.$$

b) Soit $x \geqslant 0$. La série de fonctions $\sum u_k$ est alternée.

La question précédente indique qu'elle vérifie le critère spécial des séries alternées.

Par conséquent, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\left|\sum_{k \geqslant n+1} u_k(x)\right| \leqslant |u_{n+1}(x)| \leqslant \frac{2\mathrm{e}^{-(n+1)\pi x}}{(n+1)\pi} \leqslant \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

La série de fonctions $\sum u_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$. La question précédente montre que :

$$\forall a > 0 \ \ \forall x \geqslant a \ \ \forall k \geqslant 1, \quad |u_k(x)| \leqslant \frac{2\mathrm{e}^{-k\pi a}}{k\pi}.$$

Le majorant est le terme général d'une série convergente et $\sum |u_k|$ est donc normalement convergente sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$. Ceci implique bien sûr la convergence uniforme sur un tel ensemble et la convergence simple sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Comme $|u_n(0)| \geqslant \dfrac{2}{(n+1)\pi}$, il n'y a pas convergence simple en 0.

Il ne peut y avoir, *a fortiori*, convergence uniforme ou normale sur $\mathbb{R}^+$.

Il nous reste à étudier la convergence uniforme ou normale sur $\mathbb{R}^{+*}$. La question précédente donne :

$$\|u_k\|_{\infty, \mathbb{R}^{+*}} \geqslant \sup_{x>0} \frac{2\mathrm{e}^{-(k+1)\pi x}}{(k+1)\pi} = \frac{2}{(k+1)\pi}$$

et il n'y a donc pas convergence normale sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Enfin, en notant $R_n(x)$ le reste d'ordre n de $\sum |u_k(x)|$:

$$\forall x > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall N \geqslant n+1,$$

$$R_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{N} |u_k(x)| \geqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{2\mathrm{e}^{-(k+1)\pi x}}{(k+1)\pi}.$$

En supposant, par l'absurde, que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}^{+*}$, et en passant à la limite quand x tend vers 0^+ :

$$\forall N \geqslant n+1, \ \ \|R_n\|_{\infty, \mathbb{R}^{+*}} \geqslant \lim_{0^+} R_n \geqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

Ceci est impossible puisque le membre de droite tend vers $+\infty$ quand N tend vers $+\infty$. Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $\sum |u_k|$.

c) g_1 est continue sur $\mathbb{R}^+ \times]k\pi, (k+1)\pi[$ et $|g_1(x,t)| \leqslant \mathrm{e}^{-xt} \leqslant 1$ donne une domination par une fonction intégrable sur $]k\pi, (k+1)\pi[$. Le cours indique que u_k est continue sur $\mathbb{R}^+$.

La convergence de la série de fonctions $\sum u_k$ est uniforme sur $\mathbb{R}^+$ et les u_k sont des fonctions continues. La somme S de la série est continue en 0. Or, cette somme est égale à f_1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ (*relation de Chasles*). f_1 est donc prolongeable par continuité en 0.

5 $h_\alpha : \left(t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}\right)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Au voisinage de 0, elle équivaut à $\dfrac{1}{t^{\alpha-1}}$ et est donc intégrable au voisinage de 0 si $\alpha < 2$.

Au voisinage de $+\infty$,si $\alpha > 1$, la fonction h_α est intégrable car : $|h_\alpha(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^\alpha}$.

Si $\alpha = 1$, elle n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ car

$$\int_\pi^{(n+1)\pi} h_\alpha \geqslant \sum_{k=1}^{n} |u_k(0)| \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} |u_k(0)| \to +\infty.$$

Si $\alpha < 1$, elle n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$:

$$\forall t \geqslant 1, |h_\alpha(t)| \geqslant |h_1(t)|.$$

En conclusion, h_α est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si $\alpha \in]1, 2[$.

6 La fonction g_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $a > 0$:

$$\forall x \geqslant a \ \ \forall t > 0 \quad \left|\frac{\partial^k g_n}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant t^k \mathrm{e}^{-at}.$$

La fonction majorante est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Le cours indique que f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \ \forall x > 0 \ \ f_n^{(k)}(x) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-xt} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^n \mathrm{d}t$$

D'où, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$,et en posant $u = xt$:

$$\forall x > 0 \quad |f_n^{(k)}(x)| \leqslant \int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^{+\infty} u^k \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$$

$$\text{et} \quad \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^{+\infty} u^k \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

7 **a)** D'après ce qui précède :

$$\forall x > 0, \ \ f_1'(x) = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \sin(t)\,\mathrm{d}t$$

$$= -\mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)t}\,\mathrm{d}t\right) = -\frac{1}{x^2+1}$$

Nous en déduisons que $f_1 = -\mathrm{Arctan} + c$ où c est une constante.

La limite de f_1 en $+\infty$ est nulle, donc : $c = \pi/2$ et :

$$\forall x > 0, \quad f_1(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}\,(x)$$

f_1 et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ étant égales sur $\mathbb{R}^+$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = f_1(0) = \frac{\pi}{2}.$$

b) De même, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f_2''(x) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t - \mathrm{Re}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(2\mathrm{i}-x)t}\,\mathrm{d}t\right)\right) \\ &= \frac{2}{x(4+x^2)}. \end{aligned}$$

Une décomposition en éléments simples de cette fraction rationnelle donne :

$$\frac{2}{x(x^2+4)} = \frac{1}{2x} + \frac{4}{2x(x^2+4)} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2+4)}.$$

Il existe une constante C telle que :

$$\begin{aligned} \forall x > 0,\ f_2'(x) &= C + \frac{1}{2}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x^2+4) \\ &= C + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right). \end{aligned}$$

En prenant la limite quand x tend vers $+\infty$: $C = 0$.

Grâce à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int \ln\left(1+\frac{4}{t^2}\right)\mathrm{d}t &= x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) + \int \frac{8}{4+t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= x\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) + 4\mathrm{Arctan}\ (x/2)\,. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une constante d telle que, pour tout $x > 0$:

$$\forall x > 0 \quad f_2(x) = d - \frac{x}{4}\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) - \mathrm{Arctan}\ \left(\frac{x}{2}\right).$$

En utilisant $\left(f_2(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0\right)$, nous obtenons : $d = \dfrac{\pi}{2}$:

$$\forall x > 0, \quad f_2(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\ln\left(1+\frac{4}{x^2}\right) - \mathrm{Arctan}\ \left(\frac{x}{2}\right).$$

Pour $x = 0$, et par continuité de f_2 en 0 :

$$f_2(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

c) De même, pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f_3''(x) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin^3(t)}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{4}f_1(x) - \frac{1}{4}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin(3t)}{t}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $u = 3t$, finalement :

$$\forall x > 0, \quad f_3''(x) = \frac{3}{4}f_1(x) - \frac{1}{4}f_1(x/3).$$

10 Comparaison à une intégrale de Riemann au voisinage de l'infini

1 a) La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+2}$ si, et seulement si, la fonction $g : (r,\theta) \mapsto rf(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est intégrable sur $[0,+\infty[\times\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Or il existe k et R tels que :

$$\forall r > R \quad \forall\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad g(r,\theta) \leqslant \frac{k}{r^{2\alpha-1}}.$$

La fonction $r \mapsto \dfrac{k}{r^{2\alpha-1}}$ est intégrable sur $[R,+\infty[$ car $2\alpha - 1 > 1$.

Donc la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+2}$.

b) Dans cette question, l'inégalité précédente est remplacée par :

$$\forall r > R \quad \forall\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{k}{r^{2\alpha-1}} \leqslant g(r,\theta).$$

La fonction $r \mapsto \dfrac{k}{r^{2\alpha-1}}$ est intégrable sur $[R,+\infty[$ car $2\alpha - 1 \leqslant 1$.

Donc la fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^{+2}$.

2 a) On note f la fonction $(x,y) \mapsto \dfrac{1}{(x+y+1)^\alpha}$. On utilise la question **1**). On vérifie que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad \frac{1}{(\sqrt{2}+1)} \leqslant (x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{2}} f(x,y) \leqslant 1.$$

On en déduit que l'application f est intégrable si, et seulement si : $\dfrac{\alpha}{2} > 1$.

Pour $\alpha > 2$ calculons l'intégrale. L'application $\phi : y \mapsto f(x,y)$ est continue positive, intégrable sur $[0,+\infty]$ et :

$$\int_{[0,+\infty]} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(x+1)^{\alpha-1}}.$$

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{(x+1)^{\alpha-1}}$ est intégrable sur $[0,+\infty]$ et son intégrale est $\dfrac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$. Par conséquent :

$$\iint_{\mathbb{R}^{+2}} \frac{1}{(x+y+1)^\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{(\alpha-1)(\alpha-2)}.$$

b) On utilise la question **1**). On vérifie que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^{+2} \quad \frac{1}{2} \leqslant (x^2+y^2)^\alpha \frac{1}{(x^2+y^2+1)^\alpha} \leqslant 1.$$

On en déduit que l'application f est intégrable si, et seulement si : $\alpha > 1$.

Pour $\alpha > 1$, on calcul l'intégrale en passant aux coordonnées polaires.

$$\iint_{\mathbb{R}^{+2}} \frac{1}{(x^2+y^2+1)^\alpha}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(r^2+1)^\alpha} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{(r^2+1)^\alpha} r\,\mathrm{d}r$$
$$= \frac{\pi}{2(\alpha-1)}.$$

11 Où l'on intègre successivement suivant chacune des variables

1 On calcule $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12}$ en introduisant la série entière :

$\ln(1+t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}$ définie sur $[0,1]$.

$$I = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n+1}\,\mathrm{d}t.$$

Le *théorème d'intégration terme à terme* s'applique car la série $\sum \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{n+1}\,\mathrm{d}t$ converge. On obtient :

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)^2}.$$

En séparant la somme des termes d'indice pair et ceux d'indice impair, on déduit de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$ que :

$$I = \frac{\pi^2}{12}.$$

2 La fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{1}{(x+1)^2 - y^2}$ est continue sur A mais non définie au point $(0,1)$ de $\overline{A}$.

Soit $A_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^{+2}\ ;\quad x+y \leqslant 1 - \dfrac{1}{n}\right\}$.

On définit ainsi une famille de compacts élémentaires de réunion : $A' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{+2}\ ;\quad x+y < 1\}$.

On a :

$$\iint_{A(n)} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+1)^2 - y^2} = \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{2y} \ln\left(\frac{2-\frac{1}{n}-2y}{2-\frac{1}{n}}\,\frac{1+y}{1-y}\right)$$

La fonction :

$$(n,y) \mapsto \frac{1}{2y} \ln\left(\frac{2-\frac{1}{n}-2y}{2-\frac{1}{n}}\,\frac{1+y}{1-y}\right) \chi_{[0,1-\frac{1}{n}]}(y)$$

est dominée par la fonction : $y \mapsto \dfrac{1}{2y}\ln(y+1)$ qui est intégrable sur $[0,1[$.

Le *théorème de convergence dominée* assure :

$$\lim_{n\to+\infty} \iint_{A(n)} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+1)^2 - y^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}.$$

On en déduit que l'application f est intégrable sur A et que :

$$\iint_A \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x+1)^2 - y^2} = \frac{\pi^2}{24}$$

12 Comparaison avec une série double

1 Pour tout x de $[p, p+1]$ et tout y de $[q, q+1]$ on a :
$f(p+1, q+1) \leqslant f(x, q+1) \leqslant f(x,y) \leqslant f(x,q) \leqslant f(p,q)$.
On en déduit :

$$f(p+1, q+1) \leqslant \iint_{[p,p+1]\times[q,q+1]} f \leqslant f(p,q).$$

La suite croissante de pavés $([0,n]^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est de réunion $\mathbb{R}^{+2}$. On a :

$$\sum_{p=1}^{n+1}\sum_{q=1}^{n+1} f(p,q) \leqslant \iint_{[0,n]^2} f \leqslant \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} f(p,q).$$

La fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+2}$ si, et seulement si, la suite de terme général $\displaystyle\iint_{[0,n]^2} f$ est majorée et dans ce cas :

$$\lim_{n\to+\infty} \iint_{[0,n]} f = \iint_{\mathbb{R}^{+2}} f.$$

Par conséquent, f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+2}$ si, et seulement si, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n} f(p,q)$ existe. C'est-à-dire si, et seulement si, la somme $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} f(p,q)$ converge (on dit que la suite double est sommable). Sous cette condition, on a :

$$\iint_{\mathbb{R}^{+2}} f = \sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} f(p,q)$$

2 On applique la première question. On en déduit que :

$\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(p^2+q^2+1)^\alpha}$, converge si, et seulement si : $\alpha > 2$.

Or la série $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha}$ est de même nature, elle converge également si, et seulement si : $\alpha > 2$.

De même, la série $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha}$ et la série $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(p+q)^\alpha}$ convergent si, et seulement si : $\alpha > 1$.

Puis on montre qu'il existe deux réels strictement positifs $0 < \lambda \leqslant \mu$ tels que : $\lambda(p^2+q^2) \leqslant (ap+bq)^2 \leqslant \mu(x^2+y^2)$. On en déduit que la série double $\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(ap+bq)^{\alpha}}$ est de même nature que la série double $\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{(p^2+q^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$.

Elle converge si, et seulement si : $\alpha > 1$.

13 Comparaison à une somme de Riemann au voisinage de O

1 La fonction f est intégrable sur D si, et seulement si, la fonction $g : (r,\theta) \longmapsto rf(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est intégrable sur $]0,R[\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Or il existe k et $R_0 > 0$ tels que :

$$\forall r \in]0,R_0]\ \forall\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad g(r,\theta) \leqslant \frac{k}{r^{2\alpha-1}}.$$

La fonction $r \longmapsto \frac{k}{r^{2\alpha-1}}$ est intégrable sur $]0,R]$ car $2\alpha - 1 < 1$.

Donc la fonction f est intégrable sur D .

2 Dans cette question, l'inégalité précédente est remplacée par :

$$\forall r \in]0,R_0\ \forall\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{k}{r^{2\alpha-1}} \leqslant g(r,\theta).$$

La fonction $r \longmapsto \frac{k}{r^{2\alpha-1}}$ n'est pas intégrable sur $]0,R]$ car $2\alpha - 1 \geqslant 1$.

Donc la fonction f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^{+2}$.

14 Où une intégrale double permet le calcul d'une intégrale simple

1 La fonction f est continue positive sur $\mathbb{R}^{+2}$. Elle est dominée sur $\mathbb{R}^{+2}$ par la fonction $h : (x,y) \longmapsto y\exp(-(x^2+1)y^2)$. Vérifier que les fonctions $y \longmapsto y\exp(-(x^2+1)y^2)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ pour tout x de $\mathbb{R}^+$.

On a : $\int_0^{+\infty} y\exp(-(x^2+1)y^2)\mathrm{d}y = \frac{1}{2(1+x^2)}$.

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{2(1+x^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Par conséquent, la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}^{+2}$ et :

$$\int\int_{\mathbb{R}^{+2}} f = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos(2ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

2 L'application $g : (z,t) \longmapsto \exp(-t^2)\cos(zt)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+2}$ et dominée par la fonction $t \longmapsto \exp(-t^2)$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Elle admet une dérivée partielle : $\frac{\partial g}{\partial z} : (z,t) \longmapsto -t\exp(-t^2)\sin(zt)$ également continue sur $\mathbb{R}^{+2}$ et dominée par $t \longmapsto -t\exp(-t^2)$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et que :

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad F'(z) = \int_0^{+\infty} -t\exp(-t^2)\sin(zt)\mathrm{d}t.$$

En intégrant par parties, on trouve :
$\forall z \in \mathbb{R} \quad F'(z) = -\frac{z}{2}F(z)$. D'où :

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad F(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp\left(-\frac{z^2}{4}\right).$$

3 La fonction $\phi : (z,t) \longmapsto \exp\left(-t^2 - \frac{z^2}{t^2}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et dominée par la fonction intégrable $t \longmapsto \exp(-t^2)$.

Elle admet une dérivée partielle :

$\frac{\partial\phi}{\partial z} : (z,t) \longmapsto -\frac{2z}{t^2}\exp\left(-t^2 - \frac{z^2}{t^2}\right)$ continue sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et dominée sur tout segment $[u,v]$ de $\mathbb{R}^{+*}$ par la fonction intégrable $t \longmapsto \frac{2v}{t^2}\exp\left(-t^2 - \frac{u^2}{t^2}\right)$.

On en déduit que G est est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ (on procède de même sur $\mathbb{R}^{-*}$) et que :

$$\forall z \in \mathbb{R}^* \quad G'(z) = \sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} -\frac{z}{t^2}\exp\left(-t^2 - \frac{z^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Le changement de variable $u = \frac{z}{t}$ donne, pour $z > 0$, la relation :

$$G'(z) = -2G(z).$$

D'où : $\forall z \in \mathbb{R}^+ \quad G(z) = C\exp(-z)$.

La constante C obtenue pour $z = 0$ et la parité de G donne :

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad G(z) = \frac{\pi}{4}\exp(-2|z|).$$

4 Après avoir vérifié que l'on peut intervertir les signes « somme », on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(2ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} y\exp(-y^2)\left(\int_0^{+\infty}\exp(-x^2y^2)\cos(2ax)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y.$$

On effectue le changement de variable $t = xy$ et on obtient :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(2ax)}{1+x^2}\mathrm{d}x = 2G(a) = \frac{\pi}{2}\exp(-2|a|).$$

Algorithmes

1 Une forme linéaire sur l'espace des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n

Partie mathématique

1 Nous obtenons :

$$L(P) = 2\sum_{k=0}^{E(n/2)} \frac{a_{2k}}{2k+1}.$$

La forme linéaire L est non nulle car $L(1) = 2$.

Le noyau de L est un hyperplan de E, donc : $\dim(\operatorname{Ker}(L)) = n$.

Pour i dans $[\![1,n]\!]$, notons R_i la fonction polynomiale définie par $R_i(x) = x^i - \dfrac{L(x^i)}{2}$.

Pout tout i dans $[\![1,n]\!]$, le degré de R_i est i. La famille $(R_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est donc libre.

Elle contient n éléments dont l'image par L est nulle. C'est une base de $\operatorname{Ker}(L)$.

2 **a)** Nous savons que les fonctions polynomiales associées aux polynômes de Lagrange conviennent.

Elles sont définies par $P_i(x) = \displaystyle\prod_{0\leqslant k\leqslant n, k\neq i} \frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}$.

b) Nous savons également que, pour toute fonction polynomiale de E : $P(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(x_i)P_i(x)$.

Nous pouvons en déduire :

$$\forall P \in E \quad L(P) = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L(P_i) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i),$$

en notant $\lambda_i = L(P_i)$.

L'existence de la famille de réels $(\lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ vérifiant la relation demandée est ainsi établie.

Montrons l'unicité de cette famille en appliquant la relation aux fonctions polynomiales P_i.

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \quad L(P_j) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_j(x_i) = \lambda_j.$$

L'égalité, pour tout j de $[\![1,n]\!]$, $\lambda_j = L(p_j)$, prouve que la famille de réels $(\lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ est unique.

On peut également utiliser la dualité avec $(P_0, P_1, \cdots, P_{n+1})$ pour base de E et la base duale pour traiter cette question.

3 Calculons λ_i pour un certain i de $[\![1,n]\!]$:

$$\lambda_i = L(P_i) = \int_{-1}^{1}\left(\prod_{0\leqslant k\leqslant n, k\neq i}\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right)\mathrm{d}x.$$

Posons $t = -x$ dans l'intégrale.

$$\lambda_i = \int_{-1}^{1}\left(\prod_{0\leqslant k\leqslant n, k\neq i}\frac{-t-x_k}{x_i-x_k}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(\prod_{0\leqslant k\leqslant n, k\neq i}\frac{-t+x_{n-k}}{-x_{n-i}+x_{n-k}}\right)\mathrm{d}t.$$

D'où : $\lambda_i = \lambda_{n-i}$.

Supposons ensuite n pair et considérons une fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à $n+1$.
Soit $a_{n+1}x^{n+1}$ le terme dominant de P et Q la fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n, définie par $Q(x) = P(x) - a_{n+1}x^{n+1}$.
D'après les questions **1)** et **2)**, nous avons :

$$\int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x = L(Q) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i Q(x_i).$$

Or : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i) = a_{n+1}\sum_{i=0}^{n}\lambda_i x_i^{n+1} + \sum_{i=0}^{n}\lambda_i Q(x_i)$.

Nous devons donc établir que $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\lambda_i x_i^{n+1} = 0$ pour achever cette question.
Puisque $n = 2p$ est pair, les réels $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ sont disposés ainsi :

$$\forall i \in [\![0, p-1]\!] \quad x_i = -x_{2p-i}; \quad x_p = -x_p = 0.$$

D'où :

$$\sum_{i=0}^{n}\lambda_i x_i^{n+1} = \sum_{i=0}^{p-1}\lambda_i x_i^{n+1} + \sum_{i=p+1}^{2p}\lambda_{2p-i}(-x_{2p-i}^{n+1}) = 0.$$

4 **a)** Notons T la fonction polynomiale de Taylor de f en 0 d'ordre n.

Elle est définie par : $T(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$.

Puisque T est dans E : $L(T) = \displaystyle\int_{-1}^{1} T(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n}\lambda_i T(x_i)$.

Nous en déduisons :

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n}\lambda_i f(x_i)\right|$$

$$= \left|\int_{-1}^{1}(f(x)-T(x))\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n}\lambda_i(f(x_i)-T(x_i))\right|.$$

Soit :

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)\right| \leqslant \int_{-1}^{1} |f(x) - T(x)|\,\mathrm{d}x + \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|\,|f(x_i) - T(x_i)|.$$

Utilisons l'*inégalité de Taylor-Lagrange* :

$$\forall x \in [-1,1] \quad |f(x) - T(x)| \leqslant M_{n+1}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Nous obtenons :

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)\right| \leqslant M_{n+1}\left(\int_{-1}^{1} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}x + \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|\,\frac{|x_i|^{n+1}}{(n+1)!}\right).$$

Pour terminer :

$$\int_{-1}^{1} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(n+2)!}$$

et :

$$\forall i \in [\![0,n]\!] \quad \frac{|x_i|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{(n+1)!}.$$

D'où :

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)\right| \leqslant M_{n+1}\left(\frac{2}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+1)!}\sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|\right).$$

b) Lorsque n est pair et f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ sur $[-1,1]$, on pose :

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Cette fonction polynomiale est de degré inférieur ou égal à $n+1$ et, d'après la question **3)** :

$$\int_{-1}^{1} T(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i T(x_i).$$

Nous en déduisons :

$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)\right| \leqslant \int_{-1}^{1} |f(x) - T(x)|\,\mathrm{d}x + \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|\,|f(x_i) - T(x_i)|.$$

Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+2}$:

$$\forall x \in [-1,1] \quad |f(x) - T(x)| \leqslant M_{n+2}\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}.$$

Nous obtenons :

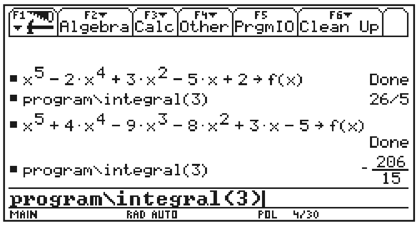
$$\left|\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)\right| \leqslant M_{n+2}\left(\frac{2}{(n+3)!} + \frac{1}{(n+2)!}\sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|\right).$$

Partie informatique

5

Avec la TI

```
: integral(n)
: Func
: Local a,p,q,v,k,i,s,j
: Π(x-(k-n-1)/n,k,1,2*n+1) -> p
: newMat(1,n+1) -> v
: For i,1,n+1
: p/(x-(i-n-1)/n) ->q
: If i=1 Then
: (2*n)!/n^(2*n) -> a
: Else
: (-1)^(i-1)*(i-1)!*(2*n+1-i)!/n^(2*n) -> a
: EndIf
: q/a ->q
: ∫(q,x,-1,1) -> v[1,i]
: EndFor
: 0 -> s
: v[1,n+1]*f(0) -> s
: For j,1,n
: s+v[1,j]*(f(-1+(j-1)/n)+f((n-j+1)/n)) -> s
: EndFor
: s
: EndFunc
```



2 Polynômes de Bernoulli

Partie mathématique

A. 1 Comme dans l'énoncé, on note G la primitive de f sur $[0,1]$ qui s'annule en 0. Si F existe, alors $G' = F'$ sur l'intervalle $[0,1]$ et ainsi, $F - G$ est constante. En notant c cette constante, la seconde condition sur F impose $c = -\int_0^1 G$. Réciproquement, la fonction :

$$F : \left(x \mapsto G(x) - \int_0^1 G(t)\ \mathrm{d}t\right)$$

vérifie les conditions imposées.

2 Montrons par récurrence que la proposition H_n : « B_n est bien définie et c'est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $\frac{1}{n!}$ » est vraie pour tout entier n.

• C'est vrai au rang 0 de manière immédiate (on pose $B_0 = 1$).

• Supposons H_n vraie pour un certain $n \geqslant 0$. On a alors B_n continue sur $[0, 1]$ et la question précédente nous donne l'existence et l'unicité d'une fonction d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, primitive sur $[0, 1]$ de B_n :

$$\forall x \in [0, 1], \quad B_{n+1}(x) = G(x) + \int_0^1 G(t)\,\mathrm{d}t$$

avec $\quad G(x) = \displaystyle\int_0^x B_n(t)\,\mathrm{d}t$.

G est polynomiale de degré $n+1$ et de coefficient dominant $\frac{1}{n+1}\frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!}$ d'après H_n. B_{n+1}, qui diffère de G d'une constante, a les mêmes propriétés.

On obtient successivement :

$$B_1 = X - \frac{1}{2}, \qquad B_2 = \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12},$$

$$B_3 = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}, \quad B_4 = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720}$$

3 Par définition, B_n est une primitive de B_{n-1} (pour $n \geqslant 1$) et on a donc :

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour $n \geqslant 2$, $n - 1 \geqslant 1$ et cette quantité est nulle par construction.

4 $C_0 = B_0(1 - X) = 1$ et pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} C'_{n+1}(X) &= -(-1)^{n+1} B'_{n+1}(1 - X) \\ &= (-1)^n B_n(1 - X) = C_n(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 C_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t &= (-1)^n \int_0^1 B_n(1 - t)\,\mathrm{d}t \\ &= -(-1)^n \int_1^0 B_n(u)\,\mathrm{d}u = 0 \quad (u = 1 - t) \end{aligned}$$

D'après l'unicité, on a donc :

$$\forall n, \quad B_n = C_n.$$

En particulier :

$$\forall p \geqslant 0, \quad B_{2p+1}(X) = -B_{2p+1}(1 - X).$$

Pour $X = 1/2$, on obtient :

$$\forall p \geqslant 0, \quad B_{2p+1}(1/2) = 0.$$

Pour $X = 0$ et compte tenu de la question **3)**, on obtient :

$$\forall p \geqslant 1, \quad B_{2p+1}(0) = B_{2p+1}(1) = 0.$$

5 On procède par récurrence comme suggéré par l'énoncé.

• $B_1 = X - \frac{1}{2}$ ne s'annule qu'en $\frac{1}{2}$ et donc pas sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

• Supposons avoir prouvé que B_{2m+1} ne s'annule pas sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. $B'_{2m+2} = B_{2m+1}$ est alors de signe constant sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ (en contraposant le *théorème des valeurs intermédiaires*). On a alors B_{2m+2} qui est strictement monotone sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$. Si, par l'absurde, B_{2m+3} s'annulait en c élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ alors, par le *théorème de Rolle*, sa dérivée s'annulerait sur $]0, c[$ et sur $\left]c, \frac{1}{2}\right[$ (puisque $B_{2m+3}(0) = B_{2m+3}(c) = B_{2m+3}(1/2) = 0$) en des points x et y avec $x < y$. Ceci contredit la stricte monotonie de $B_{2m+2} = B'_{2m+3}$. Ainsi, l'hypothèse est vérifiée pour B_{2m+3}.

Soit $P_m = B_{2m} - B_{2m}(0)$.

• Si $m = 0$ alors $P_m = 0$ est de signe constant sur $[0, 1]$.

• Si $m \geqslant 1$ alors P_m est nul en 0 et en 1 ; sa dérivée B_{2m-1} est de signe constant sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et de signe constant opposé sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$ (relation $B_{2m-1}(X) = -B_{2m-1}(1 - X)$). On a ainsi deux tableaux de variation envisageables pour P_m qui donnent tous deux une fonction de signe constant sur $[0, 1]$.

B.1 Soit $t \in]0, 1[$; on a donc $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t} \neq 1$ et :

$$\sum_{k=1}^n (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t})^k = \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t} - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi(n+1)t}}{1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi t}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\pi t}\frac{\sin(n\pi t)}{\sin(\pi t)}.$$

En prenant la partie réelle de cette quantité, on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \cos(2k\pi t) = \cos((n + 1)\pi t)\frac{\sin(n\pi t)}{\sin(\pi t)}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} 1 + 2\sum_{k=1}^n \cos(2k\pi t) &= \frac{\sin(\pi t) + 2\cos((n + 1)\pi t)\sin(n\pi t)}{\sin(\pi t)} \\ &= \frac{\sin((2n + 1)\pi t)}{\sin(\pi t)} \end{aligned}$$

2 ϕ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1[$ par les théorèmes généraux.

De plus, $B_n - B_n(0)$ est un polynôme dont 1 et 0 sont racines.

Il existe donc un polynôme Q_n tel que :

$$B_n(X) - B_n(0) = X(1 - X)Q_n(X).$$

Par ailleurs, $\sin(\pi t) \sim_0 \pi t$ et :
$\sin(\pi t) = \sin(\pi(1-t)) \sim_1 \pi(1-t)$ et on en déduit que :

$$\lim_{x\to 0} \phi_n(x) = \frac{Q_n(0)}{\pi}, \quad \lim_{x\to 1} \phi_n(x) = \frac{Q_n(1)}{\pi}.$$

ϕ_n est donc prolongeable par continuité à $[0,1]$ en posant $\phi_n(0) = \dfrac{Q_n(0)}{\pi}$ et $\phi_n(1) = \dfrac{Q_n(1)}{\pi}$.

Pour prouver que le prolongement est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, il suffit de montrer que ϕ' admet une limite en 0 et en 1. Le problème est que l'expression de ϕ' n'est pas très simple !

On peut commencer par écrire que :

$$\forall t \in]0,1[, \quad \phi_n(t) = Q_n(t).\frac{t(1-t)}{\sin(\pi t)} = Q_n(t)\psi(t).$$

ψ est prolongeable par continuité en posant $\psi(0) = \psi(1) = \pi$. De plus :

$$\forall t \in]0,1[,\ \psi'(t) = \frac{(1-2t)\sin(\pi t) - \pi t(1-t)\cos(\pi t)}{\sin^2(\pi t)}$$

et on montre aisément (utiliser des DL) que cette quantité admet une limite en 0 et π (limite valant $\pm\dfrac{1}{\pi}$).

ψ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et $\phi_n = Q_n\psi$ l'est aussi.

3 On procède par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^1 f(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{f(t)\cos(xt)}{x}\right]_0^1 + \frac{1}{x}\int_0^1 f'(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

On remarque alors que :

$$\left|\left[-\frac{f(t)\cos(xt)}{x}\right]_0^1\right| \leqslant \frac{|f(0)|+|f(1)|}{x}.$$

Or $\dfrac{|f(0)|+|f(1)|}{x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

D'où :

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^1 f'(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{1}{|x|}\int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t$$

qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

4 Soit $n \geqslant 3$ et $k \geqslant 1$.

Une double intégration par parties donne aisément (compte tenu des propriétés des B_k) :

$$I_{n,k} = -\frac{1}{(2k\pi)^2} I_{n-2,k}.$$

Une récurrence aisée montre alors que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad I_{2n,k} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2(n-1)}} I_{2,k} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}}$$

$$\forall n \geqslant 1, \quad I_{2n-1,k} = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{n-1}} I_{1,k} = 0.$$

5 D'après la question **B. 1)**, on a :

$$\begin{aligned} &\phi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad = (B_{2m}(t) - B_{2m}(0))\left(1 + 2\sum_{k=1}^{N}\cos(2k\pi t)\right). \end{aligned}$$

et on en déduit que, pour $m \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_{2m}(t)\sin((2N+1)\pi t)\,\mathrm{d}t &= 2\sum_{k=1}^{N} I_{2m,k} - B_{2m}(0) \\ &= -B_{2m}(0) + 2\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{m-1}}{(2k\pi)^{2m}}. \end{aligned}$$

On fait tendre N vers $+\infty$ (les limites existent : on a une série de Riemann et on a étudié l'intégrale plus haut) pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}} = \frac{(-1)^{m-1}(2\pi)^{2m}B_{2m}(0)}{2}.$$

On obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

6 Pour tout $k \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$, $k^{2m} \geqslant k^2$.

On a donc, car les sommes écrites existent :

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \leqslant 2.$$

La formule trouvée plus haut donne alors :

$$|B_{2m}(0)| = \frac{2}{(4\pi^2)^m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m}} \leqslant \frac{4}{(4\pi^2)^m}.$$

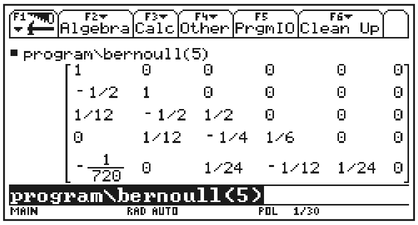
Partie informatique

7

Avec la TI

```
: bernoull(n)
: Func
: Local i,j,k,b,s
: newMat(n,n+1) ->b
: 1 -> b[1,1] : For i,2,n
: 0 -> s
: For j,1,i
: b[i-1,j]/j -> b[i,j+1]
: b[i,j+1]/(j+1) + s -> s
: EndFor
```

```
: -s -> b[i,1]
: EndFor
: b
: EndFunc
```



3 Calcul de l'exponentielle sur un ordinateur

A.1 Munissons $\mathcal{C}[-1,1]$ du produit scalaire :

$$< f,g >= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si Q est un polynôme de $\mathcal{P}_N$, l'intégrale $\int_{-1}^{1} (Q(x)-\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x$ représente le carré de la distance de la fonction exp au sous-espace vectoriel $\mathcal{P}_N$. Ce sous-espace est de dimension finie.

Le minimum $\min\limits_{Q\in\mathcal{P}_N} \int_{-1}^{1} (Q(x)-\mathrm{e}^x)^2\,\mathrm{d}x$ est atteint en prenant le polynôme P, projection orthogonale de la fonction exp sur $\mathcal{P}_N$.

2

Avec Maple

```
> restart :
> PolynomesW :=proc(N)
local i ;
global W ;
W[0] :=1 ;W[1] :=x ;
for i from 2 to N do
W[i] :=expand(((2*i-1)/i)*W[i-1]*x-((i-1)/i)
*W[i-2]) ;od ;
seq(W[i],i=0..N) ;
end ;
```

PolynomesW := **proc**(N)
local i;
globalW;
W[0] := 1;
W[1] := x;
for i **from** 2 **to** N **do**
W[i] := expand$(((2\times i-1)\times \mathrm{W}[i-1]\times x)/i-((i-1)\times \mathrm{W}[i-2])/i)$
od;
seq(W[i], i = 0..N)
end

```
> PolynomesW(8) ;
```

$$1,\ x,\ \frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x,\ \frac{35}{8}x^4-\frac{15}{4}x^2+\frac{3}{8},$$
$$\frac{63}{8}x^5-\frac{35}{4}x^3+\frac{15}{8}x,\ \frac{231}{16}x^6-\frac{315}{16}x^4+\frac{105}{16}x^2-\frac{5}{16},$$
$$\frac{429}{16}x^7-\frac{693}{16}x^5+\frac{315}{16}x^3-\frac{35}{16}x,$$
$$\frac{6435}{128}x^8-\frac{3003}{32}x^6+\frac{3465}{64}x^4-\frac{315}{32}x^2+\frac{35}{128}$$

3 Puisque la base $(W_i)_{i\in[\![0,N]\!]}$ est orthogonale pour le produit scalaire, nous savons que :

$$P=\sum_{i=0}^{N}\frac{< \exp, W_i >}{< W_i, W_i >}W_i.$$

4 **a)** Une simple intégration par parties fera l'affaire...

b)

Avec Maple

```
> Integrales :=proc(N)
local i,E ;
global It ;
E :=evalf(exp(1)) :
It[0] :=E-1/E ;
for i from 1 to N do
It[i] :=E-(-1)^i/E-i*It[i-1] ;od ;
seq(It[i],i=0..N) ;end ;
```

Integrales := **proc**(N)
local i, E;
global *It*;
E := evalf(exp(1));
$It[0] := E-1/E$;
for i **to** N **do** $It[i] := E-(-1)\hat{\ }i/E-i\times It[i-1]$ **od**;
seq($It[i]$, i = 0..N)
end

```
> Integrales(8) ;It[3] ;
```

2.350402387, .735758882, .878884623, .449507400,
.552372787, .324297334, .404618383, .253832588,
.319741683

.449507400

```
> P :=proc(N)
local i,Q,K,j ;
Integrales(N) ;
PolynomesW(N) ;
Q :=0 ;
for i from 0 to N do
K :=0 ;
for j from 0 to N do
K :=K+coeff(W[i],x,j)*It[j] ;od ;
Q :=(K*(2*i+1)/2)*W[i] ;
od ;Q ;end ;
```

$P := \textbf{proc}(N)$
local $i,\ Q,\ K,\ j;$
Integrales(N) ;
PolynomesW(N) ;
$Q := 0$;
for i **from** 0 **to** N **do**
$K := 0$;
for j **from** 0 **to** N **do** $K := K + \text{coeff}(W[i],\ x,\ j) \times It[j]$ **od** ;
$Q := 1/2 \times K \times (2 \times i + 1) \times W[i]$
od;
Q
end

```
>P(8) ;
```

$$.2490060955\,x^8 - .4648113783\,x^6 + .2681604106\,x^4 - .04875643828\,x^2 + .001354345508$$

5 Nous utiliserons l'*algorithme de Horner*.

Avec Maple

```
> Expa :=proc(a,N)
local i,Q ;
P(N) ;
Q :=lcoeff(P(N)) ;
for i to N do Q :=a*Q+coeff(P(N),x,N-i) od ;
Q ; end ;
```

$Expa := \textbf{proc}(a,\ N)$
local $i,\ Q;$
$P(N)$; $Q := \text{lcoeff}(P(N))$; **for** i **to** N **do** $Q := a \times Q + \text{coeff}(P(N),\ x,\ N-i)$ **od** ; Q
end

```
> Expa(.5,8) ;
```

$$-.000364736125$$

```
> subs(x=0.5,P(8)) ;
```

$$-.000364736132$$

6

Avec Maple

```
> Puissance E :=proc(m)
local r,E,j ;
E :=evalf(exp(1)) :
if m=0 then r :=1 ;
elif m>0 then r :=1 ;for j from 1 to m do
r :=E*r ;od ;
else r :=1/Puissance(-m) fi ;
end ;
```

$Puissance\ E := \textbf{proc}(m)$
local $r,\ E,\ j;$
$E := \text{evalf}(\exp(1))$;
if $m = 0$ **then** $r := 1$
elif $0 < m$ **then** $r := 1$; **for** j **to** m **do** $r := E \times r$ **od**
else $r := 1/\text{Puissance}(-m)$
fi
end

```
> Puissance E(-4) ;
```

$$.01831563890$$

```
> Nouvexp :=proc(a,N)
local m ;
m :=trunc(a) ;
PuissanceE(trunc(a))+Expa(a-trunc(a),N) ;
end ;
```

$Nouvexp :=$
proc$(a,\ N)$ **local** $m;\ m := \text{trunc}(a)$; $\text{PuissanceE}(\text{trunc}(a)) + \text{Expa}(a - \text{trunc}(a),\ N)$
end

```
> Nouvexp(3.2,8) ;
```

$$20.08534094$$

```
> exp(3.2) ;
```

$$24.53253020$$

B.1 Nous savons que $u^{2^k} = \left(u^{2^{k-1}}\right)^2$.

Avec Maple

```
> Puissance :=proc(a,m)
local r,j ;
if m=0 then r :=1 ;
elif m>0 then r :=1 ;for j from 1 to m do
r :=a*r ;od ;
else r :=1/Puissance(-m) fi ;
end ;
```

$Puissance := \textbf{proc}(a,\ m)$
local $r,\ j;$
if $m = 0$ **then** $r := 1$
elif $0 < m$ **then** $r := 1$; **for** j **to** m **do** $r := a \times r$ **od**
else $r := 1/\text{Puissance}(-m)$
fi
end

```
> ExpparPuissance :=proc(x,n)
local i,u ;
u :=1+x/Puissance(2,n) ;
for i from 1 to n do u :=u*u ;
od ;evalf(u) ;end ;
```

$ExpparPuissance :=$
proc$(x,\ n)$ **local** $i,\ u; u := 1 + x/\text{Puissance}(2,\ n)$;
for i **to** n **do** $u := u^2$ **od** ; $\text{evalf}(u)$
end

```
> ExpparPuissance(1,10) ;
```

$$2.716955729$$

2 Par définition :

$$r_n(x) = \mathrm{e}^x \left(1 + \frac{x}{2^n}\right)^{-2^n} - 1.$$

Posons : $m = 2^n$; $f_m(x) = \mathrm{e}^x \left(1 + \dfrac{x}{m}\right)^{-m} - 1$.

La fonction f_m est dérivable sur $[0, 1]$ et :

$$f_m'(x) = \mathrm{e}^x \frac{x}{m} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{-m-1} > 0.$$

Par conséquent, pour tout x de $[0, 1]$:

$$0 = f_m(0) \leqslant f_m(x) \leqslant f_m(1) = \mathrm{e}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-m} - 1$$
$$= \exp\left(1 - m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)\right) - 1.$$

De plus :

$$u = 1 - m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{(k+1)m^k}$$

est la somme d'une série alternée qui vérifie le critère spécial des séries alternées.

D'où :

$$0 < \frac{1}{2m} - \frac{1}{3m^2} \leqslant u = 1 - m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right) \leqslant \frac{1}{2m} \leqslant 1.$$

Considérons la fonction définie par $z(u) = \mathrm{e}^u - 1$, sur $[0, 1]$.

$$1 < z'(u) = \mathrm{e}^u \leqslant \mathrm{e}.$$

Par intégration, on en déduit que, pour tout u de $[0, 1]$: $u \leqslant z(u) \leqslant \mathrm{e}u$.

Soit :

$$\exp\left(1 - m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)\right) - 1$$
$$\leqslant \mathrm{e}\left(1 - m\ln\left(1+\frac{1}{m}\right)\right) = \mathrm{e}m\left(\frac{1}{m} - \ln\left(1+\frac{1}{m}\right)\right).$$

Considérons la fonction définie par $f(u) = u - \ln(1+u)$, sur $[0, 1]$.

$$\frac{u}{2} \leqslant f'(u) = \frac{u}{1+u} \leqslant u.$$

Par intégration : $\dfrac{u^2}{4} \leqslant f(u) \leqslant \dfrac{u^2}{2}$.

Soit : $\qquad \dfrac{1}{4m^2} \leqslant \dfrac{1}{m} - \ln\left(1+\dfrac{1}{m}\right) \leqslant \dfrac{1}{2m^2}$.

Finalement : $\qquad f_m(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{2m}$.

Donc : $r_n(x) \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{2^{n+1}}$.

En n'utilisant que des opérations élémentaires...

Avec Maple

```
> Exp2 :=proc(x,epsilon)
local n,m,E,erreur,u,i ;
n :=1 ;m :=2 ;
E :=evalf(exp(1)) :
erreur :=E/4 ;
while erreur>epsilon do
n :=n+1 ;m :=2*m ;erreur :=erreur/2 ;od ;
u :=evalf(1+x/m) ;
for i from 1 to n do u :=u*u ;od ;
u ;end ;
```

Exp2 := **proc**(x, ε)
local n, m, E, *erreur*, u, i ;
 $n := 1$;
 $m := 2$;
 $E :=$ evalf(exp(1)) ;
 erreur $:= 1/4 \times E$;
 while $\varepsilon <$ *erreur* **do** $n := n+1$; $m := 2 \times m$;
  erreur $:= 1/2 \times$ *erreur* **od** ;
 $u :=$ evalf$(1 + x/m)$;
 for i **to** n **do** $u := u^2$ **od** ;
 u
end

```
> Exp2(1.2,10^(-4)) ;
                    3.319944701
> exp(1.2) ;
                    3.320116923
> exp(1.2)-Exp2(1.2,10^(-4)) ;
                    .000172222
```

C.1 Les termes l_i sont positifs et $l_i \sim \dfrac{1}{2^i}$.

La série géométrique $\sum \dfrac{1}{2^i}$ converge. La série $\sum l_i$ converge.

Considérons la fonction g définie sur $[0, 1]$ par :

$$g(x) = \ln(1+x) - 2\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right).$$

Elle est dérivable sur $[0, 1]$ et :

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+\dfrac{x}{2}} \leqslant 0.$$

Cette fonction est décroissante sur $[0, 1]$ et nulle en 0.

D'où : $l_i \leqslant 2l_{i+1}$.

Par conséquent : $\displaystyle\sum_{k=i+1}^{+\infty} l_k \geqslant \frac{1}{2}\sum_{k=i}^{+\infty} l_k$.

Donc : $\displaystyle\sum_{k=i+1}^{+\infty} l_k - \frac{1}{2}\sum_{k=i+1}^{+\infty} l_k \geqslant \frac{l_i}{2}$.

Finalement : $\displaystyle\sum_{k=i+1}^{+\infty} l_k \geqslant l_i$.

2 La suite (u_i) ainsi construite est positive et décroissante.

Elle converge vers l. Supposons $l > 0$.

Il existe donc un entier N tel que, pour tout $i \geqslant N$: $l_i < l$.

Par conséquent : $\forall i \geqslant N \quad u_{i+1} = u_i - l_i$.

En sommant : $\forall i \geqslant N \quad u_{i+1} = u_N - \displaystyle\sum_{k=N}^{i} l_k$.

Faisons tendre i vers $+\infty$: $\quad l = u_N - \sum_{k=N}^{+\infty} l_k > 0.$

Puis : $u_N > \sum_{k=N}^{+\infty} l_k$.

N est donc strictement positif.

Considérons le plus petit entier N tel que : $u_N > \sum_{k=N}^{+\infty} l_k$.

Alors : $u_{N-1} \leqslant \sum_{k=N-1}^{+\infty} l_k$.

D'où : $u_{N-1} < l_{N-1}$.

Puis : $u_N = u_{N-1} \leqslant \sum_{k=N-1}^{+\infty} l_k$.

Ceci contredit la définition de N.

La suite (u_i) converge vers 0.

3 Notons $i_0 < i_1 < \cdots < i_k < \cdots$ la suite (finie ou non) des indices i pour lesquels $u_i \geqslant l_i$ et I l'ensemble de ces indices.

La suite (u_i) converge vers 0, donc : $u_0 = \sum_{k \in I} l_k$.

De plus, la suite (v_i) est définie par :

$v_{i+1} = v_i$ si $i \notin I$; $v_{i+1} = v_i \mathrm{e}^{l_i}$ si $i \in I$.

La suite (v_i) converge donc vers :

$$v_0 \exp\left(\sum_{k \in I} l_k\right) = \exp(u_0).$$

4

Avec Maple

```
> Exp3 :=proc(u,L,N)
local v,i ;
v :=1 ;
for i from 1 to N do
if u>=L[i] then u :=u-L[i] ;
v :=v+decale(v,-i) ;fi ;
od ;v ;end ;
```

$Exp3 :=$ **proc**$(u,\ L,\ N)$
local $v,\ i$;
$v := 1$; **for** i **to** N **do if** $L_i \leqslant u$ **then** $u := u - L_i$;
$v := v + \mathrm{decale}(v,\ -i)$ **fi od** ; v
end

De plus :

$$\frac{\mathrm{e}^{u_0}}{A} = \exp\left(\sum_{k \in I, k > N} l_k\right)$$
$$\leqslant \exp\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} l_k\right) \leqslant \exp\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} 2^{-k}\right) = \exp\left(2^{-N}\right).$$

D'où :

$$1 \leqslant \frac{\mathrm{e}^{u_0}}{A} \leqslant \exp\left(2^{-N}\right).$$

12 Suites et séries de fonctions

RAPPELS DE COURS

MODES DE CONVERGENCE

Les fonctions considérées sont définies sur une partie A d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé E de dimension finie et à valeurs dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé F de dimension finie.

• Une suite (f_n) (respectivement une série $\sum u_n$) de fonctions converge simplement sur A si, pour tout x de A, la suite $(f_n(x))_n$ (respectivement la série $\sum u_n(x)$) converge.

• Nous notons $(\mathcal{B}(A), \|\ \|_\infty)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées sur A muni de la norme $\|\ \|_\infty$.

Une suite (f_n) (respectivement une série $\sum u_n$) de fonctions converge uniformément sur A s'il existe une fonction f de A dans E telle que la suite de fonctions $(f - f_n)_n$ (respectivement la suite des restes de la série) converge pour $\|\ \|_\infty$ vers 0.

Elle converge alors simplement.

Pour montrer la convergence uniforme sur A de la suite de fonctions (f_n), on peut calculer $\|f_n\|_\infty$ à l'aide du tableau de variations de f_n.

• Une série de fonctions bornées sur A, $\sum u_n$, converge normalement sur A si la série numérique $\sum \|u_n\|_\infty$ converge. Elle converge alors uniformément sur A.

CONVERGENCE UNIFORME ET LIMITES

• ***Théorème d'interversion des limites pour une suite de fonctions***

Soit (f_n) une suite de fonctions de A dans $\mathbb{K}$ et a un point adhérent à A.

Si la suite vérifie :

• (f_n) converge uniformément sur A vers f ;

• chaque fonction f_n admet une limite b_n en a, alors :

– la suite $(b_n)_n$ converge vers un élément b de F.

– f admet en a la limite b : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\lim\limits_{x \longrightarrow a} (f_n(x)) \right) = \lim\limits_{x \longrightarrow a} \left(\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (f_n(x)) \right)$.

• Soit (f_n) une suite de fonctions continues de A dans $\mathbb{K}$ convergeant vers une fonction f, uniformément sur tout compact de A.

Alors la fonction f est continue sur A.

• *Théorème d'interversion des limites pour une série de fonctions*

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions de A dans $\mathbb{K}$ et a un point adhérent à A.

Si :

• la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur A vers S,

• chaque fonction u_n admet une limite b_n en a, alors :

– la série numérique $\sum b_n$ converge ;

– la fonction somme S admet en a la limite b : $\left(\lim\limits_{x\longrightarrow a}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)\right)\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\lim\limits_{x\longrightarrow a} u_n(x)\right)$.

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions continues de A dans $\mathbb{K}$ convergeant uniformément sur tout compact de A. Alors la fonction somme est continue sur A.

THÉORÈMES D'APPROXIMATION

Toute fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$, à valeurs dans F, est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$.

• *Théorème de Stone-Weierstrass*

Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$, à valeurs complexes, est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[a,b]$.

• *Deuxième théorème de Weierstrass*

Toute fonction continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, est limite uniforme sur $\mathbb{R}$ d'une suite de polynômes trigonométriques.

CONVERGENCE UNIFORME, INTÉGRATION ET DÉRIVATION

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans F.

• Soit a un point de I, $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I et convergeant uniformément sur tout segment de I vers f, alors, pour tout x de I :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n\right)(t)\,\mathrm{d}t.$$

• Soit k dans $\mathbb{N}^*\cup\{+\infty\}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I dans F telle que :

– pour tout n, f_n soit de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;

– la suite (f_n) converge simplement sur I vers f ;

– pour tout entier non nul $p \leqslant k$, la suite de fonctions $(f_n^{(p)})_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g_p.

Alors f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout entier non nul $p \leqslant k$, $f^{(p)} = g_p$.

• Soit a un point de I, $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur I et convergeant uniformément sur tout segment de I, alors, pour tout x de I :

$$\int_a^x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

• Soit k dans $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et $\sum u_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ telle que :

– pour tout n, u_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;

– la série $\sum u_n$ converge simplement sur I de somme S ;

– pour tout entier non nul $p \leqslant k$, la série de fonctions $\sum u_n^{(p)}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors S est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et, pour tout entier non nul $p \leqslant k$, $S^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}$.

INTÉGRABILITÉ, SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

• *Théorème de convergence dominée*

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ telle que :

– la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux sur I ;

– il existe une fonction ϕ continue par morceaux, intégrable sur I telle que, pour tout entier n, $|f_n| \leqslant \phi$ (hypothèse de domination).

Alors :

– les applications f_n et f sont intégrables sur I ;

– la suite numérique $\left(\int_I f_n\right)_n$ converge vers $\int_I f$:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f.$$

• *Intégration terme à terme d'une série de fonctions*

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur I telle que :

– pour tout n, u_n est intégrable sur I ;

– la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur I et sa fonction somme S est continue par morceaux sur I ;

– la série numérique $\sum \int_I |u_n|$ converge.

Alors :

– S est intégrable sur I ;

– $\int_I |S| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |u_n|$;

– $\int_I S = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I u_n\right)$.

ÉNONCÉS

1 Pour s'entraîner

1 Soit $f_n(x) = n \cos x \sin^n x$.

Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2 On considère une fonction f continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(0) = 0 \; ; \; \lim_{+\infty} f = 0.$$

Étudier la convergence simple, uniforme, sur tout compact de $\mathbb{R}^+$ des suites de fonctions :

a) $f_n(x) = f(nx)$;

b) $g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right)$;

c) $h_n(x) = f_n(x) g_n(x)$.

3 Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive, décroissante. On pose $u_n(x) = a_n x^n (1-x)$.

a) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.

b) Montrer que la convergence est normale sur $[0,1]$ si, et seulement si, la série $\sum \frac{a_k}{k}$ converge.

c) Montrer que la convergence est uniforme sur $[0,1]$ si, et seulement si : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} a_n = 0$.

4 **a)** Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : \left(x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 + x^2}\right)$.

b) Montrer que la fonction f est continue.

c) Donner les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

Conseils

2) a) Fixer x et étudier d'abord la convergence simple.
Essayer ensuite de déterminer $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}+} |f_n(x)|$.
Puis regarder le sup de f_n sur un intervalle de la forme $[0, a]$ et sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.
2) c) Montrer que la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}+$ en distinguant pour un réel $A > 0$ fixé, les réels x de $[0, A]$ et ceux de $[A, +\infty[$.
3) c) La suite (a_n) converge. Sa limite est nulle ou strictement positive. Étudier ces deux cas.
4) b) Revoir le théorème du cours.
4) c) Utiliser la comparaison avec une intégrale.

2 La série de fonctions $\sum \ln(1 + x^n)$

Cet exercice utilise l'intégrabilité et le développement en série de $\ln(1 + x)$.

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1 + x^n)$.

1 Préciser le domaine de définition de f et étudier sa continuité.

2 Trouver un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 1.

Conseil

2) Utiliser la comparaison avec une intégrale.

3 La fonction $\left(x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}^2 nx}\right)$

On pose $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}^2(nx)}$.

1 Étudier la fonction S.

2 Donner la limite de $x^2 S(x)$ en 0.

Donner l'allure du graphe de S.

Conseils

1) Ne pas dériver S.
Appliquer le théorème d'interversion des limites pour la limite de S en $+\infty$.

4 Continuité, dérivabilité de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-x})^n}{n^2}$

On considère la série de fonctions $\sum \frac{(1 - e^{-x})^n}{n^2}$ dont on note f la fonction somme.

1 Montrer que la fonction f est définie et continue sur $[-\ln(2), +\infty[$.

2 Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

3 Montrer que f est dérivable sur $]-\ln(2), +\infty[$ et calculer $f'(x)$.

Conseils

1) Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme de la série de fonctions sur l'intervalle indiqué.
2) Le théorème d'interversion des limites.
3) Appliquer le théorème de dérivation de la fonction somme d'une série de fonctions après avoir vérifié soigneusement les hypothèses.

5 Trois suites de fonctions

D'après ESIM.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de fonctions définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$u_0(x) = x \ ; \ u_{n+1}(x) = \frac{2\sqrt{u_n(x)}}{1 + u_n(x)}$$

1 a) Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge simplement vers la fonction constante égale à 1.

b) Soit $U_n = \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\forall x > 0 \quad U_{n+1}(x) = \frac{1 + U_n(x)}{2\sqrt{U_n(x)}}.$$

En déduire que :

$$\forall x > 0 \ \forall n \geqslant 1 \quad |U_{n+1}(x) - 1| \leqslant \frac{1}{2}\,|U_n(x) - 1|\,.$$

c) Prouver que la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$.

Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$?

2 On définit la suite de fonctions $(v_n)_{n\geqslant 0}$ par :

$$v_0 = 1 \ ; \ \forall n \geqslant 0 \quad , v_{n+1} = v_n \frac{1 + u_n}{2}.$$

a) Montrer que, pour tout $x > 0$, les suites $(v_n(x))_{n\geqslant 1}$ et $(v_n(x)u_n(x))_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

On note $f(x)$ la limite de la suite $(v_n(x))_{n\geqslant 1}$.

b) Montrer que les suites de fonctions $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(u_n v_n)_{n\geqslant 1}$ convergent uniformément vers f sur tout compact de $]0, +\infty[$.

c) En déduire que la fonction f est continue sur $]0, +\infty[$.

Conseils

1) a) Fixer x et penser à écrire $u_{n+1}(x) = g(u_n(x))$. Étudier alors une suite récurrente.
2) b) Utiliser le fait que les suites $(v_n(x))_{n\geqslant 1}$ et $(v_n(x)u_n(x))_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

6 Jolies formules

Montrer que, de deux manières différentes, que :

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \ ; \qquad \int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Conseils

Justifier l'existence de l'intégrale.
Utiliser les sommes partielles du développement de exp en série entière ;
Majorer le reste grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange..

7 Deux équivalents

On considère, pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x.$$

1 Montrer que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

2 En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^t \,\mathrm{d}x \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2t}}$.

8* Des séries trigonométriques

D'après X, MP.*

Le but de cet exercice est d'étudier les sommes de séries trigonométriques de la forme :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

où la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement positive, décroissante et de limite nulle.

La première partie est consacrée à des propriétés générales ; la seconde à l'étude de la convergence uniforme de la série sur $[0, \pi]$.

Partie 1

Pour tout entier $n > 0$, on définit des fonctions E_n, A_n, f_n sur $[0, \pi]$ par :

$$E_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \ ; \quad A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1})E_k(x) \ ;$$

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$$

1 ▬ **a)** Vérifier que l'on a :
$$2\sin\frac{x}{2}E_n(x) = \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x.$$
b) Montrer que :
$$f_n(x) = A_n(x) + b_{n+1}E_n(x).$$
c) Établir les inégalités :
$$\sin\frac{x}{2}\,|A_n(x)| \leqslant b_1 - b_{n+1}$$
$$\sin\frac{x}{2}\,|A_p(x) - A_n(x)| \leqslant b_{n+1} - b_{p+1}$$
$$\sin\frac{x}{2}\,|f_p(x) - f_n(x)| \leqslant 2b_{n+1}.$$
lorsque $n < p$.

2 ▬ Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur l'intervalle $[0,\pi]$ et que la convergence est uniforme sur tout intervalle $[\alpha,\pi]$, où $0 < \alpha < \pi$. Que peut-on dire de la fonction f, limite simple de la suite (f_n) ?

3 ▬ **a)** Établir que, pour tout t dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t$.

b) Montrer que, pour tout entier $m > 0$, la fonction $(x \mapsto \sin(mx)\,f(x))$ est continue sur $[0,\pi]$.

c) En utilisant les coefficients de Fourier, calculer son intégrale sur cet intervalle.

(*Si vous n'avez pas encore étudié les coefficients de Fourier, laissez cette question qui ne sert pas ensuite.*)

Partie 2

4 ▬ On suppose que la suite $(nb_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0 et on pose $\varepsilon_n = \sup\limits_{k\geqslant n}(kb_k)$.

Pour tout x dans $]0,\pi]$, on note p la partie entière de $\frac{\pi}{x}$ de sorte que :
$$p \leqslant \frac{\pi}{x} < p+1.$$
a) Vérifier les inégalités suivantes :
$$\left|\sum_{k=n}^{n+p-1} b_k\sin(kx)\right| \leqslant \pi\varepsilon_n\ ; \qquad \left|\sum_{k=n+p}^{+\infty} b_k\sin(kx)\right| \leqslant 2\varepsilon_n$$
b) Déduire de ce qui précède que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,\pi]$.

5 ▬ Montrer que, réciproquement, si la suite (f_n) converge uniformément sur $[0,\pi]$, la suite (nb_n) tend vers 0.

On pourra établir qu'il existe une constante C telle que, pour tout n :
$$\sum_{k=n+1}^{2n} b_k\sin\frac{k\pi}{4n} \geqslant Cnb_{2n}$$

Conseils

1) b) Transformer l'expression au second membre.
3) a) Inégalité de concavité.
b) Montrer la convergence uniforme de la suite de fonctions $(x \mapsto \sin(mx)\,f_n(x))$ continues sur l'intervalle $[0,\pi]$.
Utiliser $\forall x \quad |\sin x| \leqslant |x|$.
4) a) Pour la seconde inégalité, majorer d'abord $|f_{n+p+k}(x) - f_{n+p-1}(x)|$, puis faire tendre k vers $+\infty$.

CORRIGÉS

1 Pour s'entraîner

1 Pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la suite $(f_n(x))$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Notons $x_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$f_n(x_n) = n \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \cos^n \frac{1}{\sqrt{n}} \sim \sqrt{n}\mathrm{e}^{-1/2}$$

La suite de fonctions (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2 **a)** Fixons x. La suite $(f(nx))$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Cependant, la fonction f est continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$ puisque :

$$f(0) = 0 = \lim_{+\infty} f.$$

Lorsque n est fixé non nul et que x décrit $\mathbb{R}^+$, nx décrit $\mathbb{R}^+$. D'où :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x)| = \|f\|_\infty .$$

Si la fonction f n'est pas nulle, la convergence de la suite de fonctions (f_n) n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Justifier de manière analogue que la convergence de la suite de fonctions (f_n) n'est pas uniforme sur tout compact de la forme $[0, a]$, où $a > 0$.

En revanche, si a et ε sont des réels strictement positifs fixés :

$$\exists A > 0 \quad \forall x \geqslant A \qquad |f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Alors, en posant $N = \mathrm{E}\left(\frac{A}{a}\right) + 1$:

$$\forall n \geqslant N \ \ \forall x \in [a, +\infty[\quad |f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[a, +\infty[$.

b) Fixons x. La suite $\left(f\left(\frac{x}{n}\right)\right)$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

La suite de fonctions (g_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Lorsque n est fixé non nul et x décrit $\mathbb{R}^+$, $\frac{x}{n}$ décrit $\mathbb{R}^+$. D'où :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^+} |g_n(x)| = \|f\|_\infty$$

Si la fonction f n'est pas nulle, la convergence de la suite de fonctions (g_n) n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Soit $a > 0$ et $[0, a]$ un compact de $\mathbb{R}^+$.

$$\sup_{x\in[0,a]} |g_n(x)| = \left\| f_{|[0,\frac{a}{n}]} \right\|_\infty .$$

En déduire que la convergence de la suite de fonctions (g_n) est uniforme sur tout compact de la forme $[0, a]$, où $a > 0$.

c) Fixons x. La suite $\left(f(nx)\, f\left(\frac{x}{n}\right)\right)$ converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

La suite de fonctions (h_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$.

Montrons maintenant que la convergence de la suite de fonctions (h_n) est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ et $A > 0$ tels que :

$(\forall x \geqslant A \quad |f(x)| \leqslant \varepsilon)$ et $(\forall x \in [0, \alpha[\quad |f(x)| \leqslant \varepsilon)$.

