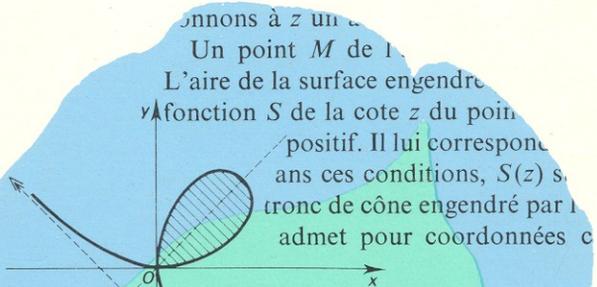


Cours élémentaire de mathématiques supérieures

5 - Géométrie



Donnons à z un...
 Un point M de l...
 L'aire de la surface engend...
 fonction S de la cote z du poin...
 positif. Il lui correspon...
 ans ces conditions, $S(z)$ s...
 tronc de cône engendré par l...
 admet pour coordonnées c

Considérons l'arc de parabole c

$$A = 2\pi \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4z}} \sqrt{z} dz$$

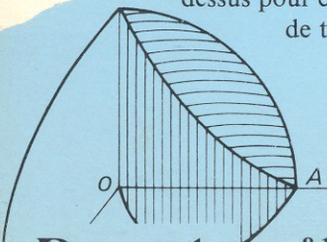
2. Aire de la sphère. La sphère de centre O et de rayon a a pour équation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. On considère l'arc de méridien MM' qui a pour équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, a > b$, tournant autour de l'axe Oz .

$$\int \frac{dt}{\cos^4 t} = \int \frac{1}{\cos^2 t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int (1 + \tan^2 t) d(\tan t) = \tan t + \frac{1}{2} \tan^2 t + C$$

d'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, a > b$, tournant auto...
 d'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1, a > b$, tournant a...

$$\begin{aligned} \text{équations } x &= a[\ln \tan(t/2 + \pi/4) - \sin t], \quad y = a \cos t \\ &= \frac{a^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \left[\frac{3\theta}{2} + 2 \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\pi}^{\pi} = 3\pi \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

C'est ce résultat, bien connu en géométrie élémentaire, que nous avons utilisé ci-dessus pour évaluer l'aire latérale du tronc de cône engendré par MM' et qui nous a permis de trouver la formule générale de l'aire des surfaces de révolution.



6^e édition

$$A = \int_0^h 2\pi y \sqrt{1 + y'^2} dz = 2\pi \frac{R}{h} \int_0^h z \sqrt{1 + \frac{z^2}{h^2}} dz = \pi \int_0^h \sqrt{1 + 4z} dz = \dots$$

$$A = \int_{-R}^R 2\pi \sqrt{R^2 - z^2} \sqrt{1 + \frac{z^2}{R^2 - z^2}} dz = 2\pi R \int_{-R}^R dz = 4\pi R^2$$

- 8.19 - Courbe d'équation $y^3 = x, y \in [0, 1]$, tournant autour de Oy .
- 8.20 - Courbe d'équation $x^2 + y^2 = 4$, limitée par les points $(1, \sqrt{3})$ et $(2, 0)$, tournant autour de Oy .

J. QUINET

Ingénieur de l'École Supérieure d'Électricité

COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

**Tome 5
Géométrie**



© BORDAS, Paris, 1978

ISBN 2-04-010079-2

" Toute représentation ou reproduction, intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur, ou de ses ayants-droit, ou ayants-cause, est illicite (loi du 11 mars 1957, alinéa 1^{er} de l'article 40). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal. La loi du 11 mars 1957 n'autorise, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, que les copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective d'une part, et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration "

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1. Fonctions à valeurs vectorielles

1.1	Limites des fonctions à valeurs vectorielles	1
1.2	Limites dans les plans euclidiens	1
1.3	Continuité des fonctions à valeurs vectorielles	2
1.4	Dérivabilité des fonctions à valeurs vectorielles	3

CHAPITRE 2. Construction des arcs paramétrés

2.1	Définition des arcs paramétrés	6
2.2	Étude au voisinage d'un point	6
2.3	Branches infinies	8
2.4	Points doubles	9
2.5	Intervalle d'étude	11
2.6	Tracé d'un arc paramétré	11
2.7	Exemples	12
2.8	L'astroïde	15
2.9	La tractrice	16
2.10	La parabole semi-cubique	17
2.11	Le folium de Descartes	18
2.12	La cycloïde	20

<i>Exercices</i>	22
------------------	-----------	----

CHAPITRE 3. Construction des courbes en coordonnées polaires

3.1	Équation de la droite	23
3.2	Équation du cercle	25
3.3	Coniques ayant un foyer en O	27
3.4	Tangente en un point	29
3.5	Branches infinies	30
3.6	Intervalle d'étude et symétries	32
3.7	Points doubles	33
3.8	Tracé d'une courbe en coordonnées polaires	34

3.9 La cardioïde	37
3.10 La cissoïde	38
3.11 La strophoïde	38
3.12 La lemniscate de Bernoulli	40
3.13 Les spirales	40
<i>Exercices</i>	43

CHAPITRE 4. Étude métrique des courbes

4.1 Longueur d'un arc de courbe	44
4.2 Exemples	45
4.3 Étude de la chaînette	47
4.4 Abscisse curviligne	49
4.5 Rayon de courbure	50
4.6 Calcul pratique du rayon de courbure	51
4.7 Exemples	52
4.8 Cercle osculateur	54
<i>Exercices</i>	55

CHAPITRE 5. Courbes définies par une propriété différentielle

5.1 Courbes à sous-tangente constante	57
5.2 Courbes à tangente constante	58
5.3 Courbes à sous-normale constante	58
5.4 Courbes à normale constante	59
5.5 Courbes dont les normales passent par un point fixe	60
5.6 Courbes telles que l'abscisse curviligne soit proportionnelle au carré de l'abscisse	60
5.7 Courbes à sous-tangente polaire constante	61
5.8 Courbes à sous-normale polaire constante	61
5.9 Courbes coupant les rayons vecteurs sous un angle constant	62
5.10 Courbes telles que $\ OM\ = \ OT\ $	62
5.11 Courbes à rayon de courbure constant	63
5.12 Courbes telles que le rayon de courbure soit égal à la longueur de la normale	63
<i>Exercices</i>	65

CHAPITRE 6. Intégrales curvilignes

6.1 Intégrale d'une forme différentielle	66
6.2 Cas des formes différentielles exactes	67
6.3 Détermination du potentiel scalaire	72
6.4 Méthode de Poincaré	74
6.5 Facteurs intégrants	76
6.6 L'entropie	78
<i>Exercices</i>	80

Table des matières

v

CHAPITRE 7. Intégrales multiples

7.1 Intégrale double sur un rectangle	82
7.2 Intégrale double sur une partie quarrable	85
7.3 Changement de variable dans les intégrales doubles	88
7.4 La formule de Green-Riemann	89
7.5 Intégrales doubles généralisées	91
7.6 Intégrales triples	92
<i>Exercices</i>	94

CHAPITRE 8. Calcul des aires

8.1 Aire limitée par le graphe d'une fonction	97
8.2 Aire comprise entre deux graphes	99
8.3 Aire limitée par le support d'un arc paramétré	100
8.4 Aire limitée par une courbe en coordonnées polaires	102
8.5 Aire d'une surface de révolution	104
<i>Exercices</i>	109

CHAPITRE 9. Calcul des volumes

9.1 Volume limité par une surface d'équation résolue en z	113
9.2 Volume limité par une surface et deux plans parallèles	118
9.3 Formule des trois niveaux	120
9.4 Volume limité par une surface de révolution	122
9.5 Cas d'une surface de révolution engendrée par une courbe fermée	124
<i>Exercices</i>	126

CHAPITRE 10. Recherche des centres d'inertie

10.1 Préliminaires	127
10.2 Centre d'inertie d'un système matériel	127
10.3 Propriétés du centre d'inertie d'un système matériel	128
10.4 Coordonnées du centre d'inertie d'un système matériel	130
10.5 Centre d'inertie d'un arc de courbe	130
10.6 Premier théorème de Guldin	134
10.7 Centre d'inertie d'une surface plane	135
10.8 Second théorème de Guldin	138
10.9 Centre d'inertie d'une surface de révolution	139
10.10 Centre d'inertie d'un volume	140
<i>Exercices</i>	141

CHAPITRE 11. Calcul des moments d'inertie

11.1	Moment d'inertie d'un système matériel	144
11.2	Moment d'inertie d'un solide	144
11.3	Liens entre moments d'inertie	145
11.4	Théorème de Huygens	146
11.5	Moments d'inertie de courbes	147
11.6	Moments d'inertie des surfaces planes	148
11.7	Moments d'inertie des surfaces de révolution	152
11.8	Moments d'inertie des volumes	153
<i>Exercices</i>		154

Solutions des exercices

Chapitre 2	155
Chapitre 3	169
Chapitre 4	184
Chapitre 5	190
Chapitre 6	197
Chapitre 7	201
Chapitre 8	208
Chapitre 9	213
Chapitre 10	216
Chapitre 11	217

Index terminologique	231
----------------------	-----

CHAPITRE 1

FONCTIONS À VALEURS VECTORIELLES

En géométrie et en cinématique, on utilise constamment des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans un espace vectoriel euclidien E , et non plus nécessairement à valeurs réelles ou complexes. Nous allons voir que l'étude des fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^2 ou dans \mathbb{R}^3 se ramène aussitôt à celle des fonctions à valeurs réelles.

1.1 Limites des fonctions à valeurs vectorielles. La définition d'une fonction admettant une limite en un point est la même que dans le cas des fonctions numériques, à ceci près que l'on remplace une valeur absolue par une norme :

Considérons une fonction f définie sur une partie P de \mathbb{R} à valeurs dans un espace vectoriel euclidien E et un nombre réel t_0 . Supposons que t_0 soit un point de P ou, plus généralement, que t_0 soit une extrémité d'un intervalle ouvert contenue dans P . On dit que $f(t)$ admet pour limite un élément l de E lorsque t tend vers t_0 si, pour tout nombre réel strictement positif ε , il existe un nombre réel strictement positif η tel que la relation

$$t \in [t_0 - \eta, t_0 + \eta] \cap (P - \{t_0\})$$

implique la relation

$$\|f(t) - l\| \leq \varepsilon.$$

(On remarquera que la variable s'appelle désormais t et non x , car en cinématique elle représente le temps.)

Grâce à l'inégalité triangulaire, on montre qu'un tel élément l , s'il existe, est unique; on l'appelle la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers t_0 , et on le note

$$l = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t).$$

Comme dans le cas des fonctions numériques, on démontre que la somme de deux fonctions f et g ayant des limites l et m a encore une limite, à savoir $l + m$.

Le produit de deux fonctions à valeurs dans E n'a aucun sens. On peut toutefois définir le produit φf d'une fonction φ à valeurs réelles par une fonction f à valeurs vectorielles; c'est l'application qui au nombre réel t associe le vecteur $\varphi(t)f(t)$. Si φ a une limite λ et si f a une limite l , la fonction φf admet pour limite λl .

1.2 Limites dans les plans euclidiens. Supposons maintenant que E est de dimension 2. (Le cas de la dimension 3 est analogue.) Considérons une base orthonormale (i, j) de E , par exemple la base canonique si $E = \mathbb{R}^2$. Soit f une fonction définie sur une partie P de \mathbb{R} à valeurs dans E . Pour tout élément t de P , le vecteur $f(t)$ se décompose dans la base (i, j) sous la forme

$$f(t) = xi + yj,$$

où x et y sont des fonctions à valeurs réelles de la variable t :

$$x = f(t) \quad y = g(t).$$

Ainsi,

$$f(t) = f(t) \mathbf{i} + g(t) \mathbf{j},$$

ce qu'on écrit encore

$$f = fi + gj.$$

Pour que f admette une limite au point t_0 , il faut et il suffit que f et g admettent des limites en ce point. Dans ces conditions,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \mathbf{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) \mathbf{j}.$$

Supposons d'abord que f admette une limite $l = li + mj$. La relation

$$\|f(t) - l\| \leq \varepsilon$$

s'écrit

$$\sqrt{[f(t) - l]^2 + [g(t) - m]^2} \leq \varepsilon,$$

ce qui implique

$$|f(t) - l| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |g(t) - m| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $f(t)$ tend vers l et $g(t)$ tend vers m .

Réciproquement, supposons que $f(t)$ tende vers l et que $g(t)$ tende vers m . En prenant t suffisamment près de t_0 , nous pouvons réaliser simultanément les conditions

$$|f(t) - l| \leq \varepsilon/\sqrt{2} \quad \text{et} \quad |g(t) - m| \leq \varepsilon/\sqrt{2}.$$

Posons $l = li + mj$; alors

$$\|f(t) - l\| = \sqrt{[f(t) - l]^2 + [g(t) - m]^2} \leq \sqrt{\varepsilon^2/2 + \varepsilon^2/2} = \varepsilon.$$

1.3 Continuité des fonctions à valeurs vectorielles. La définition des fonctions continues s'étend immédiatement au cas des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel euclidien E :

On dit que f est continue en un point t_0 si

- la fonction f est définie en ce point, c'est-à-dire si $t_0 \in P$;
- la fonction f admet pour limite $f(t_0)$ au point t_0 :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = f(t_0).$$

Lorsque E est un plan euclidien muni d'une base orthonormale (\mathbf{i}, \mathbf{j}) , la fonction $f = fi + gj$ est continue au point t_0 si et seulement si les fonctions f et g le sont. De même, si E est de dimension 3 et muni d'une base orthonormale $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ la fonction $f = fi + gj + hk$ est continue au point t_0 si et seulement si les fonctions f, g et h le sont.

1.4 Dérivabilité des fonctions à valeurs vectorielles. La définition des fonctions dérivables s'étend elle aussi au cas des fonctions à valeurs vectorielles. La dérivée de f au point t_0 est

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

On définit enfin la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable en tout point de son ensemble de définition.

La somme de deux fonctions dérivables est dérivable, et sa dérivée est la somme de leurs dérivées.

Soient φ une fonction dérivable à valeurs réelles et f une fonction dérivable à valeurs dans E . Alors φf est dérivable, et

$$(\varphi f)' = \varphi' f + \varphi f'.$$

Le calcul des dérivées des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel euclidien de dimension 2 ou 3 s'effectue en pratique à l'aide d'une base orthonormale. Soit $f = f'i + g'j$; pour que f soit dérivable, il faut et il suffit que f et g le soient. Dans ces conditions,

$$f' = f'i + g'j.$$

EXEMPLES

1. Dérivée d'un vecteur unitaire. Soit u un vecteur unitaire, la variable étant l'angle θ que fait ce vecteur avec Ox (Fig. 1.1).

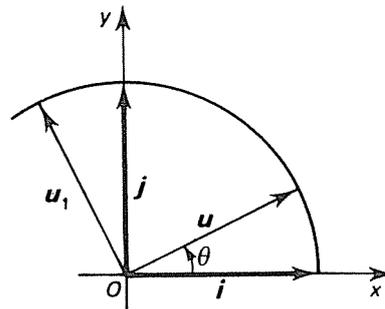


FIG. 1.1

Alors

$$u = \cos \theta i + \sin \theta j$$

et

$$\frac{du}{d\theta} = -\sin \theta i + \cos \theta j = \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) i + \sin \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right) j.$$

Ainsi, le vecteur $u_1 = du/d\theta$ est encore unitaire, et il fait un angle de $\pi/2$ avec u . Autrement dit, dériver un vecteur unitaire par rapport à l'angle qu'il fait avec Ox revient à le faire tourner de $\pi/2$.

2. *Dérivée d'un produit scalaire.* Soient f_1 et f_2 des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel euclidien E de dimension 2 ou 3. Si f_1 et f_2 sont dérivables, il en est de même de leur produit scalaire, c'est-à-dire de la fonction à valeurs réelles

$$f_1 \cdot f_2 : t \mapsto f_1(t) \cdot f_2(t).$$

Plus précisément,

$$(f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2'.$$

Plaçons-nous par exemple dans le cas où E est de dimension 3, et décomposons les fonctions f_1 et f_2 dans une base orthonormale (i, j, k) :

$$f_1 = f_1 i + g_1 j + h_1 k \quad f_2 = f_2 i + g_2 j + h_2 k.$$

Pour tout nombre réel t ,

$$f_1(t) \cdot f_2(t) = f_1(t) f_2(t) + g_1(t) g_2(t) + h_1(t) h_2(t),$$

ce qui montre que le produit scalaire $f_1 \cdot f_2$ est encore donné par la formule suivante :

$$f_1 \cdot f_2 = f_1 f_2 + g_1 g_2 + h_1 h_2.$$

Rappelons que le produit de deux fonctions dérivables u et v est encore dérivable, et que

$$(uv)' = u' v + uv'.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} (f_1 f_2)' &= f_1' f_2 + f_1 f_2' \\ (g_1 g_2)' &= g_1' g_2 + g_1 g_2' \\ (h_1 h_2)' &= h_1' h_2 + h_1 h_2'. \end{aligned}$$

La somme de trois fonctions dérivables étant encore dérivable, nous en concluons que $f_1 \cdot f_2$ est dérivable, et que

$$\begin{aligned} (f_1 \cdot f_2)' &= f_1' f_2 + f_1 f_2' + g_1' g_2 + g_1 g_2' + h_1' h_2 + h_1 h_2' \\ &= (f_1' f_2 + g_1' g_2 + h_1' h_2) + (f_1 f_2' + g_1 g_2' + h_1 h_2'), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(f_1 \cdot f_2)' = f_1' \cdot f_2 + f_1 \cdot f_2',$$

ce qu'il fallait prouver.

3. *Dérivée d'un produit vectoriel.* On suppose maintenant que E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. Si f_1 et f_2 sont dérivables, il en est de même de leur produit vectoriel, c'est-à-dire de la fonction à valeurs vectorielles

$$f_1 \wedge f_2 : t \mapsto f_1(t) \wedge f_2(t).$$

Plus précisément,

$$(f_1 \wedge f_2)' = f_1' \wedge f_2 + f_1 \wedge f_2'.$$

Prenons cette fois pour (i, j, k) une base orthonormale directe. En conservant les notations précédentes, nous vérifions que

$$f_1 \wedge f_2 = (g_1 h_2 - g_2 h_1) i + (h_1 f_2 - h_2 f_1) j + (f_1 g_2 - f_2 g_1) k.$$

Le calcul est alors analogue au précédent. On écrira que

$$\begin{aligned} (g_1 h_2 - g_2 h_1)' &= g_1' h_2 + g_1 h_2' - g_2' h_1 - g_2 h_1' \\ &= (g_1' h_2 - g_2' h_1) + (g_1 h_2' - g_2 h_1'), \end{aligned}$$

et d'autres relations semblables pour les deux autres composantes. L'essentiel est bien entendu de connaître le résultat (et de ne pas confondre $f_1 \wedge f_2$ avec $f_2 \wedge f_1$).

CHAPITRE 2

CONSTRUCTION DES ARCS PARAMÉTRÉS

2.1 Définition des arcs paramétrés. La notion d'arc paramétré est d'origine cinématique. Considérons un point M du plan se déplaçant au cours du temps t . Ses coordonnées x et y sont des fonctions de t :

$$x = f(t) \quad y = g(t).$$

On peut encore représenter le point M par le vecteur $OM = f(t)$, où f est une fonction d'une variable réelle à valeurs dans \mathbf{R}^2 .

On est ainsi amené à appeler *arc paramétré* une application continue f définie sur un intervalle I (ou sur une réunion d'intervalles) de \mathbf{R} à valeurs dans \mathbf{R}^2 . L'image Γ de I par f s'appelle support de l'arc paramétré. Soit M un élément de Γ ; tout élément t de I tel que $M = f(t)$ est dit *paramètre* du point t . En pratique, le point M est repéré par ses coordonnées $x = f(t)$, $y = g(t)$.

L'étude du graphe d'une fonction $y = \varphi(x)$ rentre dans le cadre précédent : il suffit de poser $x = t$, $y = \varphi(t)$.

On est souvent amené à utiliser une représentation paramétrique d'une courbe d'équation $F(x, y) = 0$ non résolue par rapport à x , c'est-à-dire à considérer cette courbe comme le support d'un arc paramétré. Ainsi, le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 = R^2$$

est le support de l'arc paramétré $x = R \cos t$, $y = R \sin t$. Plus généralement, l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

est le support de l'arc paramétré $x = a \cos t$, $y = b \sin t$.

2.2 Étude au voisinage d'un point. On démontre que la formule de Taylor-Young (voir tome 3) s'étend au cas des fonctions à valeurs vectorielles. A partir de cette formule, on peut étudier l'existence d'une tangente au point $M_0 = f(t_0)$, et la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de t_0 .

Si la dérivée $f'(t_0)$ est non nulle, la courbe admet une tangente, à savoir la droite définie par le point M_0 et le vecteur $f'(t_0)$.

— Dans ces conditions, si la dérivée $f''(t_0)$ est non colinéaire à $f'(t_0)$, la courbe est située dans le demi-plan définie par la tangente et contenant le vecteur $f''(t_0)$ (Fig. 2.1a)).

— Si $f''(t_0)$ est colinéaire à $f'(t_0)$ et si $f'''(t_0)$ est non colinéaire à $f'(t_0)$, la courbe traverse sa tangente. On dit que le point M_0 est un point d'inflexion (Fig. 2.1b)).

Supposons maintenant que $f'(t_0) = 0$ et que $f''(t_0) \neq 0$. La courbe admet une tangente, à savoir la droite définie par M_0 et $f''(t_0)$.

— Si $f'''(t_0)$ n'est pas colinéaire à $f''(t_0)$, la courbe est de part et d'autre de sa tangente. On dit que M_0 est un point de rebroussement de première espèce (Fig. 2.1c).

— Si $f'''(t_0)$ est colinéaire à $f''(t_0)$ et si $f^{(4)}(t_0)$ n'est pas colinéaire à $f''(t_0)$, la courbe est d'un même côté de sa tangente. On dit que M_0 est un point de rebroussement de seconde espèce (Fig. 2.1d)).

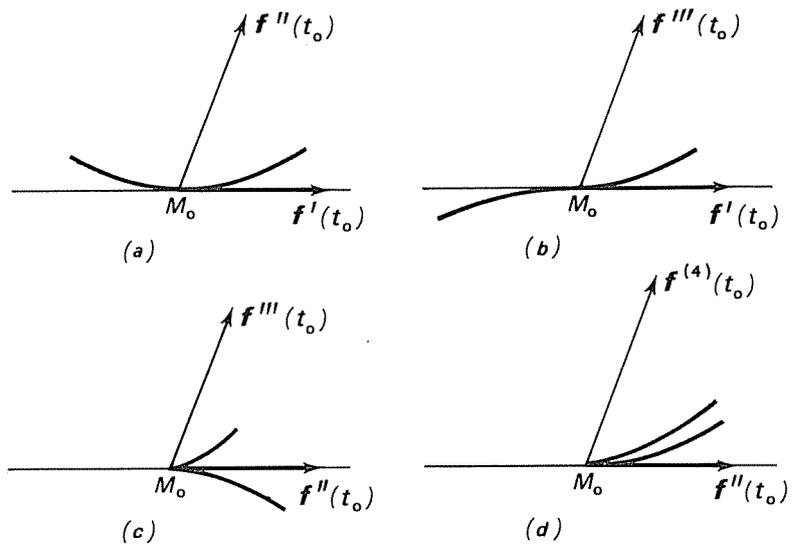


FIG. 2.1

En pratique, on détermine les dérivées successives de f par leurs composantes (f', g') , (f'', g'') , etc.

Lorsque $x'_0 = f'(t_0)$ et $y'_0 = g'(t_0)$ sont non tous deux nuls, l'équation de la tangente en M_0 est

$$\frac{x - x_0}{x'_0} = \frac{y - y_0}{y'_0}$$

EXEMPLES.

1. Étudier l'arc paramétré

$$x = t^2 \quad y = t^2 - t^3$$

au voisinage de l'origine.

Ici

$$\begin{cases} f'(t) = 2t & f'(0) = 0 \\ g'(t) = 2t - 3t^2 & g'(0) = 0 \\ f''(t) = 2 & f''(0) = 2 \\ g''(t) = 2 - 6t & g''(0) = 2 \\ f'''(t) = 0 & f'''(0) = 0 \\ g'''(t) = -6 & g'''(0) = -6. \end{cases}$$

La courbe est donc tangente en O à la première bissectrice. Comme $f'''(0)$ n'est pas colinéaire à $f''(0)$, le point O est un point de rebroussement de première espèce.

2. Étudier l'arc paramétré

$$x = e^{t-1} - t \quad y = t^3 - 3t$$

au voisinage du point $(0, 2)$, atteint pour $t = 1$.

Ici

$$\begin{cases} f'(t) = e^{t-1} - 1 & f'(1) = 0 \\ g'(t) = 3t^2 - 3 & g'(1) = 0 \\ f''(t) = e^{t-1} & f''(1) = 1 \\ g''(t) = 6t & g''(1) = 6 \\ f'''(t) = e^{t-1} & f'''(1) = 1 \\ g'''(t) = 6 & g'''(1) = 6 \\ f^{(4)}(t) = e^{t-1} & f^{(4)}(1) = 1 \\ g^{(4)}(t) = 0 & g^{(4)}(1) = 0. \end{cases}$$

Le vecteur $f''(1)$ est non nul, et le vecteur $f'''(1)$ lui est colinéaire. Comme $f^{(4)}(1)$ n'est pas colinéaire aux deux précédents, le point $(0, 2)$ est un point de rebroussement de seconde espèce.

2.3 Branches infinies. L'étude des branches infinies est calquée sur le cas où y est fonction de x (voir tome 2).

Si x tend vers x_0 et si y tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ lorsque t tend vers t_0 , la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote à la courbe. De même, si x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ et si y tend vers y_0 lorsque t tend vers t_0 , la droite d'équation $y = y_0$ est asymptote à la courbe.

Enfin, si x et y augmentent indéfiniment lorsque t tend vers t_0 , on étudie la limite de y/x pour savoir si la courbe admet une direction asymptotique. Si y/x tend

vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la courbe a une branche parabolique dans la direction de Oy . Si y/x tend vers 0, la courbe a une branche parabolique dans la direction de Ox . Si y/x a une limite finie non nulle a , on cherche si $y-ax$ a une limite finie b , auquel cas la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote à la courbe. En effectuant un développement limité de $y-ax-b$ au voisinage de t_0 , on peut déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Bien entendu, dans tout ce qui précède, on peut remplacer le cas échéant t_0 par $+\infty$ ou $-\infty$. Pour étudier la position de la courbe par rapport à l'asymptote, on effectue alors un développement limité de $y-ax-b$ en fonction de $1/t$.

EXEMPLE. — Étudier les branches infinies de l'arc paramétré

$$x = \frac{1}{t-1} \quad y = \frac{t^2+1}{t-1}.$$

Il est clair que x et y deviennent infinis lorsque t tend vers 1. Or,

$$\frac{y}{x} = t^2+1 \rightarrow 2 \quad \text{et} \quad y-2x = \frac{t^2+1}{t-1} - \frac{2}{t-1} = t+1 \rightarrow 2.$$

La courbe admet donc pour asymptote la droite d'équation $y=2x+2$.

D'autre part, lorsque t tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), x tend vers 0 et y tend vers $+\infty$ (resp. vers $-\infty$). La courbe admet donc pour asymptote l'axe Oy .

2.4 Points doubles. On dit qu'un point M du support d'un arc paramétré est double s'il est atteint pour deux valeurs distinctes du paramètre. Autrement dit, il existe deux nombres réels distincts t' et t'' tels que

$$\begin{cases} f(t') = f(t'') \\ g(t') = g(t'') \end{cases}$$

Lorsque f et g sont des fonctions rationnelles, on peut commencer par simplifier par $t'-t''$; on fait apparaître ensuite la somme $s=t'+t''$ et le produit $p=t't''$. On calcule s et p ; on en déduit t' et t'' , et enfin $x=f(t')=f(t'')$, $y=g(t')=g(t'')$.

Examinons un cas particulier très fréquent. Supposons que f et g sont les quotients de deux trinômes de degré 2 :

$$f(t) = \frac{a_1 t^2 + b_1 t + c_1}{\alpha_1 t^2 + \beta_1 t + \gamma_1} \quad g(t) = \frac{a_2 t^2 + b_2 t + c_2}{\alpha_2 t^2 + \beta_2 t + \gamma_2}.$$

Pour que x et y soient les coordonnées d'un point double, il faut et il suffit que les deux trinômes

$$\begin{aligned} x(\alpha_1 X^2 + \beta_1 X + \gamma_1) - (a_1 X^2 + b_1 X + c_1) \\ y(\alpha_2 X^2 + \beta_2 X + \gamma_2) - (a_2 X^2 + b_2 X + c_2) \end{aligned}$$

aient deux racines communes. Cela revient à dire que leurs coefficients sont pro-

portionnels :

$$\frac{x\alpha_1 - a_1}{y\alpha_2 - a_2} = \frac{x\beta_1 - b_1}{y\beta_2 - b_2} = \frac{x\gamma_1 - c_1}{y\gamma_2 - c_2}.$$

Ce procédé a l'avantage de fournir directement les coordonnées des points doubles sans passer par l'intermédiaire des valeurs du paramètre. En outre, il s'applique au cas où le point double est atteint pour les valeurs infinies de t , alors que le premier procédé tombe en défaut.

EXEMPLES.

1. Cherchons les points doubles de l'arc paramétré

$$x = 2t + t^2 \quad y = 2t - 1/t^2.$$

Écrivons que

$$2t' + t'^2 = 2t'' + t''^2$$

$$2t' - \frac{1}{t'^2} = 2t'' - \frac{1}{t''^2}.$$

Simplifions les deux relations par $t' - t''$:

$$2 + t' + t'' = 0$$

$$2 + \frac{t' + t''}{t'^2 t''^2} = 0,$$

soit $s = -2$, $s/p^2 = -2$. Finalement, $s = -2$ et $p^2 = 1$.

Si $p = 1$, alors t' et t'' sont les racines de l'équation

$$t^2 + 2t + 1 = 0,$$

ce qui montre que $t' = t'' = -1$. Comme t' et t'' ne sont pas distincts, cette solution est à rejeter.

Si $p = -1$, alors t' et t'' sont racines de

$$t^2 + 2t - 1 = 0.$$

D'où $t' = -1 + \sqrt{2}$, $t'' = -1 - \sqrt{2}$ et $x = 1$, $y = -5$.

2. Chercher les points doubles de l'arc paramétré

$$x = \frac{t^2 + 3t - 2}{t^2 - t + 2} \quad y = \frac{t - 1}{t^2 + t + 1}.$$

La première méthode consiste à écrire que

$$\frac{t'^2 + 3t' - 2}{t'^2 - t' + 2} = \frac{t''^2 + 3t'' - 2}{t''^2 - t'' + 2} \quad \frac{t' - 1}{t'^2 + t' + 1} = \frac{t'' - 1}{t''^2 + t'' + 1}.$$

La première relation conduit à $s-p=1$ et la seconde à $s-p=-2$, ce qui est impossible.

La deuxième méthode s'applique ici; elle conduit à écrire que les coefficients des polynômes

$$(x-1)X^2 - (x+3)X + 2x + 2 \quad \text{et} \quad yX^2 + (y-1)X + y + 1$$

sont proportionnels; soit

$$\frac{x-1}{y} = \frac{x+3}{1-y} = \frac{2x+2}{y+1}.$$

Il vient aussitôt $x=1$ et $y=0$.

La première méthode ne pouvait aboutir, car le point $(1, 0)$ est atteint lorsque $t=1$ et lorsque t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

2.5 Intervalle d'étude. Dans le cas où les fonctions f et g admettent une même période non nulle T , on limite évidemment la variation de t à un intervalle de longueur T .

Si les fonctions f et g sont impaires, c'est-à-dire si le changement de t en $-t$ transforme x en $-x$ et y en $-y$, la courbe est symétrique par rapport à O . On prend alors pour intervalle d'étude $[0, +\infty[$ ou, dans le cas d'une période T , $[0, T/2]$.

Si f est impaire et g paire, la courbe est symétrique par rapport à Oy ; de même, si f est paire et g impaire, la courbe est symétrique par rapport à Ox . On réduit encore l'intervalle d'étude comme ci-dessus.

Si f et g sont paires, la courbe est parcourue deux fois lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$. On obtient le support tout entier en se limitant aux valeurs positives de t .

EXEMPLE. — Soit l'arc paramétré

$$x = a \cos t \quad y = b \sin t.$$

La période est 2π . Puisque x est une fonction paire de t et que y en est une fonction impaire, le graphe est symétrique par rapport à Ox . On peut donc prendre pour intervalle d'étude $[0, \pi]$. Mais, de plus, le changement de t en $\pi-t$ transforme x en $-x$ tout en conservant y . Le graphe est symétrique par rapport à Oy , et l'intervalle $[0, \pi/2]$ suffit.

Remarque. — Dans certains cas, le graphe fait apparaître une symétrie qui n'était pas en évidence sur les expressions de x et de y . On essaiera alors de déterminer le changement à effectuer sur t pour obtenir cette symétrie. On réduira en conséquence l'intervalle d'étude... ce qui conduira à recommencer cette étude.

2.6 Tracé d'un arc paramétré. Les considérations ci-dessus sont résumées dans la règle suivante :

Règle.

1. On commence par déterminer l'intervalle d'étude, en tenant compte de la périodicité et des symétries.

2. On calcule les dérivées de x et de y par rapport à t ; on cherche leurs signes et les valeurs de t pour lesquelles elles s'annulent.

3. On dresse le tableau de variation en cinq lignes pour t , x' , y' , x et y . On porte les valeurs remarquables de x et de y , ainsi que les limites aux bornes des intervalles où ces fonctions sont définies. On indique par des flèches les sens de variation de x et de y .

4. On étudie les branches infinies.

5. On étudie les points de rebroussement.

6. On construit la courbe. Sur chaque intervalle où x et y sont monotones, tout se passe comme si y était fonction de x .

7. On cherche les coordonnées des points doubles, dans la mesure où le graphique en a montré l'existence.

On peut améliorer la précision du tracé en calculant les coordonnées de quelques points, en particulier les intersections avec les axes de coordonnées.

2.7 Exemples.

1. Construire l'arc paramétré

$$x = \frac{t+2}{t^2-1} \quad y = \frac{t-5}{t^2-4t+3} = \frac{t-5}{(t-3)(t-1)}$$

Il n'y a pas de symétrie évidente. D'autre part, x est défini lorsque t est différent de 1 et de -1 , tandis que y est défini lorsque t est différent de 1 et de 3.

Calculons les dérivées de x et de y par rapport à t :

$$x' = \frac{(t^2-1)-(t+2)2t}{(t^2-1)^2} = \frac{-t^2-4t-1}{(t^2-1)^2}$$

$$y' = \frac{(t-3)(t-1)-(t-5)(2t-4)}{(t-3)^2(t-1)^2} = \frac{-t^2+10t-17}{(t-3)^2(t-1)^2}$$

On voit que x' s'annule pour deux valeurs α et β de t , égales sensiblement à $-3,7$ et à $-0,3$; de même, y' s'annule pour deux valeurs γ et δ de t , sensiblement égales à $2,2$ et à $7,8$. D'où le tableau de variation :

t	$-\infty$	α	-1	β	1	γ	3	δ	$+\infty$
x'		- 0 +		+ 0 -		- -		- -	
y'		- -		- -		- 0 +		+ 0 -	
x	0 ↘ ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗ ↘ $-\infty$		$+\infty$ ↘ ↗		$5/8$		0
y	0 ↘ ↘		$-3/4$		$-\infty$		$+\infty$ ↘ ↗ $+\infty$		$-\infty$ ↗ ↘ 0

La courbe admet évidemment pour asymptotes les droites d'équations $x = 5/8$ et $y = -3/4$. De plus, lorsque t tend vers 1,

$$\frac{y}{x} = \frac{(t-5)(t+1)}{(t-3)(t+2)} \rightarrow \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad y - \frac{4}{3}x = -\frac{t+9}{3(t+1)(t-3)} \rightarrow \frac{5}{6}.$$

La courbe admet donc pour asymptote oblique la droite d'équation

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{6}.$$

L'origine des coordonnées n'apparaît pas comme un point exceptionnel. La limite de y/x lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ est 1; la tangente à l'origine est la première bissectrice.

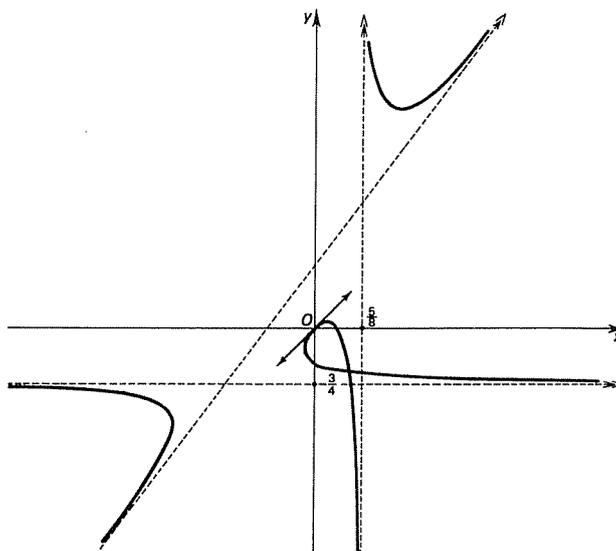


FIG. 2.2

Le graphe (Fig. 2.2) montre l'existence d'un point double. Pour déterminer les coordonnées de celui-ci, écrivons que les polynômes

$$xX^2 - X - x - 2 \quad \text{et} \quad yX^2 - (4y+1)X + 3y+5$$

ont deux racines communes, et donc que leurs coefficients sont proportionnels :

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{4y+1} = -\frac{x+2}{3y+5};$$

d'où

$$\begin{aligned} 3y+5+(x+2)(4y+1) &= 0 \\ y-x(4y+1) &= 0. \end{aligned}$$

En ajoutant ces deux relations membre à membre, nous obtenons $12y+7=0$, soit $y=-7/12$ et enfin $x=7/16$.

2. Construire l'arc paramétré

$$x = \frac{t}{t^2-1} \quad y = \frac{t^2}{t-1}.$$

Il n'y a pas de symétrie évidente. De plus, x est défini lorsque t est différent de 1 et de -1 , tandis que y est défini lorsque t est différent de 1.

Calculons les dérivées de x et de y par rapport à t :

$$x' = \frac{t^2-1-2t^2}{(t^2-1)^2} = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2}$$

$$y' = \frac{2t(t-1)-t^2}{(t-1)^2} = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}.$$

D'où le tableau de variation :

t	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
x'	-		-	-	-	-
y'	+		+	0	-	+
x	$0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 2/3 \searrow 0$	
y	$-\infty \nearrow -1/2$		$\nearrow 0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 4 \nearrow +\infty$	

La courbe admet évidemment pour asymptotes les droites d'équations $x=0$ et $y=-1/2$. Lorsque t tend vers 1,

$$\frac{y}{x} = t(t+1) \rightarrow 2 \quad \text{et} \quad y-2x = \frac{t(t+2)}{t+1} \rightarrow \frac{3}{2}.$$

La courbe admet donc pour asymptote oblique la droite d'équation $y=2x+3/2$.

On peut déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote oblique en effectuant un développement limité de $y-2x$ lorsque t est au voisinage de 1 :

$$\begin{aligned} y-2x &= \frac{3}{2} + \left[\frac{t(t+2)}{t+1} - \frac{3}{2} \right] = \frac{3}{2} + \frac{(t-1)(t+3/2)}{t+1} \\ &= \frac{3}{2} + t-1 + o(t-1). \end{aligned}$$

Ainsi, la courbe est au-dessus de l'asymptote si $t>1$, et en dessous si $t<1$.

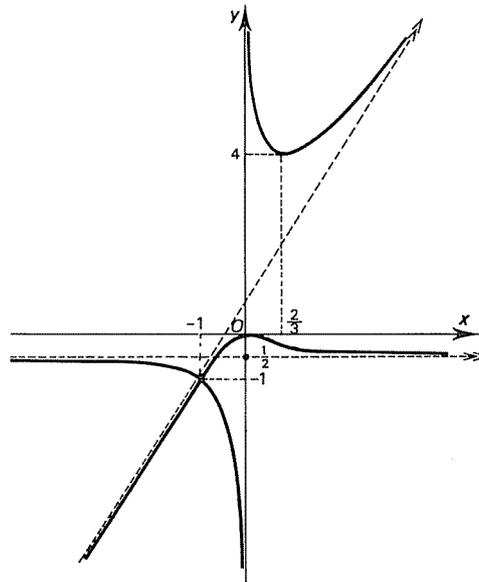


FIG. 2.3

Le graphe (Fig. 2.3) montre l'existence d'un point double: Écrivons que les polynômes $xX^2 - X - x$ et $X^2 - yX + y$ ont deux racines communes, et donc que leurs coefficients sont proportionnels :

$$x/1 = 1/y = -x/y.$$

D'où $x = y = -1$.

2.8 L'astroïde. C'est l'arc paramétré

$$x = a \cos^3 t \quad y = a \sin^3 t.$$

La période est 2π . Les changements de t en $-t$ et en $\pi - t$ montrent que la courbe est symétrique par rapport à Ox et à Oy . Enfin, lorsqu'on remplace t par $\pi/2 - t$, on remarque que x et y sont échangés. La courbe est donc symétrique par rapport à la première bissectrice, ce qui permet de restreindre l'intervalle d'étude à $[0, \pi/4]$.

Calculons les dérivées de x et de y par rapport à t :

$$x' = -3a \cos^2 t \sin t$$

$$y' = 3a \sin^2 t \cos t.$$

D'où le tableau :

t	0		$\pi/4$
x'	0	-	$-3a/2\sqrt{2}$
y'	0	+	$3a/2\sqrt{2}$
x	a	\searrow	$a/2\sqrt{2}$
y	0	\nearrow	$a/2\sqrt{2}$

Pour déterminer la tangente au point de paramètre 0, calculons x'' et y'' :

$$\begin{aligned} x'' &= 6a \cos t \sin^2 t - 3a \cos^3 t & x''(0) &= -3a \\ y'' &= 6a \sin t \cos^2 t - 3a \sin^3 t & y''(0) &= 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que la tangente est l'axe Ox . Une fois la courbe complétée par symétrie (Fig. 2.4), on voit qu'il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce. La courbe a la forme d'un as de carreau.

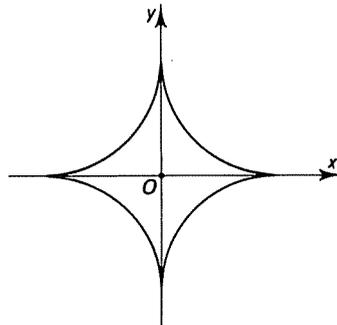


FIG. 2.4

2.9 La tractrice. C'est l'arc paramétré

$$x = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right) \quad y = a \sin t.$$

Il est clair que 2π est période. Comme $\operatorname{tg} t/2$ doit être strictement positif, on prendra t dans l'intervalle $]0, \pi[$. Le changement de t en $\pi - t$ montre que la courbe est symétrique par rapport à Oy . On limitera l'intervalle d'étude à $]0, \pi/2]$.

$$x' = a \left(\frac{1}{\sin t} - \sin t \right) = a \frac{\cos^2 t}{\sin t}$$

$$y' = a \cos t.$$

t	0	$\pi/2$
x'	+	0
y'	+	0
x	$-\infty$	\nearrow 0
y	0	\nearrow a

Pour étudier la tangente au point de paramètre $\pi/2$, calculons x'' et y'' :

$$x'' = a \left(-2 \cos t - \frac{\cos^3 t}{\sin^2 t} \right) \quad x''(\pi/2) = 0$$

$$y'' = -a \sin t \quad y''(\pi/2) = -a.$$

La tangente est donc verticale. Vu la symétrie, c'est une tangente de rebroussement de première espèce (Fig. 2.5).

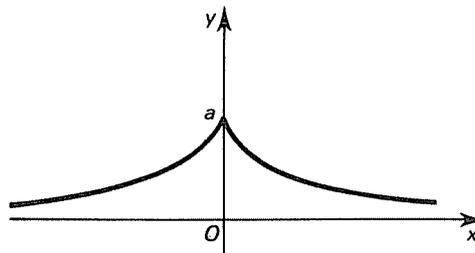


FIG. 2.5

C'est la courbe décrite par la roue arrière d'une voiture se rangeant en marche avant le long d'un trottoir. On remarquera qu'il faut théoriquement une distance infinie pour se ranger par ce procédé.

2.10 La parabole semi-cubique. Dans cet exemple et dans le suivant, nous construirons des courbes définies par une équation cartésienne en nous aidant d'une représentation paramétrique.

La parabole semi-cubique a pour équation cartésienne

$$ay^2 = x^3.$$

Paramétrons-la en posant

$$x = at^2 \quad y = at^3.$$

En changeant t en $-t$, on voit que Ox est axe de symétrie. On peut prendre pour intervalle d'étude $[0, +\infty[$.

$$x' = 2at \quad y' = 3at^2.$$

t	0		$+\infty$
x'	0	+	
y'	0	+	
x	0	\nearrow	$+\infty$
y	0	\nearrow	$+\infty$

Lorsque t tend vers 0, $y/x = t$ tend vers 0, et la courbe est tangente en O à Ox . Lorsque t tend vers $+\infty$, $y/x = t$ tend vers $+\infty$. La courbe admet donc une branche parabolique dans la direction de Oy (Fig. 2.6).

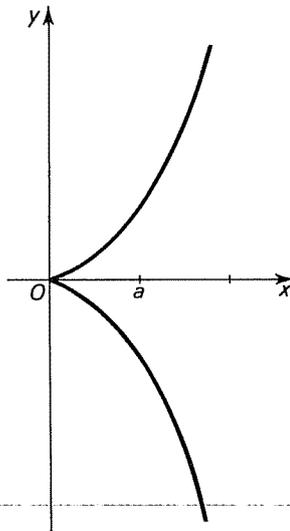


FIG. 2.6

2.11 Le folium de Descartes. C'est la courbe d'équation

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Posons $y = tx$; l'équation devient

$$x^3(1+t^3) - 3atx^2 = 0$$

$$x(1+t^3) - 3at = 0$$

d'où la représentation paramétrique :

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Le changement de t en $1/t$ échange x et y . On pourra donc prendre pour intervalle d'étude $] -1, 1[$. La valeur -1 est exclue car, lorsque $t = -1$, x et y ne sont pas définis.

$$x' = 3a \frac{1+t^3-3t^3}{(1+t^3)^2} = 3a \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$$

$$y' = 3a \frac{2t(1+t^3)-3t^4}{(1+t^3)^2} = 3a \frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

t	-1	0	$1/\sqrt[3]{2}$	1		
x'		$+$	$+$	0	$-$	
y'		$-$	0	$+$	$+$	
x	$-\infty$	\nearrow	0	\nearrow	\searrow	$3a/2$
y	$+\infty$	\searrow	0	\nearrow	\nearrow	$3a/2$

Lorsque t tend vers -1 ,

$$y/x = t \rightarrow -1$$

et

$$y+x = 3a \frac{t^2}{1+t^3} + 3a \frac{t}{1+t^3} = 3a \frac{t}{t^2-t+1} \rightarrow -a.$$

La courbe admet donc pour asymptote la droite d'équation $x+y+a=0$.

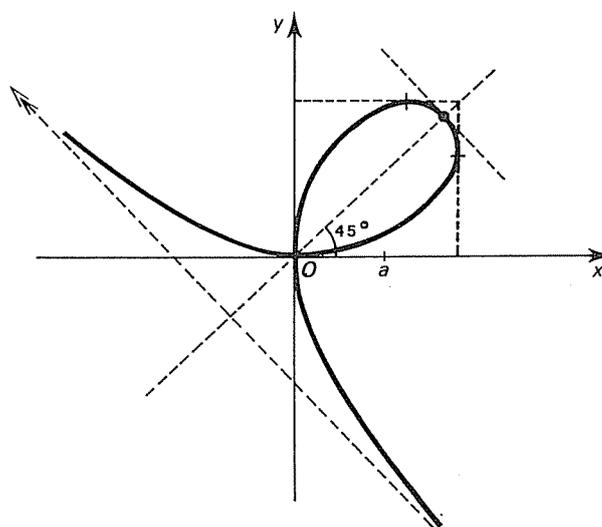


FIG. 2.7

Lorsque $t = 0$, $x = y = 0$. Comme $y/x = t$ tend vers 0, la courbe est tangente en O à Ox (Fig. 2.7).

2.12 La cycloïde. Intuitivement, la cycloïde est la courbe engendrée dans un plan vertical par la valve d'une roue de bicyclette lorsque cette roue roule sur un sol horizontal. Plus précisément, c'est la courbe décrite par un point lié à un cercle lorsque ce cercle roule sans glisser sur une droite (Fig. 2.8).

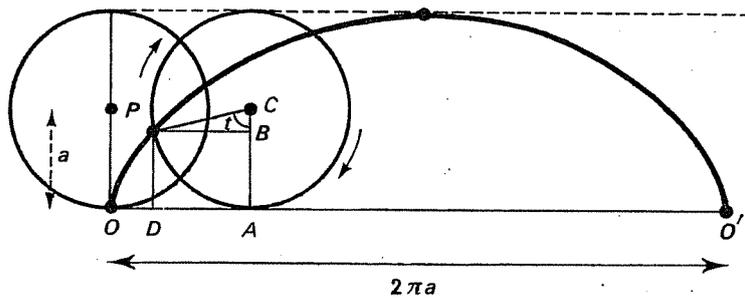


FIG. 2.8

A un instant quelconque, le cercle de centre C a déjà roulé d'une distance OA . Le point lié au cercle coïncidant avec O à l'instant initial s'est élevé en se déplaçant vers la droite et est venu en P ; l'arc PA est donc égal à la longueur du segment $[O, A]$, et le rayon du cercle a décrit à ce moment un angle t .

Soient x et y les coordonnées de P . Alors

$$x = \overline{OD} = \overline{OA} - \overline{DA} = \widehat{PA} - \overline{PB} = at - a \sin t$$

et

$$y = \overline{DP} = \overline{AC} - \overline{BC} = a - a \cos t,$$

ce qui donne finalement

$$x = a(t - \sin t) \quad y = a(1 - \cos t).$$

Lorsque t augmente de 2π , x augmente de $2\pi a$, tandis que y reprend sa valeur. On obtient donc toute la courbe à partir de l'arc correspondant à la variation de t sur $[-\pi, \pi]$, grâce à des translations parallèlement à Ox d'amplitude $2\pi a$. En outre, comme x est une fonction impaire de t et que y en est une fonction paire, l'arc correspondant à $[-\pi, 0]$ se déduit de l'arc correspondant à $[0, \pi]$ par symétrie par rapport à Oy . L'intervalle d'étude est donc $[0, \pi]$.

$$x' = a(1 - \cos t) \quad y' = a \sin t.$$

t	0		π
x'	0	+	$2a$
y'	0	+	0
x	0	↗	πa
y	0	↗	$2a$

Pour étudier la tangente à l'origine, calculons x'' et y'' :

$$x'' = a \sin t \quad x''(0) = 0$$

$$y'' = a \cos t \quad y''(0) = a.$$

La tangente est verticale; l'origine est un point de rebroussement de première espèce (Fig. 2.9).

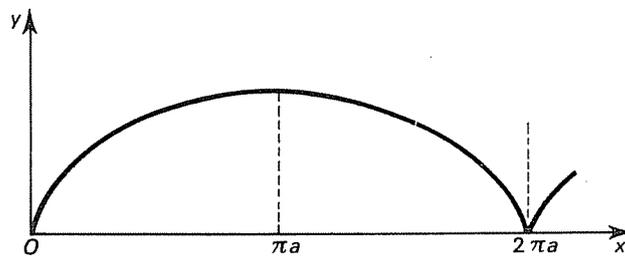


FIG. 2.9

EXERCICES

Construire les arcs paramétrés d'équations suivantes :

$$2.1 \quad x = \frac{t}{1+t^4} \quad y = \frac{t^3}{1+t^4}.$$

$$2.2 \quad x = \frac{t}{t^2-1} \quad y = \frac{1}{t^2-3t+2}.$$

$$2.3 \quad x = \frac{t}{t^2-1} \quad y = \frac{t-2}{(t-1)(t+2)}.$$

$$2.4 \quad x = t^2+2t \quad y = \frac{1+2t}{t^2}.$$

$$2.5 \quad x = \frac{(t+2)^2}{t+1} \quad y = \frac{(t-2)^2}{t-1}.$$

$$2.6 \quad x = \frac{(1+2t)^2}{(3-2t)(1-2t)} \quad y = \frac{(1+2t)^2}{2(3-2t)}.$$

$$2.7 \quad x = \frac{t(t+2)}{t^2-1} \quad y = \frac{t}{t+1}.$$

$$2.8 \quad x = \frac{t^2+2}{t^2+t+1} \quad y = \frac{t^2+2}{t^2-t+3}.$$

$$2.9 \quad x = e^{-1/t} \quad y = te^{2/t}.$$

$$2.10 \quad x = \cos^2 t + \ln \sin t \quad y = \sin t \cos t.$$

$$2.11 \quad x = 1/\cos t \quad y = \sin t.$$

$$2.12 \quad x = \operatorname{tg} t \quad y = 1/\sin t.$$

$$2.13 \quad x = \cos 2t \quad y = \sin 2t - \sin t.$$

$$2.14 \quad x = \cos 4t + 4 \cos t \quad y = \sin 3t.$$

CHAPITRE 3

CONSTRUCTION DES COURBES EN COORDONNÉES POLAIRES

L'emploi des coordonnées polaires permet de représenter très simplement certaines courbes et, par suite, de faciliter les calculs.

Nous allons d'abord chercher les équations de quelques courbes fondamentales en coordonnées polaires. Nous déterminerons ensuite les tangentes, les asymptotes et les points doubles d'une courbe en coordonnées polaires, et nous passerons enfin à la construction des courbes.