Puis il existe un entier naturel N tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad \forall x \in [0, A] \qquad \frac{x}{n} \leqslant \alpha.$$

Finalement :

$$\forall n \geqslant N \quad \forall x \in [0, A] \qquad \left| f\left(\frac{x}{n}\right) f(nx) \right| \leqslant \varepsilon \|f\|_\infty .$$

et : $\quad \forall x \geqslant A \qquad \left| f\left(\frac{x}{n}\right) f(nx) \right| \leqslant \|f\|_\infty \varepsilon.$

La convergence de la suite de fonctions (h_n) est uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

3 **a)** En $x = 0$ ou $x = 1$, la série numérique $\sum u_n(x)$ converge.

Pour tout x de $]0,1[$, on a $0 \leqslant a_n x^n \leqslant a_0 x^n$.

La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

b) Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction positive ϕ : $(x \mapsto x^n(1-x))$ admet un maximum en $\frac{n}{n+1}$ et :

$$\|\phi(x)\|_\infty = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}.$$

Puis $a_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \sim \frac{a_n}{n\mathrm{e}}$.

Nous en déduisons que la convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est normale sur [0,1] si, et seulement si, la série $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.

c) Notons, pour x dans [0,1] et $n \geqslant 1$:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$$

et étudions la convergence uniforme de la suite de fonctions (R_n) vers la fonction nulle sur [0,1].

$R_n(0) = 0 = R_n(1)$ et $\forall x \in]0,1[$

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant a_{n+1}(1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = a_{n+1}x^{n+1} \leqslant a_{n+1}$$

Si la suite (a_n) tend vers 0, la convergence de la série de fonctions est uniforme sur [0,1].

Si la suite (a_n) ne tend pas vers 0, elle admet une limite $l > 0$ car elle est décroissante et positive.

Dans ce cas : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geqslant l$.

Puis :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \ \forall x \in]0,1[\quad R_n(x) \geqslant l(1-x) \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = l x^{n+1}.$$

En particulier :

$$\forall n \geqslant 1 \quad R_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \geqslant l\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Or $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} l\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{l}{\mathrm{e}}$.

Donc la convergence de la série n'est pas uniforme.

4 ▬ **a)** La série de fonctions $\sum \frac{2x}{n^2+x^2}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $a > 0$.

$$\forall n \geqslant 1 \ \ \forall x \in [-a,a] \quad \left|\frac{2x}{n^2+x^2}\right| \leqslant \frac{2a}{n^2}$$

La série de fonctions $\sum \frac{2x}{n^2+x^2}$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Les fonctions $\left(x \mapsto \frac{2x}{n^2+x^2}\right)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

c) La fonction f est impaire sur $\mathbb{R}$.

Utilisons la comparaison avec une intégrale pour encadrer f.

Pour tout $x > 0$ fixé, la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$, $\left(u \mapsto \frac{2x}{x^2+u^2}\right)$, est positive et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

$\forall x > 0 \quad \forall k \geqslant 1 \quad \forall u \in [k-1,k]$

$$\frac{2x}{x^2+k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{2x}{x^2+u^2}\mathrm{d}u \leqslant \frac{2x}{x^2+(k-1)^2}.$$

Sommons :

$\forall x > 0$

$$f(x) - \frac{2x}{x^2+1} \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{2x}{x^2+u^2}\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{2x}{x^2+u^2}\mathrm{d}u \leqslant f(x).$$

Puis, en intégrant :

$$\forall x > 0 \quad f(x) - \frac{2x}{x^2+1} \leqslant \pi - 2\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x} \leqslant f(x).$$

Finalement, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \pi$.

En déduire que la convergence de la série de fonctions n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

2 La série de fonctions $\sum \ln(1+x^n)$

1 ▬ Soit x dans $]-1,1[$. Alors $|\ln(1+x^n)| \sim |x|^n$.

La série $\sum \ln(1+x^n)$ est absolument convergente, donc convergente.

Cette série n'est pas définie si $x \leqslant -1$. Elle diverge grossièrement si $x \geqslant 1$.

Soit a tel que : $0 \leqslant a < 1$. Alors :

$$\forall x \in [-a,a] \quad 1 - a^n \leqslant 1 + x^n \leqslant 1 + a^n.$$

Puis $\forall x \in [-a,a]$

$$|\ln(1+x^n)| \leqslant \max\left(|\ln(1-a^n)|, \ln(1+a^n)\right).$$

Les séries $\sum |\ln(1-a^n)|, \sum \ln(1+a^n)$ convergent.

Donc la série de fonctions $\sum \ln(1+x^n)$ converge normalement sur tout segment de $]-1,1[$. Les fonctions $(x \mapsto \ln(1+x^n))$ sont continues sur $]-1,1[$.

La fonction f est continue sur $]-1,1[$.

2 ▬ Utilisons la comparaison avec une intégrale.

Pour tout x fixé dans $[0,1[$, la fonction $g : (t \mapsto \ln(1+x^t))$ est positive et décroissante sur $[0,+\infty[$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \ln(1+x^{n+1}) \leqslant \int_n^{n+1} \ln(1+x^t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ln(1+x^n)$$

Contrôler que la fonction g est intégrable sur $[0,+\infty[$.

$\forall x \in [0,1[$

$$f(x) - \ln(1+x) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} \ln(1+x^t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \ln(1+x^t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(x).$$

En posant $u = x^t$:

$$\int_0^{+\infty} \ln(1+x^t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\ln x}\int_{x^A}^{1} \frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u.$$

D'où $f(x) \sim_{1-} \dfrac{1}{1-x} \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u$.

Calculons cette intégrale.

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{u^n}{n+1}\right)\mathrm{d}u.$$

La série de fonctions $\sum (-1)^n \dfrac{u^n}{n+1}$ converge simplement sur [0,1] et vérifie, pour tout u fixé de]0,1] le critère spécial des séries alternées.

Donc :

$$\forall u \in [0,1] \quad \left|\sum_{n=N}^{+\infty}(-1)^n \frac{u^n}{n+1}\right| \leqslant \frac{u^N}{N+1} \leqslant \frac{1}{N+1}.$$

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^n \frac{u^n}{n+1}\mathrm{d}u \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} \\ &= \frac{\pi^2}{12}.\end{aligned}$$

3 La fonction $\left(x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{sh}^2 nx}\right)$

1 La série de fonctions $\sum \dfrac{1}{\sinh^2(nx)}$ n'est pas définie en 0.

Pour tout x non nul, $\dfrac{1}{\sinh^2(nx)} \sim 4\mathrm{e}^{-2n|x|}$. La série à termes positifs $\sum \dfrac{1}{\sinh^2(nx)}$ converge.

Le domaine de définition de S est $\mathbb{R}^*$. La fonction S est paire.

Soit n un entier fixé. La fonction $\left(x \mapsto \dfrac{1}{\sinh^2(nx)}\right)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Nous en déduisons que S est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Soit $a > 0$.

La série de fonctions $\sum \dfrac{1}{\sinh^2(nx)}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$:

$$\forall x \geqslant a \quad \forall n \geqslant 1 \qquad \frac{1}{\sinh^2(nx)} \leqslant \frac{1}{\sinh^2(na)}.$$

Nous pouvons appliquer le *théorème d'interversion des limites* car les fonctions $\left(x \mapsto \dfrac{1}{\sinh^2(nx)}\right)$ ont pour limite 0 en $+\infty$:

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\lim_{x \longrightarrow +\infty}\frac{1}{\sinh^2(nx)}\right) = 0.$$

De plus, pour tout $x > 0$, $S(x) \geqslant \dfrac{1}{\sinh^2 x}$.

Donc $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow 0+} S(x) = +\infty$.

2 Étudions $x^2 S(x)$.

$$x^2 S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{\sinh^2(nx)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\frac{(nx)^2}{\sinh^2(nx)}.$$

Une étude rapide de la fonction $(u \mapsto \sinh u - u)$ vous convaincra que :

$$\forall u \geqslant 0 \quad \sinh u \geqslant u.$$

Donc $\forall u > 0 \quad 0 \leqslant \dfrac{x^2}{\sinh^2(nx)} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

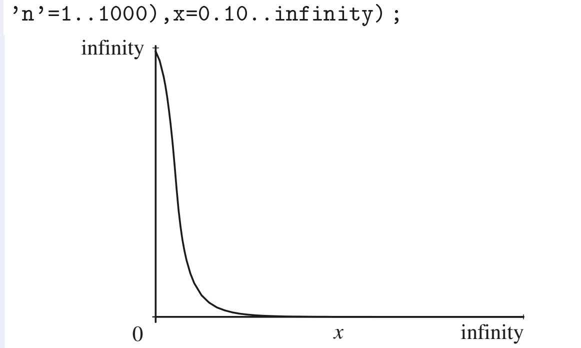
La série de fonctions $\sum \dfrac{x^2}{\sinh^2(nx)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$ et les fonctions $\left(x \mapsto \dfrac{x^2}{\sinh^2(nx)}\right)$ ont une limite lorsque x tend vers 0.

Le théorème d'interversion des limites s'applique :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} x^2 S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x \longrightarrow 0}\frac{x^2}{\sinh^2(nx)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Avec Maple

```
> plot(sum('1/(sinh(n*x))^2',
'n'=1..1000),x=0.10..infinity);
```



4 Continuité, dérivabilité de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^n}{n^2}$

1 Fixons x réel et utilisons la *règle de d'Alembert* :

$$\lim_{n \to +\infty}\frac{|1-\mathrm{e}^{-x}|}{(n+1)^2}n^2 = \left|1-\mathrm{e}^{-x}\right|.$$

La fonction $(x \mapsto (1-\mathrm{e}^{-x}))$ est croissante et continue sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$+\infty$
$y = 1 - \mathrm{e}^{-x}$	$-\infty$ ↗	-1 ↗	0 ↗	1

Elle réalise une bijection de $]-\ln 2, +\infty[$ sur $]-1, 1[$.

Pour tout x dans $]-\ln 2, +\infty[$, la série de fonctions converge.

Pour tout x dans $]-\infty, -\ln 2[$, elle diverge.

Pour $x = -\ln 2$, elle converge absolument.

La fonction f est définie sur $[-\ln 2, +\infty[$.

Montrons la convergence normale sur l'intervalle $[-\ln 2, +\infty[$. En effet :

$$\forall x \in [-\ln 2, +\infty[\quad \left|1 - \mathrm{e}^{-x}\right| \leqslant 1$$

D'où $\quad \forall x \in [-\ln 2, +\infty[\quad \left|\dfrac{(1-\mathrm{e}^{-x})^n}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}.$

La convergence de la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ permet d'affirmer la convergence normale sur $[-\ln 2, +\infty[$ de la série de fonctions définissant f.

Chacune de ces fonctions est continue sur cet intervalle.

Donc f est continue sur son domaine de définition.

2 ▬ Pour $n \geqslant 1$ fixé, la fonction $\left(x \mapsto \dfrac{(1-\mathrm{e}^{-x})^n}{n^2}\right)$ admet $\dfrac{1}{n^2}$ pour limite lorsque x tend vers l'infini.

La convergence normale sur le domaine de la série de fonctions permet d'appliquer le *théorème d'interversion des limites* :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^n}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

3 ▬ Notons $u_n(x) = \dfrac{(1-\mathrm{e}^{-x})^n}{n^2}$.

Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\ln 2, +\infty[$ et $u_n'(x) = \mathrm{e}^{-x}\dfrac{(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}}{n}$.

La règle de d'Alembert montre que la série $\sum u_n'(x)$ converge simplement sur $]-\ln 2, +\infty[$.

Elle converge aussi en $-\ln 2$, car elle vérifie le critère spécial des séries alternées.

Étudions sa convergence normale.

Soit a et b tels que $-\ln 2 < a < 0 < b$.
La fonction $\left(x \mapsto \left|(1-\mathrm{e}^{-x})\right|\right)$ est continue sur le compact $[a, b]$.

Elle est bornée et atteint ses bornes 0 et m.

$$\forall x \in [a, b] \quad |u_n'(x)| \leqslant 2\frac{m^{n-1}}{n}.$$

La série $\sum 2\dfrac{m^{n-1}}{n}$ converge, car $0 < m < 1$.

Le *théorème de dérivation d'une fonction somme d'une série de fonctions* s'applique.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\ln 2, +\infty[$ et :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\mathrm{e}^{-x}\frac{(1-\mathrm{e}^{-x})^{n-1}}{n} = \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}.$$

5 Trois suites de fonctions

1 ▬ **a)** Fixons $x > 0$ et étudions la suite :

$$(u_n(x))_{n \geqslant 0}.$$

Une récurrence simple prouve que cette suite est bien définie et à valeurs strictement positives.

Nous reconnaissons une suite récurrente.
Notons g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(t) = \frac{2\sqrt{t}}{1+t}.$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$g'(t) = \frac{1-t}{\sqrt{t}(1+t)^2}.$$

Le tableau de variations de g montre que l'intervalle $[0,1]$ est un intervalle de stabilité de g.

t	0		1		$+\infty$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	↗	1	↘	0

Pour tout $n \geqslant 1$, nous avons $0 \leqslant u_n(x) \leqslant 1$.

Or, la fonction g est croissante sur $[0,1]$. La suite $(u_n(x))_{n \geqslant 1}$ est donc monotone.

$\dfrac{u_2(x)}{u_1(x)} \geqslant 1$. La suite est croissante.

Elle est de plus bornée. Elle converge donc.

Puisque la fonction g est continue, sa limite L vérifie l'équation $g(L) = L$.

La suite de fonctions $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction constante égale à 1.

b) L'égalité demandée est immédiate.

De plus, pour tout $x > 0$ et tout $n \geqslant 1$:

$$|U_{n+1}(x) - 1| = \left|\frac{(1-\sqrt{U_n(x)})^2}{2\sqrt{U_n(x)}}\right| \leqslant \frac{1}{2}(1-\sqrt{U_n(x)})^2$$

car $U_n(x) \geqslant 1$.

Or, pour tout nombre a de $[0,1]$, on a :

$$(1-\sqrt{a})^2 \leqslant 1-a.$$

D'où :

$$|U_{n+1}(x)-1| \leqslant \frac{1}{2}\,|U_n(x)-1|\,.$$

c) Soit $[a,b]$ un compact contenu dans $]0,+\infty[$.

Une récurrence (laissée à vos bons soins) permet d'écrire, pour tout $x>0$ et tout $n \geqslant 1$:

$$|U_n(x)-1| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\,|U_1(x)-1|\,.$$

Soit :

$$|U_n(x)-1| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\,\frac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}.$$

La fonction $\left(x \mapsto \dfrac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}\right)$ est continue sur le compact $[a,b]$. Notons $C = \sup\limits_{x\in[a,b]} \dfrac{(1-\sqrt{x})^2}{2\sqrt{x}}$.

Nous obtenons :

$$|U_n(x)-1| \leqslant \frac{C}{2^{n-1}}.$$

La suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout compact de $]0,+\infty[$.

Fixons $\varepsilon > 0$ et un compact $[a,b]$ contenu dans $]0,+\infty[$. Il existe un entier N tel que :

$$\forall x \in [a,b] \quad \forall n \geqslant N \quad |U_n(x)-1| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $n \geqslant N$. Nous avons, pour tout x de $[a,b]$:

$$|u_n(x)-1| = \frac{|1-U_n(x)|}{U_n(x)} \leqslant |1-U_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

La convergence de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est uniforme sur tout compact de $]0,+\infty[$.

2 **a)** Fixons $x>0$.

Une récurrence simple montre que les suites $(v_n(x))_{n\geqslant 1}$ et $(v_n(x)u_n(x))_{n\geqslant 1}$ sont strictement positives.

Étudions le sens de variation des suites $(v_n(x))_{n\geqslant 1}$ et $(v_n(x)u_n(x))_{n\geqslant 1}$.

$$\frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)} = \frac{1+u_n(x)}{2} \leqslant 1.$$

La suite $(v_n(x))_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

$$\frac{v_{n+1}(x)u_{n+1}(x)}{v_n(x)u_n(x)} = \frac{1}{\sqrt{u_n(x)}} \geqslant 1.$$

La suite $(v_n(x)u_n(x))_{n\geqslant 1}$ est croissante.

De plus :

$$\begin{aligned}|u_n(x)v_n(x)-v_n(x)| &= v_n(x)\,|1-u_n(x)|\\ &\leqslant v_1(x)\,|1-u_n(x)|\,.\end{aligned}$$

La suite $(v_n(x)u_n(x)-v_n(x))_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.

Les suites $(v_n(x))_{n\geqslant 1}$ et $(v_n(x)u_n(x))_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

b) Pour tout $x>0$, les suites $(v_n(x)u_n(x))_{n\geqslant 1}$ et $(v_n(x))_{n\geqslant 1}$ étant adjacentes, nous savons que :

$$|u_n(x)v_n(x)-f(x)| \leqslant |u_n(x)v_n(x)-v_n(x)|$$

et :

$$|v_n(x)-f(x)| \leqslant |u_n(x)v_n(x)-v_n(x)|\,.$$

Fixons $[a,b]$ un compact contenu dans $]0,+\infty[$.

$$\forall x \in [a,b] \quad |u_n(x)v_n(x)-v_n(x)| \leqslant v_1(x)\,|1-u_n(x)|\,.$$

La fonction v_1 est continue, donc bornée sur le compact $[a,b]$ et la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément sur tout compact contenu dans $]0,+\infty[$ vers la fonction constante 1.

Nous en déduisons que les suites de fonctions $(u_nv_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ convergent uniformément sur tout compact de $]0,+\infty[$ vers f.

c) Une dernière récurrence simple vous permettra d'établir que les fonctions v_n sont continues sur $]0,+\infty[$.

La convergence uniforme sur tout compact de $]0,+\infty[$ de la suite de fonctions (v_n) vers f permet d'affirmer que f est continue sur $]0,+\infty[$.

6 Jolies formules

La fonction $(x \mapsto x^{-x} = \mathrm{e}^{-x\ln(x)})$ se prolonge par continuité en 0 et elle est continue sur $[0,1]$.

Elle est donc intégrable sur $]0,1]$.

Première méthode

Lorsque x décrit $]0,1]$, $-x\ln(x)$ décrit $[0,\frac{1}{\mathrm{e}}]$.

L'*inégalité de Taylor-Lagrange* appliquée à la fonction exp donne :

$$\forall b \in \mathbb{R} \quad \left|\mathrm{e}^b - \sum_{k=0}^{n}\frac{b^k}{k!}\right| \leqslant \frac{|b|^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{|b|}.$$

En particulier, pour tout x dans $]0,1]$:

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{e}^{-x\ln(x)} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-x\ln(x))^k}{k!}\right| &\leqslant \frac{|-x\ln(x)|^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{|-x\ln(x)|}\\ &\leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^n(n+1)!}.\end{aligned}$$

Donc :

$$0 \leqslant \int_0^1 \left|\mathrm{e}^{-x\ln(x)} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-x\ln(x))^k}{k!}\right|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\mathrm{e}^n(n+1)!}.$$

Nous en déduisons :

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x\ln(x)}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 \frac{(-x\ln(x))^k}{k!}\mathrm{d}x.$$

Calculer $\displaystyle\int_0^1 (-x\ln(x))^k\mathrm{d}x = \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}$.

Finalement :

$$\int_0^1 x^{-x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}.$$

Deuxième méthode

$$e^{-x\ln(x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-x\ln(x))^k}{k!}.$$

De plus : $$\int_0^1 (-x\ln(x))^k \mathrm{d}x = \frac{k!}{(k+1)^{k+1}}$$

et la série $\sum \dfrac{1}{(k+1)^{k+1}}$ converge.

Le *théorème d'intégration d'une série de fonctions* s'applique alors.

Montrer de manière analogue que :

$$\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

7 Deux équivalents

1 Vous avez reconnu les intégrales de Wallis déjà rencontrées. Rappelons que vous montrerez successivement que :

- la suite $(I_n)_n$ est décroissante ;
- $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$, en intégrant par parties ;
- $I_n \sim I_{n+1}$;
- la suite $((n+1)I_n I_{n+1})_n$ est constante.

En déduire l'équivalent demandé.

2 Pour tout $t \geqslant 1$ fixé, la fonction $(x \mapsto (\cos x)^t)$ est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et peut être prolongée par continuité en $\dfrac{\pi}{2}$. Elle est donc intégrable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Notons g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par :

$$g(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x))^t \mathrm{d}x.$$

Nous devons montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t)\sqrt{t} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Or la fonction g est décroissante. Donc, en notant, pour un $t > 1$, n sa partie entière :

$$I_{n+1} \leqslant g(t) \leqslant I_n$$

Puis : $$I_{n+1}\sqrt{n} \leqslant g(t)\sqrt{t} \leqslant I_n\sqrt{n+1}.$$

8 Des séries trigonométriques

1 **a)** Soit $n > 0$.

$$\begin{aligned} 2\sin\frac{x}{2} E_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\sin(kx) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)x\right) \\ &= \cos\frac{x}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)x \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} A_n(x) + b_{n+1}E_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1})E_k(x) + b_{n+1}E_n(x) \\ &= b_1 E_1 + \sum_{k=2}^{n} b_k(E_k - E_{k-1}) = f_n(x). \end{aligned}$$

c) Les inégalités demandées découlent aisément des questions précédentes pour x dans $[0, \pi]$:

$$\begin{aligned} \left|\sin\frac{x}{2} A_n(x)\right| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|(b_k - b_{k+1})E_k(x)\sin\frac{x}{2}\right| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1})\sin\frac{x}{2}\,|E_k(x)|. \end{aligned}$$

Or, d'après la question **1) a)**, $\left|\sin\dfrac{x}{2} E_k(x)\right| \leqslant 1$.

D'où $\left|\sin\dfrac{x}{2} A_n(x)\right| \leqslant b_1 - b_{n+1}$.

En outre, pour $n < p$:

$$\sin\frac{x}{2}\left(A_p(x) - A_n(x)\right) = \sin\frac{x}{2} \sum_{k=n+1}^{p} (b_k - b_{k+1})E_k(x).$$

En procédant de la même manière, on obtient :

$$\sin\frac{x}{2}\,|A_p(x) - A_n(x)| \leqslant b_{n+1} - b_{p+1}.$$

Et enfin :

$$\begin{aligned} \sin\frac{x}{2}\left(f_p(x) - f_n(x)\right) &= \sin\frac{x}{2}\left(A_p(x) - A_n(x)\right) \\ &\quad + \sin\frac{x}{2}\left(b_{p+1}E_p - b_{n+1}E_n\right). \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} &\left|\sin\frac{x}{2}\left(f_p(x) - f_n(x)\right)\right| \\ &\qquad \leqslant \left|\sin\frac{x}{2}(A_p(x) - A_n(x))\right| + \left|\sin\frac{x}{2} b_{p+1}E_p\right| \\ &\qquad\quad + \left|\sin\frac{x}{2} b_{n+1}E_n\right| \\ &\qquad \leqslant b_{n+1} - b_{p+1} + b_{p+1} + b_{n+1} = 2b_{n+1}. \end{aligned}$$

2 La suite $(f_n(0))$ est la suite nulle. Elle converge vers 0.

Fixons α dans $]0, \pi[$ et montrons la convergence uniforme de la suite de fonctions sur $[\alpha, \pi]$.

$$\forall x \in [\alpha, \pi] \ \forall p > n \quad |f_p(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{2b_{n+1}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

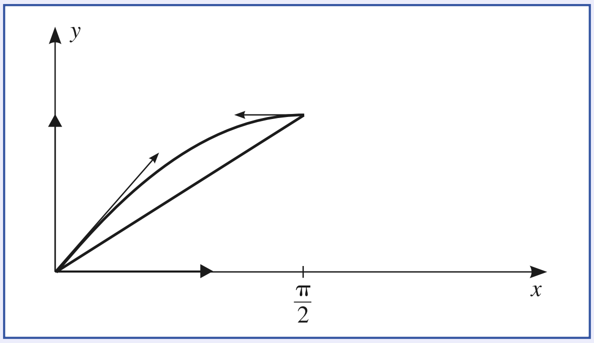
La convergence vers 0 de la suite (b_n) montre que la suite $(f_n(x))$ vérifie le critère de Cauchy uniforme.

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[\alpha, \pi]$. Elle converge donc simplement sur $[0, \pi]$.

De plus, les fonctions f_n sont continues sur $[0, \pi]$.
La fonction f est donc continue sur $]0, \pi]$.

3 ▬ **a)** Cette inégalité traduit la concavité de la fonction sinus sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

La courbe est située au-dessus de la corde joignant les points d'abscisse 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.



b) Il suffit de montrer la convergence uniforme de la suite de fonctions $(x \mapsto \sin(mx)\, f_n(x))$ continues sur l'intervalle $[0, \pi]$.

$\forall p > 0 \;\; \forall x \in \,]0, \pi]$

$$\left|\sin(mx)\left(f_p(x) - f_n(x)\right)\right| \leqslant 2b_{n+1}\frac{|\sin(mx)|}{\sin\dfrac{x}{2}}$$

$$\leqslant 2b_{n+1}\pi\frac{|\sin(mx)|}{x} \leqslant 2b_{n+1}\pi m$$

en utilisant $\forall x \quad |\sin x| \leqslant |x|$.

Cette inégalité est vraie également pour $x = 0$ et entraîne la convergence uniforme sur $[0, \pi]$ de la suite de fonctions $(x \mapsto \sin(mx)\, f_n(x))$ vers la fonction $(x \mapsto \sin(mx)\, f(x))$.

c) Nous pouvons en déduire :

$$\int_0^\pi f(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \int_0^\pi f_n(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} b_m(f_n)\right).$$

Les $\dfrac{\pi}{2} b_m(f_n)$ sont les coefficients de Fourier de f_n :

$$\forall m \leqslant n \quad b_m(f_n) = b_m.$$

D'où :

$$\int_0^\pi f(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} b_m.$$

4 ▬ **a)** Utilisons à nouveau : $\forall x \in \,]0, \pi] \quad |\sin x| \leqslant |x|$.

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p-1} b_k \sin(kx)\right| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p-1} kb_k x \leqslant px\varepsilon_n \leqslant \pi\varepsilon_n$$

car $p \leqslant \dfrac{\pi}{x}$.

Appliquons l'inégalité de la question **1) c)** avec les entiers $n + p - 1$ et $n + p + k$.

$$|f_{n+p+k}(x) - f_{n+p-1}(x)| \leqslant 2\frac{b_{n+p}}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

Or $\dfrac{1}{\sin\dfrac{x}{2}} \leqslant \dfrac{\pi}{x} \leqslant p + 1$.

D'où :

$$|f_{n+p+k}(x) - f_{n+p-1}(x)| \leqslant 2(p+1)b_{n+p} \leqslant 2(p+n)b_{n+p}$$
$$\leqslant 2\varepsilon_n.$$

Faisons tendre k vers $+\infty$. Nous obtenons :

$$|f(x) - f_{n+p-1}(x)| \leqslant 2\varepsilon_n.$$

b) La question précédente permet d'écrire :

$$\forall x \in [0, \pi] \quad \left|\sum_{k=n}^{+\infty} b_k \sin(kx)\right| \leqslant (\pi + 2)\varepsilon_n$$

Elle entraîne la convergence uniforme sur $[0, \pi]$ de la série de fonctions $\sum b_k \sin(kx)$, donc de la suite de fonctions (f_n).

5 ▬ Nous remarquons que, pour tout k entre $n+1$ et $2n$, on a : $\dfrac{k\pi}{4n} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Donc :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} b_k \sin\frac{k\pi}{4n} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} b_k \frac{k}{2n}$$

$$\geqslant \frac{b_{2n}}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n} k = \frac{(3n+1)b_{2n}}{4}$$

$$\geqslant \frac{3nb_{2n}}{4}.$$

Nous trouvons la constante $C = \dfrac{3}{4}$.

Supposons que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0, \pi]$.

Le critère de Cauchy de convergence uniforme permet d'écrire :

$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant N \;\; \forall x \in [0, \pi]$

$$|f_{2n}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Prenons $x = \dfrac{\pi}{4n}$. Nous obtenons :

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant N \quad \frac{3nb_{2n}}{4} \leqslant \varepsilon.$$

La suite $(2nb_{2n})$ tend vers 0.

Puis, pour tout entier n :

$$0 \leqslant (2n+1)b_{2n+1} \leqslant (2n+1)b_{2n} \leqslant 4nb_{2n}$$

La suite $((2n+1)b_{2n+1})$ tend aussi vers 0.

13 Séries entières

RAPPELS DE COURS

RAYON DE CONVERGENCE

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

On définit le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ en posant :

$$R = \sup\{r > 0\,;\, (a_n r^n)_n \text{ bornée}\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}\,.$$

• Pour tout complexe (ou réel) z vérifiant $|z| < R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Pour tout complexe (ou réel) z vérifiant $|z| > R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.

Le disque de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est le disque ouvert $BO(0, R)$.

L'intervalle de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est l'intervalle ouvert $]-R, R[$.

• $R = \sup\{r > 0\,;\, (a_n r^n)_n \text{ converge vers } 0\} = \sup\left\{r > 0\,;\, \sum a_n r^n \text{ converge}\right\}$.

• Si la série entière $\sum a_n z_0^n$ converge pour un certain z_0, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est tel que $|z_0| \leqslant R$.

Si la série entière $\sum a_n z_1^n$ diverge pour un certain z_1, alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est tel que $R \leqslant |z_1|$.

• La série entière $\sum a_n z^n$ $\left(\sum a_n x^n\right)$ converge normalement sur tout compact contenu dans le disque ouvert (intervalle ouvert) de convergence.

• *Règle de d'Alembert pour les séries entières*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière vérifiant :

– pour tout entier n, $a_n \neq 0$;

– la suite tend $\left(\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)_n$ vers un élément L de $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

Alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est :

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{L} & \text{si} \quad L \in \mathbb{R}^{+*} \\ +\infty & \text{si} \quad L = 0 \\ 0 & \text{si} \quad L = +\infty \end{cases}$$

• Les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^n$ et $\sum \dfrac{a_n}{n} z^n$ ont même rayon de convergence.

OPÉRATIONS SUR LES SÉRIES ENTIÈRES

• Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'.

On note ρ le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$. Alors :

– $\rho \geqslant \min(R, R')$;

– pour tout z tel que $|z| < \min(R, R')$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$;

– si $R \neq R'$, alors $\rho = \min(R, R')$.

• ***Produit de Cauchy de séries entières***

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'.

Le produit de Cauchy des deux séries entières est la série entière $\displaystyle\sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n$ et :

– son rayon de convergence ρ est $\rho \geqslant \min(R, R')$;

– pour tout complexe z tel que $|z| < \min(R, R')$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION SOMME D'UNE SÉRIE ENTIÈRE

Dans les énoncés qui suivent, les séries entières ont un rayon de convergence strictement positif.

• La fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ (respectivement $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$) est continue sur tout compact intérieur au disque ouvert de convergence (respectivement à l'intervalle ouvert de convergence).

• La fonction $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$ et :

$$\forall p \geqslant 1 \quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right)^{(p)} = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)\ldots(n-p+1) a_n x^{n-p}.$$

• Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

$$\forall x \in\,]-R, R[\quad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

FONCTIONS DÉVELOPPABLES EN SÉRIE ENTIÈRE

• Une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-r,r[$, avec $r>0$, est dite développable en série entière sur $]-r,r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R \geqslant r$, telle que :

$$\forall x \in]-r,r[\quad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Dans ce cas :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

• Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-r,r[$.

La série de Taylor de f est la série entière $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

• Pour montrer qu'une fonction est développable en série entière sur $]-r,r[$, on peut :

– utiliser les théorèmes sur les sommes, produits, dérivées, primitives de fonctions sommes de séries entières ;

– écrire une équation différentielle vérifiée par cette fonction, chercher les séries entières solution de l'équation et montrer que la fonction est la somme de l'une d'elles ;

– prouver que, pour tout x de $]-r,r[$:

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty}\left(f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right)=0.$$

LES DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE ENTIÈRE À CONNAÎTRE

• Pour tout réel x :

$$\mathrm{e}^{xz}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(xz)^n}{n!}\ ; \qquad \cos x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ ; \qquad \sin x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ;$$

$$\mathrm{ch}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ ; \qquad \mathrm{sh}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

• Pour tout x de]-1,1[:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\ ;$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n\ ;$$

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}\ ;$$

$$(1+x)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n\ ;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\ ;$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}\ ;$$

$$\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-x^n}{n};$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n};$$

$$\mathrm{Arctan}\, x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$\mathrm{Arcsin}\, x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1};$$

$$\mathrm{Argsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})\ ;$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

ÉNONCÉS

1 Pour s'entraîner

1 Quel est le rayon de convergence des séries entières :

a) $\sum \frac{z^n}{n^{10}+n+1}$; **b)** $\sum \frac{z^n}{4^n+1}$;

c) $\sum \left(\frac{1}{4^n+1}+\frac{1}{n^{10}+n+1}\right) z^n$;

d) $\sum \frac{z^n}{\sin\left(n\pi\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$; **e)** $\sum \frac{1}{\left(\mathrm{ch}\frac{1}{n}\right)^{n^a}} x^n$?

2 Soit (a_n) une suite complexe. Comparer les rayons de convergence des séries entières de termes généraux $a_n z^n$, $a_n^2 z^n$, $a_n z^{2n}$, $a_n z^{n^2}$.

3 Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{x^{n-1}}{n}$? Calculer la somme de la série entière.

4 Même question avec $\sum \frac{x^n}{n!(n+2)}$.

5 Même question avec $\sum x^n \cos(n\alpha)$.

6 Même question avec $\sum \left(\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t\right) x^n$.

7 Même question avec $\sum \frac{(-x)^n}{(2n+1)(2n+3)}$.

8 Soit $k \geqslant 1$ un entier. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum n^k \mathrm{e}^{-rn} x^n$?
On note $S_{k,r}(x)$ sa somme.
Montrer qu'il existe un polynôme P_k tel que :

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{-t}}\right) = P_k\left(\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{-t}}\right)$$

et en déduire la valeur de $S_{k,r}(x)$.

9 Domaine de convergence et somme de $\sum n^{(-1)^n} x^n$.

10 Même question avec $\sum \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

Conseils

1) a) Les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum a_n n x^n$ ont même rayon de convergence...

d) Utiliser l'entier k_n tel que :

$$k_n - \frac{1}{2} < n\frac{\sqrt{3}}{2} < k_n + \frac{1}{2}$$

pour minorer $\left|\sin\left(n\pi\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|$.

2) Distinguer les cas $R = +\infty$ et $R > 0$, où R est le rayon de convergence de la série $\sum a_n z^n$.
Dans le second cas, pour la dernière série, considérer r tel que :

$$0 < r < R.$$

3) Utiliser soit une formule du cours, soit une primitive.

5) $\cos(n\alpha) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{in\alpha})$.

6) Encadrer $a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t$ pour déterminer le rayon de convergence.

7) Pour calculer la somme, distinguer les cas où $x > 0$ et $x < 0$, faire apparaître :

$$\sum \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{et} \quad \sum (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

8) Utiliser, après justification :

$$\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-nt}.$$

9) Séparer les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs.

10) Utiliser j et j^2.

2* Série numérique et série entière

1 Étude de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \int_n^{n+1/2} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^p}$.

2 Rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$.

Conseil

Chercher un équivalent de l'intégrale.

3 Un produit de Cauchy

Soit $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ et, pour $n \geqslant 2$: $b_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.

Étudier la convergence de la série de terme général b_n, ainsi que sa somme éventuelle.

Conseil

Préciser b_n.

4 Une série de fonctions

Préciser le domaine de convergence de la série de fonctions $\sum \frac{1}{n}\left(\frac{z}{z-1}\right)^n$.

Conseil

Revenir à une série entière.

5* Principe des zéros isolés

La suite (z_p) est une suite de complexes non nuls convergeant vers 0.

1 La série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. Sa somme est notée f et on suppose que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad f(z_p) = 0.$$

Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a : $a_n = 0$.

2 Que peut-on dire de deux séries entières dont les sommes f et g vérifient :

$$\forall \in \mathbb{N} \quad f(z_p) = g(z_p)\,?$$

Conseil

1) Poser $f(z) = z^q g(z)$, pour un entier q bien choisi.

6* Sommes de séries entières équivalentes

1 Les suites (a_n) et (b_n) sont positives, équivalentes et telles que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont un rayon de convergence infini.

On suppose également qu'aucune de ces séries entières n'est un polynôme.

Montrer que, au voisinage de $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \sim \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

2 Déterminer le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}$$

Donner un équivalent de la somme lorsque x tend vers $+\infty$.

Conseils

1) Traduire, avec un ε, l'équivalence des deux suites.
2) Pour ne pas changer, la règle de d'Alembert... avec quelques calculs.

7* Fonction réciproque de la somme d'une série entière

Soit (a_n) une suite réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n \geqslant 0 \text{ et } a_1 > 0.$$

On pose $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ et $A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, lorsque cette écriture a un sens.

1 Soit $y \geqslant 0$. Montrer qu'il existe un unique $f_n(y)$, réel positif, tel que $A_n(f_n(y)) = y$.

2 Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction que l'on notera f.

3 Montrer que $A(f(y))$ existe, pour tout réel $y \geqslant 0$.

4 Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$. Montrer que, si $f(y) < R$, alors $A(f(y)) = y$.

5 Que dire des représentations graphiques de A et de f ?

Conseils

2) Étudier la monotonie de $(f_n(y))$.
4) La suite de fonctions (A_n) converge uniformément sur tout compact de $[0, R[$.

8 Développements en série entière

Montrer que les fonctions suivantes sont développables en série entière et donner leurs développements.

1 $f(x) = \sin^3 x$.

2 $f(x) = \ln(1 - \sqrt{2}x + x^2)$.

Conseils

1) De l'utilité de la trigonométrie du Bac...
2) Dériver...

9* Développement en série entière de $\dfrac{x}{\ln|1-x|}$

D'après Mines pratique.

On considère la fonction définie sur $]-1, 1[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln|1-x|} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

1 ▬ **a)** Démontrer que la fonction f vérifie dans un voisinage de 0 l'équation différentielle :

$$x(1-x)y' - (1-x)y = y^2.$$

b) En déduire que, si f est développable en série entière dans un voisinage de 0, pour tout entier $n \geqslant 4$, les coefficients a_p de la série entière vérifient la relation :

$$(n+1)a_n = (n-1)a_{n-1} + \sum_{p=2}^{n-2} a_p a_{n-p}.$$

2 ▬ **a)** Montrer que les coefficients a_n vérifient également :

$$\forall n \geqslant 2 \quad a_n = \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{n-k+1}.$$

b) En déduire la valeur de a_2, a_3 et a_4.

c) En déduire également que la suite des coefficients a_n vérifie, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'encadrement :

$$\frac{1}{3n^2} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

d) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

3 ▬ On note S la somme de la série entière $\sum a_n x^n$.

Quelle est la valeur, dans un voisinage de 0, de l'expression $S(x)\dfrac{\ln|1-x|}{x}$?

En déduire une expression simple, pour tout réel x de $]-R, R[$, de $S(x)$.

4 ▬ Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$, et tout réel x de l'intervalle $]0,1[$, les inégalités :

$$\sum_{p=1}^{n} a_p x^p \leqslant \sum_{p=1}^{+\infty} a_p x^p = \frac{x}{\ln|1-x|} + 1.$$

En déduire que la série $\sum a_n$ est convergente.

Démontrer que la fonction S est définie en R et en $-R$.

Donner les valeurs de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$; $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$.

5 ▬ Démontrer que la série de terme général u_n, $n \geqslant 4$, défini par la relation $u_n = \displaystyle\sum_{p=2}^{n-2} a_p a_{n-p}$ est convergente.

Donner un majorant de la somme $\displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} u_n$.

En déduire que la suite $(na_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Donner sa limite.

6 ▬ **Application au calcul de l'inverse d'une matrice**

Soit A la matrice carrée d'ordre n dont les éléments a_{ij} sont définis par les relations :

$$a_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{i-j+1} & \text{si} \quad 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n \\ 0 & \text{si} \quad i < j \end{cases}$$

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit J la matrice carrée d'ordre n dont les éléments c_{ij} sont définis par $c_{ij} = \delta_{i,\,j+1}$.

Le symbole $\delta_{i,\,j}$ est le *symbole de Kronecker*.

Calculer les puissances successives de la matrice J. Démontrer que la matrice A est une fonction polynomiale de J.

Déterminer la matrice inverse de la matrice A.

Conseils

2) a) Utiliser la relation $f(x)\ln(1-x) = x$.
4) Utiliser le théorème d'interversion des limites.
5) Utiliser la question **1) b)**.

10* Une équation fonctionnelle

Soit q réel tel que $|q| < 1$.

1 ▬ Déterminer les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = (1-qx)f(qx)$.

2 ▬ Montrer que toutes ces fonctions sont développables en série entière à l'origine.

Conseils

1) Exprimer $f(x)$ en fonction de $f(q^n x)$, puis faire tendre n vers $+\infty$.
2) Chercher une série entière qui vérifie la condition donnée.

11* Un problème d'Euler

Imaginez-vous un mathématicien écrivant l'équivalent de 75 livres de mathématiques ?

Né près de Bâle, en Suisse, en 1707, **Euler** écrivit dès l'âge de 18 ans. Aucune recherche en mathématiques ou physique du XVIII^e siècle ne lui est étrangère. Quand il mourut, il fut dit que tous les mathématiciens européens avaient été ses élèves.

De combien de façons différentes peut-on diviser en triangles un polygone convexe à n côtés en y traçant des diagonales qui ne se rencontrent pas à l'intérieur du polygone ?

Conseils

Trouver une relation de récurrence simple entre les nombres cherchés.
Introduire la série entière $\sum c_n x^n$, où les c_n désignent ces nombres.

12* Le développement asymptotique de $\displaystyle\sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_n\leqslant n} \frac{1}{i_1 i_2 \ldots i_n}$

On note $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_n\leqslant n} \frac{1}{i_1 i_2 \ldots i_n}$ et on souhaite déterminer un développement asymptotique de S_n.

La fraction rationnelle :

$$\frac{1}{(1-X)\left(1-\frac{X}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{X}{n}\right)},$$

utile dès la deuxième question, est notée $F_n(X)$.

1 Soit $i_1, i_2, \ldots, i_n$ n entiers tels que $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_n$. Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, on pose : $\alpha_k = \operatorname{Card}\{p ; i_p = k\}$

Comparer :

$$\sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_n\leqslant n} \frac{1}{i_1 i_2 \ldots i_n} \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=n} \frac{1}{1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\ldots n^{\alpha_n}}$$

2 Montrer que la fonction F_n est développable en série entière sur un voisinage de 0 à préciser et calculer ce développement de deux manières différentes.

En déduire S_n.

Vérifier votre résultat en prenant $n = 3$.

3 En déduire un développement asymptotique de S_n.

Conseils

1) Prendre des exemples précis, justifier soigneusement les égalités.
2) La fonction F_n est un produit. Toute fraction rationnelle peut se décomposer en éléments simples.
3) Comparer les différents termes obtenus dans cette somme.

Algorithmes

1* Approximations de Padé

D'après Mines.

Soit f une fonction réelle égale à la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$; le rayon de convergence R est supposé strictement positif.

Dans l'intervalle de convergence $]-R, R[$, la valeur de $f(x)$ est donnée par la relation :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Étant donnés deux entiers naturels p et q, on dit que la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre (p,q) si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(C$_1$) Il existe deux polynômes P et Q de degré respectivement égal à p et à q tels que le polynôme Q prenne la valeur 1 en 0 et tels que la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ soit irréductible.

(C$_2$) Il existe deux réels α et M vérifiant les inégalités $0 < \alpha \leqslant R$ et $M > 0$ tels que les trois fonctions f, P, Q aient la propriété :

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[\quad \left| f(x) - \frac{P(x)}{Q(x)} \right| \leqslant M\,|x|^{p+q+1}.$$

Partie mathématique

A. Quelques propriétés de cette approximation de Padé et quelques exemples

1 Démontrer que, pour que la fonction f admette une approximation de Padé d'ordre (p,q), il faut et il suffit que la condition ($\mathbf{C_1}$) ci-dessus et la condition ($\mathbf{C_3}$) ci-après soient satisfaites :

($\mathbf{C_3}$) Il existe deux réels α et M vérifiant les inégalités $0 < \alpha \leqslant R$ et $M > 0$ tels que les trois fonctions f, P, Q aient la propriété :

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[\quad |Q(x)\,f(x) - P(x)| \leqslant M\,|x|^{p+q+1}.$$

En déduire que, si la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre (p,q), il existe une fonction g somme d'une série entière telle que, pour tout x appartenant à $]-\alpha, \alpha[$, les fonctions f, P, Q, g vérifient la relation :

$$Q(x)\,f(x) - P(x) = x^{p+q+1} g(x).$$

2 Démontrer que, si la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre (p,q), les polynômes P et Q sont définis de manière unique.

La fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ sera désignée par le symbole $[p/q]_f$ et sera appelée approximation de Padé d'ordre (p,q) de f.

3 Démontrer que, pour tout entier naturel p, la fonction f admet une approximation de Padé d'ordre $(p,0)$. Préciser $[p/0]_f$.

4 Soit P et Q deux polynômes de degré respectivement égal à p et à q tels que $Q(0) = 1$ et tels que la fraction $\dfrac{P}{Q}$ soit irréductible. Démontrer que, pour que la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ soit l'approximation de Padé d'ordre (p,q) de f, il faut et il suffit que les valeurs prises par la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $p+q$ en 0 soient égales respectivement aux valeurs prises par la fonction f et ses dérivées jusqu'à l'ordre $p+q$ en 0.

5 Supposons que la fonction f soit définie par la relation $f(x) = 1 + x^2$. Existe-t-il une approximation de Padé d'ordre (1,1) de cette fonction f ?

6 Supposons que la fonction f soit définie par la relation $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1+3x}}$.

a) Démontrer l'existence d'un développement en série entière de la fonction f dans un voisinage de 0 ; déterminer son rayon de convergence et ses trois premiers termes.

b) Calculer les approximations de Padé h_1, h_2, h_3 de la fonction f respectivement à l'ordre (2,0), (0,1) et (1,1).

c) Vérifier que ces fonctions sont définies et continues sur la demi-droite $[0, +\infty[$.

Donner l'allure générale des graphes des fonctions f, h_1, h_2 et h_3 lorsque la variable x varie sur cette demi-droite $[0, +\infty[$.
Placer les éléments communs pour $x = 0$ et les asymptotes lorsqu'elles existent.

d) Dresser le tableau des valeurs prises par les fonctions $h_3 - f$ et $h_1 - f$ à 10^{-6} près lorsque la variable prend les valeurs suivantes : 0,1 ; 0,2 ; 0,5 ; 1 et 10.

B. Approximation de Padé d'ordre $(p, 1)$ de la fonction exponentielle

1 Déterminer d'abord l'approximation de Padé d'ordre (1,1) de la fonction exponentielle $(x \mapsto e^x)$.

2 Déterminer, pour tout entier $p \geqslant 2$, l'approximation de Padé d'ordre $(p,1)$ de la fonction exponentielle $(x \mapsto e^x)$.

Soit R_p la fraction rationnelle obtenue. Préciser le plus grand intervalle ouvert centré en 0 dans lequel la fraction R_p est définie et continue.

Démontrer que, pour tout réel x, il existe un entier P tel que la suite des réels $(R_p(x))_{p \geqslant P}$ soit convergente et de limite e^x.

Est-il possible de démontrer, de manière analogue, une convergence uniforme dans un intervalle $[-A, A]$ $(A > 0)$ vers la fonction exponentielle ?

3 **a)** L'entier p étant fixé, déterminer un intervalle centré en 0 et une suite $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels tels que la relation :

$$R_p(x) - e^x = \frac{x^{p+2}}{(p+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$$

ait lieu, pour tout x de cet intervalle. Préciser le rayon de convergence de la série entière $\sum c_k x^k$.

b) Démontrer que, pour tout intervalle $[0, A]$ $(A > 0)$, il existe un entier P tel que, pour tout entier $p \geqslant P$, l'inégalité $e^x \leqslant R_p(x)$ ait lieu pour tous les réels x de l'intervalle $[0, A]$. En déduire, sous ces hypothèses sur p et x, une majoration de la différence $R_p(x) - e^x$.

c) Il sera admis que, p étant toujours un entier, si x est un réel compris entre 0 et $p+1$, la différence entre V et la somme $S_p(x)$ des $p+1$ premiers termes de son développement en série entière dans un voisinage de 0, vérifie la double inégalité :

$$\frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \leqslant e^x - S_p(x) \leqslant \frac{x^{p+1}}{p!(p+1-x)}.$$

Est-ce que, en supposant maintenant x compris entre 0 et 1, le réel $R_p(x)$ est plus proche de e^x que $S_p(x)$?

Partie informatique

4 Écrire un programme qui calcule $\frac{P}{Q}$ lorsqu'elle existe, et renvoie un message d'erreur sinon.

Conseils

A. 3) Pensez aux sommes partielles.

4) Écrire $f - \frac{P}{Q}$ sous la forme $x^{p+q+1}g$ et comparer les dérivées.

Pour la réciproque, utiliser le fait que $Qf - P$ est développable en série entière.

6) Utiliser des développements limités.

B. 3) a) Utiliser le développement en série entière de $\frac{1}{1-u}$.

Pour le rayon de convergence, regarder le comportement de la fonction lorsque x tend vers $p+1$.

2 Calcul de π

D'après Quadrature. Magazine de mathématiques pures et épicées, n° 45, 47 et 48.

Depuis quatre millénaires, le nombre π fascine et de nouvelles propriétés de ce nombre sont encore découvertes de nos jours. Nous allons explorer quelques-unes des méthodes mises en oeuvre pour calculer des décimales de π.

Préliminaire

Si $(x_n)_n$ est une suite réelle convergeant vers L, on dit que la suite $(y_n)_n$ accélère la convergence de la suite $(x_n)_n$ si : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{L-y_n}{L-x_n} = 0$.

Le mathématicien et calculateur prodige **Alexander Aitken** invente, en 1926, une méthode d'accélération de convergence appelée le procédé delta-2 d'Aitken. Ce procédé consiste à substituer à la suite $(x_n)_n$ la suite $(y_n)_{n\geqslant 2}$, avec :

$$y_n = \frac{x_n x_{n-2} - x_{n-1}^2}{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}}$$

Si on prend $(x_n)_n$ sous la forme $x_n = L + ab^n$ et on calcule y_n, on trouve : $y_n = L$.

Nous admettrons que, si la suite $(x_n)_n$ « ressemble » à une suite géométrique, le procédé delta-2 d'Aitken accélère la convergence de la suite $(x_n)_n$. Plus précisément, si la suite $\left(\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}\right)$ converge un réel b non nul de $[-1, 1[$, alors le procédé delta-2 d'Aitken accélère la convergence de la suite $(x_n)_n$.

• **John Wallis** (1616-1703) fut le premier à donner une écriture de π comme produit infini de fractions rationnelles.

On a démontré la formule :

$$\pi = 2\frac{2.2.4.4.6\cdots}{1.3.3.5.5\cdots} = 2\prod_{p=1}^{+\infty} \frac{4p^2}{(2p-1)(2p+1)}$$

en étudiant les *intégrales de Wallis*.

Toutefois, la convergence est très lente.

$$2\prod_{p=1}^{2500} \frac{4p^2}{(2p-1)(2p+1)} = 3.141\ 4355935.$$

Si on applique le delta-2 d'Aitken à cette suite, on obtient, pour $n = 1000$: 3.141 19.

• **James Gregory** (1638-1675) découvre la formule :

$$\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

• **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716) utilise la formule précédente avec $x = 1$ et obtient :

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Cette série vérifie le critère spécial des séries alternées et la majoration du reste donnée par le critère montre que la série converge très lentement. Notons : $x_n = 4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Pour accélérer sa convergence, on peut grouper les termes deux par deux :

$$\pi = 8\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}$$

et poser $z_n = 8\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)}$.

Le delta-2 d'Aitken accélère aussi la convergence de la suite : $y_n = \frac{x_n x_{n-2} - x_{n-1}^2}{x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2}}$.

Enfin, on peut considérer une moyenne :

$$m_n = \frac{x_n + 3x_{n-1} + 3x_{n-2} + x_{n-3}}{8}.$$

1 Utiliser la calculatrice pour calculer et comparer les valeurs obtenues par ces quatre suites pour : $n = 5, 10, 50$.

• **Isaac Newton** (1642-1727) découvre, par des méthodes ingénieuses, la formule que l'on connait :

$$\begin{aligned}\text{Arcsin}\,(x) &= x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \cdots \\ &= x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.\cdots(2n-1)}{2.4.\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.\end{aligned}$$

Avec $x = \dfrac{1}{2}$:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.\cdots(2n-1)}{2.4.\cdots(2n)}\frac{1}{2n+1}.$$

Cette formule converge rapidement.

Newton trouve une autre formule plus compliquée qui lui donne 16 décimales exactes de π.

• Nous devons à **John Machin** (1680-1752) la formule que vous avez démontrée en première année :

$$\pi = 16\text{Arctan}\,\frac{1}{5} - 4\text{Arctan}\,\frac{1}{239}.$$

Il l'utilise pour calculer 100 décimales en 1706.

D'autres formules analogues sont établies et utilisées pour calculer des décimales de π.

• **Leonhard Euler** (1707-1783) établit la formule que nous avons rencontrée dans le livre de cours sur les séries de Fourier :

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Pendant plusieurs siècles, les chercheurs ont tenté de mettre en évidence une périodicité dans les décimales de π.

Toutefois **Johann Lambert** (1728-1777) a prouvé, en 1761, que π n'est pas rationnel. Une telle périodicité n'existe pas.

Au cours du XX^{e} siècle, d'immenses progrès ont été réalisés dans le calcul des décimales de π. Mais ces progrès sont dus beaucoup plus à des découvertes mathématiques qu'à l'utilisation de machines.

De plus, la recherche des décimales de π n'est pas un simple jeu inutile. Elle contraint à trouver des algorithmes performants de manipulation de longs nombres et de calcul sur ces nombres avec un ordinateur.

• Les algorithmes compte-gouttes.

Cet algorithme a été presenté en septembre 1995 dans la revue *Pour la science* sous la forme d'un programme écrit en langage C. Ce programme de 10 lignes calcule 2 400 décimales de π.

2 On admet que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n(n!)^2}{(2n+1)!}$.

En déduire que :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{\pi}{2}.$$

Cette formule a été établie par Euler. Elle peut s'écrire sous la forme de Horner :

$$\begin{aligned}\pi &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1.2.\cdots.n}{1.3.\cdots.(2n+1)} \\ &= \left(2 + \frac{1}{3}\left(2 + \frac{2}{5}\left(2 + \frac{3}{7}\left(2 + \frac{4}{9}\cdots\right)\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Comparons avec l'écriture de π en base 10 :

$$\pi = \left(3 + \frac{1}{10}\left(1 + \frac{1}{10}\left(4 + \frac{1}{10}(5 + \cdots)\right)\right)\right).$$

La formule d'Euler s'interprète comme l'écriture de π dans une base à pas variable : $[1, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \cdots]$.

On en déduit un algortihme de calcul des décimales de π.

Pour obtenir m décimales exactes, il est nécessaire de démarrer avec $3,32m$ entiers.

Considérer le tableau ci-dessous.

A		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B		3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
Reste	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
C	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
Retenue											0
Somme											
Reste											

Écrire les trois premières lignes. La troisième ligne est appelée « reste » pour simplifier l'écriture de l'algorithme. En ligne C, multiplier la ligne reste par 10. Et écrire 0 en retenue au bout de la ligne retenue.

Sur la dernière colonne, la somme est la somme des deux termes 20 et 0. Diviser ce nombre par B. Le reste s'écrit sous la somme, et le quotient multiplié par A s'inscrit en retenue de la colonne précédente. Itérer ensuite le procédé.

Sur la première colonne, la somme obtenue est 30. Tout a été multiplié par 10, le premier chiffre de π est 3.

On multiplie la ligne des *Restes* par 10 et on écrit les nombres obtenus sur la ligne suivante, avec un 0 comme première retenue.

Et on recommence.

	A		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	B		3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
	Reste	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
	C	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
	Retenue	10	12	12	12	10	12	7	8	9	0	0
$3 \leftarrow$	*Somme*	30	32	32	32	30	32	27	28	29	20	20
	Reste	0	2	2	4	3	10	1	13	12	1	20
	C	0	20	20	40	30	100	10	130	120	10	200
	Retenue	13	20	33	40	60	42	91	72	45	90	0
$1 \leftarrow$	*Somme*	13	40	53	80	90	142	101	202	165	100	200
	Reste	3	1	3	3	0	10	10	7	12	5	11

Toutefois, si le chiffre obtenu comme décimale de π est un 10, corriger la décimale précédente en l'augmentant d'une unité.

3 Écrire un programme TI de calcul de décimales de π.

• **Ramanujan** (1887-1920) découvre, en 1910, une formule étonnante qu'il ne démontre pas, ainsi qu'il en a l'habitude. Une démonstration de cette formule est publiée en 1985.

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \times \frac{(1103 + 26390n)}{396^{4n}}.$$

Chaque terme supplémentaire donne 8 nouvelles décimales exactes.

CORRIGÉS

1 Pour s'entraîner

1 **a)** Soit x un réel positif :

$$\frac{x^n}{n^{10}+n+1} \sim \frac{x^n}{n^{10}}.$$

La série entière $\sum \frac{x^n}{n^{10}}$ a même rayon de convergence que la série entière $\sum x^n$. Le rayon cherché est 1.

b) Soit x un réel positif :

$$\frac{x^n}{4^n+1} \sim \frac{x^n}{4^n}.$$

La série entière $\sum \frac{x^n}{4^n}$ a pour rayon de convergence 4. Le rayon cherché est 4.

c) La série entière $\sum \left(\frac{1}{4^n+1}+\frac{1}{n^{10}+n+1}\right) z^n$ est somme de deux séries entières de rayon de convergence distincts.

Le rayon cherché est 1.

d) Pour tout $n \geqslant 1$, il existe k_n entier tel que :

$$k_n - \frac{1}{2} < n\frac{\sqrt{3}}{2} < k_n + \frac{1}{2}.$$

D'où : $$-\frac{\pi}{2} < n\frac{\sqrt{3}}{2}\pi - k_n\pi < \frac{\pi}{2}.$$

Notons $u = \left|n\frac{\sqrt{3}}{2}\pi - k_n\pi\right|$.

Alors : $$\left|\sin\left(n\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)\right| = \sin u \geqslant u - \frac{u^3}{6}.$$

Or : $$u = \pi\left|n\frac{\sqrt{3}}{2} - k_n\right| = \pi\frac{|3n^2-4k_n^2|}{2(\sqrt{3}n+2k_n)} \geqslant \pi\frac{1}{2(\sqrt{3}n+2k_n)}$$

car $|3n^2-4k_n^2|$ est un entier non nul.

Donc $u \geqslant \frac{\pi}{2\sqrt{3}n}$.

D'autre part, nous savons que $0 \leqslant u \leqslant \frac{\pi}{2}$, d'où :

$$1 - \frac{u^2}{6} \geqslant 1 - \frac{\pi^2}{24}.$$

Nous pouvons alors minorer $\left|\sin\left(n\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)\right|$.

$$\left|\sin\left(n\frac{\sqrt{3}}{2}\pi\right)\right| \geqslant \frac{\pi}{2\sqrt{3}n}\left(1-\frac{\pi^2}{24}\right) = \frac{a}{n}.$$

Nous en déduisons que $R \geqslant 1$.

Mais $\left|\dfrac{x^n}{\sin\left(\frac{n\pi\sqrt{3}}{2}\right)}\right| \geqslant \dfrac{2|x|^n}{n\pi\sqrt{3}}$. Donc $R = 1$.

e) Utilisons la *règle de d'Alembert* :

$$\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right)^{n^a}}{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^a}} = \frac{e^{n^a \ln(\mathrm{ch}\frac{1}{n})}}{e^{(n+1)^a \ln(\mathrm{ch}\frac{1}{n+1})}}$$

Notons $u_n = e^{n^a \ln(\mathrm{ch}\frac{1}{n})}$. Alors :

$$\ln u_n = n^a \ln\left(1+\frac{1}{2n^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = \frac{n^{a-2}}{2} + O(n^{a-4}).$$

D'où $\ln u_n - \ln u_{n+1} = -\dfrac{a-2}{2}n^{a-3} + O(n^{a-4})$.

Puis $$\frac{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n}\right)^{n^a}}{\mathrm{ch}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^a}} = e^{-\frac{a-2}{2}n^{a-3}+O(n^{a-4})}.$$

Finalement :

- si $a > 3$, alors $R = +\infty$,
- si $a = 3$, alors $R = \sqrt{e}$,
- si $a < 3$, alors $R = 1$.

2 Distinguons deux cas.

- Le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R = +\infty$.

Soit $z > 0$. Posons $z = t^2$. Alors la suite $(a_n^2 z^n) = ((a_n t)^2)$ est bornée. La série $\sum a_n^2 z^n$ converge.

Le rayon de convergence de cette série entière est $R_1 = +\infty$.

De même avec la série entière $\sum a_n z^{2n}$ dont le rayon de convergence est aussi $R_2 = +\infty$.

Toutefois, il suffit de considérer les séries entières $\sum \frac{z^n}{n^n}$ et $\sum \frac{z^{n^2}}{n^n}$ dont les rayons de convergence sont respectivement $+\infty$ et 1 pour conclure que le rayon de convergence R_3 de la série entière $\sum a_n z^{n^2}$ est $R_3 \leqslant R$.

• Le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est $R > 0$.

– Soit $t > 0$.

Si $\sqrt{t} < R$, la suite de terme général $a_n^2 t^n = (a_n \sqrt{t})^2$ est bornée.

Si $\sqrt{t} > R$, la suite de terme général $a_n^2 t^n = (a_n \sqrt{t})^2$ n'est pas bornée.

Donc $R_1 = R^2$.

Montrer de manière analogue que $R_2 = \sqrt{R}$.

Last, but not least. Étudions enfin la dernière série.

– Soit r tel que $0 < r < R$.

Alors $|a_n| \, |z|^{n^2} \leqslant |a_n r^n| \left(r^{-1} |z|^n\right)^n \leqslant M \left(r^{-1} |z|^n\right)^n$, en notant M un majorant de la suite $(|a_n r^n|)$.

Deux cas peuvent alors être distingués.

Si $|z| < 1$, alors la suite de terme général $M\left(r^{-1}|z|^n\right)^n$ tend vers 0.

La série $\sum a_n z^{n^2}$ converge.

Si $|z| > 1$, il existe N dans $\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad |z|^n > R + 1.$$

La suite de terme général $|a_n| (R+1)^n$ n'est pas bornée.

Il en est donc de même de la suite de terme général $|a_n| \left|z^{n^2}\right|$. La série $\sum a_n z^{n^2}$ diverge et $R_3 = 1$.

3 La série entière $\sum \frac{x^{n-1}}{n}$ a même rayon de convergence que $\sum x^{n-1}$, c'est-à-dire 1.

Posons, pour tout x de $]-1,1[$, $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$.

Nous savons que :

$\forall x \in]-1,1[$

$$x S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x t^{n-1} \mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{+\infty} t^{n-1} \mathrm{d}t \right)$$
$$= \int_0^x \frac{1}{1-t} \mathrm{d}t = -\ln(1-x).$$

Et $S(x) = -\dfrac{\ln(1-x)}{x}$ si $x \neq 0$; $S(0) = 1$.

On reconnaît le développement en série entière de $\ln(1-x)$.

4 La série entière $\sum \frac{x^n}{n!(n+2)}$ est la dérivée de la série entière $\sum \frac{x^{n+1}}{(n+2)!}$.

Son rayon de convergence est $R = +\infty$.

Notons S sa fonction somme.

La fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \neq 0 \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+2)!} = \frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x}$$

$$\forall x \neq 0 \quad S(x) = \frac{(x-1)\mathrm{e}^x + 1}{x^2} \; ; \; S(0) = \frac{1}{2}.$$

5 $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} x^n \cos(n\alpha) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{N} (x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha})^n \right)$

• Si $|x| < 1$, la série converge.

• Si $x = 1$, la série diverge, car son terme général ne tend pas vers 0 (*cf. chapitre* 10, *exercice* 13).

Le rayon de convergence de la série entière est 1.

Sa somme est, pour tout x dans]-1,1[:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1 - x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}\right)$$
$$= \frac{1 - x\cos\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}.$$

6 Encadrons a_n pour déterminer le rayon de convergence.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t \leqslant a_n \leqslant \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t.$$

Nous en déduisons que $R = 1$.

Soit x fixé tel que $|x| < 1$.

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \int_0^1 \frac{\sum_{n=0}^{N} t^n x^n}{\sqrt{1+t^2}} \mathrm{d}t.$$

La série de fonctions de la variable t, $\sum \frac{(tx)^n}{\sqrt{1+t^2}}$, converge uniformément sur l'intervalle [0,1] car :

$$0 \leqslant \left| \frac{(tx)^n}{\sqrt{1+t^2}} \right| \leqslant x^n.$$

Par conséquent :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \int_0^1 \frac{1}{(1-tx)\sqrt{1+t^2}} \mathrm{d}t.$$

Notons S la fonction somme sur]-1,1[de la série entière donnée.

$\forall x \in]-1,1[$

$$S(x) = \int_0^1 \frac{1}{(1-tx)\sqrt{1+t^2}}\mathrm{d}t = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} \frac{\mathrm{d}y}{1-x\,\mathrm{sh}y}$$

(en posant $t = \mathrm{sh}y$, soit $y = \ln(t+\sqrt{1+t^2})$)

$$= \int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{2\mathrm{d}u}{-xu^2+2u+x} \qquad \text{(en posant } u = \mathrm{e}^y\text{)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ln\left(\frac{x(1+\sqrt{2})+\sqrt{x^2+1}-1}{x(1+\sqrt{2})-\sqrt{x^2+1}-1}\right)$$

$$-\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}-1}{x-\sqrt{x^2+1}-1}\right).$$

Avec Maple

```
> int(2/(2*u-x*u^2+x),u=1..1+sqrt(2));
```

$$2\,\frac{\operatorname{arctanh}\left(\frac{x+x\sqrt{2}-1}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\sqrt{x^2+1}} - 2\,\frac{\operatorname{arctanh}\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\sqrt{x^2+1}}$$

7 La règle de d'Alembert permet de calculer le rayon de convergence de la série entière : $R = 1$.

De plus : $\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+3}\right)$.

Les séries entières $\sum \dfrac{x^n}{2n+1}$ et $\sum \dfrac{x^n}{2n+3}$ ont aussi 1 pour rayon de convergence.

Notons S la somme de la série entière :

$$\sum \frac{(-x)^n}{(2n+1)(2n+3)}.$$

$\forall x \in]-1,1[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{2n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{2n+3}.$$

Notons u la fonction définie sur $]-1,1[$ par :

$$u(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{2n+1}$$

$$\forall t \in]-1,1[\quad tu(t^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{Arctan} t$$

$$\forall t \in]-1,1[\quad tu(-t^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}.$$

Notons v la fonction définie sur]-1,1[par : $v(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{2n+3}$.

$$\forall t \in]-1,1[\quad t^3v(t^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+3}}{2n+3} = t - \operatorname{Arctan} t$$

$$\forall t \in]-1,1[\quad t^3v(-t^2) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{2n+3}}{2n+3} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} - t$$

Finalement :

$\forall x \in]-1,0[$

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{-x}}\ln\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} + \frac{1}{2x\sqrt{-x}}\ln\frac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}} - \frac{1}{x}\right)$$

$$S(0) = \frac{1}{3}$$

$$\forall x \in]0,1[\quad S(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\operatorname{Arctan}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)$$

8 La règle de d'Alembert permet de déterminer le rayon de convergence $R = \mathrm{e}^r$, de la série entière.

De plus : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{1-x\mathrm{e}^{-t}}\right) = \dfrac{-x\mathrm{e}^{-t}}{(1-x\mathrm{e}^{-t})^2}$

$$= \frac{1}{1-x\mathrm{e}^{-t}} - \frac{1}{(1-x\mathrm{e}^{-t})^2}$$

$$= P_1\left(\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{-t}}\right)$$

en prenant $P_1(t) = t - t^2$.

Une récurrence simple vous convaincra de l'existence du polynôme P_k, pour tout $k \geqslant 1$.

Soit x fixé dans $]-\mathrm{e}^r, \mathrm{e}^r[$. Alors, pour tout $t \geqslant r$, on a $|x\mathrm{e}^{-t}| < 1$, donc :

$$\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-nt}.$$

De plus, les fonctions $f_n : (t \mapsto x^n\mathrm{e}^{-nt})$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[r,+\infty[$.

Pour tout $k \geqslant 1$, $\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}f_n(t) = x^n(-n)^k\mathrm{e}^{-nt}$ et la série de fonctions $\sum x^n(-n)^k\mathrm{e}^{-nt}$ converge uniformément sur $[r,+\infty[$ car :

$$\forall t \geqslant r \quad \left|x^n(-n)^k\mathrm{e}^{-nt}\right| \leqslant |x|^n n^k\mathrm{e}^{-nr}.$$

La fonction $\left(t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-nt}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[r,+\infty[$ et ses dérivées s'obtiennent en dérivant terme à terme.

$$\forall t \geqslant r \quad \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{-t}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}x^n(-n)^k\mathrm{e}^{-nt}.$$

Nous en déduisons :

$\forall k \geqslant 1 \ \ \forall x \in]-\mathrm{e}^r, \mathrm{e}^r[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n n^k\mathrm{e}^{-nr} = S_{k,r}(x) = (-1)^k P_k\left(\frac{1}{1-x\mathrm{e}^{-r}}\right).$$

9 Notons $u_n(x) = n^{(-1)^n}x^n$.

$$u_{2p}(x) = 2px^{2p}\ ; \quad u_{2p+1}(x) = \frac{1}{2p+1}x^{2p+1}.$$

La série entière $\sum 2px^{2p}$ et la série entière $\sum \frac{1}{2p+1}x^{2p+1}$ ont 1 pour rayon de convergence.

Pour tout x de]-1,1[:

$$\sum_{p=0}^{+\infty} 2px^{2p} = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{p=1}^{+\infty} x^{2p}\right) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2p+1}x^{2p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty}\int_0^x t^{2p}\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{p=0}^{+\infty} t^{2p}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

Le domaine de convergence cherché est donc]-1,1[et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = \frac{2x^2}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

10 Remarquons que :

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\ ;\quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\mathrm{j}x)^n}{n!}\ ;\quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}^2x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\mathrm{j}^2x)^n}{n!}.$$

Par conséquent : $\quad \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{\mathrm{j}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{j}^2x} = 3\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}.$

2 Série numérique et série entière

1 La fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\left(t \mapsto \frac{1}{1+t^p}\right)$ est décroissante si $p > 0$, croissante si $p < 0$.

Donc, si $p > 0$, pour tout $n > 0$:

$$\frac{1}{2}\frac{1}{1+\left(n+\frac{1}{2}\right)^p} \leqslant \int_n^{n+1/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^p} \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{1+n^p}.$$

Puis $\int_n^{n+1/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^p} \sim \frac{1}{2n^p}.$

Si $p < 0$, les inégalités sont inversées et :

$$\int_n^{n+1/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^p} \sim \frac{1}{2}.$$

La série numérique $\sum \int_n^{n+1/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^p}$ converge donc si, et seulement si : $p > 1$.

2 La question précédente permet de dire que, si $p > 0$, les séries entières $\sum \int_n^{n+1/2}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^p}x^n$ et $\sum \frac{x^n}{2n^p}$ sont de même nature.

Le rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{2n^p}$ est le même que celui de $\sum x^n$, soit 1.

Si $p \leqslant 0$, on peut raisonner de même avec $\sum x^n$.

Le rayon cherché est encore 1.

Dans tous les cas, le rayon de convergence est 1.

3 Un produit de Cauchy

Précisons b_n. Pour tout $n \geqslant 2$:

$$b_n = (-1)^n\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)} = \frac{(-1)^n}{n}2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

La série $\sum b_n$ est alternée et $|b_n| \sim \frac{2\ln n}{n}$.

Son terme général tend vers 0.

De plus :

$$|b_{n+1}| - |b_n| = \frac{2}{n(n+1)}\left(n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - (n+1)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)$$

$$= \frac{2}{n(n+1)}\left(1 - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right).$$

Cette différence est négative dès que $n \geqslant 3$.

La série $\sum b_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Elle converge. Calculons sa somme.

Dans ce but, posons, pour tout x de $]-1,1]$:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_nx^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = \ln(1+x).$$

En effet, le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nx^n$ est 1 (*règle de d'Alembert*) et la série $\sum a_n$ converge.

Le *théorème sur les produits de Cauchy* nous permet d'affirmer que :

$$\forall x \in\ ]-1,1[\quad S^2(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} b_nx^n.$$

Montrons que la série entière $\sum b_nx^n$ converge uniformément sur [0,1] pour déterminer $\sum_{n=2}^{+\infty} b_n$.

Pour tout x de [0,1], la série de fonctions $\sum b_nx^n$ est une série alternée qui vérifie le critère spécial des séries alternées. Donc :

$$\forall x \in [0,1]\quad \left|\sum_{n+1}^{+\infty} b_kx^k\right| \leqslant |b_{n+1}|\,x^{n+1} \leqslant |b_{n+1}|.$$

La convergence de la série entière est donc uniforme sur [0,1] et :

$$\lim_{x\longrightarrow 1-}\sum_{n=2}^{+\infty} b_nx^n = \sum_{n=2}^{+\infty} b_n = \left(\lim_{x\longrightarrow 1-} S(x)\right)^2 = (\ln 2)^2.$$

4 Une série de fonctions

Notons $Z = \dfrac{z}{z-1}$ et $u_n(z) = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^n$.

La série entière $\sum \dfrac{Z^n}{n}$ a 1 pour rayon de convergence.

De plus $|Z| < 1 \iff |z| < |z-1|$.

Géométriquement, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, l'inégalité $|z| < |z-1|$ équivaut à dire que le point d'affixe z est plus proche de 0 que du point d'affixe 1. Ou encore $\mathrm{Re}(z) < \dfrac{1}{2}$.

La série de fonctions $\sum u_n$ converge donc, pour tout z tel que $\mathrm{Re}(z) < \dfrac{1}{2}$.

Elle diverge, pour tout z tel que $\mathrm{Re}(z) > \dfrac{1}{2}$.

Que se passe-t-il lorsque $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}$?

Dans ce cas, $|Z| = 1$.

Nous avons rencontré la série $\sum \dfrac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$ dans les livres de cours (*Analyse* 1 *MP*, page 125) et montré qu'elle converge si $\mathrm{e}^{inx} \neq 1$. Mais $Z \neq 1$.

La série de fonctions $\sum u_n(z)$ converge si, et seulement si : $\mathrm{Re}(z) \leqslant \dfrac{1}{2}$.

5 Principe des zéros isolés

1 Supposons qu'il existe n tel que : $a_n \neq 0$ et notons q le plus petit entier tel que $a_n \neq 0$.

Posons :

$$\forall z \in B(0,R) \quad f(z) = z^q g(z), \text{ avec } g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+q} z^n.$$

L'hypothèse nous permet d'écrire $\forall p \in \mathbb{N} \;\; g(z_p) = 0$.

La continuité de g en 0 donne ensuite $g(0) = a_q = 0$.

Nous obtenons une contradiction.

2 Il suffit de considérer la différence $f - g$ pour conclure que les séries entières coïncident.

6 Sommes de séries entières équivalentes

1 Fixons $\varepsilon > 0$. L'équivalence des suites (a_n) et (b_n) se traduit par :

$$\exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant N \quad (1-\varepsilon)a_n \leqslant b_n \leqslant (1+\varepsilon)a_n.$$

Donc :

$$\exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geqslant N \;\; \forall x > 1$$
$$(1-\varepsilon)a_n x^n \leqslant b_n x^n \leqslant (1+\varepsilon)a_n x^n.$$

Puis :

$\forall x > 1 \;\; \forall n \geqslant N$

$$(1-\varepsilon)\sum_{k=N}^{n} a_k x^k \leqslant \sum_{k=N}^{n} b_k x^k \leqslant (1+\varepsilon)\sum_{k=N}^{n} a_k x^k.$$

Notons respectivement A et B les fonctions sommes des séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$.

Nous obtenons :

$\forall x > 1$

$$(1-\varepsilon)\left(A(x) - \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^k\right) \leqslant B(x) - \sum_{k=0}^{N-1} b_k x^k \leqslant (1+\varepsilon)\left(A(x) + \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^k\right).$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $A(x)$ et $B(x)$ tendent vers $+\infty$ et les polynômes $\sum_{k=0}^{N-1} a_k x^k$, $\sum_{k=0}^{N-1} b_k x^k$ sont négligeables devant $A(x)$ et $B(x)$.

Nous en déduisons que $A(x) \sim B(x)$.

2 Utilisons la *règle de d'Alembert* :

$$\frac{\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2}}{(n+1)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}} = \mathrm{e}^{u(n)}$$

avec : $u(n) = (n+1)^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)$

$$-n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln(n+1).$$

D'où :

$$u(n) = (n+1)^2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) - n^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \ln n + o(1)$$
$$= -\ln n + 1 + o(1).$$

Puis : $\qquad \mathrm{e}^{u(n)} = \mathrm{e}^{-\ln n + 1 + o(1)} = \dfrac{\mathrm{e}}{n} + o(1).$

Le rayon de convergence de la série entière est $+\infty$.

Appliquons le résultat de la question précédente pour trouver un équivalent de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{x^n}{n!}$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \exp\left(n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \sim \exp\left(n - \frac{1}{2}\right).$$

Et nous obtenons, au voisinage de $+\infty$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{x^n}{n!} \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{n-1/2}\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\exp(\mathrm{e}x).$$

7 Fonction réciproque de la somme d'une série entière

1 La fonction A_n croît strictement de 0 à $+\infty$ lorsque x croît de 0 à $+\infty$.

Elle est continue sur $\mathbb{R}+$. D'où l'existence de $f_n(y)$.

2 Remarquons que :

$$\forall x \geqslant 0 \quad A_n(x) \leqslant A_{n+1}(x).$$

Nous en déduisons $\forall y \geqslant 0 \;\; A_{n+1}(f_n(y)) \geqslant y$.

Donc $\forall y \geqslant 0 \;\; 0 \leqslant f_{n+1}(y) \leqslant f_n(y)$.

La suite $(f_n(y))$ est positive, décroissante. Elle converge.

3 Il découle des inégalités ci-dessus que :

$$\forall n \quad A_n(f(y)) \leqslant y.$$

De plus, la suite $(A_n(f(y)))_n$ est croissante.
Elle converge, d'où l'existence de $A(f(y))$.

4 Soit ρ tel que $f(y) < \rho < R$.

La suite de fonctions (A_n) converge uniformément sur $[0, \rho]$ vers A.

D'où $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} (A_n(f_n(y))) = y = A(f(y))$.

5 Les deux représentations graphiques sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

8 Développements en série entière

1 La fonction sinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

Le théorème sur les produits de Cauchy permet d'affirmer que la fonction f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout x réel :

$$\sin^3 x = -\frac{1}{4}(\sin(3x) - 3\sin x)$$
$$= \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

2 La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et :

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{2x - \sqrt{2}}{1 - \sqrt{2}x + x^2}$$
$$= \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{2}}\left(\frac{2x-\sqrt{2}}{x - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}} - \frac{2x-\sqrt{2}}{x - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}\right)$$

$\forall x \in]-1, 1[$

$$f'(x) = \frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{2}}\left((2x - \sqrt{2})\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\pi/4} - (2x-\sqrt{2})\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\pi/4}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(2\sqrt{2}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) - 2\sin\left((n+1)\frac{\pi}{4}\right)\right)x^n.$$

La convergence normale sur tout segment de $]-1, 1[$ permet d'intégrer terme à terme. Avec : $f(0) = 0$:

$\forall x \in]-1, 1[$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(2\sqrt{2}\sin\left(n\frac{\pi}{4}\right) - 2\sin\left((n+1)\frac{\pi}{4}\right)\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

9 Développement en série entière de $\dfrac{x}{\ln|1-x|}$

1 **a)** La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur :

$$]-1, 0[\bigcup]0, 1[.$$

De plus, au voisinage de 0 :

$$f(x) = \frac{x}{-x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)} = -1 + \frac{x}{2} + o(x).$$

La fonction f se prolonge par continuité en 0 et est dérivable en 0 avec $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Vérifier qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$.

Calculons, pour tout x de $]-1, 1[$:

$$x(1-x)y' - (1-x)y = \frac{x^2}{\ln^2|1-x|} = y^2.$$

b) Par conséquent, si nous supposons qu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$, solution de l'équation différentielle, nous obtenons :

$\forall x \in]-R, R[$

$$x(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} a_n n x^{n-1} - (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}\right)x^n.$$

L'unicité du développement en série entière permet d'identifier les coefficients :

$$-a_0 = a_0^2\ ; \qquad a_0 = 2a_0a_1\ ;$$

$$a_2 = 2a_0a_2 + a_1^2\ ; \qquad 2a_3 - a_2 = \sum_{k=0}^{3} a_k a_{3-k}$$

$$\forall n \geqslant 4 \quad (n-1)a_n = (n-2)a_{n-1} + \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}.$$

Nous en déduisons $a_0 = -1$; $a_1 = \dfrac{1}{2}$ (ce qui est confirmé par le développement limité).

Et $\forall n \geqslant 4$

$$(n-1)a_n = (n-2)a_{n-1} + 2a_0a_n + 2a_1a_{n-1} + \sum_{k=2}^{n-2} a_k a_{n-k}.$$

Soit :

$$\forall n \geqslant 4 \quad (n+1)a_n = (n-1)a_{n-1} + \sum_{k=2}^{n-2} a_k a_{n-k}.$$

2 ▬ **a)** Pour x dans $]-1,1[$, on sait que $f(x)\ln(1-x) = x$.

Nous en déduisons l'égalité :

$$\forall x \in\ ]-R, R[\quad \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) = x.$$

Le théorème sur les produits de Cauchy de séries entières permet d'écrire :

$$\forall n \geqslant 2 \quad \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{n-k+1} = 0.$$

Soit $\forall n \geqslant 2 \quad a_n = \dfrac{1}{n+1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k \frac{1}{n-k+1}.$

b) $a_2 = \dfrac{1}{12}$; $a_3 = \dfrac{1}{24}$; $a_4 = \dfrac{19}{720}$.

c) Le résultat de la question **2) a)** permet d'écrire :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n-1}{n+1}a_{n-1} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n-2} a_k a_{n-k} \\ &\geqslant \frac{n-1}{n+1}\,\frac{1}{3(n-1)^2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=2}^{n-2} a_k a_{n-k} \\ &\geqslant \frac{1}{3(n^2-1)} + \frac{1}{(n+1)}\sum_{k=2}^{n-2} a_k a_{n-k}. \end{aligned}$$

On sait que $\forall n \geqslant 2 \quad \dfrac{1}{n^2-1} \geqslant \dfrac{1}{n^2}$.

D'où $a_n \geqslant \dfrac{1}{3n^2}$.

d) L'inégalité obtenue permet de conclure que le rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$ est 1.

3 ▬ Calculons, pour tout x de $]-1,1[$:

$$\begin{aligned} S(x)\frac{\ln(1-x)}{x} &= -\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}\right) \\ &= -a_0 - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{n-k+1}\right)x^n = 1. \end{aligned}$$

D'où : $\qquad S(x) = \dfrac{x}{\ln(1-x)} = f(x).$

4 ▬ Pour $p \geqslant 1$ et x dans $]0,1[$, les a_p et x^p sont positifs. L'inégalité est immédiate.

Elle est vérifiée pour tout x de $]0,1[$ et donne lorsque x tend vers 1 :

$$\sum_{p=1}^{n} a_p \leqslant \lim_{x\longrightarrow 1} \frac{x}{\ln(1-x)} + 1 = 1.$$

Nous pouvons en déduire que la série $\sum a_n$, à termes positifs pour $n \geqslant 1$, converge car ses sommes partielles sont majorées. Notons $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles.

La série de fonctions $\sum a_n x^n$ est donc uniformément convergente sur $[-1,1]$.

La fonction S est continue sur [-1,1] et le théorème d'interversion des limites donne :

$$\begin{aligned} S_1 + a_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\left(\lim_{x\longrightarrow 1}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) \\ &= \lim_{x\longrightarrow 1}\left(\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) = \lim_{x\longrightarrow 1} f(x) = 0. \end{aligned}$$

Soit $S_1 = -a_0 = 1$.

De même :

$$\begin{aligned} S_2 + a_0 = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n &= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\Big(\lim_{x\longrightarrow-1}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\Big) \\ &= \lim_{x\longrightarrow-1}\Big(\lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\Big) = \lim_{x\longrightarrow-1} f(x) = -\frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Soit $S_2 = 1 - \dfrac{1}{\ln 2}$.

5 ▬ La série $\sum a_p$, pour $p \geqslant 2$, est à termes positifs et convergente.

Le théorème sur les produits de Cauchy s'applique. La série $\sum\left(\displaystyle\sum_{p=2}^{n-2} a_p a_{n-p}\right)$ converge.

En utilisant la question **1) b)**, nous en déduisons la convergence de la série :

$$\sum\big((n+1)a_n - (n-1)a_{n-1}\big),$$

donc celle de la série $\sum \left(na_n - (n-1)a_{n-1}\right)$, car la série $\sum a_n$ converge.

La convergence de la suite (na_n) en découle.

Calculons sa somme.

$$\left(\sum_{n=2}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=2}^{+\infty} a_n\right) = S_1 - a_1 = \frac{1}{2}$$

$$= \sum_{n=4}^{+\infty}\left(\sum_{p=2}^{n-2} a_p a_{n-p}\right) = \sum_{n=4}^{+\infty} u_n.$$

D'où :

$$\sum_{n=4}^{+\infty}\left((n+1)a_n - (n-1)a_{n-1}\right) = \frac{1}{2}$$

$$= \sum_{n=4}^{+\infty}\left(na_n - (n-1)a_{n-1}\right) - \sum_{n=4}^{+\infty} a_n$$

$$= \lim_{n\longrightarrow+\infty} na_n - 3a_3 - S_1 + a_1 + a_2 + a_3.$$

Et enfin : $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} na_n = 1$.

6 On vérifiera, sans peine que, pour tout $k \leqslant n-1$, la matrice J^k est telle que $d_{i,j} = \delta_{i,j+k}$, où $d_{i,j}$ désigne le terme général de J^k. La matrice J^n est nulle. Par conséquent :

$$A = I_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} J^k.$$

Cette expression fait penser à $-\dfrac{\ln(1-x)}{x}$.

Regardons le produit :

$$-\left(a_0 I_n + a_1 J + \cdots + a_{n-1}J^{n-1}\right)\left(I_n + \frac{1}{2}J + \cdots + \frac{1}{n}J^{n-1}\right).$$

Les formules établies dans la question **2) a)** montrent que ce produit est I_n. L'inverse de A est donc :

$$-(a_0 I_n + a_1 J + \cdots + a_{n-1}J^{n-1}).$$

10 Une équation fonctionnelle

1 Si une telle fonction f existe, elle vérifie :

$$\forall n \geqslant 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(q^n x)\prod_{k=1}^{n}(1-q^k x).$$

La continuité de f entraîne $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} f(q^n x) = f(0)$.

Fixons x réel et étudions la suite $u_n(x) = \prod\limits_{k=1}^{n}(1-q^k x)$.

Il existe un entier N, qui dépend de x tel que $\forall k \geqslant N \ \ 1 - q^k x > 0$. Or : $\ln(1-q^k x) \sim -q^k x$.

La série définie pour $k \geqslant N$, $\sum \ln(1-q^k x)$, converge, donc la suite $(u_n(x))$ converge.

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n(x) = \prod_{k=1}^{N-1}(1-q^k x) \times e^{\sum\limits_{n=N}^{+\infty}\ln(1-q^n x)}.$$

Notons cette limite $\prod\limits_{k=1}^{+\infty}(1-q^k x)$.

Alors : $\quad \forall x \in \mathbb{R} \ \ f(x) = f(0)\prod\limits_{k=1}^{+\infty}(1-q^k x)$.

Réciproquement, si a est un réel fixé, nous devons vérifier si la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = a\prod_{k=1}^{+\infty}(1-q^k x)$$

est continue et vérifie l'égalité requise.

Nous ne vous ferons pas l'injure de justifier l'égalité qui s'obtient en revenant à $u_n(x)$.

En ce qui concerne la continuité de f, elle résulte de la convergence normale sur tout compact $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\sum \ln(1-q^k x)$.

En effet, on a :

$$\exists \alpha > 0 \quad \forall u \ \ |u| < \alpha \quad \Rightarrow \quad |\ln(1-u)| \leqslant 2\,|u|.$$

Donc, en prenant $N > -\dfrac{\ln a}{\ln|q|}$:

$$\forall n \geqslant N \quad \left|\ln(1-q^k x)\right| \leqslant 2\left|q^k x\right| \leqslant 2\,|q|^k a.$$

Les fonctions solutions sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = f(0)\prod\limits_{k=1}^{+\infty}(1-q^k x)$.

2 Les fonctions solutions sont définies à une constante près.

Posons $f(0) = 1$ et montrons que cette fonction f est développable en série entière à l'origine.

Nous cherchons une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ telle que :

$$\exists r > 0 \ \ \forall x \in \left]-r, r\right[\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

La série entière doit alors vérifier la condition :

$\forall x \in \left]-r, r\right[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = (1-qx)f(qx) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n q^{n+1} x^{n+1}.$$

L'unicité du développement en série entière permet d'identifier les coefficients :

$$\forall n \geqslant 1 \ \ a_n(1-q^n) = -a_{n-1}q^n.$$

Puis $a_n = -\dfrac{q^n}{1-q^n}a_{n-1}$.

Soit $a_n = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \dfrac{q^k}{1-q^k}$.

Réciproquement, vérifier que :

• la série entière $\sum (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \dfrac{q^k}{1-q^k} x^n$ a un rayon de convergence infini (*règle de d'Alembert*) ;

• la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{q^k}{1-q^k} x^n$$

vérifie la condition $S(x) = (1 - qx)S(qx)$.

Par unicité de la solution telle que $f(0) = 1$, nous en déduisons $f = S$.

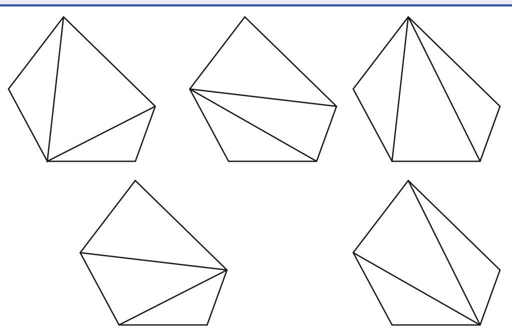
Les fonctions cherchées sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

11 Un problème d'Euler

Notons c_n le nombre de façons de partager en triangles un polygone convexe à n côtés en y traçant des diagonales qui ne se rencontrent pas.

Un schéma nous permet de calculer :

$$c_3 = 1\,; \quad c_4 = 2\,; \quad c_5 = 5.$$



$c_5 = 5$

Soit $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ un polygone convexe à $n+1$ côtés, avec $n \geqslant 4$.

Partageons-le en triangles en y traçant des diagonales qui ne se rencontrent pas.

Le côté $A_1 A_{n+1}$ appartient à l'un de ces triangles.
Soit A_k le troisième sommet de ce triangle.

Ce triangle partage le polygone convexe en deux autres ayant k et $n - k + 2$ sommets.

D'où $c_{n+1} = \sum_{k=2}^{n} c_k c_{n-k+2}$.

Bien que c_2, c_1 et c_0 ne soient pas définis par le polygone, nous allons leur attribuer des valeurs pratiques en posant $c_0 = c_1 = 0$; $c_2 = 1$.

L'égalité devient $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+2} c_k c_{n-k+2}$.

Elle est vérifiée pour tout $n \geqslant 2$.

Introduisons la série entière $\sum c_n x^n$ dont nous supposons le rayon de convergence $R > 0$.

Pour tout x dans $]-R, R[$, nous obtenons :

$$c_{n+1} x^{n+2} = \sum_{k=0}^{n+2} c_k c_{n-k+2} x^{n+2}.$$

Nous reconnaissons dans le membre de droite un *produit de Cauchy*.

La convergence absolue de la série entière pour tout x de $]-R, R[$ permet d'écrire :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} c_{n+1} x^{n+2} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n+2} c_k c_{n-k+2} x^{n+2} \right).$$

Puis, en notant la somme de la série entière S :

$$x(S(x) - x^2) = S(x)^2.$$

La fonction S vérifie l'équation du second degré :

$$y^2 - xy + x^3 = 0.$$

Pour tout $x \leqslant \dfrac{1}{4}$, les racines sont $\dfrac{x + |x|\sqrt{1-4x}}{2}$.

La fonction S doit être de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 et $S(0) = S'(0) = 0$.

Vérifier que ces conditions impliquent :

$$S(x) = \frac{x - x\sqrt{1-4x}}{2}.$$

Réciproquement, en utilisant la formule du binôme, on justifie que la fonction $\left(x \mapsto \dfrac{x - x\sqrt{1-4x}}{2} \right)$ est développable en série entière sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{4}\right[$.

Il existe une unique suite (c_n) définie par :

$$c_0 = c_1 = 0\,; \quad c_2 = 1 \quad \text{et} : \ \forall n \geqslant 2 \ \ c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+2} c_k c_{n-k+2}$$

Cette suite est donc obtenue par :

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\quad S(x) = \frac{x - x\sqrt{1-4x}}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

en utilisant le développement en série entière de $\sqrt{1-4x}$.

Or :

$$S(x) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)(-4x)^n$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!} x^n.$$

Par conséquent :

$$\forall n \geqslant 2 \;\; c_n = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!}.$$

12 Le développement asymptotique de $\displaystyle\sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_n\leqslant n} \frac{1}{i_1 i_2 \dots i_n}$

1 ▬ Il est immédiat que $\dfrac{1}{i_1 i_2 \dots i_n} = \dfrac{1}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}}$.

De plus, l'application qui, à un n-uplet $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, associe le n-uplet $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ est une bijection de l'ensemble :

$$\{(i_1, i_2, \dots, i_n);\, 1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_n \leqslant n\}$$

dans l'ensemble :

$$\{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n);\, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n\}.$$

Les sommes :

$$\sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\dots\leqslant i_n\leqslant n} \frac{1}{i_1 i_2 \dots i_n} \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=n} \frac{1}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}}$$

sont donc égales.

2 ▬ La fonction F_n est le produit de n fonctions $\left(x \mapsto \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{k}}\right)$ toutes développables en série entière sur $]-1,1[$.

Elle est donc développable en série entière sur cet intervalle et son développement s'obtient en effectuant les produits des développements indiqués.

$$\forall x \in]-1,1[\;\; F_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^m \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m,$$

avec $a_m = \displaystyle\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n=m} \frac{1}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots n^{\alpha_n}}$.

Par ailleurs, nous pouvons aussi développer F_n en série entière après l'avoir décomposée en éléments simples.

Nous obtenons :

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\binom{n}{k}}{1-\dfrac{x}{k}}.$$

Puis, pour tout x de]-1,1[:

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{k}\right)^m \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{k^m} \right) x^m. \end{aligned}$$

L'unicité du développement en série entière permet d'égaler les coefficients.

En particulier :

$$\begin{aligned} S_n = a_n &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{k^n} \\ &= n - \frac{\binom{n}{2}}{2^n} + \frac{\binom{n}{3}}{3^n} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^n}. \end{aligned}$$

Pour $n = 3$:

$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3} \frac{1}{1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3}} = \frac{575}{3^3 \times 2^3} = 3 - \frac{3}{2^3} + \frac{1}{3^3}.$$

3 ▬ Comparons, pour $k \geqslant 2$ fixé, $u_k = \dfrac{\binom{n}{k}}{k^n}$ et $u_{k+1} = \dfrac{\binom{n}{k+1}}{(k+1)^n}$ lorsque n tend vers l'infini.

$$\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{n-k}{k+1} \frac{k^n}{(k+1)^n}.$$

Ce quotient tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

De plus, $\dfrac{\binom{n}{2}}{2^n} = o(n)$. Finalement, pour tout $k \geqslant 2$ fixé :

$$S_n = n - \frac{\binom{n}{2}}{2^n} + \frac{\binom{n}{3}}{3^n} - \dots + \frac{\binom{n}{k}}{k^n} + o\left(\frac{\binom{n}{k}}{k^n} \right).$$

Algorithmes

1 Approximations de Padé

Partie mathématique

A. 1 ▬ Supposons que la fonction f vérifie les conditions $(\mathbf{C_1})$ et $(\mathbf{C_2})$. Nous en déduisons que :

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[\;\; |f(x)Q(x) - P(x)| \leqslant M\, |x|^{p+q+1}\, |Q(x)|$$

Notons $M_1 = M \times \displaystyle\sup_{x\in[-\alpha,\alpha]} |Q(x)|$.

La condition $(\mathbf{C_3})$ est vérifiée avec M_1.

Supposons que la fonction f vérifie les conditions $(\mathbf{C_1})$ et $(\mathbf{g_3})$.

Puisque $Q(0) = 1$, on peut supposer que Q ne s'annule pas sur $]-\alpha, \alpha[$, quitte à diminuer α.

Il est alors possible d'écrire :

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[\quad \left| f(x) - \frac{P(x)}{Q(x)} \right| \leqslant M \frac{|x|^{p+q+1}}{|Q(x)|}.$$

Notons $M_2 = M \times \displaystyle\sup_{x\in[-\alpha,\alpha]} \frac{1}{|Q(x)|}$.

La condition $(\mathbf{C_2})$ est vérifiée avec M_2.

Supposons que la fonction f admette une approximation de Padé d'ordre (p, q).

La fonction $h = Qf - P$ est somme d'une série entière de rayon de convergence R.

Si h est nulle, le résutat demandé est vérifié.

Sinon, notons u_m le premier coefficient non nul dans le développement en série entière de h.

Nous en déduisons $h(x) \sim_0 u_m x^m$.

Or la fonction h est, au voisinage de 0, un $O(x^{p+q+1})$. Ceci entraîne $m \geqslant p + q + 1$.

Puis $h(x) = x^{p+q+1} g(x)$ et g est somme d'une série entière.

2 Soit (P_0, Q_0), (P_1, Q_1) deux approximations de Padé d'ordre (p, q) de f.

La condition **(g_2)** et l'inégalité triangulaire permettent d'affirmer qu'il existe $\beta > 0$ et $M > 0$ tels que :

$$\forall x \in]-\beta, \beta[\quad \left| \frac{P_0(x)}{Q_0(x)} - \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \right| \leqslant M\,|x|^{p+q+1}.$$

La fonction $Q_0 Q_1$ est bornée sur le segment $[-\beta, \beta]$.

Nous en déduisons $P_0 Q_1 - P_1 Q_0 =_0 O(x^{p+q+1})$.

Or, $P_0 Q_1 - P_1 Q_0$ est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à $p + q$.

Elle est nulle. D'où $\dfrac{P_0}{Q_0} = \dfrac{P_1}{Q_1}$.

Les deux fractions rationnelles sont irréductibles et :

$$Q_0(0) = Q_1(0) = 1.$$

Donc $(P_0, Q_0) = (P_1, Q_1)$.

3 Nous cherchons dans ce cas P, Q tels que :

$$Q(x) = 1\,; \qquad \forall x \in]-\alpha, \alpha[\quad f(x) - P(x) = x^{p+1} g(x)$$

Il suffit alors de prendre $P(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{p} a_n x^n$ et $\alpha = R$.

Les polynômes P, Q sont irréductibles.

4 Supposons que la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ soit l'approximation de Padé d'ordre (p, q) de f.

Il existe alors une fonction g somme d'une série entière et $\alpha > 0$ tels que Q ne s'annule pas sur $]-\alpha, \alpha[$ et :

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[\quad Q(x) f(x) - P(x) = x^{p+q+1} g(x).$$

Soit :

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[\quad f(x) - \frac{P(x)}{Q(x)} = x^{p+q+1} \frac{g(x)}{Q(x)}.$$

Les fonctions $\left(x \mapsto f(x) - \dfrac{P(x)}{Q(x)}\right)$ et $\left(x \mapsto \dfrac{g(x)}{Q(x)}\right)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha, \alpha[$.

La fonction $f - \dfrac{P}{Q}$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $p + q$ s'annulent en 0.

Réciproquement, puisque $Q(0) = 1$, la fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$, avec $\alpha < R$.

La fonction $Qf - P$ est développable en série entière sur $]-\alpha, \alpha[$.

Notons $h = f - \dfrac{P}{Q}$ et utilisons la *formule de Leibniz* en 0 :

$\forall k \in [\![1, p+q]\!]$

$$(Qf - P)^{(k)}(0) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} h^{(j)}(0) Q^{(k-j)}(0) = 0.$$

Les dérivées jusqu'à l'ordre $p + q$ en 0 de h sont nulles.

Il existe donc une fonction g, somme d'une série entière telle que, pour tout x de $]-\alpha, \alpha[$:

$$Q(x) f(x) - P(x) = x^{p+q+1} g(x).$$

La fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ est l'approximation de Padé d'ordre (p, q) de f.

5 La recherche d'une approximation de Padé d'ordre (1,1) de f revient à la recherche des réels a, b, c tels que :

$$(1 + ax)(1 + x^2) - (cx + d) = x^3 g(x)$$

où g est une fonction somme d'une série entière.

L'unicité du développement en série entière permet d'identifier les coefficients.

Le système obtenu n'admet pas de solution.

Il n'existe pas d'approximation de Padé d'ordre (1,1) de la fonction f.

6 **a)** La fonction f s'écrit :

$$f(x) = (1 + x)^{1/2}(1 + 3x)^{-1/2}.$$

Nous savons que la fonction $(x \mapsto (1 + x)^{1/2})$ admet un développement en série entière de rayon de convergence 1, obtenu grâce à la formule du binôme.

De même, la fonction $(x \mapsto (1 + 3x)^{-1/2})$ admet un développement en série entière de rayon de convergence $\dfrac{1}{3}$, obtenu par le même procédé.

La fonction produit admet donc un développement en série entière de rayon de convergence $\dfrac{1}{3}$ (car $1 \neq \dfrac{1}{3}$), produit de Cauchy des deux développements précédents.

Pour obtenir les trois premiers termes de ce développement, il suffit de calculer le développement limité à l'ordre 2 de la fonction en 0.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{1+x}{1+3x}} = \sqrt{(1+x)(1-3x+9x^2+o(x^2))} \\ &= \left(1-2x+6x^2+o(x^2)\right)^{1/2} \\ &= 1+\frac{1}{2}(-2x+6x^2)-\frac{1}{8}(4x^2)+o(x^2) \\ &= 1-x+\frac{5}{2}x^2+o(x^2). \end{aligned}$$

b) Utilisons la question **3)**.

L'approximation de Padé de f à l'ordre (2,0) est :

$$h_1(x) = 1 - x + \frac{5}{2}x^2.$$

À l'ordre (0,1), l'approximation de Padé de f, si elle existe, est la fraction rationnelle $\dfrac{a}{1+bx}$ telle que :

$$(1+bx)\sqrt{\frac{1+x}{1+3x}} - a = x^2 g(x)$$

dans un intervalle $]-\alpha, \alpha[$, avec une fonction g somme d'une série entière.

Une condition nécessaire est que :

$$(1+bx)\sqrt{\frac{1+x}{1+3x}} - a =_0 O(x^2).$$

Ceci entraîne $a = 1$ et $b = 1$.

Vérifions. La fraction rationnelle $\dfrac{1}{1+x}$ est irréductible.

Les valeurs prises par $h_2(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et sa dérivée en 0 sont respectivement 1 et -1.

Cette fraction rationnelle est l'approximation de Padé de f d'ordre (0, 1).

À l'ordre (1,1), l'approximation de Padé de f, si elle existe, est la fraction rationnelle $\dfrac{bx+c}{1+ax}$ telle que :

$$(1+ax)\sqrt{\frac{1+x}{1+3x}} - (bx+c) = x^3 g(x)$$

dans un intervalle $]-\alpha, \alpha[$, avec une fonction g somme d'une série entière. Une condition nécessaire est que :

$$(1+ax)\sqrt{\frac{1+x}{1+3x}} - (bx+c) =_0 O(x^3).$$

Ceci entraîne :

$$c = 1\,; \quad a = \frac{5}{2}\,; \quad b = \frac{3}{2}.$$

Vérifions. La fraction rationnelle $\dfrac{1+\frac{3}{2}x}{1+\frac{5}{2}x}$ est irréductible.

Les valeurs prises par $h_3(x) = \dfrac{1+\frac{3}{2}x}{1+\frac{5}{2}x}$ sa dérivée première et sa dérivée seconde en 0 sont respectivement 1, -1 et 5.

Ce sont les valeurs prises par f, sa dérivée première et sa dérivée seconde en 0.

Cette fraction rationnelle est l'approximation de Padé de f d'ordre (1,1).

c) Les fonctions f, h_1, h_2 et h_3 sont définies, continues et dérivables sur $[0, +\infty[$.

$$f'(x) = -\sqrt{\frac{1+3x}{1+x}}\frac{1}{(1+3x)^2}\,; \qquad h_1'(x) = -1+5x\,;$$

$$h_2'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}\,; \qquad h_3'(x) = \frac{-4}{(5x+2)^2}.$$

x	0			$\frac{1}{5}$			$+\infty$
$f'(x)$	-1	$-$				$-$	
$f(x)$	1	↘					$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$h_1'(x)$	-1	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$h_1(x)$	1	↘	$\frac{9}{10}$		↗		$+\infty$
$h_2'(x)$	-1	$-$		$-$		$-$	
$h_2(x)$	1	↘					0
$h_3'(x)$	-1	$-$		$-$		$-$	
$h_3(x)$	1	↘					$\frac{3}{5}$

La droite d'équation $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ est asymptote au graphe de f. Le graphe est situé au-dessus de l'asymptote lorsque x tend vers $+\infty$ et au-dessous de l'asymptote lorsque x tend vers $-\infty$ car :

$$f(x) =_\infty \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{1+\frac{2}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

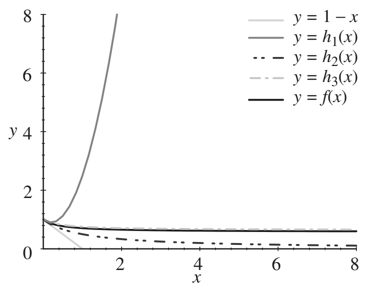
La droite d'équation $y = 1$ est asymptote au graphe de h_2. Le graphe est situé au-dessus de l'asymptote lorsque x tend vers $-\infty$ et au-dessous lorsque x tend vers $+\infty$.

La droite d'équation $y = \dfrac{3}{5}$ est asymptote au graphe de h_3. Le graphe est situé au-dessus de l'asymptote lorsque x tend vers $+\infty$ et au-dessous lorsque x tend vers $-\infty$, car :

$$h_3(x) =_\infty \frac{3}{5}+\frac{4}{25x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Avec Maple

```
> plot(1-x,1-x+(5/2)*x^2,
sqrt((1+x)/(1+3*x)),1/(1+x),(2+3*x)/(2+5*x),
x=0..8,y=0..8);
```



Les graphes de h_3 et de f apparaissent très proches. Précisons :

$$h_3(x) \geqslant f(x) \iff \left(\frac{3x+2}{5x+2}\right)^2 \geqslant \frac{1+x}{1+3x}$$

$$h_3(x) \geqslant f(x) \iff 27x^3 + 45x^2 + 24x + 4 \geqslant 25x^3 + 45x^2 + 24x + 4.$$

Le graphe de h_3 est situé au-dessus de celui de f.

d)

Avec Maple

```
> Digits :=6 : > h3 :=x->(3*x+2)/(5*x+2);
f :=x->sqrt((1.+x)/(1+3*x));
h1 :=x->1-x+(5/2)*x^2;
```

$$h3 := x \to \frac{3\,x+2}{5\,x+2}$$

$$f := x \to \sqrt{\frac{1.+x}{1+3\,x}}$$

$$h1 := x \to 1 - x + \frac{5}{2}x^2$$

```
> for x in .1,.2,.5,1,10
do h3(x)-f(x);h1(x)-f(x); od;
```

.007179

1.79289

.019701

240.404

.003181

.350403

.000642

.033975

.000134

.005134

```
> restart :solve((3*x+1)*(9*x^2+12*x+4)
=(x+1)*(25*x^2+20*x+4),x);
```

0, 0, 0

B. 1 Notons $P(x) = bx + c$; $Q(x) = 1 + ax$.

Nous cherchons a, b, c tels que :

$$(1+ax)\mathrm{e}^x - (bx + c) = x^3 g(x),$$

où g est la fonction somme d'une série entière.

Une condition nécessaire est que :

$$1 - c = 0\,; \quad a + 1 - b = 0\,; \quad \frac{1}{2} + a = 0.$$

D'où $a = -\dfrac{1}{2}$; $b = \dfrac{1}{2}$; $c = 1$.

Vérifier que :

$$\left(1 - \frac{1}{2}x\right)\mathrm{e}^x - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = x^3 g(x).$$

De plus, la fraction rationnelle $\dfrac{1+\frac{1}{2}x}{1-\frac{1}{2}x}$ est irréductible.

Elle est l'approximation de Padé à l'ordre (1,1) de l'exponentielle.

2 Les polynômes P et Q de l'approximation de Padé d'ordre $(p, 1)$ de la fonction exponentielle doivent vérifier :

$$(1+ax)\mathrm{e}^x - (a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p) = x^{p+2} g(x),$$

où g est la fonction somme d'une série entière.

L'unicité du développement en série entière permet d'identifier les coefficients et nous obtenons :

$$\begin{cases} 1 - a_0 = 0 \\ 1 + a - a_1 = 0 \\ \dfrac{1}{2} + a - a_2 = 0 \\ \quad\vdots \\ \dfrac{1}{p!} + \dfrac{a}{(p-1)!} - a_p = 0 \\ \dfrac{1}{(p+1)!} + \dfrac{a}{p!} = 0 \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$a = -\frac{1}{p+1}\,; \quad a_0 = 1\,; \quad \forall k \in [\![1, p]\!] \;\; a_k = \frac{p+1-k}{(p+1)k!}$$

D'où :

$$P(x) = 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{p+1-k}{(p+1)k!}x^k + \frac{1}{(p+1)!}x^p$$

$$= \left(1 - \frac{x}{p+1}\right)\left(1 + \frac{x}{1!} + \cdots + \frac{x^p}{p!}\right) + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!}.$$

$$Q(x) = 1 - \frac{1}{p+1}x.$$

La fraction rationnelle $\dfrac{P}{Q}$ est irréductible, car $x = p+1$ n'est pas racine de P.

En effet, les coefficients de P sont tous positifs.

De plus, la fonction $Qf - P$ est développable en série entière dans un voisinage de 0 et le calcul précédent montre que les $p+1$ premiers coefficients sont nuls.

La fraction rationnelle $R_p = \dfrac{P}{Q}$ est donc l'approximation de Padé de l'exponentielle à l'ordre $(p, 1)$.

Le plus grand intervalle ouvert centré en 0 sur lequel elle est définie et continue est $]-p-1, p+1[$.

Soit x un réel quelconque et $P = \mathrm{E}(x)$.
La suite $(R_p(x))_{p \geqslant P}$ est bien définie.

Le calcul précédent permet d'écrire :

$$\mathrm{e}^x - R_p(x) = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p+1}x} \sum_{k=p+2}^{+\infty} x^k \frac{p+1-k}{(p+1)k!}.$$

Le réel x est fixé. Lorsque p tend vers $+\infty$, le quotient $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{p+1}x}$ tend vers 1 et $\displaystyle\sum_{k=p+2}^{+\infty} x^k \frac{p+1-k}{(p+1)k!}$ est le reste d'une série convergente. Il tend vers 0.

La suite $(R_p(x))_{p \geqslant P}$ converge vers e^x.

Soit $A > 0$. En fixant $P = \mathrm{E}(A)$, on obtient, pour tout $p \geqslant P$ et tout x de $[-A, A]$:

$$0 \leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p+1}x} \leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{A}{p+1}}$$

$$\left| \sum_{k=p+2}^{+\infty} x^k \frac{p+1-k}{(p+1)k!} \right| \leqslant \sum_{k=p+2}^{+\infty} A^k \frac{-p-1+k}{(p+1)k!}.$$

La suite de fonctions $(R_p(x))_{p \geqslant P}$ converge uniformément sur $[-A, A]$ vers la fonction exponentielle.

3 ▬ **a)** Pour tout x dans l'intervalle $]-p-1, p+1[$:

$R_p(x) - \mathrm{e}^x$

$$= \frac{x^{p+1}}{(p+1)!\left(1 - \dfrac{1}{p+1}x\right)} - \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$= \frac{x^{p+2}}{(p+1)!} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(p+1)^n} - \frac{1}{(p+2)\dots(p+n+1)} \right) x^{n-1}.$$

Donc :

$$R_p(x) - \mathrm{e}^x = \frac{x^{p+2}}{(p+1)!} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

avec $c_n = \dfrac{1}{(p+1)^{n+1}} - \dfrac{1}{(p+2)\dots(p+n+2)}$.

Précisons le rayon de convergence R de la série entière $\sum c_k x^k$. Nous savons que $R \geqslant p+1$.

Supposons que $R > p+1$.

La fonction $\left(x \mapsto \dfrac{x^{p+2}}{(p+1)!} \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \right)$ est alors continue sur $[0, p+1]$.

Lorsque x tend vers $p+1$, cette fonction admet donc une limite réelle, ce qui n'est pas le cas de $R_p - \exp$.

D'où $R = p+1$.

La règle de d'Alembert donne le même résultat.

b) Soit $A > 0$ fixé. Choisissons P entier tel que : $A < P$.

Pour tout x de $[0, A]$ et tout $p \geqslant P$, on a :

$$R_p(x) - \mathrm{e}^x = \frac{x^{p+2}}{(p+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Les coefficients c_k sont positifs. D'où $R_p(x) \geqslant \mathrm{e}^x$.

Puis :

$$0 \leqslant R_p(x) - \mathrm{e}^x \leqslant \frac{A^{p+2}}{(p+1)!} \frac{1}{A} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A}{p+1} \right)^n$$

$$\leqslant \frac{A^{p+2}}{(p+1)(p+1)!} \frac{1}{1 - \frac{A}{p+1}}.$$

c) Nous avons $A = 1$; $P = 2$ et x dans $[0,1]$.

Donc, pour tout x dans $[0,1]$ et tout $p \geqslant 2$:

$$0 \leqslant R_p(x) - \mathrm{e}^x \leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{1}{p+1}} \frac{1}{p+1} \frac{x^{p+2}}{(p+1)!} < \mathrm{e}^x - S_p(x)$$

Partie informatique

4 ▬

Avec Maple

```
> restart :
> Pade:=proc(f,p,q)
local a,b,c,r,k,eq,inc,s,P,Q;
c(1):=1;a(1):=f(0);
for k from 2 to p+q+1 do
a(k):=subs(x=0,diff(f(x),x$k-1))/(k-1)!; od;
for k from q+2 to p+q+1 do c(k):=0; od;
# On définit les équations et les inconnues.
eq:=f(0)-b(1),seq(a(k)+sum(c(r)*a(k-r+1),
r=2..k)-b(k),k=2..p+1),
seq(a(k)+sum(c(r)*a(k-r+1),
r=2..q+1),k=p+2..p+q+1);
```

```
inc:=seq(b(r),r=1..p+1),seq(c(u),u=2..q+1) ;
s:=solve(eq,inc) ;assign(s) :
if s=NULL then print ('Pas de solution')
  else P:=sum(b(i)*x^(i-1),i=1..p+1);print(P);
  Q:=sum(c(i)*x^(i-1),i=1..q+1) ;print(Q) ;
fi ;
end :
> f:=exp ;
Pade(f,3,1) ;
```

$$f := \exp$$

$$\frac{1 + \left(e^0 - 1/4\right) x + 1/4\, e^0 x^2 + 1/24\, e^0 x^3}{1 - 1/4\, x}$$

```
> f:=x->1+x^2 ;
```

$$f := x \mapsto 1 + x^2$$

```
> Pade(f,1,1) ;
```

Pas de solution

```
> f:=x->sqrt((1+x)/(1+3*x)) ;
```

$$f := x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1+3\,x}}$$

```
> Pade(f,2,0) ;
```

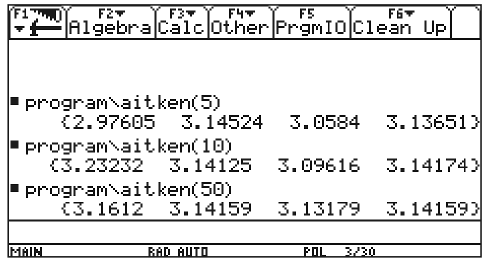
$$\frac{1 - x + 5/2\, x^2}{1}$$

2 Calcul de π

1

Avec la TI

```
: aitken(n)
: Func
: Local u,m,k,x,y,z
: 0->u : 0 -> z
: newMat(1,4) -> x
: For k,0,3
: u+4*(-1)^k/(2*k+1)-> u
: z+8/((4*k+1)*(4*k+3)) -> z
: u -> x[1,k+1]
: EndFor
: For k,4,n
: (x[1,4]*x[1,2]-x[1,3]^2)
            /(x[1,4]-2*x[1,3]+x[1,2]) -> y
: (x[1,4]+3*x[1,3]+3*x[1,2]+x[1,1])/8 -> m
: x[1,2] -> x[1,1]
: x[1,3] -> x[1,2]
: x[1,4] -> x[1,3]
: x[1,4] +4*(-1)^k/(2*k+1) -> x[1,4]
: z+8/((4*k+1)(4*k+3)) -> z
: EndFor
: approx(x[1,4]),approx(y),approx(z),approx(m)
: EndFunc
```



2 La *règle de d'Alembert* permet d'affirmer que le rayon de convergence de la série entière, $\sum \frac{x^n (n!)^2}{(2n+1)!}$, est 4. Pour tout x de $]-4, 4[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^n}{2^{2n}} \sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t.$$

La série $\sum \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|x|^n}{2^{2n}} \sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t$ est une série à termes positifs convergente. On peut donc permuter l'intégrale et la somme.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n (n!)^2}{(2n+1)!} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{2n}} \sin^{2n+1}(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin(t)}{4 - x\sin^2(t)}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{4\mathrm{d}u}{4 - x + xu^2} \\
&= \frac{4}{x}\left[\operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{4/x - 1}}\right]_0^1
\end{aligned}$$

si $x \neq 0$.

Pour $x = 2$, on obtient :

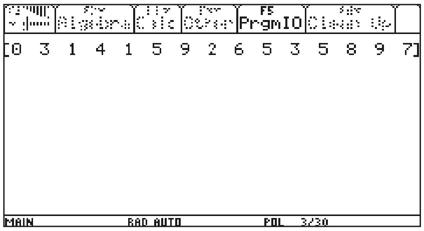
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{\pi}{2}$$

3

Avec la TI

```
: pi(n)
: Prgm
: Local a,p,c,b,reste,q,s
: floor(3.32*n+1) ->m
: newMat(1,m+1) -> a
: newMat(1,m+1) -> b
: newMat(1,m+1) -> reste
: newMat(1,n) -> p
: 2 -> c
: For i,1,m+1
: i-1 -> a[1,i]
: 2*i-1 -> b[1,i]
: 2 -> reste[1,i]
: EndFor
```

```
: 0 -> ret
: For k,1,n
:    For j,m+1,2,-1
:    reste[1,j]+ret -> s
:    mod(s,b[1,j]) -> reste[1,j]
:    intDiv(s,b[1,j])*a[1,j] -> ret
:    EndFor
: reste[1,1]+ret -> s
: If s>=100 Then
:   p[1,k-1]+1 -> p[1,k-1]
:   mod(s,100) -> s
: EndIf
: intDiv(s,10) -> p[1,k]
: mod(s,10) -> reste[1,1]
: For i,1,m+1
: reste[1,i]*10 -> reste[1,i]
: EndFor
: EndFor
: Disp p
:EndPrgm
```



14 Séries de Fourier

RAPPELS DE COURS

FONCTION DE CLASSE $\mathcal{C}^k$ PAR MORCEAUX

Une application f de $[a,b]$ dans E est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $(a_0,\cdots,a_n)$ de $[a,b]$ telle que la restriction de f à chacun des intervalles $]a_i,a_{i+1}[$ soit prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_i,a_{i+1}]$.

Une application f d'un intervalle I dans E est dite de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur I si sa restriction à tout segment est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

Une application f d'un intervalle I dans E, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I, est constante sur I si, et seulement si, $Df=0$.

COEFFICIENTS TRIGONOMÉTRIQUES ET COEFFICIENTS DE FOURIER D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE ET CONTINUE PAR MORCEAUX

• Fonction 2π-périodique :

$$c_0(f)=\frac{a_0(f)}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t\,;\; c_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$$

$$a_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\,;\; b_n(f)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.$$

• Fonction T-périodique :

$$c_0(f)=\frac{a_0(f)}{2}=\frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)\,\mathrm{d}t\,;\; c_n(f)=\frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n2\pi t/T}\,\mathrm{d}t$$

$$a_n(f)=\frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t\,;\; b_n(f)=\frac{2}{T}\int_{0}^{T} f(t)\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\mathrm{d}t.$$

• Lorsque $T=2\pi$, la série de Fourier de f est la série de fonctions dont les sommes partielles sont :

$$\sum_{n=-p}^{p} c_n(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{p}(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt))\,.$$

• La série de Fourier d'une fonction T-périodique f est la série de fonctions dont les sommes partielles sont :

$$S_p(f)(t) = \sum_{n=-p}^{p} c_n(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi nt/T} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{p} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right).$$

INÉGALITÉ DE BESSEL

Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, à valeurs réelles ou complexes :

$$\|S_p(f)\|_2 = \left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{p}\left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right] = \sum_{n=-p}^{p} |c_n(f)|^2 \leqslant (\|f\|_2)^2.$$

SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE

Soit $\sum (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt))$ une série trigonométrique. Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent absolument, la série trigonométrique converge normalement sur $\mathbb{R}$ et elle est la série de Fourier de sa fonction somme.

LES THÉORÈMES DE CONVERGENCE

• ***Convergence en moyenne quadratique (Égalité de Parseval)***

Lorsque f est continue par morceaux, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$:

$$\left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = (\|f\|_2)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Lorsque f est continue par morceaux, T-périodique sur $\mathbb{R}$:

$$\left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = (\|f\|_2)^2 = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

• ***Convergence normale***

Lorsque f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

• ***Convergence simple***

Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge simplement vers la fonction régularisée de f, définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_r(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}.$$

ÉNONCÉS

1 Première série de Fourier (1809)

Dans le *Mémoire sur la propagation de la chaleur,* Fourier écrit :

$$\cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \ldots = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \text{pour } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{pour } |x| = \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{4} & \text{pour } \frac{\pi}{2} < |x| < \pi \end{cases}$$

1 Justifier cette égalité.

2 Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, puis vérifier votre résultat.

Conseil

En cas de problème, revoir le cours.

2 Une curieuse formule

1 Montrer que, sur un domaine à préciser :

$$|\sin x| = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 kx}{4k^2 - 1}.$$

2 Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4k^2-1)^2}$.

Conseil

1) Déterminer la série de Fourier de la fonction $(x \mapsto |\sin x|)$.

3* Série de Fourier à ne pas calculer

D'après ESTP.

On définit f, fonction paire de période 2π, par :

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} \quad \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\text{et} \quad f(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \left]\frac{\pi}{4}, \pi\right].$$

1 Préciser l'ensemble $E \subset [0, \pi]$, sur lequel f est égale à la somme de sa série de Fourier.

2 Calculer a_0.

3 Pour $n \geqslant 2$, mettre $a_n + a_{n-2}$ sous la forme $\dfrac{c}{n-1}\sin\left((n-1)\dfrac{\pi}{4}\right)$, la constante c étant à préciser.

4 Établir que la série $1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{11}\ldots$ converge. On désigne par s sa somme.

5 Pour tout x dans $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, établir la relation :

$$\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 4\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Calculer s.

Conseils

1) Préciser soigneusement le théorème utilisé.

4) Comparer cette série à la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

5) Pour $x = \dfrac{\pi}{4}$, considérer la série :

$$\sum (-1)^k (a_{2k+1} + a_{2k+2}).$$

Pour x quelconque, modifier la fonction f.

4 Série de Fourier d'un polygone

On considère le quadrilatère $ABCD$ dont les sommets ont respectivement pour affixes :

$$z_0 = 3, \quad z_1 = 2\mathrm{i}, \quad z_2 = -3 + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_3 = -1 - 3\mathrm{i}.$$

1 Déterminer une fonction f, 2π-périodique, continue et affine par morceaux telle que :

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [z_0, z_1], \qquad f\left(\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right) = [z_1, z_2],$$

$$f\left(\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]\right) = [z_2, z_3], \quad f\left(\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]\right) = [z_3, z_0]$$

2 Exprimer les coefficients de Fourier de f en fonction des z_i. Utiliser un logiciel de calcul formel ou votre calculatrice pour les calculer.

Déterminer la série de Fourier de f.

Quels théorèmes de convergence peut-on lui appliquer ?

Utiliser un logiciel de calcul formel ou votre calculatrice pour tracer le graphe de quelques sommes partielles de la série de Fourier de f.

5 Série de Fourier d'une fonction 2-périodique

D'après Air.

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par :
$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = x(1-x)$.

1 Déterminer une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de réels telle que :

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \sin(n\pi x).$$

2 Prouver que la série $\sum a_n^2$ est convergente et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$.

Conseils

1) Remarquer que les fonctions $(x \mapsto \sin(n\pi x))$ sont périodiques et impaires.
2) Penser à considérer la fonction f'.

6* Somme d'une série trigonométrique ?

Soit g une fonction de $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$ telle que :

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0\,; \int_0^1 \left(g'(t)\right)^2 \mathrm{d}t = 1.$$

Montrer l'existence d'une suite $(u_n)_n$ de réels tels que :

$$\forall x \in [0,1] \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n} \cos(\pi n x)\,; \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 = \frac{2}{\pi^2}.$$

7 Coefficients de Fourier et classe $\mathcal{C}^\infty$

Soit f une fonction continue et 2π-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que :

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \iff \forall k \in \mathbb{N} \quad \lim_{n\to+\infty} n^k c_n = 0.$$

8* Inégalité de Bernstein

Serge Bernstein (1880-1968), mathématicien russe, résolut en 1904, pour sa thèse de doctorat en France, le 19^e problème de Hilbert.
Rentré en Russie, il dut repasser le doctorat, son diplôme français n'étant pas validé. Il s'attaqua alors au 20^e problème de Hilbert qu'il résolut partiellement. Nous lui devons en particulier les polynômes de Bernstein qu'il utilisa pour construire une suite de fonctions approchant uniformément sur $[0, 1]$ une fonction continue quelconque.

On considère un polynôme trigonométrique :

$$P(t) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}.$$

L'objet de l'exercice est d'établir l'inégalité de Bernstein : $\|P'\|_\infty \leqslant n\|P\|_\infty$.

Le cas $n = 0$ de l'inégalité est trivial ; nous supposerons dans la suite de l'exercice que $n > 0$.

1 On pose $u = \dfrac{2nt}{\pi}$ et on note $Q(u)$ le polynôme $Q(u) = P\left(\dfrac{\pi}{2n}u\right)$.

Calculer $Q'(u)$.

2 Soit f la fonction 2π-périodique impaire définie sur $[0, \pi]$ par :

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \pi - t & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Calculer la série de Fourier de f.

b) En remarquant que, pour tout k de $[\![-n, n]\!]$, $\dfrac{k\pi}{2n}$ est dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, exprimer $Q'(u)$ avec la série de Fourier de f.

c) Conclure.