ÉQUATIONS DE COURBES FONDAMENTALES

3.1 Équation de la droite. Nous devons distinguer deux cas.

a) *Droite passant par O.* Soit D une droite faisant l'angle θ_0 avec Ox (Fig. 3.1). L'équation de cette droite en coordonnées polaires est tout simplement

$$\theta = \theta_0.$$

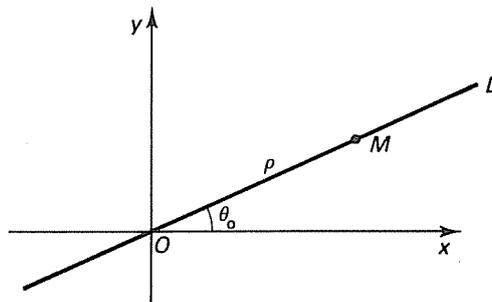


FIG. 3.1

Réciproquement, une équation de cette forme représente la droite passant par O faisant l'angle θ_0 avec Ox .

b) *Droite ne passant pas par O.* Soit maintenant D une droite ne passant pas par O , d'équation

$$ax + by + c = 0,$$

où $c \neq 0$ (Fig. 3.2).

Remplaçons x par $\rho \cos \theta$ et y par $\rho \sin \theta$:

$$a\rho \cos \theta + b\rho \sin \theta + c = 0,$$

soit
$$\rho = \frac{1}{A \cos \theta + B \sin \theta}, \quad (1)$$

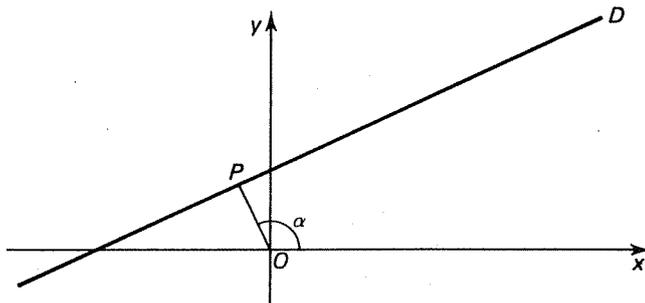


FIG. 3.2

où $A = -a/c$ et $B = -b/c$.

Inversement, une équation de cette forme représente la droite d'équation cartésienne

$$Ax + By = 1.$$

Si D est parallèle à Ox , d'équation cartésienne $y = a$, son équation en coordonnées polaires est

$$\rho = a/\sin \theta.$$

De même, si D est parallèle à Oy , d'équation cartésienne $x = b$, son équation en coordonnées polaires est

$$\rho = b/\cos \theta.$$

Dans le cas général, posons $p = 1/\sqrt{A^2 + B^2}$; soit α l'angle défini par

$$\cos \alpha = Ap \quad \sin \alpha = Bp.$$

Alors

$$\rho = \frac{p}{\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha},$$

soit

$$\rho = \frac{p}{\cos(\theta - \alpha)}. \quad (2)$$

L'équation cartésienne correspondante est

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

On reconnaît l'équation de la droite perpendiculaire en P à la droite OP , où P est le point de coordonnées cartésiennes $(p \cos \alpha, p \sin \alpha)$, c'est-à-dire le point de coordonnées polaires (p, α) .

EXEMPLES

1. Soit D la droite d'équation cartésienne

$$x - y - 5 = 0.$$

Ici, $a = 1$, $b = -1$, $c = -5$; d'où $A = 1/5$ et $B = -1/5$. L'équation de cette droite en coordonnées polaires est

$$\rho = \frac{5}{\cos \theta - \sin \theta}. \quad (1')$$

Posons $p = 1/\sqrt{A^2 + B^2} = 5/\sqrt{2}$. Alors $\cos \alpha = Ap = 1/\sqrt{2}$ et $\sin \alpha = Bp = -1/\sqrt{2}$. Ainsi, $\alpha = -\pi/4$, et l'équation de D en coordonnées polaires s'écrit encore

$$\rho = \frac{5}{\sqrt{2} \cos(\theta + \pi/4)}. \quad (2')$$

2. La droite d'équation polaire

$$\rho = \frac{7}{2 \cos \theta - 3 \sin \theta}$$

a pour équation cartésienne

$$2x - 3y - 7 = 0.$$

3.2 Équation du cercle. L'équation générale d'un cercle en coordonnées polaires est compliquée et sans intérêt. Toutefois, cette équation devient très simple dans les deux cas suivants :

- cercle de centre O ;
- cercle passant par O .

a) *Cercle de centre O .* Soit C un cercle de centre O et de rayon R (Fig. 3.3). L'équation de ce cercle en coordonnées polaires est tout simplement

$$\rho = R.$$

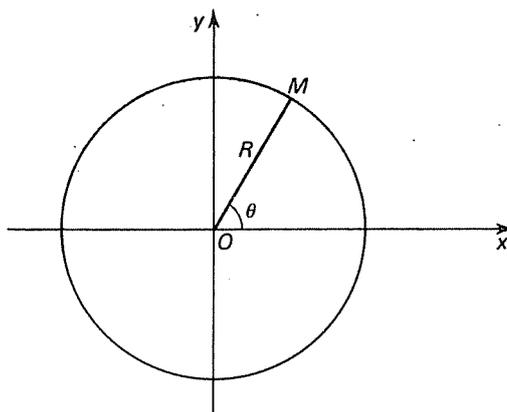


FIG. 3.3

Réciproquement, une équation de cette forme représente le cercle de centre O et de rayon R .

b) *Cercle passant par O .* Soit maintenant C un cercle passant par O . Son équation cartésienne est de la forme

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0,$$

où α et β sont les coordonnées du centre (Fig. 3.4).

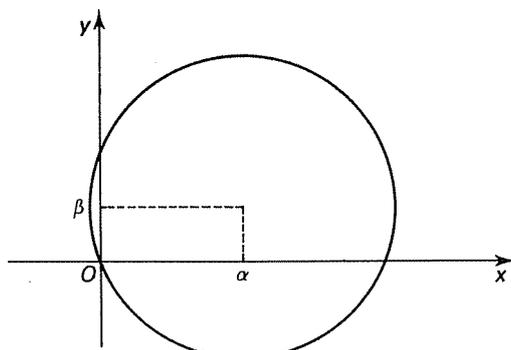


FIG. 3.4

Remplaçons x par $\rho \cos \theta$ et y par $\rho \sin \theta$:

$$\rho^2 - 2\alpha\rho \cos \theta - 2\beta\rho \sin \theta = 0.$$

En supposant ρ non nul, nous pouvons simplifier par ρ :

$$\rho = 2\alpha \cos \theta + 2\beta \sin \theta.$$

Cette équation représente cependant le cercle tout entier, y compris l'origine, atteinte lorsque

$$\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta = 0.$$

L'équation d'un cercle est donc de la forme

$$\rho = A \cos \theta + B \sin \theta. \quad (3)$$

Réciproquement, multiplions les deux membres de l'équation (3) par ρ :

$$\rho^2 = A\rho \cos \theta + B\rho \sin \theta,$$

c'est-à-dire

$$x^2 + y^2 - Ax - By = 0.$$

On reconnaît l'équation du cercle passant par O centré au point de coordonnées cartésiennes $(A/2, B/2)$.

Si C est centré sur Ox , son équation en coordonnées polaires est

$$\rho = A \cos \theta, \quad \text{où } |A| = 2R.$$

De même, si C est centré sur Oy ,

$$\rho = B \sin \theta, \quad \text{où } |B| = 2R.$$

EXEMPLES

1. Soit C le cercle d'équation cartésienne

$$x^2 + y^2 = 16.$$

Remplaçons x par $\rho \cos \theta$ et y par $\rho \sin \theta$; nous obtenons $\rho^2 = 16$, soit

$$\rho = 4 \quad \text{ou} \quad \rho = -4.$$

Mais, pour tout nombre réel θ , le point de coordonnées polaires $(-4, \theta)$ n'est autre

que le point de coordonnées polaires $(4, \theta + \pi)$. L'équation de C en coordonnées polaires est

$$\rho = 4.$$

2. Soit C le cercle d'équation en coordonnées polaires

$$\rho = \cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta.$$

Il s'agit du cercle passant par O et centré au point $(1/2, \sqrt{3}/2)$. Son équation cartésienne est

$$x^2 + y^2 - x/2 - (\sqrt{3}/2)y = 0.$$

Son rayon est $R = \sqrt{1/4 + 3/4} = 1$.

Remarquons que l'équation de C en coordonnées polaires s'écrit encore

$$\rho = 2 \cos \theta \cos \frac{\pi}{3} + 2 \sin \theta \sin \frac{\pi}{3} = 2 \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right).$$

3.3 Coniques ayant un foyer en O . L'équation générale d'une conique en coordonnées polaires est sans intérêt. Examinons le seul cas où un foyer F est en O . Soit D la directrice associée, d'équation cartésienne

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - q = 0. \tag{5}$$

La conique C est l'ensemble des points M tels que

$$\|MO\| = e \|MH\|,$$

où e est l'excentricité et H la projection orthogonale de M sur D (Fig. 3.5).

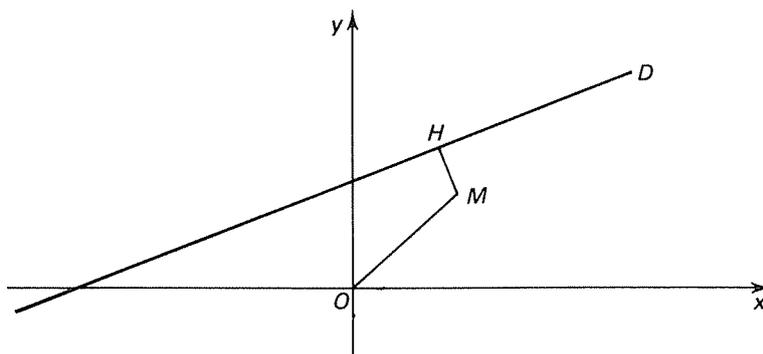


FIG. 3.5

Or,

$$\|MO\| = |\rho| \quad \text{et} \quad \|MH\| = |\rho \cos \theta \cos \alpha + \rho \sin \theta \sin \alpha - q|.$$

Ainsi,

$$|\rho| = e |\rho \cos (\theta - \alpha) - q|,$$

soit

$$\rho = e\rho \cos (\theta - \alpha) - eq \quad \text{ou} \quad \rho = -e\rho \cos (\theta - \alpha) + eq.$$

Résolvons en ρ :

$$\rho_1 = -\frac{eq}{1 - e \cos (\theta - \alpha)} \quad \text{ou} \quad \rho_2 = \frac{eq}{1 + e \cos (\theta - \alpha)}.$$

En fait, ces deux équations représentent le même ensemble de points, puisque $\rho_1(\theta + \pi) = -\rho_2(\theta)$. Le nombre $p = eq$ s'appelle *paramètre* de la conique C . L'équation polaire de C s'écrit finalement

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \alpha)}. \quad (6)$$

Réciproquement, en remontant les calculs, on voit que tout point M vérifiant l'équation (6) est tel que $\|MO\| = e \|MH\|$, où H est la projection de M sur la droite D d'équation (5).

La droite Δ d'équation $\theta = \alpha$ est axe de symétrie.

Lorsque $e = 1$, C est une parabole, et Δ est l'axe de cette parabole. Le sommet est le point $(P/2, \alpha)$.

Lorsque $e \neq 1$, C est une conique à centre, et Δ est l'axe focal de cette conique. On obtient les sommets en remplaçant θ par α et par $\alpha + \pi$. La distance des sommets est

$$2a = |\rho(\alpha) + \rho(\alpha + \pi)| = \left| \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} \right|.$$

D'où

$$a = \left| \frac{p}{1-e^2} \right| \quad \text{et} \quad c = ea = e \left| \frac{p}{1-e^2} \right|.$$

Enfin,

$$b^2 = |a^2 - c^2| = a^2 |1 - e^2| = a|p|.$$

EXEMPLES

1. Soit C la courbe d'équation polaire

$$\rho = \frac{a}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}.$$

Il est immédiat que

$$\rho = \frac{a}{1 + \cos \theta}.$$

On reconnaît l'équation d'une parabole de foyer O , d'axe Ox et de paramètre a .

2. Soit C la courbe d'équation polaire

$$\rho = \frac{1}{1 + \sqrt{2} \sin \theta}.$$

L'excentricité est $\sqrt{2}$; il s'agit donc d'une hyperbole équilatère, dont l'axe focal est Oy . Le demi-grand axe est

$$a = \frac{p}{1-e^2} = \frac{1}{2-1} = 1.$$

La demi-distance focale est

$$c = ea = \sqrt{2}.$$

3. Soit C la conique d'équation

$$\rho = \frac{2}{1 + \frac{1}{2} \cos(\theta - \pi/4)}.$$

Il s'agit d'une ellipse dont l'axe focal est la première bissectrice. Ici,

$$e = \frac{1}{2}, \quad a = 2/(1 - 1/4) = 8/3, \quad c = 4/3 \quad \text{et} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = 4/\sqrt{3}.$$

ÉTUDES DES COURBES EN COORDONNÉES POLAIRES

3.4 Tangente en un point. Nous devons encore distinguer deux cas.

a) *Tangente à l'origine.* Examinons d'abord le cas où la courbe C passe par le pôle, c'est-à-dire où ρ s'annule pour une certaine valeur θ_0 de l'angle polaire θ (Fig. 3.6). La corde joignant O au point M de coordonnées polaires (ρ, θ) a pour position limite la droite d'équation polaire $\theta = \theta_0$.

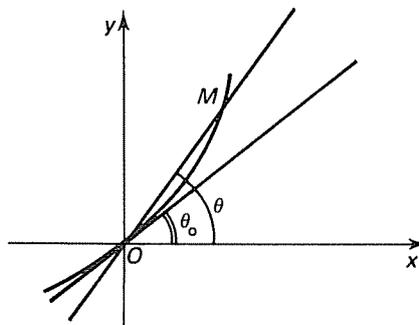


FIG. 3.6

Bien entendu, si la courbe passe deux fois par le pôle, il y a deux tangentes. Le pôle est alors un point double.

EXEMPLES

1. Soit la courbe d'équation polaire $\rho = a \cos \theta$. On voit de suite que $\rho = 0$ pour $\theta = \pi/2$; la tangente en O est donc l'axe Oy . (On peut contrôler ce résultat en remarquant qu'il s'agit d'un cercle passant par O et centré sur Ox).

2. Soit la courbe d'équation $\rho = a \sqrt{\cos 2\theta}$. Il est clair que ρ s'annule pour $\theta = -\pi/4$ et pour $\theta = \pi/4$. La courbe est donc tangente aux deux bissectrices des axes.

b) *Tangente en un point autre que le pôle.* Soit u le vecteur unitaire faisant l'angle θ avec Ox . Par définition des coordonnées polaires, $OM = \rho u$. Par suite,

$$\frac{dOM}{d\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \mathbf{u} + \rho \frac{d\mathbf{u}}{d\theta} = \rho' \mathbf{u} + \rho \mathbf{u}_1,$$

où \mathbf{u}_1 est le vecteur unitaire faisant l'angle $\theta + \pi/2$ avec Ox (voir chapitre 1). L'angle V de la tangente avec OM (Fig. 3.7) est donc défini par

$$\operatorname{tg} V = \rho / \rho'.$$

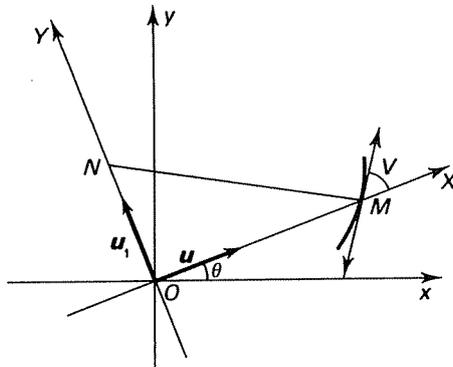


FIG. 3.7

Cette formule n'a pas de sens si $\rho' = 0$. Mais, dans ce cas, $dOM/d\theta = \rho \mathbf{u}_1$, la tangente est parallèle à \mathbf{u}_1 , et donc perpendiculaire à OM . Autrement dit, $V = \pi/2$.

On peut tracer graphiquement la tangente en M de la façon suivante : soient OX et OY les axes issus de O définis par \mathbf{u} et \mathbf{u}_1 . La normale en M (c'est-à-dire la perpendiculaire à la tangente) rencontre OY en un point N , et l'angle de la normale avec OY est évidemment égal à V . Comme $\operatorname{tg} V = \rho / \rho'$ et que $OM = \rho$, nous voyons que $ON = \rho'$. On portera donc sur OY le point N défini par $ON = \rho'$; il suffit alors de tracer la perpendiculaire issue de M à MN pour obtenir la tangente en M .

— **3.5 Branches infinies.** L'étude des branches infinies comporte trois cas principaux :

a) *Le rayon polaire ρ tend vers l'infini pour une valeur finie de θ .*

Supposons d'abord que ρ devienne infini lorsque θ tend vers 0 (ou vers $k\pi$). La courbe présente alors une branche infinie dans la direction de Ox . Pour déterminer l'asymptote éventuelle, on emploie la représentation paramétrique

$$x = \rho \cos \theta \quad y = \rho \sin \theta.$$

Si y admet une limite a lorsque θ tend vers 0 (ou vers $k\pi$), la courbe admet pour asymptote la droite d'équation $y = a$.

Supposons de même que ρ devienne infini lorsque θ tend vers $\pi/2$ (ou vers $\pi/2 + k\pi$). Si $x = \rho \cos \theta$ admet une limite b , la courbe admet pour asymptote la droite d'équation $x = b$.

Pour étudier le cas général où ρ tend vers l'infini lorsque θ tend vers θ_0 , on se ramène au premier cas en utilisant le système d'axes auxiliaire OX , OY faisant les angles θ_0 et $\theta_0 + \pi/2$ avec Ox (Fig. 3.8).

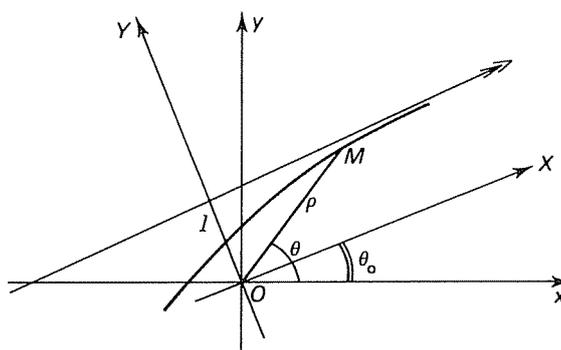


FIG. 3.8

Alors

$$Y = \rho \sin(\theta - \theta_0).$$

La courbe admet une asymptote si et seulement si Y admet une limite finie l . Dans ces conditions, l'équation de l'asymptote dans le repère XOY est $Y = l$. En faisant un développement limité de Y au voisinage de θ_0 , on peut déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Remarque. — On n'emploiera jamais cette méthode, trop générale, dans les deux cas particuliers examinés ci-dessus. Il n'y a aucune raison de prendre un système d'axes auxiliaire XOY quand le système xOy permet de terminer l'étude!

EXEMPLES

1. Soit la courbe d'équation

$$\rho = a \operatorname{tg} \theta.$$

Nous voyons que ρ devient infini lorsque θ tend vers $\pi/2$. La courbe admet donc une branche infinie dans la direction de Oy . Or,

$$x = \rho \cos \theta = a \cos \theta \operatorname{tg} \theta = a \sin \theta.$$

Par suite, x tend vers a lorsque θ tend vers $\pi/2$. La courbe admet donc pour asymptote la droite d'équation $x = a$.

2. Soit la courbe d'équation

$$\rho = \frac{a}{1 - 2 \cos \theta}.$$

Il est clair que ρ devient infini lorsque $\cos \theta$ tend vers $1/2$, c'est-à-dire lorsque θ tend vers $\pi/3$. Posons

$$Y = \rho \sin(\theta - \pi/3).$$

D'une part, ρ s'écrit sous la forme

$$\rho = \frac{a}{2\left(\frac{1}{2} - \cos \theta\right)} = \frac{a}{2\left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos \theta\right)} = \frac{a}{4 \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}.$$

D'autre part,

$$\sin(\theta - \pi/3) = 2 \sin(\theta/2 - \pi/6) \cos(\theta/2 - \pi/6).$$

D'où

$$Y = a \frac{\cos(\theta/2 - \pi/6)}{2 \sin(\theta/2 + \pi/6)}$$

et

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi/3} Y = a/\sqrt{3},$$

valeur que l'on reportera sur OY pour obtenir l'asymptote.

3. Soit la courbe d'équation

$$\rho = a \frac{\theta}{\theta - \pi/3}.$$

La même méthode conduit à poser

$$Y = \rho \sin(\theta - \pi/3) = a\theta \frac{\sin(\theta - \pi/3)}{\theta - \pi/3}.$$

La limite de Y lorsque θ tend vers $\pi/3$ est $a\pi/3$.

b) *Le rayon vecteur ρ tend vers l'infini avec l'angle polaire.* On dit alors que la courbe admet une *branche spirale*.

EXEMPLE. Si $\rho = a\theta^2$, ρ tend vers $+\infty$ lorsque θ tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$. La courbe admet donc des branches spirales.

c) *Le rayon vecteur ρ tend vers une limite finie lorsque θ tend vers l'infini.* On dit alors que la courbe admet un *cercle asymptote*. Plus précisément, si ρ tend vers a , la courbe est asymptote au cercle de centre O et de rayon a .

Lorsque $a = 0$, le cercle asymptote est réduit au point O ; on dit alors que O est un *point asymptote*.

EXEMPLES

1. Lorsque $\rho = a/(\theta - 1)$, la courbe admet pour cercle asymptote le cercle de centre O et de rayon a .

2. Lorsque $\rho = a/(1 + e^\theta)$, la courbe admet pour cercle asymptote le cercle de centre O et de rayon a , car ρ tend vers a lorsque θ tend vers $-\infty$; elle admet aussi le point O pour point asymptote, car ρ tend vers 0 lorsque θ tend vers $+\infty$.

3.6 Intervalle d'étude et symétries. Si $\rho = f(\theta)$ est une fonction admettant 2π pour période, on repasse par les mêmes points lorsque θ augmente de 2π . On prendra alors pour intervalle d'étude un intervalle de longueur 2π .

Plus généralement, si f admet pour période $2n\pi$, on prendra un intervalle d'étude de longueur $2n\pi$.

On étudiera ensuite $f(\theta + n\pi)$. Si n est impair et si

$$f(\theta + n\pi) = f(\theta),$$

on prendra un intervalle d'étude de longueur $n\pi$, et l'on complètera la courbe ainsi obtenue à l'aide de la symétrie par rapport à O .

Supposons maintenant que

$$f(\theta + n\pi) = -f(\theta).$$

Si n est pair, on arrive à la même conclusion que ci-dessus. Si, enfin, n est impair, on obtient toute la courbe en faisant varier θ dans un intervalle de longueur $n\pi$.

On peut encore réduire l'intervalle d'étude lorsque la courbe présente des symétries. Ainsi, lorsque $f(-\theta) = f(\theta)$ ou que $f(\pi - \theta) = -f(\theta)$, la courbe est symétrique par rapport à Ox . Lorsque $f(-\theta) = -f(\theta)$ ou que $f(\pi - \theta) = f(\theta)$, la courbe est symétrique par rapport à Oy .

Plus généralement, si $f(\alpha - \theta) = f(\theta)$, la courbe est symétrique par rapport à la droite issue de O et faisant l'angle $\alpha/2$ avec Ox .

Dans tous ces cas, on peut réduire l'intervalle d'étude de moitié, quitte à compléter la courbe par symétrie. Bien entendu, si la courbe présente plusieurs symétries, on en profitera pour réduire plusieurs fois l'intervalle d'étude.

EXEMPLES

1. Pour construire la conique d'équation $\rho = p/(1 + e \cos \theta)$, on remarque d'abord que ρ ne change pas lorsque θ augmente de 2π . On obtient donc toute la courbe en faisant varier θ dans un intervalle de longueur 2π . De plus, $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$; la courbe est donc symétrique par rapport à Ox . Il suffit de faire θ de 0 à π , puis de compléter la courbe par symétrie.

2. Pour construire le cercle d'équation $\rho = a \sin \theta$, remarquons que $\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$. L'intervalle d'étude a pour longueur 2π . Mais $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$. On obtient toute la courbe en faisant varier θ de 0 à π . Enfin, $\rho(\pi - \theta) = \rho(\theta)$. La courbe est symétrique par rapport à Oy , et il suffit de faire varier θ de 0 à $\pi/2$ pour déterminer toute la courbe.

3.7 Points doubles. Pour voir si l'origine est point double, on cherche si l'équation $f(\theta) = 0$ a plus d'une racine dans l'intervalle d'étude (compte non tenu des symétries).

Un point autre que O est point double soit si

$$f(\theta + 2k\pi) = f(\theta),$$

soit si

$$f(\theta + (2k + 1)\pi) = -f(\theta).$$

On remarquera que la première éventualité ne peut se présenter si 2π est période.

EXEMPLES

1. Soit la courbe d'équation

$$\rho = a(\cos \theta - \cos 2\theta).$$

La période est 2π . Les points doubles autres que O ne peuvent être définis que par la relation

$$f(\theta + \pi) = -f(\theta),$$

soit

$$-\cos \theta - \cos 2\theta = -\cos \theta + \cos 2\theta.$$

D'où $\cos 2\theta = 0$. On obtient ainsi les points doubles $(a/\sqrt{2}, \pi/4)$ et $(a/\sqrt{2}, -\pi/4)$.

2. Soit la courbe d'équation

$$\rho = a \frac{\theta}{\theta - \pi/3}.$$

L'équation

$$\frac{\theta}{\theta - \pi/3} = \frac{\theta + 2k\pi}{\theta + 2k\pi - \pi/3}$$

n'a pas de solution. L'équation

$$\frac{\theta}{\theta - \pi/3} = -\frac{\theta + (2k+1)\pi}{\theta + (2k+1)\pi - \pi/3}$$

admet une infinité de solutions, définies par

$$2\theta^2 + \left[(4k+2)\pi - \frac{2\pi}{3} \right] \theta - \frac{\pi}{3} (2k+1)\pi = 0.$$

En effet, pour tout entier rationnel k , le discriminant réduit, à savoir

$$\left[(2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \right]^2 + \frac{2\pi}{3} (2k+1)\pi,$$

est positif.

3.8 Tracé d'une courbe en coordonnées polaires. Le sens de variation est en évidence dans quelques cas élémentaires; mais en général il est difficile à établir, et n'a guère d'intérêt. On ne calculera donc pas ρ' .

Au contraire, il est essentiel de connaître le signe de ρ et de déterminer les valeurs de θ pour lesquelles ρ s'annule. En effet, on trace la courbe en balayant le plan par une droite tournant autour de O . Si θ varie de α à β , par exemple, cette droite balayera un secteur angulaire formé de deux parties symétriques par rapport à O . La courbe se place dans l'une ou l'autre de ces parties suivant le signe de ρ .

Voici en résumé les règles à suivre pour le tracé d'une courbe :

Règles

1. On détermine l'intervalle d'étude, en tenant compte de la périodicité et des symétries.
2. On cherche les valeurs de θ pour lesquelles ρ est défini.
3. On détermine le signe de ρ et les valeurs de θ pour lesquelles ρ s'annule.

4. On dresse un tableau de variation rassemblant les résultats précédents.
5. On étudie les branches infinies.
6. On détermine les points doubles.

Remarque. — En pratique, on commence par tracer grossièrement la courbe. On ne cherchera les points doubles que s'ils sont en évidence sur ce tracé.

EXEMPLES

1. Construire la courbe d'équation

$$\rho = a \sin 2\theta.$$

Il est clair que ρ admet π pour période, ce qui montre que la courbe est symétrique par rapport à O . De plus, $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$, ce qui montre que la courbe est symétrique par rapport à Oy . On peut prendre pour intervalle d'étude $[0, \pi/2]$. En outre

$$\rho(\pi/2 - \theta) = \sin(\pi - 2\theta) = \sin 2\theta = \rho(\theta).$$

La courbe est donc symétrique par rapport à la première bissectrice, ce qui permet de réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi/4]$.

Le sens de variation de ρ est en évidence, sans qu'il soit nécessaire de calculer ρ' .

θ	0	$\pi/4$
ρ	0	a

Lorsque $\theta = \pi/4$, ρ' est nul, et la tangente est perpendiculaire à OM . La courbe a la forme d'une rosace à quatre branches (Fig. 3.9).

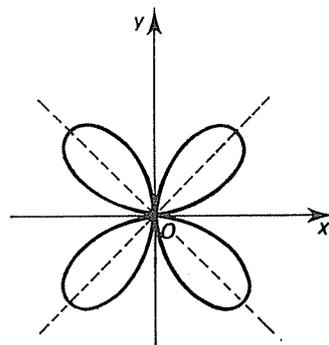


FIG. 3.9

2. Construire la courbe d'équation

$$\rho = \frac{a}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

La période est 4π . Comme $\rho(\theta + 2\pi) = -\rho(\theta)$, la courbe est symétrique par

rapport à O . Comme $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$, la courbe est symétrique par rapport à Oy (ce qui implique qu'elle est encore symétrique par rapport à Ox).

En résumé, il suffit de faire varier θ de 0 à π .

Lorsque θ tend vers 0 , ρ devient infini. Or,

$$y = \rho \sin \theta = a \frac{\sin \theta}{\sin \frac{\theta}{2}} = 2a \cos \frac{\theta}{2};$$

donc y tend vers $2a$, et la courbe admet une asymptote horizontale.

Ici aussi, le sens de variation est en évidence.

θ	0	π
ρ	$+\infty$	a

On obtient ainsi le quart de la courbe (Fig. 3.10), puis la courbe tout entière à l'aide de deux symétries (Fig. 3.11).

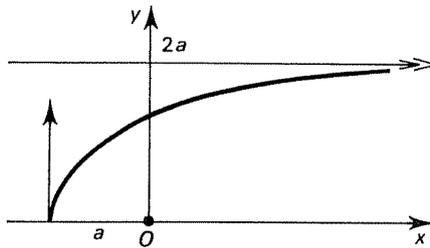


FIG. 3.10

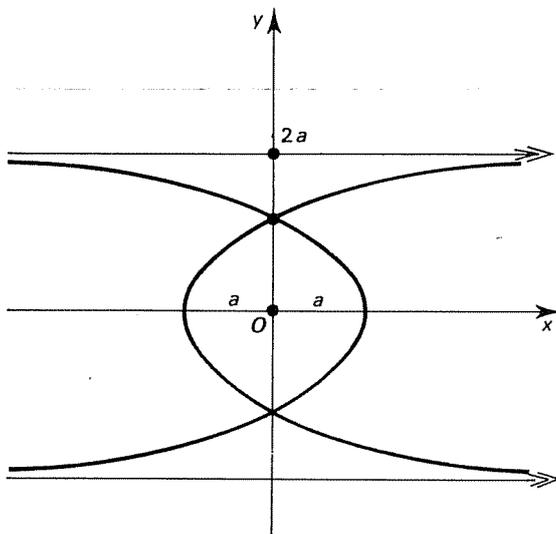


FIG. 3.11

3. Construire la courbe d'équation

$$\rho = \frac{a}{1 - 2 \cos^2 \theta}.$$

Remarquons que $\rho = -a/\cos 2\theta$. La période est π ; la courbe est donc symétrique par rapport à O . De plus, ρ est une fonction paire de θ , et $\rho\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \rho(\theta)$. On prendra pour intervalle d'étude $[0, \pi/4]$. La valeur $\pi/4$ est à exclure, car ρ n'est pas défini.

θ	0		$\pi/4$
ρ	$-a$	\searrow	$-\infty$

Pour étudier la branche infinie, considérons

$$Y = \rho \sin(\theta - \pi/4) = (\sqrt{2}/2)(\sin \theta - \cos \theta).$$

Or, $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta)$.

Ainsi,
$$Y = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{a}{\cos \theta + \sin \theta}.$$

La limite de Y lorsque θ tend vers $\pi/4$ est donc $a/2$. D'où la courbe (Fig. 3.12).

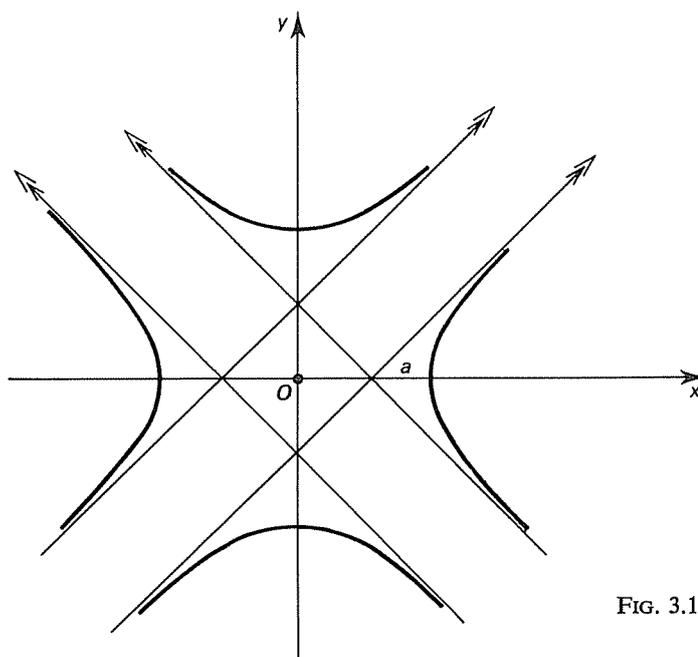


FIG. 3.12

3.9 La cardioïde. C'est la courbe d'équation

$$\rho = a(1 + \cos \theta).$$

La période est 2π . Puisque ρ est une fonction paire de θ , la courbe est symétrique par rapport à Ox . L'intervalle d'étude est $[0, \pi]$.

θ	0	π
ρ	$2a$	0

Comme ρ s'annule lorsque $\theta = \pi$, la courbe est tangente en O à Ox . L'origine est un point de rebroussement (Fig. 3.13).

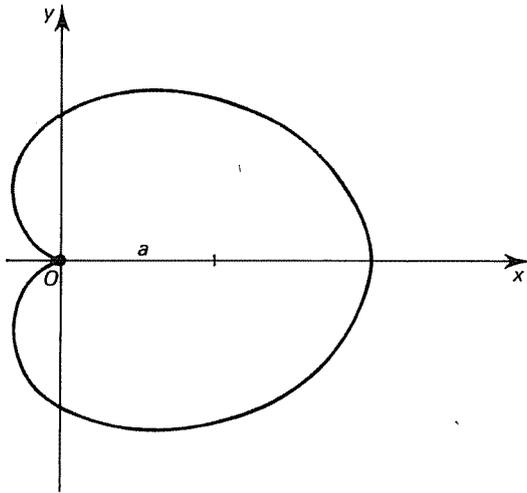


FIG. 3.13

Cette courbe s'utilise en radiogoniométrie dans la recherche d'un émetteur mobile à l'aide d'un cadre mobile autour d'un axe vertical.

3.10 La cissoïde. C'est la courbe d'équation

$$\rho = a \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}.$$

La période est 2π . Le changement de θ en $-\theta$ laisse ρ invariant. La courbe est symétrique par rapport à Ox .

θ	0	$\pi/2$
ρ	0	$+\infty$

Nous voyons que $x = \rho \cos \theta = a \sin^2 \theta$ tend vers a lorsque θ tend vers $\pi/2$. La courbe admet donc pour asymptote la droite d'équation $x = a$ (Fig. 3.14).

Ici aussi, l'origine est un point de rebroussement.

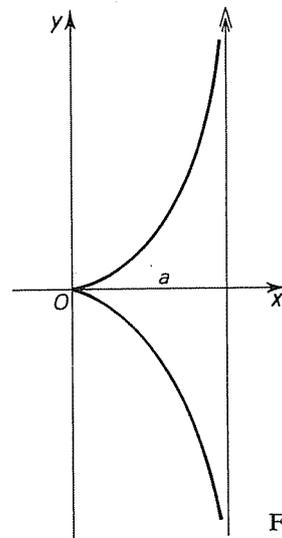


FIG. 3.14

3.11 La strophoïde. C'est la courbe d'équation

$$\rho = a \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}.$$

L'intervalle d'étude est encore $[0, \pi/2[$.

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$
ρ	a	0	$-\infty$

Lorsque θ tend vers $\pi/2$, $x = \rho \cos \theta = a \cos 2\theta$ tend vers $-a$. D'où l'asymptote (Fig. 3.15).

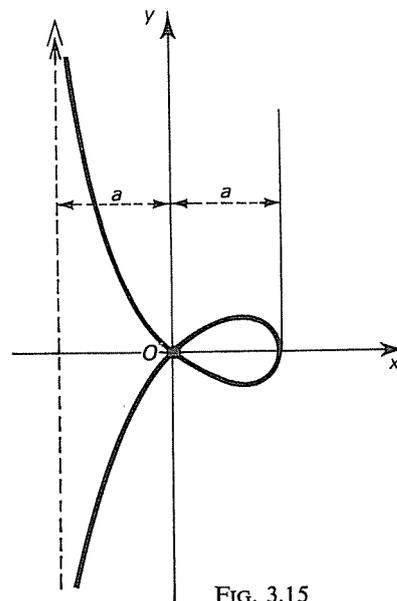


FIG. 3.15

L'origine est un point double, et les deux tangentes en ce point sont perpendiculaires.

3.12 La lemniscate de Bernoulli. C'est l'ensemble des points dont le produit des distances à deux points donnés F et F' est égal au carré de la demi-distance de ces points.

Prenons pour axes de coordonnées la droite joignant F et F' et la médiatrice du segment $[F, F']$. Les points F et F' ont alors pour coordonnées $(c, 0)$ et $(-c, 0)$. La condition donnée s'écrit

$$\|MF\| \cdot \|MF'\| = c^2,$$

soit, en coordonnées cartésiennes,

$$[(x-c)^2 + y^2][(x+c)^2 + y^2] = c^4,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$(\rho^2 + c^2 - 2c\rho \cos \theta)(\rho^2 + c^2 + 2c\rho \cos \theta) = c^4,$$

ou encore

$$(\rho^2 + c^2)^2 - 4c^2 \rho^2 \cos^2 \theta = c^4,$$

ou enfin

$$\rho^4 = 2c^2 \rho^2 \cos 2\theta.$$

Posons $a = \sqrt{2} c$; on obtient toute la courbe en prenant

$$\rho = a \sqrt{\cos 2\theta}.$$

Les axes de coordonnées sont axes de symétrie. Comme $\cos 2\theta$ doit être positif, on peut prendre pour intervalle d'étude $[0, \pi/4]$.

θ	0	$\pi/4$
ρ	a	0

La courbe a la forme d'un huit (Fig. 3.16). Les tangentes à l'origine sont perpendiculaires.

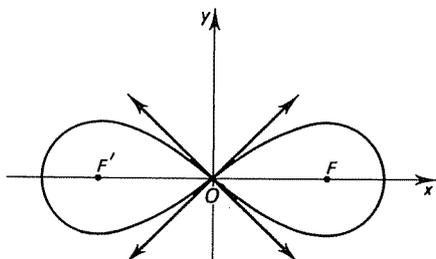


FIG. 3.16

3.13 Les spirales. On appelle ainsi les courbes admettant une branche spirale ou un point asymptote. Il y a trois spirales classiques :

a) *Spirale d'Archimède.* Son équation est

$$\rho = a\theta.$$

La courbe est symétrique par rapport à Oy . Comme il n'y a pas de période, on doit prendre pour intervalle d'étude $[0, +\infty[$.

θ	0	$+\infty$
ρ	0	$+\infty$

La courbe est tangente en O à Ox (Fig. 3.17).

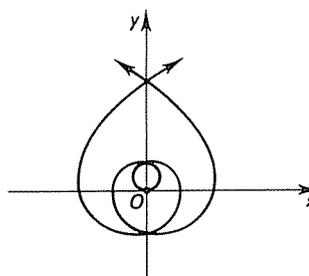


FIG. 3.17

b) *Spirale hyperbolique*. Son équation est

$$\rho = a/\theta.$$

La courbe est encore symétrique par rapport à Oy .

θ	0	$+\infty$
ρ	$+\infty$	0

L'origine est point asymptote. Lorsque θ tend vers 0, y tend vers a ; la courbe admet donc une asymptote horizontale (Fig. 3.18).

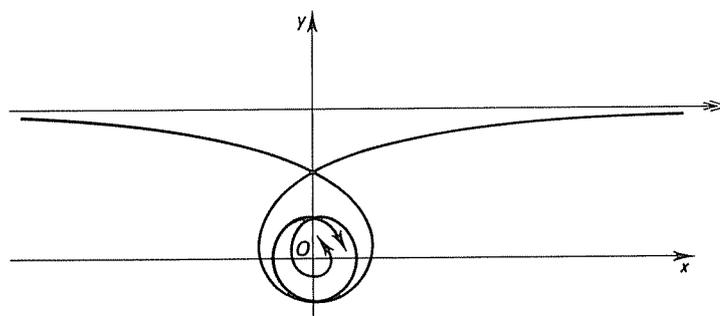


FIG. 3.18

c) *Spirale logarithmique*. Son équation est

$$\rho = a e^{m\theta}.$$

Il n'y a ni symétrie ni période.

θ	$-\infty$		$+\infty$
ρ	0	\nearrow	$+\infty$

L'origine est point asymptote. On remarquera que

$$\rho(\theta + 2\pi) = e^{2\pi} \rho(\theta).$$

On peut donc déduire la courbe tout entière à partir de l'arc correspondant à $[0, 2\pi]$, à l'aide d'homothéties de centre O (Fig. 3.19).

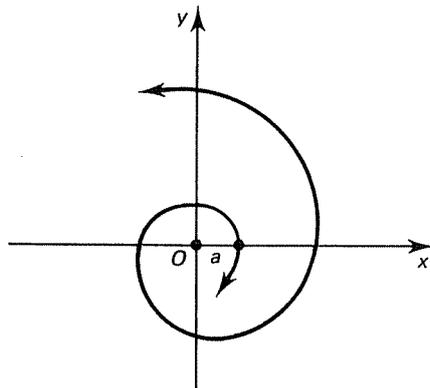


FIG. 3.19

EXERCICES

Transformer les équations suivantes en coordonnées cartésiennes :

$$3.1 \quad \rho = \frac{a}{\cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} \right) - \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$3.2 \quad \rho = \frac{a}{\cos \frac{\theta}{2} \left(2 \sin \frac{\theta}{2} - 5 \cos \frac{\theta}{2} \right) + \frac{5}{2}}$$

$$3.3 \quad \rho = a \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$3.4 \quad \rho = a \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$$

$$3.5 \quad \rho = a \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$3.6 \quad \rho = a \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

Construire les courbes d'équations suivantes :

$$3.7 \quad \rho = \frac{a}{1 + e^{-\theta}}$$

$$3.8 \quad \rho = a \frac{\theta}{\theta^2 - 1}$$

$$3.9 \quad \rho = a(1 + 2 \cos \theta)$$

$$3.10 \quad \rho = a \sin 3\theta$$

$$3.11 \quad \rho = a(3 - \cos 6\theta)$$

$$3.12 \quad \rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$$

$$3.13 \quad \rho = a \sin 2\theta (\cos \theta + \sin \theta)$$

$$3.14 \quad \rho = a \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\cos 2\theta}$$

$$3.15 \quad \rho = \frac{a}{\cos \theta + \cos 3\theta}$$

$$3.16 \quad \rho = a \frac{\sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2}}{1 + \sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2}}$$

$$3.17 \quad \rho = a \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos \theta + \cos 2\theta}$$

$$3.18 \quad \rho = a \left(\sqrt{3} + \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)$$

$$3.19 \quad \rho = a \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta \cos 2\theta}$$

$$3.20 \quad \rho = a \left(\cos \theta + \frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} \right)$$

$$3.21 \quad \rho = a \frac{\cos^3 \theta}{\cos 3\theta}$$

$$3.22 \quad \rho = a \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{1 - 2 \cos \theta}$$

$$3.23 \quad \rho = a \frac{2 \cos \theta - 1}{2 \cos 2\theta - 1}$$

$$3.24 \quad \rho = \frac{a}{\sqrt{1 + \cos 2\theta} + \sqrt{1 + \sin 2\theta}}$$

3.25 Intégrer l'équation différentielle suivante, en passant en coordonnées polaires :

$$xy'^3 - 3yy'^2 - 3xy' + y = 0.$$

CHAPITRE 4

ÉTUDE MÉTRIQUE DES COURBES

4.1 Longueur d'un arc de courbe. Nous avons déjà précisé au tome 1 la notion intuitive de longueur d'un segment. On en déduit aussitôt la longueur d'une ligne polygonale de sommets $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$: c'est la somme des longueurs des segments $[M_0, M_1], [M_1, M_2], \dots, [M_{n-1}, M_n]$.

Soit maintenant (I, f) un arc paramétré, où I est un intervalle fermé $[a, b]$. Soit $S = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision de I , c'est-à-dire une suite finie strictement croissante d'éléments de I telle que $t_0 = a$ et $t_n = b$:

$$t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b.$$

La ligne polygonale de sommets $M_0 = A = f(a), M_1 = f(t_1), M_2 = f(t_2), \dots, M_n = B = f(b)$ est appelée ligne polygonale inscrite dans l'arc paramétré associée à la subdivision S (Fig. 4.1).

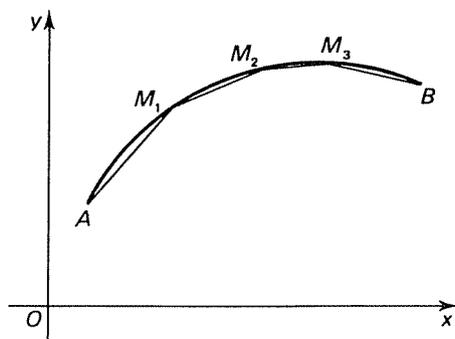


FIG. 4.1

On dit que l'arc paramétré est *rectifiable* si l'ensemble des longueurs des lignes polygonales inscrites dans cet arc admet une borne supérieure; cette borne supérieure s'appelle *longueur* de l'arc paramétré et se note l . (Dans le cas où cette borne supérieure n'existe pas, on dit parfois que l'arc paramétré a une longueur infinie.)

On démontre que la longueur de l'arc est encore la limite des longueurs des lignes polygonales inscrites : plus précisément, pour tout nombre réel strictement positif ε , il existe un nombre réel strictement positif η tel que, pour toute subdivision S de I satisfaisant à la relation

$$\sup_{i \in [1, n]} (t_i - t_{i-1}) \leq \eta,$$

la différence entre l et la longueur de la ligne polygonale inscrite associée à S soit inférieure à ε .

En prenant $n = 1$, on voit que $\|AB\| \leq l$, ce qu'on exprime traditionnellement en disant que la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.

On montre aisément que si f est continûment dérivable, l'arc est rectifiable; dans ces conditions, sa longueur est donnée par la relation

$$l = \int_a^b \|f'(t)\| dt.$$

Si y est fonction de l'abscisse x , le vecteur f' a pour composantes 1 et y' ; d'où

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (1)$$

Plus généralement, si $x = f(t)$ et $y = g(t)$, le vecteur $f'(t)$ a pour composantes $f'(t)$ et $g'(t)$; d'où

$$l = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)} dt. \quad (2)$$

En coordonnées polaires, $OM = \rho u$; donc

$$\frac{dOM}{d\theta} = \rho' u + \rho \frac{du}{d\theta} = \rho' u + \rho u_1, \quad \text{où } u_1 = \frac{du}{d\theta}.$$

Par suite,

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\theta. \quad (3)$$

Remarque. — Dans le calcul de l , on doit extraire une racine carrée. Rappelons qu'une racine carrée est toujours positive!

4.2 Exemples.

1. *Arc de parabole.* Soit la parabole d'équation $y = x^2/8$. Calculons la longueur de l'arc correspondant à l'intervalle $[0, 4]$:

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{x^2}{16}} dx.$$

Posons $x = 4 \operatorname{sh} t$; alors

$$l = \int_0^{\operatorname{Arg sh} 1} 4 \operatorname{ch}^2 t dt.$$

Or,

$$\int 4 \operatorname{ch}^2 t dt = 2 \int (1 + \operatorname{ch} 2t) dt = 2t + \operatorname{sh} 2t.$$

Finalement,

$$l = 2 \operatorname{Arg sh} 1 + 2\sqrt{2} = 2[\ln(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}].$$

2. *Arc de parabole semi-cubique.* Calculons l'arc de la courbe d'équation $y^2 = 8x^3$ correspondant à x compris entre 1 et 3 et à y positif. Puisque $y = 2\sqrt{2}x^{3/2}$, $y' = 3\sqrt{2}x^{1/2}$ et

$$l = \int_1^3 \sqrt{1 + 18x} dx = \frac{1}{27} [(1 + 18x)^{3/2}]_1^3 = \frac{1}{27} (55^{3/2} - 19^{3/2}).$$

3. *Cercle.* Considérons un cercle de centre O et de rayon R , représenté paramétriquement sous la forme

$$x = R \cos t \quad y = R \sin t,$$

où $t \in [0, 2\pi]$. Alors

$$f'^2(t) + g'^2(t) = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2$$

et

$$l = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

Ce résultat est bien connu, mais la méthode ci-dessus est de loin la plus rapide pour l'établir!

4. *Cycloïde.* Calculons la longueur de l'arche de cycloïde d'équations

$$x = a(t - \sin t) \quad y = a(1 - \cos t),$$

où t varie de 0 à 2π . Comme $x' = a(1 - \cos t)$ et que $y' = a \sin t$, nous voyons que

$$l = a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)} dt.$$

Or, $1 - \cos t = 2 \sin^2 \frac{t}{2}$; par suite,

$$l = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \left[\cos \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = 8a.$$

5. *Cardioïde.* On obtient toute la cardioïde d'équation $\rho = a(1 + \cos \theta)$ en faisant varier θ de $-\pi$ à π . Alors

$$l = a \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta = a \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta.$$

Or, $1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$ et $\sqrt{4 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|$. Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$,

$\left| \cos \frac{\theta}{2} \right| = \cos \frac{\theta}{2}$. (Mais il n'en aurait pas été ainsi sur l'intervalle $[0, 2\pi]$; comme

nous l'avons signalé, il faut faire très attention en extrayant une racine carrée!).
D'où

$$l = 2a \int_{-\pi}^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4a \left[\sin \frac{\theta}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 8a.$$

6. *Arc de spirale logarithmique.* Calculons la longueur de l'arc de la spirale logarithmique d'équation $\rho = a e^{m\theta}$ lorsque θ varie entre θ_1 et θ_2 . Ici,

$$\rho^2 + \rho'^2 = a^2(1+m^2)e^{2m\theta};$$

d'où

$$l = a \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{1+m^2} e^{m\theta} d\theta = \frac{a}{m} \sqrt{1+m^2} (e^{m\theta_2} - e^{m\theta_1}).$$

On remarquera que si θ_1 tend vers $-\infty$, la longueur a une limite finie, à savoir $\frac{a}{m} \sqrt{1+m^2} e^{m\theta_2}$.

7. *Calculer la longueur de la courbe d'équation*

$$y = 2\sqrt{2}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}).$$

Il est clair que x varie entre -1 et 1 . Faisons disparaître les radicaux en posant $x = \cos 2t$, où $t \in [0, \pi/2]$. Alors

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{2} \cos t, \quad \sqrt{1-x} = \sqrt{2} \sin t$$

et

$$y = 4(\cos t + \sin t).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} x'^2 + y'^2 &= 16[\sin^2 t \cos^2 t + (\cos t - \sin t)^2] \\ &= 16(1 - \sin t \cos t)^2 \end{aligned}$$

et

$$l = 4 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin t \cos t) dt = 2[2t - \sin^2 t]_0^{\pi/2} = 2(\pi - 1).$$

4.3 *Étude de la chaînette.* La chaînette est la courbe d'équilibre d'un fil souple attaché à ses extrémités et pendant sous l'action de son poids (Fig. 4.2).

Le tronçon AM , où A est le point le plus bas, est soumis à trois forces :

- la traction T tangente en M ;
- la traction F horizontale;
- le poids P de mesure pl , où p est le poids par unité de longueur et l la longueur de l'arc AM .

Traduisons l'équilibre de ces trois forces en projetant sur Ox et sur Oy :

$$T \cos \alpha = F \quad T \sin \alpha = pl.$$

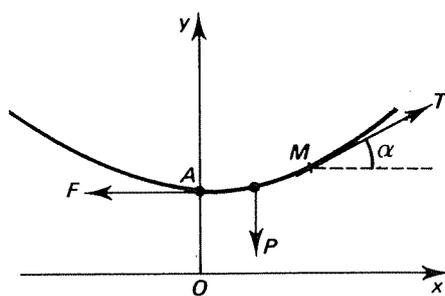


FIG. 4.2

D'où

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{pl}{F}$$

ou, en posant $a = F/p$,

$$l = a \frac{dy}{dx}.$$

Dérivons les deux membres :

$$\frac{dl}{dx} = a \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ soit } \sqrt{1+y'^2} = ay'',$$

ou encore

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{a} dx.$$

Nous reconnaissons une équation différentielle du premier ordre en y' à variables séparées; intégrons :

$$\operatorname{Arg sh} y' = \frac{1}{a} (x - x_0).$$

Intégrons encore une fois :

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x - x_0}{a} + y_0.$$

D'après le choix des axes, $x_0 = 0$, et l'on peut aussi prendre $y_0 = 0$. Finalement,

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

C'est pourquoi le graphe de la fonction cosinus hyperbolique est appelé chaînette (voir tome 2).