Conseils

2) b) Substituer à $\dfrac{k\pi}{2n}$ la somme de la série de Fourier de f en $\dfrac{k\pi}{2n}$ afin d'écrire $Q'(u)$ sous forme de série.
c) Majorer $\|Q'\|_\infty$ en fonction de $\|Q\|_\infty$, puis revenir à P.

9 Deux développements en série de Fourier sans calcul de coefficients de Fourier

1 Donner le développement en série de Fourier de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \frac{r\cos t - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}$$

où r est un réel tel que $|r| < 1$.

2 Donner le développement en série de Fourier de la fonction g définie par :

$$g(t) = \operatorname{Arctan} \frac{r \sin t}{1 - r\cos t}$$

où r est un réel tel que $|r| < 1$.

Conseils

1) Utiliser $\dfrac{ir\sin t}{1-2r\cos t+r^2}$, puis un développement en série entière.
Ne pas oublier de justifier que le développement obtenu est le développement en série de Fourier de f.
2) Calculer $g'(t)$.

10* Autour d'une formule d'Euler (1707-1783)

Soit α un réel non entier relatif. On considère la fonction f, 2π-périodique définie dans $[-\pi,\pi[$ par $f(x)=\cos(\alpha x)$.

1 Déterminer la série de Fourier de f et étudier sa convergence.

2 En déduire que l'on a $\dfrac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}=\dfrac{1}{\alpha}+2\alpha\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{\alpha^2-n^2}$.

3 Montrer que, pour tout réel u n'appartenant pas à $\pi\mathbb{Z}$:

$$\operatorname{cotan}(u)=\frac{1}{u}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2u}{u^2-n^2\pi^2}.$$

Cette formule est due à Euler (1707-1783).

On note g la fonction définie sur $]-1,1[$ par :

$$g(x)=\begin{cases}\pi\operatorname{cotan}(\pi x)-\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

On admet que la fonction g admet, sur $]-1,1[$, le développement en série entière :

$$g(x)=-2\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2p+2}}\right)x^{2p+1}.$$

4 En déduire une méthode de calcul des sommes de Riemann : $\zeta(2p)=\dfrac{1}{n^{2p}}$, pour $p\geqslant 1$.

Donner les valeurs de $\zeta(2)$, $\zeta(4)$, $\zeta(6)$, $\zeta(8)$.

5 Établir que, pour tout entier $p>0$, $\zeta(2p)$ est le produit de π^{2p} par un rationnel.

6 Déduire de la question **4)** le développement en série :

$$\frac{1}{\sin^2 x}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x-n\pi)^2}$$

dont on précisera le domaine de validité.

Conseils

1) En cas de problème, revoir le cours.
3) Utiliser la série de Fourier de f en $-\pi$.
4) Série entière, développement limité... un lien important.
6) Dérivons, pour terminer...

11* Chercher la fonction...

Trouver une expression simple de la fonction :

$$\left(x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}\right).$$

Que donne la formule de Parseval appliquée à cette fonction ?

Conseil

Utiliser la TI ou toute autre calculatrice et tracer les graphes de sommes partielles de la série.
Que remarque-t-on ?

12* Convergence de la série $\sum a_n$

D'après E3A.

On définit f, fonction paire de période 2π, par $f(x)=\sqrt{x}$ si $x\in[0,\pi]$.

1 Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$?

2 On cherche la série de Fourier de f, soit :

$$a_0+\sum_{n\geqslant 1}\big(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)\big).$$

Calculer $a_0(f)$; et pour tout $n\geqslant 1$, $b_n(f)$.

3 On pose $G(x)=\displaystyle\int_0^x\sin(t^2)\,dt$. Établir que, pour tout $x>0$, $G(x)=\dfrac{1-\cos(x^2)}{2x}+\displaystyle\int_0^x\dfrac{1-\cos(t^2)}{2t^2}\,dt$.

En déduire l'existence de $L=\displaystyle\lim_{x\to+\infty}G(x)$. On admettra que $L=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

4 Déterminer alors une constante D telle que $a_n\sim Dn^{-3/2}$.

5 Démontrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=0$.

Conseils

3) Utiliser une intégration par parties.
Étudier l'intégrabilité sur $\mathbb{R}^{+*}$ de la fonction : $\left(t\mapsto\dfrac{\sin^2\left(\frac{t^2}{2}\right)}{t^2}\right)$.

4) Calculer a_n. Effectuer le changement de variables $u = nt$.
5) Attention ! Utiliser ici l'un des théorèmes de convergence ponctuelle des séries de Fourier ?

13** Principe du maximum

D désigne le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$, $\overline{D}$ le disque unité fermé de $\mathbb{C}$ et T le cercle unité de $\mathbb{C}$.

1 P est un polynôme non nul de degré n à coefficients complexes.

a) Soit z dans $\mathbb{C}$. Montrer :

$$\forall r > 0 \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|P\left(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|^2 \mathrm{d}\,\theta = \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{P^{(k)}(z)}{k!}\right|^2 r^{2k}.$$

b) Montrer qu'il existe z_0 dans $\overline{D}$ tel que :

$$|P(z_0)| = \sup_{z \in \overline{D}} |P(z)|.$$

c) On suppose que z_0 appartient à D.

Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que :

$$D(z_0, r) \subset D \quad \text{et} \quad \forall z \in D \quad P(z) = P(z_0).$$

d) Montrer que $\sup_{z \in \overline{D}} |P(z)| = \sup_{z \in T} |P(z)| = \sup_{z \in D} |P(z)|$.

2 On considère la série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence 1, dont on note S la fonction somme.

Pour n dans $\mathbb{N}$ et z dans D, on pose $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$.

a) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

– la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur D ;

– la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur $\overline{D}$;

– la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur T.

b) Montrer que, si une des conditions de la *question* **a)** est satisfaite, alors la série $\sum |a_n|^2$ converge.

c) Donner un exemple de série entière vérifiant l'une des conditions de la question **a)**.

3 On considère une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence non nul, dont on note S la fonction somme.

a) Montrer que, si $|S|$ admet un maximum local en un point de son disque ouvert de convergence, alors S est constante sur un voisinage de ce point (*Principe du maximum*).

b) Soit R dans $]0, 1[$ et M la borne supérieure de $|S|$ sur $\overline{D|R|}$ où $D|R| = \{z \in \mathbb{C}\ ;\quad |z| < R\}$.

Montrer que :

(i) $\forall z \in D(R) \quad |S(z)| \leqslant M$;

(ii) s'il existe a dans $\overline{D(R)}$ tel que $|S(a)| = M$ alors S est constante sur $\overline{D(R)}$.

c) Le rayon de convergence de la série entière est infini. On suppose qu'il existe un entier $p \geqslant 0$ tel que $S(z) = O(z^p)$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$.

Montrer que S est un polynôme de degré inférieur ou égal à p.

Que dire d'une telle fonction S bornée sur $\mathbb{C}$?

Ce résultat, dû à Cauchy (1844), est attribué à tort à Liouville qui l'énonça lors d'un exposé.

Conseils

1) Considérer la fonction $t \mapsto P\left(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right)$ et calculer :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Utiliser Parseval.
2) b) Repenser à la *question* **1) a)**.
3) a) Encore la formule de Parseval...

14** Elle ressemble à une série de Fourier, mais...

1 Étudier la nature des séries :

$$\sum \frac{1}{\sqrt{k}\ln k} \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

2 Montrer que la série de fonctions $\sum \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}\ln k}$ converge sur $\mathbb{R}$.

On pose, pour tout $k \geqslant 2$, $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}\ln k}$ et $a_1 = \frac{3}{2}$.

On appelle S la somme de la série de fonctions :

$$a_1 \sin x + \sum 2a_k \sin(kx)$$

3 Montrer que la suite (a_n) est décroissante et que, pour tout $p \geqslant 1$ et tout entier $m \geqslant 1$:

$$a_{(2m-1)p} - a_{(2m+1)p} \geqslant a_{(2m+1)p} - a_{(2m+3)p} \geqslant 0.$$

4 Soit $p \geqslant 1$ un entier. Montrer que :

$$S\left(\frac{\pi}{2p}\right) \geqslant \left(\sin\left(\frac{\pi}{2p}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{2p}\right) + \dots + \sin\left(\frac{p\pi}{2p}\right)\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(a_{(4k+1)p} - a_{(4k+3)p}\right).$$

5 Étudier la limite lorsque p tend vers l'infini de :

$$S\left(\frac{\pi}{2p}\right).$$

Que pouvez-vous en déduire ?

Conseils

2) Utiliser une transformation d'Abel.
3) Montrer la convexité d'une fonction bien choisie.
4) Regrouper les termes en tenant compte du signe du sinus.

Algorithme

Transformée de Fourier discrète et transformée de Fourier rapide

D'après CCP.

La transformée de Fourier discrète est un outil essentiel dans le traitement d'un signal périodique.

Une période de l'ordre de 1000 est courante et les calculs deviennent très coûteux.

En 1965, deux chercheurs américains, **J.W. Cooley** et **J.W. Tuckey**, mettent au point un algorithme beaucoup plus rapide, appelé transformée de Fourier rapide (ou FFT, *fast Fourier transform*). Cet algorithme, très utilisé, a aussi été à l'origine de nombreuses recherches en algèbre.

Notations

N désigne un entier strictement positif, ω la racine N-ième de l'unité $e^{-\frac{2i\pi}{N}}$.

On note $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ (resp. $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$) l'ensemble des applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ (resp. de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$), $\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$ (resp. $\mathbb{R}_N^{\mathbb{Z}}$) comme étant le sous-ensemble de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ (resp. de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$) des applications périodiques de période N.

A. Transformée de Fourier discrète

On définit la transformée de Fourier discrète comme l'application F de $\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ définie par :

$$F(s) = \widehat{s}, \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{Z}\ \widehat{s}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} s(k)\omega^{kn}.$$

1 Quelques propriétés de l'application F

a) Montrer que $F(\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}) \subset \mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$.

b) À quelles propriétés de parité satisfont les parties réelle et imaginaire de $F(s)$ si s appartient à $\mathbb{R}_N^{\mathbb{Z}}$?

c) Montrer que l'image par F d'une application paire appartenant à $\mathbb{R}_N^{\mathbb{Z}}$ est une application paire appartenant à $\mathbb{R}_N^{\mathbb{Z}}$.

2 Calcul de la transformée de Fourier discrète

On introduit l'application φ de $\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$ dans $\mathbb{C}^N$, définie par :

$$\varphi(s) = (s(0), s(1), \dots, s(N-1)).$$

a) Justifier rapidement le fait que l'application φ définisse un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Que peut-on dire de $\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$ en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Ceci permet d'identifier une application s de $\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$ au vecteur de $\mathbb{C}^N$ de composantes $s_k = s(k)$, $k \in [\![0, N-1]\!]$.

On définit alors F_N de $\mathbb{C}^N$ dans lui-même par :

$$F_N = \varphi \circ F \circ \varphi^{-1}.$$

b) Expliciter $\widehat{s} = F_N(s)$ pour un vecteur quelconque de $\mathbb{C}^N$, de composantes $(s_k)_{k\in[\![0,N-1]\!]}$.

c) Montrer que l'application F_N est linéaire. Expliciter la matrice M_N qui lui est associée dans la base canonique de $\mathbb{C}^N$, en exprimant les coefficients en fonction de ω.

d) Écrire un algorithme de calcul de $\widehat{s}$, n'utilisant pas la matrice M_N, en minimisant le nombre d'opérations entre nombres complexes.

Évaluer, dans le calcul de la matrice M_N, le coût global en termes d'opérations arithmétiques complexes. Comparer le coût du calcul de $\widehat{s}$ en utilisant la matrice M_N avec le coût de calcul de l'algorithme précédent.

3 Propriétés de la matrice M_N

$\mathbb{C}^N$ est muni de son produit scalaire hermitien canonique :

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{x_k}\, y_k.$$

a) Quelle est la norme hermitienne des vecteurs colonnes de M_N ?

b) Montrer l'orthogonalité de deux vecteurs colonnes distincts de M_N.

c) Calculer le produit ${}^t\overline{M_N}\,M_N$. En déduire que F_N est bijective et expliciter son application réciproque.

4 Transformée de Fourier discrète et convolution

Si $x = (x_k)_{k\in[\![0,N-1]\!]}$ et $y = (y_k)_{k\in[\![0,N-1]\!]}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{C}^N$, on définit :

• leur produit composante par composante par :

$$x \circ y = z \in \mathbb{C}^N \ ; \ \forall k \in [\![0, N-1]\!] \quad z_k = x_k y_k \ ;$$

• leur produit de convolution par :

$$x * y = z \in \mathbb{C}^N \ ; \ \forall k \in [\![0, N-1]\!] \quad z_k = \sum_{j+l=k (\mathrm{mod}\ N)} x_j\, y_l .$$

Montrer que :

$$\forall (x,y) \in \left(\mathbb{C}^N\right)^2 \quad F_N(x) \circ F_N(y) = F_N(x * y).$$

B. Transformée de Fourier rapide

On suppose dans cette partie que l'entier N est une puissance de 2.$(N = 2^q, q \in \mathbb{N}^*)$.

On veut utiliser la structure particulière de la matrice M_N pour accélérer le calcul des N composantes du vecteur $\widehat{s} = F_N(s)$.

5 Étude d'un exemple préliminaire

Dans cette question, on choisit $N = 4$.

a) Rappeler l'expression des quatre composantes $\widehat{s_0}, \widehat{s_1}, \widehat{s_2}$ et $\widehat{s_3}$ en fonction de celles de $s = (s_0, s_1, s_2, s_3)$.

b) Montrer que l'on peut trouver a_0, a_1, b_0 et b_1 dans $\mathbb{C}$ tels que :

$$\widehat{s_0} = a_0 + b_0; \qquad \widehat{s_1} = a_1 + \omega b_1;$$
$$\widehat{s_2} = a_0 - b_0; \qquad \widehat{s_3} = a_1 - \omega b_1.$$

c) Exprimer le vecteur $\sigma_1 = (a_0, a_1)$ comme l'image par F_2 d'un vecteur dont les composantes se déduisent de celles de s. Même question pour le vecteur $\sigma_2 = (b_0, b_1)$.

6 Généralisation et calcul de complexité

a) On pose $m = \dfrac{N}{2}$. Pour $0 \leqslant n < m$, montrer que :

$$\widehat{s_n} = A_n + \omega^n B_n \ ; \quad \widehat{s_{n+m}} = A_n - \omega^n B_n,$$

les vecteurs A de composantes $(A_n)_{n\in[\![0,m-1]\!]}$ et B de composantes $(B_n)_{n\in[\![0,m-1]\!]}$ étant les images par F_m de deux vecteurs que l'on explicitera en fonction de $s = (s_0, \ldots, s_{N-1})$.

b) On note u_q le nombre d'opérations arithmétiques entre des nombres complexes nécessaires pour calculer $F_{2^q}(s)$.

On supposera que les différentes puissances de ω ont été calculées au préalable et on ne comptera donc pas les multiplications nécessitées par ces calculs dans l'évaluation de u_q.

Montrer que u_q vérifie l'inéquation de récurrence :

$$\forall q > 1 \quad u_q \leqslant 2u_{q-1} + 3 \times 2^{q-1}.$$

c) En déduire une majoration de u_q en fonction de u_1 et q. Calculer u_1 et donner l'expression finale de cette majoration en fonction de $N = 2^q$.

d) Conclure en comparant le coût en opérations arithmétiques de cette méthode avec celui de la méthode directe (question **2) d)**).

e) Écrire une procédure calculant $\widehat{s}$ que l'on notera S, dans le cas $N = 8$.

Conseils

1) b) Calculer $\overline{\widehat{s}(n)}$.

2) d) Penser à l'algorithme de Horner.

3) b) Somme des termes d'une progression géométrique... La raison peut-elle être égale à 1 ?

4) Remarquer que :

$$[\![0, N-1]\!]^2 = \bigcup_{\lambda=0}^{N-1} \left\{(l,r) \in [\![0, N-1]\!]^2 ; l + r = \lambda\,(\mathrm{mod}\ N)\right\}.$$

5) c) Écrire M_2 et σ_1, σ_2 en fonction de s.

6) a) $\omega^m = -1$.

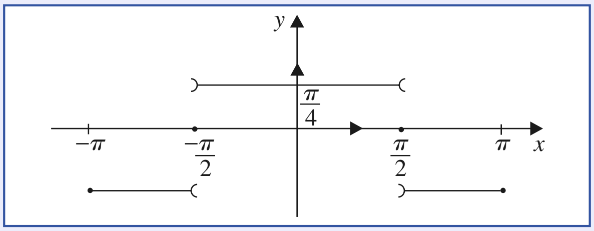
c) Considérer $\dfrac{u_q}{2^q}$.

CORRIGÉS

1 La première série de Fourier (1809)

1 Notons f la fonction 2π-périodique définie dans $[-\pi, \pi]$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4} & \text{pour } |x| < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{pour } |x| = \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\pi}{4} & \text{pour } \dfrac{\pi}{2} < |x| \leqslant \pi \end{cases}.$$



La fonction f est continue par morceaux, 2π-périodique et paire.

Les coefficients de Fourier $b_n(f)$ sont nuls.

Et $a_0(f) = 0$, car la valeur moyenne de f est nulle.

Pour tout $n \geqslant 1$:

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\pi}{4}\cos(nt)\,\mathrm{d}t - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\pi}{4}\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ \dfrac{(-1)^p}{2p+1} & \text{si } n = 2p+1. \end{cases}$$

La fonction f n'est pas continue, mais elle est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

De plus, elle est égale à sa régularisée.

La série de Fourier de f converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers f :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}\cos((2p+1)x) = f(x).$$

2 Appliquons l'*égalité de Parseval* :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

Finalement, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$

Pour vérifier le résultat, écrivons :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

2 Une curieuse formule

1 Notons f la fonction $\left(x \mapsto |\sin x|\right)$.

Cette fonction est continue, paire, de période 2π, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

La série de Fourier de f est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$ vers f. Précisons-la.

Les coefficients $b_n(f)$ sont nuls.

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \,\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x))\,\mathrm{d}x.$$

D'où $a_0(f) = \dfrac{4}{\pi}$; $a_1(f) = 0$ et, pour $n \geqslant 2$:

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2-1}((-1)^{n+1} - 1).$$

Puis $a_{2n}(f) = -\dfrac{4}{\pi}\dfrac{1}{4n^2-1}$ et $a_{2n+1}(f) = 0$, lorsque $n \geqslant 1$.

Nous pouvons alors écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - 2\sin^2(nx)}{4n^2-1}.$$

Les séries $\sum \dfrac{1}{4n^2-1}$ et $\sum \dfrac{\sin^2(nx)}{4n^2-1}$ convergent.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} + \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2-1}.$$

En particulier, pour $x = 0$:

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}.$$

D'où l'égalité demandée, vérifiée pour tout x réel :

$$|\sin x| = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2 - 1}.$$

2 Écrivons l'égalité de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}.$$

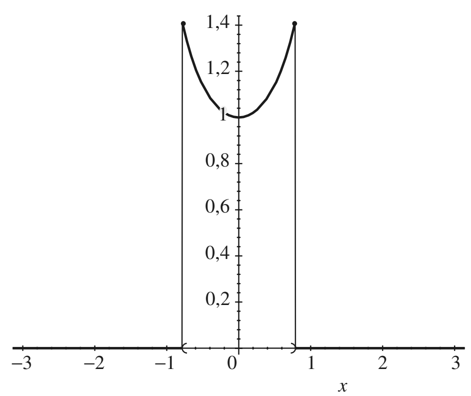
Finalement, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.

3 Série de Fourier à ne pas calculer

1 La fonction f est 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Avec Maple

```
> plot(piecewise(-Pi/4<=x and
x<Pi/4,1/cos(x)),x=-Pi..Pi);
```



La série de Fourier de f converge simplement vers la fonction régularisée de f.

Donc $E = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \pi\right[$.

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \pi\right[\quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx).$$

2 D'où :

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}.$$

Posons $u = \sin t$.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{\mathrm{d}u}{(1 - u^2)} = \frac{1}{\pi} \ln(3 + 2\sqrt{2}).$$

3 Soit $n \geqslant 2$.

$$\begin{aligned} a_n + a_{n-2} &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos t}(\cos(nt) + \cos((n-2)t))\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/4} \cos((n-1)t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{\pi(n-1)} \sin\left((n-1)\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

D'où $c = \dfrac{4}{\pi}$.

4 Notons T_n la somme d'indice n de la série proposée :

$T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon_k}{(2k+1)}$ avec $\varepsilon_k = 1$ si k est congru à 3 ou 4 modulo 4, $\varepsilon_k = -1$ sinon.

Nous remarquons que :

$$T_{4p+3} = \sum_{k=0}^{4p+3} \frac{(-1)^k}{2k+1} + 2 \sum_{k=0}^{p} \left(-\frac{1}{8k+5} + \frac{1}{8k+7}\right).$$

La série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^k}{2k+1}$ vérifie le critère spécial des séries alternées. Elle converge.

La série $\displaystyle\sum \left(-\frac{1}{8k+5} + \frac{1}{8k+7}\right)$ est à termes négatifs et :

$$\left(-\frac{1}{8k+5} + \frac{1}{8k+7}\right) \sim -\frac{1}{32k^2}.$$

Elle converge également.

La suite (T_{4p+3}) converge donc.

De plus, il est immédiat que, si l'on note $p = E\left(\dfrac{n}{4}\right)$, alors la différence $(T_n - T_{4p+3})$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Les sommes partielles de la série étudiée ont même limite que la suite (T_{4p+3}). La série converge.

5 Les coefficients (a_n) sont des coefficients de Fourier. La suite $(a_n)_n$ tend donc vers 0.

Nous en déduisons la convergence de la série $\sum(-1)^k(a_{2k+2} + a_{2k})$ et sa somme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (a_{2k+2} + a_{2k}) = a_0.$$

D'où :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (a_{2k+2} + a_{2k}) \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\sin\left((2k+1)\frac{\pi}{4}\right)}{2k+1}. \end{aligned}$$

Le résultat est donc acquis pour $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Pour l'obtenir avec un x quelconque de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, il suffit de considérer la fonction 2π-périodique et paire, g, définie sur $[0, \pi]$ par :

$$g(t) = \frac{1}{\cos t} \text{ si } t \in [0, x] \quad \text{et} \quad g(t) = 0 \text{ si } t \in]x, \pi].$$

En particulier, avec $x = \dfrac{\pi}{4}$, on obtient :

$$2\sqrt{2}s = \pi a_0 = \ln\left(3 + \sqrt{2}\right).$$

Soit : $$s = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln\left(3 + \sqrt{2}\right).$$

4 Série de Fourier d'un polygone

1

Avec Maple

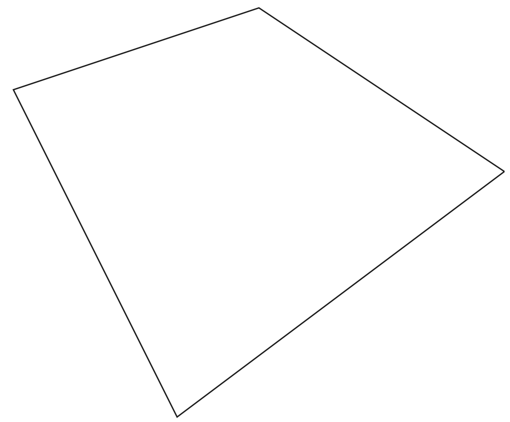
Liste des sommets du quadrilatère :

```
> restart:
n:=4 ;z[0]:=3 ;z[1]:=2*I ;
z[2]:=-3+I ;z[3]:=-1-3*I ;
z[4]:=z[0] ;
L:=[seq(z[i],i=0..n)] ;
```

$$n := 4$$
$$z_0 := 3$$
$$z_1 := 2\, I$$
$$z_2 := -3 + I$$
$$z_3 := -1 - 3\, I$$
$$z_4 := 3$$
$$L := [3,\ 2\, I,\ -3 + I,\ -1 - 3\, I,\ 3]$$

Tracé du quadrilatère :

```
> with(plots):complexplot
(L,scaling=constrained,axes=none) ;
```



Maple nous facilite les calculs :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}(-3 + 2\mathrm{i})t + 3 \text{ si } t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ -\dfrac{2}{\pi}(3 + \mathrm{i})t + 3(1 + \mathrm{i}) \text{ si } t \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \\ \dfrac{4}{\pi}(1 - 2\mathrm{i})t + (-7 + 9\mathrm{i}) \text{ si } t \in \left[\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right] \\ \dfrac{2}{\pi}(4 + 3\mathrm{i})t - (13 + 12\mathrm{i}) \text{ si } t \in \left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \end{cases}$$

Avec Maple

Calcul de la fonction

```
> t:=j->j*2*Pi/4 : seq(t[j]=t(j),j=0..4) ;
> Segment:=i->(2*Pi*i/4<=t and t<=2*Pi*(i+1)/4,
simplify((2/Pi)*((z[i+1]-z[i])*t+z[i]*t(i+1)-z[i+1]*t(i)))) ;
> f:=piecewise(seq(Segment(i),i=0..n-1)) :'f(t)'=f ;
```

$$t_0 = 0,\ t_1 = \frac{1}{2}\pi,\ t_2 = \pi,\ t_3 = \frac{3}{2}\pi,\ t_4 = 2\pi$$

$$\mathit{Segment} :=$$
$$i \to \left(\frac{1}{2}\, i\, \pi \leqslant t \textbf{ and } t \leqslant \frac{1}{2}\pi\,(i+1),\ \text{simplify}\left(2\, \frac{(z_{i+1} - z_i)\, t + z_i\, \mathrm{t}(i+1) - z_{i+1}\, \mathrm{t}(i)}{\pi}\right)\right)$$

$$\mathrm{f}(t) = \begin{cases} \dfrac{-6\,t + 4\,I\,t + 3\,\pi}{\pi} & -t \leqslant 0 \textbf{ and } t - \dfrac{1}{2}\pi \leqslant 0 \\ \dfrac{-6\,t - 2\,I\,t + 3\,I\,\pi + 3\,\pi}{\pi} & \dfrac{1}{2}\pi - t \leqslant 0 \textbf{ and } t - \pi \leqslant 0 \\ \dfrac{4\,t - 8\,I\,t - 7\,\pi + 9\,I\,\pi}{\pi} & \pi - t \leqslant 0 \textbf{ and } t - \dfrac{3}{2}\pi \leqslant 0 \\ -\dfrac{-8\,t - 6\,I\,t + 13\,\pi + 12\,I\,\pi}{\pi} & \dfrac{3}{2}\pi - t \leqslant 0 \textbf{ and } t - 2\pi \leqslant 0 \end{cases}$$

2 La fonction f est 2π-périodique, continue. Elle possède des coefficients de Fourier.

Notons $t_0 = 0$, $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = \pi$, $t_3 = \frac{3\pi}{2}$ et $t_4 = 2\pi$.

Alors : $$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t\,;$$

$$\forall k \neq 0 \quad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t.$$

Un calcul simple partageant chaque intégrale sur les segments $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ vous donnera :

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{3} \frac{z_j + z_{j+1}}{2}(t_{j+1} - t_j)\,;$$

$$\forall k \neq 0 \qquad c_k = \frac{1}{2\pi k^2}\sum_{j=0}^{3}\left(a_{j-1} - a_j\right)e^{-\mathrm{i}kt_j}$$

en notant $z_{-1} = z_3$, $t_{-1} = t_3$, $a_j = \dfrac{z_{j+1} - z_j}{t_{j+1} - t_j}$.

Utilisons encore *Maple*.

Avec Maple

Série de Fourier

```
> z[-1]:=z[3] :t(-1):=t(3) :
> a:=j->(z[j+1]-z[j])/(t(j+1)
-t(j)) :seq(a[j]=a(j),j=-1..3);
> c0:=simplify(sum((z[i+1]
+z[i])/2*(t(i+1)-t(i)),
i=0..3)/(2*Pi)) :‘c[0]‘=c0;
> ck:=simplify(sum((a(i-1)
-a(i))*exp(-I*k*t(i)),
i=0..3)/(2*Pi*k^2)) :‘c[k]‘=ck;
```

$$a_{-1} = \frac{-\frac{8}{3} - 2\,I}{\pi},\ a_0 = \frac{-6+4\,I}{\pi},\ a_1 = \frac{-6-2\,I}{\pi},$$

$$a_2 = \frac{4-8\,I}{\pi},\ a_3 = \frac{8+6\,I}{\pi}$$

$$c[0] = \frac{-1}{4}$$

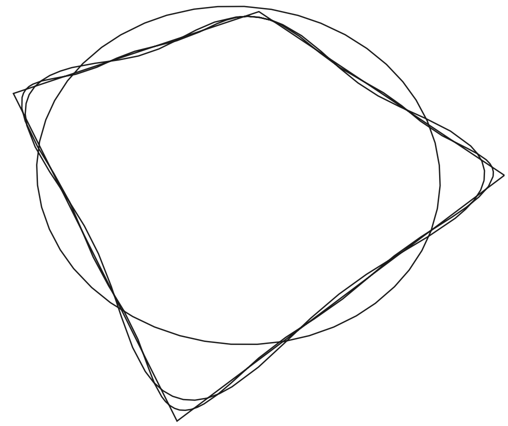
$$c[k] = \left(-\frac{2}{53} - \frac{7}{53}\,I\right)$$

$$(53\,\mathrm{e}^{(-3/2\,I\,k\,\pi)} - 41\,I\,\mathrm{e}^{(-I\,k\,\pi)} - 11\,\mathrm{e}^{(-I\,k\,\pi)}$$

$$-6\,I\,\mathrm{e}^{(-1/2\,I\,k\,\pi)} - 21\,\mathrm{e}^{(-1/2\,I\,k\,\pi)} - 21 + 47\,I)/(\pi^2\,k^2)$$

```
> f:=m->simplify(sum(ck*exp(I*k*t),
k=-m..-1)+c0+sum(ck*exp(I*k*t),k=1..m)) :
> for m in [1,5,10] do
quad[m]:=complexplot(f(m),
t=0..2*Pi,color=red) od :
```

```
> Q:=complexplot(L,
scaling=constrained,axes=none) :
display(Q,quad[1],quad[5],
quad[10],scaling=constrained,axes=none);
```



La fonction f est continue, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

La série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.

5 Série de Fourier d'une fonction 2-périodique

1 Les fonctions $(x \mapsto \sin(n\pi x))$ sont 2-périodiques et impaires.

Considérons la fonction g, 2-périodique, impaire, définie sur $\mathbb{R}$ et coïncidant sur $[0, 1]$ avec f.

Sa série de Fourier s'écrit sous la forme :

$$\sum b_n \sin(n\pi x).$$

Calculons, pour $n \geqslant 1$, les b_n.

$$b_n = 2\int_0^1 t(1-t)\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t.$$

En intégrant deux fois par parties, on obtient :

$$b_n = \frac{4}{n^3\pi^3}(1 + (-1)^{n+1}).$$

Finalement, $b_{2n} = 0\,;\ b_{2n+1} = \dfrac{8}{(2n+1)^3\pi^3}$.

La fonction g est continue, 2-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

La série de Fourier de g converge normalement vers g sur $\mathbb{R}$. En particulier :

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8}{(2n+1)^3\pi^3}\sin((2n+1)\pi x).$$

Posons : $\quad a_{2n} = 0\,;\ a_{2n+1} = \dfrac{8}{(2n+1)^2\pi^3}$.

Nous obtenons le résultat demandé.

2 La série $\sum a_n^2$ converge car $a_n^2 = O\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

D'après la question précédente, nous savons que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n} \sin(n\pi x).$$

L'application g est 2-périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. L'*égalité de Parseval* assure :

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} |g'(t)|^2 = \frac{1}{2}\sum_{0}^{+\infty} |a_n(g')|^2.$$

Or : $a_n(g') = -a_n\pi$.

D'où : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

6 Somme d'une série trigonométrique ?

Prolongeons la fonction g à $[-1, 1]$ par parité, puis à $\mathbb{R}$ par 2-périodicité.

La fonction ainsi obtenue est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Elle est donc la somme de sa série de Fourier avec :

$$a_0(g) = \int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0\,;$$

$$\forall n > 0 \quad a_n(g) = 2\int_0^1 g(t)\cos(\pi n t)\,\mathrm{d}t.$$

Notons $u_n = n a_n(g)$.

Nous obtenons :

$$\forall x \in [0, 1] \quad g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n}\cos(\pi n x).$$

De plus, la fonction g' est continue par morceaux, impaire et 2-périodique sur $\mathbb{R}$.

La *formule de Parseval* appliquée à g' donne :

$$\int_0^1 \left(g'(t)\right)^2 \mathrm{d}t = 1 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(b_n(g')\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} n^2\pi^2 \left(a_n(g)\right)^2.$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 = \frac{2}{\pi^2}.$$

7 Coefficients de Fourier et classe $\mathcal{C}^\infty$

Supposons la fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et fixons un entier $k > 0$.

Intégrons k fois par parties dans le calcul de $c_n(f)$. Nous obtenons :

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi(\mathrm{i}n)^k}\int_0^{2\pi} f^{(k)}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t.$$

Toutes les dérivées de f sont périodiques et continues, donc bornées. Soit : $|c_n(f)| = O\left(\frac{1}{n^k}\right) = o\left(\frac{1}{n^{k-1}}\right)$.

D'où le résultat.

Réciproquement, en appliquant l'hypothèse avec $k = 2$, nous obtenons la convergence normale de la série de Fourier de f. D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}.$$

Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$, la série de fonctions $\sum c_n(f)(-\mathrm{i}n)^k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}$ converge normalement et en déduire que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

8 Inégalité de Bernstein

1 $Q(u) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi u}{2n}}$.

Donc :

$$Q'(u) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \frac{\mathrm{i}k\pi}{2n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi u}{2n}}.$$

2) a) La fonction f est continue, impaire, 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

La série de Fourier de f converge donc normalement sur $\mathbb{R}$ vers f. Calculons-la...

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} t\sin(nt)\,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right).$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \quad b_{2m} = 0.$$

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad b_{2m+1} = \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)^2}.$$

Par conséquent :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)^2}\left(\sin((2m+1)x)\right).$$

b) En utilisant les questions **1)** et **2) a)**, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
Q'(u) &= \sum_{k=-n}^{n} a_k \mathrm{i} f\left(\frac{k\pi}{2n}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi u}{2n}} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} a_k \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)^2}\right. \\
&\qquad \left.\left(\mathrm{i}\sin\left((2m+1)\frac{k\pi}{2n}\right)\right)\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi u}{2n}} \\
&= \sum_{k=-n}^{n} a_k \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)^2} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2m+1+u)\frac{k\pi}{2n}}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. -\mathrm{e}^{\mathrm{i}(u-2m-1)\frac{k\pi}{2n}}\right)\right) \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)^2} \sum_{k=-n}^{n} a_k \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2m+1+u)\frac{k\pi}{2n}}\right. \\
&\qquad \left. -\mathrm{e}^{\mathrm{i}(u-2m-1)\frac{k\pi}{2n}}\right) \\
&= \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)^2} \left(Q(2m+1+u)\right. \\
&\qquad \left. -Q(u-2m-1)\right).
\end{aligned}$$

c Nous pouvons alors écrire :

$$\|Q'\|_\infty \leqslant \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2}{\pi(2m+1)^2} 2\|Q\|_\infty$$

car la série $\sum \dfrac{1}{(2m+1)^2}$ converge.

Plus précisément :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(2m)^2} + \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2}.$$

D'où : $$\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Puis : $$\|Q'\|_\infty \leqslant \frac{\pi}{2}\|Q\|_\infty.$$

Revenons à P.

$$\|P'\|_\infty = \frac{2n}{\pi}\|Q'\|_\infty.$$

Finalement : $$\|P'\|_\infty \leqslant n\|P\|_\infty.$$

9 Deux développements en série de Fourier sans calcul de coefficients de Fourier

1 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \frac{r\cos t - r^2}{(r - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})(r - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}.$$

Notons h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(t) = \frac{r\cos t + \mathrm{i}r\sin t - r^2}{(r - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})(r - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}.$$

Alors : $h(t) = \dfrac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - r^2}{(r - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t})(r - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t})} = \dfrac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$.

Or $\left|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right| < 1$. Utilisons le développement en série entière de $\dfrac{1}{1-z}$ lorsque $|z| < 1$.

$$h(t) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

Puis : $$f(t) = \mathrm{Re}(h(t)) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(nt).$$

Nous devons encore justifier que cette série est la série de Fourier de f car elle n'a pas été obtenue par le calcul des coefficients de Fourier de f.

Or $|r| < 1$, la série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Elle est donc la série de Fourier de sa fonction somme f.

2 Remarquer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $g'(t) = f(t)$.

Puisque la convergence de la série de fonctions définissant f est normale sur $\mathbb{R}$, nous pouvons affirmer qu'une primitive de f s'obtient en intégrant terme à terme. Par conséquent :

$$g(t) = g(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{\sin(nt)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \frac{\sin(nt)}{n}.$$

Ici également, la série obtenue converge normalement sur $\mathbb{R}$, car, pour tout r dans $]0,1[$, la série numérique $\sum \dfrac{r^n}{n}$ converge.

Nous en déduisons que la série de fonctions $\sum r^n \dfrac{\sin(nt)}{n}$ est la série de Fourier de g.

10 Autour d'une formule d'Euler (1707-1783)

1 La fonction f est continue, paire et 2π-périodique.

Les coefficients de Fourier b_n sont nuls et :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(nx)\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x.$$

Maple nous aide à calculer :

$$a_n = \frac{2(-1)^n \alpha \sin(\pi\alpha)}{\pi(\alpha^2 - n^2)}.$$

La série de Fourier de f est :

$$\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha}{\pi}\sum \frac{(-1)^n \sin(\pi\alpha)}{\alpha^2 - n^2}\cos(nx).$$

La fonction f est continue et 2π-périodique, la série de Fourier de f converge en moyenne quadratique vers f :

$$\lim_{n\to+\infty} \|S_n(f) - f\|_2 = 0.$$

La fonction f est continue, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

2 En particulier :

$$f(0) = 1 = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(\pi\alpha)}{\alpha^2 - n^2}.$$

D'où : $$\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

3 D'après le résultat de la première question :

$$\forall \alpha \notin \mathbb{Z} \quad \cos(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\pi\alpha} + \frac{2\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\pi\alpha)}{\alpha^2 - n^2}.$$

Posons $\alpha\pi = u$. Nous obtenons :

$$\forall u \notin \mathbb{Z}\pi \quad \cos(u) = \frac{\sin(u)}{u} + 2u\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u^2 - \pi^2 n^2}.$$

D'où : $$\forall u \notin \mathbb{Z}\pi \quad \operatorname{cotan}(u) = \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2}.$$

4 La fonction g, somme d'une série entière sur $]-1,1[$, est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle.

Elle admet donc un développement limité au voisinage de 0 à tout ordre dont les coefficients sont les coefficients de la série entière.

Pour déterminer $\zeta(2p)$ pour $p \geqslant 1$, il suffit d'écrire le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre $2p+1$ de chacune des deux fonctions :

$$(x \mapsto (\pi x\cos(\pi x) - \sin(\pi x)) \text{ et } (x \mapsto x\sin(\pi x))$$

puis de simplifier numérateur et dénominateur par x^2 et d'effectuer le quotient suivant les puissances croissantes de premier par le second.

Le coefficient du terme de degré $2p-1$ est $-2\zeta(2p)$.

Confions le calcul demandé à un logiciel de calcul formel :

Avec Maple

```
> series(Pi*cot(Pi*x)-1/x,x=0,9);
```

$$-\frac{1}{3}\pi^2 x - \frac{1}{45}\pi^4 x^3 - \frac{2}{945}\pi^6 x^5 - \frac{1}{4725}\pi^8 x^7 + O(x^9)$$

Nous obtenons :

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}; \qquad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90};$$
$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}; \qquad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450}.$$

5 Le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre $2p+1$ de chacune des deux fonctions :

$(x \mapsto (\pi x\cos(\pi x) - \sin(\pi x))$ et $(x \mapsto x\sin(\pi x))$, simplifié par x^2, fait apparaître au numérateur une somme de termes de la forme $p_k\pi^{2k+1}x^{2k-1}$, au dénominateur une somme de termes de la forme $q_k\pi^{2k+1}x^{2k}$, où les p_k et les q_k sont rationnels.

Vérifier par récurrence que la division suivant les puissances croissantes donne, pour tout entier $p > 0$, $\zeta(2p)$ produit de π^{2p} par un rationnel.

6 Reprenons la formule d'Euler :

$$\begin{aligned}\forall u \notin \mathbb{Z}\pi \quad \operatorname{cotan}(u) &= \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2u}{u^2 - n^2\pi^2}\\ &= \frac{1}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{u - n\pi} + \frac{1}{u + n\pi}\right).\end{aligned}$$

Notons, pour tout $n \geqslant 1$ et tout u dans $\mathbb{R} - \mathbb{Z}\pi$:

$$f_n(u) = \frac{1}{u - n\pi} + \frac{1}{u + n\pi}.$$

Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R} - \mathbb{Z}\pi$ et :

$$f_n'(u) = -\frac{1}{(u - n\pi)^2} - \frac{1}{(u + n\pi)^2}.$$

La série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment inclus dans l'intervalle $]m\pi, (m+1)\pi[$, où m désigne un entier relatif fixé.

Nous pouvons donc dériver terme à terme :

$\forall u \notin \mathbb{Z}\pi$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\sin^2(u)} &= -\frac{1}{u^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(u - n\pi)^2} + \frac{1}{(u + n\pi)^2}\right)\\ &= -\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(u - n\pi)^2}.\end{aligned}$$

Cette formule est donc vérifiée en tout point n'annulant pas la fonction sinus.

11 Chercher la fonction...

La série de fonctions $\sum \frac{\cos(nx)}{n^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Notons S la fonction somme :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

La fonction S est continue, 2π-périodique et paire sur $\mathbb{R}$.

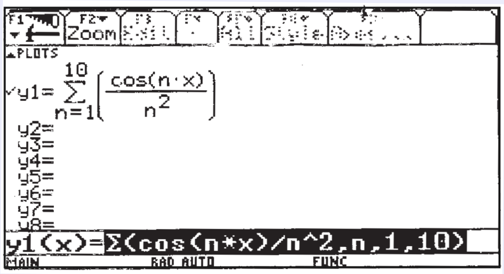
La convergence de la série de fonctions $\sum \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$ étant normale sur $\mathbb{R}$, les coefficients de Fourier de S sont les coefficients de la série :

$$a_0(S) = 0,\ \forall n \geqslant 1 \quad a_n(S) = \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad b_n(S) = 0.$$

Utilisons la TI pour préciser la fonction S.

Dans l'écran [Y =], rentrons la fonction :

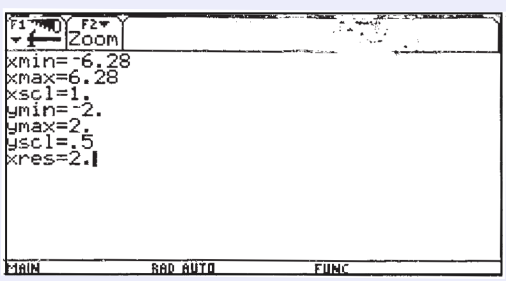
$$y_1(x) = \sum\left(\frac{\cos(nx)}{n^2}, n, 1, 10\right).$$



Dans l'écran [`Window`], choisissons :
`xmin` = − 6,28, pour travailler sur un écran de longueur 2 périodes.

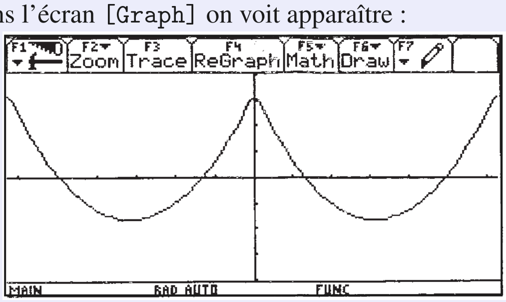
Pour `ymin` et `ymax`, on remarque que :

$$|S(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \leqslant 1,17$$



En prenant `ymin` = −2 et `ymax` = 2, la fenêtre doit être correcte.

Dans l'écran [`Graph`] on voit apparaître :



Le graphe semble symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \pi$.

Vérifions :

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$S(\pi - x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi - nx)}{n^2}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi + nx)}{n^2} = S(\pi + x).$$

Sur $[0, 2\pi]$, la fonction la plus simple dont le graphe ressemble à celui de S est de la forme :

$$S(x) = a(x - \pi)^2 + b$$

dont le graphe est un arc de parabole d'axe la droite d'équation $x = \pi$.

Notons f la fonction 2π-périodique définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = a(x - \pi)^2 + b$.

La fonction f est paire et continue et :

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left(a(x - \pi)^2 + b\right) \mathrm{d}x = \frac{2a\pi^2}{3} + 2b.$$

Pour obtenir $S = f$, il est nécessaire que :

$$a_0(f) = 0, \quad \text{soit} \quad b = -\frac{a\pi^2}{3}.$$

D'où : $$f(x) = a\left[(x - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3}\right].$$

Il reste à calculer par intégration par parties itérée trois fois :

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} a\cos(nx)\left[(x - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3}\right] \mathrm{d}x$$
$$= \frac{4a}{n^2}.$$

Prenons $a = \dfrac{1}{4}$. Nous obtenons :

$$a_n(f) = a_n(S) = \frac{1}{n^2}.$$

Les fonctions continues et 2π-périodiques f et S ont mêmes coefficients de Fourier.

Nous en déduisons, en utilisant l'injectivité de $(f \longrightarrow (c_n(f)))$, qu'elles coïncident.

La fonction S est la fonction 2π-périodique telle que :

$$\forall x \in [0, 2\pi] \quad S(x) = \frac{1}{4}\left((x - \pi)^2 - \frac{\pi^2}{3}\right).$$

La *formule de Parseval* donne :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S^2(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Soit : $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

12 Convergence de la série $\sum a_n$

1 La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R} - \{2k\pi \; k \in \mathbb{Z}\}$.

En tout point de la forme $2k\pi$, le graphe admet une tangente verticale, la fonction f' admet une limite infinie.

La fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

2 La fonction f est paire, les coefficients b_n sont nuls.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^{\pi} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\sqrt{\pi}.$$

3 L'égalité demandée résulte d'une intégration par parties. Lorsque x tend vers $+\infty$, le quotient $\dfrac{1-\cos(x^2)}{2x}$ tend vers 0.

De plus : $\dfrac{1-\cos(t^2)}{2t^2} = \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{t^2}{2}\right)}{t^2}$.

La fonction $\left(t \mapsto \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{t^2}{2}\right)}{t^2}\right)$ est continue et positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Elle se prolonge par continuité en 0 et est majorée sur $[1, +\infty[$ par la fonction $\left(t \mapsto \dfrac{1}{t^2}\right)$.

Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{1-\cos(t^2)}{2t^2}\mathrm{d}t$ admet une limite réelle lorsque x tend vers $+\infty$.

4 Calculons a_n.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sqrt{t}\cos(nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{4}{\pi n^{3/2}}\int_0^{\sqrt{n\pi}} u^2\cos(u^2)\mathrm{d}u \end{aligned}$$

en posant $nt = u^2$.

$$a_n = \frac{4}{\pi n^{3/2}}\left[u\frac{\sin(u^2)}{2}\right]_0^{\sqrt{n\pi}} - \frac{4}{\pi n^{3/2}}\int_0^{\sqrt{n\pi}} \frac{\sin(u^2)}{2}\mathrm{d}u$$

en intégrant par parties.

Finalement :

$$a_n = -\frac{2}{\pi n^{3/2}}\int_0^{\sqrt{n\pi}} \sin(u^2)\,\mathrm{d}\,u.$$

D'où $a_n \sim -\dfrac{1}{\sqrt{\pi} n^{3/2}}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

5 La fonction f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Les théorèmes de convergence ponctuelle des séries de Fourier ne peuvent s'appliquer ici.

Toutefois, la série $\sum |a_n|$ converge d'après la question **4)**.

Nous en déduisons la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série de Fourier de f.

Notons S sa somme. Elle est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction somme d'une série normalement convergente de fonctions continues.

Les fonctions f et S sont continues, 2π-périodiques. Elles ont mêmes coefficients de Fourier.

Elles coïncident. Par conséquent :

$$f(0) = S(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0.$$

13 Principe du maximum

1 Soit $r > 0$. Considérons la fonction continue et 2π-périodique, définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = P(z + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}).$$

La formule de Taylor nous donne :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(z_0)}{k!} r^k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}.$$

Puis la formule de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \frac{\left|P^{(k)}(z_0)\right|^2}{(k!)^2} r^{2k}.$$

b) Ce résultat se déduit de la continuité de l'application $(z \mapsto |P(z)|)$, ainsi que de la compacité de $\overline{D}$.

c) L'existence de r est immédiate.

De plus $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant |P(z_0)|^2$ car :

$$|f(t)| \leqslant |P(z_0)|.$$

Nous en déduisons :

$$\forall k \geqslant 1 \quad P^{(k)}(z_0) = 0$$

Utilisons à nouveau la formule de Taylor en z_0 :

$$P = P(z_0).$$

d) D'après **1) b)**, il existe z_0 dans $\overline{D}$ tel que :

$$|P(z_0)| = \sup_{z \in \overline{D}} |P(z)|.$$

Si z_0 est dans T :

$$\sup_{z \in \overline{D}} |P(z)| = \sup_{z \in T} |P(z)|.$$

Puisque z_0 est dans $\overline{D}$, il existe une suite $(z_n)_n$ de points de D convergeant vers z_0.

La continuité de la fonction polynôme P permet d'affirmer que :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} P(z_n) = P(z_0).$$

D'où : $\sup\limits_{z\in\overline{D}} |P(z)| = \sup\limits_{z\in T} |P(z)| = \sup\limits_{z\in D} |P(z)|$.

Sinon, z_0 appartient à D.

Puisque $D \subset \overline{D}$, nous avons : $\sup\limits_{z\in\overline{D}} |P(z)| \geqslant \sup\limits_{z\in T} |P(z)|$.

D'où : $\sup\limits_{z\in\overline{D}} |P(z)| = \sup\limits_{z\in D} |P(z)|$.

Puisque $T \subset D$, nous avons $\sup\limits_{z\in\overline{D}} |P(z)| \geqslant \sup\limits_{z\in T} |P(z)|$.

La question **1) c)** permet de supposer que $z_0 \neq 0$.

Notons $z = \dfrac{z_0}{|z_0|}$. z est dans T.

Vérifier que la suite $(z_n)_n$ définie par :

$$z_n = \left(|z_{n-1}| + \frac{1-|z_{n-1}|}{2}\right) z$$

est une suite d'éléments de D convergeant vers z. D'après la résolution de la question précédente, pour tout n :

$$P(z_n) = P(z_0)$$

La continuité de la fonction P permet de conclure que $P(z) = P(z_0)$.

D'où : $\sup\limits_{z\in\overline{D}} |P(z)| = \sup\limits_{z\in T} |P(z)| = \sup\limits_{z\in D} |P(z)|$.

2 **a)** La question précédente permet d'affirmer :

$$\begin{aligned}\sup_{|z|\leqslant 1} |S_n(z) - S_m(z)| &= \sup_{|z|=1} |S_n(z) - S_m(z)| \\ &= \sup_{|z|<1} |S_n(z) - S_m(z)| .\end{aligned}$$

D'où le résultat.

b) Supposons l'une des conditions du **a)** vérifiée.

La fonction $\left(\theta \mapsto S(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right)$ est continue en tant que limite uniforme de fonctions continues, et 2π-périodique.

La convergence uniforme de la série trigonométrique sur T permet d'affirmer qu'elle est sa série de Fourier :

$$c_m(S) = a_m \text{ si } m \geqslant 0 \,;\ c_m(S) = 0 \text{ sinon.}$$

Appliquons l'égalité de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(\theta)|^2 \,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 .$$

c) La série entière $\sum \dfrac{z^n}{n^2}$ convient.

3 **a)** Soit z_0 un maximum local de S et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$, en notant U le disque ouvert de convergence.

Considérons la fonction f continue et 2π-périodique : $\left(t \mapsto f(t) = S(z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\right)$.

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z_0 + r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_0^k r^{(n-k)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)t}\right) .\end{aligned}$$

La série $\sum |a_n| \left(|z_0| + r\right)^n$ est convergente, on peut échanger les sommations et, en posant $n - k = p \geqslant 0$:

$$f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p+k}{k} a_{p+k} |z_0|^k\right) r^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}pt}$$

De plus, la série :

$$\sum \left(\sum_{k=0}^{p} \binom{p+k}{k} a_{p+k} |z_0|^k\right) r^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}pt}$$

converge absolument.

Elle est donc la série de Fourier de la fonction f et f est la somme de sa série de Fourier.

Appliquons la formule de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty} |c_p(f)|^2 \leqslant |S(z_0)|^2$$

Or :

$$c_0(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n = S(z_0).$$

Nous en déduisons que, pour tout $p \geqslant 1$:

$$c_p(f) = 0$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Elle est la somme de sa série de Fourier :

$$f(t) = c_0(f) = S(z_0).$$

La fonction S est donc constante dans toute boule ouverte de centre z_0 contenue dans le disque ouvert de convergence.

b) Soit $M' = \sup\limits_{z\in\overline{D(R)}} |S(z)|$. $|S|$ est continue et $\overline{D(R)}$ est compact donc M' est atteinte en un point a de $\overline{D(R)}$.

Premier cas

Si $a \in \overline{D(R)} \setminus D(R)$, alors $M = m'$ et **(i)** est vérifiée.

Deuxième cas

Si $a \in D(R)$, on considère l'ensemble :

$$A = \{z \in D(R)\,; \quad S(z) = S(a)\}.$$

$A \neq \emptyset$ car $a \in A$.

A est un fermé relatif, comme image réciproque dans $D(R)$, de $\{S(a)\}$ par S qui est continue.

A est un ouvert d'après **3)a)**.

Donc A est un ensemble non vide, ouvert et fermé relativement à $D(R)$ qui est convexe par arcs.

Donc $A = D(R)$.

Ainsi A est constante sur $D(R)$. Comme elle est continue sur $\overline{D(R)}$ elle est également constante sur $\overline{D(R)}$.

Ceci prouve que $M = M'$ et démontre **(i)** et **(ii)**.

c) Soit $r > 0$. La formule de Parseval appliquée à la fonction $(t \mapsto S(re^{it}))$ donne :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n|\, r^n \leqslant \sup_{|z|=r} |S(z)| = \sup_{|z|\leqslant r} |S(z)|\,.$$

Utilisons l'hypothèse. Il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que, pour tout z, $|S(z)| \leqslant M\,|z|^p$.

Nous en déduisons :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leqslant M^{p-n}$$

Pour $n > p$ on fait tendre r vers $+\infty$.

Nous obtenons :

$$a_n = 0$$

D'où le résultat.

Si S est bornée sur $\mathbb{C}$, alors $S(z) = O(1)$.

La fonction S est constante.

14 Elle ressemble à une série de Fourier, mais ...

1 Ces deux séries sont des séries de Bertrand.

En comparant la première à $\sum \frac{1}{k^{3/4}}$, montrer qu'elle diverge.

La convergence de la seconde équivaut à l'intégrabilité de la fonction positive, continue et décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$:

$$\left(t \mapsto \frac{1}{t(\ln t)^2}\right).$$

Montrer qu'une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de cette fonction est bornée, et en déduire que la série converge.

2 Utilisons une transformation d'Abel pour prouver que la série :

$$\sum \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}\ln k}$$

vérifie le critère de Cauchy.

Posons :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \sin(kx).$$

Alors, pour tous entiers $p < q$:

$$\sum_{k=p+1}^{q} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}\ln k} = \sum_{k=p+1}^{q} \frac{(S_k - S_{k-1})}{\sqrt{k}\ln k}$$

$$= \sum_{k=p+1}^{q} \frac{S_k}{\sqrt{k}\ln k} - \sum_{k=p}^{q-1} \frac{S_k}{\sqrt{k+1}\ln(k+1)}$$

$$= \frac{S_q}{\sqrt{q}\ln q} - \frac{S_p}{\sqrt{p+1}\ln(p+1)}$$

$$+ \sum_{k=p+1}^{q-1} S_k \left(\frac{1}{\sqrt{k}\ln k} - \frac{1}{\sqrt{k+1}\ln(k+1)}\right)$$

Or, pour tout x différent de 0, modulo 2π :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \sin(kx) = \mathcal{F}\left(\sum_{k=2}^{n} e^{ikx}\right) = \mathcal{F}\left(\frac{e^{2ix} - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}}\right)$$

$$= \frac{\sin\dfrac{(n+2)x}{2}\sin\dfrac{(n-1)x}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}$$

D'où, pour tout x différent de 0, modulo 2π :

$$|S_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|} = M(x)$$

Puis :

$$\left|\sum_{k=p+1}^{q} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}\ln k}\right| \leqslant \frac{M(x)}{\sqrt{q}\ln q} + \frac{M(x)}{\sqrt{p+1}\ln(p+1)}$$

$$+ \sum_{k=p+1}^{q-1} M(x)\left(\frac{1}{\sqrt{k}\ln x} - \frac{1}{\sqrt{k+1}\ln(k+1)}\right)$$

$$\leqslant 2\frac{M(x)}{\sqrt{p+1}\ln(p+1)}$$

La série de fonctions converge donc simplement sur $\mathbb{R}$.

3 Considérons la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\ln x}.$$

Cette fonction est convexe sur $]1, +\infty[$.

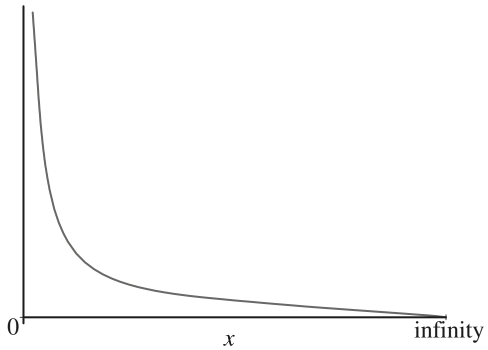
Avec Maple

```
> f:=x->1/(sqrt(x)*ln(x));
  normal(D(f)(x));
```

$$f := x \to \frac{1}{\sqrt{x}\,\ln(x)}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\ln(x)+2}{x^{3/2}\ln(x)^2}$$

```
> plot(f(x),x=1..infinity);
```



L'inégalité est donc vérifiée.

4 $S\left(\frac{\pi}{2p}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin\frac{k\pi}{2p}$

$$= \sum_{k=1}^{2p-1} a_k \sin\frac{k\pi}{2p} - \sum_{k=2p+1}^{4p-1} a_k \sin\frac{k\pi}{2p} + \cdots$$

Posons $P_0 = \sum_{k=1}^{2p-1} a_k \sin\frac{k\pi}{2p}$ et, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{j=1}^{2p-1} a_{2np+j} \sin\frac{(2np+j)\pi}{2p}$$

$$= (-1)^n \sum_{j=1}^{2p-1} a_{2np+j} \sin\frac{j\pi}{2p}$$

$$= (-1)^n P_n.$$

Nous obtenons $S\left(\frac{\pi}{2p}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n P_n$.

De plus, la suite (a_k) est décroissante, donc :

$$P_0 - P_1 = \sum_{k=1}^{2p-1} a_k \sin\frac{k\pi}{2p} - \sum_{k=2p+1}^{4p-1} a_k \sin\frac{k\pi}{2p}$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{p} a_k \sin\frac{k\pi}{2p} - \sum_{k=3p}^{4p-1} a_k \sin\frac{k\pi}{2p}$$

$$\geqslant \left(\sin\frac{\pi}{2p} + \sin\frac{2\pi}{2p} + \cdots + \sin\frac{p\pi}{2p}\right)(a_p - a_{3p}).$$

Procédons de même avec chaque somme $P_{2m} - P_{2m+1}$.

Nous obtenons :

$$P_{2m} - P_{2m+1}$$

$$\geqslant \left(\sin\frac{\pi}{2p} + \sin\frac{2\pi}{2p} + \cdots + \sin\frac{p\pi}{2p}\right)$$

$$(a_{(4m+1)p} - a_{(4m+3)p})$$

Puis :

$$S\left(\frac{\pi}{2p}\right)$$

$$\geqslant \left(\sin\frac{\pi}{2p} + \sin\frac{2\pi}{2p} + \cdots + \sin\frac{p\pi}{2p}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_{(4k+1)p} - a_{(4k+3)p})$$

5 Étudions d'abord la somme :

$$\left(\sin\frac{\pi}{2p} + \sin\frac{2\pi}{2p} + \cdots + \sin\frac{p\pi}{2p}\right)$$

$$\sin\frac{\pi}{2p} + \sin\frac{2\pi}{2p} + \cdots + \sin\frac{p\pi}{2p}$$

$$= \mathrm{Im}\,(e^{i\pi/2p} + \cdots + e^{ip\pi/2p})$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4p}\right)\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4p}}$$

$$\geqslant \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{4p}} \geqslant \frac{2p}{\pi}.$$

Passons ensuite à la somme :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_{(4k+1)p} - a_{(4k+3)p}).$$

La *question* **3)** permet d'écrire :

$$a_p - a_{3p} \geqslant a_{3p} - a_{5p}.$$

Puis :

$$2(a_p - a_{3p}) \geqslant a_p - a_{5p}.$$

Pour tout $m \geqslant 1$, de même :

$$2(a_{(4m+1)p} - a_{(4m+3)p}) \geqslant a_{(4m+1)p} - a_{(4m+5)p}.$$

D'où :

$$2\sum_{k=0}^{+\infty}(a_{(4k+1)p} - a_{(4k+3)p}) \geqslant a_p.$$

En reportant dans le résultat de la *question* **4)** :

$$S\left(\frac{\pi}{2p}\right) \geqslant a_p \frac{p}{\pi} = \frac{\sqrt{p}}{\pi \ln p}.$$

Lorsque p tend vers $+\infty$, $S\left(\dfrac{\pi}{2p}\right)$ tend vers $+\infty$.

Nous en déduisons que la fonction S n'est pas la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

La série de fonctions $\sum \dfrac{\sin(kx)}{\sqrt{k}\ln k}$ n'est donc pas la série de Fourier d'une fonction 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Algorithme

Transformée de Fourier discrète et transformée de Fourier rapide

A. 1 ▬ **a)** Vérifier que, si l'application s est périodique de période N, l'application $\widehat{s}$ est périodique de période N.

b) Soit s dans $\mathbb{R}_N^{\mathbb{Z}}$ et n un entier relatif.

$$\overline{\widehat{s}(n)} = \sum_{k=0}^{N-1} s(k)\omega^{-kn} = \widehat{s}(-n).$$

Donc :

$$\mathbb{R}e(\widehat{s}(n)) = \mathrm{Re}\,(\widehat{s}(-n)) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\,(\widehat{s}(n)) = -\mathrm{Im}\,(\widehat{s}(-n)).$$

La fonction Re $\widehat{s}$ est paire et la fonction Im $\widehat{s}$ est impaire.

c) Soit s une application paire dans $\mathbb{R}_N^{\mathbb{Z}}$ et n un entier relatif.

$$\mathrm{Im}\,(\widehat{s}(n)) = -\mathrm{Im}\,(\widehat{s}(-n)) = -\sum_{k=0}^{N-1} s(k)\omega^{-kn}.$$

Puis :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\,(\widehat{s}(n)) &= -\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{N-1} s(k)\omega^{-kn}\right)\\ &= -\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{N-1} s(-k)\omega^{-kn}\right) = -\mathrm{Im}\,(\widehat{s}(n)).\end{aligned}$$

La fonction $\widehat{s}$ est à valeurs réelles et paire.

2 ▬ **a)** Considérons l'application ψ de $\mathbb{C}^N$ dans $\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$ qui, à toute suite finie de N complexes, $(c_0, c_1, \ldots, c_{N-1})$, associe la suite s complexe de période N, définie par :

$$s(0) = c_0, \ldots, s(N-1) = c_{N-1}.$$

Cette application vérifie :

$$\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^N} \quad \text{et} \quad \psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}}.$$

L'application φ est bijective.