Le calcul précédent montre que la longueur de l'arc AM est

$$l = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

4.4 Abscisse curviligne. Dans l'exemple ci-dessus, nous avons été amenés à considérer la longueur d'un arc de courbe comme une fonction du paramètre de l'extrémité. Plus généralement, soient (I, f) un arc rectifiable et t_0 un élément de I . On appelle *abscisse curviligne* d'origine $M_0 = f(t_0)$ la fonction numérique définie sur I par la formule

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|f'(u)\| \, du.$$

La fonction s est croissante et continûment dérivable. Si f' ne s'annule sur aucun intervalle de I non réduit à un point, s définit une bijection de I sur $s(I)$. On peut alors effectuer un changement de paramètre, et prendre pour nouveau paramètre s au lieu de t . L'avantage essentiel résulte du fait que

$$\frac{dOM}{ds} = \frac{dOM}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|},$$

ce qui montre que $\frac{dOM}{ds}$ est le vecteur unitaire tangent τ .

Le vecteur τ a pour composantes $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$, où α est l'angle de la tangente avec Ox . Par suite,

$$dx = \cos \alpha \, ds \quad \text{et} \quad dy = \sin \alpha \, ds.$$

En coordonnées polaires, différencions la relation $OM = \rho u$; il vient

$$\tau ds = dOM = d\rho u + \rho du = d\rho u + \rho d\theta u_1,$$

où u_1 est le vecteur déduit de u par la rotation d'angle $\pi/2$. Projetons cette relation sur les axes OX et OY définis par u et u_1 ; compte tenu de la définition de V , nous obtenons les formules

$$d\rho = \cos V \, ds \quad \text{et} \quad \rho d\theta = \sin V \, ds.$$

Ces formules sont plus précises que $\operatorname{tg} V = \rho/\rho'$, car elles définissent V à $2k\pi$ près et non à $k\pi$ près.

L'introduction de l'abscisse curviligne s permet de traduire les formules (2) et (3) du n° 4.1 en notation différentielle. Ainsi,

$$ds = \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)} \, dt,$$

ce qu'on écrit souvent

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

En coordonnées polaires,

$$ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta,$$

soit encore

$$d^2s = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2.$$

Par exemple, dans le cas du cercle, $ds = R d\theta$; dans le cas de la cycloïde,

$$ds = 2a \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt; \text{ dans le cas de la cardioïde, } ds = 2a \left| \cos \frac{t}{2} \right| dt.$$

RAYON DE COURBURE

4.5 Rayon de courbure. Considérons un cercle de centre O et de rayon R (Fig. 4.3).

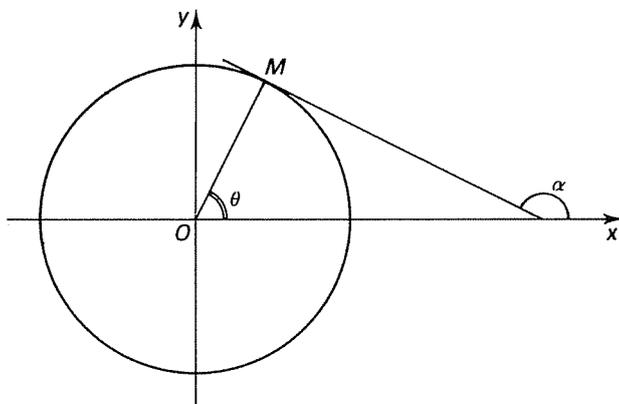


FIG. 4.3

L'angle α de la tangente en M avec Ox est égal à $\theta + \pi/2$. L'abscisse curviligne comptée à partir du point A de coordonnées (R, O) est $s = R\theta$. La dérivée de s par rapport à α est

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\theta} = R.$$

Cette dérivée est donc constante et égale au rayon du cercle.

Plus généralement, considérons un arc paramétré, et notons encore α l'angle de la tangente en M avec Ox . On appelle *rayon de courbure* en M et on note R la dérivée de l'abscisse curviligne s par rapport à α :

$$R = \frac{ds}{d\alpha}.$$

Nous savons que la dérivée du vecteur unitaire tangent τ par rapport à α est le vecteur n déduit de τ par la rotation d'angle $\pi/2$ (voir chapitre 1). Il en découle que

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\tau}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds} = \frac{n}{R}.$$

On peut donc calculer R en déterminant le vecteur unitaire tangent τ et l'abscisse curviligne s , et en dérivant τ par rapport à s .

4.6 Calcul pratique du rayon de courbure. Supposons d'abord que y soit donné en fonction de x . Alors $\text{tg } \alpha = y'$; d'où

$$d\alpha = d(\text{Arc tg } y') = \frac{y''}{1+y'^2} dx.$$

Comme $ds = \sqrt{1+y'^2} dx$, il vient

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Dans le cas particulier où $x = y = y' = 0$, la formule de Maclaurin-Young montre que $y \sim (y''(0)/2) x^2$. Il en découle que

$$R = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2y}.$$

Examinons maintenant le cas d'un arc paramétré défini par $x = f(t)$ et $y = g(t)$. Alors $\text{tg } \alpha = f'(t)/g'(t)$; d'où

$$d\alpha = d\left(\text{Arc tg } \frac{g'}{f'}\right) = \frac{f'g'' - g'f''}{f'^2 + g'^2} dt.$$

Comme $ds = \sqrt{f'^2 + g'^2} dt$, il vient

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{(f'^2 + g'^2)^{3/2}}{f'g'' - g'f''}.$$

Examinons enfin le cas d'une courbe en coordonnées polaires. Alors

$$\alpha = \theta + V;$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } d\alpha &= d\theta + dV = d\theta + d\left(\text{Arc tg } \frac{\rho}{\rho'}\right) = d\theta + \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2} d\theta \\ &= \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2} d\theta. \end{aligned}$$

Comme $ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\theta$, il vient

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}.$$

Lorsque $u = 1/\rho$ s'exprime simplement en fonction de θ (par exemple dans le cas des coniques), on a évidemment intérêt à calculer R en fonction de u , u' et u'' . Or,

$$\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{u'}{u}$$

et
$$d\alpha = d\theta - \frac{u'^2 - uu''}{u^2 + u'^2} d\theta = \frac{u^2 + uu''}{u^2 + u'^2} d\theta.$$

Comme $\rho^2 + \rho'^2 = \frac{1}{u^2} + \frac{u'^2}{u^4} = \frac{u^2 + u'^2}{u^4}$, il vient

$$R = \frac{(u^2 + u'^2)^{3/2}}{u^3(u + u'')}.$$

On notera que, dans tous les cas, le dénominateur s'annule si M est un point d'inflexion. En un tel point, le rayon de courbure n'est pas défini; on dit parfois qu'il est infini.

Remarque. Lorsque ds s'exprime sans racine carrée, il y a intérêt à revenir à la définition de $R = ds/d\alpha$ et à essayer de calculer directement α , sans passer par les formules toutes faites.

4.7 Exemples.

1. Calculer le rayon de courbure de la courbe d'équation $y = \sin x$ au point d'abscisse $\pi/2$.

Remarquons que si $y' = 0$, le rayon de courbure est $1/y''$. Ainsi,

$$R = \frac{1}{y''(\pi/2)} = \frac{1}{-1} = -1.$$

2. Calculer le rayon de courbure de l'hyperbole d'équation $y = 1/x$ lorsque $x = 1$. Il est immédiat que

$$y' = -1/x^2 \quad y'(1) = -1$$

$$y'' = 2/x^3 \quad y''(1) = 2.$$

D'où $R = 2^{3/2}/2 = \sqrt{2}$.

3. Calculer le rayon de courbure de la courbe d'équation $y = e^x$ lorsque $x = 0$. Ici, $y' = y'' = e^x$. D'où

$$R = (1+1)^{3/2}/1 = 2\sqrt{2}.$$

4. Calculer le rayon de courbure de la parabole d'équation $y = x^2/2p$ en son sommet.

Ici, $x^2/2y$ est constant et égal à p . Le rayon de courbure cherché est donc p .

5. Calculer le rayon de courbure de la courbe d'équation $y = 1/(1 + a^2 x^2)$ en son sommet (Fig. 4.4).

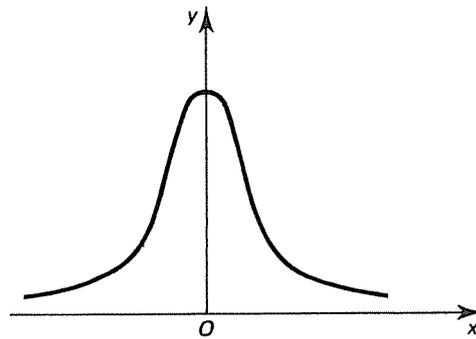


FIG. 4.4

Cette courbe se rencontre en radio-électricité, lorsque l'on étudie la courbe de résonance d'un circuit oscillant comprenant une bobine de résistance R et d'inductance L , en série avec un condensateur de capacité C . En effet, la courbe de résonance d'un tel circuit, appelé circuit oscillant, est la courbe qui donne les variations du courant I en fonction de la fréquence f de la source (C étant fixe). On trouve, moyennant un changement de variable approprié destiné à donner un axe de symétrie à la courbe, que celle-ci a pour équation :

$$y = \frac{1}{1 + a^2 x^2}.$$

$$\text{Ici, } y' = -\frac{2a^2 x}{(1 + a^2 x^2)^2} \quad y'(0) = 0$$

$$y'' = 2a^2 \frac{3a^2 x^2 - 1}{(1 + a^2 x^2)^3} \quad y''(0) = -2a^2.$$

$$\text{D'où } R = 1/y''(0) = -1/2a^2.$$

Plus la courbe est « pointue », plus la sélectivité est grande, puisque l'ordonnée varie alors très vite au voisinage du maximum. Il faut donc que le rayon de courbure au sommet soit minimal; par suite, a doit être le plus grand possible.

6. Calculer le rayon de courbure de la chaînette en son sommet.

Puisque $y = a \operatorname{ch}(x/a)$, $y' = \operatorname{sh}(x/a)$ et $y'' = (1/a) \operatorname{ch}(x/a)$. Au point d'abscisse 0, $y' = 0$ et $R = 1/y''(0) = a$.

7. Déterminer le point où le rayon de courbure de la courbe d'équation $y = \ln x$ est maximal en valeur absolue.

Puisque $y' = 1/x$ et que $y'' = -1/x^2$,

$$R = -\frac{(1+x^2)^{3/2}}{x}.$$

La dérivée de $|R|$ par rapport à x est $(1+x^2)^{1/2}(2x^2-1)/x^2$. Par suite, le maximum est atteint lorsque $x = 1/\sqrt{2}$.

8. Calculer le rayon de courbure de la spirale logarithmique.

Ici, $\rho = a e^{m\theta}$, $ds = a\sqrt{1+m^2} e^{m\theta} d\theta$. D'autre part, $\operatorname{tg} V = \rho/\rho' = \frac{1}{m}$. D'où

$$d\alpha = d\theta + dV = d\theta$$

et
$$R = a\sqrt{1+m^2} e^{m\theta} = \sqrt{1+m^2} \rho.$$

9. Calculer le rayon de courbure de la cardioïde.

Ici, $\rho = a(1+\cos\theta)$, $ds = 2a \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta$ et

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = -\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = -\cot\frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

D'où $dV = \frac{1}{2}d\theta$ et

$$R = 2a \frac{\left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta}{d\theta + \frac{1}{2}d\theta} = \frac{4a}{3} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right|.$$

4.8 Cercle osculateur. Le point C défini par la relation

$$OC = OM + Rn \quad (1)$$

s'appelle *centre de courbure* en M . Le cercle de centre C et de rayon $|R|$ s'appelle *cercle osculateur* en M . Ce cercle est tangent à la courbe en M ; il réalise une bonne approximation de la courbe au voisinage de M .

En projetant la relation (1) sur les deux axes de coordonnées, on trouve aussitôt les coordonnées x_C et y_C du centre de courbure :

$$x_C = x - R \sin \alpha \quad y_C = y + R \cos \alpha.$$

Supposons α compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. Puisque $\operatorname{tg} \alpha = y'$, nous voyons que

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} \quad \sin \alpha = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}.$$

D'où
$$x_C = x - \frac{y'}{y''}(1+y'^2) \quad y_C = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

EXERCICES

Longueurs de courbes

Calculer les longueurs des courbes suivantes :

$$4.1 \quad y = e^x \quad x \in [0, 1]$$

$$4.2 \quad y = x^4/8 + 1/4x^2 \quad x \in [1, 2]$$

$$4.3 \quad x = a \cos^3 t \quad y = a \sin^3 t \text{ (astroïde)}$$

$$4.4 \quad x = 3at^2 + 6at \quad y = 2at^3 + 3at^2 \quad t \in [0, 1]$$

$$4.5 \quad \rho = a \cos^4 \frac{\theta}{4}.$$

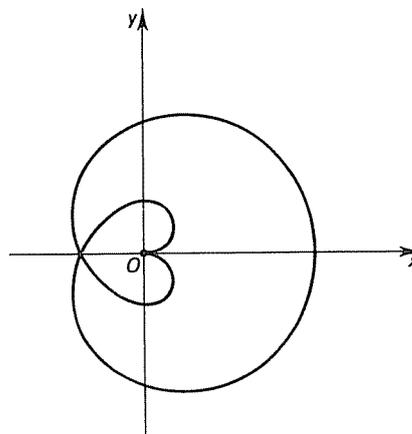


FIG. 1

$$4.6 \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1.$$

$$4.7 \quad x = a[\ln \operatorname{tg}(t/2 + \pi/4) - \sin t] \quad y = a \cos t \text{ (tractrice)}.$$

Rayons de courbure

Calculer les rayons de courbure des courbes suivantes :

$$4.8 \quad \text{Exponentielle } y = a \exp x/a.$$

$$4.9 \quad \text{Parabole semi-cubique } 3ay^2 = x^3.$$

$$4.10 \quad y = (\operatorname{Arc} \sin x)^2.$$

$$4.11 \quad x = t - t^3/3, \quad y = t^2.$$

$$4.12 \quad x = t - e^{2t}, \quad y = e^t(1 - e^{2t})^{1/2}$$

$$4.13 \quad \text{Cissoïde } x(x^2 + y^2) = ay^2.$$

$$4.14 \quad \text{Cycloïde } x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t).$$

$$4.15 \quad \text{Astroïde } x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t.$$

$$4.16 \quad \text{Parabole } \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$$

$$4.17 \quad \text{Conique dont un foyer est en } O.$$

- 4.18 Lemniscate de Bernoulli $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$. 4.19 Spirale d'Archimède $\rho = a\theta$.
 4.20 Spirale hyperbolique $\rho = a/\theta$. 4.21 $\rho = a \operatorname{th} \theta/2$.
 4.22 $\rho = a/(1 - \theta^2)$. 4.23 $\rho^n = a^n \cos n\theta$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer les rayons de courbure à l'origine des courbes suivantes :

- 4.24 $\rho = a \frac{\sin \theta}{2 \cos \theta - 1}$.
 4.25 $(x^2 + y^2)^2 - ax(x^2 - y^2) = 0$.
 4.26 $y^2 = 2px + qx^2$.
 4.27 Déterminer le nombre réel λ pour que la courbe d'équation
 $(2x - y + 1)^2 - 2\lambda xy = 0$
 ait pour rayon de courbure $1/4$ au point $(-1/2, 0)$.

Calculer les rayons de courbure et les coordonnées des centres de courbure des courbes suivantes :

- 4.28 $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$.
 4.29 $x = a(t - \operatorname{th} t)$, $y = a/\operatorname{ch} t$.
 4.30 $x = a(\sin t \operatorname{ch} t + \cos t \operatorname{sh} t)$, $y = a(\sin t \operatorname{sh} t - \cos t \operatorname{ch} t)$.
 4.31 $x = a(t - \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t)$, $y = 2a \operatorname{ch} t$.
 4.32 Tractrice $x = a[\ln \operatorname{tg}(t/2 + \pi/4) - \sin t]$, $y = a \cos t$.

Calculer les coordonnées du centre de courbure des courbes suivantes :

- 4.33 $y = \ln x$ au point $(1, 0)$.
 4.34 $y = 1/x$ au point $(2, 1/2)$.
 4.35 $y = \sin 2x$ au point $(\pi/4, 1)$.

Calculer les rayons de courbure aux points d'ordonnées extrémales des courbes d'équations suivantes :

- 4.36 $y = x \ln x$. 4.37 $y = a\sqrt{(a-x)/x}$.
 4.38 $y = x e^x$. 4.39 $y = x^2 e^{-x}$.
 4.40 $y = \sin^3 x$. 4.41 $y = \cos x + \frac{1}{2} \sin 2x$.

Trouver les points correspondant aux rayons de courbure extrémaux des courbes d'équations suivantes :

- 4.42 $y = 2x + 3/x$. 4.43 $y = e^x$.
 4.44 $y = \sin x$. 4.45 $\rho = a \sin^3 \theta/3$.

CHAPITRE 5

COURBES DÉFINIES PAR UNE PROPRIÉTÉ DIFFÉRENTIELLE

Dans ce chapitre, nous allons chercher certaines courbes définies par une propriété différentielle, ou « courbes telles que... ».

De tels problèmes conduisent à l'établissement et à l'intégration d'équations différentielles, du premier ou du deuxième ordre. Nous ferons usage de coordonnées cartésiennes ou de coordonnées polaires, suivant la nature de l'énoncé.

PROBLÈMES DU PREMIER ORDRE

5.1 Courbes à sous-tangente constante. Soient a un nombre réel strictement positif, M un point quelconque de la courbe, H sa projection sur Ox et T l'intersection avec Ox de la tangente en M (Fig. 5.1).

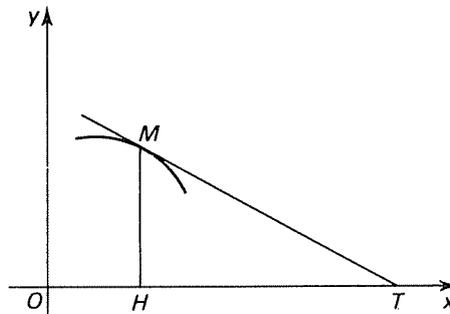


FIG. 5.1

Nous cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que

$$\overline{HT} = a,$$

soit

$$X_T - x = a.$$

Rappelons que l'équation de la tangente en M est

$$Y - y = y'(X - x).$$

Le point T a pour coordonnées X_T et 0. Donc

$$X_T - x = -y/y'.$$

La condition imposée s'écrit

$$-y/y' = a,$$

soit

$$y'/y = -1/a \quad \text{ou} \quad dy/y = -dx/a.$$

Nous reconnaissons une équation différentielle du premier ordre à variables séparées, et nous obtenons aussitôt

$$y = C e^{-x/a}.$$

La courbe cherchée est le graphe d'une fonction exponentielle.

5.2 Courbes à tangente constante. Soit a un nombre réel strictement positif. En conservant les notations du problème précédent, nous devons trouver cette fois les courbes telles que

$$\|MT\| = a.$$

Or,

$$\|MT\|^2 = (X_T - x)^2 + (Y_T - y)^2 = y^2/y'^2 + y^2.$$

L'équation devient :

$$y^2 \frac{1+y'^2}{y'^2} = a^2.$$

Nous pouvons séparer les variables :

$$y' = \pm \sqrt{\frac{y^2}{a^2 - y^2}} \quad \text{ou} \quad dx = \pm \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy.$$

Pour faire disparaître le radical, posons $y = a \sin t$; alors

$$dx = \pm a \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = \pm a \left(\frac{1}{\sin t} - \sin t \right) dt.$$

D'où

$$\begin{cases} x - x_0 = \pm a \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + \cos t \right) \\ y = a \sin t. \end{cases}$$

Les courbes cherchées sont des tractrices, deux à deux symétriques par rapport à Ox .

5.3 Courbes à sous-normale constante. Soient a un nombre réel strictement positif, M un point quelconque de la courbe, H sa projection sur Ox et N l'intersection avec Ox de la normale en M (Fig. 5.2).

Nous cherchons les courbes telles que

$$\overline{HN} = a,$$

soit

$$X_N - x = a.$$

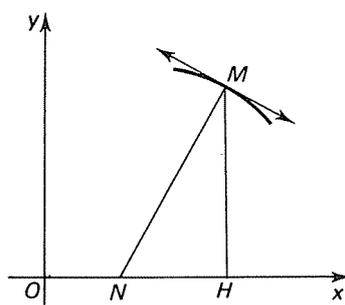


FIG. 5.2

La normale en M a pour pente $-1/y'$; son équation est donc

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

Le point N a pour coordonnées X_N et 0; par suite,

$$X_N - x = yy'.$$

La condition imposée s'écrit

$$yy' = a \quad \text{ou} \quad y \, dy = a \, dx.$$

Ainsi,

$$y^2/2 = a(x - x_0).$$

Nous reconnaissons l'équation d'une parabole d'axe Ox et de paramètre a . (Il est bien connu que la sous-normale d'une parabole est constante et égale au paramètre; nous venons de prouver que c'est une propriété caractéristique de la parabole.)

5.4 Courbes à normale constante. En conservant les notations du problème ci-dessus, cherchons les courbes telles que

$$\|MN\| = a.$$

Cette condition s'écrit

$$(X_N - x)^2 + (Y_N - y)^2 = a^2,$$

soit

$$y^2(1 + y'^2) = a^2.$$

D'où

$$y' = \pm \sqrt{\frac{a^2 - y^2}{y^2}} \quad \text{ou} \quad dx = \pm \frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} dy.$$

On obtient aussitôt

$$x - x_0 = \pm \sqrt{a^2 - y^2},$$

ou encore

$$(x - x_0)^2 + y^2 = a^2.$$

C'est l'équation d'un cercle centré sur Ox et de rayon a . (La condition de l'énoncé implique donc que le point N est fixe.)

5.5 Courbes dont les normales passent par un point fixe. Choisissons ce point fixe comme origine des coordonnées, et écrivons que l'équation de la normale est vérifiée lorsque $X = Y = 0$:

$$-y = x/y', \quad \text{soit} \quad y \, dy = -x \, dx.$$

D'où

$$y^2/2 = -x^2/2 + k^2,$$

ou encore

$$x^2 + y^2 = 2k^2.$$

Les courbes cherchées sont les cercles de centre O .

5.6 Courbes telles que l'abscisse curviligne soit proportionnelle au carré de l'abscisse. Ce sont les courbes telles que

$$s = kx^2.$$

D'où

$$ds = 2kx \, dx.$$

Or,

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} \, dx.$$

Donc

$$\sqrt{1 + y'^2} = 2kx.$$

Séparons les variables :

$$y' = \pm \sqrt{4k^2 x^2 - 1} \quad \text{ou} \quad dy = \pm \sqrt{4k^2 x^2 - 1} \, dx.$$

Posons $2kx = \operatorname{ch} t$ (voir tome 3); alors

$$dy = \pm \frac{1}{2k} \operatorname{sh}^2 t \, dt = \pm \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{4k} \, dt$$

et

$$y - y_0 = \pm \frac{1}{4k} \left(\frac{\operatorname{sh} 2t}{2} - t \right).$$

5.7 Courbes à sous-tangente polaire constante. Rappelons que la sous-tangente polaire est égale à \overline{OT} , où T est l'intersection de la tangente en M avec la perpendiculaire OY au rayon vecteur OM (Fig. 5.3).

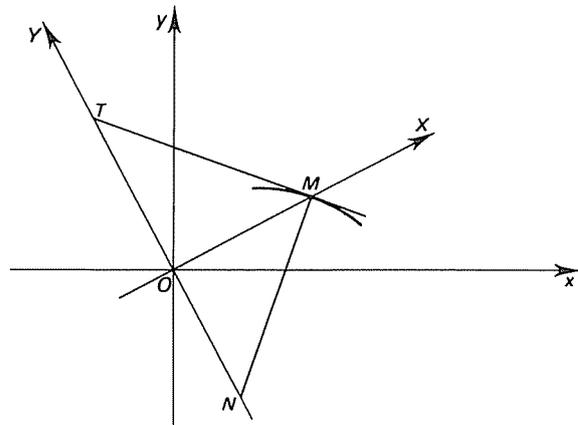


FIG. 5.3

De plus,

$$\overline{OT} = -\rho^2/\rho'.$$

Les courbes cherchées sont donc définies par la relation

$$-\rho^2/\rho' = a,$$

où a est un nombre réel non nul.

Ainsi,

$$-\rho'/\rho^2 = 1/a \quad \text{ou} \quad -d\rho/\rho^2 = d\theta/a,$$

soit

$$1/\rho = a(\theta - \theta_0).$$

Les courbes cherchées sont des spirales hyperboliques.

5.8 Courbes à sous-normale polaire constante. On cherche cette fois les courbes telles que

$$\overline{ON} = a,$$

soit

$$\rho' = a.$$

Ainsi

$$\rho = a(\theta - \theta_0),$$

équation d'une spirale d'Archimède.

5.9 Courbes coupant les rayons vecteurs sous un angle constant. Ce sont les courbes telles que

$$\operatorname{tg} V = 1/m,$$

où $m = \cot \varphi$. Donc

$$\rho/\rho' = 1/m \quad \text{ou} \quad d\rho/\rho = m d\theta.$$

Il vient en intégrant

$$\rho = C e^{m\theta},$$

équation d'une spirale logarithmique.

Dans le cas où $\varphi = \pi/2$, le calcul précédent ne reste plus valable. Mais alors $\rho' = 0$ et ρ est constant. Les courbes cherchées sont les cercles de centre O .

5.10 Courbes telles que $\|OM\| = \|OT\|$, où T est l'intersection avec Ox de la tangente en M . Vu la présence du rayon vecteur, utilisons les coordonnées polaires. Rappelons que l'équation de la tangente en un point de coordonnées polaires θ_0 et ρ_0 est

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \cos(\theta - \theta_0) + \left(\frac{1}{\rho}\right)'_0 \sin(\theta - \theta_0).$$

Remplaçons θ par 0; nous obtenons

$$\frac{1}{\rho_T} = \frac{1}{\rho_0} \cos \theta_0 - \left(\frac{1}{\rho}\right)'_0 \sin \theta_0.$$

Supposons par exemple ρ_0 et ρ_T de même signe; la condition de l'énoncé devient $\rho_0 = \rho_T$. Supprimons l'indice, pour avoir une condition valable pour tous les points de la courbe :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho} \cos \theta - \left(\frac{1}{\rho}\right)' \sin \theta.$$

Posons $u = 1/\rho$; alors

$$u' \sin \theta + u(1 - \cos \theta) = 0.$$

Il s'agit d'une équation à variables séparables, qui s'écrit encore

$$\frac{du}{u} = -\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} d\theta = -\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta.$$

Il vient en intégrant

$$\frac{1}{\rho} = u = C \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{C}{2} (1 + \cos \theta).$$

Nous reconnaissons l'équation d'une parabole de foyer O et d'axe Ox .

PROBLÈMES DU DEUXIÈME ORDRE

5.11 Courbes à rayon de courbure constant. Soit a un nombre réel. Nous cherchons les courbes telles que

$$R = a.$$

Soit α l'angle de Ox avec la tangente orienté. Nous savons que

$$\begin{aligned} dx &= \cos \alpha \, ds \\ dy &= \sin \alpha \, ds \\ R &= ds/d\alpha. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} ds &= a \, d\alpha \\ dx &= a \cos \alpha \, d\alpha \\ dy &= a \sin \alpha \, d\alpha \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{cases} x - x_0 = a \sin \alpha \\ y - y_0 = -a \cos \alpha. \end{cases}$$

Les courbes cherchées sont donc les cercles de rayon $|a|$.
La condition donnée s'écrit aussi

$$\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = a,$$

soit

$$(1 + y'^2)^3 = ay''^2. \tag{1}$$

La méthode ci-dessus nous a permis d'intégrer l'équation différentielle (1) presque sans calculs. On comparera avec le procédé employé au tome 4.

5.12 Courbes telles que le rayon de courbure soit égal à la longueur de la normale (Fig. 5.4).

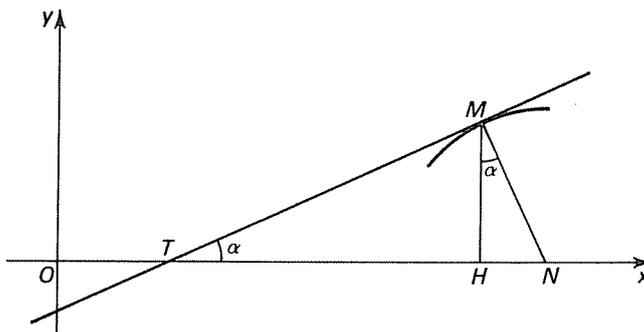


FIG. 5.4

La condition imposée s'écrit

$$\|MN\| = |R|.$$

Or,

$$\|MH\| = |y| = \|MN\| \cos \alpha.$$

Ainsi

$$y = \pm R \cos \alpha = \pm \cos \alpha \frac{ds}{d\alpha}.$$

Puisque $dy = \sin \alpha ds$, nous obtenons

$$y = \pm \cot \alpha \frac{dy}{d\alpha},$$

ou encore

$$dy/y = \pm \operatorname{tg} \alpha d\alpha.$$

Avec le signe +,

$$dy/y = \operatorname{tg} \alpha d\alpha$$

et

$$y = C/\cos \alpha.$$

Comme

$$dx = \cos \alpha ds = y d\alpha = C \frac{d\alpha}{\cos \alpha},$$

nous obtenons

$$x - x_0 = C \ln |\operatorname{tg}(\alpha/2 + \pi/4)|.$$

Posons $t = \ln |\operatorname{tg}(\alpha/2 + \pi/4)|$; alors $\operatorname{tg}(\alpha/2 + \pi/4) = \pm e^t$ et

$$\cos \alpha = \frac{2 \operatorname{tg}(\alpha/2 + \pi/4)}{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha/2 + \pi/4)} = \pm \frac{2e^t}{1 + e^{2t}} = \pm \frac{1}{\operatorname{ch} t}.$$

Finalement,

$$y = \pm C \operatorname{ch} t = \pm C \operatorname{ch} \frac{x - x_0}{C}.$$

Les courbes cherchées sont des chaînettes.

Avec le signe -,

$$y = C \cos \alpha.$$

D'autre part,

$$dx = \cos \alpha ds = -y d\alpha = -C \cos \alpha d\alpha.$$

D'où

$$x - x_0 = -C \sin \alpha.$$

Les courbes cherchées sont les cercles centrés sur Ox .

EXERCICES

Déterminer les courbes telles que :

- 5.1 La pente de la tangente soit proportionnelle au cube de l'abscisse.
- 5.2 La pente de la tangente en M soit proportionnelle à la pente de la droite joignant M à l'origine.
- 5.3 La sous-tangente soit proportionnelle à l'abscisse.
- 5.4 La sous-tangente soit égale au carré de l'abscisse.
- 5.5 L'abscisse curviligne soit proportionnelle à la pente de la tangente.
- 5.6 OM soit parallèle à NH , où H est la projection de M sur Ox et N la projection de O sur la normale en M .
- 5.7 $\|MT\|^2 - \|OT\|^2 = a$, où a est un nombre réel positif et T l'intersection de la tangente en M avec Ox .
- 5.8 $\|OH\| = \|IT\|$, où T est l'intersection de la tangente avec Ox , H la projection de O sur MT et I la projection de M' sur MT , M' désignant la projection de M sur Ox . (Prendre $m = y'$ pour paramètre.)
- 5.9 La direction de PQ soit fixe, où P est l'intersection de la normale avec Ox et Q l'intersection de la tangente avec Oy .
- 5.10 $\|OM\| \|MN\| = a^2$, où a est un nombre réel et N l'intersection de la normale en M avec la perpendiculaire à OM issue de O .
- 5.11 La droite MT soit bissectrice de (MO, MX) , où MX est la parallèle à Ox issue de M .
- 5.12 AQ et BP soient perpendiculaires, où A et B sont les projections de M sur Ox et Oy , P et Q les intersections de la tangente avec Ox et Oy .
- 5.13 L'aire du trapèze $OTMQ$ soit constante, où Q est la projection de M sur Oy .
- 5.14 L'aire du triangle MNT soit constante, où T et N sont les intersections de la tangente et de la normale en M avec la perpendiculaire issue de O à OM .
- 5.15 $R = y'^2$
- 5.16 La tangente en M , l'axe Ox et la parallèle à Oy issue du centre de courbure soient concourantes.
- 5.17 Le cercle osculateur passe par O .
- 5.18 Le rayon de courbure soit en valeur absolue le double de la longueur de la normale.
- 5.19 La projection du vecteur MC sur Ox ait une mesure algébrique constante.
- 5.20 $R = a \operatorname{ch} s/a$.
- 5.21 $R = a \cot \alpha$.
- 5.22 $s^2 + R^2 = a^2$, où a est un nombre réel strictement positif donné.
- 5.23 La tangente en I à la courbe décrite par le milieu I de $[M, C]$ fasse un angle de $\pi/4$ avec la normale en M .
- 5.24 La perpendiculaire issue de O à la tangente à la courbe décrite par P passe par C , où C est le centre de courbure et P l'intersection de la tangente en M avec la médiatrice de $[O, M]$.

CHAPITRE 6

INTÉGRALES CURVILIGNES

6.1 Intégrale d'une forme différentielle. Considérons une force F dont les composantes M et N dépendent des coordonnées x et y du point d'application P . Supposons que ce point d'application décrive le support d'un arc paramétré

$$x = f(t) \quad y = g(t),$$

où t parcourt un intervalle $[a, b]$. La force effectue dans ce déplacement un travail W . Pour évaluer ce travail, introduisons une subdivision (t_0, t_1, \dots, t_n) de l'intervalle $[a, b]$, où $t_0 = a$ et $t_n = b$. Nous pouvons approcher l'arc AB par la ligne polygonale $AP_1P_2\dots P_{n-1}B$. Le travail entre les points P_{k-1} et P_k est sensiblement égal au produit scalaire

$$W = F(P_k) \cdot P_{k-1}P_k.$$

Le travail total est alors approché par

$$\sum_{k=1}^n F(P_k) \cdot P_{k-1}P_k = \sum_{k=1}^n (M[f(t_k), g(t_k)](x_k - x_{k-1}) + N[f(t_k), g(t_k)](y_k - y_{k-1})).$$

Nous reconnaissons au second membre une somme de Riemann. Faisons tendre n vers $+\infty$ de telle sorte que chacun des intervalles partiels $[t_{k-1}, t_k]$ ait une longueur tendant vers 0. La somme de Riemann ci-dessus devient une intégrale, donnant la valeur exacte du travail W :

$$W = \int_a^b (M[f(t), g(t)]f'(t) + N[f(t), g(t)]g'(t)) dt.$$

Cette intégrale s'appelle *circulation* du vecteur F le long de l'arc paramétré AB . Soit maintenant ω la forme différentielle définie par la formule

$$\omega = Mdx + Ndy.$$

Supposons que $x = f(t)$ et que $y = g(t)$. Nous voyons que $dx = f'(t) dt$ et que $dy = g'(t) dt$. Ainsi, $Mdx + Ndy$ devient

$$(M[f(t), g(t)]f'(t) + N[f(t), g(t)]g'(t)) dt.$$

C'est pourquoi l'intégrale ci-dessus s'appelle encore intégrale de la forme différentielle ω le long de l'arc AB , et se note alors $\int_{AB} \omega$; c'est ce qu'on appelle une *intégrale curviligne*.

Par définition même, toute intégrale curviligne peut se calculer comme une intégrale simple.

EXEMPLE. Calculer l'intégrale curviligne

$$I = \int xy^2 dy - x^2 y dx$$

le long du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

parcouru dans le sens trigonométrique, l'origine et l'extrémité étant l'une et l'autre le point $(a, 0)$.

Paramétrons le cercle en posant $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, où t varie entre 0 et 2π . L'intégrale I devient l'intégrale simple suivante :

$$I = \int_0^{2\pi} 2a^4 \cos^2 t \sin^2 t dt = \frac{a^4}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \pi \frac{a^4}{2}.$$

Remarque. On montre aisément que cette intégrale curviligne ne dépend pas

- de l'origine choisie sur le cercle;
- de la représentation paramétrique considérée.

Ces résultats se généralisent d'ailleurs, l'un à toute courbe fermée, l'autre à toute courbe dont on connaît plusieurs représentations paramétriques (à condition bien entendu de ne pas changer le sens de parcours).

6.2 Cas des formes différentielles exactes. Nous allons voir que le calcul de l'intégrale d'une forme différentielle se simplifie nettement lorsque cette forme différentielle est exacte. Inversement, la théorie des intégrales curvilignes va nous permettre de déterminer les fonctions dont une forme différentielle exacte donnée est la différentielle.

Rappelons qu'une forme différentielle

$$\omega = M dx + N dy$$

est exacte s'il existe une fonction différentiable U de deux variables telle que

$$\omega = dU.$$

On dit alors que ω dérive du potentiel scalaire U . Rappelons aussi que

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = N.$$

Une telle fonction U est définie à une constante additive près.

Soient en effet U_1 et U_2 deux fonctions telles que

$$dU_1 = dU_2 = \omega.$$

La fonction $U = U_1 - U_2$ a donc une différentielle nulle, ce qui montre que ses dérivées partielles par rapport à x et par rapport à y sont toutes deux nulles. Il

découle alors de la formule des accroissements finis que la fonction U est constante, ce qu'il fallait prouver.

Pour qu'une forme différentielle $\omega = M dx + N dy$ soit exacte, il faut et il suffit que, pour tout couple (A, B) de points, l'intégrale curviligne de ω le long d'un arc paramétré d'origine A et d'extrémité B ne dépende pas du trajet suivi.

Supposons d'abord que la forme différentielle ω soit exacte. Soit un arc paramétré d'origine A et d'extrémité B , de représentation paramétrique

$$x = f(t) \quad y = g(t).$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} \omega &= \int_a^b (M[f(t), g(t)] f'(t) + N[f(t), g(t)] g'(t)) dt \\ &= \int_a^b \frac{dU}{dt} dt = U(B) - U(A). \end{aligned}$$

Cette expression ne dépend évidemment que de A et B , et non du trajet suivi. Il en découle que si l'on connaît un potentiel scalaire U , le calcul de l'intégrale curviligne de ω est immédiat.

Réciproquement, supposons que l'intégrale $\int_{\widehat{AP}} \omega$ ne dépende que du point P , le point A étant fixé. Soit U la fonction définie par la formule

$$U(P) = \int_{\widehat{AP}} \omega.$$

Montrons que les dérivées partielles de U ne sont autres que M et N . Soient en effet x et y les coordonnées de P , et soit Q le point de coordonnées $(x+h, y)$. Alors

$$U(Q) - U(P) = \int_x^{x+h} M(t, y) dt.$$

Par suite, lorsque h tend vers 0,

$$\frac{1}{h} [U(Q) - U(P)] = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} M(t, y) dt \rightarrow M(x, y);$$

autrement dit, $\frac{\partial U}{\partial x} = M$.

De même, $\frac{\partial U}{\partial y} = N$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. En pratique, on peut utiliser ce résultat fondamental de plusieurs manières :

a) Soit ω une forme différentielle exacte. Si l'on connaît un potentiel scalaire U , le calcul de l'intégrale curviligne de ω entre A et B est immédiat.

b) Soit ω une forme différentielle exacte, mais dont on ne connaît pas de potentiel scalaire. On peut remplacer le trajet donné entre A et B par un trajet plus simple (de même origine A et de même extrémité B , bien entendu). En particulier, si A et B sont confondus, l'intégrale de ω est nulle.

c) Pour montrer qu'une forme différentielle ω n'est pas exacte, on essaie de trouver deux arcs paramétrés ayant même origine et même extrémité le long desquels les intégrales de ω ne sont pas égales. Par exemple, il suffit de trouver une courbe fermée (c'est-à-dire dont l'origine et l'extrémité sont confondues) le long de laquelle l'intégrale de ω est non nulle.

EXEMPLES

1. La forme différentielle

$$\omega = xy^2 dy - x^2 y dx$$

n'est pas exacte, car son intégrale le long d'un cercle de centre O et de rayon $a \neq 0$ est non nulle.

2. Le même raisonnement montre que la forme différentielle

$$\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

n'est pas exacte. En effet, si nous posons $x = a \cos t$ et $y = a \sin t$, nous obtenons

$$\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = dt,$$

et l'intégrale le long d'un cercle de centre O et de rayon a parcouru dans le sens direct est 2π .

Plus généralement, la circulation de ω le long d'un contour fermé entourant l'origine et faisant n fois le tour de celle-ci, où n est un entier rationnel, est égale à $2n\pi$; ce résultat est bien connu en électromagnétisme sous le nom de théorème d'Ampère.

On remarquera que

$$\omega = d \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (y/x).$$

Il semblerait donc que ω dérive du potentiel scalaire U défini par la formule

$$U(x, y) = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (y/x).$$

Toutefois, la fonction U n'est pas définie sur une partie du plan rencontrant l'axe Oy . Par suite, ω dérive d'un potentiel scalaire sur le demi-plan $x > 0$, ou sur le demi-plan $x < 0$, mais non sur le plan tout entier.

Ainsi, un cas exceptionnel, qui pourrait passer pour une curiosité mathématique, présente un intérêt fondamental en physique ! On voit qu'il n'est pas nécessairement ridicule d'introduire de la rigueur dans les mathématiques destinées aux ingénieurs et aux physiciens.

3. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{\widehat{AB}} y^2 dx - x^2 dy$$

le long du segment $[A, B]$, puis le long du quart de cercle AB (Fig. 6.1), et comparer les deux résultats.

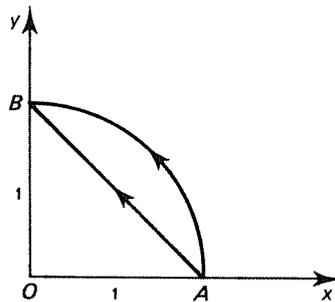


FIG. 6.1

Remarquons d'abord que la forme différentielle

$$\omega = y^2 dx - x^2 dy$$

n'est pas exacte, puisque $M(x, y) = y^2$ et $N(x, y) = -x^2$ et que, par suite,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -2x.$$

Le résultat de l'intégration dépend donc *a priori* du trajet parcouru. Vérifions-le :

a) Paramétrons le segment $[A, B]$ en exprimant x en fonction de y :

$$x = 1 - y.$$

De A à B , y varie de 0 à 1 ; donc

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} \omega &= - \int_0^1 [y^2 + (1-y)^2] dy = - \int_0^1 (2y^2 - 2y + 1) dy \\ &= - \frac{2}{3} [y^3]_0^1 + [y^2]_0^1 - [y]_0^1 = - \frac{2}{3} + 1 - 1 = - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

b) Paramétrons le cercle en posant $x = \cos t$ et $y = \sin t$. On obtient le quart de

cercle de A à B en faisant varier t de 0 à $\pi/2$; alors

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} \omega &= - \int_0^{\pi/2} (\sin^3 t + \cos^3 t) dt \\ &= - \int_0^{\pi/2} (\sin t + \cos t) (\sin^2 t - \sin t \cos t + \cos^2 t) dt \\ &= - \int_0^{\pi/2} \sin t dt - \int_0^{\pi/2} \cos t dt + \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos t dt \\ &\quad + \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t dt \\ &= \left[\cos t - \sin t + \frac{1}{3} \sin^3 t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right]_0^{\pi/2} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Ce résultat est différent du premier, ce qui confirme que la forme différentielle ω n'est pas exacte.

4. Calculer l'intégrale curviligne

$$\int_{\widehat{AB}} y^2 dx + \frac{dy}{2-x^2}$$

le long du quart de cercle AB , puis le long du contour ACB (Fig. 6.2), le rayon du cercle étant égal à 1.

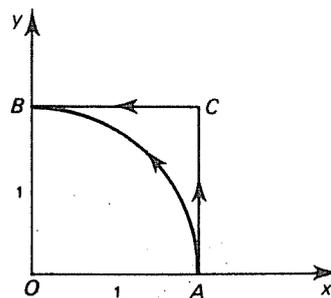


FIG. 6.2

a) *Calcul le long du cercle.* Prenons la même représentation paramétrique que ci-dessus. Il vient aussitôt

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} \omega &= - \int_0^{\pi/2} \sin^3 t dt + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{2 - \cos^2 t} dt \\ &= -\frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} (3 \sin t - \sin 3t) dt + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1 + \sin^2 t} dt \end{aligned}$$

$$= \left[\frac{3}{4} \cos t - \frac{1}{12} \cos 3t + \text{Arc tg} (\sin t) \right]_0^{\pi/2}$$

$$= -\frac{3}{4} + \frac{1}{12} + \text{Arc tg} 1 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}.$$

b) *Calcul le long des côtés du carré.* Le long de AC , x est constant, et il reste

$$I_1 = 0 + \int_0^1 \frac{dy}{2-1} = \int_0^1 dy = 1.$$

Le long de CB , y est constant, et il reste

$$I_2 = \int_1^0 dx = -1.$$

L'intégrale curviligne le long de ACB a ainsi pour valeur $1 - 1 = 0$.

Ce résultat est différent du précédent, ce qui montre que la forme différentielle ω n'est pas exacte.

6.3 Détermination du potentiel scalaire. Nous avons vu au tome 4 que si la forme différentielle $\omega = M dx + N dy$ est exacte, alors

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Nous avons alors admis la réciproque. Nous allons maintenant démontrer cette réciproque, en déterminant explicitement le potentiel scalaire U . Soit $A = (x_0, y_0)$ un point du plan. Le potentiel scalaire est nécessairement défini (à une constante additive près) par la formule

$$U(P) = \int_{AP} \omega.$$

Prenons comme arc joignant A et P la ligne polygonale constituée des segments $[A, H]$ et $[H, P]$, où $H = (x, y_0)$ (Fig. 6.3).

Alors

$$U(P) = \int_{x_0}^x M(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y N(x, u) du.$$

Soit donc U la fonction ainsi définie; montrons que U convient, c'est-à-dire que $dU = \omega$. Dérivons partiellement les deux membres de la relation ci-dessus par rapport à y ; la dérivation de l'intégrale fonction de sa borne supérieure donne aussitôt

$$\frac{\partial U}{\partial y} = N(x, y).$$

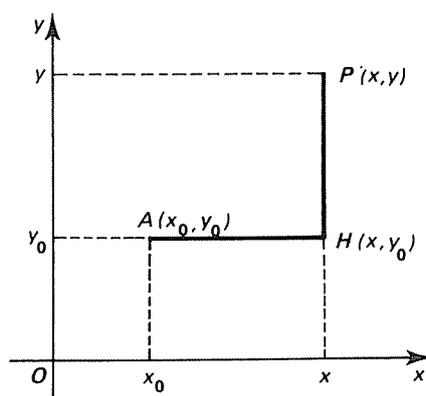


FIG. 6.3

En dérivant maintenant les deux membres par rapport à x , nous obtenons

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial N}{\partial x}(x, u) du.$$

Or, par hypothèse,

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y};$$

par suite,

$$\int_{y_0}^y \frac{\partial N}{\partial x}(x, u) du = \int_{y_0}^y \frac{\partial M}{\partial y}(x, u) du = M(x, y) - M(x, y_0).$$

Ainsi,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = M(x, y_0) + M(x, y) - M(x, y_0) = M(x, y),$$

ce qui montre que la fonction U convient effectivement.

Remarque. En pratique, un choix convenable de x_0 et de y_0 permet parfois de simplifier les calculs.

EXEMPLES

1. Considérons la forme différentielle

$$\omega = -\frac{2y^2}{(1+x)^2} dx + \frac{2y(1-x)}{1+x} dy.$$

La condition d'égalité des dérivées partielles croisées se vérifie aisément :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{4y}{(1+x)^2}.$$

Pour déterminer le potentiel scalaire U , prenons $y_0 = 0$; quelle que soit la valeur choisie pour x_0 , l'intégrale sur un segment porté par Ox est nulle, et il reste

$$U(x, y) = \int_0^y \frac{2u(1-x)}{1+x} du = \frac{y^2(1-x)}{1+x}.$$

2. Soit la forme différentielle

$$\omega = \frac{(x+2y)dx + ydy}{(x+y)^2}.$$

Vérifions d'abord qu'il s'agit d'une forme différentielle exacte. En effet,

$$M = \frac{x+2y}{(x+y)^2} \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{2y}{(x+y)^3}$$

$$N = \frac{y}{(x+y)^2} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2y}{(x+y)^3}.$$

Le potentiel scalaire est défini par la formule

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{t+2y_0}{(t+y_0)^2} dt + \int_{y_0}^y \frac{u}{(x+u)^2} du.$$

Prenons $x_0 = 1$ et $y_0 = 0$; alors

$$U(x, y) = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_0^y \frac{u}{(x+u)^2} du$$

$$= \ln|x| + \ln \left| \frac{x+y}{x} \right| + \frac{x}{x+y} - 1 = \ln|x+y| - \frac{y}{x+y}.$$

6.4 Méthode de Poincaré. Nous allons examiner un cas particulier... qui permet de traiter 90 % des problèmes sans aucun calcul. Intuitivement, au lieu de prendre un trajet comme celui de la figure 6.3, on intègre le long d'un segment AP , où A appartient à la droite OP .

Soit $\omega = Mdx + Ndy$ une forme différentielle exacte. Supposons que les fonctions M et N sont homogènes de même degré β différent de -1 . Admettons provisoirement qu'il existe un potentiel scalaire homogène U . Alors, d'après l'égalité d'Euler, U est nécessairement défini par la formule

$$U(x, y) = \frac{1}{\beta+1} [xM(x, y) + yN(x, y)]. \quad (1)$$

(On voit pourquoi β a été supposé différent de -1 .)

Il reste à montrer que la forme différentielle ω admet effectivement un potentiel scalaire homogène. La preuve... c'est que les dérivées partielles de la fonction U définie par la formule (1) sont bien M et N . En effet,

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\beta+1} \left[M(x, y) + x \frac{\partial M}{\partial x} + y \frac{\partial N}{\partial x} \right].$$

Mais, puisque la forme différentielle ω est exacte,

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}.$$

D'où

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{\beta+1} \left[M(x, y) + x \frac{\partial M}{\partial x} + y \frac{\partial M}{\partial y} \right].$$

Enfin, comme M est homogène de degré β , l'égalité d'Euler appliquée à M montre que

$$x \frac{\partial M}{\partial x} + y \frac{\partial M}{\partial y} = \beta M,$$

ce qui implique

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\beta+1}{\beta+1} M = M.$$

On montrerait de même que

$$\frac{\partial U}{\partial y} = N.$$

Nous avons ainsi construit une solution évidente; les autres s'en déduisent par addition d'une constante quelconque.

Remarque. En pratique, on peut commencer par introduire la fonction U définie par la formule (1) sans avoir vérifié l'égalité des dérivées croisées, puis voir si $\partial U/\partial x = M$ et $\partial U/\partial y = N$.

EXEMPLE. Soit la forme différentielle

$$\omega = \frac{1}{(x-y)^2} (x^2 dy - y^2 dx).$$

Ici,

$$M = -\frac{y^2}{(x-y)^2} \quad N = \frac{x^2}{(x-y)^2}.$$

Les fonctions M et N sont homogènes de degré $\beta = 0$. Posons donc

$$U(x, y) = xM(x, y) + yN(x, y) = \frac{x^2 y - y^2 x}{(x-y)^2} = \frac{xy}{x-y}.$$

Il reste à vérifier que U convient. En effet,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{y^2}{(x-y)^2} = M \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x^2}{(x-y)^2} = N.$$

Ainsi, la forme différentielle ω est exacte, et elle dérive du potentiel scalaire U .
Calculons maintenant l'intégrale de ω sur l'arc paramétré

$$x = t^2 - t^3 \quad y = e^t - 1,$$

où t varie de 0 à 1. Puisque $A = (0, 0)$ et que $B = (0, e-1)$, nous obtenons aussitôt

$$\int_{AB} \omega = U(B) - U(A) = 0.$$

6.5 Facteurs intégrants. Soient ω une forme différentielle non exacte et f une fonction de deux variables. Si la forme différentielle $f\omega$ est exacte, on dit que f est un *facteur intégrant* de ω . La recherche générale des facteurs intégrants conduit à des équations aux dérivées partielles, que nous ne pouvons pas intégrer ici. Mais si l'on indique que le facteur intégrant doit être une fonction de x seul, ou de y seul, ou du rapport y/x , par exemple, on est ramené à une équation différentielle du premier ordre. Il est alors possible de déterminer un facteur intégrant.

EXEMPLES

1. La forme différentielle

$$\omega = y^2 dx + (x^2 - 2xy) dy$$

n'est pas exacte. Chercher un facteur intégrant fonction de x seulement.

Nous devons trouver une fonction f d'une seule variable telle que

$$\frac{\partial}{\partial y} y^2 f(x) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - 2xy) f(x),$$

c'est-à-dire

$$2yf(x) = (x^2 - 2xy)f'(x) + 2(x-y)f(x),$$

ou encore

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{2(x-2y)}{x(x-2y)} = -\frac{2}{x}.$$

Comme la variable y s'est éliminée, il reste une équation différentielle du premier ordre à variables séparées, qui s'intègre immédiatement :

$$f(x) = k/x^2.$$

Prenons par exemple $k = 1$; il vient

$$f\omega = (y/x)^2 dx + (1 - 2y/x) dy.$$

La méthode de Poincaré permet alors de trouver un potentiel scalaire, puisque M et N sont homogènes de degré différent de -1 :

$$U(x, y) = \frac{y^2}{x} + y - 2 \frac{y^2}{x} = \frac{xy - y^2}{x}.$$

2. Vérifier que la forme différentielle

$$\omega = (x^2 y + y^2 + 2xy) dx + (x^2 + x)(x + 2y) dy$$

n'est pas exacte. Trouver un facteur intégrant fonction de x seul; déterminer alors un potentiel scalaire.

Posons

$$M(x, y) = x^2 y + y^2 + 2xy \quad N(x, y) = (x^2 + x)(x + 2y).$$

Il est clair que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = x^2 + 2y + 2x \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 2x + 4xy + 2y.$$

Ces expressions n'étant pas égales, la forme différentielle ω n'est pas exacte.

Multiplions maintenant la forme différentielle ω par f , qui est fonction de x , de façon que

$$\frac{\partial}{\partial y} (fM) = \frac{\partial}{\partial x} (fN),$$

ou, puisque f ne dépend que de x ,

$$f \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{df}{dx} + f \frac{\partial N}{\partial x},$$

ce qui donne

$$(x^2 + 2y + 2x)f(x) = (x^2 + x)(x + 2y)f'(x) + (3x^2 + 2x + 4xy + 2y)f(x),$$

ou encore

$$\begin{aligned} (x^2 + x)(x + 2y)f'(x) + (2x^2 + 4xy)f(x) &= 0 \\ (x^2 + x)f'(x) + 2xf(x) &= 0 \end{aligned}$$

ou enfin, en séparant les variables,

$$\frac{df}{f} = -\frac{2}{1+x} dx.$$

Intégrons :

$$f(x) = k/(1+x)^2.$$

Nous pouvons prendre $k = 1$, d'où

$$f\omega = \frac{x^2 y + y^2 + 2xy}{(1+x)^2} dx + \frac{x(x+2y)}{1+x} dy.$$

Par suite,

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x \frac{t^2 y_0 + y_0^2 + 2ty_0}{(1+t)^2} dt + \int_{y_0}^y \frac{x(x+2u)}{1+x} du.$$

Choisissons x_0 et y_0 nuls; la première intégrale disparaît, et il reste

$$U(x, y) = \frac{x}{1+x} \int_0^y (x+2u) du = \frac{x}{1+x} (xy + y^2) = \frac{xy(x+y)}{1+x}.$$

6.6 L'entropie. La notion de potentiel scalaire sert constamment en électricité, en mécanique, en thermodynamique, ainsi que dans l'étude des moteurs thermiques.

Soit par exemple un gaz de volume v , de pression p et de température absolue T (où $T = t + 273,15$); ces quantités sont reliées par une relation de la forme

$$f(p, v, T) = 0.$$

Pour les gaz parfaits,

$$pv = nRT,$$

où n est le nombre de moles, et où R est une constante.

On peut représenter, à température constante, l'état d'un corps par un graphique avec v en abscisse et p en ordonnée. Soit un point quelconque correspondant à une pression p et à un volume v . Pour l'amener à un état voisin, correspondant à $v + \Delta v$ et à $p + \Delta p$, il faut lui fournir une quantité de chaleur.

$$\Delta Q = a\Delta v + b\Delta p,$$

où a et b sont des coefficients eux-mêmes fonctions de v et de p . Pour aller d'un état à un autre, on doit donc fournir une quantité de chaleur égale à l'intégrale curviligne

$$Q = \int_c a dv + b dp,$$

l'intégrale s'effectuant le long du graphe de la fonction $v = f(p)$.

Or, contrairement à ce que l'on pourrait croire, Q dépend des états intermédiaires et non pas uniquement de l'état initial et de l'état final; autrement dit, la forme différentielle $a dv + b dp$ n'est pas exacte.

Mais on démontre en thermodynamique que la forme différentielle

$$\frac{dQ}{T} = \frac{a dv}{T} + \frac{b dp}{T} = M dv + N dp$$

est exacte, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial M}{\partial p} = \frac{\partial N}{\partial v}.$$

Ainsi, dQ/T est la différentielle d'une certaine fonction de v et de p , notée S et appelée *entropie* :

$$\frac{dQ}{T} = \frac{a dv}{T} + \frac{b dp}{T} = dS,$$

d'où

$$S = \int_c \frac{dQ}{T}.$$

La fonction S est l'entropie du corps; elle est indépendante des transformations subies, puisqu'elle ne dépend que de l'état initial et de l'état final.

En particulier, pour les gaz parfaits, en appelant c la chaleur massique à volume constant et C la chaleur massique à pression constante,

$$dS = C \frac{dv}{v} + c \frac{dp}{p} = \frac{dQ}{T};$$

d'où l'entropie

$$S = \ln p^c v^C + k.$$

En résumé, l'inverse de la température absolue est un facteur intégrant de la différentielle de la quantité de chaleur.

EXERCICES

Potentiel scalaire

Parmi les formes différentielles suivantes, reconnaître celles qui sont exactes; déterminer alors le potentiel scalaire.

$$6.1 \quad \omega = \left(a + \frac{1}{1+x^2} \right) dx + \left(b + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \right) dy.$$

$$6.2 \quad \omega = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}.$$

$$6.3 \quad \omega = (a^3 y + x^4) dx - (b^4 - a^3 x) dy.$$

$$6.4 \quad \omega = \left(x + y + \frac{1}{y} - \frac{y}{x^2} \right) dx + \left(x + y + \frac{1}{x} - \frac{x}{y^2} \right) dy.$$

$$6.5 \quad \omega = \left(1 - \frac{4y^2}{(x-y)^2} \right) dx - \left(1 - \frac{4x^2}{(x-y)^2} \right) dy.$$

$$6.6 \quad \omega = \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \right) dx + 2 \frac{y}{x} dy.$$

$$6.7 \quad \omega = y(3x^2 + y^2) dx + x(3y^2 + x^2) dy.$$

$$6.8 \quad \omega = \frac{(3y-x) dx + (y-3x) dy}{(x+y)^3}.$$

$$6.9 \quad \omega = (x^2 + 2xy - 1) dx + (x^2 + y^2 - 2) dy.$$

$$6.10 \quad \omega = \frac{x}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} (y dx - x dy).$$

$$6.11 \quad \omega = \frac{y}{x^2 + a^2} dx + \frac{x}{y^2 + a^2} dy.$$

$$6.12 \quad \omega = \frac{(1-y^2) dx + (1-x^2) dy}{(1+xy)^2}.$$

$$6.13 \quad \omega = \text{Arc tg } \frac{y}{x} dx + \ln \sqrt{x^2 + y^2} dy.$$

6.14 Déterminer les fonctions dérivables g de la variable x de telle sorte que la forme différentielle

$$\omega = g(x) [(x^2 + y^2 - a^2) dx - 2xy dy]$$

soit exacte; calculer alors le potentiel scalaire.

Intégrales curvilignes

Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

$$6.15 \int 2x \frac{1-e^y}{(1+x^2)^2} dx + \frac{e^y}{1+x^2} dy$$

sur le segment $[A, B]$, où $A = (0, 0)$ et $B = (2, 4)$, parcouru de A vers B .

$$6.16 \int y^2 dx + (x^2 - 2xy) dy$$

a) sur $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi/2]$;

b) sur le segment $[A, B]$, où $A = (1, 0)$ et $B = (0, 1)$, parcouru de A vers B .

$$6.17 \int y^2 dx + \frac{dy}{x^2+3}$$

sur les mêmes arcs que ci-dessus.

$$6.18 \int \frac{y}{x^2+y^2} dx$$

sur la parabole d'équation $y^2 = 2x+1$, parcourue dans le sens des y croissants.

CHAPITRE 7

INTÉGRALES MULTIPLES

Dans ce chapitre, nous allons étendre la notion d'intégrale (voir tome 2) au cas des fonctions de deux ou trois variables. Nous obtiendrons ainsi les intégrales doubles et les intégrales triples. Par opposition, les intégrales des fonctions d'une variable sont dites simples. Nous verrons que le calcul d'une intégrale double peut se ramener à celui de deux intégrales simples; de même, le calcul d'une intégrale triple peut se ramener à celui de trois intégrales simples, ou encore à celui d'une intégrale simple et d'une intégrale double.

7.1 Intégrale double sur un rectangle. Nous devons remplacer l'intervalle d'intégration $[a, b]$ par un rectangle $P = [a, b] \times [c, d]$, où $a < b$ et $c < d$.

On appelle *quadrillage* du rectangle P le produit cartésien Q d'une subdivision $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de l'intervalle $[a, b]$ et d'une subdivision $(y_j)_{0 \leq j \leq p}$ de l'intervalle $[c, d]$. On appelle *module* du quadrillage Q le plus grand des modules des deux subdivisions précédentes.

Soient f une fonction numérique bornée sur P et Q un quadrillage de P . On appelle *somme de Riemann* associée à f relativement à ce quadrillage toute somme de la forme

$$R = \sum_{i,j} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) f(\xi_{ij}, \eta_{ij}),$$

où, pour tout élément (i, j) de $[1, n] \times [1, p]$,

$$(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j].$$

On dit enfin que f est *intégrable* sur le rectangle P s'il existe un nombre réel l tel que, pour tout nombre réel strictement positif ε , il existe un nombre réel strictement positif η tel que, pour tout quadrillage Q de module inférieur à η et pour toute somme de Riemann R associée à f relativement à ce quadrillage,

$$|R - l| \leq \varepsilon.$$

On vérifie qu'un tel nombre réel l , s'il existe, est unique; on l'appelle alors *intégrale double* de la fonction f sur P , et on le note

$$\iint_P f(x, y) dx dy.$$

EXEMPLE. — Fonctions constantes. — Soit f une fonction constante et égale à k sur $P = [a, b] \times [c, d]$. Alors f est intégrable sur P , et

$$\iint_P f(x, y) dx dy = (b - a)(d - c)k.$$

Nous admettrons les résultats suivants :

Une fonction continue sur P est intégrable sur P .

(On rappelle qu'une fonction continue sur une partie fermée bornée de \mathbb{R}^2 est bornée.)

Nous nous limiterons désormais au seul cas des fonctions continues.

Les fonctions numériques définies et continues sur P constituent un espace vectoriel, et même une algèbre unitaire. L'application qui à f associe

$$\iint_P f(x, y) dx dy$$

est une forme linéaire.

Soit g une fonction continue sur P et ne s'annulant pas sur P . Alors $1/g$ est encore intégrable sur P .

Soit f une fonction continue sur P . Si f est positive, il en est de même de

$$\iint_P f(x, y) dx dy.$$

Plus précisément, si f est strictement positive, il en est de même de son intégrale sur P .

On en déduit aussitôt le corollaire suivant :

Soient f et g deux fonctions numériques continues sur P . Si $f \leq g$, alors

$$\iint_P f(x, y) dx dy \leq \iint_P g(x, y) dx dy.$$

Si $f < g$, alors

$$\iint_P f(x, y) dx dy < \iint_P g(x, y) dx dy.$$

La formule de la moyenne s'énonce comme dans le cas des intégrales simples :

Soient f et g deux fonctions numériques continues sur P . Soit (m, M) un couple de nombres réels tel que

$$m \leq f \leq M.$$

Alors, si g est positive,

$$m \iint_P g(x, y) dx dy \leq \iint_P f(x, y) g(x, y) dx dy \leq M \iint_P g(x, y) dx dy.$$

En particulier, si $g = 1$,

$$m(b-a)(d-c) \leq \iint_P f(x, y) dx dy \leq M(b-a)(d-c).$$

Le nombre réel

$$\frac{1}{(b-a)(d-c)} \iint_P f(x, y) dx dy$$

s'appelle *valeur moyenne* de la fonction f sur P .

Comme nous l'avons annoncé, le calcul d'une intégrale double peut se ramener à celui d'intégrales simples. Il s'agit, soit de deux intégrales simples *successives*, soit parfois du produit de deux intégrales simples calculées indépendamment. Plus précisément:

Soit f une fonction continue sur $P = [a, b] \times [c, d]$. Alors les fonctions

$$x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy \quad \text{et} \quad y \mapsto \int_a^b f(x, y) dx$$

sont intégrables, et

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

En particulier, si f est le produit de deux fonctions g et h d'une seule variable,

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y),$$

alors

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \left(\int_a^b g(x) dx \right) \left(\int_c^d h(y) dy \right).$$

EXEMPLES.

1. L'intégrale double

$$I = \iint_P \sin x \cos y dx dy,$$

où $P = [0, \pi] \times [0, \pi/2]$, est égale au produit des intégrales

$$\int_0^\pi \sin x dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi/2} \cos y dy.$$

Il s'ensuit que $I = 2$.

2. Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_P y \cos xy dx dy,$$

où $P = [0, 1] \times [0, \pi/2]$.

En intégrant par rapport à x , puis par rapport à y , nous obtenons

$$I = \int_0^{\pi/2} dy \int_0^1 y \cos xy dx = \int_0^{\pi/2} \sin y dy = 1.$$

7.2 Intégrale double sur une partie quarrable. Il nous importe maintenant de savoir intégrer une fonction de deux variables sur une partie P du plan autre qu'un rectangle. La définition des fonctions intégrables sur P devra s'appliquer au moins aux fonctions constantes, ce qui nous conduit à la notion de partie quarrable :

Rappelons que la fonction caractéristique χ_P d'une partie P est la fonction définie par les formules

$$\begin{aligned}\chi_P(x) &= 1 \quad \text{si } x \in P \\ &= 0 \quad \text{si } x \notin P.\end{aligned}$$

On dit qu'une partie bornée P de \mathbf{R}^2 est *quarrable* s'il existe un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ contenant P et tel que la fonction caractéristique de P soit intégrable sur R . L'intégrale double

$$\iint_R \chi_P(x, y) \, dx \, dy$$

ne dépend pas du rectangle R considéré, mais seulement de la partie P ; on peut la prendre comme définition de l'aire de P (voir chapitre 8). En particulier, si $P = [a, b] \times [c, d]$, il est immédiat que P est quarrable; on retrouve pour son aire la valeur classique $(b-a)(d-c)$.

Soient P et Q deux parties quarrables. Alors les parties $P \cap Q$, $P \cup Q$ et $P - Q$ sont encore quarrables. En effet, on vérifie facilement que les fonctions caractéristiques de ces diverses parties sont liées par les formules

$$\chi_{P \cap Q} = \chi_P \chi_Q \quad \chi_{P \cup Q} = \chi_P + \chi_Q - \chi_P \chi_Q \quad \chi_{P - Q} = \chi_P - \chi_P \chi_Q;$$

or, nous savons que le produit, la somme et la différence de deux fonctions intégrables sur un rectangle $[a, b] \times [c, d]$ sont encore des fonctions intégrables.

Soit maintenant f une fonction numérique bornée sur une partie quarrable P . On dit que f est intégrable sur P s'il existe un rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$ contenant P tel que la fonction g prolongeant f nulle sur le complémentaire de P dans R soit intégrable sur R . On vérifie aisément que l'intégrale de g sur R ne dépend que de f et de P , et non du rectangle R considéré; on appelle cette intégrale *intégrale de f sur P* et on la note

$$\iint_P f(x, y) \, dx \, dy.$$

Lorsque la fonction f est positive, l'intégrale de f sur P peut s'interpréter comme la *masse* d'une plaque matérielle P de densité variable f . Cette intégrale peut encore s'interpréter comme le *volume* limité par la surface d'équation $z = f(x, y)$, le plan xOy et le cylindre de génératrices parallèles à Oz ayant pour base la courbe C limitant la partie P (voir Fig. 7.1 et chapitre 9).

On démontre qu'une fonction continue et bornée sur une partie quarrable P est intégrable sur P .

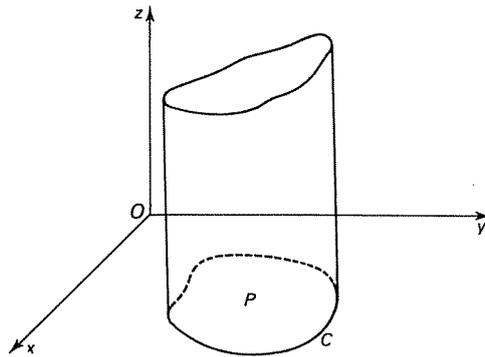


FIG. 7.1

Les propriétés énoncées pour l'intégrale sur un rectangle restent valables : linéarité de l'intégrale, formule de la moyenne, etc. De plus, pour tout couple (P, Q) de parties quarrables tel que $P \subset Q$ et pour toute fonction positive f intégrable sur P et Q ,

$$\iint_P f(x, y) dx dy \leq \iint_Q f(x, y) dx dy.$$

Voici un cas particulier fondamental :

Considérons deux fonctions φ et ψ à valeurs réelles, intégrables sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbf{R} et telles que $\varphi \leq \psi$. Alors la partie P constituée des points (x, y) tels que $x \in [a, b]$ et $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$ est quarrable (voir Fig. 7.2).

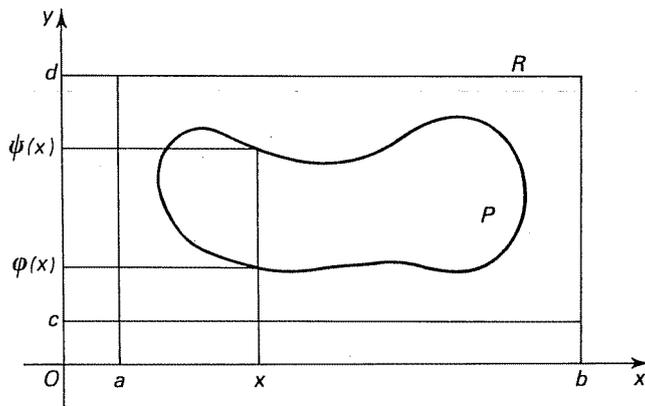


FIG. 7.2

Par exemple, une partie convexe bornée est du type précédent. (Rappelons qu'une partie P est dite convexe si, pour tout couple (A, B) de points de P , le segment $[A, B]$ est contenu dans P .) Parmi les parties convexes bornées, citons les rectangles

de côtés non nécessairement parallèles aux axes de coordonnées, les disques, la partie limitée par une ellipse, etc.

Dans ces conditions, l'intégrale de f sur P peut se calculer à l'aide de deux intégrales simples successives :

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

(Le second membre devrait se noter en toute rigueur

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right] dx,$$

mais personne n'emploie cette notation en pratique. On comprend que les intégrations doivent toujours être effectuées de droite à gauche.)

Soit en effet $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle contenant P . Alors, par définition de l'intégrale de f sur P ,

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \iint_R g(x, y) dx dy.$$

Or,

$$\iint_R g(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d \chi_P(x, y) g(x, y) dy$$

et

$$\int_c^d \chi_P(x, y) g(x, y) dy = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy,$$

par définition même des fonctions χ_P et g , d'où le résultat annoncé.

De même, si la courbe limitant P est rencontrée en deux points $\theta(y)$ et $\rho(y)$ par une parallèle à l'axe Ox ,

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\theta(y)}^{\rho(y)} f(x, y) dx.$$

EXEMPLE. Calculer l'intégrale

$$I = \iint_P \frac{dx dy}{y^2},$$

où P est la partie du plan définie par $x \in [1, 3]$, $y \in [1, x^2]$.

Intégrons d'abord par rapport à y , puis par rapport à x :

$$I = \int_1^3 dx \int_1^{x^2} \frac{dy}{y^2} = \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) dx = \left[x + \frac{1}{x} \right]_1^3 = 4/3.$$

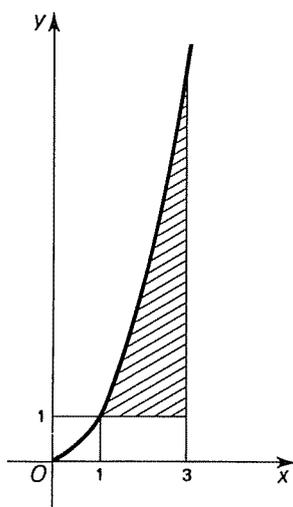


FIG. 7.3

Vérifions ce résultat en intégrant d'abord par rapport à x , puis par rapport à y :

$$I = \int_1^9 dy \int_{\sqrt{y}}^3 \frac{dx}{y^2} = \int_1^9 \frac{3 - \sqrt{y}}{y^2} dy = \left[-\frac{3}{y} + \frac{2}{\sqrt{y}} \right]_1^9 = -\frac{3}{9} + 3 + \frac{2}{3} - 2 = 4/3.$$

On remarquera que si les deux procédés sont théoriquement équivalents, le premier est d'application plus commode. Tout dépend de l'exemple considéré.

7.3 Changement de variable dans les intégrales doubles. Nous ne pouvons faire ici la théorie du changement de variable, ni même donner la règle dans le cas général. Nous nous contenterons d'indiquer le résultat suivant :

Pour passer en coordonnées polaires, on remplace bien entendu x et y par $\rho \cos \theta$ et par $\rho \sin \theta$; on remplace en outre $dx dy$ par $\rho d\rho d\theta$.

On a intérêt à passer en coordonnées polaires si le domaine d'intégration s'exprime plus simplement de cette manière. Par exemple, le disque $x^2 + y^2 \leq a^2$ devient en coordonnées polaires $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq a$. Tout se passe dans ce cas comme si le domaine d'intégration était un rectangle!

EXEMPLE. Calculer l'intégrale

$$I = \iint_P \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

où P est le demi-disque défini par

$$x^2 + y^2 - 2Rx \leq 0, \quad x \geq R$$

(Fig. 7.4), en coordonnées polaires.

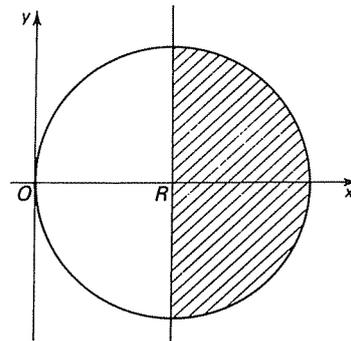


FIG. 7.4

En coordonnées polaires, l'équation du cercle de centre $(R, 0)$ et de rayon R est $\rho = 2R \cos \theta$; celle du diamètre parallèle à Oy est $\rho = R/\cos \theta$. L'intégrale devient

$$I = \iint \frac{\rho \, d\rho \, d\theta}{\rho^3} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\theta \int_{R/\cos \theta}^{2R \cos \theta} \frac{d\rho}{\rho^2},$$

soit

$$I = - \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(\frac{1}{2R \cos \theta} - \frac{\cos \theta}{R} \right) d\theta.$$

Finalement,

$$I = - \frac{1}{R} \left[\frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \sin \theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{R} \left(\sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \right).$$

7.4 La formule de Green-Riemann. Voici une formule souvent utilisée pour ramener le calcul d'une intégrale double à celui d'une intégrale curviligne et parfois pour ramener une intégrale curviligne à une intégrale double :

Soit P une partie du plan limitée par une courbe fermée C , orientée dans le sens direct et coupée en deux points au plus par une parallèle à l'un ou l'autre des axes de coordonnées. (Cette circonstance se produit en particulier lorsque la partie P est convexe.) Soient M et N deux fonctions continues sur P , admettant des dérivées partielles $\partial M/\partial y$ et $\partial N/\partial x$ continues. Alors

$$\int_C M \, dx + N \, dy = \iint_P \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

En effet, la méthode des intégrations successives s'applique à la fonction $\frac{\partial M}{\partial y}$. Conservons les notations de la figure 7.2. Il vient

$$\begin{aligned} \iint \frac{\partial M}{\partial y} \, dx \, dy &= \int dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial M}{\partial y} \, dy \\ &= \int (M[x, \psi(x)] - M[x, \varphi(x)]) \, dx. \end{aligned}$$

On reconnaît la différence entre les intégrales curvilignes de la forme différentielle $M dx$ sur les graphes des fonctions ψ et φ . C'est exactement l'opposé de l'intégrale de $M dx$ sur la courbe orientée C (attention au signe!).

Un calcul analogue montre que

$$\iint \frac{\partial N}{\partial x} dx dy = \int_C N dy.$$

La formule de Green-Riemann en résulte aussitôt.

Remarque. Si la forme différentielle $\omega = M dx + N dy$ est exacte, alors $\partial N/\partial x - \partial M/\partial y = 0$, ce qui montre que l'intégrale double est nulle, et donc que l'intégrale curviligne l'est aussi. On retrouve ainsi un résultat du chapitre 6.

EXEMPLES

1. Pour calculer l'aire d'une partie P limitée par une courbe fermée C , il suffit de trouver deux fonctions M et N telles que

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1.$$

On prend généralement $N(x, y) = x/2$ et $M(x, y) = -y/2$, et l'aire est donnée par la formule suivante :

$$A = \frac{1}{2} \int_C x dy - y dx.$$

On peut prendre aussi $N(x, y) = x$ et $M = 0$, ou encore $M(x, y) = -y$ et $N = 0$. Ainsi,

$$A = \int_C x dy = - \int_C y dx.$$

Le signe $-$ de cette dernière formule peut surprendre. En effet, considérons le cas où la partie P est limitée par le graphe d'une fonction positive f , l'axe Ox et deux parallèles à Oy d'équations $x = a$ et $x = b$. L'intégrale de la forme différentielle $-y dx$ est nulle partout sauf sur le graphe de f . Le sens direct sur C correspond à une variation de x de b à a , et non de a à b , pour la partie utile de l'intégrale curviligne; ceci explique que

$$- \int_C y dx = \int_a^b f(x) dx.$$

En coordonnées polaires, l'aire est définie par

$$A = \iint \rho d\rho d\theta.$$

Si ρ est donné en fonction de θ , on obtient, en intégrant d'abord par rapport à ρ ,

$$A = \frac{1}{2} \int \rho^2 d\theta.$$

On retrouvera ce résultat en remplaçant x par $\rho \cos \theta$, y par $\rho \sin \theta$, dx par $\cos \theta d\rho - \rho \sin \theta d\theta$ et dy par $\sin \theta d\rho + \rho \cos \theta d\theta$ dans la forme différentielle $\frac{1}{2}(x dy - y dx)$.

2. Calculer l'intégrale curviligne

$$I = \int_C x^3 dy - y^3 dx,$$

où C est le cercle de centre O et de rayon R parcouru dans le sens direct. Transformer ensuite cette intégrale curviligne en intégrale double, et comparer les résultats.

Paramétrons le cercle en posant $x = R \cos t$ et $y = R \sin t$. Il vient

$$I = \int_0^{2\pi} R^4 (\cos^4 t + \sin^4 t) dt = R^4 \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{\cos 4t}{4} \right) dt = \frac{3}{2} \pi R^4.$$

Transformons maintenant I en intégrale double, grâce à la formule de Green-Riemann :

$$\begin{aligned} M(x, y) &= -y^3 & N(x, y) &= x^3 \\ \frac{\partial M}{\partial y} &= -3y^2 & \frac{\partial N}{\partial x} &= 3x^2. \end{aligned}$$

D'où

$$I = \iint \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = 3 \iint (x^2 + y^2) dx dy.$$

Passons en coordonnées polaires :

$$I = 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = 6\pi \frac{R^4}{4} = \frac{3}{2} \pi R^4.$$

On obtient bien le même résultat que par l'intégrale curviligne. Mais très souvent l'un des procédés est plus intéressant que l'autre.

7.5 Intégrales doubles généralisées. Nous ne pouvons pas donner ici de règle simple pour conclure à la convergence d'une intégrale double lorsque le domaine d'intégration n'est pas borné, ou lorsque la fonction à intégrer n'est pas bornée. Nous nous contenterons de faire une étude précise en mettant en relief les difficultés présentées. Le résultat obtenu par cette étude est fondamental en calcul des probabilités (voir tome 6).

EXEMPLE. Calculer l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

Nous avons vu au tome 3 que cette intégrale est convergente. Mais nous ne connaissons pas de primitive de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$. Nous allons calculer I grâce

à l'artifice suivant : le carré de I peut s'écrire

$$I^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right),$$

ce qui fait penser à une intégrale double, le domaine d'intégration étant le premier quadrant, soit Q . Mais rien ne nous permet d'affirmer que le symbole

$$\iint_Q e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

ait un sens. Cependant, la théorie des intégrales doubles nous permet de calculer I^2 à l'aide d'un passage à la limite. Considérons le carré $K(R)$ de côté R , les quarts de disque $C(R)$ et $C(\sqrt{2}R)$ de centre O et de rayons respectifs R et $\sqrt{2}R$ (Fig. 7.5).

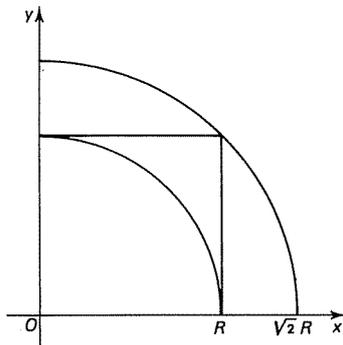


FIG. 7.5

La fonction à intégrer étant positive et les domaines d'intégration inclus les uns dans les autres, nous pouvons affirmer que

$$\iint_{C(R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{K(R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \leq \iint_{C(\sqrt{2}R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Calculons la première intégrale en passant en coordonnées polaires :

$$\iint_{C(R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{2} \frac{1 - e^{-R^2}}{2}.$$

La limite lorsque R tend vers $+\infty$ est $\pi/4$; on montre de même que la troisième intégrale tend vers $\pi/4$.

Par prolongement des inégalités, nous voyons que l'intégrale du milieu a aussi pour limite $\pi/4$. Or, cette limite est par définition I^2 . Comme I est positif, nous en déduisons que $I = \sqrt{\pi}/2$.

7.6 Intégrales triples. On peut développer une théorie analogue à la précédente pour les fonctions de trois variables définies sur une partie bornée de R^3 .

On commence par remplacer les rectangles par des parallélépipèdes rectangles de côtés parallèles aux axes de coordonnées. Les définitions des sommes de Riemann et des fonctions intégrables s'étendent aussitôt. L'intégrale triple de f sur un parallélépipède rectangle P se note

$$\iiint_P f(x, y, z) dx dy dz.$$

On remplace ensuite la définition des parties quarrables par celle des parties cubables, et l'on définit alors l'intégrale d'une fonction f sur une partie cubable P comme dans le cas du plan. Lorsque f est constante et égale à 1, l'intégrale de f sur une partie cubable P peut être prise comme définition du *volume* de P . Lorsque f est positive, on peut interpréter l'intégrale de f sur la partie P comme une *masse*, la densité étant f .

Nous nous bornerons à dire que toutes les propriétés des intégrales doubles se transcrivent dans ce nouveau cadre. Signalons seulement des formules très utiles, ramenant le calcul des intégrales triples à celui des intégrales simples ou doubles :

$$\begin{aligned} \iiint_P f(x, y, z) dx dy dz &= \int_a^b dx \int_{\rho(x)}^{\theta(x)} dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz \\ &= \int_a^b dx \iint_{Q(x)} f(x, y, z) dy dz \\ &= \iint_Q dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} f(x, y, z) dz, \end{aligned}$$

avec toutes les variantes possibles par permutation des lettres x , y et z .

Bien entendu, lorsque f est le produit de trois fonctions d'une variable et que P est un parallélépipède rectangle $[a, a'] \times [b, b'] \times [c, c']$, l'intégrale de f est le produit de trois intégrales simples :

$$\begin{aligned} \iiint_P g(x) h(y) k(z) dx dy dz \\ = \left(\int_a^{a'} g(x) dx \right) \left(\int_b^{b'} h(y) dy \right) \left(\int_c^{c'} k(z) dz \right). \end{aligned}$$

Il est rare que l'on ait à effectuer le calcul d'une intégrale triple, en dehors du cas des volumes (voir chapitre 9).

EXEMPLE. Calculer l'intégrale

$$I = \iiint_P x^3 \cos z \sin z dx dy dz,$$

où $P = [0, a] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi/2]$.

Il est clair que

$$I = \left(\int_0^a x^3 dx \right) \left(\int_0^{2\pi} dy \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos z \sin z dz \right) = \frac{a^4}{4} 2\pi \frac{1}{2} = \frac{\pi a^4}{4}.$$

EXERCICES

Intégrales doubles

Calculer les intégrales suivantes :

- 7.1 $\iint xy \, dx \, dy$ sur $[0, 1] \times [0, 1]$
- 7.2 $\iint (x-1)^2 (y+1)^2 \, dx \, dy$ sur $[1, 2] \times [2, 3]$
- 7.3 $\iint \frac{x^3}{y^4} \, dx \, dy$ sur $[1, 2] \times [3, 4]$
- 7.4 $\iint \frac{xy}{1+x^2} \, dx \, dy$ sur $[1, 2] \times [0, 5]$
- 7.5 $\iint xy e^{x+y} \, dx \, dy$ sur $[0, 2] \times [0, 2]$
- 7.6 $\int_1^2 dx \int_1^{3-x} \frac{dy}{(x+y)^3}$
- 7.7 $\iint \frac{dx \, dy}{1+x+y}$ sur $[0, 1] \times [0, 1]$
- 7.8 $\iint |x+y| \, dx \, dy$ sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$
- 7.9 $\iint \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \, dx \, dy$ sur $[0, a] \times [0, b]$
- 7.10 $\iint x \cos xy \, dx \, dy$ sur $[0, \pi/2] \times [0, 1]$
- 7.11 $\iint x e^{-xy} \, dx \, dy$ sur $[0, 1] \times [0, +\infty[$
- 7.12 $\iint \frac{y^4}{x^2} \, dx \, dy$ sur $]-\infty, -1] \times [-1, 0]$
- 7.13 $\iint \frac{x^2}{1+y^2} \, dx \, dy$ sur $[0, 1] \times]-\infty, +\infty[$
- 7.14 $\iint \cos x \cos y \, dx \, dy$ $0 \leq x, 0 \leq y, x+y \leq \pi/2$

- 7.15 $\iint x^2 y^2 (a^3 - x^3 - y^3)^{1/2} dx dy$ $0 \leq x, 0 \leq y, x^3 + y^3 \leq a^3$
- 7.16 $\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{a \cos \theta/2} \rho^2 d\rho$
- 7.17 $\iint \frac{dx dy}{(R^2 - x^2 - y^2)^{1/2}}$ $x^2 + y^2 \leq R^2$
- 7.18 $\iint \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2 + 1} dx dy$ $x^2 + y^2 \leq 1$
- 7.19 $\iint y(1 - x^2 - y^2)^{1/2} dx dy$ $0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 \leq 1$
- 7.20 $\iint y dx dy$ $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$
- 7.21 $\iint xy^2 dx dy$ $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$
- 7.22 $\iint \frac{dx dy}{(4 - x^2 - y^2)^{1/2}}$ $x^2 + y^2 - 2x \leq 0$
- 7.23 $\iint \frac{2xy}{x^2 + y^2} dx dy$ $0 \leq x \leq y \leq 1$
- 7.24 $\iint xy dx dy$ $x^2 + y^2 - x \leq 0, x^2 + y^2 - y \geq 0$
- 7.25 $\iint (x+y) \sin x \sin y dx dy$ sur $[0, \pi] \times [0, \pi]$
- 7.26 $\iint (x+y) \sin x \sin y dx dy$ $x^2 + y^2 \leq 1$
- 7.27 $\iint \frac{dx dy}{1 + x^2 \operatorname{tg}^2 y}$ sur $[0, 1] \times [0, \pi/2]$.

Intégrales triples

Calculer les intégrales suivantes :

- 7.28 $\iiint xyz dx dy dz$ sur $[-1, 1] \times [-2, 2] \times [-3, 3]$

- 7.29 $\iiint x^2 z \, dx \, dy \, dz$ sur $[-1, 1] \times [-2, 2] \times [-3, 3]$
- 7.30 $\iiint \frac{dx \, dy \, dz}{xyz}$ sur $[1, 2] \times [2, 3] \times [10, 11]$
- 7.31 $\iiint e^{x+y+z} \, dx \, dy \, dz$ sur $]-\infty, 2] \times]-\infty, 4] \times]-\infty, -6]$
- 7.32 $\iiint (x^2 + 1)(y-1)z^2 \, dx \, dy \, dz$ sur $[0, 1] \times [-1, 0] \times [1, 2]$
- 7.33 $\iiint \frac{y^2 z}{x^2} \, dx \, dy \, dz$ sur $[1, +\infty[\times [-2, 2] \times [0, 1]$
- 7.34 $\iiint z \, dx \, dy \, dz$ $0 \leq x, 0 \leq y, 0 \leq z, x+y+z \leq 1$
- 7.35 $\int_0^1 dx \int_0^{\ln x} dy \int_0^{x+y} e^{x+y+z} dz$
- 7.36 $\iiint 6r^5 \sin^3 \theta \cos \theta \sin \varphi \cos \varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi$ $r \in [0, a], \theta, \varphi \in [0, \pi/2]$
- 7.37 $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin^3 \varphi \, d\varphi \int_0^{a \cos \theta} r \, dr$
- 7.38 $\iiint z \, dx \, dy \, dz$ $0 \leq z, x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1.$

CHAPITRE 8

CALCUL DES AIRES

Dans quelques rares cas, on peut définir et calculer les aires de manière élémentaire. Par exemple, l'aire d'un rectangle est le produit des côtés. L'aire d'un triangle ABC est la moitié du produit de la base BC par la hauteur issue de A ; c'est encore la moitié de la norme du produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. Mais en général le calcul des aires utilise les techniques du calcul intégral. L'aire limitée par une surface plane est l'intégrale double sur ce domaine de la fonction constante et égale à 1 :

$$A = \iint dx dy.$$

En fait, comme nous l'avons montré au chapitre 7, ce calcul se ramène toujours à celui d'une intégrale simple, éventuellement par l'intermédiaire d'une intégrale curviligne. (D'ailleurs, comme nous l'avons vu au tome 2, c'est afin de pouvoir définir rigoureusement la notion d'aire que l'on a été amené à introduire les intégrales.)

8.1 Aire limitée par le graphe d'une fonction. Soit f une fonction à valeurs réelles positives, continue sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbf{R} , $a < b$. L'aire de la partie du plan comprise entre le graphe de f , l'axe Ox et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale, par définition même, à l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$:

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

Dans le cas d'une fonction dont le graphe coupe une ou plusieurs fois l'axe Ox , l'aire de la partie définie ci-dessus est l'intégrale de la valeur absolue de f . En pratique, on commence par tracer le graphe de f , et l'on décompose l'intervalle d'intégration en intervalles partiels sur lesquels f garde un signe constant.

EXEMPLES

1. Aire limitée par la parabole d'équation

$$y = x^2 - 5x + 6$$

et l'axe Ox , y étant négatif.

La courbe rencontre Ox aux points d'abscisses 2 et 3 (Fig. 8.1).

Ainsi,

$$A = - \int_2^3 (x^2 - 5x + 6) dx = - \left[\frac{x^3}{3} - 5 \frac{x^2}{2} + 6x \right]_2^3 = \frac{1}{6}.$$

2. Aire limitée par une arche de la sinusoïde d'équation

$$y = \sin x.$$

$$A = \int_0^\pi \sin x dx = -[\cos x]_0^\pi = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2.$$

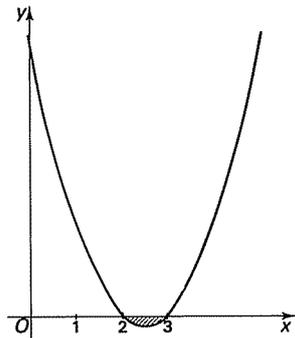


FIG. 8.1

3. Aire limitée par la courbe d'équation $y = e^x$, $x \leq 0$, et les axes de coordonnées

$$A = \int_{-\infty}^0 e^x dx = [e^x]_{-\infty}^0 = 1.$$

Remarquons que cette aire a une valeur finie, quoique l'intervalle d'intégration ne soit pas borné.

4. Aire du disque. Considérons le disque limité par le cercle d'équation

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Par raison de symétrie, l'aire du disque est le double de l'aire limitée par le demi-cercle d'équation $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ et l'axe Ox :

$$A = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

Pour faire disparaître le radical, posons $x = R \cos t$. Alors

$$\begin{aligned} A &= -2 \int_{\pi}^0 R^2 \sin^2 t dt = 2R^2 \int_0^{\pi} \sin^2 t dt = R^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos 2t) dt \\ &= R^2 [t - \sin 2t/2]_0^{\pi} = \pi R^2. \end{aligned}$$

Nous retrouverons ce résultat classique par d'autres méthodes.

5. Aire limitée par une ellipse. Soit l'ellipse d'équation

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

L'aire limitée est $\iint dx dy$. Effectuons le changement de variable $x/a = X/R$, $y/b = Y/R$; l'intégrale devient

$$A = \frac{ab}{R^2} \iint dX dY,$$

le domaine d'intégration étant cette fois le disque de centre O et de rayon R . Ainsi, l'intégrale double est égale à l'aire du disque, à savoir πR^2 . Finalement,

$$A = \frac{ab}{R^2} \pi R^2 = \pi ab.$$

6. Aire limitée par la parabole d'équation $y^2 = 2px$ et la droite d'équation $x = h$ (Fig. 8.2).

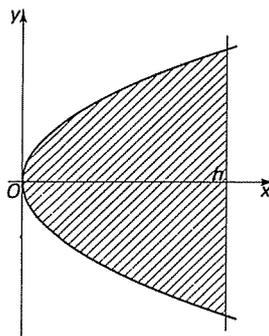


FIG. 8.2

Comme dans le cas du cercle, nous pouvons résoudre l'équation en y à condition de ne considérer qu'une moitié de la courbe. Pour obtenir l'aire cherchée, nous doublerons l'aire comprise entre la courbe d'équation $y = \sqrt{2px}$, l'axe Ox et la droite d'équation $x = h$. Ainsi,

$$A = 2 \int_0^h \sqrt{2px} \, dx = \frac{4}{3} \sqrt{2p} [x^{3/2}]_0^h = \frac{4}{3} \sqrt{2p} h^{3/2}.$$

Remarque. Examinons plus généralement le cas d'une courbe d'équation résolue en x et non en y , $x = g(y)$. On se ramène aussitôt au problème précédent en échangeant les noms des axes de coordonnées :

$$A = \int_a^b g(y) \, dy.$$

8.2 Aire comprise entre deux graphes. Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles continues sur un intervalle $[a, b]$, telles que $f \leq g$. L'aire limitée par les graphes de f et g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est évidemment la différence des aires limitées par chacun de ces graphes, l'axe Ox et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:

$$A = \int_a^b g(x) \, dx - \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b [g(x) - f(x)] \, dx.$$

EXEMPLES

1. Calculer l'aire comprise entre la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite d'équation $y = 2x$ (Fig. 8.3).

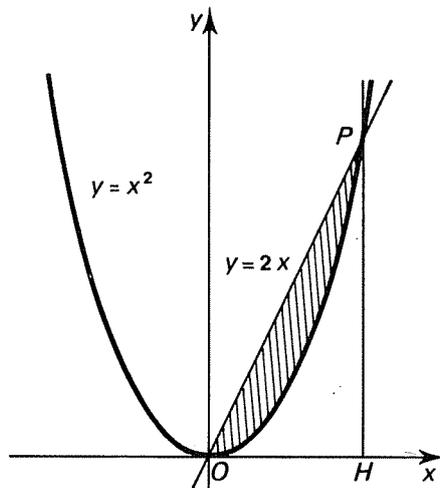


FIG. 8.3

Le point de rencontre P autre que l'origine est défini par le fait qu'en ce point les deux ordonnées sont égales :

$$x^2 = 2x,$$

d'où $x = 2$ et $y = 4$.

L'aire cherchée est la différence entre l'aire du triangle OHP et l'aire comprise entre la parabole, l'axe Ox et la droite d'équation $x = 2$.

Ainsi,

$$A = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \int_0^2 x^2 dx = 4 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

2. Calculer l'aire comprise entre la courbe d'équation $y = x^{3/2}$ et la première bissectrice.

Commençons par chercher les coordonnées du point d'intersection autre que l'origine :

$$x = x^{3/2},$$

d'où $\sqrt{x} = 1$ et $x = 1$; par suite, $y = 1$.

L'aire cherchée est

$$A = \int_0^1 (x - x^{3/2}) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 - \frac{2}{5} \left[x^{5/2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}.$$

8.3 Aire limitée par le support d'un arc paramétré. Pour calculer l'aire limitée

par le support d'un arc paramétré, d'après la formule de Green-Riemann, on a le choix entre les trois expressions suivantes

$$A = - \int y dx \quad A = \int x dy \quad A = \frac{1}{2} \int x dy - y dx,$$

le support de l'arc étant parcouru dans le sens direct (bien entendu, l'origine et l'extrémité de l'arc étant confondues). On emploie surtout la dernière formule, car elle conduit généralement à des simplifications.

EXEMPLES

1. Aire du disque. Considérons le disque limité par le cercle de représentation paramétrique

$$x = R \cos t \quad y = R \sin t.$$

Alors

$$x dy - y dx = R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = R^2 dt$$

et

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 dt = \pi R^2.$$

2. Aire limitée par une ellipse. Considérons l'ellipse de représentation paramétrique

$$x = a \cos t \quad y = b \sin t.$$

Alors

$$x dy - y dx = ab (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = ab dt,$$

et l'aire limitée par l'ellipse est

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt = \pi ab.$$

3. Aire limitée par une arche de cycloïde et l'axe Ox. Rappelons que

$$x = a(t - \sin t) \quad y = a(1 - \cos t).$$

Pour obtenir une arche, faisons varier t de 0 à 2π . Il ne s'agit pas d'une courbe fermée, mais on peut considérer que y est une fonction de x . L'aire comprise entre l'axe Ox et la courbe est donc donnée par la formule

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi a} y(x) dx = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos t + \cos^2 t) dt = a^2 \left[\frac{3t}{2} - 2 \sin t + \frac{\sin 2t}{4} \right]_0^{2\pi} \\ &= 3\pi a^2. \end{aligned}$$

L'aire est donc exactement le triple de celle qui est limitée par le cercle générateur, résultat trouvé... expérimentalement par Galilée au XVI^e siècle.

4. Aire limitée par la boucle du folium de Descartes. Le folium de Descartes (voir chapitre 2) a pour équation

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

et pour représentation paramétrique

$$x = \frac{3at}{1+t^3} \quad y = tx = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

L'origine est atteinte lorsque $t = 0$ et que t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$ (Fig. 8.4).

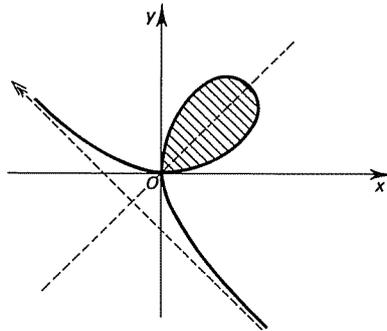


FIG. 8.4

La boucle est parcourue lorsque t varie de 0 à $+\infty$. Remarquons que

$$x dy - y dx = x^2 \frac{x dy - y dx}{x^2} = x^2 d \frac{y}{x} = x^2 dt = \frac{9a^2 t^2}{(1+t^3)^2} dt.$$

D'où

$$A = \frac{9a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt.$$

Le changement de variable $u = t^3$ s'impose :

$$A = \frac{3a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u)^2} = -\frac{3a^2}{2} \left[\frac{1}{1+u} \right]_0^{+\infty} = \frac{3a^2}{2}.$$

8.4 Aire limitée par une courbe en coordonnées polaires. On emploie cette fois l'intégrale curviligne

$$A = \frac{1}{2} \int \rho^2 d\theta.$$

Rappelons que

$$x dy - y dx = \rho^2 d\theta,$$

ce qui explique que l'expression $x dy - y dx$ est simple dans le cas des arcs paramétrés ayant une équation simple en coordonnées polaires.

EXEMPLES

1. Aire du disque. En coordonnées polaires, le calcul se réduit à très peu de

choses :

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} R^2 d\theta = \pi R^2.$$

2. Aire limitée par la cardioïde. Puisque $\rho = a(1 + \cos \theta)$,

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \left[\frac{3\theta}{2} + 2 \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_{-\pi}^{\pi} = 3\pi \frac{a^2}{2}. \end{aligned}$$

On remarquera l'analogie avec le calcul de l'aire limitée par une arche de cycloïde.

3. Aire limitée par la lemniscate de Bernoulli. Par raison de symétrie, l'aire est deux fois celle que limite la boucle dans le demi-plan $x \geq 0$ (Fig. 8.5).

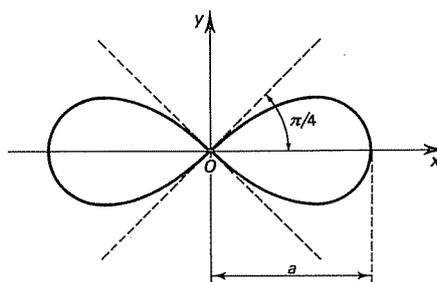


FIG. 8.5

Comme $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$,

$$A = \frac{1}{2} 2a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = a^2.$$

4. Aire du segment de parabole limité par la parallèle à la directrice issue du foyer. L'équation d'une parabole en coordonnées polaires est

$$\rho = p/(1 + \cos \theta).$$

L'origine étant au foyer, la droite limitant le segment n'est autre que l'axe Oy. D'où

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{p}{1 + \cos \theta} \right)^2 d\theta = \frac{p^2}{8} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos^4 \theta/2}.$$

Posons $t = \theta/2$; alors

$$A = \frac{p^2}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{dt}{\cos^4 t}.$$

Or,

$$\int \frac{dt}{\cos^4 t} = \int \frac{1}{\cos^2 t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 t) d(\operatorname{tg} t) = \operatorname{tg} t + \frac{\operatorname{tg}^3 t}{3}.$$

Ainsi,

$$A = \frac{p^2}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{2p^2}{3}.$$

On retrouve ce résultat en prenant $h = p/2$ dans le n° 8.2.

8.5 Aire d'une surface de révolution. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ de \mathbf{R} . Il nous sera commode de considérer son graphe AB tracé dans le plan zOy , c'est-à-dire que $y = f(z)$. Dans la rotation autour de Oz , l'arc AB engendre une surface de révolution dont on veut déterminer l'aire (Fig. 8.6). Cette surface de révolution a pour équation en coordonnées cylindriques $\rho = f(z)$.

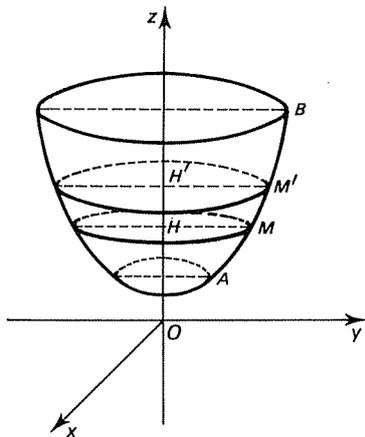


FIG. 8.6

Un point M de l'arc AB admet pour coordonnées cartésiennes $(0, f(z), z)$. L'aire de la surface engendrée par l'arc AM dans la rotation autour de Oz est une fonction S de la cote z du point M . Donnons à z un accroissement Δz , que nous supposons positif. Il lui correspond sur AB un point M' de coordonnées $(0, y + \Delta y, z + \Delta z)$. Dans ces conditions, $S(z)$ subit un accroissement ΔS sensiblement égal à l'aire du tronc de cône engendré par le segment $[M, M']$ en tournant autour de Oz . Donc

$$\Delta S \approx \pi(HM + H'M') MM' = \pi(y + y + \Delta y) MM' = \pi(2y + \Delta y) MM'.$$

Écrivons alors le rapport $\Delta S/\Delta z$ en faisant apparaître la longueur de l'arc MM' au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{\Delta S}{\Delta z} \approx \pi(2y + \Delta y) \frac{MM'}{\widehat{MM'}} \frac{\widehat{MM'}}{\Delta z}.$$

Quand Δz tend vers 0,

$$\frac{MM'}{\widehat{MM'}} \rightarrow 1 \quad \text{et} \quad \frac{\widehat{MM'}}{\Delta z} = \frac{\Delta s}{\Delta z} \rightarrow \frac{ds}{dz},$$

où s désigne l'abscisse curviligne sur l'arc AB . Donc, quand Δz tend vers 0, le rapport $\Delta s/\Delta z$ tend vers

$$\frac{dS}{dz} = 2\pi y \frac{ds}{dz}.$$

On obtient ainsi

$$dS = 2\pi y \, ds,$$

avec $y = f(z)$ et $ds = \sqrt{1+y'^2} \, dz$. L'aire engendrée par l'arc AB en tournant autour de Oz est donc $A = S(b)$, soit

$$A = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} \, dz = 2\pi \int_a^b y \, ds.$$

Lorsque la surface de révolution est donnée, non par sa méridienne d'équation $y = f(z)$, mais par son équation en coordonnées cylindriques $\rho = f(z)$, on écrit la formule précédente sous la forme

$$A = 2\pi \int \rho \, ds.$$

EXEMPLES

1. *Aire latérale d'un tronc de cône.* La courbe engendrant un cône de révolution de sommet O en tournant autour de Oz est une droite d'équation

$$y = az, \quad \text{où} \quad a = \operatorname{tg} \alpha = R/h.$$

Ainsi,

$$y' = a = R/h.$$

L'aire latérale du tronc de cône est

$$\begin{aligned} A &= \int_0^h 2\pi y \sqrt{1+y'^2} \, dz = 2\pi \frac{R}{h} \int_0^h z \sqrt{1 + \frac{R^2}{h^2}} \, dz \\ &= 2\pi \frac{R}{h} \sqrt{\frac{h^2 + R^2}{h^2}} \int_0^h z \, dz. \end{aligned}$$

Or, $\sqrt{h^2 + R^2}$ est la longueur l de l'arête du cône, et il reste

$$A = \frac{2\pi R}{h^2} l \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^h = \frac{2\pi R l}{h^2} \frac{h^2}{2} = \pi R l.$$

L'aire latérale du tronc de cône engendré par le segment $[A, B]$ tel que $OB = l'$ est obtenue en faisant la différence

$$\pi R l - \pi R' l' = \pi (R l - R' l').$$

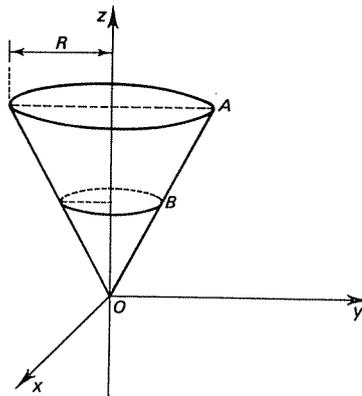


FIG. 8.7

C'est ce résultat, bien connu en géométrie élémentaire, que nous avons utilisé ci-dessus pour évaluer l'aire latérale du tronc de cône engendré par MM' et qui nous a permis de trouver la formule générale de l'aire des surfaces de révolution.

2. *Aire de la sphère.* La sphère de centre O et de rayon R est engendrée par le demi-cercle d'équation

$$y = \sqrt{R^2 - z^2}$$

en tournant autour de Oz (Fig. 8.8).