Vérifier qu'elle est linéaire. Elle définit un isomorphisme d'espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$.

La dimension du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}_N^{\mathbb{Z}}$ est N.

b) Pour tout k de 0 à $N-1$ $\widehat{s}_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} s_j \omega^{jk}$.

c) Composée d'applications linéaires, l'application F_N est linéaire. Sa matrice est :

$$M_N = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{(i,j)\in[\![1,N]\!]^2}.$$

d) Notons P le polynôme :

$$P(X) = s_0 + s_1 X + \cdots + S_{N-1}X^{N-1}.$$

Nous remarquons que :

$$\forall k \in [\![0, N-1]\!] \quad \widehat{s}_k = P(\omega^k).$$

Utilisons le *schéma de Horner* :

$$P(X) = s_0 + X(s_1 + X(\cdots(s_{N-2} + s_{N-1}X)\cdots)).$$

Le calcul de $P(1)$ utilise $N-1$ additions, celui de $P(\omega)$ utilise $N-1$ additions et $N-1$ multiplications.

Pour $k \geqslant 2$, le calcul de $P(\omega^k)$ nécessite d'abord celui de ω^k, soit une multiplication, puis $N-1$ additions et $N-1$ multiplications.

Au total, $N(N-1)$ additions sont nécessaires, ainsi que $(N-2)N + N - 1$, soit $N^2 - N - 1$ multiplications.

Pour calculer M_N, il faut calculer $\omega, \omega^2, \ldots, \omega^{(N-1)^2}$. Ce calcul nécessite $N(N-2)$ multiplications.

Pour évaluer ensuite $\widehat{s}$, $N-1$ additions sont nécessaires pour $\widehat{s}_0$. Le calcul des autres coordonnées de $\widehat{s}$ utilise $N-1$ additions et $N-1$ multiplications. Cette méthode demande donc $N(N-1)$ additions et $N(N-2) + (N-1)^2 = 2N^2 - 4N + 1$ multiplications. Vérifier que, pour $n > 2$, cette méthode est plus coûteuse que la précédente.

3 ▬ **a)** Notons c_j la j-ième colonne de la matrice M_N.

$$\sqrt{\langle c_j, c_j\rangle} = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} \overline{\omega^{k(j-1)}}\omega^{k(j-1)}} = \sqrt{N}.$$

b) Soit $i,\ j$ deux entiers distincts dans $[\![1, N]\!]$:

$$\langle c_i, c_j\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \overline{\omega^{k(i-1)}}\omega^{k(j-1)} = \sum_{k=0}^{N-1} \omega^{k(j-i)}.$$

Les entiers i et j sont distincts dans $[\![1, N]\!]$, donc $j-i$ est compris entre $1-N$ et $N-1$ et $\omega^{(j-i)} \neq 1$.

Par conséquent :

$$\langle c_i, c_j\rangle = \frac{1-\omega^{N(j-i)}}{1-\omega^{j-i}} = 0.$$

Deux colonnes distinctes de la matrice M_N sont orthogonales.

c) Notons $m_{i,j}$ l'élément de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de la matrice ${}^t\overline{M_N}M_N$.

$$m_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} \omega^{-(k-1)(i-1)}\omega^{(k-1)(j-1)} = \sum_{k=1}^{N} \omega^{(k-1)(j-i)}.$$

Si $i \neq j$, $m_{i,j} = 0$ et si $i = j$, alors $m_{i,j} = N$.

Nous en déduisons que ${}^t\overline{M_N}M_N = N\mathrm{I}_N$.

L'application F_N est donc bijective et :

$$F_N^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N}}F_N^*.$$

4 Notons $s = F_N(x)\circ F_N(y)$. Soit k dans $[\![0, N-1]\!]$:

$$s_k = \widehat{x}_k\widehat{y}_k = \left(\sum_{j=0}^{N-1} x_j\omega^{jk}\right)\left(\sum_{i=0}^{N-1} y_i\omega^{ik}\right).$$

Donc :

$$s_k = \sum_{(j,i)\in[\![0,N-1]\!]^2} x_j y_i \omega^{k(i+j)}.$$

Remarquons que :

$$[\![0, N-1]\!]^2 = \bigcup_{\lambda=0}^{N-1} \left\{(j,i)\in[\![0,N-1]\!]^2 ; j+i = \lambda \,(\mathrm{mod}\ N)\right\}.$$

Nous pouvons écrire :

$$s_k = \sum_{\lambda=0}^{N-1}\left(\sum_{(j,i),\ j+i=\lambda\,(\mathrm{mod}\ N)} x_j y_i\omega^{k\lambda}\right) = \widehat{x*y}_k.$$

Par conséquent :

$$F_N(x)\circ F_N(y) = F_N(x*y).$$

B. 5 **a)** Nous obtenons $\omega = -\mathrm{i}$, puis :

$$\widehat{s}_0 = s_0+s_1+s_2+s_3\,; \qquad \widehat{s}_1 = s_0 - \mathrm{i}s_1 - s_2 + \mathrm{i}s_3$$

$$\widehat{s}_2 = s_0 - s_1 + s_2 - s_3\,; \qquad \widehat{s}_3 = s_0 + \mathrm{i}s_1 - s_2 - \mathrm{i}s_3.$$

b) Les conditions données équivalent à :

$$a_0 = \frac{1}{2}(\widehat{s}_0+\widehat{s}_2)\,; \qquad b_0 = \frac{1}{2}(\widehat{s}_0-\widehat{s}_2)\,;$$

$$a_1 = \frac{1}{2}(\widehat{s}_1+\widehat{s}_3)\,; \qquad b_1 = \frac{\mathrm{i}}{2}(\widehat{s}_1-\widehat{s}_3).$$

c) Des deux questions précédentes, nous déduisons :

$$a_0 = s_0+s_2\,; \qquad b_0 = s_1+s_3\,;$$

$$a_1 = s_0 - s_2\,; \qquad b_1 = s_1 - s_3.$$

Vérifier que :

$$\sigma_1 = F_2(s_0, s_2)\ ;\ \sigma_2 = F_2(s_1, s_3).$$

6 **a)** Nous obtenons, pour tout n dans $[\![0, m-1]\!]$:

$$\widehat{s}_n = \sum_{k=0}^{2m-1}\omega^{kn}s_k = \sum_{k=0}^{m-1}\omega^{2kn}s_{2k} + \omega^n\sum_{k=0}^{m-1}\omega^{2kn}s_{2k+1}.$$

Soit :

$$\widehat{s}_n = A_n + \omega^n B_n.$$

Puis :

$$\widehat{s}_{m+n} = A_n + \omega^{n+m}B_n = A_n - \omega^n B_n.$$

Notons :

$$s'' = (s_0, s_2, \ldots, s_{2m-2}),$$

$$s'' = (s_1, s_3, \ldots, s_{2m-1}),$$

$$A = (A_n)_{n\in[\![0,m-1]\!]} \quad \text{et} \quad B = (B_n)_{n\in[\![0,m-1]\!]}.$$

Nous avons montré que :

$$A = F_m(s') \quad \text{et} \quad B = F_m(s'').$$

b) Soit $q \geqslant 1$.

Pour calculer $A = F_{2^q}(s')$ et $B = F_{2^q}(s'')$, $2u_q$ opérations entre nombres complexes sont nécessaires. Au plus, trois autres opérations permettent d'obtenir $\widehat{s}_n$, pour tout n de $[\![0, 2^q-1]\!]$.

Au total, nous obtenons :

$$u_{q+1} \leqslant 2u_q + 3\times 2^q.$$

c) Divisons l'inégalité obtenue au rang q :

$$\frac{u_q}{2^q} \leqslant \frac{u_{q-1}}{2^{q-1}} + \frac{3}{2}.$$

Une récurrence simple vous convaincra que :

$$\frac{u_q}{2^q} \leqslant \frac{u_1}{2} + \frac{3}{2}(q-1).$$

D'où :

$$u_q \leqslant 2^{q-1}u_1 + 3.2^{q-1}(q-1).$$

Calculons u_1.

Puisque :

$$\widehat{s}_0 = s_0 + s_1 \quad \text{et} \quad \widehat{s}_1 = s_0 - s_1,$$

nous trouvons $u_1 = 2$.

Finalement :

$$u_q \leqslant 2^{q-1}(3q-1) = \frac{N}{2}\left(3\frac{\ln N}{\ln 2} - 1\right).$$

d) Le calcul direct, en utilisant la *méthode de Horner*, et en supposant les ω^k connus demande :

$$N - 1 + (N-1)(N-2) = (N-1)(2N-1)$$

opérations. Il est beaucoup plus coûteux que la méthode par la transformée de Fourier rapide.

e) Proposons la procédure récursive en *Maple*.

Avec Maple

```
> restart :
> TFR:=proc(n::nonnegint,w,s)
local S,a,b,i,j,k,C,A,B,w2,wk :
S:=s :k:=n :
if k=1 then S
  else do k:=k-1 :
  for i from 0 to 2^k-1 do
  a[i]:=s[2*i+1] :b[i]:=s[2*i+2] :od :
  w2:=w^2 :
  A:=TFR(k,w,a) :B:=TFR(k,w,b) :
  wk:=1 :
  for j from 0 to 2^k-1 do
  C:=wk*B[j] :S[j]:=A[j]+C :
  S[j+n]:=A[j]-C :wk:=wk*w :od :
  od :fi :print(S) ; end ;
```

TFR := **proc**(n::*nonnegint*, w, s)
local S, a, b, i, j, k, C, A, B, $w2$, wk;
  $S := s$;
  $k := n$;
  if $k = 1$ **then** S
  elsedo
    $k := k - 1$;
    for i **from** 0 **to** $2^k - 1$ **do**
      $a_i := s_{2\times i+1}$; $b_i := s_{2\times i+2}$
    od;
    $w2 := w^2$;
    $A := \mathrm{TFR}(k, w, a)$;
    $B := \mathrm{TFR}(k, w, b)$;
    $wk := 1$;
    for j **from** 0 **to** $2^k - 1$ **do**
      $C := wk \times B_j$; $S_j := A_j + C$;
      $S_{j+n} := A_j - C$; $wk := wk \times w$
    od
  od
  fi;
  print(S)
end

15 Calcul differentiel

RAPPELS DE COURS

$(E, || \quad ||_E), (F, || \quad ||_F)$ et $(G, || \quad ||_G)$ sont des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels normés de dimension finie, U et V deux ouverts non vides respectivement de E et F. Soit v un vecteur de E non nul.

Soit a un point de U, il existe un voisinage W de 0_E tel que :

$$\forall h \in W \quad a + h \in U.$$

On note $(e_1, ..., e_p)$ une base de $E, (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ une base de F et $(\mu_1, ..., \mu_m)$ une base de $G, (f_1, ..., f_n)$ les fonctions coordonnées d'une application f de U dans F.

APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

On dit que l'application f de U dans F est *différentiable* en a s'il existe une application linéaire l de $\mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\forall h \in W f(a+h) = f(a) + l(h) + \mathrm{o}(||h||_E).$$

Si l'application linéaire l existe, elle est unique, notée $\mathrm{d}\, f(a)$ et appelée *application linéaire tangente* à f en a ou *différentielle* de f en a.

Lorsque f est différentiable en tout point de U on dit que f est *différentiable* sur U et que l'application $\mathrm{d}\, f$ de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ est la *différentielle* de f.

Une application f est différentiable en a si, et seulement si, chacune de ses cordonnées est différentiable en a. Dans ce cas :

$$\mathrm{d}\, f(a) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}\, f_i(a) \varepsilon_i.$$

Si $E = \mathbb{R}^p$, on note $(\mathrm{d}\, x_1, ..., \mathrm{d}\, x_p)$ la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ alors :

$$\mathrm{d}\, f = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}\, x_i.$$

PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES

Toute application différentiable en a est continue sur a.

• Soit f et g deux applications de U dans F différentiables sur U, α et β deux réels.

Alors $\alpha f + \beta g$ est différentiable sur U et $\mathrm{d}(\alpha f + \beta g) = \alpha \,\mathrm{d} f + \beta \,\mathrm{d} g$.

• Soit f une application de U dans V différentiable en a et une application g de V dans $(G, \| \quad \|_G)$ différentiable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$\mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}\, g(f(a) \circ \mathrm{d}\, f(a).$$

• Soit φ une application de U dans V dérivable en a et f une application de V dans G différentiable en $\varphi(a)$.

Alors $f \circ \varphi$ est dérivable en a et :

$$(f \circ \varphi)'(a) = \mathrm{d}\, f(\varphi(a))(\varphi'(a)).$$

DÉRIVÉES SELON UN VECTEUR, DÉRIVÉES PARTIELLES

L'application f admet une *dérivée en a selon le vecteur* v si $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+tv) - f(a)}{t}$ existe.

Dans ce cas, cette limite est notée :

$$\mathrm{D}_v f(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial v}(a)$$

et appelée dérivée de f en a selon le vecteur v.

On dit que l'application f admet une *dérivée partielle* en a par rapport à la j-ième composante si f admet une dérivée en a selon le vecteur e_j, on la note :

$$\mathrm{D}_j f(a) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

DÉRIVÉE SELON UN VECTEUR ET DIFFÉRENTIELLE

• Soit f une application de U dans F différentiable en a. Alors, pour tout vecteur non nul v de E, l'application f admet en a une dérivée selon le vecteur v donnée par :

$$\mathrm{D}_v f(a) = \mathrm{d}\, f(a)(v).$$

• Soit f une application de U dans F différentiable en a.

Alors les p dérivées partielles existent et :

$$\forall i \in [\![1, p]\!] \mathrm{D}_j f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \mathrm{d}\, f(a)(e_j).$$

• Soit f une application de U dans F différentiable en a.

Alors, pour tout $h = \sum\limits_{i=1}^{p} h_i e_i$ de E, on a :

$$\mathrm{d}\, f(a)(h) = \sum_{i=1}^{p} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \sum_{i=1}^{p} h_i \mathrm{D}_i f(a).$$

APPLICATIONS CONTINÛMENT DIFFÉRENTIABLES

Soit f une application de U dans F différentiable sur U. On dit que f est *continûment différentiable* ou de classe $\mathcal{C}^1$ sur U lorsque, pour tout vecteur v non nul de E, l'application $\mathrm{D}_v f$ est continue sur U.

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si, et seulement si, chacune de ses cordonnées est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

• Toute application constante de U dans F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et la différentielle en tout point de U est $0_{\mathcal{L}(E,F)}$.

• Toute application linéaire f de E dans F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E et la différentielle en tout point de E est f.

• Toute application bilinéaire B de $E \times F$ dans G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $E \times F$ et sa différentielle en tout point (x, y) de $E \times F$ est l'application $(h, k) \longmapsto B(h, y) + B(x, k)$.

PROPRIÉTÉS DES APPLICATIONS CONTINÛMENT DIFFÉRENTIABLES

• Soit f et g deux applications de U dans F continûment différentiables sur U, α et β deux réels. Alors $\alpha f + \beta g$ est continûment différentiable sur U.

L'ensemble $\mathcal{C}^1(U, F)$ des applications continûment différentiables sur U est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{C}(U, F), +, .)$.

• Soit f une application de U dans V de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et une application g de $V(G, \|\ \ \|_G)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur V. Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Le théorème fondamental

Soit f une application de U dans F. Si, dans une base de E, les dérivées partielles de f existent et sont continues sur U, alors f est différentiable sur U. De plus, f est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

MATRICE JACOBIENNE ET JACOBIEN

La matrice, relativement aux bases $(e_1, \dots, e_p)$ de E et $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de F, de la différentielle $\mathrm{d}\,f$ au point a est appelée *matrice jacobienne* de f en a et notée $\mathrm{J}\,f(a)$.

La matrice $\mathrm{J}\,f(a)$ est la matrice :

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{(i,j)\in[[1,n]]\times[[1,p]]}$$

égale à la matrice :

$$\left(\mathrm{D}_j f_i(a)\right)_{(i,j)\in[[1,n]]\times[[1,p]]}.$$

Pour $E = F$ et $p = n$, le *jacobien* de f au point a est le déterminant de $\mathrm{d}\,f(a)$, c'est-à-dire le déterminant de la matrice jacobienne de f au point a. On note :

$$\frac{\mathrm{D}\,(f_1, \dots, f_p)}{\mathrm{D}\,(x_1, \dots, x_p)}(a).$$

OPÉRATIONS ALGÉBRIQUES SUR LES MATRICES JACOBIENNES

• Soit f et g deux applications de U dans F différentiables en a, α et β deux réels. La matrice jacobienne en a de $\alpha f + \beta g$ est :

$$\mathrm{J}(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha \mathrm{J} f(a) + \beta \mathrm{J} g(a).$$

• Soit une application f de U dans V différentiable en a et une application g de V dans $(G, \|\ \|_G)$ différentiable en $f(a)$. Alors la matrice jacobienne de $g \circ f$ en a est :

$$\mathrm{J}(g \circ f)(a) = \mathrm{J}g(f(a)\mathrm{J}f(a).$$

• Soit f une application de U dans V différentiable en a, g une application de V dans G différentiable en $f(a)$ et $(g_1, ..., g_n)$ ses fonctions coordonnées dans la base $(\mu_1, ..., \mu_m)$.

Alors :

$$\forall (i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, p]\!] \mathrm{D}_j(g_i \circ f)(a) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}_k g_i(f(a)) \mathrm{D}_j f_k(a)$$

$$\forall (i, j) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, p]\!] \frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a).$$

LE GRADIENT

On munit E d'un produit scalaire $(\ |\ )$ et la base $(e_1, ..., e_p)$ est supposée orthonormale.

Soit f un élément de $\mathcal{C}^1(U)$ et a un point de U. Il existe un unique vecteur de E, noté $\mathrm{grad} f(a)$ appelé *gradient de f au point a*, tel que : $\mathrm{d}f(a)$:

$$h \longmapsto (\overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a) | h).$$

Ses composantes dans la base $(e_1, ..., e_p)$ sont :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right).$$

• Soit f et g deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un point de U. La fonction produit fg est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et de plus :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} fg(a) = f(a) \overrightarrow{\mathrm{grad}} g(a) + g(a) \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a).$$

• Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un point de U tel que $f(a) \neq 0$.

Il existe une boule ouverte B de centre a incluse dans U telle que :

$$\forall b \in B \quad f(b) \neq 0.$$

La fonction $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur B et, de plus :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} \frac{1}{f}(a) = -\frac{1}{f^2(a)} \overrightarrow{\mathrm{grad}} f(a).$$

INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS

• Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ et a un point de U et h un élément de E tels que :

1) $[a, a+h] \subset U$;

2) f continue sur $[a, a+h]$;

3) f différentiable en tout point de $]a, a+h[$;

4) il existe M réel tel que, pour tout x de $]\,a, a+h[$, $||\mathrm{d}\, f(x)|| \leqslant M$. Alors :

$$|f(a+h) - f(a)| \leqslant M||h||.$$

• Soit U un ouvert convexe de E, f une application de $\mathcal{C}^1(U)$. On suppose qu'il existe un réel M tel que, pour tout x de U, $||\mathrm{d}\, f(x)|| \leqslant M$. Alors, pour tout a et b de U on a :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant M||b-a||.$$

• Soit U un ouvert étoilé de E, f une application différentiable sur U. Alors la différentielle $\mathrm{d}\, f$ de f est nulle sur U si, et seulement si, l'application f est constante.

APPLICATIONS DE CLASSE $\mathcal{C}^k$

• Soit un entier $k \geqslant 1$. L'ensemble $\mathcal{C}^k(U, F)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur U à valeur dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(U, F)$.

Pour tout j de $[\![1, p]\!]$, l'application $\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ est une application linéaire de $\mathcal{C}^k(U, F)$ dans $\mathcal{C}^{k-1}(U, F)$.

L'ensemble $\mathcal{C}^k(U)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur U à valeur dans $\mathbb{R}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(U)$.

• Soit un entier $k \geqslant 1$, une application f de classe $\mathcal{C}^k$ sur U à valeurs dans V et g une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur V. Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U.

Le théorème de Schwarz

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur U à valeurs dans F. Alors :

$$\forall a \in U \quad \forall (i, j) \in [\![1, p]\!]^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

$\mathcal{C}^k$-DIFFÉOMORPHISME

• Soit un entier $k \geqslant 1$. Une application de U dans V est un $\mathcal{C}^k$-*difféomorphisme* de U sur V lorsqu'elle vérifie les trois conditions suivantes :

1) f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U ;

2) f est bijective de U sur V ;

3) f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur V.

On dit que f est un $\mathcal{C}^\infty$-*difféomorphisme* de U sur V lorsqu'elle un $\mathcal{C}^k$-*difféomorphisme* de U sur V pour tout entier $k \geqslant 1$.

• Soit f un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U dans V. Alors :

1) $\dim E = \dim F$;

2) l'application f^{-1} est un $\mathcal{C}^k$−difféomorphisme de V dans U ;

3) pour tout a de U, $\mathrm{d}(f^{-1})(f(a)) = (\mathrm{d}\, f(a))^{-1}$;

4) pour tout a de U, la matrice jacobienne de f^{-1} en $f(a)$ est $\mathrm{J}(f^{-1})(f(a)) = (\mathrm{J} f(a))^{-1}$.

• ***Caractérisation des difféomorphismes parmi les applications injectives de classe*** $\mathcal{C}^k$

Soit un entier $k \geqslant 1$ et f une application injective, de classe $\mathcal{C}^k$ sur U telle que :

$$\forall a \in U \quad \mathrm{DetJ}f(a) \neq 0.$$

Alors $f(U)$ est un ouvert de F et f est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U sur $f(U)$.

• L'application $\varphi\ : (\rho, \theta) \longmapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de :

$$\mathbb{R}^+ * \times]-\pi, \pi[\quad \text{sur} \quad \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, 0)\ ; x \leqslant 0\}$$

et l'application réciproque est φ^{-1} :

$$(x, y) \longmapsto \left(\sqrt{x^2+y^2},\ 2\mathrm{Arctan}\,\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

FORMULE DE TAYLOR-YOUNG

Soit f une application d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et (a, b) un point de U. Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout (h, k) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $||(h, k)|| < \alpha$, on ait :

$$F(a+h, b+k) = f(a, b) + h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2hk\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) + k^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] + \mathrm{o}(||(h, k)||^2).$$

EXTREMUM LOCAL

• Soit f une application de U dans $\mathbb{R}$ et a un point de U. L'application f admet :

– un *maximum local* au point a si :

$$\exists\, r > 0 \quad \forall x \in B(a, r) \cap U f(x) \leqslant f(a)\ ;$$

– un *maximum local strict* au point a si :

$$\exists\, r > 0 \quad \forall x \in B(a, r) \cap U \quad x \neq a \Rightarrow f(x) < f(a)\ ;$$

– un *minimum local* au point a si :

$$\exists\, r > 0 \quad \forall x \in B(a, r) \cap U f(x) \geqslant f(a)\ ;$$

– un *minimum local strict* au point a si :

$$\exists\, r > 0 \quad \forall x \in B(a, r) \cap U \quad x \neq a \Rightarrow f(x) > f(a).$$

L'application f admet un *extremum local strict* au point a si elle admet en ce point un minimum ou un maximum.

• Soit f une application de U dans $\mathbb{R}$ qui admet en un point a de U des dérivées partielles. On suppose que f admet un extremum en ce point. Alors les dérivées partielles en a sont nulles.

La condition précédente est une condition nécessaire mais non suffisante.

• Soit f une application de U dans $\mathbb{R}$ qui admet en un point a de U des dérivées partielles.

On dit que a est un *point critique* lorsque pour tout j de $[\![1, p]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ est nul.

• *Existence d'un extremum en un point critique*

• Soit f une application de U de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et (a,b) un point critique de f.
Les notations de Monge sont :

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

(a,b) est un point critique si, et seulement si : $p(a,b) = q(a,b) = 0$.
Si (a,b) est un point critique tel que $r(a,b)t(a,b) - s(a,b)^2 \neq 0$ alors :

– si $r(a,b)t(a,b) - s(a,b)^2 < 0$, la fonction ne présente pas d'extremum local en (a,b).
On dit qu'il s'agit d'un *point col* ;

– si $r(a,b)t(a,b) - s(a,b)^2 > 0$, la fonction présente un extremum local en (a,b).
C'est un minimum si $r(a,b) > 0$ et un maximum si $r(a,b) < 0$.

Si (a,b) est un point critique tel que $r(a,b)t(a,b) - s(a,b)^2 = 0$, on ne peut pas conclure par cette méthode.

FORMES DIFFÉRENTIELLES

U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^p$. La base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est notée $(\mathrm{d}x_1, \ldots, \mathrm{d}x_p)$.
Une forme différentielle de degré 1 sur U est une application de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$. Elle s'écrit sous la forme :

$$\forall a \in U \qquad \omega = \sum_{i=1}^{p} P_i(a)\, \mathrm{d}x_i .$$

Elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'ouvert U si :

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \qquad P_i \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R}).$$

La forme différentielle ω est dite exacte sur U s'il existe f de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U telle que : $\omega = \mathrm{d}f$.
Si ω est une forme différentielle exacte, pour toute courbe paramétrée, de support Γ inclus dans U, d'origine A et d'extrémité B :

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \omega = \int_{\widehat{\Gamma}} \mathrm{d}f = f(B) - f(A).$$

L'intégrale curviligne d'une forme différentielle exacte sur U le long d'une courbe fermée de classe $\mathcal{C}^1$ de support contenu dans U est toujours nulle.
La forme différentielle ω est dite fermée si :

$$\forall a \in U \;\; \forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \;\; \frac{\partial P_i}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(a).$$

Toute forme différentielle exacte sur un ouvert non vide, U est fermée sur U.

Toute forme différentielle fermée sur un ouvert non vide et étoilé, U est exacte sur U.

• *Changement de variables dans les intégrales doubles*

Le théorème donnant les conditions précises vérifiées pour un changement de variables n'est pas au programme de vos classes. Il a toutefois été donné dans le livre de *cours*. Vous pouvez vous y référer.

En pratique, vous pourrez effectuer, dans le plan, un passage en coordonnées polaires sans devoir le justifier.

Dans les autres cas, en pratique, il vous suffira, en notant φ l'application $((s,t) \longmapsto (x(s,t), y(s,t)))$ de contrôler que φ est de classe $\mathcal{C}^1$, qu'elle transforme le compact K en D et que son jacobien ne s'annule pas sur l'intérieur de K.

Alors, pour toute fonction f continue de D dans $\mathbb{R}$:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_K f(x(s,t), y(s,t)) \left| \frac{D(x,y)}{D(s,t)} \right| \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t.$$

Cas particulier, en coordonnées polaires, avec $r \geqslant 0$ sur K :

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_K f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

FORMULE DE GREEN-RIEMANN

• Soit K un compact élémentaire du plan dont la frontière est un arc Γ, orienté dans le sens trigonométrique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

• Soit P et Q deux applications de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert U contenant K dans $\mathbb{R}$.

$$\int_{\widehat{\Gamma}} (P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y) = \iint_K \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

ÉNONCÉS

1 Pour s'entraîner

1 – On note E l'espace vectoriel $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Pour tout réel a, on note Ω_a l'application linéaire définie sur E par :

$$\Omega_a(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial f}{\partial y}.$$

a) En utilisant le changement de variables défini par :

$u = x$; $v = y - ax$ déterminer le noyau de Ω_a.

b) Déterminer les éléments f de E tels que : $\Omega_a(f)(x, y) = x + y$.

c) Préciser les éléments propres de Ω_a.

2 – Trouver f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(x, y)(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}) + x^2 + y^2 = 0.$$

3 – Intégrer l'équation aux dérivées partielles (E), en utilisant le changement de variables :

$u = xy$; $v = \dfrac{x}{y}$.

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \qquad (E)$$

4 – Déterminer une fonction φ de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction ψ :

$\psi(x, y) = x\varphi\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ vérifie sur $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$: $\Delta\psi = \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$.

5 – Déterminer les extrema de :

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

6* – Déterminer le maximum de :

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz$$

sur la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

7 – Déterminer les triangles dont la somme des cosinus des angles est égale à $\dfrac{3}{2}$.

Conseils

1) a) Justifier d'abord que le changement de variables est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, puis calculer...
2) Passer en coordonnées polaires.
3) L'équation donnée utilise des dérivées d'ordre 2. Résolution soignée en précisant bien, pour les fonctions utilisées, quelle est leur classe...
4) Calculer les dérivées partielles de ψ, puis écrire que son laplacien est nul.
5) Commencer par déterminer les points critiques. Puis si (a, b) est un tel point, calculer $f(a + h, b + k) - f(a, b)$ et étudier le signe de la différence.
6) $f(x, y, z)$ est une expression algébrique dont tous les termes sont de degré 2.
Penser à la méthode de réduction d'une quadrique. Trouver, avec un minimum de calculs, l'expression de f et l'équation de la sphère dans une base plus appropriée.
7) Étudier le maximum de la somme des cosinus ...

2 Un problème d'extrema

D'après E3A.

On considère la fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x, y) = (x^2 + y^2)^x$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 1$.

1 – **a)** Étudier la continuité de f.

b) Étudier l'existence des dérivées partielles de f au point $(0, 0)$.

c) Déterminer et tracer la ligne de niveau 1 de f.

2 – On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = f(x, 0)$, pour $x \neq 0$ et $g(0) = 1$.

a) Dresser avec précision le tableau de variations de la fonction g.

b) En déduire que la fonction f n'admet pas d'extremum en $(0, 0)$. (Justifier soigneusement votre réponse.)

3 – Déterminer les points critiques de la fonction f.

4 – **a)** Vérifier que, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x, y) \geqslant g(x)$.

En déduire que f admet un minimum en $\left(\dfrac{1}{e}, 0\right)$.

b) La fonction f admet-elle un extremum en $\left(-\frac{1}{e}, 0\right)$?

5 Montrer que, pour tout x dans $\mathbb{R}^*$, les deux expressions :

$(f(x,1) - f(0,1))$ et $(f(x,-1) - f(0,-1))$

sont du signe de x .

Que peut-on en conclure ?

Conseils

1) a) Utiliser les coordonnées polaires pour étudier la continuité en $(0,0)$.
b) Reprendre la définition des dérivées partielles en $(0,0)$.
2) a) Attention ! g est définie aussi pour $x < 0$.
3) Réfléchir avant de résoudre le système....

3* Une suite récurrente double

Soit a un réel strictement positif. On note I l'intervalle $I =]-a, a[$.

On considère une application f de $I \times I$ dans I , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \times I$ et telle qu'il existe un réel k dans $[0, 1[$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in I \times I \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leqslant k.$$

1 Soit (x, y) et (x_0, y_0) deux couples de $I \times I$.

On définit l'application F sur $[0, 1]$ par :

$$\forall t \in [0,1] \qquad F(t) = f\left((1-t)x_0 + tx, (1-t)y_0 + ty\right).$$

Montrer que l'application F est dérivable sur $[0, 1]$ et exprimer sa dérivée .

2 Comparer :

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \quad \text{et} \quad \max(|x-x_0|, |y-y_0|).$$

3 Soit $(u, v) \in I \times I$. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$u_0 = u, \quad u_1 = v, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n).$$

Pour n dans $\mathbb{N}$, on posera :

$$a_n = \max(|u_{n+2} - u_{n+1}|, |u_{n+1} - u_n|).$$

a) La série $\sum a_n$ est-elle convergente ?

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

4 Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, montrer que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est indépendante du choix de (u, v).

Conseils

2) Majorer $|F'(t)|$, puis appliquer l'inégalité des accroissements finis à F entre 0 et 1.
3) Montrer d'abord que la suite $(a_n)_n$ est décroissante, puis que : $a_{n+2} \leqslant k a_n$.
En déduire la nature de la série $\sum(a_{2n} + a_{2n+1})$.
Conclure car la suite (a_n) tend vers 0.
4) Considérer deux suites $(u_n), (v_n)$ définies par (u, v) et (u', v') respectivement.
Appeler λ et μ leurs limites.
Montrer que $\lambda = \mu$, en utilisant **1)**.

4 Un laplacien nul

D'après E3A.

Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et z la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$z(x,y) = F\left[\frac{\cos 2x}{\cosh 2y}\right].$$

1 **a)** Calculer $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en fonction de x, y, F'.

b) Calculer $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ en fonction de x, y, F', F''.

2 Expliciter sous une forme simple les fonctions A et B telles que :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = A(x,y)F''\left[\frac{\cos 2x}{\cosh 2y}\right] + B(x,y)F'\left[\frac{\cos 2x}{\cosh 2y}\right].$$

3 On pose $u = \frac{\cos 2x}{\cosh 2y}$.

a) Vérifier que la relation $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ se réduit à une équation différentielle du second ordre vérifiée par la fonction F de la variable u.

b) Intégrer cette équation différentielle et donner les solutions de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ en précisant le domaine de définition de ces solutions.

Conseils

1) et **2)** Dériver soigneusement...
Attention aux erreurs de calcul.
3) a) Ne pas hésiter à poser $\cos 2x = u \cosh 2y$...

5* Changement de variables

Soit Ω l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad u > 0,\ 0 < v < \pi\}.$$

On considère l'application φ définie sur Ω par :

$$\varphi(u, v) = (x, y) = (\cosh u \cdot \cos v, \sinh u \cdot \sin v).$$

1 ▬ Pour λ donné dans $\mathbb{R}^{+*}$ et μ dans $]0, \pi[$, on pose : $c_\lambda = \{(\lambda, v)\,;\ v \in]0, \pi[\}$ et $\gamma_\mu = \{(u, \mu)\,;\ u > 0\}$.

Préciser les courbes $C_\lambda = \varphi(c_\lambda)$ et $\Gamma_\mu = \varphi(\gamma_\mu)$.

Étudier l'angle de leurs tangentes au point d'intersection $\varphi(\lambda, \mu)$.

2 ▬ En déduire l'image Δ de Ω par φ.

3 ▬ À f élément de $\mathcal{C}^2(\Delta, \mathbb{R})$, on associe F de $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ en posant :

$$F(u, v) = f(\cosh u \cos v, \sinh u \sin v).$$

Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \Delta \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \iff \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} = 0.$$

Conseils

1) Pour étudier l'angle de leur tangentes, écrire la matrice jacobienne de φ en (u, v).
Regarder la nature de φ : orthogonale ?
2) En utilisant les courbes C_λ et Γ_μ, montrer que $\Delta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.
3) Calculer les dérivées partielles de F, par rapport à u, v, à l'ordre 1, puis 2, en fonction des dérivées partielles de f et de φ.

6 Des formes différentielles

1 ▬ Soit $\omega = 2y[x(x^2+y^2)-1]\mathrm{d}x + x[x(x^2+y^2)+2]\mathrm{d}y$.

Cette forme différentielle est-elle exacte ?

Déterminer une fonction f, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, telle que $\omega_1 = f(\dfrac{1}{x^2+y^2})\omega$ soit exacte, et déterminer les primitives de ω_1.

2 ▬ Soit $\omega = (1 + 2x^2 y)\mathrm{d}x + x^3 \mathrm{d}y$, ω est-elle exacte ?

Déterminer une fonction réelle d'une variable réelle, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, f, telle que $\omega_1 = f(x^2 y)\omega$ soit exacte, et déterminer les primitives de ω_1.

3 ▬ On note ω la forme différentielle :

$$\omega = 2(x^2 + y^2)\mathrm{d}x + (x + y)^2 \mathrm{d}y.$$

Cette forme différentielle est-elle exacte ?

Calculer $\displaystyle\int_\gamma \omega$, γ étant le triangle $A(1, 1)$, $B(2, 2)$ et $C(1, 3)$.

4 ▬ Déterminer la circulation de :
$\vec{V}(x, y, z) = z\,\vec{i} + x\,\vec{j} + y\,\vec{k}$ le long de Γ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

Conseils

1) Revoir le cours.
3) Paramétrer les côtés du triangle.

7 Des intégrales doubles

1 ▬ Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{y - \cos x}$.

D est le domaine défini par :

$D = \{(-x, y)\,;\, 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ a \leqslant y \leqslant b\}$, avec $1 < a < b$.

2 ▬ Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, où D désigne le domaine :

$D = \left\{(x, y)\,;\, x + y \geqslant 1, y \leqslant x, x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$.

3 ▬ Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+a^2)^2}$

où $D = \{(x, y)\,;\, 0 \leqslant x, 0 \leqslant y, x + y \leqslant a\}$.

a est un réel strictement positif fixé.

4 ▬ Déterminer les coordonnées du centre de gravité de la plaque homogène D :

$D = \{M(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \leqslant a^2,\ x^2 - 2ax + y^2 \leqslant 0\}$.

a est un réel strictement positif fixé.

5 ▬ Calculer par calcul direct, puis avec un changement de variables $I = \displaystyle\iint_D \ln(1 + x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, où :

$D = \{(x, y)\,;\, 0 \leqslant x,\ 0 \leqslant y,\ x + y \leqslant 1\}$.

6 ▬ On définit $I_a = \displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2}$, sur le domaine : $D = [-a, a]^2$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{a \to +\infty} I_a$.

7 ▬ *D'après ISFA.*

On considère dans $\mathbb{R}^2$ les deux domaines suivants :

$D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ 2 < u < 4\,,\ 1 < v < \dfrac{u^2}{4}\}$ et $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 2 < x + y < 4\,,\ xy > 1\,,\ x < y\}$.

a) Montrer que D et Δ sont deux ouverts bornés de $\mathbb{R}^2$ et que l'application φ de Δ dans $\mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \longmapsto (u, v) = \varphi(x, y)$$

avec $u = x + y$; $v = xy$ est une bijection $\mathcal{C}^\infty$ de Δ sur D.

Calculer son jacobien.

b) En utilisant le résultat précédent, calculer l'intégrale :

$$I = \iint_{\Delta} (x^2 - y^2)\cos(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

c) Calculer à nouveau I, mais en utilisant cette fois la formule de Green-Riemann.

Conseils

1) Réfléchir et essayer... Intégrer d'abord par rapport à... x ou y ?
2) Paramétrer le domaine en coordonnées polaires en écrivant toutes les conditions vérifiées par ρ et θ, qui définiront le nouveau domaine Δ d'intégration.
3) Même conseil.
4) Commencer par une figure...
5) Poser $u = x + y$, $v = x - y$ en précisant les conditions qui déterminent le domaine d'intégration pour $(uv,)$.

8 Un extremum, des extrema

Soit n réels : $a_1, ..., a_n$ fixés. Étudier les extrema sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ de la fonction :

$$f : (x, y) \longmapsto \frac{\exp\left(-\frac{1}{2x}\sum_{i=1}^{n}(a_i - y)^2\right)}{(\sqrt{2\pi x})^n}.$$

9 Différentiabilité de l'application $M \longmapsto M^{-1}$ définie sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$

Montrer que l'application f définie de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ par : $f(M) = M^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Donner l'expression de la différentielle.

Donner l'expression des dérivées partielles dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Conseil

Écrire $A + H = A(I_n + A^{-1}H)$.

10 Application puissance de matrices

Montrer que l'application f définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $f(M) = M^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Donner l'expression de sa différentielle.

Conseil

L'application f est la composée de deux applications de classe $\mathcal{C}^1$.

11 Application Det

Montrer que l'application Det est de classe $\mathcal{C}_1$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner l'expression de sa différentielle en A en fonction de la comatrice de A.

Conseil

Étudier d'abord le cas où A est inversible.

12 Maximum de l'application Det sur la sphère unité

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme N. Montrer que l'application Det admet un maximum sur la sphère unité S en un point A vérifiant : $\sup_{X \in S} \mathrm{Tr}(A^{-1}X) = n$.

Conseil

Quitter la sphère unité pour appliquer la différentiabilité sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Algorithmes

1* Méthode du gradient à plus profonde descente

D'après Saint-Cyr.

Au début étaient les systèmes linéaires. Et Gauss créa la méthode du pivot : la solution est obtenue en un nombre fini d'opérations.

Avec l'avènement des calculateurs et l'augmentation de la taille des matrices à traiter, des méthodes itératives sont apparues dans l'immédiat après-guerre. On construit une suite infinie de vecteurs approchant la solution.

La méthode du gradient à plus forte descente, présentée ici, est d'inspiration géométrique.

On fait de la solution du système le minimum d'une fonction F de n variables ; au point X_k de la surface $z = F(X)$, le gradient $G(X_k)$ indique la direction locale de plus forte décroissance de F, qu'il est donc tentant de suivre jusqu'à son minimum absolu X_{k+1}. La méthode converge.

Si le fait que la matrice A soit symétrique gêne, songer que pour toute matrice régulière A :

$$AX = B \iff ({}^tAA)X = {}^tAB.$$

Dans tout le problème, l'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure affine habituelle, et il est rapporté au repère orthonormé direct $(O, e_1, \ldots, e_n)$. L'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ est muni de la base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$.

On identifie un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et la matrice de ses coordonnées dans la base $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$.

A est une matrice symétrique définie positive ($\forall X \in \mathbb{R}^n\ {}^tXAX \geqslant 0$). Une telle matrice est régulière.

B désigne un vecteur de $\mathbb{R}^n$, et F l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$F(X) = {}^tXAX - 2\langle B \mid X\rangle.$$

On note R la solution éventuelle du système linéaire : $AX = B$.

Les vecteurs X et Y sont dits conjugués par rapport à A si, et seulement si : $\langle AX \mid Y\rangle = 0$.

Partie mathématique

n est un entier valant 2 ou 3.

1 ▬ **a)** Montrer que, pour tous X et Y dans $\mathbb{R}^n$:

$$\langle AX \mid Y\rangle = \langle X \mid AY\rangle.$$

b) Justifier l'existence de R.

c) Trouver deux réels λ et μ strictement positifs, que l'on exprimera en fonction des valeurs propres de A, tels que :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n\ \ \lambda\|X^2\| \leqslant \langle AX \mid X\rangle \leqslant \mu\|X^2\|.$$

d) Si $X \neq 0$, montrer que l'ensemble des vecteurs conjugués de X par rapport à A forme un sous-espace de $\mathbb{R}^n$. Préciser sa dimension.

e) Calculer le gradient $G(X)$ de la fonction F au point X.

Montrer que $G(X)$ s'écrit matriciellement :

$$G(X) = 2(AX - B).$$

2 ▬ **a)** X et H désignant deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, montrer que :

$$F(X + H) = F(X) + \langle G(X) \mid H\rangle + {}^tHAH.$$

b) En déduire que la fonction F présente un minimum unique pour $X = R$.

3 ▬ **a)** X désignant un vecteur fixe de $\mathbb{R}^n$, avec $X \neq R$, trouver ρ réel de sorte que $F(X - \rho G(X))$ soit minimal et calculer ce minimum.

b) ρ étant ainsi déterminé, si $Y = X - \rho G(X)$, montrer que : $\langle G(X) \mid G(Y)\rangle = 0$.

4 ▬ X_0 désignant un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on définit la suite (X_k) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par :

$X_{k+1} = X_k - \rho_k G(X_k)$ avec :

$\rho_k = \dfrac{\|G(X_k)\|^2}{2\,{}^tG(X_k)AG(X_k)}$, si $X_k \neq R$ et $\rho_k = 0$ si $X_k = R$.

a) Que peut-on dire des suites $(F(X_k))$; $(F(X_{k+1}) - F(X_k))$?

b) Montrer que la suite $(G(X_k))$ converge vers le vecteur nul.

c) En déduire la limite de la suite (X_k).

Partie informatique

5 ▬ Écrire un programme de calcul de la suite $(X_k)_k$ qui s'arrête lorsque $\|X_{k+1} - X_k\| > eps$.

Conseils

1) c) Décomposer le vecteur X dans une base de vecteurs propres de A bien choisie.
d) Utiliser **1) a)** et l'orthogonal de X.
e) Écrire $F(X)$ en utilisant les coordonnées de X dans la base canonique.
2) b) Écrire $F(R + H)$..
3) a) Calculer $F(X - \rho G(X))$ et remarquer que l'on obtient un polynôme de degré 2 en ρ.
b) Calculer $G(Y)$.
4) a) Utiliser **3) a)** pour la monotonie de la suite $(F(X_k))$, puis pour évaluer $F(X_{k+1}) - F(X_k)$.
b) Écrire $G(X_k)$ en fonction de $F(X_{k+1}) - F(X_k)$. Utiliser **1) c)** pour majorer ${}^tG(X_k)AG(X_k)$.
c) Exprimer X_k en fonction de $G(X_k)$.

2 La méthode de Newton pour une fonction de plusieurs variables

Nous avons rencontré, dans *Analyse*, la méthode de Newton pour une fonction d'une variable réelle. Cette méthode se généralise.

On considère une fonction f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$, définie sur un ouvert U contenant x, de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et telle que : $f(x) = (0, \dots, 0)$.

On suppose de plus que la différentielle de f en x, $\mathrm{d}f_x$, qui est une application linéaire, est inversible.

Nous admettrons qu'il existe une boule ouverte, B centrée en x telle que :

• pour tout y de B, la différentielle de f en y, $\mathrm{d}f_y$, est inversible ;

• pour tout u_0 de B, la suite $(u_n)_n$ définie par : $u_{n+1} = u_n - \mathrm{d}f_{u_n}^{-1}(f(u_n))$ converge vers x.

On pose : $f(x, y) = (x^4 + 2xy + 1, y^3 + x^2 - xy)$ et $(x_0, y_0) = (0.6, -1)$.

Écrire un programme qui calcule les termes de la suite $(u_n)_n$ et s'arrête lorsque $\|u_{n+1} - u_n\| > eps$.

3 Recherche des extrema

La méthode du gradient à plus forte descente rencontrée ci-dessus se généralise pour la recherche des extrema d'une fonction de plusieurs variables.

Soit f une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.

Partie mathématique

On rappelle que :

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \langle \text{grad}(f)(x,y), (h,k)\rangle + o(\|(h,k)\|)$$

où (x,y) est dans U et $(x+h, y+k)$ dans une boule ouverte B contenue dans U.

Le gradient de f en (x,y) donne la direction suivant laquelle f a la plus forte variation. On choisit :

$$(h,k) = u\,\text{grad}(f)(x,y) = u(f'_x(x,y), f'_y(x,y)).$$

Alors :

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + u(f'_x(x,y)^2 + f'_y(x,y)^2 + o(\|(f'_x(x,y), f'_y(x,y))\|).$$

Si on prend $u > 0$, on se déplace vers un maximum.

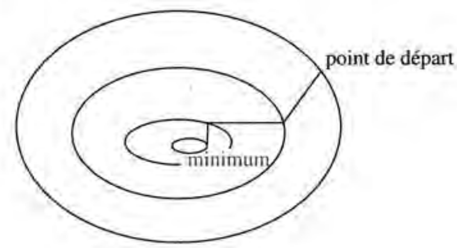
Si on choisit $u < 0$, on va vers un minimum.

La première méthode consiste à fixer un pas, u, et un point de départ, (x_0, y_0), et à calculer les termes :

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) + u(f'_x(x_n, y_n), f'_y(x_n, y_n)).$$

On arrête le calcul lorsque le nombre d'itérations est trop grand (la méthode n'a pas convergé) ou lorsque $\|\text{grad}(f)(x,y)\| < eps$, eps étant une précision donnée. Dans ce cas, on a sans doute atteint un point critique.

Dans la deuxième méthode, on cherche le plus grand pas possible dans la direction du gradient pour se rapprocher de l'extremum.



On fixe un pas, u, un point de départ, (x_0, y_0) et on calcule les termes :

$$F_1 = (x_0, y_0) + nu(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$$

$$F_2 = (x_0, y_0) + (n+1)u(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0))$$

Lors de la recherche d'un maximum, on augmente n tant que $F_2 > F_1$ car on se rapproche du maximum.

On utilise le même test d'arrêt que dans la méthode précédente.

Partie informatique

Écrire, pour chaque méthode, un programme de calcul des extrema. Comparer le nombre d'itérations.

Tester vos programmes avec $f(x,y) = \cos x \sin y$ et $(x_0, y_0) = (0,0)$, puis avec $f(x,y) = x + 2y - x^4 - y^4$ et $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Conseil

Utiliser l'ordinateur ou la calculette.

CORRIGÉS

1 Pour s'entraîner

1 – **a)** Nous devons résoudre l'équation aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x} + a\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

L'application φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, qui à (x, y) associe $(u, v) = (x, y - ax)$, est bijective et de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Son jacobien est $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -a & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Cette application est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Notons $g = f \circ \varphi^{-1}$. Soit : $f(x, y) = g(u, v)$. D'où :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial g}{\partial u}(u, v)\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)\\ &= \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) - a\frac{\partial g}{\partial v}(u, v).\end{aligned}$$

Soit : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + a\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u, v)$.

Nous obtenons $g(u, v) = K(v)$, où K désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Puis $f(x, y) = K(y - ax)$.

b) Utilisons les calculs précédents.

$$\begin{aligned}\Omega_a(f)(x, y) = x + y &\iff \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = (a + 1)u + v\\ &\iff g(u, v) = \frac{a + 1}{2}u^2 + vu + C(v),\end{aligned}$$

où C désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Soit :

$$f(x, y) = \frac{a + 1}{2}x^2 + x(y - ax) + C(y - ax).$$

c) Soit λ un réel.

$$\begin{aligned}\Omega_a(f) = \lambda f &\iff \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \lambda g(u, v)\\ &\iff g(u, v) = C(v)e^{\lambda u},\end{aligned}$$

où C désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Soit :

$$f(x, y) = C(y - ax)e^{\lambda x}.$$

Tout réel λ est valeur propre de Ω_a . Le sous-espace propre associé est l'ensemble des fonctions de la forme : $f(x, y) = C(y - ax)e^{\lambda x}$, où C désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2 – Notons φ l'application $((\rho, \theta) \longmapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta))$.

Nous prendrons (ρ, θ) dans $O = \mathbb{R}^{+*} \times] - \pi, \pi[$ et le domaine d'arrivée de φ :

$$U = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ;\ (x, y) \notin \mathbb{R}^- \times \{0\}\right\}.$$

Ainsi, φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Notons $g = f \circ \varphi$.

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur O et : $f = g \circ \varphi^{-1}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta)\cos\theta - \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta)\dfrac{\sin\theta}{\rho}$;

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta)\sin\theta + \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta)\dfrac{\cos\theta}{\rho}$.

L'équation aux dérivées partielles devient :

$$\begin{aligned}&g(\rho, \theta)\left[\rho\cos\theta\left(\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta)\cos\theta - \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta)\frac{\sin\theta}{\rho}\right)\right.\\ &\left.+\rho\sin\theta\left(\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta)\sin\theta + \frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta)\frac{\cos\theta}{\rho}\right)\right] + \rho^2 = 0.\end{aligned}$$

Soit : $$\rho g(\rho, \theta)\frac{\partial g}{\partial \rho} + \rho^2 = 0.$$

Or $\rho \neq 0$, donc $g(\rho, \theta)\dfrac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \rho = 0$.

Cette équation équivaut, par intégration, à :

$g^2(\rho, \theta) + \rho^2 = C(\theta)$, où C désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] - \pi, \pi[$.

Revenons à f , de classe $\mathcal{C}^1$ sur U :

$$f(x, y) = C(2\text{Arctan}\ \frac{y}{1 + x}) - (x^2 + y^2).$$

3 – Regardons l'application $\varphi : ((x, y) \to (xy, \dfrac{x}{y}))$.

Nous devons supposer que : $y \neq 0$.

Nous cherchons également à déterminer des ouverts U, O de $\mathbb{R}^2$ tels que cette application soit un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de U sur O.

Ceci impose $x \neq 0$ car deux points distincts de $\mathbb{R}^2$ d'abscisses nulles ont même image par φ.

φ réalise un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de $]0, +\infty[^2$ dans $]0, +\infty[^2$ car :

- φ est bijective de $]0, +\infty[^2$ sur $]0, +\infty[^2$;
- φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[^2$;
- le jacobien de φ en (x, y) est : $\begin{vmatrix} y & x \\ \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2} \end{vmatrix} = -2\dfrac{x}{y} \neq 0$.

On montre de même que φ réalise un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de $]-\infty,0[^2$ dans $]0,+\infty[^2$, ou de $]0,+\infty[\times]-\infty,0[$ dans $]-\infty,0[^2$, ou de $]-\infty,0[\times]0,+\infty[$ dans $]-\infty,0[^2$.

Travaillons par exemple avec $]0,+\infty[^2$.

Notons $g(u,v) = f(x(u,v),y(u,v)) = (f\circ\varphi^{-1})(u,v)$.

Alors : $\quad f(x,y) = (g\circ\varphi)(x,y)$.

Ces applications sont de classe $\mathcal{C}^2$. Dérivons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)y + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\frac{1}{y}\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v)x + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)(\frac{-x}{y^2})\,;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)y^2 + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)\frac{1}{y^2}$$

L'équation **(*E*)** équivaut à : $4x^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v) = 0$.

Soit à : $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v) = 0$.

Puis à : $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = C_1(u)$, où C_1 désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, de la variable u, définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Et $g(u,v) = \psi(u) + \alpha(v)$, où ψ, α désignent deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, définies sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Réciproquement, toute fonction de cette forme convient.

Les solutions sur $]0,+\infty[^2$ de l'équation aux dérivées partielles sont les fonctions :

$$f(x,y) = \psi(xy) + \alpha\left(\frac{x}{y}\right),$$

où ψ,α sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4 La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) = \varphi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + x\varphi'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,;$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y) = x\varphi'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,;$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,y) = \varphi''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x^3}{x^2+y^2} + \varphi'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(2+\frac{y^2}{x^2+y^2})\,;$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}(x,y) = x\varphi''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y^2}{x^2+y^2} + x\varphi'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

Et nous obtenons :

$$\Delta\psi = 0 \iff x\varphi''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + 3x\varphi'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Notons $t = \sqrt{x^2+y^2}$.

L'équation équivaut à $t\varphi''(t) + 3\varphi'(t) = 0$.

En notant $\varphi' = u$, nous reconnaissons une équation différentielle linéaire du premier ordre, sous forme résolue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Et : $\varphi'(t) = \dfrac{C}{t^3}$, puis : $\varphi(t) = \dfrac{\alpha}{t^2} + \beta$, avec α et β réels.

5 La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

Déterminons les points critiques de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15\,;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy - 12.$$

Les points critiques s'obtiennent en résolvant :

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 5 \\ xy = 2 \end{cases}.$$

Nous obtenons quatre points :

$A(1,2)$; $B(-1,-2)$; $C(2,1)$; $D(-2,-1)$.

• Étudions en A :

$$\begin{aligned} f(1+h,2+k) &= (1+h)^3 + 3(1+h)(2+k)^2 - 15(1+h) - 12(2+k) \\ &= f(1,2) + (3h^2+3k^2+12hk) + (h^3+3hk^2) \\ &= f(1,2) + 3[(h+k)^2+2hk] + (h^3+3hk^2). \end{aligned}$$

La différence $f(1+h,2+k) - f(1,2)$ paraît susceptible de changer de signe.

Pour s'en convaincre, il suffit de regarder cette différence lorsque $h = k$, puis lorsque $h = -k$.

Le point A n'est pas un extremum de f.

• Étudions en B :

$$\begin{aligned} f(-1+h,-2+k) &= (-1+h)^3 + 3(-1+h)(-2+k)^2 - 15(-1+h) - 12(-2+k) \\ &= f(-1,-2) + (-3h^2-3k^2-12hk) + (h^3+3hk^2). \end{aligned}$$

Le même raisonnement permet d'affirmer que B n'est pas un extremum. D'ailleurs, la fonction f est impaire. Ce résultat était prévisible.

• Étudions en C :

$$\begin{aligned} f(2+h,1+k) &= (2+h)^3+3(2+h)(1+k)^2-15(2+h)-12(1+k) \\ &= f(2,1) + (6h^2+6k^2+6hk) + (h^3+3hk^2) \\ &= f(2,1) + [3(h+k)^2+3h^2+3k^2] + (h^3+3hk^2). \end{aligned}$$

Lorsque h et k sont petits, le terme h^3+3hk^2 est négligeable devant $3(h+k)^2+3h^2+3k^2$.

La fonction f admet en C un minimum.

Par raison de symétrie, elle admet en D un maximum.

6 – Nous pouvons écrire $f(x,y,z) = {}^tXAX$, en notant :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée (u_1, u_2, u_3).

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et φ la forme bilinéaire symétrique associée à A.

Nous remarquons que :

$$\varphi(e_1 - e_2 + e_3) = 0 ; \qquad \varphi(e_2 + e_3) = e_2 + e_3.$$

0 et 1 sont donc valeurs propres de A. La troisième valeur propre est 3 car la trace de A est 4.

Notons $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans la nouvelle base et D la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Alors : $\quad f(x,y,z) = {}^t X'DX' = y'^2 + 3z'^2$.

La sphère a pour équation : $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 6$.

Le maximum cherché est alors 18 et s'obtient pour : $x' = y' = 0$ et $z' = \sqrt{6}$.

7 – La somme des angles d'un triangle est π.

Donc la somme des cosinus des angles est :

$s(A,B) = \cos A + \cos B - \cos(A+B)$.

La fonction s est définie sur $[0,\pi] \times [0,\pi]$, qui est un compact de $\mathbb{R}^2$.

De plus, elle est continue sur ce compact et de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce compact.

Elle est donc bornée et atteint ses bornes.

Cherchons le maximum de $s(A,B)$.

Les points critiques de s s'obtiennent par :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial A}(A,B) = -\sin A + \sin(A+B) = 0 \\ \dfrac{\partial s}{\partial B}(A,B) = -\sin B + \sin(A+B) = 0 \end{cases}$$

Résolvons :

$$\begin{cases} A + B = A \text{ ou } A + B = \pi - A \\ \qquad\qquad \text{et} \\ A + B = B \text{ ou } A + B = \pi - B \end{cases}$$

Dans trois cas, nous obtenons un triangle aplati (un angle nul). Dans ces cas, la somme des cosinus est 1.

Dans le dernier cas : $A = B = \dfrac{\pi}{3}$. Alors la somme des cosinus est bien $\dfrac{3}{2}$.

En conclusion, la somme des cosinus est $\dfrac{3}{2}$ lorsque le triangle est équilatéral.

2 Un problème d'extrema

1 – **a)** Pour tout $(x,y) \neq (0,0)$, écrivons : $f(x,y) = e^{x\ln(x^2+y^2)}$.

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ en tant que composée de fonctions continues.

Utilisons les coordonnées polaires pour étudier le comportement de $f(x,y)$ lorsque (x,y) tend vers $(0,0)$.

Donc : $\displaystyle\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} f(x,y) = 1$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) $\dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \dfrac{e^{x\ln(x^2)} - 1}{x}$.

$e^{x\ln(x^2)} - 1 \sim_0 x\ln(x^2)$.

La fonction f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$.

Vérifier de même qu'elle n'admet pas de dérivée partielle par rapport à y en $(0,0)$.

c) $f(x,y) = 1 \iff (x\ln(x^2+y^2) = 0 \text{ ou } (x,y) = (0,0))$.

La ligne de niveau 1 de f est constituée de la réunion de l'axe (Oy) et du cercle de centre O et de rayon 1.

2 – **a)** Nous avons donc :

$g(x) = e^{x\ln(x^2)}$ pour $x \neq 0$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :

$\forall x \neq 0 \;\; g'(x) = e^{x\ln(x^2)}\left(\ln(x^2) + 2\right)$.

Le calcul de la question **1) b)** permet d'affirmer que g n'est pas dérivable en 0.

$g'(x) = 0 \iff (x = e^{-1} \text{ ou } x = -e^{-1})$.

b) Si la fonction f admettait un extremum en $(0,0)$, le signe de $f(x,y) - 1$ serait constant au voisinage de $(0,0)$. Il en serait de même de celui de $g(x) - 1$. Ce n'est pas le cas.

3 – Les points critiques de la fonction f sont les points qui annulent le gradient de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^x \left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right);$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^x \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right).$$

L'équation $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$ se résout aisément.

Nous obtenons $x = 0$ ou $y = 0$.

Soit quatre points critiques :

$$(0,1)\ ;\ (0,-1)\ ;\ (\frac{1}{\mathrm{e}},0)\ ;\ (-\frac{1}{\mathrm{e}},0).$$

4 ▬ a) Pour tout y réel, nous avons :

$$\ln(x^2+y^2) \geqslant \ln(x^2).$$

Le réel x est positif et la fonction exponentielle croissante $f(x,y) \geqslant g(x)$. Par conséquent :

$$\forall y \in \mathbb{R}\ \forall x \geqslant 0\ \ f(x,y) \geqslant g(x) \geqslant g(\frac{1}{\mathrm{e}}) = f(\frac{1}{\mathrm{e}},0).$$

La fonction f admet donc un minimum local en $(\frac{1}{\mathrm{e}},0)$.

b) En procédant de même que dans la question précédente, nous obtenons :

$$\forall y \in \mathbb{R}\ \forall x \leqslant 0\ \ f(x,y) \leqslant g(x) \leqslant g(-\frac{1}{\mathrm{e}}) = f(-\frac{1}{\mathrm{e}},0).$$

La fonction f admet un maximum local en $(-\frac{1}{\mathrm{e}},0)$.

5 ▬ $f(x,1) - f(0,1) = \mathrm{e}^{x\ln(x^2+1)} - 1$
$= f(x,-1) - f(0,-1).$

Pour tout $x \neq 0$, le réel x^2+1 est supérieur à 1.

L'expression $\mathrm{e}^{x\ln(x^2+1)} - 1$ est donc du signe de x.

Nous pouvons en conclure que $f(x,1) - f(0,1)$ n'est pas de signe constant au voisinage de $(0,1)$.

Le point $(0,1)$ n'est pas un extremum local de la fonction f.

Il en est de même du point $(0,-1)$.

3 Une suite récurrente double

1 ▬ L'application F est dérivable sur $[0,1]$ car f est de classe $\mathcal{C}^1$.

La règle de dérivation d'une fonction composée donne :

$$F'(t) = (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}((1-t)x_0+tx,(1-t)y_0+ty)$$
$$+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}((1-t)x_0+tx,(1-t)y_0+ty)$$

2 ▬ L'hypothèse sur les dérivées partielles permet de majorer $|F'(t)|$ par :

$$\forall t \in [0,1], |F'(t)| \leqslant \max(|x-x_0|,|y-t_0|).k.$$

L'inégalité des accroissements finis, appliquée à F entre 0 et 1 donne :

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |F(1) - F(0)|$$
$$\leqslant k\max(|x-x_0|,|y-y_0|).$$

3 ▬ a) Pour tout n :

$$|u_{n+3}-u_{n+2}| = |f(u_{n+2},u_{n+1}) - f(u_{n+1},u_n)| \leqslant k.a_n \leqslant a_n.$$

Par définition de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

$$|u_{n+2}-u_{n+1}| \leqslant a_n.$$

D'où : $a_{n+1} = \max(|u_{n+3}-u_{n+2}|,|u_{n+2}-u_{n+1}|) \leqslant a_n$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Pour tout entier n :

$|u_{n+3}-u_{n+2}| \leqslant k.a_n$ et $|u_{n+4}-u_{n+3}| \leqslant k.a_{n+1} \leqslant k.a_n$.

Ainsi, pour tout entier n : $a_{n+2} \leqslant ka_n$.

La séparation des cas n pair et n impair se fait clairement $a_{2n} \leqslant k^n a_0$ et $a_{2n+1} \leqslant k^n a_1$.

La série de terme général $a_{2n} + a_{2n+1}$ converge car elle est majorée par une série géométrique convergente de raison $k < 1$. Comme a_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on en déduit que la série de terme général a_n est convergente.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $0 \leqslant |u_{n+1}-u_n| \leqslant a_n$.

La série de terme général $u_{n+1}-u_n$ est absolument convergente.

C'est une série télescopique convergente. La suite de terme général u_n est convergente.

4 ▬ Soit (u_n) et (v_n), les suites définies à la question **2)**, dont les premières valeurs sont respectivement (u,v) et (u',v').