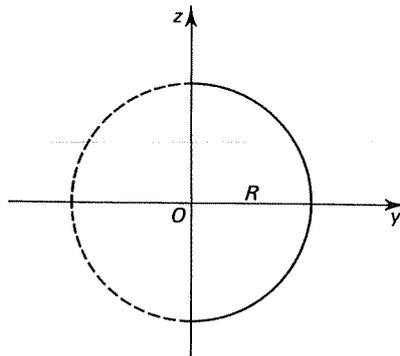


FIG. 8.8

Par suite,

$$A = \int_{-R}^R 2\pi \sqrt{R^2 - z^2} \sqrt{1 + \frac{z^2}{R^2 - z^2}} dz = 2\pi R \int_{-R}^R dz = 4\pi R^2,$$

soit quatre fois l'aire limitée par un grand cercle.

3. Aire d'un parabolôide de révolution. C'est, par exemple, la surface réfléchissante d'un phare d'automobile (Fig. 8.9).

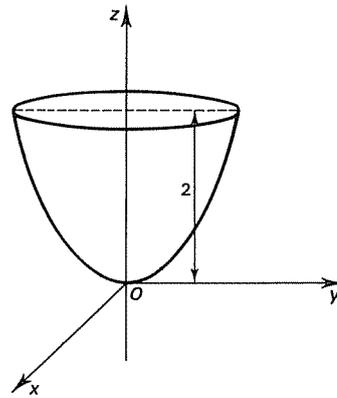


FIG. 8.9

Considérons l'arc de parabole d'équation $z = y^2$, $0 \leq z \leq 2$. Alors

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4z}} \sqrt{z} dz = \pi \int_0^2 \sqrt{1 + 4z} dz = \frac{\pi}{6} [(1 + 4z)^{3/2}]_0^2 \\ &= \frac{13}{3} \pi. \end{aligned}$$

4. Aire de la surface engendrée par une arche de cycloïde. Soit la cycloïde dans le plan zOy de représentation paramétrique

$$z = a(t - \sin t) \quad y = a(1 - \cos t).$$

Nous savons que

$$ds = 2a \sin \frac{t}{2} dt$$

(voir chapitre 4). Par suite,

$$A = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) 2a \sin \frac{t}{2} dt = 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt.$$

Posons $u = t/2$; alors

$$A = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 u du = 32\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 u du,$$

soit finalement, d'après la théorie des intégrales de Wallis,

$$A = 64\pi a^2/3.$$

6. Aire du tore. Le tore est la surface engendrée par la rotation d'un cercle autour d'une droite de son plan ne le traversant pas; il a l'aspect d'une chambre à air (gonflée).

Prenons pour axe Oz l'axe de rotation et pour axe Oy un diamètre du cercle générateur (Fig. 8.10).

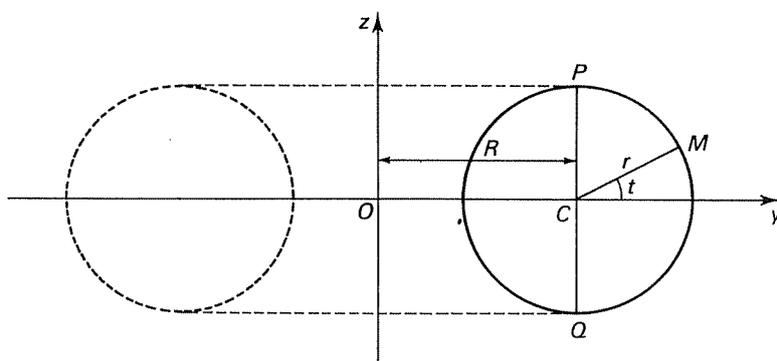


FIG. 8.10

L'aire du tore est la somme des aires des surfaces engendrées par les deux demi-cercles de diamètre PQ . Représentons paramétriquement le cercle générateur par

$$y = R + r \cos t \quad z = r \sin t.$$

Alors $ds = r dt$ et

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R + r \cos t) r dt + 2\pi \int_{\pi/2}^{3\pi/2} (R + r \cos t) r dt \\ &= 2\pi r \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} (R + r \cos t) dt = (2\pi r)(2\pi R) = 4\pi^2 r R. \end{aligned}$$

L'aire du tore est donc le produit de la longueur $2\pi r$ du cercle générateur par la longueur $2\pi R$ du cercle décrit par son centre C . Ce n'est pas un hasard, et ce résultat est très général : il fait l'objet de l'un des deux théorèmes de Guldin (voir chapitre 10).

EXERCICES

Surfaces planes

Calculer les aires limitées par les courbes suivantes :

- 8.1 Paraboles d'équations $y = 6x - x^2$ et $y = x^2 - 2x$.
 8.2 La courbe d'équation $y^2 = x^4(x+4)$.

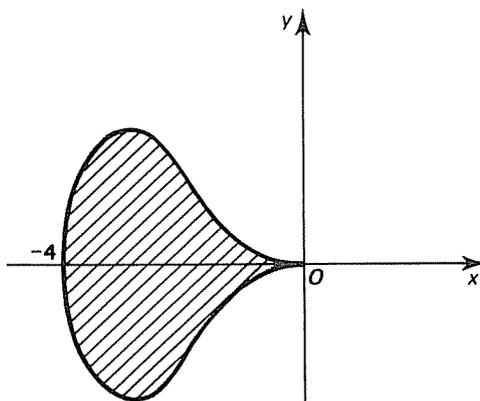


FIG. 1.

- 8.3 L'hyperbole équilatère d'équation $xy = 4$ et la droite d'équation $y = 5 - x$, $x > 0$.

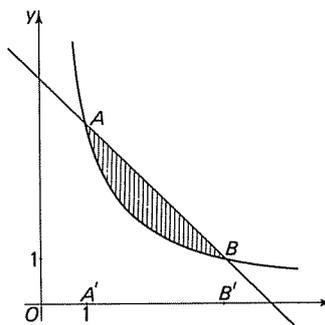


FIG. 2.

- 8.4 L'astroïde d'équations $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

- 8.5 Les ellipses d'équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad a > b.$$

- 8.6 La parabole d'équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ et la droite d'équation $x + y = a$.

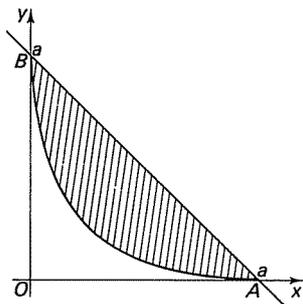


FIG. 3.

8.7 Les cercles d'équations $\rho = a(\cos \theta + \sin \theta)$ et $\rho = a$.

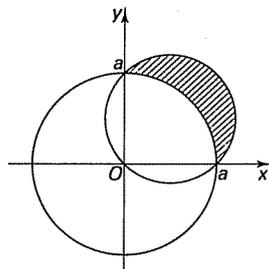


FIG. 4.

8.8 Le cercle d'équation $\rho = 2a \cos \theta$ et la cardioïde d'équation $\rho = a(1 + \cos \theta)$.

8.9 Le cercle d'équation $\rho = a$ et la cardioïde d'équation $\rho = a(1 + \cos \theta)$.

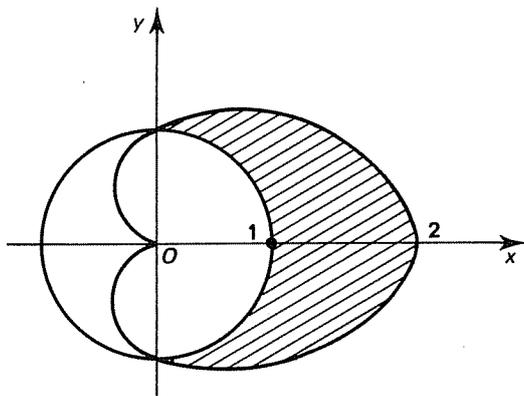


FIG. 5.

8.10 Le cercle de centre O et de rayon 2 et l'hyperbole équilatère d'équation $xy = 1$.

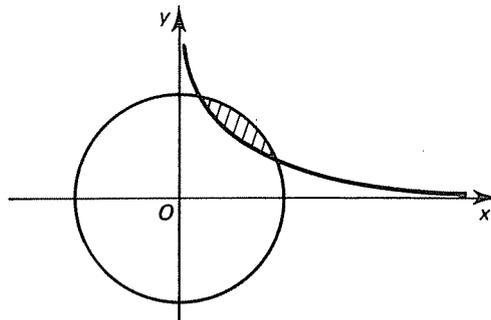


FIG. 6.

8.11 La spirale logarithmique d'équation $\rho = e^{\theta/m}$ et les droites d'équations $\theta = \theta_1$ et $\theta = \theta_2$.

8.12 La boucle de strophoïde d'équation $\rho = a \frac{\cos 2\theta}{\cos \theta}$, $\theta \in [-\pi/4, \pi/4]$.

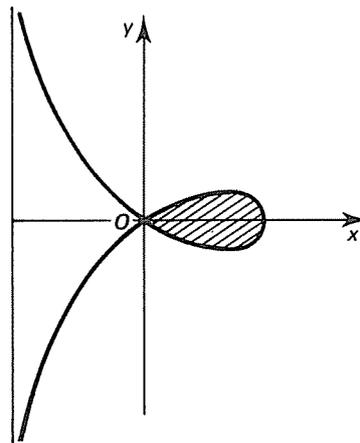


FIG. 7.

8.13 La courbe d'équation $\rho^2 = a^2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta}$.

8.14 La cissoïde d'équation $x(x^2 + y^2) = ay^2$ et son asymptote.

8.15 La courbe d'équation $x(x^2 + y^2) = 2a^2y$ et la première bissectrice.

8.16 La courbe d'équation $x^2(x^4 + y^4) - 2a^4y^2 = 0$, $x \geq 0$, et la première bissectrice.

8.17 L'ellipse d'équation $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$, $B^2 - AC < 0$.

- 8.18 Déterminer les courbes telles que l'aire balayée par le rayon vecteur soit proportionnelle à l'abscisse curviligne.

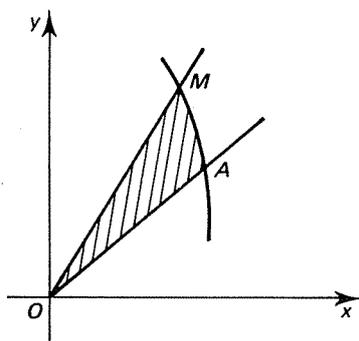


FIG. 8.

Surfaces de révolution

Calculer les aires des surfaces de révolution engendrée par les courbes suivantes :

- 8.19 Courbe d'équation $y^3 = x$, $y \in [0, 1]$, tournant autour de Oy .
- 8.20 Courbe d'équation $x^2 + y^2 = 4$, limitée par les points $(1, \sqrt{3})$ et $(2, 0)$, tournant autour de Ox .
- 8.21 Courbe d'équation $y^2 = 4x$, limitée par les points $(0, 0)$ et $(3, 2\sqrt{3})$, tournant autour de Ox .
- 8.22 Astroïde d'équations $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, tournant autour de Ox .
- 8.23 Lemniscate de Bernoulli, d'équation $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$, tournant autour de Ox .
- 8.24 Ellipse d'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b$, tournant autour de Oy .
- 8.25 Ellipse d'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, $a > b$, tournant autour de Ox .
- 8.26 Tractrice d'équations $x = a[\ln \operatorname{tg}(t/2 + \pi/4) - \sin t]$, $y = a \cos t$, tournant autour de Ox .

CHAPITRE 9

CALCUL DES VOLUMES

Dans quelques rares cas, on peut définir et calculer les volumes de manière élémentaire. Par exemple, le volume d'un parallélépipède rectangle est le produit des trois côtés. Le volume d'un tétraèdre $ABCD$ est le tiers du produit de l'aire de la base BCD par la hauteur issue de A ; c'est encore le sixième de la valeur absolue du produit mixte $\text{Det}(AB, AC, AD)$. Mais en général le calcul des volumes utilise les techniques du calcul intégral. Le volume limité par une surface fermée est l'intégrale triple sur ce domaine de la fonction constante et égale à 1 :

$$V = \iiint dx dy dz .$$

En fait, comme nous l'avons montré au chapitre 7, ce calcul se ramène à celui de trois intégrales simples, ou à celui d'une intégrale double et d'une intégrale simple. Parfois, on retombe sur une intégrale double déjà calculée, et il ne reste plus alors qu'une intégrale simple.

9.1 Volume limité par une surface d'équation résolue en z . Soit d'abord C une courbe fermée du plan xOy . On appelle cylindre de génératrices parallèles à Oz ayant pour base C la surface engendrée par les parallèles à Oz rencontrant C . Lorsque C est un cercle, on retrouve les cylindres de révolution.

Soit maintenant f une fonction à valeurs réelles positives définie sur la partie P du plan xOy limitée par C . L'équation

$$z = f(x, y)$$

représente une surface. Cherchons le volume limité par cette surface, le cylindre précédent et le plan xOy (Fig. 9.1).

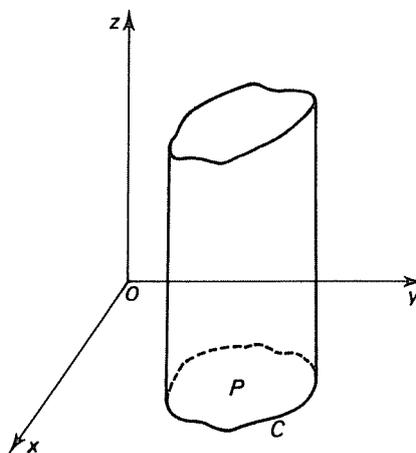


FIG. 9.1

La formule générale

$$V = \iiint dx dy dz$$

peut encore s'écrire

$$V = \iint_P dx dy \int_0^{f(x,y)} dz,$$

soit

$$V = \iint_P f(x, y) dx dy.$$

Le calcul du volume V est ainsi ramené à celui d'une intégrale double. (On rapprochera cette méthode du calcul des aires à l'aide d'une intégrale simple, dans le cas où y est fonction de x).

On pourra calculer cette intégrale double à l'aide de deux intégrales simples successives, d'une intégrale curviligne ou d'un passage en coordonnées polaires (voir chapitre 7).

EXEMPLES

1. Volume limité par la surface d'équation

$$z = x^2 + y^2 + 1,$$

le plan xOy et le cylindre de génératrices parallèles à Oz ayant pour base le carré de sommets $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ et $(0, 1, 0)$ (Fig. 9.2).

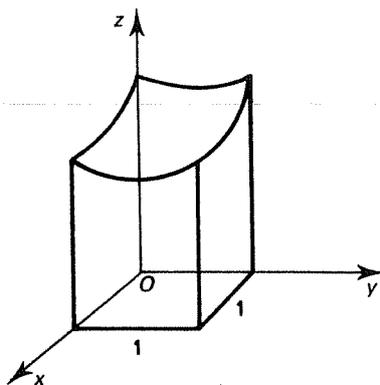


FIG. 9.2

Le volume est

$$V = \iint z dx dy = \iint (x^2 + y^2 + 1) dx dy.$$

Procédons à deux intégrations successives :

$$\int_0^1 (x^2 + y^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + xy^2 + x \right]_0^1 = y^2 + \frac{4}{3}$$

$$V = \int_0^1 \left(y^2 + \frac{4}{3} \right) dy = \left[\frac{y^3}{3} + \frac{4y}{3} \right]_0^1 = \frac{5}{3}.$$

2. Volume limité par la surface précédente, le plan xOy et le cylindre de génératrices parallèles à Oz ayant pour base la courbe définie par

- la demi-parabole d'équation $2y = x^2$, $x \geq 0$;
- l'axe Oy ;
- la droite d'équation $x = 1$ (Fig. 9.3).

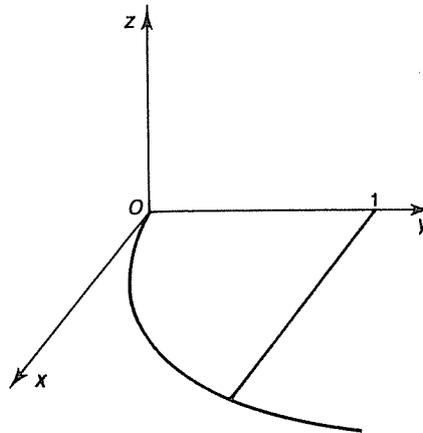


FIG. 9.3

Comme dans le cas précédent,

$$V = \iint z dx dy = \iint (x^2 + y^2 + 1) dx dy.$$

Intégrons d'abord par rapport à x :

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2y}} (x^2 + y^2 + 1) dx &= \left[xy^2 + \frac{x^3}{3} + x \right]_0^{\sqrt{2y}} \\ &= \sqrt{2} y^{5/2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} y^{3/2} + \sqrt{2} y^{1/2}. \end{aligned}$$

Intégrons maintenant par rapport à y :

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{2} \int_0^1 \left(y^{5/2} + \frac{2}{3} y^{3/2} + y^{1/2} \right) dy \\ &= \sqrt{2} \left[\frac{2}{7} y^{7/2} + \frac{4}{15} y^{5/2} + \frac{2}{3} y^{3/2} \right]_0^1 = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{15} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{128}{105} \sqrt{2} \approx 1,73. \end{aligned}$$

3. Volume limité par la surface d'équation

$$z = xy^2,$$

le plan xOy et le cylindre de génératrices parallèles à Oz ayant pour base le demi-cercle de centre $(0, 1, 0)$ de rayon 1 dans le premier quadrant (Fig. 9.4).

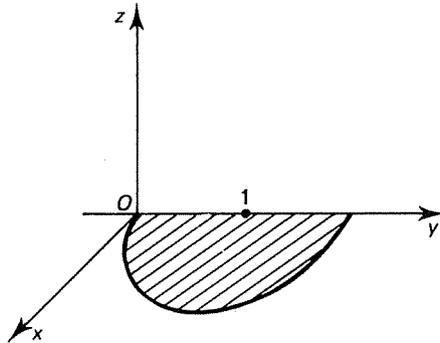


FIG. 9.4

Nous devons calculer l'intégrale

$$V = \iint xy^2 dx dy.$$

L'équation du cercle étant très simple en coordonnées polaires, à savoir $\rho = 2 \sin \theta$, posons $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. Le domaine d'intégration est donc limité par $\rho = 2 \sin \theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$. D'où

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} \rho^4 \cos \theta \sin^2 \theta d\rho \\ &= \frac{2^5}{5} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin^7 \theta d\theta = \frac{4}{5} [\sin^8 \theta]_0^{\pi/2} = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

4. Volume limité dans le premier octant ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) par une sphère de centre O et de rayon R et un cylindre de révolution dont la base est le cercle de diamètre OA dans le plan xOy , où A a pour coordonnées $(0, R, 0)$ (Fig. 9.5).

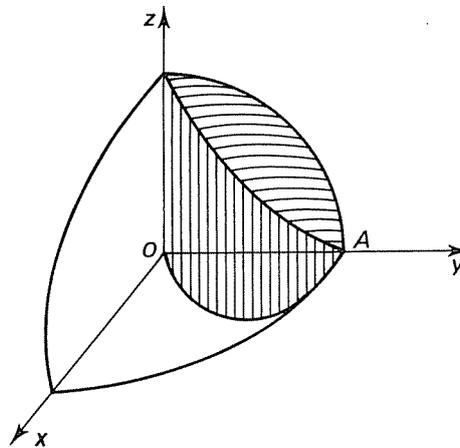


FIG. 9.5

Appliquons encore la formule

$$V = \iint z \, dx \, dy.$$

L'équation de la sphère de centre O et de rayon R est

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

D'où

$$V = \iint \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dx \, dy.$$

Passons en coordonnées polaires :

$$V = \iint \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho \, d\rho \, d\theta,$$

le domaine d'intégration étant limité par le demi-cercle d'équation $\rho = R \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$:

$$V = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{R \sin \theta} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho \, d\rho.$$

Comme

$$\int \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho \, d\rho = -\frac{1}{3} (R^2 - \rho^2)^{3/2},$$

nous voyons que

$$\begin{aligned} \int_0^{R \sin \theta} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho \, d\rho &= -\frac{1}{3} [(R^2 - \rho^2)^{3/2}]_0^{R \sin \theta} \\ &= \frac{1}{3} R^3 (1 - \cos^3 \theta). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} R^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^3 \theta) \, d\theta \\ &= \frac{1}{3} R^3 \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{\cos 3\theta + 3 \cos \theta}{4} \right) d\theta = \frac{1}{3} R^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

Calculons maintenant la différence entre le volume limité par la sphère dans le premier octant et le volume précédent :

$$V = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi R^3 - \frac{1}{3} R^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{9} R^3,$$

résultat curieux, car il ne contient plus π .

9.2 Volume limité par une surface et deux plans parallèles. Considérons le cas d'un volume limité par une surface et deux plans parallèles à xOy de cotes a et b . L'intégrale triple

$$V = \iiint dx \, dy \, dz$$

peut encore s'écrire

$$V = \int_a^b dz \iint dx \, dy.$$

Or, pour toute valeur de z , l'intégrale double $\iint dx \, dy$ représente l'aire $A(z)$ limitée par la section de la surface par le plan horizontal de cote z . Ainsi,

$$V = \int_a^b A(z) \, dz.$$

Le calcul du volume est donc ramené à celui d'une intégrale simple, à condition de connaître $A(z)$. En pratique, on pourra déterminer $A(z)$ à l'aide des méthodes exposées au chapitre précédent : intégrales simples, intégrales curvilignes, en coordonnées cartésiennes ou en coordonnées polaires.

EXEMPLES

1. Volume d'un tronc de cylindre. Calculons le volume limité par un cylindre de génératrices parallèles à Oz ayant pour base une courbe C et par deux plans horizontaux de cotes a et b (Fig. 9.6).

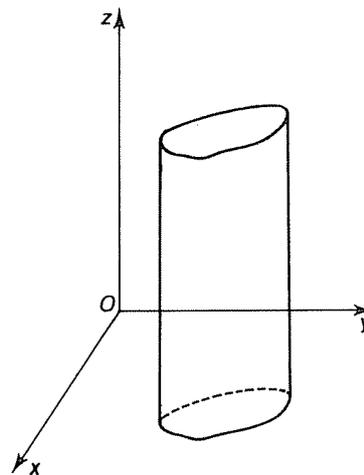


FIG. 9.6

L'aire limitée par une section horizontale quelconque est égale à l'aire B limitée par la base. Ainsi,

$$V = \int_a^b B \, dz = (b-a)B = Bh,$$

où h désigne la hauteur, c'est-à-dire la distance entre les deux plans.

Ce résultat s'applique en particulier au tronc de prisme : il suffit de prendre pour C un polygone.

2. Volume de la pyramide. Soit $OABCD$ une pyramide de sommet O , dont la base $ABCD$ est située dans un plan horizontal de cote h (Fig. 9.7).

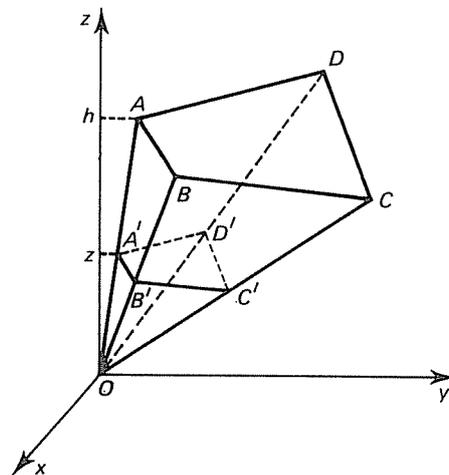


FIG. 9.7

Une section parallèle à la base, de cote z , est un polygone $A'B'C'D'$ homothétique au polygone $ABCD$, s'en déduisant par l'homothétie de centre O et de rapport z/h . Si $A(z)$ est l'aire de cette section, on a

$$\frac{A(z)}{B} = \left(\frac{z}{h}\right)^2, \quad \text{soit} \quad A(z) = B \frac{z^2}{h^2},$$

où B est l'aire de la base $ABCD$. Par suite, le volume de la pyramide est

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h A(z) dz = \int_0^h B \frac{z^2}{h^2} dz \\ &= \frac{B}{h^2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^h = \frac{1}{3} Bh. \end{aligned}$$

On retrouve le résultat bien classique énoncé en géométrie élémentaire.

3. Volume du tronc de cône. Soit plus généralement un tronc de cône, c'est-à-dire la surface engendrée par les droites issues de O rencontrant une courbe fermée C dans le plan d'équation $z = h$, et limitée à ce plan. (Lorsque C est un polygone, on retrouve le cas de la pyramide. Lorsque C est un cercle centré sur Oz , on retrouve le cas du cône de révolution.) En appelant B l'aire limitée par la courbe C , on voit que le calcul précédent reste valable :

$$V = \frac{1}{3} Bh.$$

9.3 Formule des trois niveaux. Un cas particulier très fréquent est celui où l'aire $A(z)$ limitée par la section de cote z est une fonction polynomiale de degré inférieur à 3. Dans ces conditions,

$$V = \frac{b-a}{6} \left[A(a) + A(b) + 4A\left(\frac{a+b}{2}\right) \right].$$

C'est la célèbre *formule des trois niveaux*. On obtient le volume par la seule connaissance des aires aux deux niveaux extrêmes et au niveau médian.

En effet, nous devons calculer

$$V = \int_a^b (\alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z + \delta) dz.$$

Posons $z = t + (a+b)/2$, pour nous ramener à des bornes opposées $c = (b-a)/2$ et $-c$. Nous obtenons ainsi une intégrale de la forme

$$V = \int_{-c}^c (\alpha_1 t^3 + \beta_1 t^2 + \gamma_1 t + \delta_1) dt.$$

Les termes en t^3 et t , admettant des primitives paires, apportent une contribution

nulle à l'intégrale. Il reste donc

$$V = 2\beta_1 \frac{c^3}{3} + 2\delta_1 c = \frac{2c}{3} (\beta_1 c^2 + \delta_1) + \frac{4c\delta_1}{3}.$$

Or, $2(\beta_1 c^2 + \delta_1)$ est la somme des valeurs de

$$B(t) = \alpha_1 t^3 + \beta_1 t^2 + \gamma_1 t + \delta_1$$

aux points $t = c$ et $t = -c$, tandis que δ_1 est sa valeur au point $t = 0$. Ainsi,

$$V = \frac{c}{3} [B(c) + B(-c)] + \frac{4c}{3} B(0).$$

Comme $c = (b-a)/2$, nous obtenons finalement

$$V = \frac{b-a}{6} [A(a) + A(b)] + \frac{2}{3}(b-a) A\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

ce qu'il fallait prouver.

EXEMPLES.

1. *Volume de la pyramide.* Nous venons de voir que

$$A(z) = B z^2 / h^2.$$

Ainsi, A est une fonction polynomiale de z de degré inférieur à 3 (et même strictement inférieur à 3), et la formule des trois niveaux s'applique :

$$V = \frac{h}{6} \left[A(0) + A(h) + 4A\left(\frac{h}{2}\right) \right] = \frac{h}{6} \left(B + 4\frac{B}{4} \right) = \frac{1}{3} B h.$$

2. *Volume de la boule.* Considérons une boule limitée par une sphère de centre O et de rayon R . Dans ce cas, $a = -R$, $b = R$ et, d'après le théorème de Pythagore,

$$A(z) = \pi(R^2 - z^2).$$

Dans ce cas encore, A est une fonction polynomiale de degré inférieur à 3, et la formule des trois niveaux s'applique. Comme

$$A(-R) = A(R) = 0,$$

il reste

$$V = (2R/6) 4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Rappelons à ce sujet le quatrain mnémotechnique :

- « Le volume de la sphère
- « Est égal, quoi que l'on puisse faire,
- « A quatre tiers de pi r trois,
- « Même si la sphère est en bois. »

3. *Volume de l'ellipsoïde.* Cherchons le volume limité par l'ellipsoïde d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Nous pourrions utiliser la formule des trois niveaux, mais il est plus élégant de se ramener au cas de la sphère, en effectuant le changement de variable

$$\frac{x}{a} = \frac{X}{R} \quad \frac{y}{b} = \frac{Y}{R} \quad \frac{z}{c} = \frac{Z}{R}.$$

Alors

$$V = \iiint dx dy dz = \frac{abc}{R^3} \iiint dX dY dZ,$$

et la dernière intégrale est égale au volume que nous venons de calculer, à savoir $\frac{4}{3}\pi R^3$. Ainsi,

$$V = \frac{abc}{R^3} \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi abc.$$

9.4 Volume limité par une surface de révolution. Considérons un arc de courbe AB dans le plan yOz (Fig. 9.8).

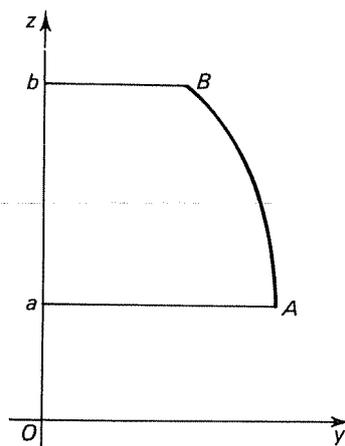


FIG. 9.8

Cet arc engendre en tournant autour de Oz une surface de révolution. Cherchons le volume limité par cette surface et les plans de cotes a et b . Supposons que y soit connu en fonction de z :

$$y = f(z).$$

L'aire limitée par la section de cote z est $\pi y^2 = \pi [f(z)]^2$. Le volume cherché est donc

$$V = \pi \int_a^b [f(z)]^2 dz.$$

En coordonnées cylindriques, on écrit ceci sous la forme

$$V = \pi \int_a^b \rho^2 dz.$$

EXEMPLES

1. *Volume de la boule.* Signalons que cette méthode s'applique au cas de la boule, puisqu'une sphère est une surface de révolution autour de chacun de ses diamètres.

2. *Volume limité par la parabole d'équation $y = 5z^2$ en tournant autour de Oz et les plans d'équations $z = 1$ et $z = 2$.*

En appliquant la formule précédente, nous obtenons aussitôt

$$V = \pi \int_1^2 y^2 dz = 25\pi \int_1^2 z^4 dz = 5\pi [z^5]_1^2 = 5\pi(2^5 - 1) \approx 487.$$

3. *Volume limité par l'arc de parabole d'équation $y = 5z^2$, $1 \leq z \leq 2$, en tournant cette fois autour de Oy .*

La formule donnant le volume doit être modifiée en conséquence :

$$V = \pi \int_5^{20} z^2 dy = \frac{\pi}{5} \int_5^{20} y dy = \frac{\pi}{5} \left[\frac{y^2}{2} \right]_5^{20} = \frac{\pi}{10} (400 - 25) = \frac{75}{2} \pi.$$

4. *Volume engendré par la courbe d'équation $y = e^z$, $z \leq 0$, en tournant autour de Oz (Fig. 9.9).*

$$V = \pi \int_{-\infty}^0 e^{2z} dz = \frac{\pi}{2} [e^{2z}]_{-\infty}^0 = \frac{\pi}{2}.$$

On remarquera que cette valeur est finie, bien que l'intervalle d'intégration ne soit pas borné.

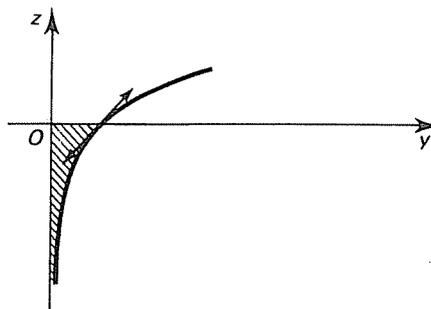


FIG. 9.9

5. *Volume engendré par une arche de cycloïde en tournant autour de sa base.*

Prenons l'axe Oz porté par la base. Alors

$$y = a(1 - \cos t) \quad z = a(t - \sin t).$$

Le volume engendré lorsque t varie de 0 à 2π est

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi a} y^2 dz = \pi \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t) dt \\ &= 8\pi a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2} dt. \end{aligned}$$

Posons $u = t/2$. L'intégrale devient

$$V = 16\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 u du = 32\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^6 u du.$$

D'après la théorie des intégrales de Wallis,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 u du = \frac{5 \times 3 \times 1}{6 \times 4 \times 2} \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}.$$

D'où enfin

$$V = 5\pi^2 a^3 \approx 50a^3.$$

9.5 Cas d'une surface de révolution engendrée par une courbe fermée. Considérons enfin le cas d'une surface de révolution engendrée par une courbe fermée C située dans le plan yOz , ne traversant pas Oz et tournant autour de cet axe (Fig. 9.10).

Traçons les tangentes extrêmes en A et en B , et supposons qu'une parallèle à Oy de cote z comprise entre les cotes a et b de A et B rencontre la courbe en deux

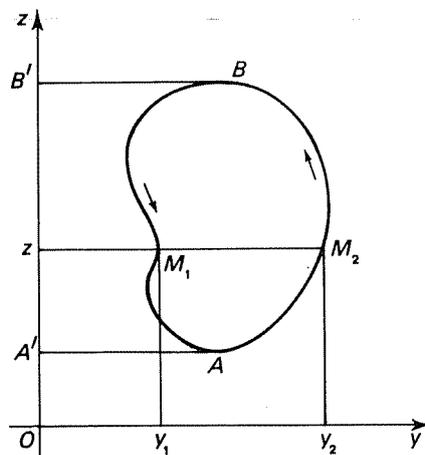


FIG. 9.10

points M_1 et M_2 d'ordonnées y_1 et y_2 . Le volume cherché est évidemment la différence des volumes engendrés par les surfaces $A'AM_2BB'$ et $A'AM_1BB'$, soit

$$V = \pi \int_a^b y_2^2 dz - \pi \int_a^b y_1^2 dz = \pi \int_a^b y_2^2 dz + \pi \int_b^a y_1^2 dz.$$

On reconnaît l'intégrale curviligne de la forme différentielle $y^2 dz$ le long de la courbe C parcourue dans le sens direct. En effet,

$$V = \pi \int_{\widehat{AM_2B}} y_2^2 dz + \pi \int_{\widehat{BM_1A}} y_1^2 dz = \pi \int_C y^2 dz.$$

En pratique, on exprime comme d'habitude y et z en fonction d'un même paramètre t :

$$y = f(t) \quad z = g(t),$$

où t varie entre t_1 et t_2 de telle sorte qu'on décrive la courbe C une fois et une seule dans le sens direct. Ainsi,

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} [f(t)]^2 g'(t) dt.$$

EXEMPLE. *Volume du tore.* Considérons le tore engendré par le cercle de représentation paramétrique

$$y = R + r \cos t \quad z = r \sin t$$

en tournant autour de Oz . Il convient ici de faire varier t entre 0 et 2π . Le volume limité par cette surface est donc

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{2\pi} (R + r \cos t)^2 r \cos t dt \\ &= \pi R^2 r \int_0^{2\pi} \cos t dt + 2\pi R r^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt + \pi r^3 \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt. \end{aligned}$$

La première intégrale est évidemment nulle. Pour calculer les deux autres intégrales, écrivons que

$$2 \cos^2 t = 1 + \cos 2t \quad \text{et} \quad \cos^3 t = (\cos 3t + 3 \cos t)/4.$$

On voit alors que la troisième intégrale est nulle. Finalement,

$$V = \pi R r^2 \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt = (\pi r^2) (2\pi R).$$

Or, πr^2 est l'aire limitée par le cercle générateur, tandis que $2\pi R$ est la longueur du cercle décrit par son centre, qui est aussi son centre d'inertie. Ce résultat, très général, fait l'objet de l'un des deux théorèmes de Guldin (voir chapitre 10).

EXERCICES

Calculer les volumes limités par les surfaces suivantes :

- 9.1 Le plan d'équation $z = h$ et la surface engendrée par la chaînette d'équation $z = a \operatorname{ch} x/a$ en tournant autour de Oz .
- 9.2 La surface engendrée par la courbe $y = e^x \sin x$, $x \in [0, \pi/2]$, en tournant autour de Ox .

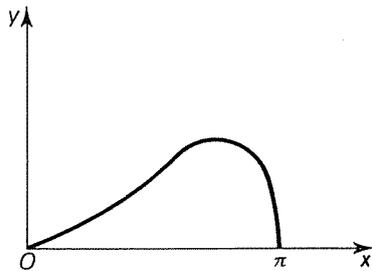


FIG. 9.1

- 9.3 La surface engendrée par l'arc d'hyperbole d'équation $xy = 4$ limité par la droite d'équation $x + y = 5$, en tournant autour de Ox .
- 9.4 La surface engendrée par l'arc de parabole d'équation $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ et la droite d'équation $x + y = a$, en tournant autour de Ox .
- 9.5 Le plan d'équation $z = \pi^2/4$ et la surface engendrée par la courbe d'équation $z = (\operatorname{Arc} \sin x)^2$ en tournant autour de Oz .
- 9.6 La courbe d'équation $xz = (a+x)(b^2 - x^2)^{1/2}$ en tournant autour de Oz .
- 9.7 La surface d'équation $c^2 z^2 = y^2(a^2 - x^2)$ et les plans d'équations $y = -h$, $y = h$.
- 9.8 La surface engendrée par la cissoïde d'équation $\rho = a(\cos \theta - 1/\cos \theta)$ en tournant autour de la droite d'équation $x = -a$.
- 9.9 La surface engendrée par la courbe d'équation $\rho = (a/\cos \theta) + b$ en tournant autour de la droite d'équation $x = a$.
- 9.10 Le paraboloides elliptique d'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = z/p$ et les plans d'équations $z = 0$ et $z = h$.
- 9.11 L'ellipsoïde d'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 2$ et le paraboloides d'équation $y^2/b^2 + z^2/c^2 - x/a = 0$.
- 9.12 Les cylindres de révolution d'équations $x^2 + y^2 = a^2$ et $x^2 + z^2 = a^2$.
- 9.13 La sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ et le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = b^2$, $b \leq a$.
- 9.14 Le plan d'équation $z = 0$ et les surfaces d'équations $z = x^2 + y^2$, $x = y^2$ et $y = x^2$.
- 9.15 La surface d'équation $z = a(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ (conoïde de Plücker), le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = a^2$, les plans d'équations $z = 0$, $y = x$ et $y = -x$, $x \geq 0$.

CHAPITRE 10

RECHERCHE DES CENTRES D'INERTIE

10.1 Préliminaires. Donnons une idée intuitive du centre d'inertie d'un corps solide. Considérons par exemple une plaque plane que nous suspendons en un point O_1 . Sous l'action de la pesanteur, elle occupe une position d'équilibre; soit D_1 la verticale passant par O_1 (Fig. 10.1). Suspendons la même plaque à un point O_2 et traçons à l'équilibre la verticale correspondante D_2 du point O_2 . Si nous répétons l'expérience en suspendant la plaque aux points O_3, O_4, \dots , nous constatons que les verticales $D_1, D_2, D_3, D_4, \dots$, se coupent toutes en un même point G , appelé centre d'inertie de la plaque.

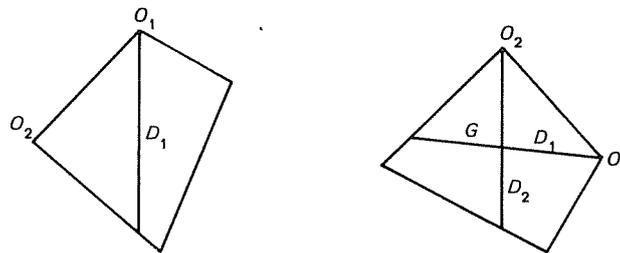


FIG. 10.1

Ce résultat s'interprète mathématiquement. On démontre en mécanique que, pour une position donnée de la plaque (suspension en O_1 par exemple), le système des forces parallèles d'intensités m_1g, m_2g, \dots, m_ng appliquées aux points P_1, P_2, \dots, P_n du système matériel, de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_n est équivalent à une force unique d'intensité $\sum_{i=1}^n m_i g = Mg$, située sur une droite D appelée axe central du système de forces. Cette droite passe par un point G , indépendant de la direction des forces parallèles. C'est pour cela que les axes centraux D_1, D_2, \dots, D_3 correspondant à des directions différentes concourent en un même point fixe. Ce point fixe est le centre d'inertie de la plaque. Signalons les anciennes terminologies de centre de gravité et de barycentre.

Cet ouvrage n'étant pas un cours de mécanique, nous ne pouvons nous étendre. Nous examinerons d'abord le cas d'un système matériel (c'est-à-dire d'un ensemble fini de points matériels). Dans le cas continu, les sommes finies font place comme d'habitude à des intégrales : intégrales curvilignes, intégrales doubles, intégrales triples; nous verrons comment le calcul intégral permet la recherche de la position du centre d'inertie d'une courbe, d'une surface plane, d'une surface de révolution ou d'un volume.

10.2 Centre d'inertie d'un système matériel. Considérons des points P_1, P_2, \dots, P_n de l'espace, de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_n . Il existe alors un point

G et un seul tel que

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{GP}_i = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Ce point est appelé *centre d'inertie* des points P_i affectés des masses m_i .

Pour tout élément i de l'intervalle $[1, n]$, écrivons le vecteur \mathbf{GP}_i sous la forme

$$\mathbf{GP}_i = \mathbf{GO} + \mathbf{OP}_i.$$

Alors

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{GP}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{GO} + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{OP}_i = M \mathbf{GO} + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{OP}_i,$$

où $M = \sum_{i=1}^n m_i$. La relation (1) équivaut donc à la suivante :

$$\mathbf{OG} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{OP}_i,$$

ce qui entraîne l'existence et l'unicité du point G cherché.

10.3 Propriétés du centre d'inertie d'un système matériel. Le centre d'inertie de n points ne dépend pas de l'ordre dans lequel on prend ces points. Cela résulte aussitôt de la commutativité de l'addition.

Soit maintenant k un entier compris strictement entre 1 et n ; soit une partition de l'intervalle $[1, n]$ en k parties I_j . Notons G_j le centre d'inertie des points P_i , où i appartient à I_j . Alors le centre d'inertie des n points P_i est encore le centre d'inertie des k points G_j affectés des masses

$$M_j = \sum_{i \in I_j} m_i.$$

(Autrement dit, pour chercher le centre d'inertie d'un système matériel, on peut partager ce système en sous-systèmes, chercher les centres d'inertie de chaque sous-système, leur attribuer la somme des masses des points du sous-système considéré, et enfin chercher le centre d'inertie de ce nouveau système matériel. C'est ce qu'on appelle associer les points par paquets.)

Posons en effet

$$\mathbf{OG}' = \frac{\sum_{j=1}^k M_j \mathbf{OG}_j}{\sum_{j=1}^k M_j}.$$

Puisque $M_j = \sum_{i \in I_j} m_i$, nous voyons que

$$\sum_{j=1}^k M_j = \sum_{j=1}^k \sum_{i \in I_j} m_i = \sum_{i=1}^n m_i = M.$$

Par définition de G_j ,

$$M_j \mathbf{OG}_j = \sum_{i \in I_j} m_i \mathbf{OP}_i,$$

d'où

$$\sum_{j=1}^k M_j \mathbf{OG}_j = \sum_{j=1}^k \sum_{i \in I_j} m_i \mathbf{OP}_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{OP}_i.$$

Il s'ensuit que

$$\mathbf{OG}' = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{OP}_i = \mathbf{OG},$$

et donc que $G' = G$, ce qu'il fallait prouver.

Remarquons enfin que le centre d'inertie d'un système matériel ne dépend pas de l'unité choisie pour les masses; il ne dépend que des rapports des masses entre elles. En particulier, si tous les points ont la même masse, il est inutile de préciser la valeur commune de ces masses. En pratique, si l'on ne précise pas les masses des divers points, on sous-entend toujours que ces masses sont égales.

EXEMPLES

1. Le centre d'inertie de deux points A et B est le milieu du segment $[A, B]$.

2. Le centre d'inertie G de trois points A , B et C est encore le centre d'inertie de A affecté de la masse 1 et du milieu A' de $[B, C]$ affecté de la masse 2.

Le point G appartient donc au segment $[A, A']$, et de même aux segments $[B, B']$ et $[C, C']$, où B' et C' désignent respectivement les milieux des segments $[C, A]$ et $[A, B]$.

Autrement dit, les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point G situé aux deux tiers de chacune d'elles à partir du sommet (Fig. 10.2).

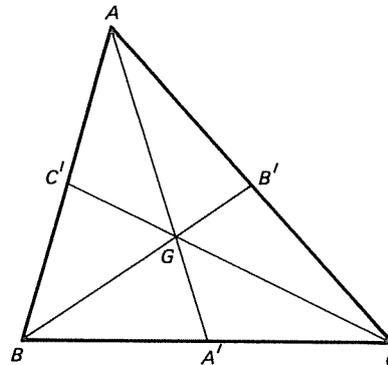


FIG. 10.2

3. De même, le centre d'inertie G de quatre points A , B , C et D est le centre d'inertie du point A affecté de la masse 1 et du centre d'inertie A' des trois points B , C et D affecté de la masse 3.

Autrement dit, les quatre médianes d'un tétraèdre sont concourantes en un point G situé aux trois quarts de chacune d'elles à partir du sommet.

Le point G est encore le centre d'inertie des milieux I et J des segments $[A, B]$ et $[C, D]$ affectés tous deux de la masse 2, c'est-à-dire le milieu du segment $[I, J]$.

Autrement dit, les trois segments ayant pour extrémités les milieux des trois couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre ont même milieu, à savoir le centre d'inertie des quatre points A, B, C et D (Fig. 10.3).

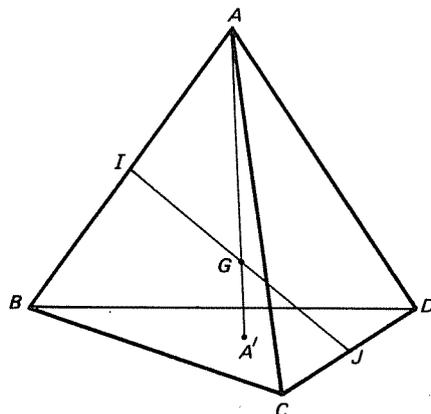


FIG. 10.3

10.4 Coordonnées du centre d'inertie d'un système matériel. Notons x_i, y_i et z_i les coordonnées du point P_i . Les coordonnées x_G, y_G et z_G du centre d'inertie des points P_1, P_2, \dots, P_n de masses m_1 et m_2, \dots, m_n se déduisent aussitôt de la relation (2) :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{\sum_{i=1}^n m_i}.$$

Bien entendu, si les points considérés sont dans un même plan, on se contentera de deux axes de coordonnées, et on ne calculera que x_G et y_G . Signalons qu'il y a alors parfois intérêt à calculer d'abord l'affixe $z_G = x_G + iy_G$ du point G , et à séparer ensuite la partie réelle et la partie imaginaire.

10.5 Centre d'inertie d'un arc de courbe. Considérons dans le plan un fil dont la densité linéique au point P est $\mu(P)$. Décomposons l'arc en arcs élémentaires de longueur très petite Δs ; assimilons chacun de ces arcs élémentaires à un point P de masse $\mu(P) \Delta s$. Nous sommes ainsi ramenés à un système matériel. En passant à la limite lorsque le nombre d'arcs élémentaires augmente indéfiniment, nous devons remplacer les sommes finies par des intégrales curvilignes, ce qui conduit à définir le centre d'inertie de l'arc donné de la manière suivante : c'est le point G ayant

pour coordonnées

$$x_G = \frac{1}{M} \int \mu x \, ds \quad y_G = \frac{1}{M} \int \mu y \, ds,$$

où M désigne la masse totale, c'est-à-dire

$$M = \int \mu \, ds.$$

Nous devons donc calculer trois intégrales curvilignes, suivant les techniques du chapitre 6.

Lorsque la densité linéique μ est constante (c'est-à-dire lorsque l'arc est homogène), elle s'élimine des calculs. On peut donc la supposer égale à 1. La masse totale M est alors égale à la longueur l de l'arc, et les formules précédentes se réduisent à

$$x_G = \frac{1}{l} \int x \, ds \quad y_G = \frac{1}{l} \int y \, ds.$$

EXEMPLES

1. *Centre d'inertie d'un demi-cercle.* Considérons un fil de fer homogène ayant la forme d'un demi-cercle (Fig. 10.4). Son centre d'inertie est dans le vide; par raison de symétrie, il se situe sur l'axe Oy de la figure; autrement dit, $x_G = 0$.

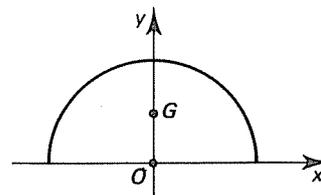


FIG. 10.4

Prenons pour représentation paramétrique du demi-cercle

$$x = R \cos t \quad y = R \sin t,$$

où t varie de 0 à π . Alors

$$l = \pi R$$

et

$$y_G = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi R \sin t \, R \, dt = \frac{R}{\pi} \int_0^\pi \sin t \, dt = -\frac{R}{\pi} [\cos t]_0^\pi = \frac{2R}{\pi}.$$

2. *Centre d'inertie d'un arc de chaînette.* Considérons l'arc de la chaînette d'équation

$$y = a \operatorname{ch} (x/a),$$

où x parcourt l'intervalle $[0, a]$. Nous savons que $ds = \operatorname{ch} (x/a) dx$ et que

$$l = \int_0^a \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a \operatorname{sh} 1.$$

D'où

$$x_G = \frac{1}{l} \int_0^a x \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx.$$

Une intégration par parties conduit à

$$x_G = \frac{a}{\operatorname{sh} 1} (\operatorname{sh} 1 + 1 - \operatorname{ch} 1).$$

Enfin,

$$y_G = \frac{a}{l} \int_0^a \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx = \frac{a}{\operatorname{sh} 1} \left(\frac{\operatorname{sh} 2}{4} + \frac{1}{2} \right).$$

3. *Centre d'inertie d'une arche de cycloïde.* Considérons l'arche de cycloïde de représentation paramétrique

$$x = a(t - \sin t) \quad y = a(1 - \cos t),$$

où t varie entre 0 et 2π .

Par raison de symétrie, le point G appartient à la médiatrice du segment joignant les extrémités de l'arche. Ainsi,

$$x_G = \pi a.$$

D'autre part, nous savons que $ds = 2a \sin (t/2) dt$ et que $l = 8a$. D'où

$$y_G = \frac{1}{8a} \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) 2a \sin \frac{t}{2} dt = \frac{a}{2} \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt.$$

Posons $u = t/2$; alors

$$\begin{aligned} y_G &= a \int_0^{\pi} \sin^3 u du = a \int_0^{\pi} \frac{3 \sin u - \sin 3u}{4} du \\ &= \frac{a}{4} \left[\frac{\cos 3u}{3} - 3 \cos u \right]_0^{\pi} = \frac{4a}{3}. \end{aligned}$$

4. Centre d'inertie d'une demi-cardioïde. Considérons la demi-cardioïde d'équation

$$\rho = a(1 + \cos \theta),$$

où θ varie entre 0 et π (Fig. 10.5).

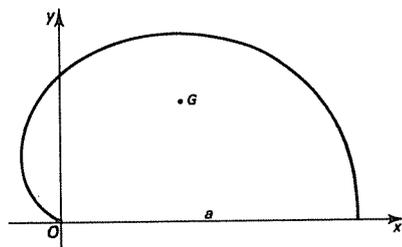


FIG. 10.5

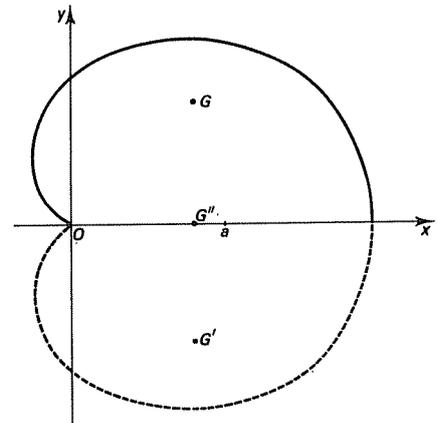


FIG. 10.6

Rappelons que $ds = 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta$; par suite,

$$l = 2a \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4a.$$

D'où

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{a}{2} \int_0^\pi (1 + \cos \theta) \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{a}{2} \int_0^\pi \left(\cos \frac{5\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} + 4 \cos \frac{\theta}{2} \right) d\theta = \frac{4a}{5}. \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} y_G &= \frac{a}{2} \int_0^\pi (1 + \cos \theta) \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 2a \int_0^\pi \cos^4 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= -\frac{4a}{5} \left[\cos^5 \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi = \frac{4a}{5}. \end{aligned}$$

5. Centre d'inertie d'une cardioïde. Introduisons la demi-cardioïde symétrique de la précédente (Fig. 10.6).

Le centre d'inertie G' de cette nouvelle demi-cardioïde est le symétrique du précédent par rapport à Ox ; donc

$$x_{G'} = x_G \quad y_{G'} = -y_G.$$

Or, il est immédiat que le théorème d'associativité par paquets est encore valable pour les arcs de courbes. Comme les deux arcs ont la même longueur, le centre d'inertie G'' de la cardioïde entière est le milieu du segment $[G, G']$. Ainsi,

$$x_{G''} = x_G = 4a/5 \quad y_{G''} = 0.$$

10.6 Premier théorème de Guldin. Voici un théorème liant les centres d'inertie des arcs de courbes et les aires des surfaces de révolution :

L'aire de la surface de révolution engendrée par un arc géométrique en tournant autour d'une droite de son plan ne le traversant pas (Fig. 10.7) est égale au produit de la longueur de cet arc et de celle du cercle décrit par son centre d'inertie G (la densité linéique étant égale à 1) :

$$A = 2\pi y_G l.$$

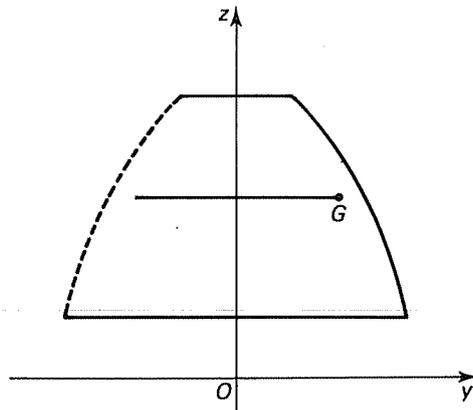


FIG. 10.7

En effet, nous savons que l'aire A est donnée par la formule

$$A = 2\pi \int y \, ds.$$

D'autre part,

$$y_G = \frac{1}{l} \int y \, ds.$$

Le théorème en découle aussitôt.

Ce théorème sert à deux fins :

- déterminer les aires des surfaces de révolution;
- déterminer les centres d'inertie des courbes.

EXEMPLES

1. *Aire du tore.* Nous pouvons retrouver rapidement l'aire du tore, déjà calculée au chapitre 8. En effet, le centre d'inertie du cercle générateur n'est autre que le centre de celui-ci. Ainsi,

$$y_G = R \quad l = 2\pi r$$

et

$$A = (2\pi R)(2\pi r) = 4\pi^2 Rr.$$

2. *Centre d'inertie d'un demi-cercle.* Cette fois, nous connaissons l'aire de la surface de révolution engendrée : c'est tout simplement l'aire de la sphère, à savoir $4\pi R^2$. Comme $l = \pi R$, il vient

$$2\pi y_G = 4\pi R^2 / \pi R, \quad \text{soit} \quad y_G = 2R/\pi.$$

3. *Arche de cycloïde.* Nous avons calculé au chapitre 8 l'aire de la surface de révolution engendrée par une arche de cycloïde en tournant autour de sa base :

$$A = 64\pi a^2/3.$$

Nous venons de calculer l'ordonnée du centre d'inertie :

$$y_G = 4a/3.$$

Nous pouvons contrôler ces résultats grâce au premier théorème de Guldin :

$$[2\pi(4a/3)](8a) = 64\pi a^2/3.$$

10.7 Centre d'inertie d'une surface plane. Soit maintenant une surface plane limitée par une courbe fermée C , la densité surfacique étant μ . Décomposons la surface en rectangles élémentaires, pour nous ramener d'une manière approchée au cas d'un système matériel. Un passage à la limite conduit à poser

$$x_G = \frac{1}{M} \iint \mu x \, dx \, dy \quad y_G = \frac{1}{M} \iint \mu y \, dx \, dy,$$

où M est la masse totale de la plaque :

$$M = \iint \mu \, dx \, dy.$$

Comme dans les cas des systèmes matériels et des arcs de courbe, ces formules se simplifient lorsque μ est constante :

$$x_G = \frac{1}{A} \iint x \, dx \, dy \quad y_G = \frac{1}{A} \iint y \, dx \, dy,$$

où A est l'aire de la surface limitée par C .

Lorsque la surface est limitée par le graphe d'une fonction f , l'axe Ox et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, on peut remplacer les intégrales doubles par des intégrales simples. En effet,

$$\iint x \, dx \, dy = \int_a^b x f(x) \, dx \quad \iint y \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

et

$$A = \int_a^b f(x) \, dx.$$

EXEMPLES

1. Centre d'inertie de la surface limitée par l'arc de parabole d'équation $y = 2\sqrt{x}$, l'axe Ox et la droite d'équation $x = h$ (Fig. 10.8).

Les formules générales deviennent ici

$$A = \int_0^h 2\sqrt{x} \, dx = \frac{4}{3} h^{3/2}$$

$$x_G = \frac{1}{A} \int_0^h 2\sqrt{x} x \, dx = \frac{1}{A} \frac{4}{5} h^{5/2} = \frac{3}{5} h$$

$$y_G = \frac{1}{2A} \int_0^h 4x \, dx = \frac{h^2}{A} = \frac{3}{4} \sqrt{h}.$$

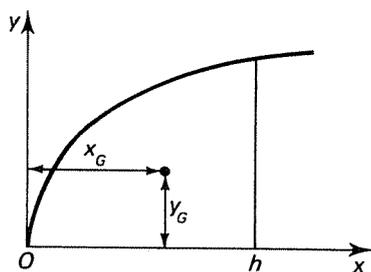


FIG. 10.8

Si nous posons $k = f(h) = 2\sqrt{h}$, alors

$$y_G = \frac{3}{4} k.$$

2. Centre d'inertie d'un demi-disque. Soit un demi-disque limité par Ox et par le demi-cercle d'équation $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (Fig. 10.9).

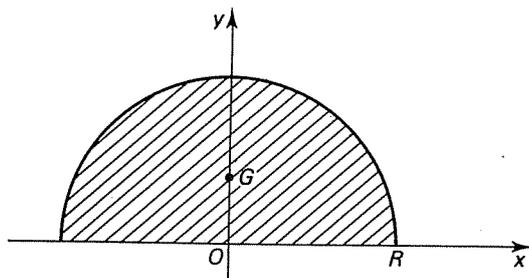


FIG. 10.9

Par raison de symétrie, $x_G = 0$. D'autre part, $A = \frac{1}{2}\pi R^2$; d'où

$$y_G = \frac{1}{2A} \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{1}{2A} \left(2R^3 - \frac{2R^3}{3} \right) = \frac{4R}{3\pi}.$$

3. *Centre d'inertie de la surface limitée par une arche de cycloïde.* Rappelons que l'aire comprise entre une arche de cycloïde et Ox est $A = 3\pi a^2$. Il est clair que $x_G = \pi a$, par raison de symétrie. Enfin,

$$y_G = \frac{1}{2A} \int_0^{2\pi a} y^2 dx = \frac{a^3}{2A} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \frac{4a}{3\pi} \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2} dt.$$

Posons $u = t/2$; alors

$$\int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{t}{2} dt = 2 \int_0^{\pi} \sin^6 u du = 4 \int_0^{\pi/2} \sin^6 u du.$$

D'après la théorie des intégrales de Wallis,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 u du = \frac{5 \times 3 \times 1}{6 \times 4 \times 2} \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}.$$

Ainsi,

$$y_G = 5a/24.$$

4. *Centre d'inertie de la surface limitée par une cardiïde.* Par raison de symétrie, $y_G = 0$. Rappelons que $A = 3\pi a^2/2$. Enfin,

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{A} \iint x dx dy = \frac{1}{A} \iint \rho \cos \theta \rho d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{A} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \theta d\theta \int_0^{a(1+\cos \theta)} \rho^2 d\rho = \frac{a^3}{3A} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \theta)^3 \cos \theta d\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \theta)^3 \cos \theta d\theta &= 8 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^6 \frac{\theta}{2} \left(2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1 \right) d\theta \\ &= 32 \int_0^{\pi/2} \cos^6 t (2 \cos^2 t - 1) dt \\ &= 32 \frac{5 \times 3 \times 1}{6 \times 4 \times 2} \frac{\pi}{2} \left(2 \frac{7}{8} - 1 \right) = \frac{15\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } x_G = \frac{a^3}{3} \frac{15\pi}{4} \frac{2}{3\pi a^2} = \frac{5a}{6}.$$

10.8 Second théorème de Guldin. Le second théorème de Guldin établit un lien cette fois entre les centres d'inertie des surfaces planes et les volumes limités par les surfaces de révolution.

Le volume du solide engendré par une plaque plane en tournant autour d'une droite de son plan ne la traversant pas (Fig. 10.10) est égal au produit de l'aire de la plaque et de la longueur du cercle décrit par son centre d'inertie G (la densité surfacique étant égale à 1) :

$$V = 2\pi y_G A.$$

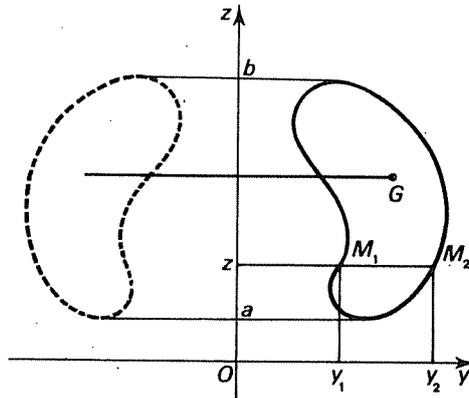


FIG. 10.10

Supposons qu'une parallèle à Oy rencontre la courbe limitant la plaque en deux points M_1 et M_2 d'ordonnées y_1 et y_2 ; alors

$$y_G = \frac{1}{A} \iint y \, dy \, dz = \frac{1}{2A} \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) \, dz,$$

tandis que

$$V = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) \, dz.$$

Le théorème en découle aussitôt.

Ce théorème sert à deux fins :

- déterminer les volumes limités par les surfaces de révolution;
- déterminer les centres d'inertie des plaques planes.

EXEMPLES

1. Volume du tore. Nous pouvons retrouver rapidement le volume limité par le tore, déjà calculé au chapitre 9. En effet, le centre d'inertie du disque générateur du volume n'est autre que le centre de ce disque. Ainsi,

$$y_G = R \quad A = \pi r^2$$

et

$$V = (2\pi R) (\pi r^2) = 2\pi^2 R r^2.$$

2. *Centre d'inertie d'un demi-disque.* Ici, nous connaissons le volume limité par la surface de révolution : c'est le volume limité par la sphère, à savoir $\frac{4}{3}\pi R^3$. Comme $A = \frac{1}{2}\pi R^2$, il vient

$$2\pi y_G = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{2}{\pi R^2}, \quad \text{soit} \quad y_G = \frac{4R}{3}.$$

3. *Arche de la cycloïde.* Nous avons calculé au chapitre 9 le volume limité par la surface de révolution engendrée par une arche de cycloïde en tournant autour de sa base :

$$V = 5\pi^2 a^3.$$

Nous venons de calculer l'ordonnée du centre d'inertie de la surface limitée par l'arche et la base :

$$y_G = 5a/6.$$

Nous pouvons contrôler ces résultats grâce au second théorème de Guldin :

$$(2\pi \cdot 5a/6) (3\pi a^2) = 5\pi^2 a^3.$$

10.9 Centre d'inertie d'une surface de révolution. Prenons une courbe C dans le plan zOy , tournant autour de Oz . Le centre d'inertie de la surface de révolution ainsi obtenue est évidemment situé sur l'axe de révolution Oz . Décomposons la surface en surfaces élémentaires, en la coupant par des plans horizontaux. Appliquons le théorème d'associativité par paquets, et remplaçons la partie comprise entre les plans de cotes z et $z + \Delta z$ par son centre d'inertie affecté de la masse élémentaire $2\pi y \Delta s$ (en supposant que la densité surfacique est constante et égale à 1). Passons à la limite; les sommes finies deviennent des intégrales curvilignes :

$$z_G = \frac{1}{A} \int_C 2\pi y z \, ds \quad \text{où} \quad A = \int_C 2\pi y \, ds.$$

EXEMPLE. *Centre d'inertie d'une demi-sphère.* Soit la demi-sphère homogène d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0.$$

Nous pouvons la considérer comme la surface de révolution engendrée par le quart de cercle d'équation

$$y^2 + z^2 = R^2$$

situé dans le premier quadrant du plan zOy . Posons

$$y = R \cos t \quad z = R \sin t.$$

Alors $ds = R \, dt$ et

$$z_G = \frac{1}{A} \int_0^{\pi/2} 2\pi R \cos t \, R \sin t \, R \, dt, \quad \text{où} \quad A = 2\pi R^2.$$

Ainsi,
$$z_G = R \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt = \frac{R}{2} [\sin^2 t]_0^{\pi/2} = R/2.$$

10.10 Centre d'inertie d'un volume. Les mêmes considérations que dans les cas des courbes et des surfaces conduisent à poser

$$x_G = \frac{1}{M} \iiint \mu x dx dy dz \quad y_G = \frac{1}{M} \iiint \mu y dx dy dz \quad z_G = \frac{1}{M} \iiint \mu z dx dy dz,$$

où
$$M = \iiint \mu dx dy dz.$$

Dans le cas d'une densité volumique constante, il reste

$$x_G = \frac{1}{V} \iiint x dx dy dz \quad y_G = \frac{1}{V} \iiint y dx dy dz \quad z_G = \frac{1}{V} \iiint z dx dy dz.$$

Si, de plus, le volume est limité par une surface de révolution autour de Oz , le centre d'inertie est situé sur Oz , et sa cote est donnée par l'intégrale curviligne

$$z_G = \frac{\pi}{V} \int y^2 z dz.$$

EXEMPLE. *Centre d'inertie du volume limité par un demi-ellipsoïde de révolution.* Considérons le quart d'ellipse dans le premier quadrant du plan zOy d'équation

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Nous savons que le volume limité par le demi-ellipsoïde engendré par cette courbe est

$$V = \frac{1}{2} \frac{4\pi}{3} a^2 b = \frac{2\pi}{3} a^2 b.$$

Posons $y = a \cos t$ et $z = b \sin t$; alors

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{V} \int_0^{\pi/2} \pi a^2 \cos^2 t b \sin t b \cos t dt \\ &= \frac{3b}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^3 t \sin t dt = -\frac{3b}{8} [\cos^4 t]_0^{\pi/2} = 3b/8. \end{aligned}$$

Ce résultat s'applique bien entendu au cas de la demi-boule : il suffit de prendre $a = b = R$.

EXERCICES

Ensembles finis

- 10.1** Soient A, B et C trois points d'un plan. On désigne par G_1 le centre d'inertie de ces points affectés des coefficients $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, par G_2 le centre d'inertie de ces mêmes points affectés des coefficients $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ et par G le centre d'inertie de ces points affectés des coefficients $\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2$. Montrer que les points G_1, G_2 et G sont alignés.
- 10.2** Soient A_1, A_2, \dots, A_n des points d'un espace vectoriel E sur \mathbf{R} et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ des nombres réels dont la somme est nulle. Soit (I, J) une partition de l'intervalle $[1, n]$ de \mathbf{N} . On suppose que $\sum_{i \in I} \alpha_i \neq 0$. Soient G_I le centre d'inertie des points $(A_i)_{i \in I}$ affectés des coefficients $(\alpha_i)_{i \in I}$ et G_J le centre d'inertie des points $(A_j)_{j \in J}$ affectés des coefficients $(\alpha_j)_{j \in J}$. Montrer que, si le vecteur $G_I G_J$ n'est pas nul, sa direction ne dépend pas du choix du couple (I, J) .
- 10.3** Soient A, B et C trois points d'un plan, α et β deux nombres réels non opposés. On désigne par A' le centre d'inertie de B et C affectés des coefficients α et β , par B' le centre d'inertie de C et A et par C' le centre d'inertie de A et B affectés des mêmes coefficients. Montrer que les centres d'inertie G et G' des points A, B, C et A', B', C' sont confondus.
- 10.4** Soient A, B et C trois points non alignés d'un plan. Soient C' le centre d'inertie des points A et B affectés des coefficients α et β , A' celui des points B et C affectés des coefficients β' et γ' , et B' celui des points C et A affectés des coefficients γ'' et α'' . Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les points A', B' et C' soient alignés est que $\alpha\beta'\gamma'' = -\alpha''\beta\gamma'$.
- 10.5** Soient A, B et C trois points d'un plan et k un vecteur du plan vectoriel associé. Déterminer les ensembles des points M du plan tels que
- $2MA + 3MB - MC = k$;
 - $2MA + 3MB - 5MC = k$.
- 10.6** Soient A et B deux points d'un plan euclidien et α un nombre réel. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que
- $$2\|MA\|^2 - 3\|MB\|^2 = \alpha.$$
- 10.7** On considère la cardioïde d'équation $\rho = a(1 + \cos \theta)$.
- Montrer que, pour tout nombre réel m , il existe trois tangentes à la cardioïde de pente m ;
 - Montrer que le centre d'inertie des trois points de contact ne dépend pas de m .

Courbes

Déterminer les centres d'inertie des courbes homogènes suivantes :

- 10.8** $x = a \cos^3 t \quad y = a \sin^3 t \quad t \in [0, \pi/2]$.
- 10.9** Arc de cercle.
- 10.10** Trouver les courbes tangentes en O à Ox telles que, pour tout point M , le centre d'inertie de l'arc OM se projette sur Ox suivant l'intersection de Ox avec la tangente en M .

Surfaces planes

Déterminer les centres d'inertie des surfaces homogènes limitées par les courbes suivantes :

10.11 $y = x^2, y = 0$ et $x = 2$.

10.12 $y^2 = 4x$ et $x^2 = 4y$.

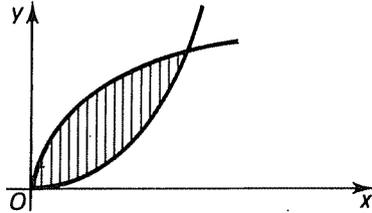


FIG. 1.1

10.13 $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ ($t \in [0, \pi/2]$) et $x = 0, y = 0$.

10.14 Un quart de cercle et deux rayons.

10.15 Un quart d'ellipse et les axes.

10.16 Un cercle et une corde (segment de cercle).

10.17 Une ellipse, le cercle principal et le grand axe.

10.18 La boucle de la strophoïde droite.

10.19 Une boucle de lemniscate de Bernoulli.

10.20 Une spirale logarithmique et deux rayons vecteurs.

10.21 Un disque de rayon R et un disque de rayon $R/2$, la distance des centres étant inférieure à $R/2$.

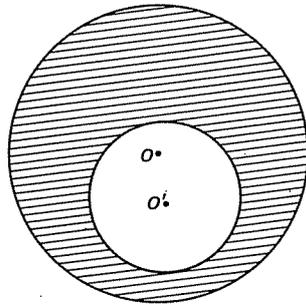


FIG. 2.2

10.22 Soit k un nombre réel strictement positif et différent de 1. Déterminer les courbes telles que

$$x_G = kx_M,$$

où x_M est l'abscisse du point M et x_G celle du centre d'inertie de la surface limitée par les axes de coordonnées, la courbe et la parallèle à Oy issue de M .
Examiner les cas particuliers $k = 2/3$, $k = 3/5$ et $k = 3/4$.

Surfaces de révolution

Déterminer les centres d'inertie des surfaces de révolution suivantes :

- 10.23 Tronc de cône de révolution (limité à l'aire latérale).
10.24 Paraboloïde de révolution limité au parallèle de rayon égal au paramètre.
10.25 Zone sphérique.

Volumes

Déterminer les centres d'inertie des volumes homogènes limités par :

- 10.26 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + 2y + 3z \leq 6$.
10.27 Un tronc de cône de révolution.
10.28 La surface engendrée par l'arc de parabole $x = -z^2 + 4$ dans le premier quadrant tournant autour de Oz .
10.29 Le huitième d'un ellipsoïde dans le premier octant.
10.30 La partie d'un tore au-dessus du plan xOy et ce plan.
10.31 Un tronc de cône de révolution et une demi-sphère extérieure au cône ayant pour grand cercle le cercle de base du cône.

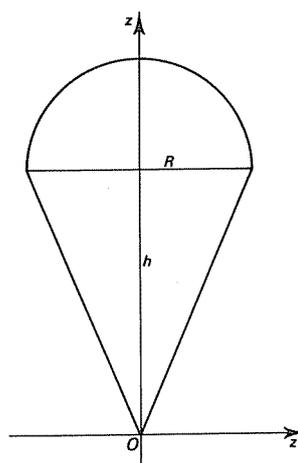


FIG. 3.3

Déterminer les centres d'inertie des volumes suivants :

- 10.32 Demi-boule limitée par un cercle centré en O dans le plan xOy , la densité étant $\alpha z/R$.
10.33 Boule centrée en O , la densité étant $e^{-z/h}$.

CHAPITRE 11

CALCUL DES MOMENTS D'INERTIE

11.1 Moment d'inertie d'un système matériel. La notion de moment d'inertie d'une courbe, d'une surface ou d'un volume intervient constamment en mécanique, en résistance des matériaux et dans l'étude des moteurs. Par exemple, on en a besoin dans l'étude des corps tournants (arbres, volants, induits de dynamo, cadres des appareils de mesure électrique), dans le calcul de l'énergie cinétique, dans l'étude de la flexion et de la torsion des corps, etc.

Considérons d'abord un point P de masse m tournant autour d'un axe Δ avec la vitesse angulaire ω . L'énergie cinétique de P est

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\omega^2 mr^2.$$

Soit maintenant un système matériel constitué de n points P_1, P_2, \dots, P_n de masses respectives m_1, m_2, \dots, m_n en rotation autour de Δ . L'énergie cinétique est cette fois

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

L'expression $\sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ s'appelle moment d'inertie du système matériel par rapport à l'axe Δ et se note I_Δ . L'énergie cinétique peut ainsi s'écrire

$$W = \frac{1}{2} \omega^2 I_\Delta$$

formule fondamentale des corps tournants, qui s'applique aussi bien à un induit de dynamo, au cadre mobile d'un appareil de mesure électrique ou ... à un obus qui tourne autour de son axe.

Le moment d'inertie I_Δ par rapport à un axe Δ d'un système de n points matériels P_1, P_2, \dots, P_n de masses m_1, m_2, \dots, m_n situés aux distances r_1, r_2, \dots, r_n de cet axe est donc la somme des produits obtenus en multipliant chaque masse par le carré de la distance à l'axe :

$$I_\Delta = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

On définit de même le moment d'inertie par rapport à un point ou par rapport à un plan, en prenant pour r_i la distance du point P_i au point donné, ou au plan donné.

11.2 Moment d'inertie d'un solide. Dans le cas d'un solide continu, on remplace comme d'habitude les sommes finies par des intégrales : intégrales curvilignes, intégrales doubles, intégrales triples.

Ainsi, le moment d'inertie d'une courbe par rapport à un point, une droite ou un plan est l'intégrale curviligne

$$I = \int \mu(P) r^2(P) ds,$$

où μ est la densité linéique et r la distance du point P au point, à la droite ou au plan donné.

De même, le moment d'inertie d'une surface plane par rapport à un point ou une droite de son plan est l'intégrale double

$$I = \iint \mu(P) r^2(P) dx dy,$$

où μ est la densité surfacique et r la distance du point P au point ou à la droite. En coordonnées polaires, on remplacera naturellement $dx dy$ par $\rho d\rho d\theta$.

Enfin, le moment d'inertie d'un solide par rapport à un point, une droite ou un plan est l'intégrale triple

$$I = \iiint \mu(P) r^2(P) dx dy dz,$$

où μ est la densité volumique et r la distance du point P au point, à la droite ou au plan.

Il est d'usage de faire apparaître la masse M en facteur. Les moments d'inertie se présentent alors sous la forme du produit de M par le carré d'une longueur. Dans le cas du moment d'inertie par rapport à un axe, cette longueur s'appelle *rayon de giration* du solide.

Dans les exercices, sauf spécification du contraire, le solide est supposé homogène et de densité (linéique, surfacique ou volumique) égale à 1. La masse totale M est alors égale tout simplement à la longueur, à l'aire ou au volume du solide.

11.3 Liens entre moments d'inertie. *Le moment d'inertie d'un système matériel plan ou d'une surface plane par rapport à un point est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes perpendiculaires passant par ce point :*

$$I_O = I_{Ox} + I_{Oy}.$$

Soient en effet Ox et Oy deux axes perpendiculaires issus du point O . Alors

$$r^2 = \|OP\|^2 = x^2 + y^2,$$

où x et y sont les coordonnées de P .

Dans le cas d'un système matériel,

$$I_O = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2 + \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 = I_{Ox} + I_{Oy}.$$

Dans le cas d'une surface plane,

$$\begin{aligned} I_O &= \iint \mu(P) r^2(P) dx dy = \iint \mu(P) (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \iint \mu(P) x^2 dx dy + \iint \mu(P) y^2 dx dy = I_{Ox} + I_{Oy}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas d'un système matériel ou d'un solide dans l'espace.

Le moment d'inertie par rapport à une droite est la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans perpendiculaires passant par cette droite :

$$I_{Oz} = I_{yOz} + I_{xOz}.$$

La démonstration est calquée sur la précédente. On utilise le fait que le carré de la distance à Oz est encore égal à $x^2 + y^2$.

Le moment d'inertie par rapport à un point est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans perpendiculaires passant par ce point :

$$I_O = I_{yOz} + I_{zOx} + I_{xOy}.$$

On utilise cette fois la relation

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

11.4 Théorème de Huygens. *Le moment d'inertie par rapport à un axe Δ est égal à la somme du moment d'inertie par rapport à la parallèle Δ' à Δ issue du centre d'inertie G et Md^2 , où d est la distance de Δ à Δ' :*

$$I_\Delta = I_{\Delta'} + Md^2.$$

Ainsi, l'axe Δ ayant une direction donnée, le moment d'inertie est minimal quand Δ passe par le centre d'inertie.

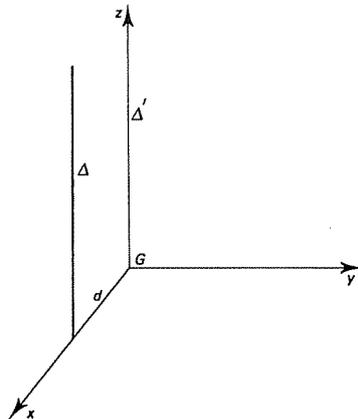


FIG. 11.1

Prenons G pour origine des coordonnées; prenons Oz porté par Δ' et Ox rencontrant Δ (Fig. 11.1).

Alors

$$r^2 = (x-d)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + d^2 - 2dx.$$

Dans le cas d'un système matériel,

$$\sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) + d^2 \sum_{i=1}^n m_i - 2d \sum_{i=1}^n m_i x_i.$$

Or, par définition du centre d'inertie,

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i = 0.$$

La formule annoncée en découle, puisque $\sum_{i=1}^n m_i = M$.

Dans le cas d'un solide,

$$\begin{aligned} \iiint \mu(P) r^2 dx dy dz &= \iiint \mu(P) (x^2 + y^2) dx dy dz + d^2 \iiint \mu(P) dx dy dz - \\ &\quad - 2d \iiint \mu(P) x dx dy dz. \end{aligned}$$

La dernière intégrale est nulle, et l'avant-dernière est égale à la masse totale M .
On démontre de même le résultat suivant :

Le moment d'inertie par rapport à un plan Π est égal à la somme du moment d'inertie par rapport au plan Π' parallèle à Π issu du centre d'inertie G et de Md^2 , où d est la distance de Π à Π' :

$$I_{\Pi} = I_{\Pi'} + Md^2.$$

11.5 Moments d'inertie de courbes.

1. *Moment d'inertie d'un segment par rapport à son milieu.* Soit $[A, B]$ un segment de longueur $2a$ et de milieu O . Prenons un axe de coordonnées porté par AB . Alors

$$I_O = \int_{-a}^a x^2 dx = \frac{2}{3} a^3.$$

Or, $M = 2a$. Par suite,

$$I_O = \frac{Ma^2}{3}.$$

2. *Moment d'inertie d'un segment par rapport à un axe perpendiculaire passant par une de ses extrémités.* C'est encore le moment d'inertie par rapport à cette

extrémité. D'après le théorème de Huygens,

$$I_A - I_O + Ma^2 = \frac{4}{3}Ma^2.$$

3. *Moment d'inertie d'un cercle par rapport à son centre.* Soit un cercle de centre O et de rayon R . Alors $ds = R d\theta$ et

$$I_O = \int_0^{2\pi} R^2 R d\theta = 2\pi R^3,$$

soit encore, puisque $M = 2\pi R$,

$$I_O = MR^2.$$

4. *Moment d'inertie d'un cercle par rapport à un diamètre.* Nous savons que $I_O = I_{Ox} + I_{Oy}$. Or, par raison de symétrie, $I_{Ox} = I_{Oy}$. Ainsi,

$$I_{Ox} = \frac{1}{2}I_O = \frac{1}{2}MR^2.$$

5. *Moment d'inertie d'un demi-cercle par rapport au diamètre qui le limite.* Il est clair que le moment d'inertie du demi-cercle est la moitié de celui du cercle entier. Mais la masse M est aussi la moitié de la précédente, si bien que I_{Ox} est encore donné par la formule

$$I_{Ox} = \frac{1}{2}MR^2.$$

(Cette fois, $M = \pi R$ et non $2\pi R$.)

11.6 Moments d'inertie des surfaces planes.

1. *Moment d'inertie d'un rectangle par rapport à son centre.* Prenons pour axes de coordonnées les parallèles aux côtés issues du centre du rectangle (Fig. 11.2).

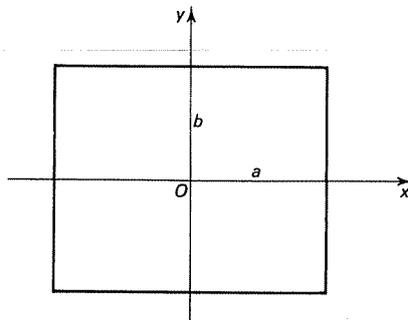


FIG. 11.2

Le moment d'inertie par rapport à Ox est

$$I_{Ox} = \int_{-b}^b 2ay^2 dy = \frac{4ab^3}{3}.$$

De même,

$$I_{Oy} = 4ba^3/3,$$

et
$$I_O = I_{Ox} + I_{Oy} = (4ab/3)(a^2 + b^2) = M(a^2 + b^2)/3.$$

2. Moment d'inertie d'un disque par rapport à son centre. Calculons ce moment d'inertie en coordonnées polaires :

$$I_O = \iint \rho^2 \rho \, d\rho \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 \, d\rho = 2\pi \frac{R^4}{4},$$

soit, puisque $M = \pi R^2$,

$$I_O = MR^2/2.$$

Le moment d'inertie d'un disque est donc la moitié de celui qu'on obtiendrait si toute la masse était concentrée sur le bord de ce disque.

3. Moment d'inertie d'un disque par rapport à un diamètre. Comme dans le cas du cercle, le moment d'inertie par rapport à un diamètre est la moitié du moment d'inertie par rapport au centre :

$$I_{Ox} = MR^2/4.$$

4. Moment d'inertie de la surface d'une ellipse par rapport à son centre. Soit l'ellipse d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Alors

$$I_{Ox} = \iint y^2 \, dx \, dy.$$

Effectuons le changement de variable $x/a = X/R$, $y/b = Y/R$; alors

$$I_{Ox} = \frac{ab^3}{R^4} \iint Y^2 \, dX \, dY.$$

Mais la dernière intégrale est le moment d'inertie par rapport à Ox du disque de centre O et de rayon R . Ainsi,

$$I_{Ox} = \frac{ab^3}{R^4} \pi \frac{R^4}{4} = \pi \frac{ab^3}{4} = M \frac{b^2}{4}.$$

De même,

$$I_{Oy} = M a^2/4$$

et enfin

$$I_O = M(a^2 + b^2)/4.$$

5. Moment d'inertie de la surface d'un triangle par rapport à un côté. Prenons l'axe Ox porté par BC et l'axe Oy porté par la hauteur issue de A (Fig. 11.3).

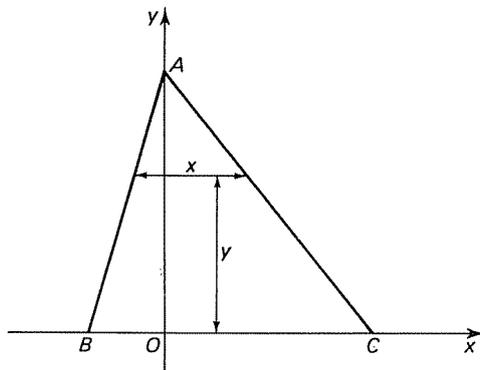


FIG. 11.3

Soient h l'ordonnée de A et a la longueur du côté BC . Alors

$$I_{Ox} = \iint y^2 dx dy = \int xy^2 dy.$$

Or,

$$x/a = (h-y)/h.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I_{Ox} &= \int_0^h a \frac{h-y}{h} y^2 dy = \int_0^h ay^2 dy - \int_0^h \frac{a}{h} y^3 dy \\ &= a \frac{h^3}{3} - \frac{a}{h} \frac{h^4}{4} = a \frac{h^3}{12}. \end{aligned}$$

Puisque $M = ah/2$,

$$I_{Ox} = Mh^2/6.$$

6. Moment d'inertie d'un segment de parabole par rapport à la tangente au sommet. Soit la surface limitée par la parabole d'équation $y^2 = 2px$ et par la droite d'équation $x = h$ (Fig. 11.4). Alors

$$\begin{aligned} I_{Oy} &= \iint x^2 dx dy = \int_0^h x^2 dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dy = 2 \int_0^h \sqrt{2p} x^{5/2} dx \\ &= \frac{4}{7} \sqrt{2p} h^{7/2}. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons vu que $M = \frac{4}{3} \sqrt{2p} h^{3/2}$. Ainsi,

$$I_{Oy} = \frac{3}{7} Mh^2.$$

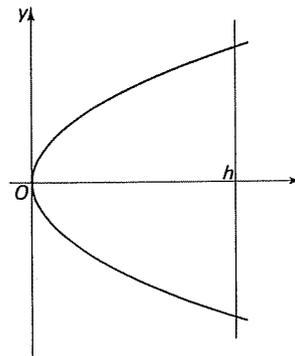


FIG. 11.4

7. *Moment d'inertie de la surface limitée par une astroïde par rapport à son centre.* Rappelons que $x = a \cos^3 t$ et $y = a \sin^3 t$. Par raison de symétrie, le moment d'inertie par rapport à O est le double de I_{Ox} , lequel est le quadruple du moment d'inertie par rapport à Ox de la partie située dans le premier quadrant. Ainsi,

$$\begin{aligned} I_O &= 8 \iint y^2 dx dy = \frac{8}{3} \int y^3 dx = 8a^4 \int_0^{\pi/2} \sin^{10} t \cos^2 t dt \\ &= 8a^4 \left(\int_0^{\pi/2} \sin^{10} t dt - \int_0^{\pi/2} \sin^{12} t dt \right). \end{aligned}$$

D'après la théorie des intégrales de Wallis (voir tome 3),

$$I_O = 8a^4 \frac{9 \times 7 \times 5 \times 3 \times 1}{10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2} \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{11}{12} \right) = \frac{21 \pi a^4}{256} = \frac{7}{32} Ma^2.$$

8. *Moment d'inertie de la surface d'une cardioïde par rapport à son point de rebroussement.* En coordonnées polaires,

$$I_O = \iint \rho^3 d\rho d\theta.$$

Si $\rho = f(\theta)$, cette expression devient

$$I_O = \frac{1}{4} \int [f(\theta)]^4 d\theta.$$

Ici,

$$I_O = \frac{a^4}{4} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \theta)^4 d\theta = 4a^4 \int_{-\pi}^{\pi} \cos^8 \frac{\theta}{2} d\theta.$$

Posons $t = \theta/2$; alors

$$I_O = 16a^4 \int_0^{\pi/2} \cos^8 t dt = 32a^4 \frac{7 \times 5 \times 3 \times 1}{8 \times 6 \times 4 \times 2} \frac{\pi}{2} = \frac{35 \pi a^4}{8} = \frac{35}{12} Ma^2.$$

9. Moment d'inertie de la surface d'une lemniscate de Bernoulli par rapport à son point double. Dans le cas présent, $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$. Par raison de symétrie, le moment d'inertie est le double de celui de la partie située dans le demi-plan $x \geq 0$. Donc

$$\begin{aligned} I_O &= \frac{a^4}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos^2 2\theta \, d\theta = \frac{a^4}{4} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 + \cos 4\theta) \, d\theta \\ &= \frac{\pi a^4}{8} = \frac{\pi}{8} M a^2. \end{aligned}$$

11.7 Moments d'inertie des surfaces de révolution. Pour le calcul des moments d'inertie des surfaces dans l'espace, nous nous limiterons aux surfaces de révolution.

Soit donc une surface de révolution d'axe Oz , d'équation en coordonnées cylindriques $z = f(\rho)$; alors

$$I_{Oz} = 2\pi \int \mu(P) \rho^3(P) \, ds,$$

où ds est la différentielle de l'abscisse curviligne de la méridienne. En effet, nous savons que l'élément d'aire entre deux plans horizontaux voisins est $2\pi\rho\Delta s$, et que le carré de la distance à Oz est ρ^2 .

EXEMPLES

1. Calculer le moment d'inertie par rapport à Oz de la surface engendrée par l'arc de parabole d'équation $z = x^2$, $0 \leq z \leq 2$, en tournant autour de Oz .

La formule précédente devient

$$\begin{aligned} I_{Oz} &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4x^2} x^3 \, dx = \pi \int_0^2 \sqrt{1+4z} z \, dz \\ &= \pi \int_0^2 \sqrt{1+4z} \left(\frac{4z+1}{4} - \frac{1}{4} \right) dz \\ &= \pi \left[\frac{1}{40} (1+4z)^{5/2} - \frac{1}{24} (1+4z)^{3/2} \right]_0^2 = \frac{149}{30} \pi. \end{aligned}$$

2. Moment d'inertie d'une sphère par rapport à un diamètre.

$$I_{Oz} = 2\pi \int \rho^3 \, ds,$$

où $\rho = R \cos \varphi$ et $ds = R d\varphi$. (On utilise la représentation paramétrique $\rho = R \cos \varphi$, $z = R \sin \varphi$, d'un cercle méridien.) Ainsi,

$$I_{Oz} = 2\pi R^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 \varphi \, d\varphi = \frac{4\pi R^4}{3} = \frac{2}{3} MR^2.$$

On peut retrouver ce résultat en remarquant que le moment d'inertie par rapport à O est évidemment égal à MR^2 , tous les points étant à la distance R de O . Or, par raison de symétrie,

$$I_O = 3I_{xOy} \quad \text{et} \quad I_{Oz} = 2I_{xOy}.$$

$$\text{Donc} \quad I_{Oz} = \frac{2}{3}I_O = \frac{2}{3}MR^2.$$

11.8 Moments d'inertie des volumes

1. *Moment d'inertie d'une boule par rapport à son centre.* Soit une boule de centre O et de rayon R . Au lieu de calculer une intégrale triple, considérons la partie comprise entre les sphères de centre O et de rayons respectifs r et $r + \Delta r$. Si Δr est très petit, le moment d'inertie de cette partie est sensiblement le produit par r^2 du volume compris entre ces sphères :

$$\Delta I_O \approx r^2 \left[\frac{4\pi}{3} (r + \Delta r)^3 - \frac{4\pi}{3} r^3 \right] \approx 4\pi r^4 \Delta r.$$

$$\text{Ainsi,} \quad dI_O = 4\pi r^4 dr$$

$$\text{et} \quad I_O = \int_0^R 4\pi r^4 dr = 4\pi \frac{R^5}{5},$$

$$\text{soit} \quad I_O = \frac{3}{5}MR^2.$$

2. *Moment d'inertie d'une boule par rapport à un diamètre.* Par raison de symétrie, $I_{Oz} = \frac{2}{5}I_O = \frac{2}{5}MR^2$.

3. *Moment d'inertie d'un tronc de cylindre de révolution par rapport à son axe.* Prenons l'axe Oz porté par l'axe de révolution. Soient R le rayon et h la hauteur. Alors

$$I_{Oz} = \int_0^h dz \iint \rho^2 dx dy.$$

Or, l'intégrale double s'écrit encore

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho.$$

Nous l'avons déjà rencontrée au n° 11.6; elle est égale à $\pi R^4/2$. D'où

$$I_{Oz} = \pi \frac{R^4}{2} \int_0^h dz = \frac{\pi R^4 h}{2} = \frac{MR^2}{2}.$$

EXERCICES

Courbes

Calculer le moment d'inertie par rapport à Ox des courbes suivantes :

11.1 Chaînette d'équation $y = a \operatorname{ch} x/a$, $x \in [-a, a]$.

11.2 Courbe d'équation $y = 2e^{-x}$, $x \in [0, +\infty[$.

11.3 Astroïde, d'équations $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$.

Surfaces

Calculer le moment d'inertie par rapport à Ox de la surface limitée par Ox et la courbe d'équation :

11.4 $y = \sin x$, $x \in [0, \pi]$.

11.5 $y = \operatorname{tg} x$, $x \in [0, \pi/4]$.

11.6 $y = a \operatorname{ch} x/a$, $x \in [-a, a]$.

11.7 $y = 1 - 4x^2$, $x \in [-1/2, 1/2]$.

11.8 $y = 1/x$, $x \in [1, +\infty[$.

11.9 $y = 2e^{-x}$, $x \in [0, +\infty[$.

11.10 Calculer le moment d'inertie par rapport à Ox de la surface limitée par $y^2 = 4x + 4$ et $y^2 = -4x + 4$.

11.11 Calculer les moments d'inertie par rapport à Ox et Oy de la surface limitée par $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y^2 = 2x^3$ et $y^2 = 8x$.

Calculer le moment d'inertie par rapport à O de la surface limitée par :

11.12 $\rho = a \sin 2\theta$.

11.13 $\rho = 3 \cos \theta$ et $\rho = 2 \cos \theta$.

11.14 Calculer le moment d'inertie de la surface limitée par un triangle équilatéral :

a) Par rapport à un axe Δ' passant par le centre d'inertie et parallèle à l'un des côtés;

b) Par rapport à un axe Δ'' passant par l'un des sommets et parallèle au côté opposé.

Volumes

11.15 Calculer le moment d'inertie d'un tube homogène de rayons r et R et de hauteur h :

a) Par rapport à l'axe de révolution;

b) Par rapport à une génératrice Δ' du cylindre de rayon r ;

c) Par rapport à une génératrice Δ'' du cylindre de rayon R .

11.16 Calculer le moment d'inertie par rapport à Oz du volume limité par la surface de révolution engendrée par la parabole d'équation $z = x^2$ en tournant autour de Oz et le plan d'équation $z = 2$.

11.17 Calculer le moment d'inertie d'un tronc de cône de révolution :

a) Par rapport à son axe;

b) Par rapport à un axe issu du sommet et perpendiculaire à l'axe;

c) Par rapport à son sommet.

11.18 Calculer le moment d'inertie d'un tore :

a) Par rapport à son axe de révolution;

b) Par rapport à un axe perpendiculaire au précédent issu du centre.

SOLUTIONS DES EXERCICES

CHAPITRE 2

2.1 En changeant t en $-t$, on voit que la courbe est symétrique par rapport à O ; en changeant t en $1/t$, on voit que la courbe est symétrique par rapport à la première bissectrice. L'intervalle d'étude est $[0, 1]$.

$$x' = \frac{1-3t^4}{(1+t^4)^2} \quad y' = t^2 \frac{3-t^4}{(1+t^4)^2}$$

t	0	$\sqrt[4]{1/3}$	1
x'	+	0	-
y'	+		+
x	0	↗ M	↘ 1/2
y	0	↗	↗ 1/2

Comme $y/x = t^2$, la tangente à l'origine est l'axe Ox .

L'origine est un point double, atteint une première fois pour $t = 0$, et l'autre pour la valeur infinie du paramètre.

La courbe a la forme d'un huit; nous la retrouverons au chapitre suivant, sous le nom de *lemniscate de Bernoulli*.

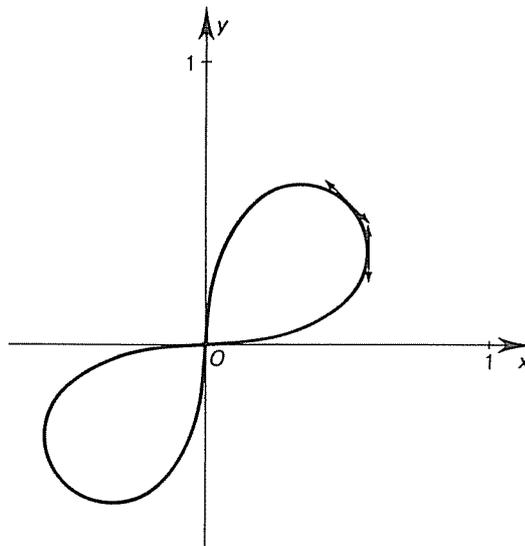


FIG. 2.1

2.2 x est défini si $t \neq \pm 1$; y est défini si $t \neq 1$ et $t \neq 2$.

$$x' = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2} \quad y' = -\frac{2t-3}{(t^2-3t+2)^2}$$

t	$-\infty$	-1	1	$3/2$	2	$+\infty$
x'	-	-	-	-	-	-
y'	+	+	+	0	-	-
x	$0 \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow 6/5$	$2/3 \searrow 0$		
y	$0 \nearrow 1/6$	$\nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow -4$	$-\infty \nearrow +\infty$	0	

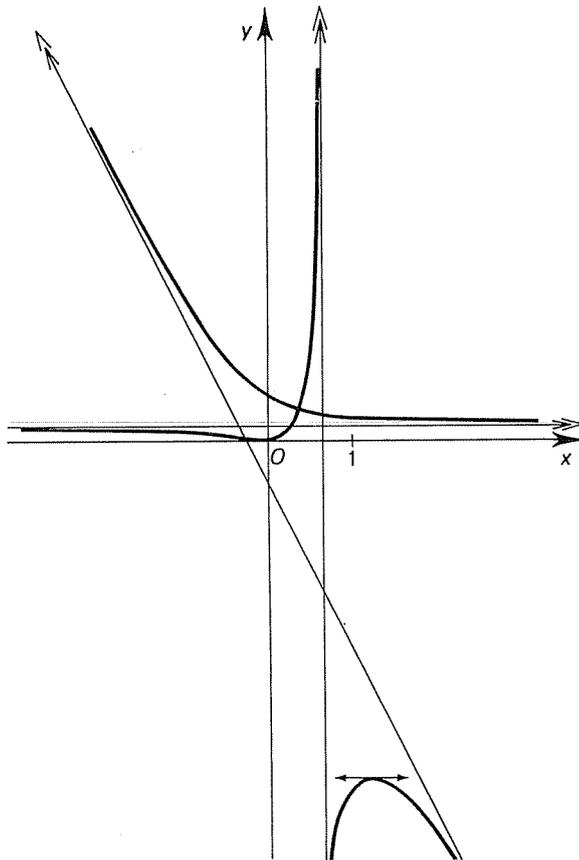


FIG. 2.2

La courbe admet pour asymptotes les droites d'équations $y = 1/6$ et $x = 2/3$.

Si t tend vers 1,

$$\frac{y}{x} = \frac{t+1}{t(t-2)} \rightarrow -2 \qquad y+2x = \frac{2t-1}{t^2-t-2} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

La courbe admet donc une troisième asymptote, à savoir la droite d'équation $y+2x+1/2=0$.

On obtient les coordonnées du point double en écrivant que les trinômes

$$x(X^2-1)-X \qquad \text{et} \qquad y(X^2-3X+2)-1$$

ont deux racines communes, et donc que leurs coefficients sont proportionnels :

$$x/y = 1/3y = -x/(2y-1).$$

D'où $x = y = 1/3$.

$$2.3 \quad x' = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2} \qquad y' = \frac{t(4-t)}{(t-1)^2(t+2)^2}$$

t	$-\infty$	-2	-1	0	1	4	$+\infty$
x'	-	-		-	-		-
y'	-		-	-	0	+	
x	0 ↘	$-2/3$ ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	0 ↗	$-\infty$	$+\infty$ ↘
y	0 ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	$3/2$ ↘	1 ↗	$+\infty$	$-\infty$ ↗

Lorsque t tend vers 1,

$$\frac{y}{x} \rightarrow -\frac{2}{3} \qquad y + \frac{2x}{3} = \frac{1}{t-1} \left(\frac{t-2}{t+2} + \frac{2}{3} \frac{t}{t+1} \right) = \frac{5t+6}{3(t+2)(t+1)} \rightarrow \frac{11}{18}.$$

La courbe admet donc pour asymptote la droite d'équation $y+2x/3 = 11/18$.

Les coordonnées du point double sont définies par le système

$$\frac{x}{y} = -\frac{1}{y-1} = -\frac{x}{2(1-y)}.$$

D'où $x = -2$ et $y = 2$.

La tangente à l'origine a pour pente la limite de y/x lorsque t tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, à savoir 1.

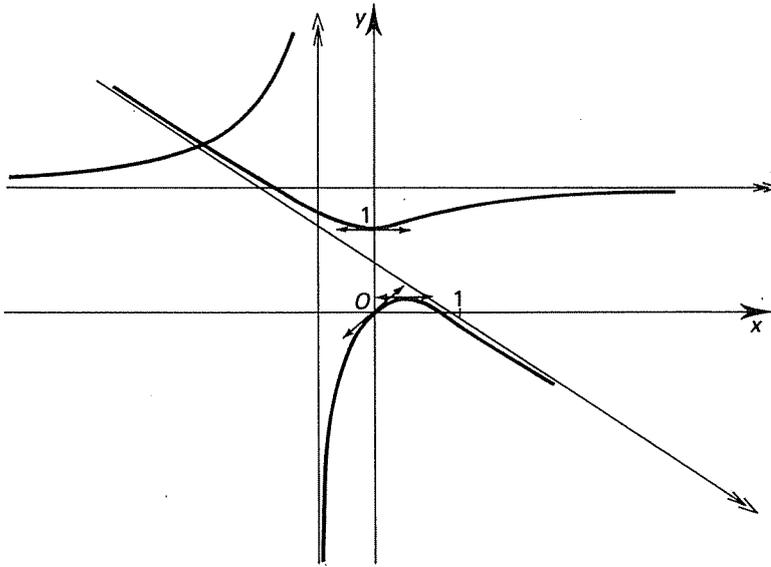


FIG. 2.3

2.4 Lorsqu'on change t en $1/t$, x et y sont échangés. La courbe est donc symétrique par rapport à la première bissectrice. Il suffit de faire varier t entre -1 et 1 , la valeur 0 étant exclue.

$$x' = 2(t+1) \quad y' = -2t(t+1)/t^4$$

t	-1	0	1
x'	0	$+$	$+$
y'	0	$+$	$-$
x	-1	0	3
y	-1	$+\infty$	3

L'axe Oy est asymptote à la courbe. Le point $(-1, -1)$ est un point de rebroussement.

$$\frac{y+1}{x+1} = \frac{1}{t^2} \rightarrow 1 \quad \text{si } t \rightarrow -1.$$

La tangente de rebroussement est donc la première bissectrice.

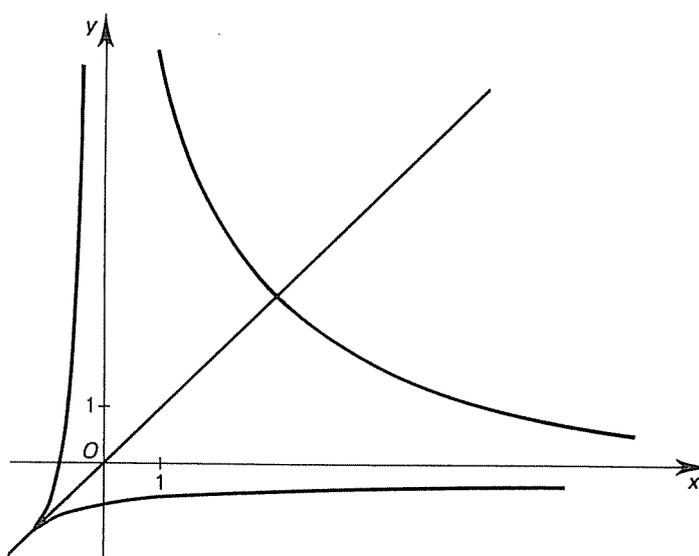


FIG. 2.4

2.5 Si on change t en $-t$, x est changé en $-y$ et y en $-x$. La courbe est donc symétrique par rapport à la deuxième bissectrice.

$$x' = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2} \quad y' = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$$

t	0	1	2	$+\infty$
x'	0 +		+	+
y'	0 -		- 0 +	
x	4 ↗	9/2	↗ 16/3	↗ $+\infty$
y	-4 ↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	0 ↗ $+\infty$

Lorsque t tend vers $\pm\infty$,

$$\frac{y}{x} \rightarrow 1 \quad y-x = t-1-2 + \frac{1}{t-1} - t-1-2 - \frac{1}{t+1} \rightarrow -6.$$

La courbe admet pour asymptote la droite d'équation $y-x = -6$.

Le point de paramètre 0 est un point de rebroussement; la tangente en ce point a pour pente -1 .

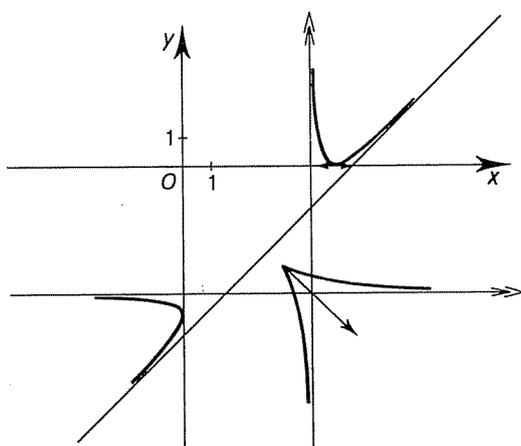


FIG. 2.5

2.6 x est défini pour $t \neq 3/2$ et $t \neq 1/2$; y est défini pour $t \neq 3/2$.

$$x' = 4 \frac{(1+2t)(5-6t)}{(3-2t)^2(1-2t)^2} \quad y' = \frac{(1+2t)(7-2t)}{(3-2t)^2}$$

t	$-\infty$	$-1/2$	$1/2$	$5/6$	$3/2$	$7/2$	$+\infty$
x'	-	0	+	+	0	-	-
y'	=	0	+	+	+	+	0
x	$1 \searrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$	$-\infty \nearrow$	$-8 \searrow$	$-\infty$	$+\infty \searrow$
y	$+\infty \searrow$	$0 \nearrow$	1	$\nearrow 8/3$	$\nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow$	$-\infty \searrow$

Le point de paramètre $-1/2$ est un point de rebroussement.

$$y/x = (1-2t)/2 \rightarrow 1.$$

La tangente de rebroussement est la première bissectrice.

Les droites d'équations $x = 1$ et $y = 1$ sont asymptotes à la courbe. Lorsque t tend vers $3/2$,

$$\frac{y}{x} = \frac{1-2t}{2} \rightarrow -1 \quad y+x = \frac{(1+2t)^2}{3-2t} \left(\frac{1}{1-2t} + \frac{1}{2} \right) = \frac{(1+2t)^2}{2(1-2t)} \rightarrow -4.$$

La courbe admet pour asymptote la droite d'équation $x + y = -4$.