Ces suites convergent. Notons λ la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et μ la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout entier n, appliquons la question **2)** :

$$|u_{n+2}-v_{n+2}| \leqslant k.\max(|u_{n+1}-v_{n+1}|,|u_n-v_n|).$$

Par passage à la limite , quand n tend vers $+\infty$:

$$|\lambda-\mu| \leqslant k.|\lambda-\mu|$$

Puis : $|\lambda-\mu| = 0$ car $k < 1$, c'est à dire : $\lambda = \mu$.

Les conditions initiales ne changent pas la valeur de la limite.

4 Un laplacien nul

1 ▬ a) La fonction $((x,y) \longmapsto \frac{\cos 2x}{\cosh 2y})$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Donc la fonction z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Et :

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -2\frac{\sin 2x}{\cosh 2y}F'(\frac{\cos 2x}{\cosh 2y})\ ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -2\sinh 2y\frac{\cos 2x}{\cosh^2 2y}F'(\frac{\cos 2x}{\cosh 2y}).$$

b) De même :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x,y) = -4\frac{\cos 2x}{\cosh 2y}F'(\frac{\cos 2x}{\cosh 2y})$$
$$+4(\frac{\sin 2x}{\cosh 2y})^2F''(\frac{\cos 2x}{\cosh 2y})\ ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(x,y) = -4\cos 2x \frac{1-\sinh^2 2y}{\cosh^3 2y} F'(\frac{\cos 2x}{\cosh 2y})$$
$$+ 4\sinh^2 2y \frac{\cos^2 2x}{\cosh^4 2y} F''(\frac{\cos 2x}{\cosh 2y}).$$

2 ▬ Nous en déduisons :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4}{\cosh^4 2y}(\sin^2 2x \cosh^2 2y$$
$$+\sinh^2 2y \cos^2 2x) F''(\frac{\cos 2x}{\cosh 2y}) - \frac{8\cos 2x}{\cosh^3 2y} F'(\frac{\cos 2x}{\cosh 2y})$$

D'où :

$$A(x,y) = \frac{4}{\cosh^4 2y}(\sin^2 2x \cosh^2 2y + \sinh^2 2y \cos^2 2x)$$
$$= \frac{4}{\cosh^4 2y}(\sin^2 2x + \sinh^2 2y).$$
$$B(x,y) = -\frac{8\cos 2x}{\cosh^3 2y}.$$

3 ▬ **a)** L'équation $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ équivaut donc à :

$$\frac{4}{\cosh^2 2y}(\sin^2 2x \cosh^2 2y + \sinh^2 2y \cos^2 2x) F''(\frac{\cos 2x}{\cosh 2y})$$
$$-\frac{8\cos 2x}{\cosh 2y} F'(\frac{\cos 2x}{\cosh 2y})$$

après multiplication par $\cosh^2 2y$.

Donc, en posant $u = \dfrac{\cos 2x}{\cosh 2y}$:

$$(1-u^2)F''(u) - 2uF'(u) = 0.$$

b) L'équation différentielle s'écrit : $\left[(1-u^2)F'(u)\right]' = 0$.

Nous obtenons $F(u) = \dfrac{C}{2}\ln\dfrac{u+1}{1-u} + K$, en remarquant que $\dfrac{\cos 2x}{\cosh 2y}$ est toujours compris entre -1 et 1.

Finalement, les solutions sont les fonctions :

$$(x,y) \longmapsto z(x,y) = \frac{C}{2}\ln\frac{\cos 2x + \cosh 2y}{\cosh 2y - \cos 2x} + K,$$

avec C, K deux constantes réelles et (x,y) dans $\mathbb{R}^2 - \{(k\frac{\pi}{2}, 0)\}$, pour k dans $\mathbb{Z}$.

5 Changement de variables

1 ▬ On fixe $u = \lambda$. Dans ce cas, C_λ est défini par :

$x = \cosh(\lambda)\cos v$; $y = \sinh(\lambda)\sin v$.

Nous reconnaissons l'équation paramétrique d'une demi-ellipse. Donc :

$$\varphi(C_\lambda) \qquad \frac{x^2}{\cosh^2(\lambda)} + \frac{y^2}{\sinh^2(\lambda)} = 1 \quad , y > 0.$$

En fixant $v = \mu$, $\Gamma_\mu = \varphi(\gamma_\lambda)$ est défini par :

$x = \cosh(u)\cos\mu$ et $y = \sinh(u)\sin\mu$.

Suppposons : $\mu \neq \dfrac{\pi}{2}$.

$M(x,y)$ est un point de Γ_μ si, et seulement si :

$\exists u > 0 \ \ x = \cosh u \cos\mu$; $y = \sinh u \sin\mu$

si, et seulement si :

$y > 0$ et $\exists u \in \mathbb{R}\ \ x = \cosh u\cos\mu$; $y = \sinh u \sin\mu$

si, et seulement si :

$y > 0$ $\mathrm{sgn}(x) = \mathrm{sgn}(\cos(\mu))$ et $\dfrac{x^2}{\cos^2(\mu)} - \dfrac{y^2}{\sin^2(\mu)} = 1.$

Ainsi Γ_μ est un quart d'hyperbole :

$$\frac{x^2}{\cos^2(\mu)} - \frac{y^2}{\sin^2(\mu)} = 1 \ ; \ y > 0 \quad ; x\cos\mu > 0.$$

Si $\mu = \dfrac{\pi}{2}$ on a $x = 0$ et, pour tout $y > 0$, il existe un unique $u > 0$ tel que $y = \sinh u$.

Ainsi $\Gamma_{\frac{\pi}{2}}$ est la demi droite $x = 0$, $y > 0$.

Remarque : Les arcs Γ_μ et $\Gamma_{\pi-\mu}$ ont le même support hyperbole.

Soit A un point commun à C_λ et Γ_μ .

La tangente en A à C_λ est $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(\lambda,\mu)$.

La tangente en A à Γ_μ est $\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(\lambda,\mu)$.

La matrice jacobienne de φ en (u,v) est :

$$J(\varphi,u,v) = \begin{pmatrix} \sinh u\cos v & -\cosh u \sin v \\ \cosh u \sin v & \sinh u \cos v \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs colonnes de cette matrice sont orthogonaux et ont même norme euclidienne.

La matrice est donc une matrice de similitude. Son déterminant est positif.

Les angles orientés des tangentes sont conservés.

L'application φ est dite conforme.

2 ▬ Il est clair que $\varphi(\Omega)$ est inclus dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+*} = H$.

Réciproquement, soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de H. Alors :

$\exists\lambda \in \mathbb{R} \quad M_0 \in C_\lambda$

$\iff \exists\lambda > 0 \quad \sinh^2\lambda x_0^2 + \cosh^2\lambda y_0^2 = \sinh^2\lambda\cosh^2\lambda$

$\iff \exists\lambda > 0 \quad \sinh^4\lambda + (1 - x_0^2 - y_0^2)\sinh^2\lambda - y_0^2 = 0$

Cette équation du second degré en $T = \sinh^2\lambda$ a deux racines, l'une positive, l'autre négative.

Il existe une unique racine en $\sinh\lambda$ avec $\lambda > 0$.

Donc par tout point M_0 de H passe une courbe C_λ unique.

Le même problème se pose pour les courbes Γ_μ :

$\exists \mu \in \mathbb{R} \;\; M_0 \in \Gamma_\mu$

$\iff \exists \mu \in]0, \pi[\;\; \sin^2(\mu x_0^2) - \cos^2(\mu y_0^2) = \sin^2 \mu^2 \cos^2 \mu^2$

$\iff \exists \mu \in]0, \pi[\;\; \cos^4 \mu - (1 + x_0^2 + y_0^2)\cos^2 \mu + x_0^2 = 0.$

Cette équation du second degré en $\cos^2 \mu$ a deux racines T_1 et T_2 telles que $0 < T_1 < 1 < T_2$ puisque $P(0) = x_0^2 > 0$ et $P(1) = -y_0^2 < 0$ et $P(T) \sim T^2$.

Il existe donc deux racines opposées en $\cos \mu$, mais une seule telle que x_0 et $\cos \mu$ soient de même signe.

Par tout point M_0 de H, passe une seule courbe Γ_μ.

En résumé, pour tout point (x, y) de H, il existe un couple unique (λ, μ) de $\mathbb{R}^{+*} \times]0, \pi[$ tel que :

$$(x, y) = \varphi(\lambda, \mu).$$

L'application φ est clairement de classe $\mathcal{C}^2$ et de déterminant jacobien $\operatorname{Det} J(\varphi) = \cosh^2 u - \cos^2 v > 0$.

C'est donc un $\mathcal{C}^2$ difféomorphisme de Ω sur ω.

3 ▬ On pose $F = f \circ \varphi$. L'application F est différentiable sur Ω. Par le *théorème de dérivation des fonctions composées* :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \sinh u \cos v \frac{\partial f}{\partial x} \circ \varphi + \cosh u \sin v \frac{\partial f}{\partial y} \circ \varphi;$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = -\cosh u \sin v \frac{\partial f}{\partial x} \circ \varphi + \sinh u \cos v \frac{\partial f}{\partial y} \circ \varphi.$$

Ainsi, en calculant de même $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2}$, on obtient :

$$\Delta F = (\cosh^2 u - \cos^2 v)\Delta f.$$

Puisque la quantité $(ch^2 u - \cos^2 v)$ est strictement positive :

$$\forall (x, y) \in \omega \;\; \Delta f = 0 \iff \forall (u, v) \in \omega \;\; \Delta F = 0.$$

6 Des formes différentielles

1 ▬ Notons : $\omega = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$.

La forme différentielle ω est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Et :

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 2[x(x^2 + y^2) - 1] + 4xy^2;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = [x(x^2 + y^2) + 2] + x[3x^2 + y^2].$$

La forme différentielle ω n'est pas fermée, elle n'est pas exacte.

Notons : $\omega_1 = P_1(x, y)\mathrm{d}x + Q_1(x, y)\mathrm{d}y$, avec :

$$P_1(x, y) = 2y[x(x^2 + y^2) - 1]f\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right);$$

$$Q_1(x, y) = x[x(x^2 + y^2) + 2]f\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right).$$

$\mathbb{R}^2$ est un ouvert étoilé.

La forme différentielle ω_1 est fermée si, et seulement si, elle est exacte. Cette condition équivaut à :

$$f\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)[-2x^3 + 4xy^2 - 4]$$
$$-\frac{2}{(x^2 + y^2)^2} f'\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)(x^2 + y^2)[2y^2 x - x^3 - 2] = 0;$$

Soit à :

$$f\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) - \frac{1}{(x^2 + y^2)} f'\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) = 0.$$

La fonction f doit vérifier :

$$\forall t > 0 \;\; f(t) - tf'(t) = 0.$$

Nous reconnaissons une équation différentielle linéaire du premier ordre, résolue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

La fonction f est donc de la forme : $f(t) = At$. Puis :

$$\omega_1 = A\left[2xy - \frac{2y}{x^2 + y^2}\right]\mathrm{d}x + A\left[x^2 + \frac{2x}{x^2 + y^2}\right]\mathrm{d}y = A\mathrm{d}g.$$

Cherchons g tel que :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2xy - \frac{2y}{x^2 + y^2}; \;\; \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x^2 + \frac{2x}{x^2 + y^2}.$$

De $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x, y) = x^2 + \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$, nous tirons :

$g(x, y) = x^2 y + 2\operatorname{Arctan} \dfrac{y}{x} + C(x)$. Puis : $C'(x) = 0$.

Finalement :

$$g(x, y) = x^2 y + 2\operatorname{Arctan} \frac{y}{x} + C.$$

2 ▬ Notons : $\omega = P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y$.

La forme différentielle ω est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Et :

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 2x^2; \;\; \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = 3x^2.$$

La forme différentielle ω n'est pas fermée, elle n'est pas exacte.

Notons : $\omega_1 = P_1(x, y)\mathrm{d}x + Q_1(x, y)\mathrm{d}y$, avec :

$P_1(x, y) = (1 + 2x^2 y)f(x^2 y)$; $Q_1(x, y) = x^3 f(x^2 y)$.

$\mathbb{R}^2$ est un ouvert étoilé.

La forme différentielle ω_1 est fermée si, et seulement si, elle est exacte. Cette condition équivaut à :

$$2x^2 f(x, y) + (1 + 2x^2 y)x^2 f'(x^2 y) = 3x^2 f(x^2 y) + 2x^4 y f'(x^2 y).$$

Soit à : $x^2(f(x^2 y) - f'(x^2 y)) = 0$.

Puis à : $f(x^2 y) - f'(x^2 y) = 0$, car les fonctions f et f' sont continues en 0. Donc : $f' = f$. Nous obtenons :

$$f(t) = A\exp(t).$$

La forme différentielle ω_1 est alors définie par :

$$\omega_1 = A[(1 + 2x^2 y)\mathrm{e}^{x^2 y}\mathrm{d}x + x^3 \mathrm{e}^{x^2 y}\mathrm{d}y] = \mathrm{d}g.$$

Cherchons la fonction g. Elle vérifie :

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = Ax^3 \mathrm{e}^{x^2 y}.$$

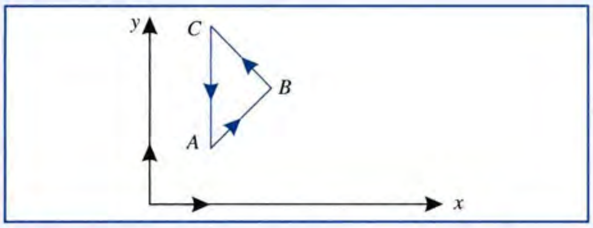
Nous en déduisons :

$$g(x,y) = Axe^{x^2y} + B(x).$$

Et : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = A(1+2x^2y) = A(1+2x^2y) + B'(x)$.

Finalement : $g(x,y) = Axe^{x^2y} + B$.

3 ▬



Paramétrons $[A,B]$ de A vers B par :

$$x(t) = t,\ y(t) = t\ ,\ t \in [1,2].$$

Paramétrons $[B,C]$ de B vers C par :

$$y = 4 - x\ ,\ x \in [2,1].$$

Paramétrons $[C,A]$ de C vers A par :

$$x = 1,\ y = y\ ,\ y \in [3,1].$$

Alors :

$$\int_\gamma \omega = \int_1^2 8t^2 \mathrm{d}t + \int_2^1 4(x-2)^2 \mathrm{d}x + \int_3^1 (1+y)^2 \mathrm{d}y = \frac{68}{3}.$$

4 ▬ Γ est l'intersection d'une sphère et d'un plan.

C'est un cercle. Le centre I du cercle est le projeté orthogonal de O sur le plan d'équation $x + y = 1$.

Les coordonnées de I sont $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Le point $A(1,0,0)$ appartient au cercle. Le rayon est donc $IA = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Deux vecteurs directeurs orthogonaux du plan d'équation $x + y = 1$ sont $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i} - \vec{j})$ et $\vec{k}$.

Le cercle peut être paramétré et orienté par :

$$\overrightarrow{IM}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t (\vec{i} - \vec{j}) + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t\, \vec{k}\ ,\ t \in [0, 2\pi].$$

$$\text{Donc :} \quad \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ y(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cos t \\ z(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin t \end{cases}.$$

Nous en déduisons :

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}(t) = (-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t).$$

$$\text{Puis : } C = \int_0^{2\pi} \vec{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}M}$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\frac{1}{2}\sin^2 t + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sin t + \cos t))\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}.$$

7 Des intégrales doubles

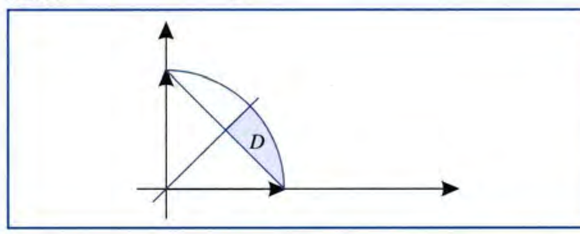
1 ▬ Nous savons que : $I = \displaystyle\int_a^b (\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{y - \cos x})\mathrm{d}y$.

Or, en posant $t = \tan \dfrac{x}{2}$:

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{y - \cos x} = \int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t^2)y - (1-t^2)}$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}t}{(1+t^2)y - (1-t^2)}$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}t}{t^2(y+1) + (y-1)} = \frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}.$$

$$\text{D'où :} \quad I = \pi \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}} = \pi \ln \frac{b + \sqrt{b^2-1}}{a + \sqrt{a^2-1}}.$$

2 ▬ Paramétrons le domaine D en coordonnées polaires.



Nous obtenons :

$x = \rho \cos\theta$; $y = \rho \sin\theta$, avec les conditions :

$\rho(\cos\theta + \sin\theta) \geqslant 1$; $\sin\theta \leqslant \cos\theta$; $\rho \in [0,1]$.

$$\text{Donc :} \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{4}] ; \rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

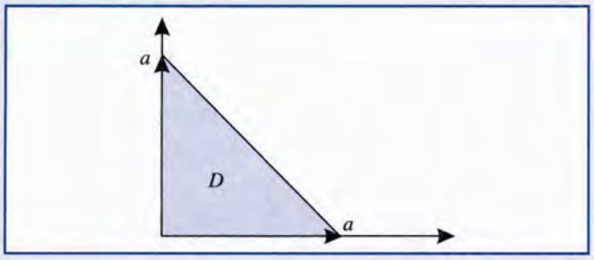
ρ varie de $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sin(\theta + \frac{\pi}{4})}$ à 1.

Le domaine D dans lequel le point est repéré par x, y est transformé en un domaine Δ dans lequel le point est repéré par ρ et θ.

$$\text{Et :} \quad I = \iint_\Delta \frac{\rho}{\rho^3} \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\int_{\frac{\sqrt{2}}{2\sin(\theta + \frac{\pi}{4})}}^1 \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho^2})\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\sqrt{2}\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) - 1]\mathrm{d}\theta = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

3 ▬ Posons : $x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\sin\theta$. Alors :

$$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}] ; 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{a}{\cos\theta + \sin\theta} = \frac{a}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sin(\theta + \frac{\pi}{4})}.$$



Et donc : $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}} \frac{\rho \mathrm{d}\rho}{(\rho^2+a^2)^2} \right) \mathrm{d}\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{[\frac{1}{2\sin^2(\theta+\frac{\pi}{4})}+1]a^2}\Big)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\pi}{4a^2} - \frac{1}{2a^2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\frac{1}{2\sin^2(u)}+1}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{\pi}{4a^2} - \frac{1}{a^2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin^2(u)}{1+2\sin^2(u)}\mathrm{d}u.$$

L'application de la *règle de Bioche* conduit à poser : $t = \tan u$.

Mais ce n'est pas possible sur ce domaine d'intégration.

Utilisons les propriétés de la fonction sin pour modifier l'intégrale.

$$I = \frac{\pi}{4a^2} - \frac{2}{a^2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(u)}{1+2\sin^2(u)}\mathrm{d}u.$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(u)}{1+2\sin^2(u)}\mathrm{d}u = \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)(1+3t^2)}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{1+3t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}[\operatorname{Arctan} t - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{Arctan}(3t)]_1^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{12\sqrt{3}}.$$

$$I = \frac{\pi}{6\sqrt{3}a^2}.$$

4 ▬ Le domaine D admet deux axes de symétrie : l'axe $(x'x)$ et la droite d'équation $x = \dfrac{a}{2}$.

Le centre de gravité de la plaque appartient donc à ces deux axes. Il a pour coordonnées $(\dfrac{a}{2}, 0)$.

5 ▬ Calcul direct :

$$I = \int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} \ln(1+x+y)\mathrm{d}y\Big)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 [(1+x+y)\ln(1+x+y) - y]_0^{1-x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 (2\ln 2 - 1 + x - (1+x)\ln(1+x))\mathrm{d}x$$

$$I = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{2} - [\frac{(x+1)^2}{2}\ln(1+x) - \frac{(x+1)^2}{4}]_0^1$$

$$= \frac{1}{4}.$$

Changement de variables :

Posons : $u = x + y$; $v = x - y$.

u et v vérifient les conditions : $u \in [0, 1]$, $v \in [-u, u]$.

L'application $((x, y) \to (u, v))$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

Son jacobien est : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$

$$I = \int_0^1 \Big(\int_{-u}^{u} \ln(1+u)\frac{\mathrm{d}v}{2}\Big)\mathrm{d}u = \int_0^1 u\ln(1+u)\mathrm{d}u$$

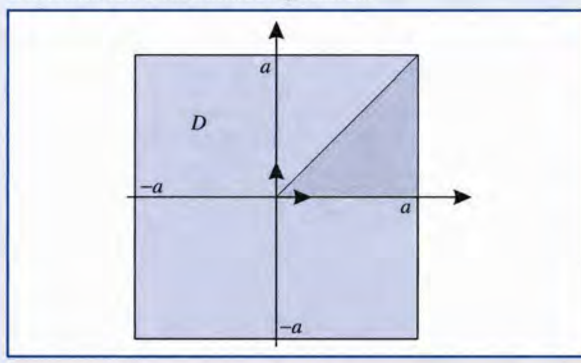
$$= [\frac{u^2-1}{2}\ln(1+u)]_0^1 - \int_0^1 \frac{u^2-1}{2}\frac{1}{u+1}\mathrm{d}u$$

$$= -\int_0^1 \frac{u-1}{2}\mathrm{d}u = \frac{1}{4}.$$

6 ▬ Pour des raisons de symétrie évidentes :

$$I_a = 8\iint_{D_1} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2}.$$

Utilisons les coordonnées polaires.



Le domaine D_1 est transformé en :
$\left\{(\rho, \theta) ; \theta \in [0, \frac{\pi}{4}], 0 \leqslant \rho \leqslant \frac{a}{\cos\theta}\right\}$

$$I_a = 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(\int_0^{\frac{a}{\cos\theta}} \frac{\rho\mathrm{d}\rho}{(1+\rho^2)^2}\Big)\mathrm{d}\theta$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \Big(1 - \frac{1}{1+\frac{a^2}{\cos^2\theta}}\Big)\mathrm{d}\theta = 4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\theta}{a^2+\cos^2\theta}.$$

Le changement de θ en $-\theta$ laisse l'élément différentiel invariant dans l'intégrale.

Faisons le changement de variable : $u = \tan\theta$.

$$I_a = 4a^2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{a^2(1+u^2)+(1-u^2)}$$

$$= 4a^2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^2(a^2-1)+(a^2+1)}.$$

Nous cherchons la limite de I_a lorsque a tend vers $+\infty$.

Supposons $a > 1$.

$$I_a = 4a^2 \frac{1}{a^2-1}\sqrt{\frac{a^2-1}{a^2+1}}\left[\operatorname{Arctan} u\sqrt{\frac{a^2-1}{a^2+1}}\right]_0^1$$

$$I_a = 4a^2 \frac{1}{a^2-1}\sqrt{\frac{a^2-1}{a^2+1}}\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{a^2-1}{a^2+1}}.$$

Finalement : $\lim\limits_{a \longrightarrow +\infty} I_a = \pi$.

7 ▬ **a)** $\mathbb{R}^2$ est un espace vectoriel de dimension finie. Les normes sont équivalentes.

Munissons $\mathbb{R}^2$ de la norme définie par :

$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \|x\|_\infty = \max(x_1, x_2)$.

Alors D et Δ sont contenues dans la boule $B(0, 4)$.

D et Δ sont bornées.

De plus, D est l'intersection des ouverts :

$\{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ 2 < u < 4\}$; $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ 1 < v\}$; $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2;\ v < \frac{u^2}{4}\}$.

D est donc un ouvert.

De même, Δ est l'intersection des ouverts :

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 2 < x + y < 4\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 < xy\}$; $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x < y\}$.

D est donc un ouvert.

Enfin, soit (u, v) dans D. Cherchons (x, y) dans Δ tel que :

$(u, v) = \varphi(x, y)$.

$(u, v) = \varphi(x, y) \iff u = x + y\ ;\ v = xy$.

x et y sont les racines éventuelles de l'équation :

$t^2 - ut + v = 0$.

Cette équation a pour discriminant : $\delta = u^2 - 4v > 0$.

Elle fournit donc deux couples (x, y) de solutions distinctes.

La condition $x < y$ ne laisse qu'une solution dans Δ.

L'application φ est une bijection de Δ sur D.

Ses fonctions composantes sont des polynômes en x et y. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Son jacobien est :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{vmatrix} = x - y \neq 0.$$

b) $I = \displaystyle\iint_\Delta (x^2 - y^2)\cos(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D -u\cos(v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$= -\displaystyle\int_2^4 \Big(\int_1^{\frac{u^2}{4}} \cos(v)\mathrm{d}v\Big)u\mathrm{d}u = -\int_2^4 [\sin(\frac{u^2}{4}) - \sin(1)]u\mathrm{d}u$

$= 2\cos(4) + 6\sin(1) - 2\cos(1)$.

c) Utilisons la *formule de Green-Riemann*.

Le contour γ de Δ est orienté dans le sens direct :

$$I = \iint_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

P et Q doivent donc vérifier :

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = -y^2\cos(xy)$ et $\dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -x^2\cos(xy)$.

On voit que $P = -x\sin(xy)$ et $Q = -y\sin(xy)$ conviennent.

On trouve :

$$I = \int_\gamma -x\sin(xy)\mathrm{d}x - y\sin(xy)\mathrm{d}y.$$

L'arc γ se décompose en trois parties :

- γ_1 : le segment $x = t, y = t$ avec t variant de 1 à 2 ;
- γ_2 : le segment $x = t, y = 4 - t$ avec t variant de 2 à a (a étant l'abscisse du point d'intersection de $xy = 1$ avec $x + y = 4$) ;
- γ_3 : la courbe $x = t, y = \dfrac{1}{t}$ avec t variant de a à 1.

Sur les trois arcs, on trouve :

$$I_1 = -\int_1^2 2t\sin t^2\mathrm{d}t = -\cos 1 + \cos 4$$

$$I_2 = -\int_2^a t\sin(t(4-t)) - (4-t)\sin(t(4-t))\mathrm{d}t$$

$$= -\int_2^a (2t-4)\sin(t(4-t))\mathrm{d}t = -\cos 1 + \cos 4$$

qui est de la forme $u'\sin u$, où a est l'abscisse du point d'intersection de l'hyperbole et de $x + y = 4$:

$$I_3 = -\int_a^1 t\sin 1\mathrm{d}t + \int_a^1 \frac{1}{t}\sin 1\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t.$$

On a ainsi $I_3 = -\dfrac{1}{2}\sin 1\left[2 - a^2 - \dfrac{1}{a^2}\right] = +6\sin 1$.

Au total $I = I_1 + I_2 + I_3 = 2\cos 4 - 2\cos 1 + 6\sin 1$, qui est le résultat de la question précédente.

8 Un extremum, des extrema

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ qui est un ouvert. Les extrema sont à rechercher parmi les points critiques. L'application ln est strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Nous allons étudier les extrema de $F = \ln f$.

Un point (x, y) est un point critique si, et seulement s'il annule les deux dérivées partielles.

On trouve les deux conditions :

$$\frac{-n}{2x} + \frac{1}{2x^2}\sum_{i=1}^n (a_i - y)^2 = 0 \text{ et } \frac{1}{x}\sum_{i=1}^n (a_i - y) = 0.$$

Notons :

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{et} \quad T = \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

Le seul point critique est le point :

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{n}T - \frac{1}{n^2}S^2, \frac{1}{n}S\right).$$

En utilisant les notations de Monge, on trouve en ce point :

$$r = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{-n}{2x_0^2},$$

$$s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{-n}{x_0}.$$

Puisque $r < 0$ et $s^2 - rt < 0$, le point critique correspond à un maximum local strict.

9 Différentiabilité de l'application $M \longmapsto M^{-1}$ définie sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} f(a+h) &= (a+h \mid a+h) \\ &= \|a\|^2 + 2(a \mid h) + \|h\|^2 \\ &= f(a) + 2(a \mid h) + \|h\|\varepsilon(h) \end{aligned}$$

L'application $h \mapsto 2(a \mid h)$ est linéaire.

Pour tout $h, \varepsilon(h) = \|h\|$ et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Ceci prouve que f est différentiable en a et que :

$$\mathrm{d}\, f(a)(h) = 2(a \mid h).$$

Étude de g sur $\mathbb{R}^p \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Pour tout point a de $\mathbb{R}^p \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ et tout vecteur non nul h de $\mathbb{R}^p$:

$$\begin{aligned} g(a+h) &= \sqrt{\|a\|^2 + 2(a \mid h) + \|h\|^2} \\ &= \|a\|\sqrt{1 + r(h)} \end{aligned}$$

avec $r(h) = \dfrac{2(a \mid h) + \|h\|^2}{\|a\|^2}$.

Puisque $\lim\limits_{h \to 0} r(h) = 0$, on peut écrire :

$$g(a+h) = \|a\| \left[1 + \frac{1}{2}r(h) + r(h)\delta(h)\right]$$

avec $\lim\limits_{h \to 0} \delta(h) = 0$.

Ainsi :

$$g(a+h) = g(a) + \left(\frac{a}{\|a\|} \mid h\right) + \frac{\|h\|^2}{2\|a\|} + \|a\|r(h)\delta(h).$$

D'aprés l'*inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$|r(h)| \leqslant \|h\| \frac{2\|a\| + \|h\|}{\|a\|^2}.$$

Donc :

$$\frac{\|h\|^2}{2\|a\|} + \|a\|r(h)\delta(h) = \|h\|\gamma(h)$$

avec $\lim\limits_{h \to 0} \gamma(h) = 0$.

De plus, l'application $h \mapsto \left(\dfrac{a}{\|a\|} \mid h\right)$ est linéaire.

L'égalité :

$$g(a+h) = g(a) + \left(\frac{a}{\|a\|} \mid h\right) + \|h\|\gamma(h)$$

prouve que g est différentiable en a et que sa différentielle en ce point est l'application $\mathrm{d}\, g(a)$ définie par :

$$\mathrm{d}\, g(a)(h) = \left(\frac{a}{\|a\|} \mid h\right).$$

Par ailleurs la fonction g n'est pas différentiable en $(0, \dots, 0)$.

10 Application puissance de matrices

L'application ϕ définie de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^p$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par : $\phi(A_1, \dots, A_p) = A_1 \dots A_p$ est p-linéaire, par conséquent elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa différentielle en $(A_1, \dots, A_p)$ est :

$$(H_1, \dots, H_p) \longmapsto \sum_{i=1}^{p} A_1 \dots H_i \dots A_p.$$

L'application ψ définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^p$ par $\psi(A) = (A, \dots, A)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, car chacune de ses composantes est de classe $\mathcal{C}^1$.

Or $f = \phi \circ \psi$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa différentielle est :

$$H \longmapsto \sum_{i=1}^{p} A_1 \dots H \dots A_p$$

11 Application Det

L'application Det est une fonction polynomiale des coordonnées de la matrice. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$. On peux alors trouver l'expression de sa différentielle en étudiant $\mathrm{Det}((A + xH))$. On suppose tout d'abord A inversible, puis on étend le résultat par densité.

$$\mathrm{Det}(A + xH) = x^n \mathrm{Det}A\ \mathrm{Det}(\frac{1}{x}I_n + A^{-1}H).$$

Les termes de plus haut degré du polynôme caractéristique de $A^{-1}H$ sont :

$$(-1)^n X^n - (-1)^n \mathrm{Tr}(A^{-1}H)X^{n-1}.$$

On en déduit que $\mathrm{Det}(A + xH)$ est une fonction polynomiale de la variable x dont les termes de plus bas degré sont :

$$\mathrm{Det}A\ (1 + x\mathrm{Tr}(A^{-1}H)).$$

On en déduit que la différentielle en A est l'application $H \longmapsto \mathrm{Det}A\ \mathrm{Tr}(A^{-1}H)$.

Or : $\mathrm{Det}A\ \mathrm{Tr}(A^{-1}H) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Det}A(\ A^{-1}H)) = \mathrm{Tr}(\tilde{A}H)$ où $\tilde{A}$ est la transposée de la comatrice de A.

Les applications Tr et $A \longmapsto \tilde{A}$ sont continues et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On en déduit que la différentielle en tout point A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est :

$$H \longmapsto \mathrm{Tr}(\tilde{A}H).$$

12 Maximum de l'application Det sur la sphère unité

L'application Det est continue et la sphère unité est compact. Elle est bornée et atteint ses bornes. Soit A une matrice de la sphère unité où Det atteint son maximum.

Alors :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus 0 \quad \mathrm{Det}(\frac{X}{||X||}) \leqslant \mathrm{Det}(A).$$

On en déduit :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \forall t > 0 \quad \mathrm{Det}(A+tX) \leqslant \mathrm{Det}(A)\ ||A+tX||^n.$$

Puis :

$$\frac{\mathrm{Det}(A+tX) - \mathrm{Det}(A)}{t} \leqslant \frac{\mathrm{Det}(A)((||A|| + t||X||)^n - 1)}{t}.$$

L'application Det est différentiable. En passant à la limite lorsque t tend ves 0 on obtient :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \mathrm{Det}(A)\mathrm{Tr}(A^{-1}X) \leqslant n\mathrm{Det}(A)||X||.$$

Nécessairement, par définition de A, on a $\mathrm{Det}(A) > 0$.

Donc :

$$\forall X \in S \quad \mathrm{Tr}(A^{-1}X) \leqslant n,$$

avec égalité pour $X = A$.

Algorithmes

1 Méthode du gradient à plus profonde descente

Partie mathématique

1 ▬ **a)** Immédiat car :

$$\langle AX \mid Y\rangle = {}^t X^t AY = {}^t XAY = \langle X \mid AY\rangle.$$

b) La matrice A est symétrique, définie, positive.

Elle est donc diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

La matrice A est régulière.

Le système linéaire $AX = B$ est un *système de Cramer*.

Il admet une unique solution : $R = A^{-1}B$.

c) Choisissons une base orthonormée, $(u_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ de vecteurs propres de A et notons λ_i la valeur propre associée à u_i.

Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^n$: $X = \sum_{i=1}^{n} x'_i u_i$.

$$\langle AX \mid X\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x'_i u_i \mid \sum_{j=1}^{n} x'_j u_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x'_i)^2.$$

D'où, en posant $\lambda = \min_{i\in[\![1,n]\!]} \lambda_i > 0$ et $\mu = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \lambda_i$.

$\lambda\|X^2\| \leqslant \langle AX \mid X\rangle \leqslant \mu\|X^2\|$.

d) Soit $X \neq 0$.

D'après **1) a)**, un vecteur Y est conjugué de X par rapport à A si, et seulement si, AY appartient à l'orthogonal de X.

L'orthogonal de X est un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$, de dimension $n-1$.

$A^{-1}(F)$ est l'image d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ par l'application linéaire A^{-1}.

C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, de même dimension $n-1$.

e) Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Alors :

$$F(X) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i\neq j} a_{ij}x_i x_j - 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i.$$

D'où : $$\frac{\partial F}{\partial x_i}(X) = 2a_{ii}x_i + \sum_{j\neq i} 2a_{ij}x_j - 2b_i.$$

Par conséquent :

$$G(X) = 2(AX - B).$$

2 ▬ **a)** Calculons $F(X+H)$.

$F(X+H) = {}^t(X+H)A(X+H) - 2\langle B \mid X+H\rangle$

$= {}^t XAX + {}^t XAH + {}^t HAX + {}^t HAH - 2\langle B \mid X\rangle - 2\langle B \mid H\rangle$

$= F(X) + \langle G(X) \mid H\rangle + {}^t HAH$,

car ${}^t HAX = {}^t XAH$.

b) En particulier, puisque $G(R) = 0$:

$F(R+H) = F(R) + {}^t HAH \geqslant F(R)$.

De plus :

$$\begin{aligned} F(R+H) = F(R) &\iff {}^t HAH = 0 \\ &\iff H = 0, \end{aligned}$$

car la matrice A est symétrique, définie positive.

La fonction F présente donc un minimum unique pour $X = R$.

3 ▬ **a)** Reprenons la question précédente :

$$F(X - \rho G(X)) = F(X) - \rho \|G(X)\|^2 + \rho^2\, {}^tG(X)AG(X).$$

Nous obtenons une expression polynomiale en ρ, de degré 2, et le coefficient de ρ^2 est strictement positif car $X \neq R$, donc $G(X) \neq 0$.

Son minimum est atteint lorsque :

$$\rho_{\min} = \frac{\|G(X)\|^2}{2\,{}^tG(X)AG(X)}.$$

La valeur de ce minimum est alors :

$$F(X) - \frac{\|G(X)\|^4}{4\,{}^tG(X)AG(X)}.$$

b) $Y = X - \rho_{\min}G(X)$. D'où :

$$G(Y) = 2(AY - B) = 2(AX - B) - 2\rho_{\min}AG(X).$$

Puis :

$$\langle G(X) \mid G(Y)\rangle = \|G(X)\|^2 - 2\rho_{\min}\,{}^tG(X)AG(X) = 0.$$

4 ▬ **a)** Si $G(X_k) \neq 0$, la question précédente permet d'affirmer que $F(X_{k+1}) < F(X_k)$.

La suite $(F(X_k))$ est donc décroissante.

Minorée par $F(R)$, elle converge en décroissant vers sa limite l. Nous en déduisons que la suite $(F(X_{k+1}) - F(X_k))$ tend vers 0.

b) En reprenant la question **3) a)** :

$$F(X_{k+1}) - F(X_k) = -\frac{\|G(X_k)\|^4}{4\,{}^tG(X_k)AG(X_k)}.$$

Utilisons la majoration établie dans la question **1) c)** :

$${}^tG(X_k)AG(X_k) \leqslant \mu \|G(X_k)\|^2.$$

Nous obtenons :

$$0 \leqslant \frac{\|G(X_k)\|^2}{\mu} \leqslant |F(X_{k+1}) - F(X_k)|.$$

La suite $(G(X_k))$ converge donc vers 0.

c) Notons :

$$Y_k = G(X_k) = 2(AX_k - B).$$

La suite (Y_k) tend vers 0.

Or :

$$X_k = A^{-1}(B + \frac{1}{2}Y_k).$$

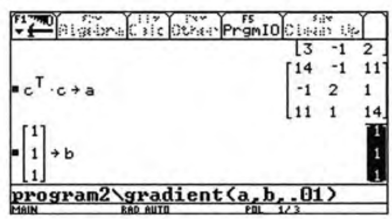
La suite (X_k) converge vers $A^{-1}B = R$.

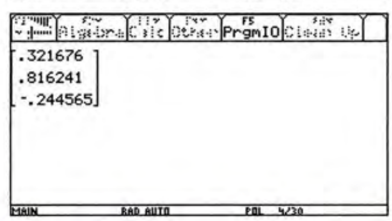
Partie informatique

5 ▬

Avec la TI

```
: gradient(a,b,eps)
: Prgm
: Local n,x,y,i,g,r
: colDim(a) -> n
: newMat(n,1) -> x
: For i,1,n
: 1 -> x[n,1]
: EndFor
: 2*(a*x-b) -> g
: (norm(g^t))^2/2*(g^t*a*g)[1,1] -> r
: x-r*g -> y
: While norm((y-x)^t) > eps
: y -> x
: 2*(a*x-b) -> g
: (norm(g^t))^2/2*(g^t*a*g)[1,1] -> r
: x-r*g -> y
: EndWhile
: Disp y
: EndPrgm
```



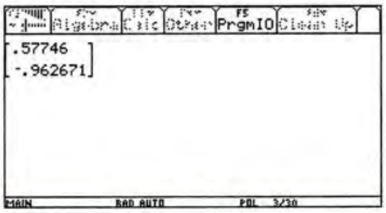


2 La méthode de Newton pour une fonction de plusieurs variables

Avec la TI

```
: newton(eps)
: Prgm
: Local z,v,a,x,y,w
: newMat(2,1) -> z
: newMat(2,1) -> v
: newMat(2,2) -> a
: .6 -> x : -1 -> y
: [x,y]^t -> z
: x^4+2*x*y+1 -> v[1,1]
: y^3+x^2-x*y -> v[2,1]
: [4*x^3+2*y,2*x ;2*x-y,3*y^2-x] -> a
```

```
: z-a^-1*v -> w
: While norm((z-w)^t) > eps
: w-> z
: z[1,1] -> x : z[2,1] -> y
: x^4+2*x*y+1 -> v[1,1]
: y^3+x^2-x*y -> v[2,1]
: [4*x^3+2*y,2*x ;2*x-y,3*y^2-x] -> a
: z-a^-1*v -> w
: EndWhile
: Disp z
: EndPrgm
```



3 Recherche des extrema

Avec Maple

```
> restart :with(linalg) :
Warning, the protected names norm and trace
have been redefined and unprotected
> extrema1:=proc(f,eps,x0,y0,u,N)
local n,x,y,gr,Gr,a,b;
Gr:=grad(f(x,y),[x,y]);
n:=0;gr:=eval(Gr,x=x0,y=y0);a:=x0;b:=y0;
while n<N and norm(evalf(gr),2)>eps do
a:=a+u*gr[1];b:=b+u*gr[2];n:=n+1;
gr:=eval(Gr,x=a,y=b);
od;
print(n,[a,b]);
end :
```

```
> f:=(x,y)->cos(x)*sin(y);
extrema1(f,10^(-5),0.,0,10^(-3),3000);
extrema1(f,10^(-5),0.,0,-0.001,3000);
```

$$f := (x, y) \mapsto \cos(x)\sin(y)$$

$$3000,\ [0.0, 1.471419037]$$

$$3000,\ [0.0, -1.471419037]$$

```
> extrema2Max:=proc(f,eps,x0,y0,u,N)
local n,x,y,gr,Gr,a,b,F1,F2;
Gr:=grad(f(x,y),[x,y]);
gr:=eval(Gr,x=x0,y=y0);a:=x0;b:=y0;
F1:=f(a,b);a:=a+u*gr[1];b:=b+u*gr[2];n:=1;
F2:=f(a,b);
while n<N and norm(evalf(gr),2)>eps do
  while F2 > F1 and n<N and norm(evalf(gr),2)
>eps do
  a:=a+u*gr[1];b:=b+u*gr[2];n:=n+1;
  F1:=F2;F2:=f(a,b);
od;
gr:=eval(Gr,x=a,y=b);F1:=F2;a:=a+u*gr[1];
b:=b+u*gr[2];n:=n+1;
F2:=f(a,b);
od;
print(n,[a,b]);
end :
> extrema2Max(f,10^(-5),0.,0,10^(-3),3000);
```

$$3000,\ [0.0, 1.570842536]$$

```
> g:=(x,y)->x+2*y-x^3-y^3;
extrema1(g,10^(-1),0.,0.,10^(-3),1000);
extrema2Max(g,10^(-1),0.,0.,10^(-3),2000);
```

$$g := (x, y) \mapsto x + 2\,y - x^3 - y^3$$

$$1000,\ [0.5424297842, 0.8045174955]$$

$$948,\ [0.5735071048, 0.8179919882]$$

16 Équations différentielles linéaires et non linéaires

RAPPELS DE COURS

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et F est un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de F.

Soit a une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$ et b une application continue de I dans F.

ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE LINÉAIRE D'ORDRE 1

Les équations différentielles $x' - a\ x = b\ (E)$ et $x' - a\ x = 0\ (H)$ sont appelées *équations différentielles linéaires.*

On les note également : $x' - a(t)(x) = b(t)\ (E)$ et $x' - a(t)(x) = 0\ (H)$ pour rappeler que a et b sont des applications de la variable t de I.

L'équation (E) est une *équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *avec second membre.*

L'équation (H) est une *équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *sans second membre ou homogène.*

Une *I-solution* de (E) (on dit aussi une *solution sur I* de (E)) est une application φ dérivable de I dans F telle que : $\forall t \in I \quad \varphi'(t) = (a(t))(\varphi(t)) + b(t)$.

Le problème de la recherche d'une solution vérifiant une condition initiale donnée est appelé *problème de Cauchy* associé à l'équation et noté : $\begin{cases} x' - ax = b \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ où t_0 est dans I et x_0 dans F.

L'ensemble $S(H)$ des I-solutions de l'équation différentielle linéaire homogène $x' - ax = 0\ (H)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I,\ F)$.

Si φ_1 est une I-solution de $x' - a\ x = b\ (E)$ alors toute solution de (E) est la somme de φ_1 et d'une solution de l'équation homogène associée.

L'ensemble $S(E)$ des I-solutions de E est le sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I,\ F)$ de direction $S(H)$:

$S(E) = \varphi_1 + S(H)$.

• *Théorème de Cauchy-Lipschitz*

Soit a une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$ et b une application continue de I dans F.

Pour tout $(t_0\ ,\ x_0)$ dans $I \times F$ il existe une et une seule I-solution φ de l'équation différentielle $x' - a\ x = b\ (E)$ telle que $\varphi\ (t_0) = x_0$.

L'application de $S(H)$ dans F définie par $\varphi \longmapsto \varphi(t_0)$

est un isomorphisme d'espace vectoriel et $\dim S(H) = \dim F$.

L'ensemble $S(E)$ est un espace affine de dimension égale à la dimension de F.

EXEMPLES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES D'ORDRE 1

• *Cas* $F = \mathbb{K}$

Soit a une application continue de I dans $\mathbb{K}$ et b une application continue de I dans $\mathbb{K}$. La droite des solutions de $x' = a(t)\ x$ est $\{t \longmapsto C\ \mathrm{e}^{A(t)}\ ;\ C \in \mathbb{K}\}$ où A désigne une primitive sur I de la fonction a.

Pour obtenir une solution particulière de $x' = a(t)\ x\ + b(t)$ on peut :

• la rechercher sous la forme $t \longmapsto P(t)\mathrm{e}^{\lambda\, t}$ avec P est une fonction polynomiale lorsque a une application constante et lorsque b est de la forme $t \longmapsto Q(t)\mathrm{e}^{\lambda\, t}$ où Q est une fonction polynomiale et λ un complexe ;

• faire varier la constante : c'est-à-dire chercher une solution de la forme $t \longmapsto C(t)\mathrm{e}^{A(t)}$ où C est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

• *Cas* $\dim F = n$

Soit a une application continue de I dans $\mathcal{L}(F)$ et b une application continue de I dans F.

Notons $X(t)$ la matrice colonne des coordonnées de $X(t)$, $B(t)$ la matrice colonne des coordonnées de $b(t)$ et $A(t)$ la matrice de $a(t)$ dans cette base.

L'équation différentielle $x' - a\ x = b\ (E)$ s'écrit matriciellement $X' - A\ X = B$.

Cette écriture matricielle se traduit par un système d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 :

$$(S)\ \begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n \end{cases}.$$

• *Équation différentielle linéaire scalaire d'ordre supérieur à* 1

Considérons n fonctions continues $a_1, \dots, a_{n-1}, b$ de I dans $\mathbb{K}$ et l'équation différentielle linéaire : $x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\ x^{(k)} = b$. On se ramène à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

$$\text{En posant } X = \begin{pmatrix} x \\ x' \\ \vdots \\ x^{(n-1)} \end{pmatrix} \text{ on a : } X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ b \end{pmatrix}.$$

SYSTÈME FONDAMENTAL DE SOLUTIONS, LE WRONSKIEN

Une base $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ de $S(H)$ est appelé un *système fondamental de solutions* de l'équation différentielle linéaire $x' = ax$ (H).

Notons $X_1, \dots, X_n$ les vecteurs colonnes des coordonnées des applications $\phi_1, \dots, \phi_n$.

Pour tout j de $[\![1,\ n]\!]$, on note $X_j(t) = \begin{pmatrix} w_{1j}(t) \\ \vdots \\ w_{nj}(t) \end{pmatrix}$. La matrice W de terme général w_{ij} est la *matrice wronskienne* de la famille $(X_1, \dots, X_n)$. Le déterminant $w = \operatorname{Det} W$ est le *wronskien* de la famille $(X_1, \dots, X_n)$.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall t \in I \quad w(t) \neq 0$;

(ii) $\exists t_0 \in I \quad w(t_0) \neq 0$;

(iii) La famille $(X_1, \dots, X_n)$ est un système fondamental de solutions de (S) ;

(iv) La famille $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ est un système fondamental de solutions de (H).

• *Méthode de variation des constantes*

A est une application continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et B une application continue de I dans $\mathbb{K}^n$.

La méthode de variation des constantes permet de résoudre complètement le système différentiel avec second membre $X' = AX+B$ (S) lorsqu' un système fondamental de solutions $(X_1, \dots, X_n)$ est connu.

On cherche les solutions sous la forme $X : t \longmapsto \sum_{j=1}^{n} C_j(t) X_j(t)$ où les applications $C_1, \dots, C_n$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{K}$.

Un système de Cramer permet de déterminer les fonctions $C_1', \dots, C_n'$.

Il reste à calculer n primitives pour déterminer les fonctions $C_1, \dots, C_n$.

ÉQUATIONS LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS

L'équation différentielle linéaire $x' - a(t)\, x = b(t)$ (E) est dite *à coefficients constants* lorsque l'application a est constante.

L'ensemble des solutions de l'équation $x' = a\, x$ est $\{t \longmapsto \mathrm{e}^{t\, a}(C)\ ;\ C \in F\}$.

L'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} x' = ax \\ x(0) = v \end{cases}$ est $t \longmapsto \mathrm{e}^{t\, a}(v)$.

Les n applications $\varphi_i : t \longmapsto \mathrm{e}^{t\, a}(e_i)$ forment un système fondamental de solutions de l'équation $x' = a\, x$.

Si a est diagonalisable et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ une base de vecteurs propres de a pour les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Les n applications $t \longmapsto \mathrm{e}^{\lambda_i\, t} \varepsilon_i$ forment un système fondamental de solutions de l'équation $x' = a\, x$.

L'ensemble des solutions de l'équation $x' = a\, x + b(t)$ est :

$$\{t \longmapsto \mathrm{e}^{t\, a}(C) + \mathrm{e}^{t\, a} \int_{t}^{t} \mathrm{e}^{-sa}(b(s))\mathrm{d}\, s\ ;\ C \in F\}.$$

CAS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SCALAIRES D'ORDRE 2

Une équation linéaire scalaire d'ordre 2 est une équation différentielle de la forme :

$$\alpha(t)x'' + \beta(t)x' + \gamma(t)x = \delta(t)$$

où α, β, γ, δ sont quatre fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$, et α différente de l'application nulle.

Sur tout intervalle J sur lequel la fonction α ne s'annule pas, la division par α est possible et permet de mettre l'équation sous forme *résolue* en x'' :

$$x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$$

les fonctions **a, b et c étant continues sur J.**

Cette équation est équivalente à l'équation différentielle du premier ordre :

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix} \text{obtenue en notant } X = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}.$$

Soit $(t_0,\ x_0,\ x'_0)$ dans $I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x'_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur I.

De plus cette solution est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.

L'ensemble $S(H)$ des I-solutions de l'équation homogène $x'' = a(t)\ x' + b(t)\ x \quad (H)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(I,\ \mathbb{K})$

L'ensemble $S(E)$ des I-solutions de l'équation $x'' = a(t)\ x'+b(t)\ x+c(t) \quad (E)$ est un sous-espace affine de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(I,\ \mathbb{K})$ de direction $S(H)$.

• *Le wronskien*

Toute base de $S(H)$ est appelé système fondamental de solution de (H).

On appelle *wronskien* de deux solutions $(g_1,\ g_2)$ de (H) la fonction W, définie sur I par :

$$W(t) = \begin{vmatrix} g_1(t) & g_2(t) \\ g'_1(t) & g'_2(t) \end{vmatrix}.$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall t \in I \quad w(t) \neq 0$;

(ii) $\exists t_0 \in I \quad w(t_0) \neq 0$;

(ii) $(g_1,\ g_2)$ est un système fondamental de solutions de (H).

• *Méthode de la variation de la constante*

On suppose qu'il existe une solution f de l'équation homogène $x'' = a(t)x' + b(t)x (H)$ qui ne s'annule pas sur I.

On peut chercher les solutions de $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)\ (E)$ sous la forme $t \longmapsto C(t)f(t)$ avec C de classe $\mathcal{C}^2$.

• *Méthode de la variation des constantes*

On suppose qu'il existe un système fondamental de solutions $(f_1,\ f_2)$ de l'équation homogène $x'' = a(t)x' + b(t)x \quad (H)$.

Les solutions de (H) s'écrivent $t \longmapsto C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)$ où C_1 et C_2 sont des constantes.

On peut chercher les solutions de $x'' = a(t)x' + b(t)x + c(t)$ (E) sous la forme :

$$t \longmapsto C_1(t)f_1(t) + C_2(t)f_2(t)$$

où C_1 et C_2 sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant la condition supplémentaire :

$$\forall t \in I \quad C_1'(t)f_1(t) + C_2'(t)f_2(t) = 0.$$

• *Résolution d'une équation linéaire homogène scalaire d'ordre* 2 *à coefficients constants :* $x'' = ax' + bx (H)$

On détermine les racines de l'équation caractéristique associée $r^2 - a\,r - b = 0$ (C).

• *a et b dans* $\mathbb{C}$

Lorsque l'équation (C) admet deux racines λ et μ, toute solution complexe de (H) est de la forme :

$$t \longmapsto \alpha e^{\lambda t} + \beta e^{\mu t} \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes complexes.}$$

Lorsque l'équation (C) admet une racine double λ, toute solution complexe de (H) est de la forme :

$$t \longmapsto (\alpha + \beta t)e^{\lambda t} \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes complexes.}$$

• *a et b dans* $\mathbb{R}$

Lorsque l'équation (C) admet deux racines réelles λ et μ, toute solution réelle de (H) est de la forme

$$t \longmapsto \alpha e^{\lambda\, t} + \beta e^{\mu\, t} \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes réelles.}$$

Lorsque l'équation (C) admet une racine double λ, toute solution réelle de (H) est de la forme :

$$t \longmapsto (\alpha + \beta\, t)e^{\lambda\, t} \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes réelles.}$$

Lorsque l'équation (C) admet deux racines complexes conjuguées $\lambda + \mathrm{i}\,\mu$ et $\lambda - \mathrm{i}\,\mu$ toute solution réelle de (H) est de la forme

$$t \longmapsto e^{\lambda\, t}(\alpha\cos(\mu\, t) + \beta\sin(\mu\, t)) \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des constantes réelles.}$$

• *Résolution d'une équation linéaire d'ordre* 2 *à coefficients constants :* $x'' = ax' + bx + c(t)$ (E)

Toute solution de E est la somme d'une solution de (H) et d'une solution particulière de (E).

On détermine une solution particulière de (H) :

– en cherchant une solution évidente ;

– si le second membre est de la forme $c(t) = P(t)\ e^{m\,t}$ où P est une fonction polynomiale, en cherchant une solution de la forme $t \longmapsto t^r\ Q(t)\ e^{m\,t}$ avec Q une fonction polynomiale de degré : Deg Q = Deg P et r la multiplicité de m dans l'équation (C) ;

– en décomposant le second membre en une somme de fonctions plus simples et en appliquant le principe de superposition des solutions ;

– si l'on connaît une solution de (H) qui ne s'annule pas, en utilisant la méthode de la variation **de la** constante ;

– lorsque l'on connaît un système fondamental de solutions de (H), on peut utiliser la méthode de la variation **des** constantes.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON LINÉAIRES

E désigne un espace vectoriel normé de dimension finie, U un ouvert de $\mathbb{R} \times E$ et F une application de U dans E.

On appelle solution de l'équation différentielle d'ordre 1 : $x' = F(t, x)$ **(1)** toute application φ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide telle que :

$$\forall t \in I \quad (t, \varphi(t)) \in U \quad \text{et} \quad \varphi'(t) = F(t, \varphi(t)).$$

L'application φ est appelée I-solution de **(1)** et son graphe est appelé courbe intégrale.

La solution φ est dite maximale s'il n'existe pas d'intervalle J contenant strictement I et de J-solution ψ de **(1)** telle que $\psi_{|I} = \varphi$.

Une équation différentielle d'ordre 1 est dite autonome si elle ne dépend pas de la variable t.

Lorsque l'application F est de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) alors toute solution est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

LE THÉORÈME D'EXISTENCE DE CAUCHY-LIPSCHITZ ET SES COROLLAIRES

Si l'application F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U on peut affirmer :

– pour tout (t_0, x_0) de U il existe un intervalle I voisinage de t_0 et une I-solution φ de **(1)** unique telle que $\varphi(t_0) = x_0$.

Si deux solutions de **(1)** définies sur un intervalle J coïncident en un point t_1 de l'intérieur de I alors elles coïncident sur tout J.

Si φ est une I-solution de **(1)** et a une borne de I telle que : $\lim_{t \to a} \varphi = l$ et $(a, l) \in U$ alors φ est prolongeable sur un intervalle $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ en une solution de **(1)** ;

– pour tout (t_0, x_0) de U il existe une solution maximale φ de **(1)** telle que $\varphi(t_0) = x_0$;

– les solutions maximales sont définies sur des intervalles ouverts ;

– l'ensemble des courbes intégrales maximales forment une partition de U ;

– toute solution est restriction d'une et d'une seule solution maximale.

• Cas des équations autonomes (invariance par translation)

Soit V un ouvert de E et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de V dans E.

Pour tout x de V on note φ_x la solution maximale de l'équation différentielle : $z' = f(z)$ **(2)** qui prend la valeur x en 0 et J_x son intervalle de définition.

Si s appartient à J_x et $y = \varphi_x(s)$ alors :

$$\begin{aligned} &\forall t \in \mathbb{R} \quad t \in J_y \Leftrightarrow s + t \in J_x \\ &\forall t \in J_y \quad \varphi_y(t) = \varphi_x(s + t). \end{aligned}$$

• Cas d'une équation autonome d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}$, f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de V dans E et l'équation différentielle :

$$x' = f(x).$$

Les solutions maximales sont définies sur des intervalles ouverts.

Pour tout (t_0, x_0) de $\mathbb{R} \times V$, il existe une solution maximale et une seule définie sur un intervalle I ouvert contenant t_0 et telle que $\varphi(t_0) = x_0$.

On dit que par tout point de $\mathbb{R} \times V$, il passe une courbe intégrale et une seule.

Les courbes intégrales maximales forment une partition de $\mathbb{R} \times V$.

Toute solution est restriction d'une et d'une seule solution maximale.

• *Cas d'un système différentiel autonome d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^2$*

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f et g deux applications de V dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}.$$

Les solutions maximales sont définies sur des intervalles ouverts.

Pour tout $(t_0,\ x_0,\ y_0)$ de $\mathbb{R} \times V$, il existe une solution maximale et une seule définie sur un intervalle I ouvert contenant t_0 et telle que $\varphi(t_0) = (x_0,\ y_0)$.

Les graphes des solutions maximales forment une partition de $\mathbb{R} \times V$.

Les courbes images des solutions maximales : $\{\varphi(t)\ ;\ t \in I\}$ appelées orbites forment une partition de V. L'ensemble de toutes les orbites est appelé le portrait de phase.

Si on note F le champ de vecteurs : $(x,\ y) \in V \longmapsto (f(x,\ y),\ g(x,\ y)$, les orbites sont également appelées : courbes intégrales du champ de vecteur F ou lignes de champ de F.

Toute solution est restriction d'une et d'une seule solution maximale.

• *Cas d'une équation différentielle autonome d'ordre 2 sur $\mathbb{R}$*

Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^2$, g une application de V dans $\mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et l'équation différentielle : $x'' = g(x,\ x')$.

On remarquera que cette équation est équivalente à un système différentiel du premier ordre sur V en posant : $\begin{cases} x' = y \\ y' = g(x,y) \end{cases}$.

Les solutions maximales sont définies sur des intervalles ouverts.

Pour tout $(t_0,\ x_0\ ,\ x'_0)$ de $\mathbb{R} \times V$, il existe une solution maximale et une seule définie sur un intervalle I ouvert contenant t_0 et telle que $\varphi(t_0) = x_0$ et $\varphi'(t_0) = x'_0$.

Les graphes des solutions maximales forment une partition de $\mathbb{R} \times V$.

Par un point $(t_0,\ x_0)$ il passe une courbe intégrale et une seule admettant une tangente de pente x'_0.

Les courbes images des solutions maximales : $\{\varphi(t)\ ;\ t \in I\}$ appelées orbites forment une partition de V. L'ensemble de toutes les orbites est appelé le portrait de phase.

Toute solution est restriction d'une et d'une seule solution maximale.

• *Équations différentielles à variables séparables*

Ce sont des équations différentielles de la forme $a(x) + b(y)\ y' = 0$ où a et b sont deux applications continues sur des intervalles I et J.

Pour les résoudre on sépare les variables, puis on intègre de chaque côté :

$$\int a(x)\,\mathrm{d}x = -\int b(y)\,\mathrm{d}y + C \quad \text{où} \quad C \in \mathbb{R}.$$

ÉNONCÉS

1 Pour s'entraîner....

1 Résoudre l'équation différentielle de Bernoulli (***E***) et étudier ses courbes intégrales.

$$-y'\ln x + \frac{y}{x} - 2xy^2 = 0. \qquad \textbf{(E)}$$

2 Résoudre l'équation de Ricatti :

$$y' = y^2 + 2xy + 2.$$

3 Déterminer les solutions de l'équation d'Euler :

$$x^2y'' - 3tx' + 4x = \ln(t).$$

4 **a)** En effectuant un parallèle avec une équation différentielle linéaire, déterminer les suites complexes, $(u_n)_{n\geqslant 2}$, définies par $\forall n \geqslant 2 \;\; nu_{n+1} = (n-1)u_n - n + 1$.

b) Déterminer de même les suites complexes vérifiant la relation :

$$\forall n \geqslant 1 \quad (n+2)u_{n+1} = nu_n - n + 1.$$

5 On considère l'équation différentielle :

$$(1+x^2)^2y'' - 2x(1+x^2)y' + 2(x^2-1)y = 0.$$

Déterminer les solutions paires développables en série entière. En déduire la solution générale.

6 Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + 2y' + y = \frac{1}{x}\mathrm{e}^x.$$

7 Résoudre l'équation différentielle :

$$xy'' + 2y' - \omega^2 xy = 0,$$

en cherchant d'abord les solutions développables en série entière.

8 Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - y = \mathrm{e}^{-x}\left(\ln x - \frac{1}{2x}\right).$$

9 Trouver les fonctions réelles d'une variable réelle, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tout x réel :

$$f'(x) + f(-x) = x\exp(x).$$

10 Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = x - 5z \\ y' = y + z \\ z' = x + y + z \end{cases}.$$

11 Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} x'' = -x - y + \mathrm{e}^t \\ y'' = x + 3y - t \end{cases}.$$

12 *D'après, ISFA.*

Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur les paramètres réels α et β pour que toutes les solutions du système différentiel :

$$\begin{cases} x'' = -(\alpha+\beta)x + \beta y \\ y'' = \beta x - \beta y \end{cases}$$

soient des fonctions $(t \longmapsto (x(t), y(t))$ bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.

13 Résoudre le système différentiel :

$$\begin{cases} u(x)v(x) = \dfrac{1}{x} \\ u'(x)v'(x) = 1 \end{cases}.$$

Conseils

1) *Équation de Bernoulli.* Poser $z = \dfrac{1}{y}$.

2) Chercher une solution évidente z, puis poser $y = z + u$.
On est ramené à une équation de Bernoulli. Poser $v = \dfrac{1}{u}$.

3) *Équation d'Euler*. Procéder au changement de variable $t = \ln(x)$.

4) a) Essayer d'écrire la relation indiquée comme somme d'une relation linéaire et d'un second membre...
Puis adapter les outils et méthodes de résolution d'une équation différentielle linéaire.

5) Méthode classique de recherche d'une solution développable en série entière. Puis non moins classique, variation de la constante.

6) Méthode de variation des constantes.

7) Méthode de variation de la constante.

8) Méthode de variation des constantes.

10) Relire le cours si nécessaire..

13) La matrice du système est-elle diagonalisable ?

2* Une équation différentielle

Étant donné un réel μ, soit (E_μ) l'équation différentielle suivante :

$$16(x^2 - x)y'' + (16x - 8)y' - \mu y = 0 \qquad \boldsymbol{(E_\mu)}$$

1 – Déterminer trois intervalles I, les plus grands possible, deux à deux disjoints, pour lesquels la dimension de l'espace vectoriel $E_\mu(I)$ est égale à 2.