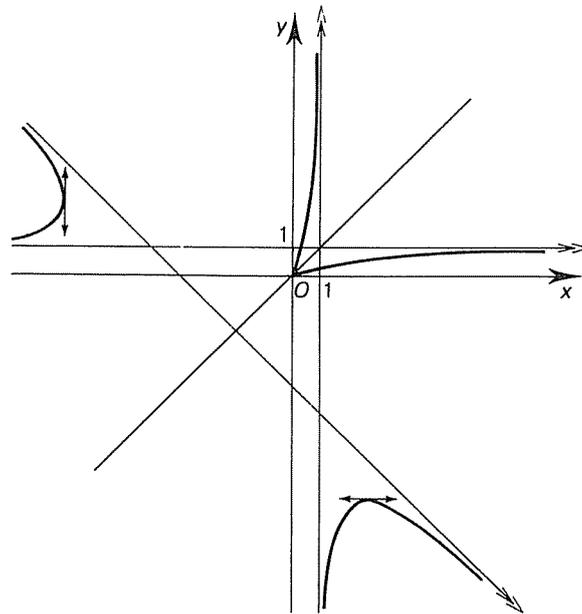


FIG. 2.6

L'examen du graphe permet de penser qu'il y a symétrie par rapport à la première bissectrice. Or, pour que $y(t) = x(u)$ et $x(t) = y(u)$, il faut que y/x se change en son inverse lorsqu'on remplace t par u . Donc

$$\frac{1}{2} - t = \frac{1}{\frac{1}{2} - u} \quad \text{ou} \quad t = -\frac{3+2u}{2(1-2u)}$$

Alors

$$y(t) = \frac{(4u+2)^2}{2(4u-6)(2u-1)} = x(u)$$

et, par suite, $x(t) = y(u)$. La courbe est donc effectivement symétrique par rapport à la première bissectrice, mais cette symétrie n'était pas apparente sur les expressions de x et de y .

$$2.7 \quad x' = -2 \frac{t^2+t+1}{(t^2-1)^2} \quad y' = \frac{1}{(t+1)^2}$$

Lorsque t tend vers -1 ,

$$\frac{y}{x} = \frac{t-1}{t+2} \rightarrow -2 \quad y+2x = \frac{t}{t+1} \left(1+2 \frac{t+2}{t-1}\right) = \frac{3t}{t-1} \rightarrow \frac{3}{2}$$

t	$-\infty$		-1		1		$+\infty$		
x'	-		-		-				
y'	+		+		+				
x	1	\searrow	$-\infty$	$+\infty$	\searrow	$-\infty$	$+\infty$	\searrow	1
y	1	\nearrow	$+\infty$	$-\infty$	\nearrow	$1/2$	\nearrow	1	

La courbe admet pour asymptote la droite d'équation $y + 2x = 3/2$.

Enfin, si t tend vers $\pm\infty$,

$$\frac{y-1}{x-1} = -\frac{t+1}{2t+1} \rightarrow -\frac{1}{2}.$$

La tangente au point $(1, 1)$ a pour pente $-1/2$.

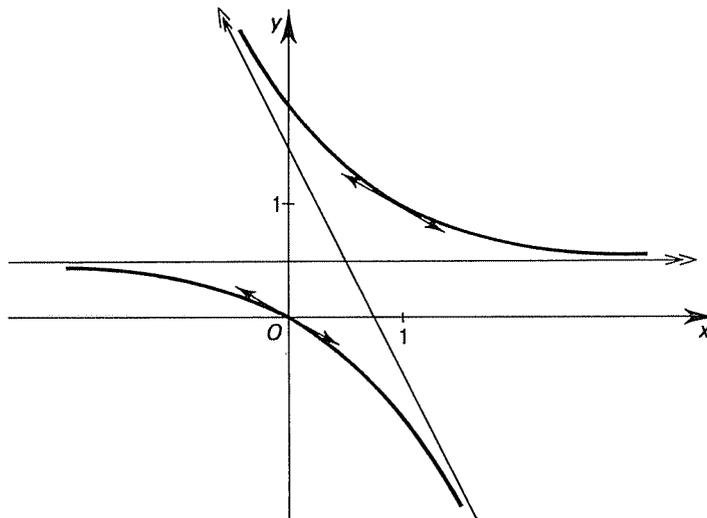


FIG. 2.7

La courbe a l'allure d'une hyperbole. Pour voir si c'en est effectivement une, remarquons que

$$t = \frac{y}{1-y} \text{ et donc que } x = \frac{y^2 + 2y(1-y)}{y^2 - (1-y)^2} = \frac{-y^2 + 2y}{2y-1}$$

Ainsi, les points de la courbe vérifient la relation

$$y^2 + 2xy - x - 2y = 0,$$

qui est l'équation d'une hyperbole. Cette hyperbole est parcourue entièrement.

2.8 x et y sont définis pour toute valeur de t .

$$x' = \frac{t^2 - 2t - 2}{(t^2 + t + 1)^2} \quad y' = \frac{-t^2 + 2t + 2}{(t^2 - t + 3)^2}$$

t	$-\infty$	t_1	t_2	$+\infty$
x'		+	0	-
y'		-	0	+
x	1	↗	↘	↗
y	1	↘	↗	↘

Les coordonnées des points doubles sont telles que les deux trinômes

$$x(X^2 + X + 1) - X^2 - 2 \quad \text{et} \quad y(X^2 - X + 3) - X^2 - 2$$

aient deux racines communes; leurs coefficients sont alors proportionnels :

$$\frac{x-1}{y-1} = -\frac{x}{y} = \frac{x-2}{3y-2}.$$

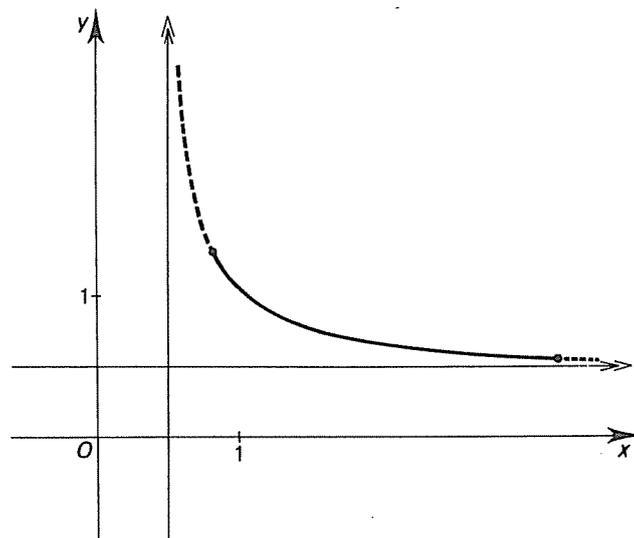


FIG. 2.8

On trouve ainsi la seule condition

$$2xy - x - y = 0. \quad (1)$$

Tous les points sont doubles, et appartiennent à l'hyperbole équilatère d'équation (1); mais cette hyperbole n'est pas parcourue entièrement.

2.9 x et y sont définis lorsque $t \neq 0$.

$$x' = \frac{1}{t^2} e^{-1/t} \quad y' = \left(1 - \frac{2}{t}\right) e^{2/t}.$$

t	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x'		+			+	+	
y'		+			-	0	+
x	1	↗	$+\infty$	0	↗		1
y	$-\infty$	↗	0	$+\infty$	↘	$2e$	↗ $+\infty$

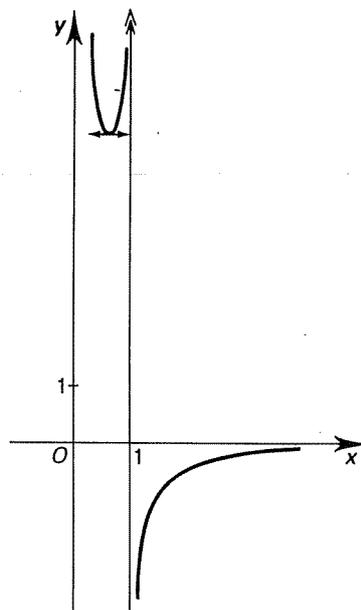


FIG. 2.9

2.10 La période est 2π ; comme x n'est défini que si $\sin t > 0$, l'intervalle d'étude est $]0, \pi[$. En changeant t en $\pi - t$, on voit que la courbe est symétrique par rapport à Ox .

$$x' = \frac{\cos 2t}{\operatorname{tg} t} \quad y' = \cos 2t.$$

t	0		$\pi/4$		$\pi/2$
x'		+	0	-	0
y'		+	0	-	-1
x	$-\infty$	\nearrow	$\frac{1}{2}(1 - \ln 2)$	\searrow	0
y	0	\nearrow	$1/2$	\searrow	0

L'axe Ox est asymptote à la courbe. La tangente au point de rebroussement a pour pente la limite de $y'/x' = \operatorname{tg} t$, soit 1.

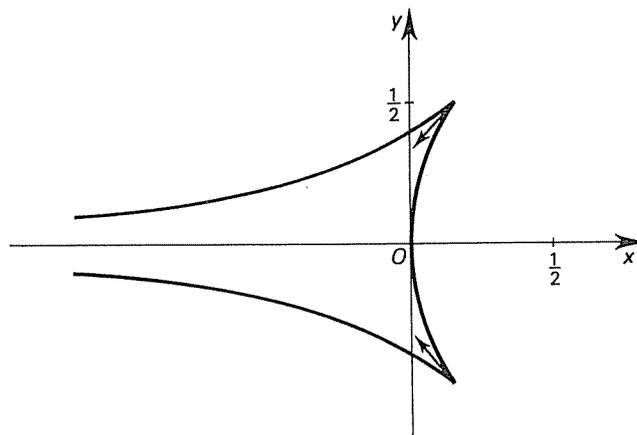


FIG. 2.10

2.11 La période est 2π . Le changement de t en $-t$ conserve x et transforme y en $-y$. La courbe est donc symétrique par rapport à Ox . Le changement de t en $\pi - t$ transforme x en $-x$ et conserve y . La courbe est donc symétrique par rapport à Oy . L'intervalle d'étude est $[0, \pi/2[$.

$$x' = \frac{\sin t}{\cos^2 t} \quad y' = \cos t.$$

t	0	$\pi/2$	
x'	0	+	
y'	1	+	
x	1	\nearrow	$+\infty$
y	0	\nearrow	1

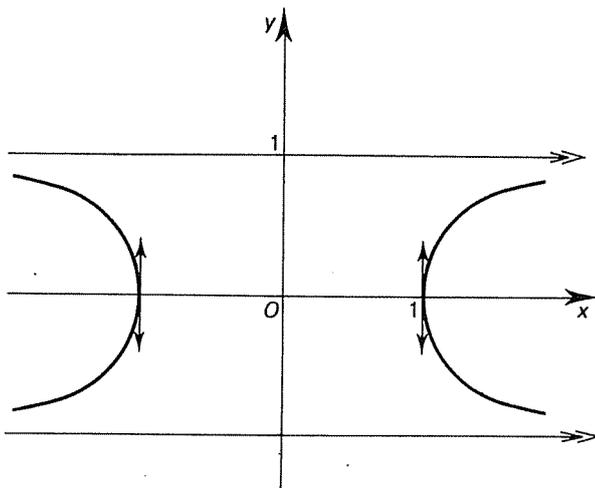


FIG. 2.11

2.12 La période est 2π . Le changement de t en $-t$ transforme x en $-x$ et y en $-y$. La courbe est donc symétrique par rapport à O . Le changement de t en $\pi-t$ transforme x en $-x$ et conserve y . La courbe est donc symétrique par rapport à Oy . L'intervalle d'étude est $]0, \pi/2[$.

t	0	$\pi/2$	
x'	1	+	
y'		-	
x	0	\nearrow	$+\infty$
y	$+\infty$	\searrow	1

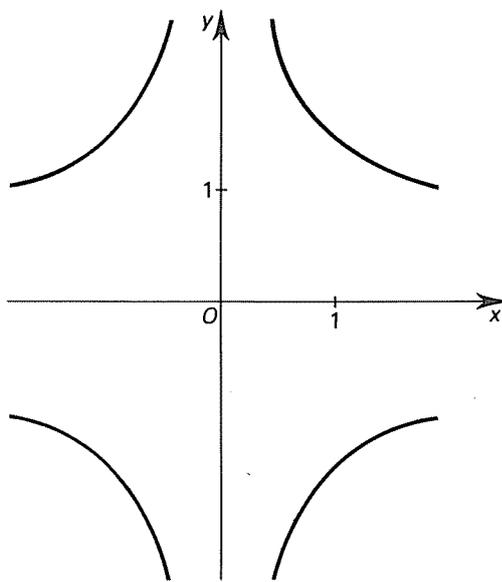


FIG. 2.12

2.13 La période est 2π ; la courbe est symétrique par rapport à Ox . L'intervalle d'étude est $[0, \pi]$.

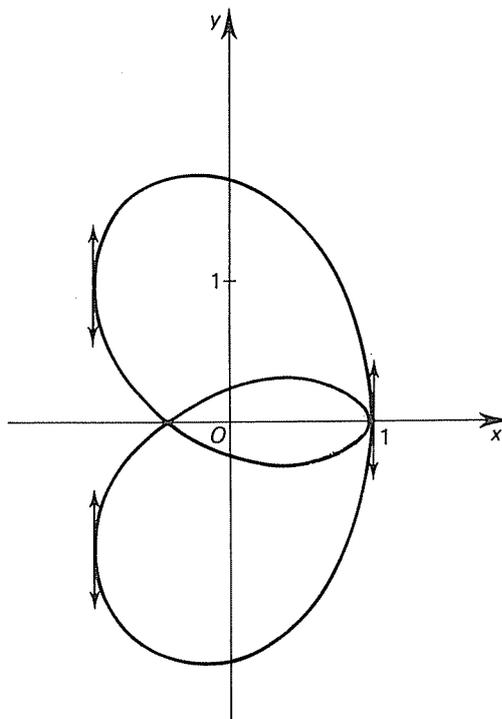


FIG. 2.13

$$x' = -2 \sin 2t \quad y' = 4 \cos^2 t - \cos t - 2$$

t	0	t_1	$\pi/2$	t_2	π				
x'	0	-	0	+	0				
y'	1	+	0	-	-2	-	0	+	3
x	1	\	\	-1	/	/	1		
y	0	/	\	-1	\	/	0		

Les points (0, 1) et (-1/2, 0) sont doubles.

2.14 La période est 2π ; la courbe est symétrique par rapport à Ox .

$$x' = -4(\sin 4t + \sin t) \quad y' = 3 \cos 3t$$

t	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$2\pi/5$	$\pi/2$	$4\pi/5$	$5\pi/6$	π					
x'	-	-	0	+	0	-	-	0	+	+			
y'	+	0	-	-	-	0	+	+	0	-			
x	5	\	\	3/2	/	\	1	\	/	/	-3		
y	0	/	1	\	0	\	\	-1	/	/	1	\	0

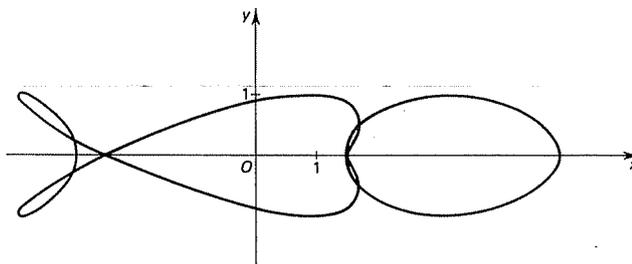


FIG. 2.14

CHAPITRE 3

3.1 L'expression se simplifie :

$$\rho = \frac{a}{\cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta}.$$

D'où

$$x + y/2 = a,$$

équation d'une droite.

3.2 De même,

$$\rho = \frac{a}{\sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta},$$

soit

$$y - \frac{1}{2}x = a,$$

équation d'une droite.

3.3 Chassons le dénominateur et multiplions les deux membres par ρ :

$$\rho^2 \sin \theta \cos \theta = a\rho \cos \theta - a\rho \sin \theta,$$

soit

$$xy = a(x - y),$$

équation d'une hyperbole équilatère.

3.4 Chassons le dénominateur :

$$\rho(\cos \theta + \sin \theta) = a \operatorname{tg} \theta,$$

soit

$$x + y = a y/x, \quad \text{ou encore} \quad x(x + y) - ay = 0,$$

équation d'une hyperbole.

3.5 $\rho \sin \theta = a \cot \theta$.

En coordonnées cartésiennes,

$$y = a x/y, \quad \text{soit} \quad y^2 = ax.$$

Il s'agit d'une parabole de sommet O et d'axe Ox .

$$3.6 \quad \sin \theta = \frac{2 \operatorname{tg}(\theta/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\theta/2)} = \frac{2a\rho}{a^2 - \rho^2}.$$

$$y = \rho \sin \theta = 2a\rho^2/(a^2 - \rho^2), \text{ soit } y(a^2 - x^2 - y^2) = 2a(x^2 + y^2).$$

3.7 Il n'y a ni période ni symétrie.

θ	$-\infty$	$+\infty$
ρ	0	a

L'origine est point asymptote, et le cercle de centre O et de rayon a , cercle asymptote.

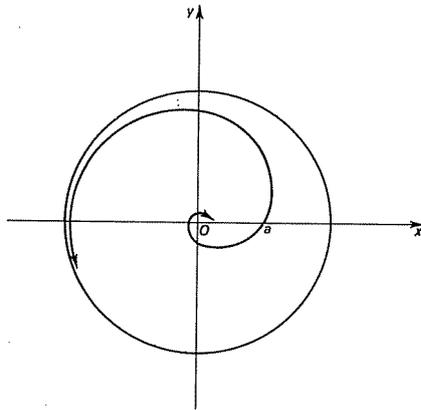


FIG. 3.1

3.8 La courbe est symétrique par rapport à Oy . Il n'y a pas de période. Prenons pour intervalle d'étude $[0, +\infty[$.

L'expression de ρ' est simple :

$$\rho' = -a \frac{\theta^2 + 1}{(\theta^2 - 1)^2} < 0.$$

θ	0	1	$+\infty$
ρ	0	$-\infty$	0

$$Y = \rho \sin(\theta - 1) = a \frac{\theta}{\theta + 1} \frac{\sin(\theta - 1)}{\theta - 1} \rightarrow \frac{a}{2}.$$

Plus précisément, si l'on pose $\theta = 1 + h$,

$$Y = \frac{1}{2}(1 + h/2) + o(h),$$

ce qui détermine la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

L'origine est un point asymptote.

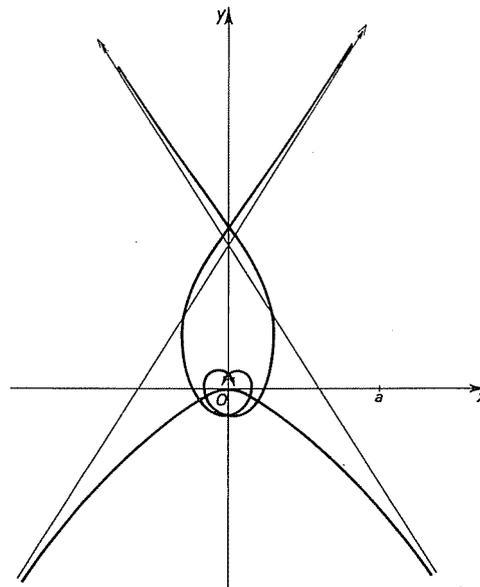


FIG. 3.2

3.9 La courbe est symétrique par rapport à Ox .

θ	0	$2\pi/3$	π
ρ	$3a$	+	0
			-
			$-a$

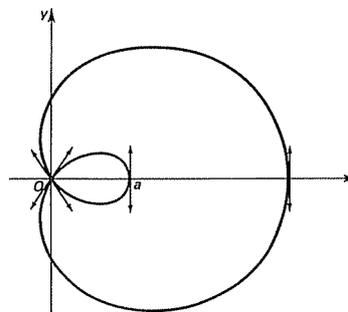


FIG. 3.3

3.10 La période est $2\pi/3$. Si on change θ en $-\theta$, ρ est changé en $-\rho$. La courbe est donc symétrique par rapport à Oy .

Lorsqu'on change $\theta/3$ en $\pi - \theta/3$, ρ est invariant. Donc la courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $\theta = \pi/6$.

θ	0	$\pi/6$
ρ	0	a

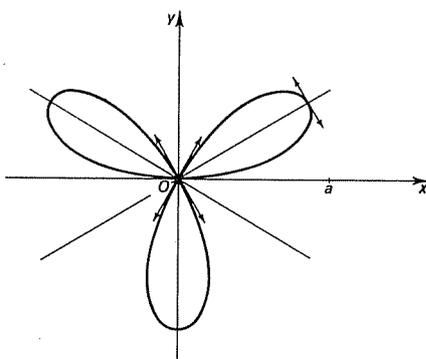


FIG. 3.4

3.11 La période est $\pi/3$. La courbe est symétrique par rapport à Ox .

θ	0	$\pi/6$
ρ	$2a$	$4a$

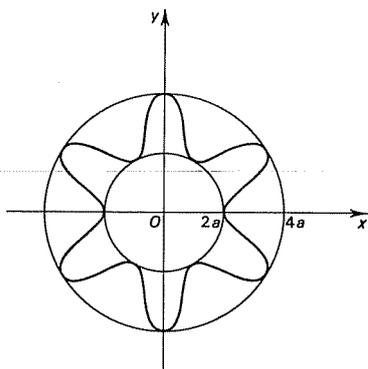


FIG. 3.5

3.12 La période est 3π . La courbe étant symétrique par rapport à Oy , on prendra pour intervalle d'étude $[0, 3\pi/2]$.

θ	0	$3\pi/2$
ρ	0	a

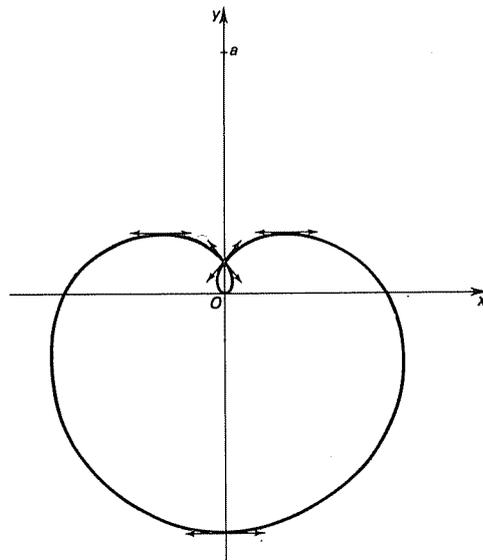


FIG. 3.6

Le point de coordonnées $(0, a/8)$ est point double.

Il est facile de déterminer les points à tangente horizontale ou verticale, car

$$\rho/\rho' = \operatorname{tg} V = \operatorname{tg}(\theta/3).$$

$$\theta + V = k\pi \quad \text{si } \theta = 3\pi/4 \quad \text{ou} \quad \theta = 3\pi/2$$

$$\theta + V = (2k+1)\pi/2 \quad \text{si } \theta = 3\pi/8 \quad \text{ou} \quad \theta = 9\pi/8.$$

3.13 La période est 2π . Le changement de θ en $\theta + \pi$ transforme ρ en $-\rho$, et redonne donc le même point. Enfin, le changement de θ en $\pi/2 - \theta$ conserve ρ . La courbe est donc symétrique par rapport à la première bissectrice.

θ	$-\pi/4$	0	$\pi/4$
ρ	0	$-$	0
		$+$	$a\sqrt{2}$

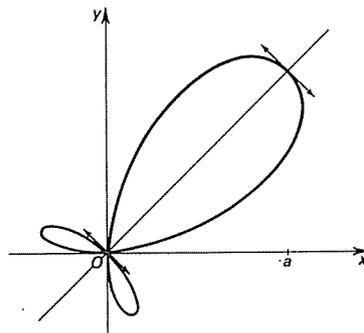


FIG. 3.7

3.14 ρ est une fonction paire de θ . La courbe est donc symétrique par rapport à Ox . L'intervalle d'étude est $[0, \pi/2]$, la valeur $\pi/4$ étant à exclure.

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$
ρ	0	$+\infty$	0

Étudions la limite de

$$Y = \rho \sin(\theta - \pi/4)$$

en posant $h = \theta - \pi/4$:

$$Y = -a \frac{\sin^2(\pi/4 + h) \cos(\pi/4 + h)}{2 \cos h} \rightarrow -a \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Un développement limité à l'ordre 1 montre que $Y + a \sqrt{2}/8$ a le signe de $-h$.

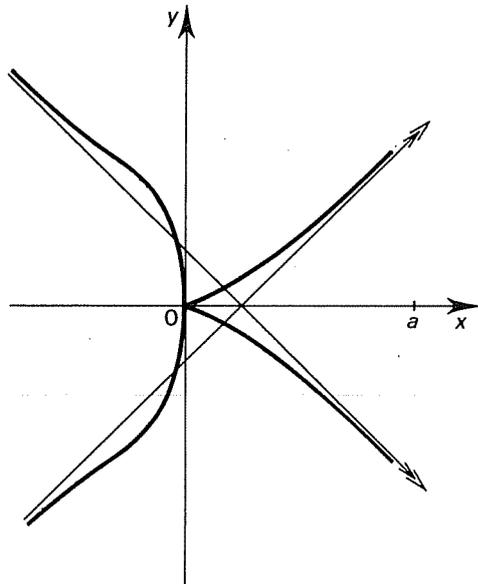


FIG. 3.8

3.15 $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$. La courbe est symétrique par rapport à Ox . Comme $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$, on peut prendre pour intervalle d'étude $[0, \pi/2]$.

On remarque que ρ s'écrit encore sous la forme

$$\rho = \frac{a}{2 \cos \theta \cos 2\theta}.$$

Le dénominateur s'annule lorsque $\theta = \pi/4$ et lorsque $\theta = \pi/2$.

θ	0			$\pi/4$			$\pi/2$
ρ	$a/2$	+	$+\infty$	\parallel	$-\infty$	-	$-\infty$

Étudions la branche infinie correspondant à $\theta = \pi/2$:

$$x = \rho \cos \theta = a \frac{\cos \theta}{2 \cos \theta \cos 2\theta} = \frac{a}{2 \cos 2\theta} \rightarrow -\frac{a}{2}$$

Il existe donc une asymptote, à savoir la droite d'équation $x = -a/2$.

Pour la branche correspondant à $\theta = \pi/4$, formons

$$Y = \rho \sin(\theta - \pi/4) = a \frac{\sin(\theta - \pi/4)}{2 \cos \theta \cos 2\theta}$$

Posons $h = \theta - \pi/4$; alors

$$Y = -a \frac{\sin h}{2 \cos(\pi/4 + h) \sin 2h} \rightarrow -\frac{a}{2\sqrt{2}}$$

Plus précisément,

$$Y = -\frac{a}{4 \cos h \cos(\pi/4 + h)},$$

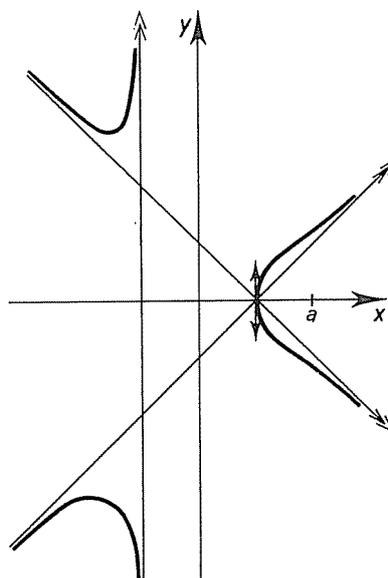


FIG. 3.9

ce qui montre que $Y + a/2\sqrt{2}$ a le signe de $-h$, d'où la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

3.16 La courbe est symétrique par rapport à Ox . L'intervalle d'étude est $[0, 2\pi]$. Le dénominateur s'annule sur cet intervalle lorsque $\theta = 3\pi/2$.

θ	0	$3\pi/2$			2π			
ρ	$a \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$	+	0	-	$-\infty$	$+\infty$	+	$a \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$

Pour étudier la branche infinie, calculons x :

$$x = \rho \cos \theta = a 2 \cos \frac{\theta}{2} \left(2 \cos \frac{\theta}{2} - 1 \right) \rightarrow 2a.$$

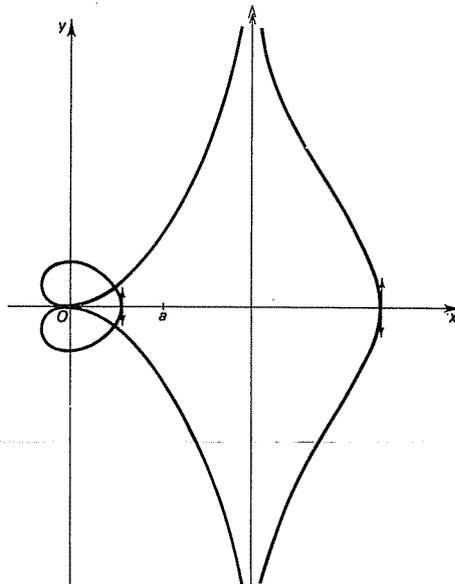


FIG. 3.10

Le graphe montre l'existence de points doubles. Résolvons donc l'équation

$$a \frac{\sqrt{2} \cos(\theta/2)}{1 + \sqrt{2} \cos(\theta/2)} = -a \frac{\sqrt{2} \cos(\theta/2 + \pi/2)}{1 + \sqrt{2} \cos(\theta/2 + \pi/2)},$$

soit

$$\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} - 2\sqrt{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = 0,$$

ou encore

$$\sin(\pi/4 - \theta/2) = \sin \theta.$$

On trouve ainsi les valeurs $\theta = \pi/6$ et $\theta = -\pi/6$.

3.17 La courbe est symétrique par rapport à Oy . Le dénominateur s'annule lorsque $\theta = \pi/3$ et lorsque $\theta = \pi$.

θ	0		$\pi/3$		$\pi/2$		π		
ρ	0	+	$+\infty$	\parallel	$-\infty$	-	0	+	$+\infty$

Pour étudier la branche infinie correspondant à $\theta = \pi$, posons $\theta = \pi + h$; alors

$$y = -a \frac{\sin^2 h \cos h}{\cos 2h - \cos h} = a \frac{\sin^2 h \cos h}{2 \sin(h/2) \sin(3h/2)} \rightarrow \frac{2a}{3}.$$

Pour l'autre branche infinie, posons $\theta = \pi/3 + h$; alors

$$Y = \rho \sin(\theta - \pi/3) = -a \frac{\sin(\pi/6 + 2h) \sin h}{4 \cos(\pi/6 + h/2) \sin(3h/2)} \rightarrow -a.$$

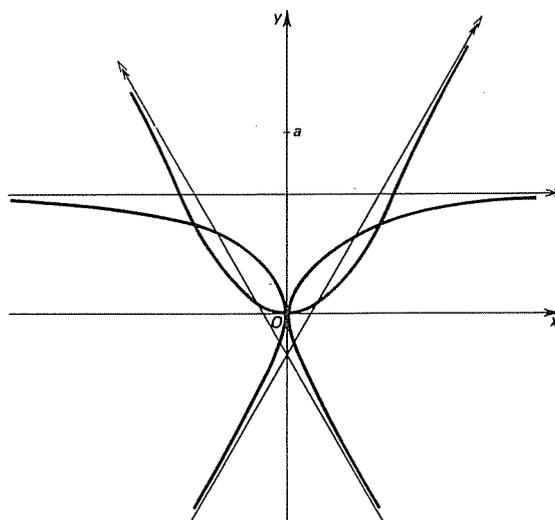


FIG. 3.11

On obtient les points doubles en écrivant que

$$\frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos \theta + \cos 2\theta} = - \frac{\sin \theta \cos \theta}{-\cos \theta + \cos 2\theta},$$

soit $\cos 2\theta = 0$, et donc $\theta = \pi/4$, $\theta = 3\pi/4$.

3.18 La période est 2π , et l'intervalle d'étude, $]-\pi, \pi[$.

θ	$-\pi$	$-2\pi/3$	π
ρ	$-\infty$	$-$	0
	$-$	0	$+$
	$-\infty$	$+$	$+\infty$

Pour étudier les branches infinies correspondant à $\theta = \pi$ et $\theta = -\pi$, introduisons

$$y = \rho \sin \theta = a\sqrt{3} \sin \theta + a \operatorname{tg}(\theta/2) \sin \theta = a[\sqrt{3} \sin \theta + 2 \sin^2(\theta/2)].$$

La limite de y lorsque θ tend vers π ou vers $-\pi$ est $2a$. La courbe admet donc une asymptote, d'équation $y = 2a$. Un développement limité montre que la courbe est en-dessous de son asymptote lorsque θ tend vers π par valeurs inférieures, au-dessus lorsque θ tend vers $-\pi$ par valeurs supérieures.

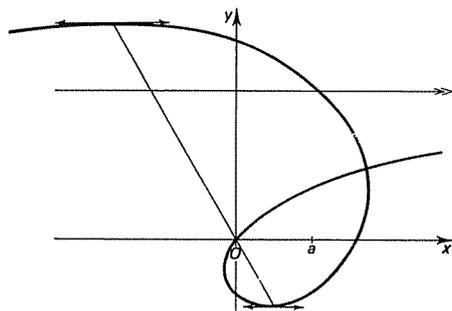


FIG. 3.12

La courbe admet un point double défini par

$$\sqrt{3} + \operatorname{tg}(\theta/2) = -[\sqrt{3} + \operatorname{tg}(\theta/2 + \pi/2)],$$

soit

$$\cot(\theta/2) - \operatorname{tg}(\theta/2) = 2\sqrt{3},$$

ou encore

$$\cot \theta = \sqrt{2}, \quad \text{c'est-à-dire } \theta = \pi/6.$$

On remarque que

$$y' = (\rho \sin \theta)' = a(\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta).$$

Les points à tangente horizontale ont donc pour angle polaire $2\pi/3$.

3.19 La courbe est symétrique par rapport à Oy .

Posons $\theta = \pi + h$; alors

$$\rho = -\frac{a \sin h}{1 - \cos h \cos 2h} \sim -\frac{2a}{h}.$$

Lorsque θ tend vers π par valeurs inférieures, ρ tend vers $+\infty$.

$$y = \rho \sin \theta = a \frac{\sin^2 h}{1 - \cos h \cos 2h} \rightarrow \frac{2a}{5}$$

L'asymptote a pour équation $y = 2a/5$.

θ	0		π
ρ	0	+	$+\infty$

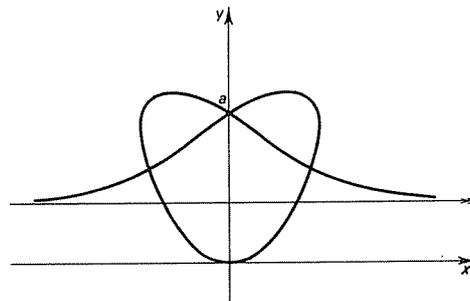


FIG. 3.13

Les points doubles sont atteints lorsque

$$\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta \cos 2\theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta \cos 2\theta},$$

soit $\cos \theta \cos 2\theta = 0$, d'où les valeurs $\theta = \pi/4$ et $\theta = \pi/2$.

3.20 La période est 4π . Le changement de θ en $2\pi - \theta$ conserve ρ . La courbe est donc symétrique par rapport à Ox . On prendra pour intervalle d'étude $[-\pi, \pi]$, la valeur 0 étant exclue.

θ	$-\pi$		0		π
ρ	$-2a$	-	$-\infty$		$+\infty$ + 0

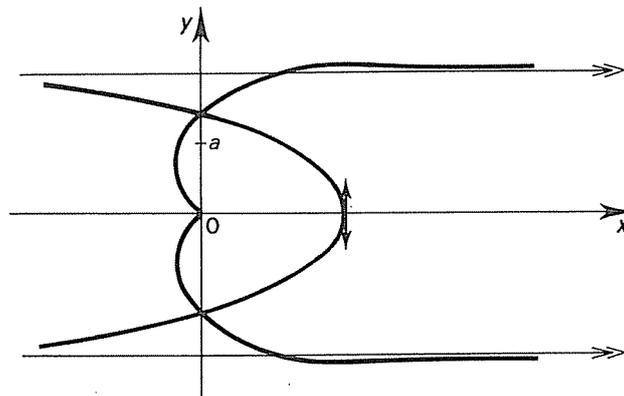


FIG. 3.14

Lorsque θ tend vers 0,

$$y = \rho \sin \theta = 2a \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \cos \theta \sin \frac{\theta}{2} \right) \rightarrow 2a.$$

Plus précisément,

$$y = 2a + a\theta + o(\theta).$$

On obtient les points doubles en écrivant que

$$\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta),$$

soit

$$-\cos \theta + \frac{1}{\cos(\theta/2)} = -\cos \theta - \frac{1}{\sin(\theta/2)};$$

d'où $\theta = -\pi/2$ et $\rho = -\sqrt{2}a$.

3.21 Nous pouvons écrire ρ sous la forme

$$\rho = a/(1 - 3 \operatorname{tg}^2 \theta).$$

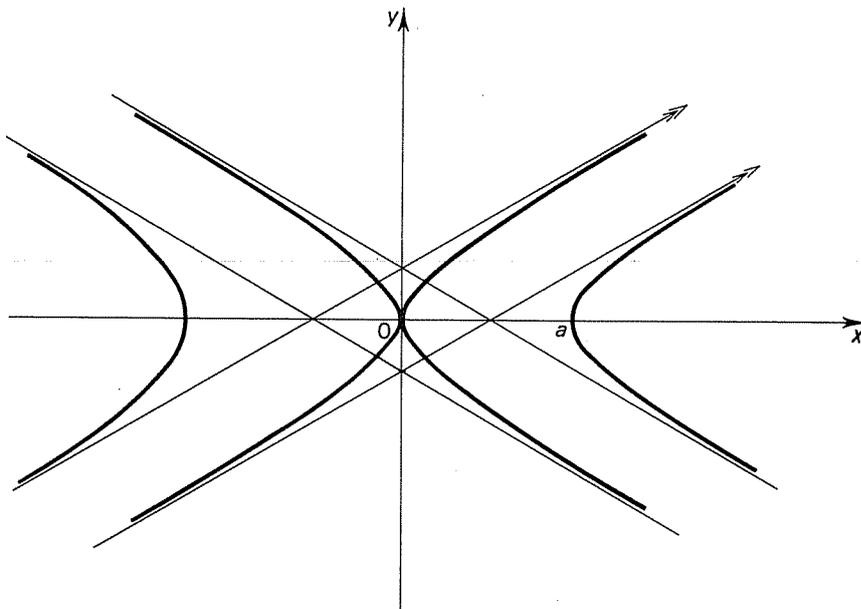


FIG. 3.15

La période est π . Le changement de θ en $-\theta$ conserve ρ .

θ	0				$\pi/6$				$\pi/2$
ρ	a	+	+	∞		$-\infty$	-		0

Pour étudier la branche infinie, posons

$$\begin{aligned}
 Y = \rho \sin(\theta - \pi/6) &= -\frac{a}{3} \frac{\sin(\theta - \pi/6)}{(\operatorname{tg} \theta - \operatorname{tg} \pi/6)(\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} \pi/6)} \\
 &= -\frac{a \cos^2 \theta \cos^2(\pi/6)}{3 \sin(\theta + \pi/6)} \rightarrow -a \frac{3}{8}.
 \end{aligned}$$

3.22 La période est 4π . La courbe est symétrique par rapport à Ox et à Oy .

θ	0				$\pi/3$				π
ρ	0	-	-	∞		$+\infty$	+		$a/3$

Pour étudier la branche infinie, introduisons

$$\begin{aligned}
 Y = \rho \sin(\theta - \pi/3) &= -\frac{a \sin(\theta/2) \sin(\theta - \pi/3)}{2 \cos \theta - \cos(\pi/3)} \\
 &= \frac{a \sin(\theta/2) \cos(\theta/2 - \pi/6)}{2 \sin(\theta/2 + \pi/6)} \rightarrow \frac{a}{2\sqrt{3}}.
 \end{aligned}$$

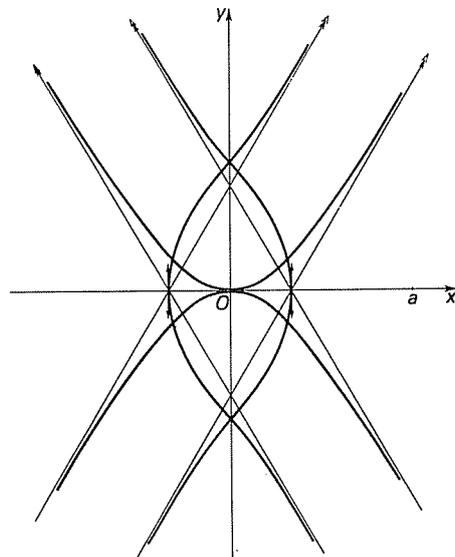


FIG. 3.16

On remarquera que la courbe et les asymptotes se rencontrent sur Ox .
On obtient les points doubles en écrivant que $\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$, soit

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \left(\pi + \frac{\theta}{2} \right),$$

ce qui donne l'origine, ou que $\rho(\theta + \pi) = -\rho(\theta)$, ou encore que

$$\rho(\theta + 3\pi) = -\rho(\theta),$$

soit

$$\frac{\sin(\theta/2)}{1 - 2 \cos \theta} = \pm \frac{\cos(\theta/2)}{1 + 2 \cos \theta}.$$

Posons $t = \operatorname{tg}(\theta/2)$; alors $\pm t \left(1 + 2 \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) + 1 - 2 \frac{1-t^2}{1+t^2} = 0$,

soit $t^3 - 3t^2 - 3t + 1 = 0$ ou $t^3 + 3t^2 - 3t - 1 = 0$,

et enfin $(t+1)(t^2 - 4t + 1) = 0$ ou $(t-1)(t^2 + 4t + 1) = 0$.

Ainsi, $t = \pm 1$ et $t = \pm 2 \pm \sqrt{3}$. D'où $\theta = \pm \pi/2$, $\theta = \pm \pi/6$ et $\theta = \pm 5\pi/6$.

3.23 La courbe est symétrique par rapport à Ox .

θ	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$5\pi/6$	π						
ρ	a	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	$-3a$

Pour étudier les branches infinies, écrivons ρ sous la forme

$$\rho = a \frac{2 \cos \theta - 1}{4 \sin(\theta - \pi/6) \sin(\theta - 5\pi/6)}.$$

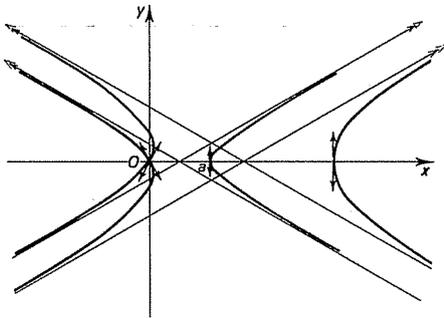


FIG. 3.17

$$Y = \rho \sin(\theta - \pi/6) = a \frac{2 \cos \theta - 1}{4 \sin(\theta - 5\pi/6)} \rightarrow -a \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} \quad \text{si } \theta \rightarrow \frac{\pi}{6}$$

$$Y = \rho \sin(\theta - 5\pi/6) = a \frac{2 \cos \theta - 1}{4 \sin(\theta - \pi/6)} \rightarrow -a \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} \quad \text{si } \theta \rightarrow \frac{5\pi}{6}.$$

3.24 ρ a pour période π ; la courbe est donc symétrique par rapport à O . Remarquons que

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{2}|\cos \theta| + \sqrt{2}|\cos(\theta - \pi/4)|}$$

Donc, si $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$,
$$\rho = \frac{a}{2\sqrt{2} \cos(\pi/8) \cos(\theta - \pi/8)}$$

L'arc de courbe correspondant est donc un segment de droite. De même, si $\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/4$,

$$\rho = \frac{a}{2\sqrt{2} \sin(\pi/8) \sin(\theta - \pi/8)}$$

d'où un deuxième segment de droite.

Finalement, la courbe est un rectangle.

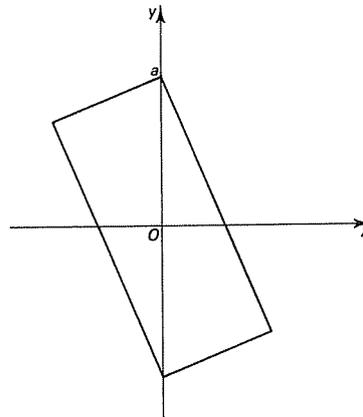


FIG. 3.18

3.25 Soit α l'angle de Ox avec la tangente à une courbe intégrale. Alors $\operatorname{tg} \alpha = y'$ et

$$y/x = (3y' - y'^3)/(1 - 3y'^2) = \operatorname{tg} 3\alpha.$$

Or, $y/x = \operatorname{tg} \theta$ et $\alpha = \theta + V + n\pi$, où $n \in \mathbf{Z}$ et $\operatorname{tg} V = \rho/\rho'$. Par suite,

$$2\theta + 3V = n\pi$$

et
$$\rho \frac{d\theta}{d\rho} = \operatorname{tg} \frac{n\pi - 2\theta}{3}.$$

Les variables se séparent :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \cot \frac{n\pi - 2\theta}{3} d\theta$$

et
$$\rho = k \left| \sin \frac{n\pi - 2\theta}{3} \right|^{-3/2}.$$

CHAPITRE 4

Longueurs de courbes

4.1 $y' = e^x \quad ds = \sqrt{1+e^{2x}} dx.$

Posons $t = \sqrt{1+e^{2x}}$; alors $e^{2x} = t^2 - 1$, $dx = t dt / (t^2 - 1)$ et

$$l = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}} \frac{t^2}{t^2-1} dt = [t - \text{Arg th } t]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{1+e^2}}$$

$$= \sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - \text{Arg th } \sqrt{1+e^2} + \text{Arg th } \sqrt{2}.$$

4.2 $y' = \frac{x^3}{2} - \frac{1}{2x^3} \quad 1+y'^2 = \frac{1}{4} \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2 \quad ds = \frac{1}{2} \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) dx$

$$l = \frac{1}{2} \int_1^2 \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2} \right]_1^2 = \frac{33}{16}$$

4.3 Par raison de symétrie, la longueur est quatre fois celle de l'arc dans le premier quadrant.

$$dx = -3a \cos^2 t \sin t dt \quad dy = 3a \sin^2 t \cos t dt$$

$$ds^2 = 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t dt^2 \quad ds = 3a \cos t \sin t dt$$

$$l = 4 \times 3a \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt = 6a \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = 6a.$$

4.4 $dx = 6a(t+1) dt \quad dy = 6at(t+1) dt \quad ds = 6a(t+1)\sqrt{1+t^2} dt.$

Posons $t = \text{tg } u$; alors

$$l = 6a \int_0^{\pi/4} (1+\text{tg } u) \frac{1}{\cos^3 u} du = 6a \left(\int_0^{\pi/4} \frac{du}{\cos^3 u} + \int_0^{\pi/4} \frac{\sin u}{\cos^4 u} du \right)$$

$$= 6a \left[\frac{1}{2} \ln \text{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{\sin u}{2 \cos^2 u} + \frac{1}{3 \cos^3 u} \right]_{\pi/4}^{\pi/4}$$

$$= 6a \left(\frac{1}{2} \ln \text{tg} \frac{3}{8} + \frac{7}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{3} \right).$$

4.5 $\rho' = -a \cos^3(\theta/4) \sin(\theta/4) \quad \rho^2 + \rho'^2 = a^2 \cos^6(\theta/4)$

$$l = a \int_{-2\pi}^{2\pi} \cos^3 \frac{\theta}{4} d\theta = \frac{a}{4} \int_{-2\pi}^{2\pi} \left(\cos \frac{3\theta}{4} + 3 \cos \frac{\theta}{4} \right) d\theta$$

$$= \frac{a}{4} \left[\frac{4}{3} \sin \frac{3\theta}{4} + 12 \sin \frac{\theta}{4} \right]_{-2\pi}^{2\pi} = \frac{16a}{3}.$$

4.6 Paramétrons la courbe, en posant $x = t^2$, $y = (t-1)^2$. Le paramètre t varie entre 0 et 1.

$$dx = 2t dt \quad dy = 2(t-1) dt \quad ds^2 = 4(2t^2 - 2t + 1) dt^2$$

$$l = 2 \int_0^1 \sqrt{2t^2 - 2t + 1} dt = 2\sqrt{2} \int_0^1 \sqrt{(t - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dt.$$

Posons $t = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sh} u)$; alors

$$\begin{aligned} l &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{-\operatorname{Arg} \operatorname{sh} 1}^{\operatorname{Arg} \operatorname{sh} 1} \operatorname{ch}^2 u du = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-\operatorname{Arg} \operatorname{sh} 1}^{\operatorname{Arg} \operatorname{sh} 1} (\operatorname{ch} 2u + 1) du \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[u + \frac{\operatorname{sh} 2u}{2} \right]_{-\operatorname{Arg} \operatorname{sh} 1}^{\operatorname{Arg} \operatorname{sh} 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2}) + 1. \end{aligned}$$

$$4.7 \quad dx = a \frac{\sin^2 t}{\cos t} dt \quad dy = a \cos t dt \quad ds = a \operatorname{tg} t dt$$

$$s = a \int_0^t \operatorname{tg} u du = -a \ln \cos t = a \ln \frac{a}{y}.$$

Cette expression n'a pas de limite lorsque t tend vers $\pi/2$.

Rayons de courbure

$$4.8 \quad y' = e^{x/a} \quad y'' = e^{x/a}/a \quad R = a(1 + e^{-x/a})(1 + e^{x/a})^{1/2}.$$

$$4.9 \quad \text{Posons } x = 3at^2, \quad y = 3at^3.$$

$$x' = 6at \quad x'' = 6a$$

$$y' = 9at^2 \quad y'' = 18at$$

$$R = a \frac{t^3(4+9t^2)^{3/2}}{108t^2 - 54t^2} = \frac{a}{2} t(4+9t^2)^{3/2}.$$

$$4.10 \quad \text{Posons } x = \sin t, \quad y = t^2.$$

$$x' = \cos t \quad x'' = -\sin t$$

$$y' = 2t \quad y'' = 2$$

$$R = \frac{(\cos^2 t + 4t^2)^{3/2}}{2(\cos t + t \sin t)}.$$

$$4.11 \quad x' = 1 - t^2 \quad y' = 2t \quad ds = (1 + t^2) dt$$

$$\operatorname{tg} \alpha = y'/x' = 2t/(1 - t^2).$$

Posons $t = \operatorname{tg} u$; alors $d\alpha = 2 du = 2 dt/(1+t^2)$ et

$$R = ds/d\alpha = \frac{1}{2}(1+t^2)^2.$$

$$4.12 \quad x' = 1 - 2e^{2t} \quad y' = \frac{e^t}{(1-e^{2t})^{1/2}}(1-2e^{2t})$$

$$ds = (1-2e^{2t})^{1/2} dt \quad \operatorname{tg} \alpha = e^t/(1-e^{2t})^{1/2}.$$

Posons $\sin u = e^t$; alors $dt = \cot u du$, $ds = (\cos 2u)^{1/2} \cot u du$,

$$d\alpha = du \text{ et } R = (\cos 2u)^{1/2} \cot u = (1-e^{2t})/e^t = -\operatorname{sh} t.$$

4.13 Posons $x = at^2/(1+t^2)$, $y = tx$. D'où

$$x' = 2at/(1+t^2)^2 \quad y' = tx' + x$$

$$x'' = 2a(1-3t^2)/(1+t^2)^3 \quad y'' = tx'' + 2x'$$

$$R = at/6(4+t^2)^{3/2}.$$

4.14 $dx = a(1-\cos t) dt = 2a \sin^2(t/2) dt$

$$dy = a \sin t dt = 2a \sin(t/2) \cos(t/2) dt$$

$$\operatorname{tg} \alpha = y'/x' = \cot(t/2) \quad d\alpha = -\frac{1}{2} \frac{dt}{\sin^2(t/2)} \quad ds = 2a \cos(t/2) dt$$

$$R = -4a \sin(t/2).$$

4.15 $dx = -3a \cos^2 t \sin t dt$ $dy = 3a \sin^2 t \cos t dt$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} t \quad d\alpha = -dt \quad ds = 3a \sin t \cos t dt$$

$$R = -3a \sin t \cos t.$$

4.16 Posons $x = at^2$, $y = a(t-1)^2$; alors

$$x' = 2at \quad x'' = 2a$$

$$y' = 2a(t-1) \quad y'' = 2a$$

$$R = 2a(2t^2 - 2t + 1)^{3/2} = \frac{2}{\sqrt{a}}(x+y)^{3/2}.$$

4.17 En coordonnées polaires,

$$u = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p} [1 + e \cos(\theta - \theta_0)]$$

$$u' = -\frac{e}{p} \sin(\theta - \theta_0) \quad u'' = -\frac{e}{p} \cos(\theta - \theta_0)$$

$$R = p \frac{[1 + 2e \cos(\theta - \theta_0) + e^2]^{3/2}}{[1 + e \cos(\theta - \theta_0)]^3}.$$

$$4.18 \quad \rho' = -a \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}} \quad \rho'' = -2a\sqrt{\cos 2\theta} - a \frac{\sin^2 2\theta}{(\cos 2\theta)^{3/2}}$$

$$R = a/3\sqrt{\cos 2\theta} = a^2/3\rho.$$

$$4.19 \quad \rho' = a \quad \rho'' = 0 \quad R = a \frac{(1+\theta^2)^{3/2}}{2+\theta^2}.$$

$$4.20 \quad u = \theta/a \quad u' = 1/a \quad u'' = 0 \quad R = a \frac{(1+\theta^2)^{3/2}}{\theta^4}.$$

$$4.21 \quad \rho' = a \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2(\theta/2)} \quad \rho'' = -a \frac{\operatorname{sh}(\theta/2)}{2 \operatorname{ch}^3(\theta/2)}$$

$$R = a \frac{(\operatorname{ch}^2 2\theta)^{3/2}}{\frac{4 \operatorname{ch}^4 \theta}{2 \operatorname{ch}^2 \theta}} = \frac{a \operatorname{ch}^2 2\theta}{2 \operatorname{ch}^4 \theta} = \frac{a}{2} \left(2 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2 = \frac{a}{2} \left(1 + \operatorname{th}^2 \frac{\theta}{2} \right)^2$$

$$= \frac{a}{2} \left(1 + \frac{\rho}{a} \right)^2.$$

$$4.22 \quad u = (1-\theta^2)/a \quad u' = -2\theta/a \quad u'' = -2/a$$

$$R = a \frac{(1+\theta^2)^2}{(\theta^2-1)^3} = -\frac{\rho}{a^2} (2\rho-a)^2.$$

4.23 Au lieu de calculer ρ' et ρ'' , ce qui est compliqué, passons par les dérivées logarithmiques :

$$\rho'/\rho = -\operatorname{tg} n\theta \quad (\rho'/\rho)' = (\rho\rho'' - \rho'^2)/\rho^2 = -n/\cos^2 n\theta$$

$$R = \frac{\rho^3 [1 + (\rho'/\rho)^2]^{3/2}}{\rho^2 [1 + (\rho'/\rho)^2 - (\rho'/\rho)']} = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 n\theta)^{3/2}}{1 + \operatorname{tg}^2 n\theta + n/\cos^2 n\theta} = \frac{\rho}{(n+1) \cos n\theta}$$

$$= (1/n+1) (a^n/\rho^{n-1}).$$

4.24 L'origine est atteinte pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

$$\rho' = a \frac{\cos \theta}{2 \cos \theta - 1} + 2a \frac{\sin^2 \theta}{(2 \cos \theta - 1)^2}.$$

Si $\rho = 0$, $R = |\rho'|/2$. Pour $\theta = 0$, $R = a/2$; pour $\theta = \pi$, $R = a/6$.