2 – Soit y une fonction inconnue, égale à la somme d'une série entière de terme général $a_n x^n$, de rayon de convergence R, supposé strictement positif :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

a) Déterminer la relation nécessaire et suffisante entre les coefficients a_n et a_{n+1}, $(n \geqslant 0)$, pour que la fonction y soit solution de l'équation différentielle (E_μ). En déduire une expression du coefficient a_n en fonction des réels a_0, n et μ.

b) Le réel a_0 étant différent de 0, déterminer suivant les valeurs du réel μ le rayon de convergence R. Expliciter le coefficient a_n lorsque R est infini.

Dans les questions suivantes, les réels a_0 et μ sont égaux à 1 : $a_0 = 1, \mu = 1$. Soit ϕ la fonction définie dans l'intervalle $]-R, R[$ par la relation :

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

3 – **a)** Exprimer, pour tout entier n, le coefficient a_n à l'aide du coefficient du binôme $\binom{4n}{2n}$.

Déterminer, en utilisant la formule de Stirling, deux réels α et k (k différent de 0), tels qu'un équivalent de a_n, lorsque l'entier n croît vers $+\infty$, soit $\dfrac{k}{n^\alpha}$.

b) Démontrer que la fonction ϕ est définie et continue sur l'intervalle fermé $[-R, R]$.

c) Démontrer que la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$, puisque sa dérivée ϕ' admet une limite à droite en $-R$; en déduire que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-R, R[$.

4 – **a)** Un résultat préparatoire : soit une suite réelle positive $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière de terme général $b_n x^n$, $n \in \mathbb{N}$ ait un rayon de convergence égal à 1. Soit $g(x)$ la somme de cette série :

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n.$$

Démontrer que, si la fonction est majorée sur l'intervalle $[0, 1[$, la série de terme général b_n, est convergente.

b) Préciser la nature de la série de terme général na_n, $n \in \mathbb{N}$. En déduire le comportement de $\phi'(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

Conseils

1) Préciser le théorème utilisé.

2) b) Regarder si a_n s'annule...

3) b) Montrer la convergence uniforme de la série entière sur $[-1, 1]$.

c) Préciser soigneusement le théorème utilisé.

Pour l'étude en -1, montrer que la série $\sum na_n x^{n-1}$ vérifie le critère spécial des séries alternées sur $[-1, 0[$.

4) a) Traduire l'hypothèse de majoration sur $[0, 1[$ pour g, puis pour des sommes finies.

3 Un système différentiel à coefficients non constants

Pour $t > 0$, on considère le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = \ -x + \dfrac{1}{t} y \\ y' = (1-t)x + y \end{cases}$$

1 – Montrer que $\phi(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$ est solution de ce système différentiel.

2 – Déterminer toutes les solutions de ce système.

3 – En déduire toutes les solutions de :

$$\begin{cases} x' = -x + \dfrac{1}{t} y + \ln t + \dfrac{1}{t} \\ y' = (1-t)x + y + (t-1)\ln t \end{cases}$$

Conseils

2) Exprimer y avec la première équation, puis reporter dans la deuxième...

3) Méthode de variation des constantes dès que l'on a un système fondamental de solutions.

4 Un arc paramétré

Déterminer les arcs plans biréguliers tels que, en tout point, la courbure c soit telle que :

$$\forall s \quad c(s) = \frac{1}{1+s^2}.$$

5 Inégalité et équation différentielle

1 – Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, k un réel et f une application de I dans $\mathbb{R}$ telle que :

$\forall t \in I \qquad f'(t) \leqslant kf(t).$

Montrer que :

$\forall t_o \in I \quad \forall t \in I \quad t \geqslant t_0 \Longrightarrow f(t) \leqslant f(t_0)e^{k(t-t_0)}.$

2 – Soit l'équation différentielle :

$x'' = -x + \lambda x'(1-x^2)$, avec $\lambda \geqslant 0$.

On suppose que x est une solution maximale sur I, non prolongeable par continuité. Montrer que I est de la forme $]a, +\infty[$.

Conseils

1) On pourra étudier les propriétés de la fonction g définie par $g(t) = f(t)e^{-kt}$.
2) On pourra poser $f(t) = x^2(t) + x'^2(t)$, et utiliser les résultats de la question **1)**.

6 Un changement de fonction inconnue

On considère l'équation différentielle :

$$y' = (x + y)^2.$$

Déterminer l'ensemble de ses solutions.

Conseils

Étudier une nouvelle fonction $z = x + y$.

7* Polynômes positifs

Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) \geqslant 0.$$

Montrer que le polynôme Q défini par $Q = \sum_n P^{(n)}$ a la même propriété.

Conseils

Montrer que, P étant un polynôme donné, Q est solution d'une équation différentielle linéaire.
Exprimer les solutions de cette équation différentielle sous forme d'une intégrale.

8* Du premier ordre, mais non linéaire

L'objet de l'exercice est l'étude de l'équation différentielle :

$$xy' - 2|y| = x \qquad (\boldsymbol{E})$$

1 Résoudre les équations différentielles :

$$xy' - 2y = x \qquad (\boldsymbol{E}_1)$$

$$xy' + 2y = x \qquad (\boldsymbol{E}_2)$$

2 **a)** Montrer que l'équation différentielle $(\boldsymbol{E})$ n'a pas de solution sur $\mathbb{R}$.

b) Trouver ses solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Donner la forme de leurs graphes.

c) Trouver ses solutions sur $\mathbb{R}^{-*}$.

Donner la forme de leurs graphes.

d) Déterminer les solutions maximales.

Conseils

1) Classique...
2) a) Supposer l'existence d'une solution y.
Quelles informations apporte l'équation différentielle sur y en 0, pour $x > 0$?
b) Commencer par faire les tableaux de variation des différentes solutions trouvées dans le **a)**.
Quel est, sur $\mathbb{R}^{+*}$, le signe de y' ? celui de y ?
Lorsque y s'annule et change de signe, recoller des solutions...
c) Ici également, réfléchir en regardant le signe de y.
Chercher les solutions de signe constant, celles qui changent de signe.
Que se passe-t-il en un point qui annule y ? Que dire de y' ?
d) Reprendre les différentes solutions trouvées.

9 De l'une à l'autre

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit q une fonction définie sur I, à valeurs réelles et indéfiniment dérivable.

Une solution de l'équation différentielle $y'' + qy = 0$ est une fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, telle que :

$$\forall t \in I \quad u''(t) + q(t)u(t) = 0.$$

Un zéro de u est un t de I tel que : $u(t) = 0$.

Dans l'énoncé, μ désigne un nombre réel.

1 On suppose que $I = \mathbb{R}$.

Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + \left(\mu - \frac{1}{4}\right) y = 0.$$

2 On suppose que $I = \mathbb{R}^{+*}$.

Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{\mu}{t^2} y = 0.$$

3 On suppose que $I = \{t \in \mathbb{R}\,;\, t > 1\}$.

Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' + \frac{1}{t^2}\left[\frac{1}{4} + \frac{\mu}{(\ln t)^2}\right] y = 0.$$

(On pourra introduire la fonction z définie par : $z(s) = y(e^s)e^{-\frac{s}{2}}$.)

4 Montrer que, dans les cas ci-dessus :

a) si $\mu \leqslant \dfrac{1}{4}$, toute solution non nulle admet au plus un zéro ;

b) si $\mu > \dfrac{1}{4}$, toute solution admet une suite de zéros qui tend vers $+\infty$.

5 ▬ On suppose que $I = \mathbb{R}^{+*}$.

Tracer le graphe de la solution u de l'équation différentielle $y'' + \dfrac{1}{2t^2} y = 0$ qui est telle que :

$$u(1) = 1\,; \quad u'(1) = \frac{1}{2}.$$

Conseils

2) *Équation d'Euler*

Noter $y(t) = y(e^x) = z(x)$ et justifier que z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur un domaine à préciser.

Puis calculer $y'(t), y''(t)$ en fonction de $t, z(x), z'(x), z''(x)$...

Ensuite, *as usual*, y est solution de l'équation différentielle si.....

3) Procéder exactement de même avec la fonction z indiquée par l'énoncé.

4) Cette question se simplifie sérieusement si on justifie proprement qu'il suffit d'établir le résultat demandé dans la première question !

5) Pour obtenir un graphe « parlant », le mieux est de chercher les zéros de u, et de tracer l'allure du graphe sans respecter l'échelle...

10* Une équation fonctionnelle

Trouver les applications f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 1 - \int_0^x (t+x) f(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Conseils

Ce type d'exercice est assez classique. La démarche est presque toujours :

– une recherche « libre » : valeurs particulières, classe des fonctions solutions, solutions immédiates... ;

– après, éventuellement quelques calculs modifiant l'expression donnée, dérivation de cette expression pour obtenir une équation différentielle vérifiée par toute solution ;

– résolution de cette équation différentielle et détermination des solutions ;

– vérifier que les solutions obtenues conviennent.

11 Deux équations d'Euler

D'après Ensam.

On note E le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions réelles continues et bornées sur $]0, +\infty[$.

Pour f dans E, on considère les équations différentielles :

(D) : $x^2 y'' + 2xy' - 2y = f(x)$, $x > 0$;

(H) : $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$, $x > 0$.

1 ▬ Préciser les réels r_1 et r_2, avec $r_1 < r_2$, tels que x^{r_1} et x^{r_2} soient solutions de (H).

2 ▬ Établir que :

$g(x) = \displaystyle\int_0^x -\frac{t}{3x^2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} -\frac{x}{3t^2} f(t)\,\mathrm{d}t$ est solution de (D).

3 ▬ On appelle T l'application qui, à f dans E, associe g. S'agit-il d'un isomorphisme de E ?

4 ▬ Pour φ dans E, soit $\| \varphi \| = \sup\limits_{x>0} |\varphi(x)|$.

Déterminer une constante $C > 0$ telle que : $\| g \| \leqslant C \| f \|$.

5 ▬ On suppose l'existence de $\lambda = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Montrer l'existence de $\mu = \lim\limits_{x \to 0} g(x)$, et fournir sa valeur.

Conseils

1) Ne pas oublier de rappeler le type de l'équation différentielle.

2) Justifier d'abord que les deux intégrales ont un sens.

3) Quelles propriétés possède g ?

5) Montrer que la fonction F définie par :

$F(x) = \displaystyle\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t$ admet un développement limité en 0 à l'ordre 2 en utilisant sa dérivée.

Puis écrire l'autre intégrale sous la forme :

$$\int_x^{+\infty} -\frac{x}{3t^2} f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{x}{3}\left(\int_x^{+\infty}\left(\frac{f(t)-\lambda}{t^2} + \frac{\lambda}{t^2}\right)\mathrm{d}t\right) \ldots$$

12 Comportement à l'infini des solutions d'une équation différentielle

D'après ENGEES, Strasbourg.

Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ et α un complexe, on note $T_\alpha(g)$ l'application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$, qui à x associe $T_\alpha(g)(x) = \displaystyle\int_0^x g(t) e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t$.

1 ▬ Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{C}$ et α un complexe, résoudre l'équation :

$$(\boldsymbol{E_\alpha}) \; : \; y' + \alpha y = g(x).$$

(On note S_α l'ensemble des solutions de (E_α) et on exprimera les solutions de (E_α) en fonction de $T_\alpha(g)$.)

2 ▬ On suppose $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et Re $(\alpha) > 0$.

Montrer $\forall h \in S_\alpha \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

On pourra admettre ce résultat.

3 ▬ Soit f dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ telle que : $\exists \alpha \in \mathbb{C}$ Re $(\alpha) > 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \left(f'(x) + \alpha f(x)\right) = 0$.

Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

4 ▬ Soit g dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ et (α, β) dans $\mathbb{C}^2$, r_1 et r_2 les solutions de $z^2 + \alpha z + \beta = 0$.

On note $\left(E_{\alpha,\beta}\right)$ l'équation $y'' + \alpha y' + \beta y = g(x)$.

On note $S_{\alpha,\beta}$ l'ensemble des solutions de $\left(E_{\alpha,\beta}\right)$.

a) On suppose $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et Re $(r_1) < 0$.

Montrer $\forall h \in S_{\alpha,\beta} \quad \lim_{x \to +\infty} \left(h'(x) - r_2 h(x)\right) = 0$.

b) On suppose $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et Re $(r_1) < 0$ et Re $(r_2) < 0$.

Montrer $\forall h \in S_{\alpha,\beta} \quad \lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

5 ▬ Soit f dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ telle que :

$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \quad \lim_{x \to +\infty} \left(f''(x) + \alpha f'(x) + \beta f(x)\right) = 0$.

Et les solutions r_1 et r_2 de l'équation $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ vérifient Re $(r_1) < 0$ et Re $(r_2) < 0$.

Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Conseils

2) Écrire, pour $x > A$,

$$e^{-\alpha x} \int_0^x g(t) e^{\alpha t} \, dt = \int_0^A g(t) e^{-\alpha(x-t)} \, dt + \int_A^x g(t) e^{-\alpha(x-t)} \, dt.$$

Choisir A pour faire tendre chacune des intégrales vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

13* Nombre de zéros d'une équation différentielle

D'après Mines-Ponts, PC.

On désigne par T un réel strictement positif, I l'intervalle fermé $[0, T]$, q une fonction réelle définie et continue sur I et enfin $E(I, q)$ l'équation différentielle :

$$y'' + q(t) y = 0.$$

Si une fonction complexe u, définie sur l'intervalle I, prend la valeur 0 en un point c de l'intervalle I, le point c est dit être un zéro de u ; il est admis que, puisque l'intervalle I est un compact, le nombre des zéros d'une solution u de l'équation différentielle $E(I, q)$ autre que la solution nulle, est fini.

On appelle solution de $E(I, q)$ une fonction réelle u, définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, solution de $E(I, q)$. L'objet de cet exercice est de trouver un encadrement du nombre de zéros d'une solution de $E(I, q)$.

On admettra que, si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, à valeurs dans l'ensemble U des complexes de module 1, il existe une fonction θ, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que $g = e^\theta$ et que θ est défini à $2k\pi$ près.

1 ▬ Soit u une solution de $E(I, q)$ autre que la solution nulle.

a) Soit f la fonction complexe définie sur I par :

$$f(t) = u'(t) + i u(t).$$

Existe-t-il un réel c tel que $f(c) = 0$?

b) Montrer qu'il existe deux fonctions θ, g, définies sur I, de classe $\mathcal{C}^1$, vérifiant les trois conditions suivantes :

(i) pour tout réel t de I, $u'(t) = g(t) \cos(\theta(t))$;

(ii) pour tout réel t de I, $u(t) = g(t) \sin(\theta(t))$;

(iii) le réel $\theta(0)$ appartient à l'intervalle $[0, \pi[$.

c) *Exemple :* Soit ω une constante positive telle qu'il existe un entier $p \geqslant 2$ pour lequel :

$$\left(p - \frac{1}{2}\right)\pi \leqslant \omega < \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

De plus : $I = [0, 1]$ et $q(t) = \omega^2$.

Déterminer les deux fonctions θ et g pour une solution u de l'équation différentielle vérifiant les conditions :

$u(0) = 0$ et $u'(0) = \omega$.

Préciser l'expression de $\theta(t)$ sur les intervalles suivants :

$$\left[0, \frac{\pi}{2\omega}\right], \left]\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega}, \left(k + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega}\right]_{k \in [\![1, p]\!]} \ldots \left]\left(p - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{\omega}, 1\right].$$

Déterminer les valeurs prises par la fonction θ aux points en lesquels la fonction u est nulle.

d) Démontrer que les dérivées θ' et g' des deux fonctions θ et g, définies dans **1) b)**, vérifient les relations suivantes :

$$\theta'(t) = \cos^2(\theta(t)) + q(t) \sin^2(\theta(t)) ;$$
$$g'(t) = (1 - q(t)) g(t) \sin(\theta(t)) \cos(\theta(t)).$$

2 ▬ *Suite des zéros d'une solution u*

La solution u considérée est supposée posséder exactement n zéros sur l'intervalle $]0, T]$; ces zéros sont notés $t_1, t_2, \cdots, t_n$ et vérifient $0 < t_1 < t_2 < \cdots t_n \leqslant T$.

a) Déterminer pour chaque réel t_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, une valeur possible du réel $\theta(t_k)$ et en déduire la valeur du réel $\theta'(t_k)$.

b) Démontrer que la fonction θ est strictement positive sur l'intervalle ouvert $]0, t_1[$.

En déduire la valeur du réel $\theta(t_1)$ en utilisant par exemple la valeur du réel $\theta'(t_1)$.

c) Démontrer que la fonction θ est, pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$, strictement supérieure à $\theta(t_k)$ sur l'intervalle ouvert $J_k =]t_k, t_{k+1}[$ en considérant par exemple la fonction ψ_k définie sur l'intervalle fermé $[t_k, t_{k+1}]$ par la relation : $\psi_k(t) = \theta(t) - \theta(t_k)$.

En déduire, pour tout entier k compris entre 1 et $n-1$,la valeur du réel $\theta(t_k)$.

d) Démontrer les inégalités suivantes :

$$n\pi \leqslant \theta(T) < (n+1)\pi.$$

3 ▬ Une évaluation du nombre de zéros.

Soit n le nombre de zéros d'une solution u dans l'intervalle $]0, T]$.

a) Démontrer que le réel $\theta(T) - T$ s'exprime au moyen de $\theta(0)$ et de l'intégrale :

$$\int_0^T (q(t)-1)\sin^2(\theta(t))\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que le nombre n de zéros de la solution u vérifie l'inégalité suivante :

$$|\pi n - T| \leqslant \pi + \int_0^T |1-q(t)|\,\mathrm{d}t.$$

b) *Exemple :* Dans cette question la fonction q est définie sur l'intervalle $[0, T]$ par la relation :

$$q(t) = \frac{\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}.$$

Donner un équivalent de l'entier n lorsque le réel T croît vers l'infini.

Conseils

1)b) Utiliser, avec $\dfrac{f}{|f|}$, le résultat admis par l'énoncé.

c) Regarder la courbe décrite par le point $M(f(t))$. Faire un graphe.

d) Décrire les relations données dans **1) b)** et utiliser l'équation différentielle.

On obtient un système en $g'(t), \theta'(t)$ ...

2)b) Étudier θ sur $]0, t_1[$ en distinguant les cas : $\theta(0) = 0$; $\theta(0) > 0$.

Montrer que, sur $]0, t_1[$, $\theta(t)$ appartient à $]0, \pi[$.

c) La fonction ψ_k permet de revenir à la question **2)b)**. L'intervalle change, mais le raisonnement et les arguments sont les mêmes.

d) Toujours le même raisonnement...

3)a) On connaît $\theta'(t)$..

b) Chercher un équivalent de $\dfrac{1}{1+\sqrt{t}}$..

Puis un équivalent de l'intégrale en écrivant :

$$\int_0^T \frac{1}{1+\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t - \int_0^T \frac{1}{\sqrt{t}(1+\sqrt{t})}\mathrm{d}t.$$

14* Équation autonome

Soit Ω un ouvert de E espace vectoriel normé de dimension finie et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de Ω dans E. On considère l'équation différentielle $x' = f(x)$ et (t_0, x_0) un élément de $\mathbb{R} \times E$.

Soit φ une solution maximale , application de I intervalle de $\mathbb{R}$ dans E , solution de $x' = f(x)$ telle que $\varphi(t_0) = x_0$.

1 ▬ Montrer que si φ' s'annule, alors φ est constante.

2 ▬ Si $E = \mathbb{R}$, montrer que toute solution φ de $x' = f(x)$ est, soit constante, soit strictement monotone.

3 ▬ Si φ est non constante et non injective, montrer que x est une solution périodique.

4 ▬ On considère l'équation différentielle :

$$x' = x\sin^2(x) \qquad \textbf{(E)}$$

Montrer que toute solution maximale est bornée, définie sur $\mathbb{R}$.

15 Une équation à variables séparables

On considère l'équation différentielle : $y' = y^{\alpha}+1$ **(1)** où $\alpha > 0$.

1 ▬ Exprimer la solution générale de **(1)** à l'aide de la fonction $G : y \longmapsto \displaystyle\int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha + 1}$.

2 ▬ Déterminer le comportement de G sur $[\,0, +\infty[$ dans les cas $0 < \alpha \leqslant 1$ et $\alpha > 1$.

En déduire dans chaque cas l'allure des solutions maximales.

3 ▬ Traiter complètement et explicitement les cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

Conseils

1) C'est une équation autonome à variables séparables.

2) Montrer que G est bijective de $[\,0, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

16 Propriétés des solutions d'une équation autonome du premier ordre

Soit V un ouvert de E, f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de V dans E et l'équation différentielle autonome $x' = f(x)$.

Pour tout $(t_0,\ x_0)$ de $\mathbb{R} \times V$, il existe une solution maximale φ et une seule définie sur un intervalle I ouvert contenant t_0 et telle que $\varphi(t_0) = x_0$.

1 Montrer que si φ' s'annule en un point de I alors φ est constante sur I.

2 Montrer que si $E = \mathbb{R}$, φ est constante ou strictement monotone.

3 Montrer que lorsque $E \neq \mathbb{R}$, si φ est non constante et non injective, alors elle est périodique.

4 Résoudre $y' = \sin^2 y$.

Conseils

1) Unicité de la solution sur I.

2) Discuter suivant l'injectivité de φ.

3) Comparer φ avec une solution ψ périodique bien choisie.

17 Étude en coordonnées polaires de lignes de champ

On considère le champ de vecteurs défini pour $(x,\ y) \neq (\ 0,\ 0)$ par :

$$\overrightarrow{V}(x,\ y) = \left(-y + x \sin\left(\frac{\pi}{x^2+y^2}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right),\right.$$
$$\left. x + y \sin\left(\frac{\pi}{x^2+y^2}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right)$$

et par $\overrightarrow{V}(0,\ 0) = (0,\ 0)$.

1 Montrer que le champ $\overrightarrow{V}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.

2 Montrer que le système différentiel $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{V}(M)$ se ramène à une équation de la forme $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = f(r)$.

On ne cherchera pas à résoudre explicitement cette équation. En déduire qu'il y a une infinité de cercles concentriques C_k de rayon R_k décroissant vers 0 qui sont des lignes de champ.

3 Montrer que les lignes de champs passant par un point $(r_0,\ \theta_0)$ tel que $R_{k+1} < r_0 < R_k$ est une spirale admettant les cercles C_k et C_{k+1} comme asymptotes.

4 Étudier également le comportement à l'infini des lignes de champs.

Conseils

1) Introduire la fonction :

$$\varphi\ :\ t \longmapsto \sin\left(\frac{\pi}{t}\right)\exp\left(-\frac{1}{t}\right)$$

définie pour $t > 0$ et montrer qu'elle se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.

2) On rappelle que l'application $(r,\ \theta)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi\ ,\ \pi[$ dans le domaine $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,\ 0)\ ;\ x \leqslant 0\}$ et que :

$r\,\mathrm{d}r = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y$ et $r\,\mathrm{d}\theta = -\sin\theta\,\mathrm{d}x + \cos\theta\,\mathrm{d}y$.

3) Étudier l'intégrabilité de la fonction $r \longmapsto \dfrac{1}{f(r)}$ sur $]R_{k+1}\ ,\ R_k[$.

4) Étudier l'intégrabilité de la fonction $r \longmapsto \dfrac{1}{f(r)}$ sur $]1, +\infty[$.

18 Systèmes dynamiques

Soit E un espace euclidien, U un ouvert de E et φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R} \times U$ dans U. Pour tout t de $\mathbb{R}$, on note φ_t l'application de U dans U définie par :

$$\forall x \in U \quad \varphi_t(x) = \varphi(t,\ x).$$

On dit que φ est un système dynamique sur U si, et seulement si, les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) φ_0 est l'identité sur U ;

(ii) $\forall (s,\ t) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t}$.

1 Montrer que si φ est un système dynamique alors, pour tout x de U, l'application $t \longmapsto \varphi(t,\ x)$ est solution de l'équation autonome $z' = F(z)$ **(1)** où F est définie par :

$$\forall x \in U \quad F(x) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(0,\ x).$$

Étudier la réciproque lorsque F est supposé de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Dans ce cas, montrer que $\{t \longmapsto \varphi(t,\ x)\ ;\ x \in U\}$ est l'ensemble des solutions de **(1)**.

2 Étudier l'application φ de $\mathbb{R} \times E$ dans E définie par $\varphi(t,\ x) = \mathrm{e}^{t\,a} x$ où a est un endomorphisme de E.

Conseil

1) Pour trouver F procéder par analyse et synthèse.

Algorithme

Résolution approchée d'un système différentiel

Partie mathématique

La méthode d'Euler permet de déterminer des solutions approchées d'un système différentiel d'ordre 1.

Considérons le système différentiel $X' = A(t)X$, où A désigne une application continue de I dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit (t_0, X_0) fixé dans $I \times \mathbb{K}^n$. Nous savons qu'il existe une unique solution du système, définie sur I, vérifiant : $X(t_0) = X_0$.

La méthode d'Euler consiste à approcher cette solution sur l'intervalle I contenant t_0 en posant, pour h fixé, positif puis négatif :

$$t_{i+1} = t_i + h \ ; X_{i+1} = X_i + h\, A(t_i)\, X_i.$$

La méthode de Runge-Kutta permet d'améliorer l'approximation faite dans le calcul de X_{i+1}.

On pose :

$$t_{i+1} = t_i + h \ ; \ X_{i+1} = X_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

avec :

$$k_1 = A(t_i)X_i \ ; \ k_2 = A\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\left(X_i + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = A\left(t_i + \frac{h}{2}\right)\left(X_i + \frac{h}{2}k_2\right) \ ; \ k_4 = A(t_i + h)(X_i + hk_3)$$

1 ▬ Indiquer comment utiliser ces méthodes pour déterminer une solution approchée d'une équation différentielle d'ordre 2 de la forme : $y'' = f(t, y, y')$, où f est une fonction continue sur $I \times U$, U étant un ouvert de $\mathbb{K}^2$.

Partie informatique

2 ▬ Écrire un programme de résolution approchée d'un système linéaire avec la méthode d'Euler, puis un algorithme avec la méthode de Runge-Kutta.

Le tester avec le système de l'*exercice* 4.

Comparer avec la solution exacte.

3 ▬ Écrire un programme de résolution approchée d'une équation différentielle d'ordre 2 de la forme : $y'' = f(t, y, y')$, où f est une fonction continue sur $I \times U$, U étant un ouvert de $\mathbb{K}^2$.

CORRIGÉS

1 Pour s'entraîner....

1 Nous reconnaissons une équation de Bernoulli. Résolvons sur $\mathbb{R}^{**}$.

La fonction nulle est solution de l'équation.

Comme l'indique l'énoncé, posons $z = \dfrac{1}{y}$ sur tout intervalle sur lequel y ne s'annule pas.

L'équation devient $z' \ln x + \dfrac{1}{x} z = 2x$.

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire, du premier ordre, avec second membre. Elle peut s'écrire sous forme résolue sur $]0, 1[$ ou $]1, +\infty[$.

De plus : $z' \ln x + \dfrac{1}{x} z = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x}(z \ln x)$.

Donc : $z' \ln x + \dfrac{1}{x} z = 2x \iff z \ln x = x^2 + k$.

Puis : $y = \dfrac{\ln x}{x^2 + k}$.

L'étude des courbes intégrales impose de considérer deux cas.

Si $k \geqslant 0$, la fonction y est définie sur $]0, +\infty[$.

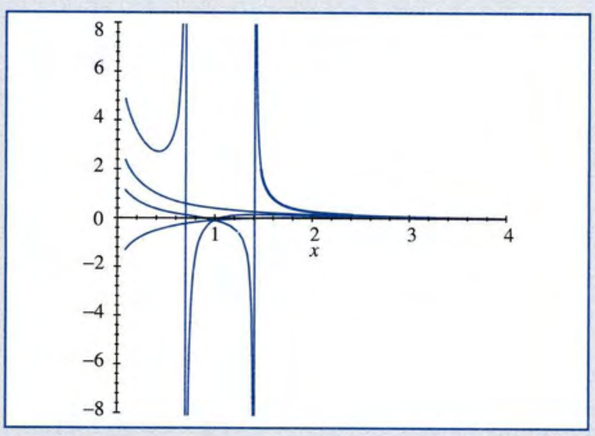
Si $k < 0$, la fonction y est définie sur :
$]0, \sqrt{-k}[\bigcup]\sqrt{-k}, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2 + k)^2} \left[-2 \ln x + 1 + \frac{k}{x^2} \right].$$

Notons $g(x) = -2 \ln x + 1 + \dfrac{k}{x^2}$.

La fonction g est dérivable sur le domaine de définition de f et :

$$g'(x) = -\frac{2}{x^3}(k + x^2).$$



2 Soit l'équation différentielle de Ricatti : $y' = y^2 + 2xy + 2$. Elle a une solution évidente :

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad z(x) = -\frac{1}{x}.$$

On considère u, la nouvelle fonction inconnue définie par $y = z + u$.

On a ainsi :

$$\begin{aligned} y &= z + u \\ z' + u' = y' &= (z + u)^2 + 2x\,(z + u) + 2 \\ &= z^2 + 2zu + u^2 + 2xz + 2xu + 2. \end{aligned}$$

La fonction u est solution sur $\mathbb{R}^*$ de l'équation différentielle $u' = \left(2x - \dfrac{2}{x}\right) u + u^2$.

La fonction $(x, u) \longrightarrow \left(2x - \dfrac{2}{x}\right) u + u^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. L'équation différentielle admet une solution maximale unique avec la condition initiale $u(x_0) = u_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u_0 \in \mathbb{R}$).

Deux cas peuvent se produire. Si u s'annule, c'est la solution nulle sur $\mathbb{R}^*$, sinon elle ne s'annule pas.

• Si u est nulle.

$u = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{1}{x},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

• Si u ne s'annule pas, donc $u \neq 0$: , on peut diviser par u^2. On pose $v = \dfrac{1}{u}$, et $v \neq 0$.

$$v' = -\frac{u'}{u^2} = -2\left(x - \frac{1}{x}\right) v - 1.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre sur $\mathbb{R}^*$.

Il convient donc de rechercher les solutions sur deux intervalles $I_2 =]-\infty, 0[$ et $I_1 =]0, +\infty[$.

La solution générale sur I_1 de l'équation :

$$\forall x \in I_1 \qquad v' = -2\left(x - \frac{1}{x}\right) v - 1$$

est donc $v = C_1 x^2 \mathrm{e}^{-x^2} + x - 2x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}\,t$.

La solution générale de l'équation de Ricatti sur I_1 est donc :

$$\forall x > 0 \quad y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{C_1 x^2 \mathrm{e}^{-x^2} + x - 2x^2 \mathrm{e}^{-x^2} \displaystyle\int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}\,t}$$

avec $x_0 > 0$.

Sur l'intervalle I_2, on a le même type de solution :

$$\forall x < 0 \quad y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{C_1 x^2 e^{-x^2} + x - 2x^2 e^{-x^2} \displaystyle\int_{x_0}^{x} e^{t^2}\, dt}$$

avec $x_0 < 0$.

3 ▬ On considère l'équation d'Euler :

$x^2 y'' - 3xy' + 4y = \ln(x)$.

Elle est définie sur $]0, +\infty[$.

On effectue le changement de variable $t = \ln(x)$.

On note $Y(t) = Y(\ln(x)) = y(x)$. Donc on a :

$y'(x) = Y'(\ln x)\dfrac{1}{x}$ et $y''(x) = Y''(\ln x)\dfrac{1}{x^2} - Y'(\ln x)\dfrac{1}{x^2}$.

L'équation d'Euler se transforme en :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad Y'' - 4Y' + 4Y = t.$$

Cette équation différentielle linéaire du second ordre à coeficients constants a pour solutions :

- la fonction $t \longrightarrow \dfrac{1}{4}(t+1)$ comme solution particulière ;
- la fonction $t \longrightarrow Ae^{2t} + Bte^{2t}$.

L'équation de départ a pour solutions :

$$y = Ax^2 + B\ln(x)x^2 + \frac{1}{4}(1 + \ln x).$$

4 ▬ **a)** Considérons d'abord les suites vérifiant la relation :

$$\forall n \geqslant 2 \quad nu_{n+1} = (n-1)u_n.$$

Montrer que ces suites forment un espace vectoriel complexe E, de dimension 1.

Préciser cet espace vectoriel :

$$E = \left\{ u \,;\, \forall n \geqslant 2 \quad u_n = \frac{k}{n-1} \right\}.$$

Chercher ensuite une suite v vérifiant la relation indiquée et s'écrivant sous la forme :

$v_n = P(n)$, où P est un polynôme.

La suite définie par $v_n = -\dfrac{1}{2}n + 1$ convient.

Prouver ensuite qu'une suite u vérifie la relation indiquée si, et seulement si, la suite $(u_n - v_n)_{n \geqslant 2}$ est dans E.

Les suites cherchées sont les suites de la forme :

$u_n = \dfrac{k}{n-1} - \dfrac{1}{2}n + 1$, pour tout $n \geqslant 2$.

b) La partie linéaire de la relation est la suivante :

$$(n+2)u_{n+1} = nu_n.$$

Les suites vérifiant cette relation, à partir du rang 1, forment l'espace vectoriel :

$$E = \left\{ u \,;\, \forall n \geqslant 1 \quad u_n = \frac{k}{n(n+1)} \right\}.$$

La suite v définie par : $v_n = \dfrac{-2n+5}{6}$ vérifie la relation donnée.

Finalement, montrer qu'une suite vérifie cette relation si, et seulement si, elle est de la forme :

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n = \frac{k}{n(n+1)} + \frac{-2n+5}{6}.$$

5 ▬ On considère la fonction $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n}$, somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

La fonction S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.

Elle est solution de l'équation différentielle sur cet intervalle si, et seulement si :

$$\left(1 + 2x^2 + x^4\right)\sum_{n=1}^{+\infty}(2n)(2n-1)a_{2n}x^{2n-2}$$
$$-\left(2x + 2x^3\right)\sum_{n=1}^{+\infty}(2n)a_{2n}x^{2n-1} + \left(2x^2 - 2\right)\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n} = 0$$

D'après l'unicité du développement en série entière, en regardant d'abord les termes de degré 0 et 2 :

$$2a_2 - 2a_0 = 0\,;$$
$$4.3a_4 + 4a_2 - 4a_2 + 2a_0 - 2a_2 = 0\,;$$

et, pour tout $n \geqslant 1$:

$$(2n+2)(2n+1)\,a_{2n+2} + 2(4n^2 - 4n - 1)\,a_{2n} + 2(2n^2 - 7n + 6)\,a_{2n} = 0.$$

Nous obtenons :

$a_2 = a_0\,;\ a_4 = 0\,; \quad 6.5a_6 + 2.7a_4 + 2.0a_2 = 0.$

D'où $a_6 = 0$.

Ensuite, par récurrence, pour tout $n \geqslant 2$: $a_{2n} = 0$.

Donc : $S(x) = a_0(1 + x^2)$.

Pour résoudre l'équation différentielle, posons : $y = (1 + x^2)z$.

La fonction y est solution de l'équation différentielle si, et seulement si :

$(1 + x^2)^3 z'' + 2x(1 + x^2)^2 z' = 0.$

$(1 + x^2)z'' + 2xz' = 0.$

Nous reconnaissons la dérivée de $(1 + x^2)z'$.

D'où $(1 + x^2)z' = C$.

Puis $z(x) = C\,\mathrm{Arctan}\,(x) + K$.

Enfin $y(x) = C(1 + x^2)\mathrm{Arctan}\,(x) + K(1 + x^2)$.

6 Nous reconnaissons une équation différentielle linéaire, du second ordre, à coefficients constants.

Elle se résout sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$.

Résolvons d'abord l'équation homogène :

$$y'' + 2y' + y = 0.$$

Son équation caractéristique est :

$r^2 + 2r + 1 = 0$, et elle admet la racine double -1.

Les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme $y = (ax + b)\mathrm{e}^{-x}$.

Utilisons la méthode de variation des constantes pour résoudre l'équation avec second membre.

Considérons une fonction de la forme $y = a(x)x\mathrm{e}^{-x} + b(x)\mathrm{e}^{-x}$, avec a, b tels que $a'(x)x\mathrm{e}^{-x} + b'(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Alors :

$$y'(x) = a(x)(-x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}) - b(x)\mathrm{e}^{-x} ;$$

$$y''(x) = a'(x)(-x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}) - b'(x)\mathrm{e}^{-x} + a(x)(x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x}) + b(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

La fonction y est solution de l'équation différentielle si, et seulement si :

$$a'(x)(-x\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}) - b'(x)\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{x}\mathrm{e}^{x}.$$

Soit :

$$\begin{cases} a'(x)x + b'(x) = 0 \\ a'(x)(-x+1) - b'(x) = \dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{2x} \end{cases}.$$

Nous en déduisons :

$$a'(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{x} ; \ b'(x) = -\mathrm{e}^{2x}.$$

Puis : $\quad a(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{2t}}{t}\,\mathrm{d}t ; \ b(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + C.$

Finalement :

$$y(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x} + C\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}\int_{\varepsilon}^{x} \frac{\mathrm{e}^{2t}}{t}\,\mathrm{d}t + Ax\mathrm{e}^{-x},$$

en prenant A, C réels et $\varepsilon = -1$ sur $]-\infty, 0[$, et $\varepsilon = 1$ sur $]0, +\infty[$.

7 Notons $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la fonction somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$.

Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.

La fonction S est solution de l'équation différentielle si, et seulement si :

$$x\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \omega^2 x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

L'unicité du développement en série entière permet d'identifier les coefficients :

$$a_1 = 0 ; \forall n \geqslant 1 \quad (n+1)(n+2)a_{n+1} = \omega^2 a_{n-1}.$$

En déduire par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ a_{2n+1} = 0 \ : \ a_{2n} = \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!}a_0.$$

D'où : $\qquad S(x) = a_0 \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(\omega x)^{2n}.$

Pour $x \neq 0$:

$$S(x) = a_0 \frac{1}{\omega x}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(\omega x)^{2n+1} = a_0 \frac{\sin h(\omega x)}{\omega x}.$$

Et : $S(0) = a_0$.

Nous avons déterminé une droite vectorielle de solutions sur $\mathbb{R}$.

Mais nous savons que, sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$, l'équation peut être mise sous forme résolue, et nous savons que l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle est alors de dimension 2. Il en manque !

Utilisons la méthode de variation de la constante pour terminer la résolution en posant :

$y = k(x)u(x)$, avec $u(x) = \dfrac{\sinh(\omega x)}{\omega x}$ si $x \neq 0$; $u(0) = 1$.

La fonction u ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

La fonction y est solution de l'équation différentielle si, et seulement si :

$xu(x)k''(x) + k'(x)[2xu'(x) + 2u(x)] = 0.$

$\sinh(\omega x)k''(x) + 2\omega k'(x)\cosh(\omega x) = 0.$

D'où : $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(\sinh(\omega x))^2 k'(x)] = 0.$

Sur $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$: $k'(x) = \dfrac{C}{(\sinh(\omega x))^2}.$

Puis : $k(x) = C\coth(\omega x) + K$.

Enfin :

$$y(x) = \frac{C}{\omega x}\cosh(\omega x) + \frac{K}{\omega x}\sinh(\omega x).$$

8 Nous reconnaissons une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, sur $\mathbb{R}^{+*}$.

L'équation caractéristique de l'équation homogène est : $r^2 - 1 = 0$.

Les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $y = a\mathrm{e}^{x} + b\mathrm{e}^{-x}$.

Utilisons la méthode de variation des constantes pour résoudre l'équation avec second membre.

Considérons une fonction de la forme $y = a(x)\mathrm{e}^{x} + b(x)\mathrm{e}^{-x}$, avec a, b tels que $a'(x)\mathrm{e}^{x} + b'(x)\mathrm{e}^{-x} = 0$.

Alors :

$$y'(x) = a(x)(\mathrm{e}^{x}) - b(x)\mathrm{e}^{-x} ;$$

$$y''(x) = a'(x)(\mathrm{e}^{x}) - b'(x)\mathrm{e}^{-x} + a(x)(\mathrm{e}^{x}) + b(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Nous en déduisons :
$$a'(x) = \frac{e^{-2x}}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2x}\right)\ ;\ b'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x} - \ln x\right).$$
Puis :
$$y = \frac{e^x}{2}\int_1^x e^{-2t}\left(\ln t - \frac{1}{2t}\right) dt + a e^x$$
$$+ \left(\frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{2}(x\ln x - x)\right) e^{-x} + b e^{-x}.$$

9 Soit f une fonction solution de l'équation donnée, qui n'est pas une équation différentielle. Nous avons :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x e^x - f(-x).$$
La fonction f' apparaît composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Dérivons la relation donnée :
$$f''(x) - f'(-x) = (x+1)e^x.$$
Éliminons $f'(-x)$:
$$f''(x) + f(x) = (x+1)e^x - x e^{-x}.$$
Nous devons résoudre l'équation différentielle linéaire :
$$y'' + y = (x+1)e^x - x e^{-x}.$$
Les solutions de cette équation différentielle s'obtiennent en ajoutant une solution particulière à la solution générale de l'équation homogène qui est : $y = a\cos x + b\sin x$.

D'où :
$$y = \frac{1}{2}x e^x - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x} + a\cos x + b\sin x.$$
À ce stade, nous savons que toute fonction solution de l'équation fonctionnelle donnée est de la forme indiquée ci-dessus.

Une telle fonction vérifie-t-elle l'équation fonctionnelle ?

La fonction $y : (x \longmapsto \frac{1}{2}x e^x - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x} + a\cos x + b\sin x)$ vérifie l'équation si, et seulement si : $a + b = 0$.

Les fonctions cherchées sont les fonctions de la forme :
$$f(x) = \frac{1}{2}x e^x - \frac{1}{2}(x+1)e^{-x} + a(\cos x - \sin x).$$

10 Matriciellement, le système s'écrit : $X' = AX$, avec :
$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ ;\quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\ ;\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+2i$ et $\lambda_3 = 1 - 2i$.

La matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$.

Une base de vecteurs propres est :

$u_1 = (1, -1, 0)$; $u_2 = (-5, 1, 2i)$; $u_3 = (-5, 1, -2i)$.

Première méthode

Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^3$ à la base (u_1, u_2, u_3), X une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}^3$ et D la matrice diagonale : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2i & 0 \\ 0 & 0 & 1-2i \end{pmatrix}$.

X est solution du système différentiel si, et seulement si :
$$X' = AX = PDP^{-1}X.$$
Ceci équivaut à $(P^{-1}X)' = D(P^{-1}X)$.

Notons $Y = P^{-1}X = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.
$$Y' = DY \iff \begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = (1+2i)y_2 \\ y_3' = (1-2i)y_3 \end{cases}.$$
Intégrons $y_1(t) = c_1 e^t$; $y_2(t) = c_2 e^{(1+2i)t}$; $y_3(t) = c_3 e^{(1-2i)t}$.

La relation $X = PY$ donne :

$x(t) = y_1(t) - 5(y_2(t) + y_3(t))$; $y(t) = -y_1(t) + (y_2(t) + y_3(t))$;
$z(t) = 2i(y_2(t) - y_3(t))$.

Soit, en prenant c_1 réel, c_2 et c_3 conjugués, $c_2 = A + iB$:
$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t - 5e^t(A\cos(2t) + B\sin(2t)) \\ y(t) = -c_1 e^t + e^t(A\cos(2t) + B\sin(2t)) \\ z(t) = e^t(-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)) \end{cases}$$
avec c_1, A, B réels.

Deuxième méthode

Notons :

$X_1(t) = e^t(1, -1, 0)$; $X_2(t) = e^{(1+2i)t}(-5, 1, 2i)$;
$X_3(t) = e^{(1-2i)t}(-5, 1, -2i)$.

Nous savons que la famille de fonctions $(X_i)_{i \in [\![1,3]\!]}$ est un système fondamental de solutions à valeurs complexes du système différentiel.

Ces solutions sont donc de la forme :
$$X(t) = c_1 e^t(1, -1, 0) + c_2 e^{(1+2i)t}(-5, 1, 2i)$$
$$+ c_3 e^{(1-2i)t}(-5, 1, -2i).$$
Soit, en prenant c_1 réel, c_2 et c_3 conjugués, $c_2 = A + iB$:
$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t - 5e^t(A\cos(2t) + B\sin(2t)) \\ y(t) = -c_1 e^t + e^t(A\cos(2t) + B\sin(2t)) \\ z(t) = e^t(-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)) \end{cases}$$
avec c_1, A, B réels.

11 La matrice A du système différentiel est :
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel s'écrit, en notant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: $X'' = AX + B$.

Le polynôme caractéristique de cette matrice est :

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 2.$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}$; $\lambda_2 = 1 - \sqrt{3}$.

Soit : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2-\sqrt{3} & -2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Alors, en posant : $X = PY = P\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, le système équivaut à :

$$PY'' = APY + B.$$

Puis : $\quad Y'' = P^{-1}APY + P^{-1}B = \Delta Y + P^{-1}B$,

avec : $\quad \Delta = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Soit :

$$\begin{cases} u'' = \left(1+\sqrt{3}\right)u + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(-2+\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^t + t\right] \\ v'' = \left(1-\sqrt{3}\right)v + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)\mathrm{e}^t - t\right] \end{cases}.$$

Notons $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{3}}$; $\beta = \sqrt{-1+\sqrt{3}}$.

Alors, en résolvant séparément chaque équation :

$$\begin{cases} u = A\mathrm{e}^{\alpha t} + B\mathrm{e}^{-\alpha t} + \dfrac{-5\sqrt{3}+9}{12}\mathrm{e}^t - \dfrac{\sqrt{3}}{6}t \\ v = C\cos(\beta t) + D\sin(\beta t) + \dfrac{5\sqrt{3}+9}{12}\mathrm{e}^t + \dfrac{\sqrt{3}}{6}t \end{cases}$$

12 Le système différentiel donné s'écrit matriciellement :

$X'' = AX$, avec $A = \begin{pmatrix} -(\alpha+\beta) & \beta \\ \beta & -\beta \end{pmatrix}$.

Le polynôme caractéristique de la matrice A est :

$P_A(x) = x^2 + (\alpha + 2\beta)x + \alpha\beta$.

Son discriminant est :

$\Delta = \alpha^2 + 4\beta^2 > 0$ si $(\alpha, \beta) \neq 0$.

Si $\alpha = \beta = 0$, les solutions ne sont pas toutes bornées.

Sinon, la matrice A admet deux valeurs propres distinctes. Elle est diagonalisable.

Notons λ et μ les deux valeurs propres.

Il existe une matrice inversible P telle que :

$$A = P\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}P^{-1}.$$

Par conséquent :

$$X'' = AX \iff P^{-1}X'' = D(P^{-1}X).$$

Notons $Y = P^{-1}X$.

La fonction vectorielle X est solution du système différentiel si, et seulement si $Y'' = DY$.

De plus, X est bornée si, et seulement si, Y l'est.

En notant $Y = (u, v)$, le système devient :

$$u'' = \lambda u\ ; \quad v'' = \mu v.$$

Le cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants permet de conclure que, les solutions Y sont bornées si, et seulement si, $\lambda < 0$ et $\mu < 0$.

Or λ et μ sont les solutions de l'équation :

$$x^2 + (\alpha + 2\beta)x + \alpha\beta = 0.$$

Les solutions de cette équation sont strictement négatives si, et seulement si :

$$\alpha + 2\beta > 0 \quad \text{et} \quad \alpha\beta > 0.$$

13 Les solutions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ou $\mathbb{R}^{-*}$ et elles ne s'annulent pas car leur produit ne s'annule pas.

Notons $U = \ln|u|$ et $V = \ln|v|$.

Cherchons les fonctions U et V de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ou $\mathbb{R}^{-*}$ et :

$$U' = \frac{u'}{u}\ ; \quad V' = \frac{v'}{v}.$$

Le système donné équivaut à :

$$\begin{cases} U' + V' = -\dfrac{1}{x} \\ U'V' = x \end{cases}.$$

Les fonctions U et V sont les solutions de l'équation :

$t^2 + \dfrac{1}{x}t + x = 0$.

Or : $\Delta = \dfrac{1}{x^2} - 4x$.

$$\Delta \geqslant 0 \iff 4x^3 \leqslant 1.$$

Les solutions U, V sont définies sur $I_1 = \mathbb{R}^{-*}$ ou $I_2 = \left]0, \dfrac{1}{4^{1/3}}\right[$.

U et V jouent le même rôle. On peut choisir :

$U' = \dfrac{1}{2x}\left[\sqrt{1-4x^3} - 1\right]$; $V' = -\dfrac{1}{2x}\left[\sqrt{1-4x^3} + 1\right]$.

Puis, sur I_1 ou I_2 :

$$U(x) = \int \frac{1}{2x}\left[\sqrt{1-4x^3} - 1\right]\mathrm{d}x = \int \frac{-2x^2}{\sqrt{1-4x^3}+1}\,\mathrm{d}x.$$

Posons $z = \sqrt{1-4x^3}$.

$$\begin{aligned} U(x) &= \int \frac{z\,\mathrm{d}z}{3(z+1)} \\ &= \frac{1}{3}\left[\sqrt{1-4x^3} - \ln\left(1+\sqrt{1-4x^3}\right)\right] + C\ ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(x) &= -\int \frac{z\,\mathrm{d}z}{3(z-1)} \\ &= -\frac{1}{3}\left[\sqrt{1-4x^3} + \ln\left(1+\sqrt{1-4x^3}\right)\right] + D. \end{aligned}$$

D'où, sur I_1 ou I_2 :

$$u(x) = K\frac{e^{\frac{\sqrt{1-4x^3}}{3}}}{[1+\sqrt{1-4x^3}]^{1/3}}\,;$$

$$v(x) = Le^{-\frac{\sqrt{1-4x^3}}{3}}[1+\sqrt{1-4x^3}]^{1/3}.$$

2 Une équation différentielle

1 ▬ L'équation (E_μ) est une équation différentielle linéaire homogène. Sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$, $]0,1[$, $]1,+\infty[$, elle peut être mise sous forme résolue.

Les fonctions $\left(x \to \dfrac{16x-8}{16(x^2-x)}\right)$ et $\left(x \to \dfrac{-\mu}{16(x^2-x)}\right)$ sont continues sur chacun de ces intervalles.

D'après le *théorème de Cauchy-Lipschitz*, l'ensemble de ses solutions sur l'un de ces intervalles est un espace vectoriel de dimension 2.

2 ▬ **a)** On suppose qu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$, telle la fonction y définie sur $]-R, R[$ par $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ vérifie l'équation différentielle.

La fonction y somme d'une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et :

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}.$$

La fonction y vérifie (E_μ) si, et seulement si :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(16n^2-\mu)a_n - 8(n+1)(2n+1)a_{n+1}\right]x^n = 0.$$

L'unicité du développement en série entière permet de conclure.

La fonction y est solution de (E_μ) si, et seulement si, son terme général vérifie $a_{n+1} = \dfrac{16n^2-\mu}{8(n+1)(2n+1)}a_n$.

On en déduit par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(16k^2-\mu)}{4^n(2n)!}a_0.$$

b) Supposons $a_0 \neq 0$.

S'il existe p entier tel que $\mu = 16p^2$, pour tout $n \geqslant p+1$, on a $a_n = 0$.

La fonction y est une fonction polynôme.

Le rayon de convergence est $+\infty$.

Si, pour tout entier p, on a $\mu \neq 16p^2$, alors a_n ne s'annule pas. La *règle de d'Alembert* montre que :

$$R = 1.$$

3 ▬ **a)** Remarquons que :

$$\prod_{k=0}^{n-1}(4k-1)(4k+1) = -1.3.5...(4n-5)(4n-3).$$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$a_n = -\frac{(4n)!}{4^n(2n)!2^{2n}(2n)!(4n-1)} = -\frac{\binom{4n}{2n}}{(4n-1)4^{2n}}.$$

Utilisons la *formule de Stirling* : $n! \sim e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}$.

Nous en déduisons $a_n \sim -\dfrac{e^{-4n}(4n)^{4n}\sqrt{8\pi n}}{(4n)4^{2n}e^{-4n}(2n)^{4n}(4\pi n)}$.

Puis $a_n \sim -\dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}n^{3/2}}$.

b) Pour tout x de $[-1,1]$, nous avons $|a_n x^n| \leqslant |a_n|$.

D'après la question précédente, nous écrivons :

$$|a_n| \sim \frac{1}{4\sqrt{2\pi}n^{3/2}}.$$

La série $\sum \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}n^{3/2}}$ converge.

La série $\sum a_n x^n$ est normalement convergente sur l'intervalle $[-1,1]$.

De plus, les fonctions $(x \mapsto a_n x^n)$ sont continues sur $[-1,1]$. La fonction somme ϕ est continue sur $[-1,1]$.

c) La fonction ϕ est la somme d'une série entière de rayon de convergence 1. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \phi'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Pour montrer que la fonction ϕ' admet une limite à droite en -1, étudions sur l'intervalle $[-1,0[$ la série $\sum n a_n x^{n-1}$.

Nous savons que a_n est négatif à partir du rang 1.

La série $\sum n a_n x^n$ est alternée sur $[-1,0[$.

Montrons qu'elle vérifie, pour tout x de $[-1,0[$, le critère spécial des séries alternées.

$$\left|\frac{(n+1)a_{n+1}x}{n a_n}\right| = \frac{16n^2-1}{8n(n+1)} < 1.$$

De plus, $\lim_{n\to+\infty} n a_n x^n = 0$.

La série converge pour tout x de $[-1,0[$ et, pour tout entier N, nous avons :

$$|R_N| \leqslant (N+1)a_{N+1}x^{N+1} \leqslant (N+1)a_{N+1}.$$

L'équivalent établi dans la question **3) a)** permet d'affirmer que la convergence de la série $\sum na_n x^{n-1}$ sur l'intervalle $[-1, 0[$ est uniforme. Les fonctions $(x \mapsto na_n x^{n-1})$ sont continues sur l'intervalle $[-1, 0[$.

La fonction somme $\left(x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}\right)$ est continue sur $[-1, 0]$.

Donc ϕ' admet une limite à droite en -1.

La fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1, 1[$.

4 ▬ a) Notons M un majorant sur l'intervalle $[0, 1[$ de la fonction g.

$$\forall x \in [0, 1[\quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \leqslant M.$$

En particulier, puisque tous les termes intervenant dans la somme sont positifs :

$$\forall x \in [0, 1[\ \forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{N} b_n x^n \leqslant M.$$

Faisons tendre x vers 1.

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{N} b_n \leqslant M.$$

Les sommes partielles de la série de terme général positif b_n sont bornées. La série $\sum b_n$ converge.

b) Pour $n \geqslant 1$, na_n est négatif. Et :

$$na_n \sim -\frac{1}{4\sqrt{2\pi n}}.$$

Donc la série $\sum na_n$ diverge.

Nous en déduisons que l'application :

$$\left(x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n\,|a_n|\,x^{n-1}\right)$$

n'est pas majorée sur $[0, 1[$. Or, elle est croissante sur $[0, 1[$.

Donc $\lim\limits_{x \to 1-} \phi'(x) = -\infty$.

3 Un système différentiel à coefficients non constants

1 ▬ Si on pose $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, le système différentiel se met sous la forme $Y' = AY$, avec :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{1}{t} \\ 1-t & 1 \end{pmatrix}.$$

On sait que $\Phi'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. En reportant dans l'équation différentielle, on obtient :

$$A\Phi(t) = \begin{pmatrix} -1 & \dfrac{1}{t} \\ 1-t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi'(t).$$

L'application Φ est une solution de l'équation différentielle.

2 ▬ La première équation du système permet d'écrire que $y = tx + tx'$.

En remplaçant dans la seconde équation, on obtient :

$$\forall t > 0 \quad tx'' + x' = 0.$$

C'est une équation du premier ordre en x'.

On obtient par une première intégration $x' = a.\dfrac{1}{t}$, puis $x = a \ln t + b$.

Ceci permet de trouver y puisque $y = tx + tx'$. On a alors $y = t(a \ln t + b) + a$.

Les vecteurs solutions sont donc $(a \ln t + b, t(a \ln t + b) + a)$.

Ceci permet de déterminer une base de solutions du système différentiel :

$$\Phi(t) = (1, t)\ ; \quad \Psi(t) = (\ln t, t \ln t + 1).$$

Le déterminant $\begin{vmatrix} 1 & \ln t \\ t & t \ln t + 1 \end{vmatrix} = 1$ est non nul, donc la famille (Φ, Ψ) est une base de solutions du système.

3 ▬ On connaît la solution générale de l'équation homogène :

$$(H)\begin{cases} x' = -x + \dfrac{1}{t} y \\ y' = (1-t)x + y \end{cases}$$

Il reste à déterminer une solution particulière de l'équation totale. Utilisons la méthode de variation des constantes.

Les fonctions (Φ, Ψ) forment une base de l'espace des solutions de l'équation (H).

Pour cela, cherchons une solution de la forme :

$$Y(t) = u(t)\Phi(t) + v(t)\Psi(t).$$

Pour que Y soit solution, il faut et il suffit que :

$$\forall t > 0 \quad u'(t)\Phi(t) + v'(t)\Psi(t) = \begin{pmatrix} \ln t + \dfrac{1}{t} \\ (t-1)\ln t \end{pmatrix}.$$

Matriciellement cette équation se présente sous la forme :

$$\forall t > 0 \quad \begin{pmatrix} 1 & \ln t \\ t & t \ln t + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln t + \dfrac{1}{t} \\ (t-1)\ln t \end{pmatrix}.$$

La matrice est inversible.

Les applications u et v sont solutions de :

$$\forall t > 0 \quad u'(t) = (\ln t)^2 + 2\ln t + \frac{1}{t}, \quad v'(t) = -\ln t - 1.$$

On obtient par intégration :

$$\forall t > 0 \quad u(t) = \ln t + t(\ln t)^2 + a \quad v(t) = -t\ln t + b.$$

La solution générale cherchée est alors :

$\forall t > 0$

$$Y(t) = u(t)\Phi(t) + v(t)\Psi(t) = \begin{pmatrix} \ln t + a + b\ln t \\ t(\ln t)^3 + (1-t^2)(\ln t)^2 - t\ln t + at + b(t\ln t + 1) \end{pmatrix}.$$

4 Un arc paramétré

On sait que la courbure en un point d'un arc birégulier est $c(s) = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}$.

La condition imposée se traduit donc par :

$$\forall \varphi \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = 1 + s^2.$$

On obtient ainsi une équation différentielle à variables séparables.

La fonction $((s, \varphi) \longrightarrow 1 + s^2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le *théorème de Cauchy Lipschitz*, cette équation différentielle admet une solution unique si on impose une condition initiale.

On peut diviser par $1 + s^2$. Ainsi :

$$\forall \varphi \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi} = 1 + s^2 \iff \forall \varphi \quad \frac{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\varphi}}{1+s^2} = 1.$$

On obtient donc comme solution $\operatorname{Arctan} s = \varphi - \varphi_0$.

Le problème est métrique. On ne nuit pas à la généralité en choisissant $\varphi_0 = 0$, puisque cela revient à faire une rotation d'axes.

On obtient donc $\forall \varphi \in \mathbb{R} \quad s = \tan(\varphi)$.

On sait que le vecteur de Frenet est :

$$\vec{T} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}s} = (\cos(\varphi), \sin(\varphi)).$$

On a ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \cos(\operatorname{Arctan} s), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \sin(\operatorname{Arctan} s).$$

Puisque $1 + \tan x^2 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{1+s^2}}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}.$$

On obtient alors :

$$x = \ln\left(s + \sqrt{1+s^2}\right) + x_0, \quad y = \sqrt{1+s^2} + y_0.$$

Quitte à changer d'origine, on obtient :

$$\begin{cases} x = \ln(s + \sqrt{1} + s^2) \\ y = \sqrt{1+s^2} \end{cases}$$

Puis on élimine s. On trouve la courbe d'équation $y = \operatorname{ch} x$ (chaînette) à une isométrie affine près.

5 Inégalité et équation différentielle

1 Posons $g(t) = f(t)e^{-kt}$. La fonction g définie sur I est dérivable. De plus :

$$\forall t \in I \qquad g'(t) = e^{-kt}\left[f'(t) - kf(t)\right].$$

D'après la condition $\forall t \in I \qquad f'(t) \leqslant kf(t)$:

$$\forall t \in I \qquad g'(t) \leqslant 0.$$

L'application g est décroissante sur I.

Si t_o est un élément de I, pour tout t de I tel que $t \geqslant t_o$: $g(t) \leqslant g(t_o)$.

Donc pour t dans I et $t \geqslant t_o$: $f(t) \leqslant f(t_o)e^{k(t-t_o)}$.

2 On pose $f(t) = x^2(t) + x'^2(t)$. L'application f est dérivable car x est de classe $\mathcal{C}^2$. On a donc :

$$\forall t \in I \qquad f'(t) = 2x'(t)\left[x(t) + x''(t)\right].$$

L'application x est solution de l'équation différentielle $x'' = -x + \lambda x'(1 - x^2)$:

$$\forall t \in I \qquad f'(t) = 2x'^2(t)\lambda\left[1 - x^2(t)\right].$$

Puisque λ est positif : $2x'^2(t)\lambda\left[1 - x^2(t)\right] \leqslant 2\lambda f(t)$.

Ainsi pour tout réel de I : $f'(t) \leqslant 2\lambda f(t)$.

En utilisant le résultat d la question **1)** :

$$\forall t_o \in I,\ \forall t \in I,\ \left[x^2(t) + x'^2(t)\right] \leqslant \left[x^2(t_o) + x'^2(t_o)\right]e^{\lambda(t-t_o)}.$$

La solution x est maximale, l'intervalle I est un intervalle ouvert .

Supposons que $I =]\alpha, \beta[$ avec $\beta \in \mathbb{R}$.

Sur l'intervalle $[t_o, \beta[$:

$$\forall t \in [t_o, \beta[\quad \left[x^2(t) + x'^2(t)\right] \leqslant \left[x^2(t_o) + x'^2(t_o)\right]e^{\lambda(\beta-t_o)}.$$

L'application x' est bornée sur $[t_o, \beta[$, d'où x est lipschitzienne sur cet intervalle :

$$\exists K > 0 \quad \forall (u, v) \in [t_o, \beta[\quad |x(u) - x(v)| \leqslant K|u - v|.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[t_o, \beta[$, de limite β.

On a donc :

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N} \quad |x(u_n) - x(u_p)| \leqslant K|u_n - u_p|.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il en est de même de la suite $(x(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

La suite $(x(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite L.

Ainsi, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $[t_o, \beta[$ de limite β, la suite $(x(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Montrer que la limite ne dépend pas de la suite choisie.

La fonction x est donc prolongeable par continuité en β. Ceci contredit le fait que la solution x était prise non prolongeable.

En conclusion, l'intervalle I est $]\alpha, +\infty[$.

6 Un changement de fonction inconnue

Posons $z = x + y$. Nous obtenons :

$$z' = 1 + y' = 1 + (x + y)^2 = 1 + z^2$$

qui est une équation à variables séparables.

La fonction :

$$\begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, z) \longrightarrow 1 + z^2 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Donc, pour tout couple (x_0, z_0) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il existe une solution unique de l'équation différentielle $z' = 1 + z^2$, telle que $z(x_0) = z_0$.

Posons $g(t) = \dfrac{1}{1 + t^2}$.

Alors :

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} 1 \, \mathrm{d}t = x - x_0,$$

$$G(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{1}{g(t)} \, \mathrm{d}t = \operatorname{Arctan} z - \operatorname{Arctan} z_0.$$

La solution de l'équation vérifie donc :

$$x - x_0 = \operatorname{Arctan} z(x) - \operatorname{Arctan} z_0.$$

L'application G est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $G(\mathbb{R})$.

Ainsi :

$$\forall x \qquad z(x) = G^{-1}(x) = \tan(x - x_0 + \operatorname{Arctan} z_0).$$

La solution maximale est définie sur un intervalle ouvert contenant x_0. Ici, on doit avoir : $-\dfrac{\pi}{2} + x_0 - \operatorname{Arctan} z_0 < x < \dfrac{\pi}{2} + x_0 - \operatorname{Arctan} z_0$.

La solution maximale est ainsi définie sur : $\left]-\dfrac{\pi}{2} + x_0 - \operatorname{Arctan} z_0, \dfrac{\pi}{2} + x_0 - \operatorname{Arctan} z_0\right[$, par :

$$z(x) = \tan(x - x_0 + \operatorname{Arctan} z_0).$$

Pour l'équation de départ, $y' = (x + y)^2$, le changement de fonction donne :

$$y(x) = z(x) - x = \tan(x - x_0 + \operatorname{Arctan} z_0) - x$$

l'unique solution telle que $y_0 = z_0 - x_0$.

7 Polynômes positifs

Le polynôme Q est solution de l'équation différentielle $y - y' = P(x)$.

L'équation différentielle $y - y' = P(x)$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre, sous forme résolue.

Ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont :

$$y = K\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x \int_0^x P(t)\mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Q est un polynôme. Cherchons les solutions polynomiales de cette équation.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(t) = P(t)\mathrm{e}^{-t}$.

Elle est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $g(t) =_{+\infty} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$.

L'expression $K - \displaystyle\int_0^x P(t)\mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$ a une limite finie λ lorsque x tend vers $+\infty$.

Pour que la fonction solution soit un polynôme, on doit avoir $\lambda = 0$. Donc :

$$K = \int_0^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Puisqu'il existe une solution polynomiale, cette solution s'obtient avec la valeur de K ainsi déterminée. D'où :

$$Q(x) = \mathrm{e}^x \left(\int_x^{+\infty} P(t)\mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t \right).$$

Nous pouvons en déduire que $Q(x)$ est positif pour tout x.

8 Du premier ordre, mais non linéaire

1 Les équations différentielles $(\boldsymbol{E}_1)$ et $(\boldsymbol{E}_2)$ sont linéaires, du premier ordre.

Elles sont sous forme résolue sur $\mathbb{R}^{-*}$ ou $\mathbb{R}^{+*}$.

Sur chacun de ces intervalles, l'ensemble des solutions a la structure d'espace affine de dimension 1, dont la direction est l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée.

Montrer que les solutions de l'équation différentielle $(\boldsymbol{E}_1)$ sont les fonctions de la forme :

$$y = Cx^2 - x.$$

De même, montrer que les solutions de l'équation différentielle $(\boldsymbol{E_2})$ sont les fonctions de la forme :

$$y = \frac{K}{x^2} + \frac{x}{3}.$$

Compléter la résolution en prouvant que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(\boldsymbol{E}_1)$ sont les fonctions de la forme :

$$\begin{cases} y = C_1x^2 - x \text{ si } x \leqslant 0 \\ y = C_2x^2 - x \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases},$$

avec C_1, C_2 quelconques.

2 **a)** Supposons qu'il existe une solution y de $(\boldsymbol{E})$ sur $\mathbb{R}$.

L'équation montre que $y(0) = 0$ et que :

$$\forall x > 0 \quad y'(x) > 0.$$

La fonction y doit être strictement croissante, donc positive, sur $\mathbb{R}^+$.

Il existe C tel que : $\forall x \geqslant 0 \quad y(x) = Cx^2 - x$.

C doit être strictement positif pour que y soit positive lorsque x tend vers $+\infty$.

Mais alors y est négatif entre 0 et $\dfrac{1}{C}$.

Cette contradiction permet d'affirmer qu'il n'existe pas de solution à **(*E*)** sur $\mathbb{R}$, ni même sur un intervalle contenant $\mathbb{R}^+$.

b) Pour faciliter l'étude demandée, écrivons les tableaux de variation sur $\mathbb{R}$ des différentes solutions ci-dessus.

$y = Cx^2 - x$

$C < 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2C}$		$\frac{1}{C}$		$+\infty$
y'			$-$		0		$+$		
y	$+\infty$	↘	0	↘		↗	0	↗	$+\infty$

$C > 0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{C}$		$\frac{1}{2C}$		0		$+\infty$
y'			$+$		0		$-$		
y	$-\infty$	↗	0	↗		↘	0	↘	$-\infty$

$C = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

$y = \dfrac{K}{x^2} - \dfrac{x}{3}$

$K > 0$

x	$-\infty$		$(-3K)^{\frac{1}{3}}$		0		$(6K)^{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
y'			$+$		‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	0	↗	‖ $+\infty$	↘	$+$	↗	$+\infty$

$K < 0$

x	$-\infty$		$(6K)^{\frac{1}{3}}$		0		$(-3K)^{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖		$+$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$-$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

$K = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Soit y une solution de **(*E*)** sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$\forall x > 0 \quad y'(x) > 0$.

La fonction y est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Nous venons d'établir qu'elle ne peut être positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Un coup d'œil perspicace sur les tableaux de variation des fonctions $(x \longmapsto \dfrac{K}{x^2} + \dfrac{x}{3})$ nous convaincra que la fonction y ne peut être négative sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Elle change donc de signe.

Or, elle est strictement croissante.

Elle est donc d'abord négative, puis positive.

Nous devons recoller une solution négative et une solution positive.

Il existe trois réels x_0, C, K tels que :

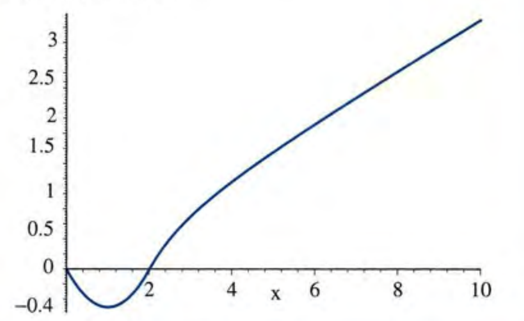
$$x_0 = \frac{1}{C} = (-3K)^{1/3} > 0.$$

Puis :

$$\begin{cases} y = \dfrac{K}{x^2} + \dfrac{x}{3} & \text{si} \quad 0 < x \leqslant x_0 \\ y = Cx^2 - x & \text{si} \quad x \geqslant x_0 \end{cases}.$$

Avec Maple

```
> with(plots) :
> L1 :=plot(.5*x^2-x,x=0..2) :
> L2 :=plot(-8/(3*x^2)+x/3,x=2..10) :
> display(L1,L2);
```



c) Soit y une solution de **(*E*)** sur $\mathbb{R}^{-*}$.

Si, pour tout $x < 0$, $y(x)$ est positive :

$\exists C \geqslant 0 \quad \forall x \leqslant 0 \quad y(x) = Cx^2 - x$.

Si, pour tout $x < 0$, $y(x)$ est négative :

$\exists K \geqslant 0 \quad \forall x \leqslant 0 \quad y(x) = \dfrac{K}{x^2} + \dfrac{x}{3}$.

Si y s'annule sur $\mathbb{R}^{-*}$ en a : $ay'(a) = a$.

Donc : $y'(a) = 1$.

Il existe un voisinage de a, $]a - \alpha, a + \alpha[$, avec $\alpha > 0$ sur lequel :

$\forall x \in]a-\alpha, a[\quad y(x) < 0$; $\quad \forall x \in]a, a+\alpha[\quad y(x) > 0$.

La fonction y ne s'annule alors qu'une seule fois sur $\mathbb{R}^{+*}$. Elle est d'abord négative, puis positive.

Il existe trois réels x_0, C, K tels que :

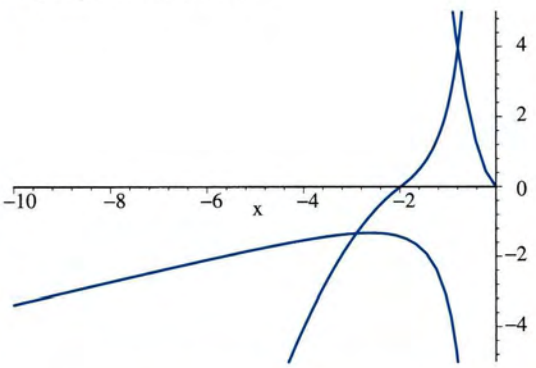
$$x_0 = \frac{1}{C} = (-3K)^{1/3} < 0.$$

Puis :

$$\begin{cases} y = \dfrac{K}{x^2} + \dfrac{x}{3} & \text{si} \quad x \leqslant x_0 \\ y = Cx^2 - x & \text{si} \quad x_0 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}.$$

Avec Maple

```
> restart :with(plots) :
> L1 :=plot(5*x^2-x,x=-10..0) :
> L2 :=plot(-3/(x^2)+x/3,x=-10..0,y=-5..5) :
> L3 :=plot(-.5*x^-x,x=-10..-2) :
> L4 :=plot(8/(3*x^2)+x/3,x=-2..0) :
> display(L1,L2,L3,L4) ;
```



d) Les solutions maximales de l'équation différentielle sont les solutions obtenues sur $\mathbb{R}^{+*}$, les solutions obtenues sur $\mathbb{R}^{-*}$, et les fonctions $y = -x$ sur $\mathbb{R}^+$, $y = \dfrac{x}{3}$ sur $\mathbb{R}^-$.

9 De l'une à l'autre

1 Nous reconnaissons une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants.

L'équation caractéristique est $r^2 + \left(\mu - \dfrac{1}{4}\right) = 0.$

Si $\mu < \dfrac{1}{4}$, on pose : $\mu = \dfrac{1}{4} - \omega^2$.

Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$y = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t},\ (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Si $\mu = \dfrac{1}{4}$, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$y = At + B,\ (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Si $\mu > \dfrac{1}{4}$, on pose : $\mu = \dfrac{1}{4} + \omega^2$.

Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$y = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t),\ (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

2 Nous reconnaissons une équation d'Euler.

Posons : $t = \mathrm{e}^x$ et $y(t) = y(\mathrm{e}^x) = z(x)$.

Alors : $z(x) = y(\mathrm{e}^x)$.

La fonction y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc la fonction z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Et :

$$ty'(t) = z'(x)\ ; \quad t^2y''(t) = -z'(x) + z''(x).$$

La fonction y est solution de l'équation différentielle si, et seulement si :

$$-z' + z'' + \mu z = 0.$$

Nous reconnaissons une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, dont l'équation caractéristique est :

$$r^2 - r + \mu = 0.$$

Si $\mu < \dfrac{1}{4}$, on pose $\dfrac{1}{4} - \mu = \omega^2$.

Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$z(x) = A\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}-\omega)x} + B\mathrm{e}^{(\frac{1}{2}+\omega)x}.$$

D'où : $y(t) = At^{(\frac{1}{2}-\omega)x} + Bt^{(\frac{1}{2}+\omega)x}$.

Si $\mu = \dfrac{1}{4}$, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$z(x) = A\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + Bx\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

D'où : $y(t) = A\sqrt{t} + B\sqrt{t}\ln t$.

Si $\mu > \dfrac{1}{4}$, on pose $\mu - \dfrac{1}{4} = \omega^2$.

Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$z(x) = A\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cos(\omega x) + B\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sin(\omega x).$$

D'où : $y(t) = A\sqrt{t}\cos(\omega\ln t) + B\sqrt{t}\sin(\omega\ln t)$.

3 Introduisons, comme l'indique l'énoncé, la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(s) = y(\mathrm{e}^s)\mathrm{e}^{-\frac{s}{2}}$.

Composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Et $y(t) = z(\ln(t))\sqrt{t}\ ;\ t > 1$.

$$y'(t) = z'(\ln(t))\frac{1}{\sqrt{t}} + z(\ln(t))\frac{1}{2\sqrt{t}}\ ;$$

$$y''(t) = z''(\ln(t))\frac{1}{t\sqrt{t}} - z(\ln(t))\frac{1}{4t^{\frac{3}{2}}}.$$

La fonction y est solution de l'équation différentielle si, et seulement si :

$$\forall s > 0 \quad z''(s) + \frac{\mu}{s^2}z(s) = 0.$$

Nous sommes, ô bonheur, surtout un jour d'épreuve, ramenés à la question précédente.

Si $\mu < \dfrac{1}{4}$, on pose $\dfrac{1}{4} - \mu = \omega^2$.

Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$y(t) = A\sqrt{t}(\ln t)^{\frac{1}{2}-\omega} + B\sqrt{t}(\ln t)^{\frac{1}{2}+\omega}.$$

Si $\mu = \dfrac{1}{4}$, les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$y(t) = A\sqrt{t\ln t} + B\sqrt{t\ln t}\,\ln(\ln t).$$

Si $\mu > \dfrac{1}{4}$, on pose $\mu - \dfrac{1}{4} = \omega^2$.

Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme :

$$y(t) = A\sqrt{t\ln t}\cos(\omega\ln(\ln t)) + B\sqrt{t\ln t}\sin(\omega\ln(\ln t)).$$

4 ▬ Il suffit de prouver les résultats demandés dans le cas 1.

En effet, dans le cas 1), la bijection définie par $t = \mathrm{e}^x$ envoie les zéros de z sur ceux de y.

Il en est de même dans le cas 3).

a) Si $\mu \leqslant \dfrac{1}{4}$, le résultat est vérifié.

b) Supposons $\mu > \dfrac{1}{4}$. Soit y une solution non nulle.

$$\begin{aligned} y(t) &= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\omega t) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\omega t)\right)\\ &= \sqrt{A^2+B^2}\,(\sin(\varphi)\cos(\omega t) + \cos(\varphi)\sin(\omega t))\\ &= \sqrt{A^2+B^2}(\sin(\omega t+\varphi)) \end{aligned}$$

en posant $\sin(\varphi) = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$; $\cos(\varphi) = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Alors $y(t) = 0 \iff \theta t + \varphi = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

La solution y admet une suite de zéros qui tend vers $+\infty$.

5 ▬ Nous sommes renvoyés à la question **2)**, avec $\mu = \dfrac{1}{2}$ et $\omega = \dfrac{1}{2}$.

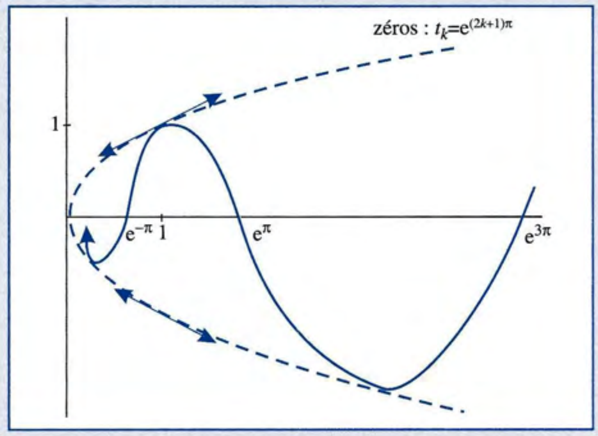
D'où $z(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\left(A\cos\dfrac{x}{2} + B\sin\dfrac{x}{2}\right)$; $z(0)=1$; $z'(0) = \dfrac{1}{2}$.

Effectuons un développement limité en 0 à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} z(x) &= \left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right)\left(A + B\frac{x}{2} + o(x)\right)\\ &= A + \frac{A+B}{2}x + o(x). \end{aligned}$$

Soit $A = 1$ et $B = 0$. Finalement :

$$y(t) = \sqrt{t}\cos(\ln\sqrt{t}).$$



10 Une équation fonctionnelle

Soit f une solution du problème posé.

Nous remarquons que $f(0) = 1$.

Posons $v = x - t$. L'expression devient :

$$f(x) = 1 - 2x\int_0^x f(v)\,\mathrm{d}v + \int_0^x vf(v)\,\mathrm{d}v.$$

Nous en déduisons que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, puis, par récurrence $\mathcal{C}^\infty$, sur $\mathbb{R}$.

Dérivons alors cette expression :

$$f'(x) = -2\int_0^x f(v)\,\mathrm{d}v - xf(x).$$

Notons F la fonction $(x \longmapsto \int_0^x f(v)\,\mathrm{d}v)$.

La fonction F est solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'' + xy' + 2y = 0\\ F'(0) = 1\\ F(0) = 0 \end{cases}.$$

L'équation différentielle $y'' + xy' + 2y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre homogène, sous forme résolue. Le problème de Cauchy défini ci-dessus admet une solution unique.

Cherchons cette solution sous la forme de la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$, de rayon de convergence R strictement positif.

Sur $]-R, R[$, la fonction somme y de la série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

La fonction y est solution de l'équation si, et seulement si :

$\forall x \in]-R, R[$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

L'unicité du développement en série entière permet d'identifier les coefficients. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} a_2 &= -a_0 \\ 2a_3 &= -a_1 \\ \forall n \geqslant 2 \ (n-1)a_n &= -a_{n-2}. \end{aligned}$$

Vérifier, par récurrence, que :

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{1.3..(2n-1)} a_0 \quad \text{et} \quad a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{2.4..(2n)} a_1.$$

Les conditions initiales imposent :

$$F(0) = 0 = a_0\,; \quad F'(0) = 1 = a_1.$$

La série entière obtenue est la série entière $\sum \frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n+1}$.

Écrivons $\frac{(-1)^n}{2^n n!} x^{2n+1} = x \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!}$.

Nous reconnaissons le développement en série entière de la fonction $\left(x \longmapsto x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\right)$.

Le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$.

Donc : $F(x) = x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, puis :

$$f(x) = F'(x) = (1-x^2)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Vérifions que la fonction f obtenue convient.

Puisque F est LA solution du problème de Cauchy énoncé ci-dessus, il vient :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\int_0^x f(v)\,\mathrm{d}v - 2xf(x) + xf(x) \\ &= -2\int_0^x f(v)\,\mathrm{d}v - xf(x). \end{aligned}$$

Il existe donc une constante K telle que :

$$f(x) = -2x\int_0^x f(v)\,\mathrm{d}v + \int_0^x vf(v)\,\mathrm{d}v + K.$$

Or, $f(0) = 0$, ce qui donne $K = 1$.

Posons $v = x - t$ dans les deux intégrales, nous retrouvons la condition imposée pour f .

11 Deux équations d'Euler

1 Les équations différentielles (H) et (D) sont des équations différentielles linéaires du second ordre.

L'équation (H) est l'équation homogène associée à (D).

La fonction définie par $y = x^r$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Elle est solution de (D) si, et seulement si :

$$r^2 + r - 2 = 0.$$

On obtient $r_1 = -2 < r_2 = 1$.

2 Montrons d'abord que les intégrales qui définissent g ont un sens.

La fonction f est continue et bornée sur $\mathbb{R}^{+*}$, elle est donc intégrable sur tout intervalle $]0, a]$, avec $a > 0$.

Notons M un majorant sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $|f|$. Alors :

$$\left|\frac{f(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{M}{t^2}.$$

La fonction $\left(t \to \frac{1}{t^2}\right)$ est intégrable sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

Donc, la fonction $\left(t \to \frac{f(t)}{t^2}\right)$ est aussi intégrable sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

Écrivons g sous la forme :

$$\begin{aligned} g(x) = &-\frac{1}{3x^2}\left(\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x tf(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &- x\left(\int_x^1 \frac{1}{3t^2} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1}{3t^2} f(t)\,\mathrm{d}t\right). \end{aligned}$$

Les fonctions $(t \to tf(t))$ et $\left(t \to \frac{f(t)}{t^2}\right)$ sont continues sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.

Donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Et :

$$g'(x) = \frac{2}{3x^3}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 \frac{f(t)}{3t^2}\,\mathrm{d}t - \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{3t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Cette fonction g' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Et :

$$g''(x) = -\frac{2}{x^4}\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t + \frac{f(x)}{x^2}.$$

Un calcul simple vous convaincra que g est solution de l'équation différentielle (D) sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3 La linéarité de l'intégrale entraîne celle de T.

De plus, pour tout f dans E, la fonction g est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$et :

$$\forall x > 0 \quad |g(x)| \leqslant M\frac{x^2}{3x^2} + \frac{Mx}{3}\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \leqslant M.$$

La fonction g est dans E.

Mais l'application g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

L'endomorphisme T n'est pas surjectif.

4 D'après le calcul de la question précédente, la constante $C = 1$ convient.

5 Nous étudions d'abord $F(x) = \int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t$.

Prolongeons f par continuité en 0 en posant $f(0) = \lambda$. La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et :

$$F'(x) = xf(x) \quad \text{et} \quad F'(0) = 0.$$

De plus $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{F'(x) - F'(0)}{x} = \lambda.$

La dérivabilité de F' en 0 se traduit par le développement limité :

$$F'(x) =_0 \lambda x + o(x).$$

F admet donc en 0 le développement limité obtenu en intégrant :

$$F(x) =_0 \lambda \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Nous en déduisons $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \displaystyle\int_0^x -\frac{t}{3x^2} f(t)\,\mathrm{d}\,t = -\frac{\lambda}{6}.$

En ce qui concerne l'autre intégrale, écrivons :

$$\int_x^{+\infty} -\frac{x}{3t^2} f(t)\,\mathrm{d}\,t = -\frac{x}{3}\left(\int_x^{+\infty}\left(\frac{f(t)-\lambda}{t^2} + \frac{\lambda}{t^2}\right)\mathrm{d}\,t\right).$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout t dans $[0, \alpha[$, on a : $|f(t) - \lambda| < \varepsilon$.

Alors, pour tout $x < \alpha$:

$$\int_x^{+\infty} -\frac{x}{3t^2} f(t)\,\mathrm{d}\,t = -\frac{x}{3}\left(\int_x^{\alpha}\left(\frac{f(t)-\lambda}{t^2} + \frac{\lambda}{t^2}\right)\mathrm{d}\,t \right.$$
$$\left. + \int_\alpha^{+\infty}\left(\frac{f(t)-\lambda}{t^2} + \frac{\lambda}{t^2}\right)\right)\mathrm{d}\,t.$$

La limite de $-\dfrac{x}{3}\left(\displaystyle\int_\alpha^{+\infty}\left(\frac{f(t)-\lambda}{t^2} + \frac{\lambda}{t^2}\right)\mathrm{d}\,t\right)$ lorsque x tend vers 0 est 0. De plus :

$$-\frac{x}{3}\left(\int_x^{\alpha} \frac{\lambda}{t^2}\,\mathrm{d}\,t\right) = \frac{x\lambda}{3}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x}\right).$$

Sa limite lorsque x tend vers 0 est $-\dfrac{\lambda}{3}$.

Et enfin :

$$\left|-\frac{x}{3}\left(\int_x^{\alpha} \frac{f(t)-\lambda}{t^2}\,\mathrm{d}\,t\right)\right| \leqslant \frac{\varepsilon x}{3}\left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{x}\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

En définitive :

$$\mu = -\frac{\lambda}{6} - \frac{\lambda}{3} = -\frac{\lambda}{2}.$$

12 Comportement en l'infini des solutions d'une équation différentielle

1 ▬ L'équation (E_α) est une équation différentielle linéaire du premier ordre sous forme résolue.

L'ensemble de ses solutions est un sous-espace affine de dimension 1 de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$.

Montrer que l'ensemble de ses solutions est :

$$\left\{\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{-\alpha x}\left(\int_0^x g(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}\,t + C\right)\right)\ ;\quad C \in \mathbb{R}\right\}.$$

2 ▬ Il suffit d'établir que la fonction :

$\left(x \longmapsto \mathrm{e}^{-\alpha x}\displaystyle\int_0^x g(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}\,t\right)$ tend vers O lorsque x tend vers $+\infty$.

Utilisons l'hypothèse sur la limite en $+\infty$ de g et fixons $\varepsilon > 0$.

$\exists A > 0 \quad \forall x > A \quad |g(x)| \leqslant \varepsilon.$

Supposons $x > A$.

$$\left|\mathrm{e}^{-\alpha x}\int_0^x g(t)\mathrm{e}^{\alpha t}\,\mathrm{d}\,t\right| \leqslant \int_0^A |g(t)|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\,(\alpha)(x-t)}\,\mathrm{d}\,t$$
$$+ \int_A^x |g(t)|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\,(\alpha)(x-t)}\,\mathrm{d}\,t.$$

Or :

$$\int_A^x |g(t)|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\,(\alpha)(x-t)}\,\mathrm{d}\,t \leqslant \varepsilon\int_A^x \mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\,(\alpha)(x-t)}\,\mathrm{d}\,t \leqslant \varepsilon\frac{1}{\mathrm{Re}\,(\alpha)}.$$

Montrons que $\displaystyle\int_0^A |g(t)|\,\mathrm{e}^{-\alpha(x-t)}\,\mathrm{d}\,t$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^+$ et tend vers 0 en $+\infty$. Nous pouvons en déduire qu'elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$. En effet :

$$\exists B > 0 \quad \forall x > B \quad |g(x)| < 1.$$

De plus, sur le compact $[0, B]$, la fonction continue g est bornée.

Soit M un majorant de $|g|$ sur $\mathbb{R}^+$.

$$\int_0^A |g(t)|\,\mathrm{e}^{-\alpha(x-t)}\,\mathrm{d}\,t \leqslant M\int_0^A \mathrm{e}^{-\alpha(x-t)}\,\mathrm{d}\,t$$
$$\leqslant M\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}\,(\alpha)(x-A)}}{\mathrm{Re}\,(\alpha)}.$$

Le majorant obtenu tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. D'où le résultat.

3 ▬ La fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + \alpha y = f'(x) + \alpha f(x)$.

En posant $g = f' + \alpha f$, nous constatons que les hypothèses de la question **1)** sont vérifiées.

D'où : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$.

4 ▬ **a)** Soit h une solution de $S_{\alpha,\beta}$.

Nous savons que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad h''(x) + \alpha h'(x) + \beta h(x) = g(x).$$

Soit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad (h'(x) - r_2 h(x))' - r_1(h'(x) - r_2 h(x)) = g(x).$$

La question **2)** permet alors d'affirmer que :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \left(h'(x) - r_2 h(x)\right) = 0.$$

b) Puisque $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \left(h'(x) - r_2 h(x)\right) = 0$ et Re $(r_2) < 0$, la question **3)** permet de conclure que :

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} (h(x)) = 0.$$

5 ▬ Utiliser pour cette question une démarche analogue à celle de la question **3)**.

13 Nombre de zéros d'une équation différentielle

1 ▬ **a)** Si $f(c) = 0$, alors $u(c) = u'(c) = 0$.

Le *théorème de Cauchy-Lipschitz* s'applique car la fonction $((t, y) \mapsto -q(t)y)$ est continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}$. u est la solution nulle, ce qui est exclu par l'énoncé.

b) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et ne s'annule pas sur I.

Considérons la fonction $v = \dfrac{f}{|f|}$. Elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, à valeurs dans l'ensemble U des complexes de module 1. Il existe une fonction θ, de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que $\dfrac{f}{|f|} = \mathrm{e}^{\theta}$.

Nous savons aussi que θ est défini à $2k\pi$ près.

Si $\theta(0)$ est dans $[2k\pi, \pi + 2k\pi[$, avec k dans $\mathbb{Z}$, nous prendrons : $\theta_1 = \theta - 2k\pi$ et $g = |f|$.

Si $\theta(0)$ est dans $[\pi + 2k\pi, 2(k+1)\pi[$, avec k dans $\mathbb{Z}$, nous prendrons : $\theta_1 = \theta - (2k+1)\pi$ et $g = -|f|$.

Puisque f ne s'annule pas et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, il en est de même de g.

Et θ_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I comme θ.

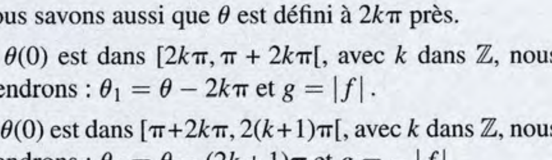
c) La solution u de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ vérifiant les deux conditions imposées est la fonction $u(t) = \sin(\omega t)$.

Nous en déduisons :

$$f(t) = \omega\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t).$$

Avec Maple

```
> plot({[(3*Pi/2)*cos(3*Pi*t/2),sin(3*Pi*t/2),
t=0..1],[cos(3*Pi*t/2),sin(3*Pi*t/2),t=0..1]},
scaling=constrained);
```



Le point de coordonnées $x = \omega\cos(\omega t), y = \sin(\omega t)$ décrit un arc d'ellipse et nous devons trouver une détermination de classe $\mathcal{C}^1$ de l'angle $(\widehat{Ox, OM}(t))$.

Lorsque x n'est pas nul : $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{\omega}\tan(\omega t)$.

Pour t dans $[0, \dfrac{\pi}{2\omega}[$, le choix de $\theta(t) = \text{Arctan}\,(\dfrac{1}{\omega}\tan(\omega t))$ s'impose.

Il entraîne, pour la continuité de θ : $\theta\left(\dfrac{\pi}{2\omega}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. En ce point, la courbe traverse l'axe $(y'y)$. Puis :

$\theta(t) = \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{\omega}\tan(\omega t)\right) + \pi$, pour t dans $\left]\dfrac{\pi}{2\omega}, \dfrac{3\pi}{2\omega}\right[$.

Pour tout k dans $[1, p-1]$, et t dans : $\left]\left(k - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{\omega}, \left(k + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{\omega}\right[$:

$$\theta(t) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{\omega}\tan(\omega t)\right) + k\pi.$$

La courbe traverse l'axe $(y'y)$ en les points $t_k = \left(k - \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\pi}{\omega}$, avec k dans $[\![1, p]\!]$ et en ces points :

$$\theta(t_k) = \frac{\pi}{2} + (k-1)\pi.$$

Elle traverse l'axe $(x'x)$ lorsque u s'annule, en les points $s_j = j\dfrac{\pi}{\omega}$.

En ces points $\theta(s_j) = j\pi$.

d) Dérivons les relations :

$u'(t) = g(t)\cos(\theta(t))$; $u(t) = g(t)\sin(\theta(t))$.

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} u''(t) &= g'(t)\cos(\theta(t)) - g(t)\theta'(t)\sin(\theta(t)) \\ &= -q(t)u(t) = -q(t)g(t)\sin(\theta(t)); \\ u'(t) &= g'(t)\sin(\theta(t)) + g(t)\theta'(t)\cos(\theta(t)) \\ &= g(t)\cos(\theta(t)). \end{aligned}$$

Puis le système :

$$\begin{cases} g'(t)\cos(\theta(t)) - \theta'(t)g(t)\sin(\theta(t)) = -q(t)u(t) \\ \qquad\qquad = -q(t)g(t)\sin(\theta(t)). \\ g'(t)\sin(\theta(t)) + \theta'(t)g(t)\cos(\theta(t)) = g(t)\cos(\theta(t)) \end{cases}$$

La fonction g ne s'annule pas. La résolution de ce système donne :

$\theta'(t) = \cos^2(\theta(t)) + q(t)\sin^2(\theta(t))$;

$g'(t) = (1 - q(t))g(t)\sin(\theta(t))\cos(\theta(t))$.

2 ▬ **a)** Puisque t_k est un zéro de u et que g ne s'annule pas :

$u(t_k) = g(t_k)\sin(\theta(t_k)) = 0 \implies \theta(t_k) \in \pi\mathbb{Z}$.

D'où : $\quad \theta'(t_k) = \cos^2(\theta(t_k)) + q(t_k)\sin^2(\theta(t_k)) = 1$.

b) La fonction u ne s'annule pas sur $]0, t_1[$, donc θ ne s'annule pas sur $]0, t_1[$.

Le *théorème des valeurs intermédiaires* permer d'affirmer que θ est de signe constant sur $]0, t_1[$.

Si $\theta(0) > 0$, alors θ est strictement positive sur $]0, t_1[$.

Regardons le cas où $\theta(0) = 0$.

$\theta'(0) = 1$, d'où : $\theta(t) \sim_0 t$.

La fonction θ est strictement positive sur un intervalle $]0, \alpha[$, $\alpha > 0$, donc sur $]0, t_1[$.

Or $\theta(0)$ est dans $[0, \pi[$ et θ ne peut prendre la valeur π sur $]0, t_1[$.

Nous en déduisons que, pour tout t dans $]0, t_1[$, $\theta(t)$ appartient à $]0, \pi[$.

Par continuité, $\theta(t_1)$ ne peut prendre que les valeurs 0 ou π.

Si $\theta(t_1) = 0$, alors $\theta(t) \sim_{t_1} (t - t_1)$.

La fonction θ prend alors des valeurs négatives sur $]0, t_1[$. C'est impossible. Donc $\theta(t_1) = \pi$.

c) La fonction ψ_k définie par l'énoncé possède sur $[t_k, t_{k+1}]$ les propriétés dont nous avons eu besoin pour la fonction θ dans la question précédente. Elle est continue sur $[t_k, t_{k+1}]$; s'annule en t_k, est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $\theta'(t)$. Le même raisonnement permet d'affirmer que, pour tout t de J_k, $\psi_k(t)$ appartient à $]0, \pi[$, puis $\psi_k(t_{k+1}) = \pi$.

Soit $\theta(t_{k+1}) = \theta(t_k) + \pi$.

Par récurrence $\theta(t_k) = k\pi$.

d) Si $t_n = T$, alors : $\theta(t_n) = n\pi$.

Si $t_n < T$, le raisonnement des questions **2)b)** et **2)c)** permet de montrer que $\theta(T) \in]0, \pi[$.

Donc $n\pi \leqslant \theta(T) < (n+1)\pi$.

3 ▬ a) Nous savons que :

$$\theta'(t) = \cos^2(\theta(t)) + q(t)\sin^2(\theta(t)).$$

Par conséquent :

$$\theta(T) - T = \int_0^T (\theta'(t) - 1)\,\mathrm{d}t = \int_0^T (q(t) - 1)\sin^2(\theta(t))\,\mathrm{d}t.$$

Nous en déduisons :

$$|n\pi - T| \leqslant |n\pi - \theta(T)| + |\theta(T) - T|$$
$$\leqslant \pi + \left| \int_0^T (q(t) - 1)\sin^2(\theta(t))\,\mathrm{d}t \right|.$$

D'où : $\quad |n\pi - T| \leqslant \pi + \displaystyle\int_0^T |q(t) - 1|\,\mathrm{d}t.$

b) Dans ce cas :

$$1 - q(t) = \frac{1}{1 + \sqrt{t}} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

La fonction $\left(t \to \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Plus précisément, pour $T > 1$:

$$\int_0^T \frac{1}{1 + \sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t - \int_0^T \frac{1}{\sqrt{t}(1 + \sqrt{t})}\,\mathrm{d}t.$$

Or :

$$0 \leqslant \int_0^T \frac{1}{\sqrt{t}(1 + \sqrt{t})}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} + \int_1^T \frac{\mathrm{d}t}{t} = 2 + \ln(T).$$

D'où $\displaystyle\int_0^T \frac{1}{1 + \sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \sim_{+\infty} 2\sqrt{T}$.

Puis $n\pi - T =_{+\infty} o(T)$.

Finalement $n \sim \dfrac{T}{\pi}$.

14 Équation autonome

1 ▬ On suppose que φ' s'annule en t_1.

On pose $x_1 = \varphi(t_1)$.

Soit ψ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \psi(t) = x_1.$$

L'application ψ est solution de l'équation différentielle car $f(x_1) = 0$. Mais $\psi(t_1) = x_1$. ψ est donc une solution maximale de $x' = f(x)$ telle que $\psi(t_1) = x_1$. Le *théorème de Cauchy-Lipschitz* permet de conclure que : $\varphi = \psi$.

2 ▬ Les applications continues injectives de I dans $\mathbb{R}$ sont les applications continues strictement monotones.

Si φ n'est pas injective , il existe a et b deux éléments de I ($a < b$) tels que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Le *théorème de Rolle* donne l'existence d'un réel c de $]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. L'application φ est donc constante.

3 ▬ Si φ n'est pas constante et non injective on a :

(i) $\quad \forall t \in I \ \ \varphi'(t) \neq 0$,

(ii) $\quad \exists (a, b) \in I^2 \quad a < b \quad$ et $\quad \varphi(a) = \varphi(b)$.

Cette situation ne peut se produire dans le cas $E = \mathbb{R}$. En effet, $\varphi(a) = \varphi(b)$ entraîne, d'après le théorème de Rolle, l'existence d'un point c entre a et b tel que $\varphi'(c) = 0$.

On a $\varphi'(a) = f(\varphi(a)) = f(\varphi(b)) = \varphi'(b)$.

Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(t) = \varphi(t)$ pour t situé entre a et b, et périodique de période $T = b - a$.

La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation $x' = f(x)$. D'après l'unicité de la solution maximale, φ est définie sur $\mathbb{R}$ et $\varphi = \psi$.

La solution φ est définie sur $\mathbb{R}$ et périodique.

4 ▬ On considère l'équation différentielle

$$x' = x\sin^2(x). \qquad \textbf{\textit{(E)}}$$

L'application $((t, x) \longrightarrow x\sin^2(x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Les solutions de cette équation sont donc soit constantes, soit strictement monotones.

Les solutions constantes $x = C$ sont telles que $0 = C\sin^2(C)n$. Ainsi on a :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad C = k\pi.$$

Les solutions constantes sont donc de la forme $x = k\pi$, k élément de $\mathbb{Z}$.

Soit g est une solution maximale, non constante de l'équation, définie sur un intervalle I contenant t_0.

D'après le *théorème de Cauchy-Lipschitz*, l'application g ne peut pas prendre de valeur de la forme $k\pi$.

On pose $g(t_0) = x_0$, $x_0 \notin \{k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Soit p l'entier relatif tel que $p\pi < x_0 < (p+1)\pi$, on a :

$$\forall t \in I \qquad p\pi < g(t) < (p+1)\pi.$$

La solution g est bornée.

Le signe de $g'(t)$ est celui de $g(t)$. On a donc :

$$x_0 \notin \{k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\},\quad x_0 > 0 \implies \forall t \in I \quad g'(t) > 0$$
$$x_0 \notin \{k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\},\quad x_0 < 0 \implies \forall t \in I \quad g'(t) < 0$$

La solution g est bornée et strictement monotone. La fonction g a donc une limite finie aux bornes de l'intervalle I. On sait que dans ce cas, l'intervalle est $\mathbb{R}$.

15 Une équation à variables séparables

1 ▬ L'application $y \longmapsto y^\alpha + 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'équation **(1)** est autonome. Le *théorème de Cauchy-Lipschitz* assure que, pour tout t_0 de $\mathbb{R}$ et y_0 de $\mathbb{R}_+^*$, il existe une unique solution maximale y telle que $y(t_0) = y_0$.

Pour certaines valeurs de α l'application est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$, ou $\mathbb{R}$.

Il s'agit d'une équation à variables séparables.

On obtient $G(y) = t - C$.

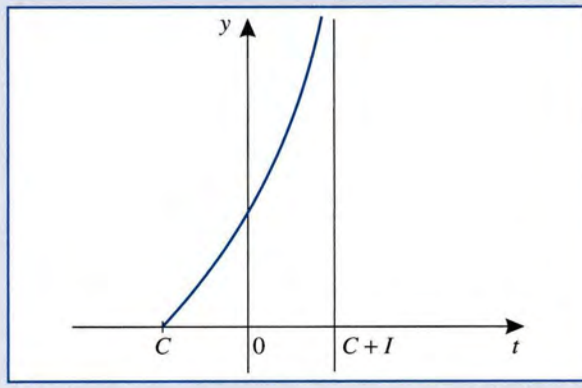
2 ▬ L'application G est continue strictement croissante sur $[0,+\infty[$ à valeur dans $[0, \lim_{,y\to+\infty} \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha+1}[$.

Pour $\alpha > 1$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha+1}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc $\lim_{,y\to+\infty} \displaystyle\int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha+1} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha+1} = I$.

L'application G est bijective de $[\ 0,+\infty[$ sur $[0,\ I[$. La bijection réciproque G^{-1} est continue, strictement croissante de $[0,\ I[$ sur $[0,+\infty[$.

De plus G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée : $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha+1}$ ne s'annule pas. Donc G^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $u \longmapsto G^{-1}(u)^\alpha + 1$

La solution générale est $t \longmapsto G^{-1}(t - C)$ définie sur $]C,\ I + C[$.

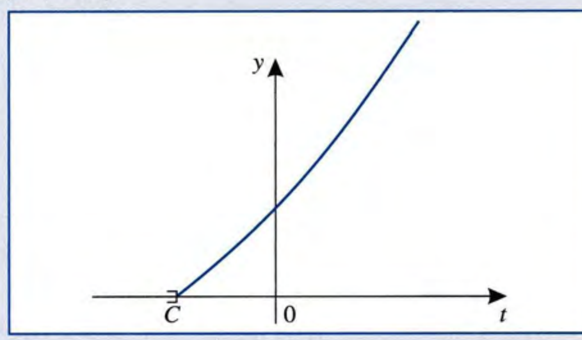


Pour $0 < \alpha \leqslant 1$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha+1}$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$. Donc $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \int_0^y \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha+1} = +\infty$.

L'application G est bijective de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$. La bijection réciproque G^{-1} est continue, strictement croissante de $[0,\ +\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

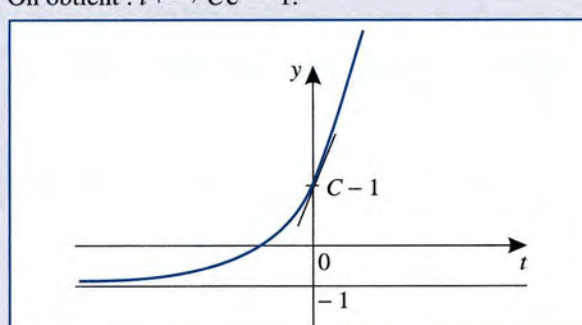
De plus, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et sa dérivée : $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha+1}$ ne s'annule pas. Donc G^{-1} est également de classe $\mathcal{C}^1$.

La solution générale est $t \longmapsto G^{-1}(t - C)$ définie sur $]C\ ,\ +\infty[$.



3 ▬ Pour $\alpha = 1$, l'application $y \longmapsto y + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ et l'équation **(1)** est linéaire.

On obtient : $t \longmapsto Ce^t - 1$.

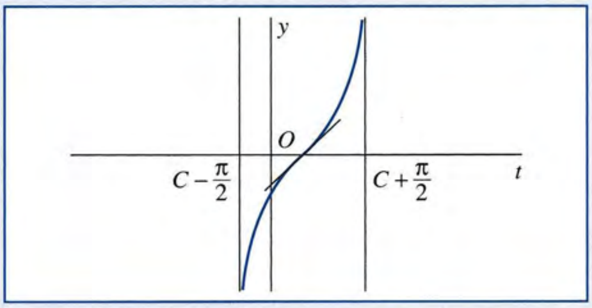


Pour $\alpha = 2$, l'application $y \longmapsto y^2 + 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

On obtient $G(y) = \text{Arctan } y$.

Les solutions générales vérifient : $\text{Arctan } y = t - C$ pour $t \in]C - \frac{\pi}{2},\ C + \frac{\pi}{2}[$.

Puis : $y = \tan(t - C)$ pour t dans $]C - \frac{\pi}{2},\ C + \frac{\pi}{2}[$.



16 Propriétés des solutions d'une équation autonome du premier ordre

1 ▬ On suppose qu'il existe t_1 dans I tel que $\varphi'(t_1) = 0$.

Comme φ est une I-solution, on en déduit que $\varphi(t_1)$ est dans V. La solution ψ constante définie sur I par $t \longmapsto \varphi(t_1)$ est une solution sur I. D'après le *théorème de Cauchy-Lipschitz*, la solution prenant la valeur $\varphi(t_1)$ en t_1 est unique. Donc $\varphi = \psi$.

2 ▬ Lorsque φ est injective sur I, comme elle est également continue on en déduit qu'elle est strictement monotone.

Lorsque φ n'est pas injective, comme elle est $\mathcal{C}^1$ sur I on peut appliquer le *théorème de Rolle*. Il existe alors un point de I où φ' s'annule. D'après la question **1**), la fonction φ est constante.

3 ▬ D'après la question **2**), la condition $E \neq \mathbb{R}$ est indispensable.

Supposons qu'il existe t_1 et t_2 dans I avec $t_2 > t_1$ tels que $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$. On introduit la fonction ψ de période $t_2 - t_1$ égale à φ sur $[t_1,\ t_2]$.

L'application ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $[t_1,\ t_2]$ et :

$$\psi'_d(t_1) = \varphi'(t_1) = f(\varphi(t_1)) = f(\varphi(t_2)) = \varphi'(t_2) = \psi'_g(t_2).$$

On en déduit que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et est une $\mathbb{R}$-solution.

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, les solutions φ et ψ coïncident.

La solution φ est donc définie sur $\mathbb{R}$ et périodique ou constante.

4 ▬ D'après la question **2**), les solutions sont constantes ou strictement monotones.

Les solutions constantes sont les fonctions $t \longmapsto k\pi$ où k décrit $\mathbb{Z}$.

Les courbes intégrales ne se coupent pas. Par conséquent, elles ne rencontrent pas les droites $y = k\pi$.

Étudions les solutions φ telles que :

$$\forall t \in I \quad k\pi < \varphi(t) < (k+1)\pi.$$

Dans ce cas, la fonction $\sin^2 y$ ne s'annule pas.

On obtient l'équation à variables séparables :

$$\frac{y'}{\sin^2 y} = 1.$$

On intègre de chaque côté.

Il existe une constante C dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\text{cotan } y = C - t.$$

Ceci s'écrit : $\tan\left(y - \frac{\pi}{2} - k\pi\right) = t - C$.

L'application tan est bijective de $]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit : $y = \text{Arctan }(t - C) + \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Les solutions sont les applications définies sur $\mathbb{R}$ par $t \longmapsto y = \text{Arctan }(t - C) + \frac{\pi}{2} + k\pi$. Où C décrit $\mathbb{R}$ et k décrit $\mathbb{Z}$ ou bien les applications constantes $t \longmapsto k\pi$.

17 Étude en coordonnées polaires de lignes de champ

1 ▬ La fonction φ est la partie imaginaire de la fonction $\psi : t \longmapsto \exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi - 1}{t}\right)$. Elle est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout t de $\mathbb{R}_+^*$ et tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\psi^{(n)}(t) = \left(\frac{i\pi - 1}{t}\right)^n \exp\left(\frac{i\pi - 1}{t}\right)$$

et $$|\psi^{(n)}(t)| = |\pi^2 + 1|^n t^{-1} \exp\left(\frac{-1}{t}\right).$$

On vérifie que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\lim_{t \to 0} \psi^{(n)}(t) = 0$.

On en déduit que ψ et φ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout n de $\mathbb{N}$ $\varphi^{(n)}(0) = 0$.

D'autre part, la fonction $(x,\ y) \longmapsto x^2 + y^2$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que $\overrightarrow{V}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2 ▬ L'application $(r,\ \theta)$ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^* \times]-\pi,\ \pi[$ dans le domaine :

$U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,\ 0)\ ;\ x \leqslant 0\}$.

On rappelle que :

$$r\,\mathrm{d}r = x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y \quad \text{et} \quad r\,\mathrm{d}\theta = -\sin\theta\,\mathrm{d}x + \cos\theta\,\mathrm{d}y.$$

On obtient :

$$\mathrm{d}r = r\sin\left(\frac{\pi}{r}\right)\exp\left(-\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}t.$$

Le système différentiel $\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{V}(M)$ se ramène à l'équation $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r\sin\left(\dfrac{\pi}{r}\right)\exp\left(-\dfrac{1}{r}\right)$.

Notons f l'application $r \longmapsto r\sin\left(\dfrac{\pi}{r}\right)\exp\left(-\dfrac{1}{r}\right)$.

Cherchons les solutions constantes. On trouve le point $(0,\ 0)$ ainsi que les cercles de centre O et de rayon r tel que $r\sin\left(\dfrac{\pi}{r}\right)\exp\left(-\dfrac{1}{r}\right) = 0$.

Les solutions non nulles de cette équation sont $R_k = \dfrac{1}{k}$ où k appartient à $\mathbb{N}^*$.

Il y a une infinité de cercles concentriques C_k de rayon R_k décroissant vers 0 de centre O qui sont des lignes de champ.

3 L'équation $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r\sin\left(\dfrac{\pi}{r}\right)\exp\left(-\dfrac{1}{r}\right)$ est à variable séparable et autonome.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Le *théorème de Cauchy-Lipschitz* assure que par tout point $(r_0,\ \theta_0)$ de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ il passe une ligne de champ et une seule. On en déduit que les lignes de champ ne se coupent pas. Si $R_{k+1} < r_0 < R_k$, la ligne de champ passant par ce point reste entre C_k et C_{k+1}. La fonction $f \circ r$ ne s'annule pas. On peut diviser l'équation différentielle par $f(r)$.

On obtient $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{r}}}{r\sin\dfrac{\pi}{r}}\mathrm{d}r = \mathrm{d}\theta$.

On obtient $\theta(R) = \theta_0 + \displaystyle\int_{r_0}^{R}\frac{\mathrm{d}r}{f(r)}$.

La fonction $r \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{r}}}{r\sin\dfrac{\pi}{r}}$ est continue sur $]\dfrac{1}{k+1},\ \dfrac{1}{k}[$ car $\sin\left(\dfrac{\pi}{r}\right)$ ne s'annule pas sur cet intervalle. Elle garde un signe constant.

$$\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{r}}}{r\sin\dfrac{\pi}{r}} = (-1)^k\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{r}}}{r\sin(\dfrac{\pi}{r} - k\pi)} = (-1)^k\,(k+u)\frac{\mathrm{e}^{k+u}}{\sin\pi u}$$

en posant $r = \dfrac{1}{k+u}$.

On en déduit $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{r}}}{r\sin\dfrac{\pi}{r}} \sim (-1)^k k\mathrm{e}^k\dfrac{1}{\pi(\dfrac{1}{r} - k)}$ lorsque r tend vers $\dfrac{1}{k}$.

La fonction n'est pas intégrable sur $[r_0,\ \dfrac{1}{k}[$. On en déduit $\displaystyle\lim_{R\to\frac{1}{k}}\int_{r_0}^{R}\frac{\mathrm{d}r}{f(r)} = +\infty$ si k est pair et $-\infty$ si k est impair.

Ceci prouve que $\displaystyle\lim_{R\to\frac{1}{k}}\theta(R) = +\infty$ si k est pair et $-\infty$ si k est impair et que la ligne de champ est une spirale d'asymptote C_k lorsque R croît.

De même $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{r}}}{r\sin\dfrac{\pi}{r}} \sim (-1)^{k+1}(k+1)\mathrm{e}^{k+1}\dfrac{1}{\pi\left(\dfrac{1}{r} - k - 1\right)}$

lorsque r tend vers $\dfrac{1}{k+1}$.

La fonction n'est pas intégrable sur $]\dfrac{1}{k+1},\ r_0]$. On en déduit $\displaystyle\lim_{R\to\frac{1}{k+1}}\int_{R}^{r_0}\frac{\mathrm{d}r}{f(r)} = +\infty$ si k est pair et $-\infty$ si k est impair.

Ceci prouve que $\displaystyle\lim_{R\to\frac{1}{k}}\theta(R) = -\infty$ si k est pair et $+\infty$ si k est impair et que la ligne de champ est une spirale d'asymptote C_{k+1} lorsque R décroît.

Les lignes de champ passant par un point $(r_0,\ \theta_0)$ tel que $R_{k+1} < r_0 < R_k$ sont des spirales admettant les cercles C_k et C_{k+1} comme asymptotes.

4 Lorsque $1 < r_0$, on retrouve de la même manière $\displaystyle\lim_{R\to 1}\theta(R) = +\infty$. La ligne de champ est une spirale d'asymptote C_1 lorsque R décroît vers 1.

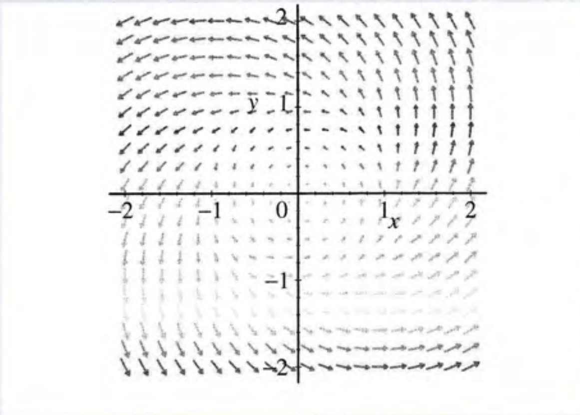
La fonction $r \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{r}}}{r\sin\frac{\pi}{r}}$ est continue sur $]1\ ,+\infty[$ car $\sin\left(\dfrac{\pi}{r}\right)$ ne s'annule pas sur cet intervalle et est strictement positive.

Elle est équivalent à $r \longmapsto \dfrac{1}{\pi}$ lorsque r tend vers $+\infty$. On en déduit qu'elle n'est pas intégrable et que

$\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\theta(R) = +\infty$. La ligne de champ est encore une spirale lorsque R tend vers $+\infty$.

Avec Maple

```
> restart:
> with(plots):
fieldplot([-y+x*sin(Pi/(x^2+y^2))
*exp(-1/(x^2 +y^2)),
x+y*sin(Pi/(x^2+y^2))*exp(-1/(x^2+y^2))],
x=-2..2,y=-2..2,arrows=SLIM, color=x);
```



18 Systèmes dynamiques

1 ▬ Soit φ est un système dynamique sur U. Alors φ est de classe $\mathcal{C}^1$. Supposons qu'il existe F telle que : pour tout x de U, l'application $t \longmapsto \varphi(t,\ x)$ soit solution de l'équation autonome $z' = F(z)$ **(1)**.

On a : $\quad \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(0,\ x) = F(\varphi(0,\ x))$.

Or φ_0 est l'identité sur U. Donc $\varphi(0,\ x) = x$.

On en déduit :

$$\forall x \in U \quad F(x) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(0,\ x).$$

Montrons que F ainsi déterminé convient.

Soit t dans $\mathbb{R}$ et x dans E. Notons $y = \varphi(t,\ x)$.

$F(\varphi(t,\ x)) = F(y) = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(0,\ y)$.

Pour tout s de $\mathbb{R}$ on a : $\varphi(s,\ y) = \varphi(s,\ \varphi(t,\ x))$

Or : $\forall (s,\ t) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t}$.

Par conséquent : $\varphi(s,\ y) = \varphi(s + t,\ x)$.

On dérive par rapport à s :

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(0,\ y) = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t,\ x).$$

D'où $F(\varphi(t,\ x)) = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t,\ x)$.

Réciproquement, on suppose qu'il existe F de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : pour tout x de U, l'application $t \longmapsto \varphi(t,\ x)$ soit solution de l'équation autonome $z' = F(z)$ **(1)**. Montrons que φ est un système dynamique.

L'équation **(1)** vérifie les hypothèses du *théorème de Cauchy-Lipschitz*. Pour tout x de U il existe une unique solution ψ_x de **(1)** définie sur un intervalle ouvert I_x, voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$, telle que $\psi_x(0) = x$.

On définit $\varphi : (t,\ x) \longmapsto \psi_x(t)$ sur $\mathbb{R} \times U$ lorsque la solution $I_x = \mathbb{R}$.

La propriété **(i)** est vérifiée car $\psi_x(0) = x$.

De plus ψ_x est de classe $\mathcal{C}^1$. Pour s et t dans $\mathbb{R}$, pour x dans U on a :

$$\varphi_s \circ \varphi_t(x) = \varphi(s, \varphi(t,\ x)) = \psi_{\varphi(t,\ x)}(s).$$

Or l'équation **(1)** est autonome. L'invariance par translation permet d'affirmer que la solution de **(1)** qui prend la valeur $\psi_x(t)$ en 0 est la fonction $s \longmapsto \psi_x(s + t)$.

Ainsi $\psi_{\varphi(t,\ x)}(s) = \psi_x(s + t)$.

On en déduit : $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$. La propriété **(ii)** est vérifiée.

La réciproque est vraie lorsque F est de classe $\mathcal{C}^1$ et lorsque les solutions de **(1)** sont globales.

Alors, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure que $\{\psi_x\ ;\ x \in U\}$ est l'ensemble des solutions de **(1)**.

2 ▬ Soit φ l'application de $\mathbb{R} \times E$ dans E définie par $\varphi(t,\ x) = \mathrm{e}^{ta}x$ où a est un endomorphisme de E.

L'application φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times U$ et $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$: $(t,\ x) \longmapsto a\mathrm{e}^{ta}x$.

On a, pour tout x de E : $\varphi(0, x) = x$.

Soit s et t dans $\mathbb{R}$, pour tout x de E :

$$\varphi(s,\ \varphi(t,\ x)) = \mathrm{e}^{sa}(\mathrm{e}^{ta}x) = \mathrm{e}^{(s+t)a}x.$$

On en déduit que **(i)** et **(ii)** sont vérifiées et que la fonction F associée est $x \longmapsto ax$. L'équation **(1)** est l'équation linéaire $z' = az$.

Algorithme

Résolution approchée d'un système différentiel

Partie mathématique

1 ▬ L'équation différentielle $y'' = f(t, y, y')$ équivaut au système différentiel :

$$\begin{cases} y' = v \\ v' = f(t, y, v) \end{cases}$$

Ce système différentiel n'est pas linéaire.

Toutefois, la *méthode d'Euler* s'applique avec :

$t_{i+1} = t_i + h$; ; $y_{i+1} = y_i + hv_i$; $v_{i+1} = v_i + hf(t_i, y_i, v_i)$

La *méthode de Runge-Kutta* s'applique de manière analogue.

Partie informatique

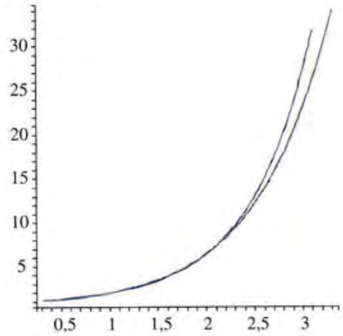
2 ▬

Avec Maple

```
> restart:with(plots):with(linalg):
> Euler:=proc(A,X0,h,t0,t1,t2)
local t,X,s,B,s1;
X:=X0;s:=NULL;
```

```
for t from t0 to t1 by -h do
s:=s,[X[1,1],X[2,1]];B:=eval(A,u=t):
X:=evalm(X-h*evalm(B&*X));
od;
X:=X0;s1:=NULL;
for t from t0 to t2 by h do
s1:=s1,[X[1,1],X[2,1]];B:=eval(A,u=t):
X:=evalm(X+h*evalm(B&*X));
od;
plot([s],[s1]);
end:
```

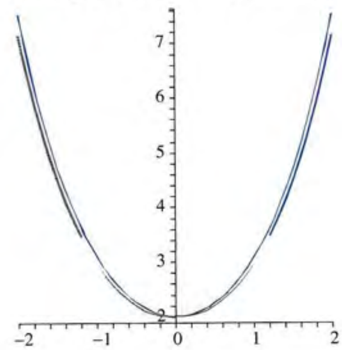
```
> RungeKutta:=proc(A,X0,h,t0,t1,t2)
local t,X,s,s1,k0,k1,k2,k3,k4,B;
s:=NULL;
X:=X0;
for t from t0 to t1 by -h do
s:=s,[X[1,1],X[2,1]];B:=eval(A,u=t):
k1:=evalm(B&*X);
k2:=evalm(eval(A,u=t-h/2)&*(X-(h/2)*k1));
k3:=evalm(eval(A,u=t-h/2)&*(X-(h/2)*k2));
k4:=evalm(eval(A,u=t-h)&*(X-h*k3));
k0:=evalm((-h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4));
X:=evalm(X+k0);
od;
X:=X0;s1:=NULL;
for t from t0 to t2 by h do
s1:=s1,[X[1,1],X[2,1]];B:=eval(A,u=t):
k1:=evalm(B&*X);
k2:=evalm(eval(A,u=t+h/2)&*(X+(h/2)*k1));
k3:=evalm(eval(A,u=t+h/2)&*(X+(h/2)*k2));
k4:=evalm(eval(A,u=t+h)&*(X+h*k3));
k0:=evalm((h/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4));
X:=evalm(X+k0);
od;
plot([s],[s1]);
end:
> G1:=Euler(matrix(2,2,[-1,1/u,1-u,1]),
matrix(2,1,[1.,2]),.1,1,.5,10):
G2:=RungeKutta(matrix(2,2,[-1,1/u,1-u,1]),
matrix(2,1,[1.,2]),.1,1,.5,10):
G3:=plot([1+ln(t),t*ln(t)+1+t,t=.5..10]):
display(G1,G2,G3);
```



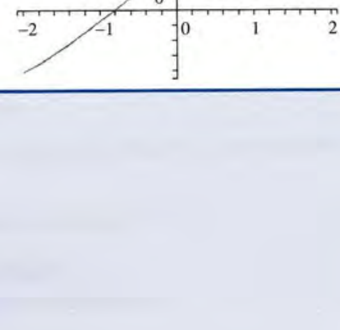
3

Avec Maple

```
> restart:with(plots):
Warning, the name changecoords has been
redefined
> Euler2:=proc(f,t0,y0,v0,h,t1,t2)
local t,v,y,s,s1;
s:=NULL;
t:=t0;y:=y0;v:=v0;
for t from t0 to t1 by -h do
s:=s,[t,y];
y:=y-h*v;v:=v-h*f(t,y,v);
od;
s1:=NULL:t:=t0;y:=y0;v:=v0;
for t from t0 to t2 by h do
s1:=s1,[t,y];
y:=y+h*v;v:=v+h*f(t,y,v);
od;
plot([s],[s1]);
end:
> g:=(u,v,w)->v:
G:=plot(exp(t)+exp(-t),t=-2..2):
display(Euler2(g,0,2,0,.1,-2,2),G);
```



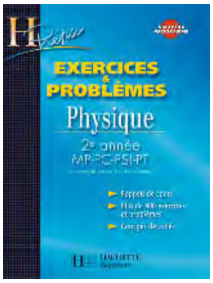

```
> f:=(u,v,w)->u*v*w:
Euler2(f,0.5,.5,.4,.1,-2,2);
```

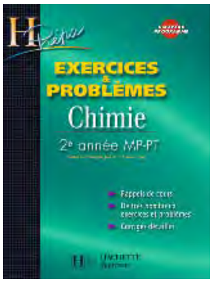


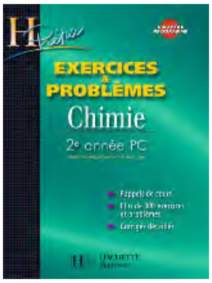
NOUVEAU PROGRAMME

La collection de référence des classes préparatoires scientifiques

EXERCICES & PROBLÈMES







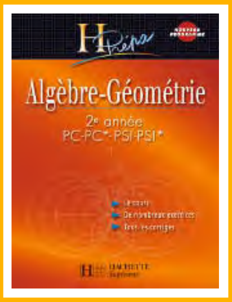
MANUELS DE COURS

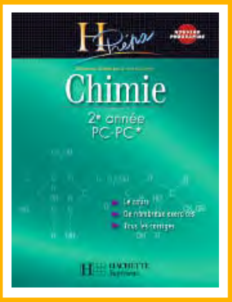
Dans chaque ouvrage :
- Le cours
- De nombreux exercices
- Tous les corrigés

MATHÉMATIQUES
Algèbre-Géométrie MP-MP*
Analyse 1 MP-MP*
Analyse 2 MP-MP*
Algèbre-Géométrie PC-PC* PSI-PSI*
Analyse PC-PC* PSI-PSI*

PHYSIQUE
Optique ondulatoire MP-MP* PC-PC* PSI-PSI* PT-PT*
Ondes MP-MP* PC-PC* PSI-PSI* PT-PT*
Électromagnétisme MP-MP* PC-PC* PSI-PSI* PT-PT*
Thermodynamique MP-MP* PC-PC* PSI-PSI* PT-PT*
Mécanique du solide et des systèmes MP-MP* PC-PC*
Mécanique des fluides PC-PC* PSI-PSI*
Électronique PSI- PSI*

CHIMIE
Chimie PC-PC*
Chimie MP-MP* PT-PT*
Chimie PSI-PSI*





www.hachette-education.com

I.S.B.N. 978-2-01-187663-1

HACHETTE Supérieur