4.25 L'origine est atteinte pour $\theta = \pm\pi/4$.

$$\rho' = -a(\sin \theta \cos 2\theta + 2 \sin 2\theta \cos \theta) \quad \rho'(\pi/4) = -a\sqrt{2}$$

$$R = a\sqrt{2}/2.$$

$$4.26 \quad R = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^2}{2x} = p.$$

4.27 Posons $x = X - 1/2$ et $y = Y$, pour nous ramener au cas de l'origine; l'équation de la conique devient

$$4X^2 + Y^2 - 2XY(2 + \lambda) + Y = 0.$$

$$\text{D'où } \frac{X^2}{2Y} = (2 + \lambda) \frac{X}{4} - \frac{\lambda}{8} - \frac{Y}{8} \rightarrow -\frac{\lambda}{8}.$$

Puisque $|R| = 1/4$, $\lambda = \pm 2$.

$$4.28 \quad x' = at \cos t \quad y' = at \sin t \quad \alpha = t \quad ds = at dt \quad R = at$$

$$x_C = x - R \sin \alpha = a \cos t$$

$$y_C = y + R \cos \alpha = a \sin t.$$

$$4.29 \quad x' = a(1 - 1/\text{ch}^2 t) = a \text{sh}^2 t / \text{ch}^2 t \quad y' = -a \text{sh} t / \text{ch}^2 t$$

$$ds = a \text{th} t dt \quad \text{tg } \alpha = \frac{y'}{x'} = -1/\text{sh} t \quad \alpha = -\text{Arc tg}(1/\text{sh} t)$$

$$d\alpha = \frac{dt}{\text{ch} t} \quad R = a \text{sh} t.$$

$$\cos \alpha = \text{th} t \quad \sin \alpha = -1/\text{ch} t \quad x_C = at \quad y_C = a \text{ch} t.$$

$$4.30 \quad x' = 2a \cos t \text{ch} t \quad y' = 2a \sin t \text{ch} t$$

$$\text{tg } \alpha = \text{tg} t \quad d\alpha = dt \quad ds = 2a \text{ch} t dt \quad R = 2a \text{ch} t$$

$$x_C = a(\cos t \text{sh} t - \sin t \text{ch} t) \quad y_C = a(\sin t \text{sh} t + \cos t \text{ch} t).$$

$$4.31 \quad x' = -2a \text{sh}^2 t \quad y' = 2a \text{sh} t \quad ds = 2a \text{sh} t \text{ch} t dt$$

$$\text{tg } \alpha = -1/\text{sh} t \quad \alpha = -\text{Arc tg}(1/\text{sh} t) \quad d\alpha = dt/\text{ch} t$$

$$R = ds/d\alpha = 2a \text{sh} t \text{ch}^2 t$$

$$x_C = a(t - 3 \text{sh} t \text{ch} t) \quad y_C = 2a \text{ch} t(1 - \text{sh}^2 t).$$

$$4.32 \quad x' = a \sin^2 t / \cos t \quad y' = -a \sin t \quad \text{tg } \alpha = -\cot t \quad d\alpha = dt$$

$$ds = a \sin t(1 + \text{tg}^2 t)^{1/2} dt = a \text{tg} t dt \quad R = a \text{tg} t$$

$$\cos \alpha = \sin t \quad \sin \alpha = -\cos t$$

$$x_C = a \ln \text{tg}(t/2 + \pi/4) \quad y_C = a/\cos t.$$

$$4.33 \quad x_C = x - \frac{y'}{y''}(1 + y'^2) \quad y_C = y + \frac{1}{y''}(1 + y'^2)$$

$$y' = 1/x \quad \frac{y''}{y'} = -\frac{1}{x}.$$

Si $x = 1$, $y = 0$, $y' = 1$, $y'' = -1$ et $x_C = 3$, $y_C = -2$.

$$\begin{aligned}
 4.34 \quad y' &= -1/x^2 & y'(2) &= -1/4 \\
 y'' &= 2/x^3 & y''(2) &= 1/4 \\
 x_c &= 49/16, & y_c &= 19/16.
 \end{aligned}$$

4.35 Le rayon de courbure n'est pas défini en ce point (qui est un point d'inflexion). Il n'y a donc pas de centre de courbure.

4.36 En un point où $y' = 0$, $R = 1/y''$. Or, $y' = 1 + \ln x$, $y'' = 1/x$. La dérivée première s'annule pour $x = 1/e$; alors $y'' = e$ et $R = 1/e$.

4.37 L'ordonnée est minimale si $x = a$; mais en ce point la tangente est verticale, et il n'y a pas de rayon de courbure.

$$4.38 \quad y' = e^x(x+1) \quad y'' = e^x(x+2).$$

Si $x = -1$, $y'' = 1/e$ et $R = e$.

$$4.39 \quad y' = e^{-x}(2x-x^2) \quad y'' = e^{-x}(2-4x+x^2).$$

Si $x = 0$, $R = 1/2$; si $x = 2$, $R = -e^2/2$.

$$4.40 \quad y' = 3 \sin^2 x \cos x \quad y'' = 3(2 \sin x \cos^2 x - \sin^3 x).$$

Si $x = k\pi$, il y a un point d'inflexion. Si $x = (2k+1)\pi/2$, $R = \pm 1/3$.

$$4.41 \quad y' = -\sin x + \cos 2x = -2 \sin^2 x - \sin x + 1$$

$$y'' = -\cos x - 4 \sin x \cos x.$$

La dérivée première s'annule si $\sin x = -1$ ou $\sin x = 1/2$. Dans le premier cas, il y a un point d'inflexion; dans le second cas, $R = \pm 2/3\sqrt{3}$.

$$4.42 \quad \text{On annule la dérivée de } R^2 \text{ par rapport à } x, \text{ d'où}$$

$$3y'y''^2 - y'''(1+y'^2) = 0.$$

$$\text{Ici, } y' = 2 - 3/x^2 \quad y'' = 6/x^3 \quad y''' = -18/x^4.$$

La condition imposée s'écrit

$$3 \left(2 - \frac{3}{x^2} \right) \frac{36}{x^6} + \frac{18}{x^4} \left(1 + 4 - \frac{12}{x^2} + \frac{9}{x^4} \right) = 0,$$

$$\text{soit } (12x^2 - 18) + (5x^4 - 12x^2 + 9) = 0,$$

ou encore $5x^4 - 9 = 0$.

$$4.43 \quad \text{On trouve de même } 2e^{2x} = 1.$$

$$4.44 \quad 3 \cos x \sin^2 x + \cos x(1 + \cos^2 x) = 0.$$

Puisque $3 \sin^2 x + 1 + \cos^2 x$ ne s'annule jamais, il reste $\cos x = 0$, soit

$$x = (2k+1)\pi/2.$$

4.45 Le calcul général de la dérivée de R^2 en coordonnées polaires est compliqué; mais l'expression de R est ici très simple :

$$R = (3a/4) \sin^2(\theta/3).$$

Donc R est extrémal si $\sin \theta/3 = 0$ ou $\sin \theta/3 = \pm 1$.

CHAPITRE 5

$$5.1 \quad y' = kx^3 \quad dy = kx^3 dx \quad y = \frac{kx^4}{4} + y_0.$$

$$5.2 \quad y' = ky/x \quad \frac{dy}{y} = k \frac{dx}{x} \quad y = C |x|^k.$$

$$5.3 \quad y/y' = kx \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{kx} \quad y = C |x|^{1/k}.$$

$$5.4 \quad -y/y' = x^2 \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2} \quad y = C \exp 1/x.$$

$$5.5 \quad s = ky' = k \operatorname{tg} \alpha \quad ds = k \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$dx = \cos \alpha ds = k \frac{d\alpha}{\cos \alpha} \quad x - x_0 = k \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

$$dy = \sin \alpha ds = k \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} d\alpha \quad y - y_0 = \frac{k}{\cos \alpha}.$$

Posons $\beta = \alpha/2 + \pi/4$; alors $\cos \alpha = \sin 2\beta = 2 \operatorname{tg} \beta / (1 - \operatorname{tg}^2 \beta)$.

$$\operatorname{tg} \beta = \pm \exp \frac{x-x_0}{k} \quad y - y_0 = \pm k \operatorname{ch} \frac{x-x_0}{k}.$$

On reconnaît l'équation de chaînettes deux à deux symétriques par rapport à Ox .

5.6 Pente de OM : y/x . Coordonnées de H : $x, 0$.

Coordonnées de N : $Y = y'X$, $Y - y = -1/y'(X - x)$, soit

$$X_H = \frac{x + yy'}{1 + y'^2} \quad \text{et} \quad Y_H = y'X_H.$$

$$\text{Pente de } NH : \frac{y'(x + yy')}{x + yy' - x(1 + y'^2)}.$$

L'égalité des pentes se traduit par

$$x^2 y' + xyy'^2 = y^2 y' - y'^2 xy.$$

Si y' est toujours nul, N et H sont confondus, et le problème n'a plus de sens.

Simplifions donc par y' ; il reste

$$x^2 - y^2 + 2xyy' = 0,$$

équation homogène conduisant à

$$x^2 + y^2 - kx = 0.$$

On reconnaît l'équation d'un cercle centré sur Ox et passant par O .

5.7 L'équation de la tangente est

$$Y - y = y'(X - x).$$

D'où $X_T = x - y/y'$, $\|OT\|^2 = (x - y/y')^2$ et $\|MT\|^2 = y^2(1 + 1/y'^2)$.

L'équation différentielle des courbes cherchées est donc

$$y^2 - x^2 + \frac{2xy}{y'} = a, \text{ soit } y^2 - x^2 + \frac{2yx dx}{dy} = a.$$

Posons $u = x^2$; alors $du = 2x dx$ et

$$y \frac{du}{dy} - u = a - y^2.$$

Sans second membre, $du/u = dy/y$ et $u = Cy$. En faisant varier la constante, on obtient $C' = a/y^2 - 1$, d'où $C = -a/y - y + k$ et $x^2 = -a - y^2 + ky$. On reconnaît l'équation d'un cercle centré sur Oy .

$$\mathbf{5.8} \quad \|OH\| = \frac{|xy' - y|}{(1 + y'^2)^{1/2}} \quad \|IT\| = \frac{\|TM'\|}{\cos \alpha} = \left| \frac{y}{y'} \right| \frac{1}{(1 + y'^2)^{1/2}}.$$

D'où $xy' - y = \pm y/y'$.

Il s'agit d'une équation différentielle homogène, que l'on peut intégrer en posant $t = y/x$. Pour éviter de résoudre en y' , ce qui introduirait une racine carrée, posons $m = y'$ (méthode indiquée par l'énoncé, s'appliquant aux équations de Lagrange, inexplicablement tombées dans l'oubli). Alors

$$y = \frac{m^2}{m+1} x \quad \text{et} \quad dy = \frac{m^2}{m+1} dx + x \frac{m^2 + 2m}{(m+1)^2} dm.$$

Comme $dy = m dx$, nous obtenons

$$\frac{m}{m+1} dx = x \frac{m^2 + 2m}{(m+1)^2} dm.$$

Séparons les variables :

$$\frac{dx}{x} = \frac{m+2}{m+1} dm = \left(1 + \frac{1}{m+1} \right) dm.$$

D'où $x = C(m+1)e^m$ et $y = Cm^2e^m$.

5.9 Le quadrilatère $OPMQ$, ayant deux angles droits, est inscriptible. Donc $(MO, MQ) = (PO, PQ)$, ce qui montre que l'angle V est constant. La courbe est donc soit une spirale logarithmique, soit un cercle de centre O .

5.10 En coordonnées polaires,

$$\rho(\rho^2 + \rho'^2)^{1/2} = a^2.$$

Séparons les variables :

$$d\theta = \pm \frac{\rho d\rho}{(a^4 - \rho^4)^{1/2}}.$$

$$\text{D'où } \theta - \theta_0 = \pm \frac{1}{2} \text{Arc cos } \rho^2/a^2$$

(on préfère un arc cosinus à un arc sinus pour faire disparaître le double signe, comme on va le voir), soit

$$\rho^2 = a^2 \cos(\theta - \theta_0).$$

On reconnaît l'équation d'une lemniscate de Bernoulli.

5.11 En coordonnées polaires, $V = \pi/2 - \theta/2$. D'où

$$\frac{\rho'}{\rho} = \text{tg } \frac{\theta}{2} \quad \rho = \frac{C}{\cos^2(\theta/2)} = \frac{2C}{1 + \cos \theta},$$

équation d'une parabole de foyer O .

$$\mathbf{5.12} \quad X_P = x - y/y' \quad Y_Q = y - xy'.$$

$$\mathbf{AQ} \cdot \mathbf{BP} = 0, \text{ soit } x(x - y/y') + y(y - xy') = 0,$$

ou encore

$$xy/(x^2 + y^2) = y'/(1 + y'^2).$$

$$\text{Ainsi, } (xy' - y)(x - yy') = 0.$$

— Ou bien $xy' - y = 0$, et $y = kx$, équation d'une droite passant par O .

— Ou bien $x - yy' = 0$, et $x^2 - y^2 = k$, équation d'une hyperbole équilatère de centre O .

5.13 Rappelons que l'aire d'un trapèze est le produit de la hauteur par la demi-somme des bases; d'où

$$y(x - y/2y') = a^2, \text{ soit } xy - \frac{y^2}{2} \frac{dx}{dy} = a^2,$$

équation linéaire en x fonction de y .

Sans second membre, $dx/x = 2 dy/y$, soit $x = Cy^2$.

Faisons varier la constante : $dC = -2a^2 dy/y^4$, d'où $C = 2a^2/3y^3 + k$ et $x = 2a^2/3y + ky^2$.

5.14 L'aire est la moitié du produit de la base par la hauteur. Nous pouvons prendre pour hauteur OM et pour base NT . Dans ces conditions,

$$\frac{1}{2}\rho(\rho' + \rho^2/\rho') = k.$$

Séparons les variables :

$$d\theta = \frac{\rho d\rho}{k \pm (k^2 - \rho^4)^{1/2}}.$$

Examinons par exemple le cas du signe +, et posons $v = \rho^2$; il vient

$$d\theta = \frac{dv}{2[k + (k^2 - v^2)^{1/2}]}.$$

Pour faire disparaître le radical, posons $v = k \sin \varphi$; d'où

$$d\theta = \frac{1}{2} \frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi} d\varphi = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{1 + \cos \varphi}\right) d\varphi = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2 \cos^2 \varphi/2}\right) d\varphi$$

$$\text{et } \theta - \theta_0 = \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

à joindre à $\rho^2 = k \sin \varphi$. (On n'obtient malheureusement pas ρ en fonction de θ ; en remplaçant φ par $\operatorname{Arc} \sin \rho^2/k$ dans l'expression de θ , on trouverait θ en fonction de ρ .)

$$\mathbf{5.15} \quad y' = \operatorname{tg} \alpha$$

$$y'' = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{1}{R} \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{R \cos^3 \alpha}.$$

La condition imposée devient $\frac{1}{R^2 \cos^6 \alpha} = R$. D'où $R = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ et $ds = \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$.

On termine alors comme dans l'exercice 5.5.

$$\mathbf{5.16} \quad X_C = x - R \sin \alpha \quad \text{et} \quad X_T = x - y/y' = x - y \cot \alpha.$$

Donc

$$R \sin \alpha = y \cot \alpha.$$

Comme $R = ds/d\alpha$ et que $dy = \sin \alpha ds$,

$$\frac{dy}{y} = \cot \alpha d\alpha.$$

D'où $y = C \sin \alpha$. Enfin,

$$dx = \cos \alpha ds = \cot \alpha dy = C \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} d\alpha$$

$$x - x_0 = C \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| + \cos \alpha \right).$$

On reconnaît les équations d'une tractrice.

5.17 Le centre de courbure se projette sur la droite OM au milieu du segment $[O, M]$; d'où

$$R \sin V = \rho/2.$$

$$\text{Or, } R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\theta + dV}, \quad d\rho = \cos V ds \quad \text{et} \quad \rho d\theta = \sin V ds. \text{ Ainsi,}$$

$$d\theta = dV \quad \text{et} \quad \rho(d\theta/d\rho) = \operatorname{tg} V.$$

Par suite, $V = \theta - \theta_0$ et

$$d\rho/\rho = \cot(\theta - \theta_0) d\theta$$

$$\rho = a \sin(\theta - \theta_0),$$

équation d'un cercle passant par O . (Ce cercle est son propre cercle osculateur en tout point. Autrement dit, le cercle osculateur est fixe.)

$$\mathbf{5.18} \quad \pm y = \frac{1}{2} R \cos \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha \frac{ds}{d\alpha}.$$

Puisque $dy = \sin \alpha ds$, nous obtenons

$$\frac{dy}{y} = \pm 2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} d\alpha.$$

Avec le signe +,

$$y = C/\cos^2 \alpha = C(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

$$dx = \cot \alpha dy = 2C \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \quad x - x_0 = 2C \operatorname{tg} \alpha.$$

On reconnaît une représentation paramétrique d'une parabole.

Avec le signe $-$,

$$y = C \cos^2 \alpha = C(1 + \cos 2\alpha)/2$$

$$dx = \cot \alpha dy = -2C \cos^2 \alpha d\alpha = -C(1 + \cos 2\alpha) d\alpha$$

$$x - x_0 = -C(\alpha + \sin 2\alpha/2).$$

En posant $2\alpha = \pi/2 + t$, on voit qu'il s'agit d'une cycloïde.

5.19 Nous savons que $X_C - x = -R \sin \alpha$. Donc

$$-\sin \alpha \frac{ds}{d\alpha} = a \quad \text{ou} \quad ds = -a \frac{d\alpha}{\sin \alpha}.$$

Par suite,

$$dx = \cos \alpha ds = -a \cot \alpha d\alpha \quad x - x_0 = -a \ln |\sin \alpha|$$

$$dy = \sin \alpha ds = -a d\alpha \quad y - y_0 = -a\alpha.$$

On peut exprimer x en fonction de y :

$$x - x_0 = -a \ln \left| \sin \frac{y - y_0}{a} \right|.$$

5.20 Comme $R = ds/d\alpha$,

$$\frac{ds}{a \operatorname{ch} s/a} = d\alpha \quad 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} e^{s/a} = \alpha - \alpha_0 \quad s = a \ln \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

On se ramène au cas où $\alpha_0 = 0$ en faisant tourner les axes de coordonnées. Au signe près, les calculs se terminent comme dans l'exercice précédent.

5.21 $ds = a \cot \alpha d\alpha \quad s = a \ln |\sin \alpha| + s_0$

$$dx = \cos \alpha ds = a \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} d\alpha = a \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} d\alpha$$

$$dy = \sin \alpha ds = a \cos \alpha d\alpha$$

$$\begin{cases} x - x_0 = a \left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right| + \cos \alpha \right) \\ y - y_0 = a \sin \alpha. \end{cases}$$

Il s'agit d'une tractrice.

5.22 $\frac{ds}{d\alpha} = \pm \sqrt{a^2 - s^2} \quad \frac{ds}{(a^2 - s^2)^{1/2}} = \pm d\alpha$

$$\operatorname{Arc} \cos s/a = \pm (\alpha - \alpha_0) \quad s = a \cos (\alpha - \alpha_0).$$

On se ramène au cas où $\alpha_0 = \pi/2$ en faisant tourner les axes. Alors

$$dx = \cos \alpha ds = a \cos^2 \alpha d\alpha \quad x = a \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} \right) + x_0$$

$$dy = \sin \alpha ds = a \sin \alpha \cos \alpha d\alpha \quad y = -a \frac{\cos 2\alpha}{4} + y_0.$$

En posant $2\alpha = t + \pi$, on reconnaît les équations d'une cycloïde.

5.23 Dans les deux derniers exercices, employons la méthode vectorielle.

$$OI = OM + \frac{1}{2} Rn$$

$$\frac{dOI}{ds} = \tau + \frac{1}{2} \frac{dR}{ds} n - \frac{1}{2} \tau = \frac{1}{2} \left(\tau + \frac{dR}{ds} n \right).$$

La condition de l'énoncé se traduit par $dR/ds = \pm 1$. Prenons par exemple le signe +. Alors $R = s - s_0$; d'où

$$\frac{ds}{s - s_0} = d\alpha \quad s - s_0 = a e^{\alpha - \alpha_0} \quad ds = a e^{\alpha - \alpha_0} d\alpha$$

$$dx = \cos \alpha ds = a \cos \alpha e^{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad dy = \sin \alpha ds = a \sin \alpha e^{\alpha - \alpha_0} d\alpha.$$

On se ramène comme d'habitude au cas où $\alpha_0 = 0$. De plus, on obtient simultanément x et y en introduisant $z = x + jy$:

$$dz = a e^{(1+j)\alpha} d\alpha \quad z - z_0 = \frac{a}{1+j} e^{(1+j)\alpha}.$$

Dans le plan complexe, le coefficient $1/(1+j)$ s'interprète comme une similitude. De plus, $|e^{(1+j)\alpha}| = e^\alpha$ et $\text{Arg } e^{(1+j)\alpha} \equiv \alpha \pmod{2\pi}$.

Ainsi, la courbe cherchée est semblable à la courbe d'équation $\rho = e^\theta$; c'est donc une spirale logarithmique.

5.24 Écrivons le vecteur OP sous la forme $OP = OM + \lambda\tau$; l'appartenance de P à la médiatrice de $[O, M]$ s'écrit

$$OP \cdot OM = \frac{\|OM\|^2}{2}, \quad \text{soit} \quad \|OM\|^2 + \lambda\tau \cdot OM = \frac{\|OM\|^2}{2}.$$

Ainsi $\lambda = -\frac{\|OM\|^2}{2\tau \cdot OM}$ et $OP = OM - \frac{\|OM\|^2}{2\tau \cdot OM} \tau$.

D'où $\frac{dOP}{ds} = -\frac{\|OM\|^2}{2\tau \cdot OM} \frac{n}{R} + \frac{\|OM\|^2 \left(1 + \frac{n}{R} \cdot OM\right)}{2(\tau \cdot OM)^2} \tau$.

La condition de l'énoncé,

$$(OM + Rn) \cdot \frac{dOP}{ds} = 0,$$

est automatiquement vérifiée, et la courbe cherchée est n'importe quelle courbe!

CHAPITRE 6

Potentiel scalaire

6.1 Il est immédiat que $\omega = df$, où

$$f(x, y) = ax + \text{Arc tg } x + by + \text{Arg sh } y.$$

6.2 Il est immédiat que

$$\omega = d[\ln(x^2 + y^2)^{1/2}].$$

La forme différentielle ω est exacte, et elle dérive du potentiel scalaire

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

6.3 Écrivons ω sous la forme

$$\omega = x^4 dx + a^3(x dy + y dx) - b^4 dy.$$

Il est clair que $\omega = df$, où

$$f(x, y) = \frac{x^5}{5} + a^3 xy - b^4 y.$$

$$6.4 \quad \omega = (x + y)(dx + dy) + \left(\frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2} dy\right) + \left(\frac{dy}{x} - \frac{y}{x^2} dx\right).$$

Donc $\omega = df$, où

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

6.5 Les fonctions M et N sont homogènes de degré 0. Posons

$$f(x, y) = xM + yN = x - y + 4 \frac{xy}{x - y} = \frac{(x + y)^2}{x - y}.$$

On vérifie que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - 4 \frac{y^2}{(x - y)^2} = M \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -1 + 4 \frac{x^2}{(x - y)^2} = N.$$

La forme différentielle ω est exacte, et elle dérive du potentiel scalaire f .

6.6 Les fonctions M et N sont homogènes de degré 0. Posons

$$f(x, y) = x \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right) + 2 \frac{y^2}{x} = \frac{x^2 + y^2}{x}.$$

$$\text{Alors} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \frac{y^2}{x^2} = M \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \frac{y}{x} = N.$$

La forme différentielle ω est exacte, et elle dérive du potentiel scalaire f .

6.7 Les fonctions M et N sont homogènes de degré 3. Posons

$$f(x, y) = \frac{1}{4}[xy(3x^2 + y^2) + xy(3y^2 + x^2)] = xy(x^2 + y^2).$$

Alors

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y(3x^2 + y^2) = M, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x(3y^2 + x^2) = N.$$

La forme différentielle ω est exacte, et elle dérive du potentiel scalaire f .

6.8 Les fonctions M et N sont homogènes de degré -2 . Posons

$$f(x, y) = -\frac{x(3y-x) + y(y-3x)}{(x+y)^3} = \frac{x-y}{(x+y)^2}.$$

Alors
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3y-x}{(x+y)^3} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y-3x}{(x+y)^3} = N.$$

La forme différentielle ω est exacte, et elle dérive du potentiel scalaire f .

6.9 Décomposons ω en $\omega = \omega_1 + \omega_2$, où

$$\omega_1 = (x^2 + 2xy) dx + (x^2 + y^2) dy, \quad \omega_2 = -dx - 2dy.$$

Il est clair que $\omega_2 = df_2$, où $f_2(x, y) = -x - 2y$. Posons

$$f_1(x, y) = \frac{1}{2+1} [x(x^2 + 2xy) + y(x^2 + y^2)] = \frac{1}{3}(x^3 + 3x^2y + y^3).$$

Alors

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = x^2 + 2xy = M, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = x^2 + y^2 = N,$$

ce qui montre que $df_1 = \omega_1$. Ainsi, la forme différentielle ω est exacte, et elle dérive du potentiel scalaire $f = f_1 + f_2$:

$$\omega = d(x^3/3 + x^2y + y^3/3 - x - 2y).$$

6.10 Ici, les fonctions M et N sont homogènes, mais de degré -1 . Le théorème de Poincaré ne s'applique donc pas. Passons en coordonnées polaires :

$$\omega = -\frac{\rho \cos \theta}{\rho^2 \sin^2 \theta} \rho^2 d\theta = -\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} d\theta = d \frac{1}{\sin \theta}.$$

La forme différentielle ω est exacte, et $\omega = df$, où

$$f(x, y) = \frac{1}{y} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$6.11 \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + a^2} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{y^2 + a^2}.$$

La forme différentielle ω n'est pas exacte.

$$6.12 \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -2 \frac{x+y}{(1+xy)^3} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Prenons $x_0 = y_0 = 0$; alors

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^x \frac{1-y^2}{(1+ty)^2} dt + \int_0^y du = -\frac{1}{y} \left(\frac{1-y^2}{1+xy} - 1 + y^2 \right) + y \\ &= \frac{x+y}{1+xy}. \end{aligned}$$

$$6.13 \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Prenons $x_0 = y_0 = 0$; alors

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^x \text{Arc tg } \frac{y}{t} dt + \int_0^y \ln u du \\ &= x \text{Arc tg } (y/x) + y \ln \sqrt{x^2 + y^2} - y \ln y + y(\ln y - 1) \\ &= x \text{Arc tg } (y/x) + y \ln \sqrt{x^2 + y^2} - y. \end{aligned}$$

$$6.14 \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 2y g(x) \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -2y g(x) - 2xy g'(x).$$

L'égalité de ces dérivées partielles se traduit par

$$xg'(x) = 2g(x),$$

soit $g(x) = k/x^2$.

Dans ces conditions,

$$\omega = k \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2} dx - 2 \frac{y}{x} dy \right) - k \frac{a^2}{x^2} dx.$$

D'après le théorème de Poincaré, $\omega = df$, où

$$f(x, y) = k \frac{x^2 - y^2}{x} - k \frac{a^2}{x}.$$

Intégrales curvilignes

$$6.15 \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -e^y \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La forme différentielle ω est exacte. Il est immédiat que $\omega = df$, où

$$f(x, y) = \frac{e^y - 1}{1 + x^2}.$$

L'intégrale cherchée est donc égale à

$$f(2, 4) - f(0, 0) = (e^4 - 1)/5.$$

6.16

$$\begin{aligned} \text{a) } I &= \int_0^{\pi/2} (-\sin^3 t + \cos^3 t - 2 \cos^2 t \sin t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin 3t - 3 \sin t}{4} + \frac{\cos 3t + 3 \cos t}{4} \right) dt + \frac{2}{3} [\cos^3 t]_0^{\pi/2} \\ &= -2/3. \end{aligned}$$

$$\text{b) } x = 1 - y, \text{ où } y \in [0, 1].$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 [-y^2 + (1-y)^2 - 2y(1-y)] dy = \int_0^1 (2y^2 - 4y + 1) dy \\ &= 2/3 - 2 + 1 = -1/3. \end{aligned}$$

Il découle de ce qui précède que la forme différentielle ω n'est pas exacte.

6.17

$$\begin{aligned} \text{a) } I &= \int_0^{\pi/2} \left(-\sin^3 t + \frac{\cos t}{\cos^2 t + 3} \right) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 3t - 3 \sin t}{4} dt + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{4 - \sin^2 t} dt \\ &= \left[-\frac{\cos 3t}{12} + \frac{3 \cos t}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{2 + \sin t}{2 - \sin t} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } I &= \int_0^1 \left[-y^2 + \frac{1}{3 - (1-y)^2} \right] dy = \left[-\frac{y^3}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{1-y}{3} \right]_0^1 \\ &= -1/3 + \pi/(6\sqrt{3}). \end{aligned}$$

$$\text{6.18 } x = (y^2 - 1)/2 \quad dx = y dy$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4y}{(y^2 - 1)^2 + 4y^2} y dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4y^2}{(y^2 + 1)^2} dy.$$

$$\text{Posons } y = \operatorname{tg} t; \text{ alors } \frac{y^2}{y^2 + 1} = \sin^2 t, \quad \frac{dy}{y^2 + 1} = dt$$

$$\text{et } I = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 t dt = 2\pi.$$

CHAPITRE 7

Intégrales doubles

$$7.1 \quad I = \int_0^1 x \, dx \int_0^1 y \, dy = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

$$7.2 \quad \int_1^2 (x-1)^2 \, dx = \frac{1}{3} [(x-1)^3]_1^2 = \frac{1}{3}$$

$$\int_2^3 (y+1)^2 \, dy = \frac{1}{3} [(y+1)^3]_2^3 = 37/3 \quad I = 37/9.$$

$$7.3 \quad \int_1^2 x^3 \, dx = \frac{1}{4} [x^4]_1^2 = 15/4 \quad \int_3^4 \frac{dy}{y^4} = -\frac{1}{3} \left[\frac{1}{y^3} \right]_3^4 = \frac{37}{81 \times 64}$$

$$I = \frac{37 \times 5}{256 \times 27} = \frac{175}{6912}.$$

$$7.4 \quad \int_1^2 \frac{x \, dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]_1^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} \quad \int_0^5 y \, dy = \frac{25}{2} \quad I = \frac{25}{4} \ln \frac{5}{2}.$$

$$7.5 \quad I = \int_0^2 x e^x \, dx \int_0^2 y e^y \, dy \quad \int_0^2 x e^x \, dx = [e^x(x-1)]_0^2 = e^2 + 1.$$

L'intégrale en y est égale à la précédente, et $I = (e^2 + 1)^2$.

$$7.6 \quad \int_1^{3-x} \frac{dy}{(x+y)^3} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(x+y)^2} \right]_1^{3-x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{(x+1)^2} \right)$$

$$I = -\frac{1}{18} + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{dx}{(x+1)^2} = -\frac{1}{18} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x+1} \right]_1^2 = -\frac{1}{18} + \frac{1}{12} = \frac{1}{36}.$$

$$7.7 \quad I = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy}{x+y+1} = \int_0^1 [\ln(2+x) - \ln(1+x)] \, dx.$$

Comme $\int \ln t \, dt = t(\ln t - 1)$, on trouve facilement

$$I = 3 \ln 3 - 4 \ln 2.$$

$$7.8 \quad \int_{-1}^1 |x+y| \, dy = -\int_{-1}^{-x} (x+y) \, dy + \int_{-x}^1 (x+y) \, dy$$

$$= -\frac{1}{2} [(x+y)^2]_{-1}^{-x} + \frac{1}{2} [(x+y)^2]_{-x}^1$$

$$= \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(x+1)^2 = x^2 + 1$$

$$I = \int_{-1}^1 (x^2 + 1) dx = 2\left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{8}{3}.$$

$$7.9 \quad \int_0^a \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) dx = \left[-\frac{2a}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \right]_0^a = \frac{2a}{\pi} \left(\sin \frac{\pi y}{2b} + \cos \frac{\pi y}{2b} \right)$$

$$I = \frac{2a}{\pi} \int_0^b \left(\sin \frac{\pi y}{2b} + \cos \frac{\pi y}{2b} \right) dy = \frac{4ab}{\pi^2} \left[\sin \frac{\pi y}{2b} - \cos \frac{\pi y}{2b} \right]_0^b = \frac{8ab}{\pi^2}.$$

$$7.10 \quad I = \int_0^{\pi/2} dx \int_0^1 x \cos xy dy = \int_0^{\pi/2} \sin x dx = 1.$$

$$7.11 \quad \int_0^{+\infty} x e^{-xy} dy = -[e^{-xy}]_0^{+\infty} = 1 \quad I = \int_0^1 dx = 1.$$

$$7.12 \quad \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-\infty}^{-1} = 1 \quad \int_{-1}^0 y^4 dy = 1/5 \quad I = 1/5.$$

$$7.13 \quad I = \int_0^1 x^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \pi/3.$$

$$7.14 \quad I = \int_0^{\pi/2} \cos x dx \int_0^{\pi/2-x} \cos y dy = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx \\ = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) dx = \pi/4.$$

$$7.15 \quad \int_0^{(a^3-x^3)^{1/3}} (a^3-x^3-y^3)^{1/2} y^2 dy = \frac{1}{3} \int_0^{a^3-x^3} (a^3-x^3-u)^{1/2} du \\ = \frac{2}{9} [(a^3-x^3-u)^{3/2}]_0^{a^3-x^3} = \frac{2}{9} (a^3-x^3)^{3/2}.$$

$$I = \int_0^a \frac{2}{9} (a^3-x^3)^{3/2} x^2 dx = \frac{2}{27} \int_0^{a^3} (a^3-t)^{3/2} dt = -\frac{4}{135} [(a^3-t)^{5/2}]_0^{a^3} \\ = \frac{4}{135} a^{15/2}.$$

$$7.16 \quad I = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi} \cos^3 \frac{\theta}{2} \sin \theta d\theta = \frac{a^3}{12} \int_0^{\pi} \left(\cos \frac{3\theta}{2} + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right) \sin \theta d\theta \\ = \frac{a^3}{24} \int_0^{\pi} \left(\sin \frac{5\theta}{2} + 2 \sin \frac{\theta}{2} + 3 \sin \frac{3\theta}{2} \right) d\theta \\ = -\frac{a^3}{24} \left[\frac{2}{5} \cos \frac{5\theta}{2} + 4 \cos \frac{\theta}{2} + 2 \cos^3 \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{a^3}{24} \left(\frac{2}{5} + 4 + 2 \right) = \frac{4a^3}{15}.$$

7.17 En coordonnées polaires,

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{\rho d\rho}{(R^2 - \rho^2)^{1/2}} = -2\pi [(R^2 - \rho^2)^{1/2}]_0^R = 2\pi R.$$

7.18 En coordonnées polaires,

$$I = \int_0^{2\pi} (1 + \sin 2\theta) d\theta \int_0^1 \frac{\rho^3}{\rho^2 + 1} d\rho.$$

$$\int_0^{2\pi} (1 + \sin 2\theta) d\theta = 2\pi$$

$$\int_0^1 \frac{\rho^3}{\rho^2 + 1} d\rho = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t}{t+1} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{t+1}\right) dt = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$$

$$I = \pi(1 - \ln 2).$$

7.19 $I = \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^1 \rho^2(1 - \rho^2)^{1/2} d\rho$. Posons $\rho = \sin \varphi$; alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 \rho^2(1 - \rho^2)^{1/2} d\rho &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2\varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4\varphi) d\varphi = \pi/16 \end{aligned}$$

$$I = \pi/16.$$

7.20 $I = \int \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta$, où $\rho \in [0, 2 \sin \theta]$ et $\theta \in [0, \pi]$.

$$I = \frac{8}{3} \int_0^{\pi} \sin^4 \theta d\theta = \frac{16}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta = \frac{16}{3} \frac{3}{4} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \pi.$$

7.21 $I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \rho^4 d\rho = \frac{32}{5} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^6 \theta \sin^2 \theta d\theta$
 $= \frac{32}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^6 \theta d\theta - \frac{32}{5} \int_0^{\pi/2} \cos^8 \theta d\theta.$

La théorie des intégrales de Wallis (voir tome 3) montre sans nouveau calcul que

$$I = \frac{32}{5} \frac{\pi}{2} \frac{5 \times 3 \times 1}{6 \times 4 \times 2} \left(1 - \frac{7}{8}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

7.22 $I = \iint \frac{\rho}{(4 - \rho^2)^{1/2}} d\rho d\theta$, où $\rho \in [0, 2 \cos \theta]$ et $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$.

$$\int_0^{2 \cos \theta} \frac{\rho}{(4-\rho^2)^{1/2}} d\rho = [-(4-\rho^2)^{1/2}]_0^{2 \cos \theta} = 2(1-|\sin \theta|)$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2(1-|\sin \theta|) d\theta = 2\pi - 2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta + 2 \int_{-\pi/2}^0 \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi - 4. \end{aligned}$$

$$7.23 \quad I = \int_0^1 dy \int_0^y \frac{2xy}{x^2+y^2} dx = \ln 2 \int_0^1 y dy = \frac{\ln 2}{2}.$$

Ou encore, en coordonnées polaires,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta \int_0^{1/\sin \theta} \rho d\rho = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = [\ln \sin \theta]_{\pi/4}^{\pi/2} = -\ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

7.24 En coordonnées polaires, les équations des cercles limites du domaine d'intégration sont $\rho = \cos \theta$ et $\rho = \sin \theta$. D'où

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi/2}^0 \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\cos \theta} \rho^3 d\rho + \int_0^{\pi/4} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_{\sin \theta}^{\cos \theta} \rho^3 d\rho \\ &= \int_{-\pi/2}^0 \sin \theta \cos \theta \frac{\cos^4 \theta}{4} d\theta + \int_0^{\pi/4} \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\cos^4 \theta}{4} - \frac{\sin^4 \theta}{4} \right) d\theta \\ &= \left[-\frac{\cos^6 \theta}{24} \right]_{-\pi/2}^0 + \left[-\frac{\cos^6 \theta}{24} \right]_0^{\pi/4} - \left[\frac{\sin^6 \theta}{24} \right]_0^{\pi/4} = -1/96. \end{aligned}$$

7.25 Par raison de symétrie,

$$I = 2 \iint x \sin x \sin y dx dy = 2 \int_0^\pi x \sin x dx \int_0^\pi \sin y dy.$$

On est ainsi ramené au calcul de deux intégrales simples; on trouve facilement

$$I = 4\pi.$$

$$7.26 \quad I = 2 \int_{-1}^1 x \sin x dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sin y dy.$$

La fonction $y \mapsto \sin y$ étant impaire, son intégrale entre des bornes opposées est nulle; par suite, $I = 0$.

7.27 Intégrons d'abord par rapport à y :

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{\pi/2} \frac{dy}{1+x^2 \operatorname{tg}^2 y}.$$

Posons $t = \operatorname{tg} y$; alors

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+x^2 t^2)}$$

Or,

$$\frac{1}{(1+X^2)(1+x^2 X^2)} = \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{1}{X^2+1} - \frac{1}{X^2+1/x^2} \right).$$

D'où

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+x^2 t^2)} &= \frac{1}{1-x^2} [\operatorname{Arc} \operatorname{tg} t - x \operatorname{Arc} \operatorname{tg} tx]_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

et

$$I = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{\pi}{2} \ln 2.$$

On aurait pu aussi intégrer d'abord par rapport à x :

$$I = \int_0^{\pi/2} dy \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2 \operatorname{tg}^2 y}.$$

Or,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2 \operatorname{tg}^2 y} = \left[\frac{\operatorname{Arc} \operatorname{tg} (x \operatorname{tg} y)}{\operatorname{tg} y} \right]_0^1 = \frac{y}{\operatorname{tg} y}.$$

Donc

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{y}{\operatorname{tg} y} dy.$$

Intégrons par parties :

$$I = [y \ln (\sin y)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \ln (\sin y) dy.$$

La quantité entre crochets apporte une contribution nulle à l'intégrale. Le calcul de la dernière intégrale a été effectué (artificiellement) au tome 3. Mais, compte tenu du premier calcul, nous retrouvons la formule

$$\int_0^{\pi/2} \ln (\sin y) dy = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

Intégrales triples

$$7.28 \quad I = \int_{-1}^1 x \, dx \int_{-2}^2 y \, dy \int_{-3}^3 z \, dz = 0.$$

$$7.29 \quad I = \int_{-1}^1 x^2 \, dx \int_{-2}^2 dy \int_{-3}^3 z \, dz. \text{ Comme } \int_{-3}^3 z \, dz = 0, I = 0.$$

$$7.30 \quad I = \int_1^2 \frac{dx}{x} \int_2^3 \frac{dy}{y} \int_{10}^{11} \frac{dz}{z} = \ln 2 \ln \frac{3}{2} \ln \frac{11}{10}.$$

$$7.31 \quad \int_{-\infty}^2 e^x \, dx = e^2 \quad \int_{-\infty}^4 e^y \, dy = e^4 \quad \int_{-\infty}^{-6} e^z \, dz = e^{-6} \quad I = 1.$$

$$7.32 \quad I_1 = \int_0^1 (x^2 + 1) \, dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$I_2 = \int_{-1}^0 (y-1) \, dy = \left[\frac{(y-1)^2}{2} \right]_{-1}^0 = -\frac{3}{2}$$

$$I_3 = \int_1^2 z^2 \, dz = \left[\frac{z^3}{3} \right]_1^2 = \frac{7}{3} \quad I = I_1 I_2 I_3 = -\frac{14}{3}.$$

$$7.33 \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty} = 1 \quad \int_{-2}^2 y^2 \, dy = \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{16}{3}$$

$$\int_0^1 z \, dz = \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \quad I = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{8}{3}.$$

$$7.34 \quad I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z \, dz$$

$$\int_0^{1-x-y} z \, dz = \frac{1}{2}(1-x-y)^2 \quad \int_0^{1-x} \frac{1}{2}(1-x-y)^2 \, dy = \frac{1}{6}(1-x)^3$$

$$I = \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 \, dx = -\frac{1}{24} [(1-x)^4]_0^1 = \frac{1}{24}.$$

$$7.35 \quad \int_0^{x+y} e^{x+y+z} \, dz = e^{x+y} [e^z]_0^{x+y} = e^{x+y}(e^{x+y} - 1)$$

$$\int_0^{\ln x} (e^{2(x+y)} - e^{x+y}) \, dy = \left[\frac{1}{2} e^{2(x+y)} - e^{x+y} \right]_0^{\ln x}$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - 1) e^{2x} - (x-1) e^x$$

$$\frac{1}{2} \int (x^2 - 1) e^{2x} dx = \frac{1}{4} (x^2 - x - \frac{1}{2}) e^{2x} \quad \int (x-1) e^x dx = (x-2) e^x$$

$$I = -\frac{e^2}{8} + \frac{1}{8} + e - 2 = \frac{1}{8} (-e^2 + 8e - 15).$$

7.36 L'intégrale est le produit de trois intégrales simples :

$$I_1 = \int_0^a 6r^5 dr = a^6$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{4} [\sin^4 \theta]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4}$$

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = -\frac{1}{4} [\cos 2\varphi]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

D'où

$$I = I_1 I_2 I_3 = \frac{a^6}{8}.$$

$$7.37 \quad I = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^{\pi} \sin^3 \varphi d\varphi.$$

En linéarisant $\cos^2 \theta$ et $\sin^3 \varphi$, on obtient

$$I = \pi \frac{a^2}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2\pi a^2}{3}.$$

$$\begin{aligned} 7.38 \quad I &= \int z dz \iint dx dy \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{2}/2} z^3 dz + \pi \int_{\sqrt{2}/2}^1 (1 - z^2) z dz \\ &= \pi \left[\frac{z^4}{4} \right]_0^{\sqrt{2}/2} + \pi \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right]_{\sqrt{2}/2}^1 \\ &= \pi \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right) = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

CHAPITRE 8

Surfaces planes

8.1 Les paraboles se rencontrent aux points dont l'abscisse x vérifie

$$6x - x^2 = x^2 - 2x,$$

soit $x = 0$ et $x = 4$.

$$A = \int_0^4 (8x - 2x^2) dx = \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^4 = 64/3.$$

8.2 $y = \pm x^2 \sqrt{x+4}$ $A = 2 \int_{-4}^0 x^2 \sqrt{x+4} dx.$

Posons $t = x+4$; alors

$$A = 2 \int_0^4 (t-4)^2 \sqrt{t} dt = 2 \left[\frac{2}{7} t^{7/2} - \frac{16}{5} t^{5/2} + \frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^4 = \frac{2^{12}}{105} \approx 39.$$

8.3 L'hyperbole rencontre la droite aux points dont l'abscisse x vérifie

$$x(5-x) = 4,$$

soit $x = 1$ et $x = 4$. L'aire est la différence entre celle du trapèze $ABB'A'$ et celle que limitent l'hyperbole, l'axe Ox et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$. L'aire du trapèze est le produit de la demi-somme des bases par la hauteur. D'où

$$A = \frac{1}{2} (4+1) (4-1) - \frac{1}{2} \int_1^4 y dx = \frac{15}{2} - 2 \int_1^4 \frac{dx}{x} = \frac{15}{2} - 4 \ln 2.$$

8.4 $x dy - y dx = 3a^2 (\sin^2 t \cos^4 t + \sin^4 t \cos^2 t) dt = \frac{3a^2}{4} \sin^2 2t dt$

$$A = \frac{3a^2}{8} \int_0^2 \sin^2 2t dt = \frac{3\pi a^2}{8}.$$

8.5 Paramétrons la première ellipse : $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. Les ellipses se rencontrent sur les bissectrices des axes, en des points tels que $|\operatorname{tg} t| = a/b$. Par raison de symétrie, l'aire cherchée est 8 fois celle de la surface limitée par Ox , la première ellipse et la première bissectrice. D'autre part,

$$x dy - y dx = ab dt.$$

D'où $A = 4ab \int_0^{\operatorname{Arc} \operatorname{tg} a/b} dt = 4ab \operatorname{Arc} \operatorname{tg} a/b.$

8.6 L'aire est la différence de celles du triangle OAB et de la surface limitée par la parabole et les axes de coordonnées. Posons $x = at^2$, $y = a(t-1)^2$. Alors

$$x dy - y dx = 2a^2 t(t-1) dt$$

$$A = \frac{a^2}{2} - a^2 \int_1^0 t(t-1) dt = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} = \frac{a^2}{3}.$$

8.7 Les deux cercles se rencontrent sur les axes de coordonnées.

$$A = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} [(\cos \theta + \sin \theta)^2 - 1] d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta = \frac{a^2}{2}.$$

8.8 Le disque étant contenu dans la partie limitée par la cardioïde, l'aire est la différence des aires limitées par les deux courbes.

$$A = 3\pi a^2/2 - \pi a^2 = a^2/2.$$

$$\begin{aligned} 8.9 \quad A &= \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(1 + \cos \theta)^2 - 1] d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\ &= a^2(2 + \pi/4). \end{aligned}$$

8.10 En coordonnées polaires, l'équation du cercle est $\rho = 2$ et celle de la branche d'hyperbole, $\rho = \sqrt{2/\sin 2\theta}$. Les courbes se rencontrent lorsque $\sqrt{2/\sin 2\theta} = 2$, soit $\sin 2\theta = 1/2$; d'où $\theta_1 = \pi/12$ et $\theta_2 = 5\pi/12$.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\pi/12}^{5\pi/12} \left(4 - \frac{2}{\sin 2\theta} \right) d\theta = \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} [\ln \operatorname{tg} \theta]_{\pi/12}^{5\pi/12} \\ &= \frac{2\pi}{3} + \ln \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \pi/12}{\operatorname{tg} 5\pi/12}}. \end{aligned}$$

$$8.11 \quad A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{2m\theta} d\theta = \frac{a^2}{4m} (\exp 2m\theta_2 - \exp 2m\theta_1).$$

$$8.12 \quad A = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos^2 2\theta}{\cos^2 \theta} d\theta.$$

Comme $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$,

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(4 \cos^2 \theta + \frac{1}{\cos^2 \theta} - 4 \right) d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} [2\theta + \sin 2\theta + \operatorname{tg} \theta - 4\theta]_{-\pi/4}^{\pi/4} = a^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

$$8.13 \quad A = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta} d\theta = \left[-\frac{a^2}{4} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} (\cos 2\theta) \right]_0^{\pi/2} = \frac{a^2}{8}.$$

8.14 En coordonnées polaires,

$$A = \frac{a^2}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{\sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} \right) d\theta.$$

Or,

$$\frac{1 - \sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{(1 - \sin^2 \theta)(1 + \sin^2 \theta)}{\cos^2 \theta} = 1 + \sin^2 \theta = \frac{3}{2} - \frac{\cos 2\theta}{2}.$$

Ainsi,

$$A = \frac{a^2}{2} \left[\frac{3\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 3 \frac{a^2}{4}.$$

8.15 La courbe rencontre la première bissectrice à l'origine et aux points tels que $2x^2 = 2a^2$. Puisque $x \geq 0$, il reste $x = a$.

En coordonnées polaires, $\rho^2 = 2a^2 \operatorname{tg} \theta$.

$$A = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/4} 2 \operatorname{tg} \theta d\theta = -a^2 [\ln \cos \theta]_0^{\pi/4} = \frac{a^2}{2} \ln 2.$$

8.16 La courbe rencontre la première bissectrice à l'origine et aux points tels que $2x^4 = 2a^4$. Puisque $x \geq 0$, il reste $x = a$.

En coordonnées polaires,

$$A = \int_0^{\pi/4} \frac{a^2 \sqrt{2} \operatorname{tg} \theta}{(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)^{1/2}} d\theta.$$

Posons d'abord $\operatorname{tg} \theta = t$; alors

$$A = a^2 \sqrt{2} \int_0^1 \frac{t}{(1+t^4)^{1/2}} dt.$$

Posons ensuite $t^2 = u$; alors

$$A = a^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^1 \frac{du}{(1+u^2)^{1/2}} = a^2 \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Arg sh} 1.$$

8.17 En coordonnées polaires,

$$\rho^2 = \frac{1}{A \cos^2 \theta + 2B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta}.$$

Par raison de symétrie,

$$\mathcal{A} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho^2 d\theta.$$

Posons $t = \operatorname{tg} \theta$; alors

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{Ct^2 + 2Bt + A} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{C\left(t + \frac{B}{C}\right) + A - B^2/C} \\ &= \frac{1}{(AC - B^2)^{1/2}} \left[\operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{Ct + B}{(AC - B^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{(AC - B^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{8.18} \quad \int_0^{\theta_M} \rho^2 d\theta = k \int_0^{\theta_M} (\rho^2 + \rho'^2)^{1/2} d\theta.$$

Dérivons les deux membres, en supprimant l'indice M , désormais inutile :

$$\rho^2 = k(\rho^2 + \rho'^2)^{1/2}.$$

Écartons le cas trivial où $\rho' = 0$ et où $\rho = k$ (cercles de centre 0), et séparons les variables :

$$\frac{d\rho}{(\rho^4/k^2 - \rho^2)^{1/2}} = \pm d\theta.$$

Posons $u = 1/\rho$; alors

$$\frac{du}{(1/k^2 - u^2)^{1/2}} = \pm d\theta.$$

D'où $\operatorname{Arc} \cos uk = \pm(\theta - \theta_0)$

et $u = \frac{1}{k} \cos(\theta - \theta_0)$,

équation de droites ne passant pas par O .

Surfaces de révolution

$$\mathbf{8.19} \quad ds = (1 + 9y^4)^{1/2} dy \quad A = 2\pi \int_0^1 y^3 (1 + 9y^4)^{1/2} dy.$$

Posons $t = y^4$; alors

$$A = \frac{\pi}{2} \int_0^1 (1 + 9t)^{1/2} dt = \frac{\pi}{27} [(1 + 9t)^{3/2}]_0^1 = \frac{\pi}{27} (10\sqrt{10} - 1).$$

8.20 Il s'agit de l'aire de la zone découpée sur la sphère de centre O et de rayon 2 par les plans d'équations $x = 1$ et $x = 2$. D'après le cours,

$$A = 2\pi R h = 4\pi.$$

8.21 La formule du cours donne, pour $h = 3$,

$$A = (8\pi/3) \times 7 = 56\pi/3.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{8.22} \quad A &= 2 \times 2\pi \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \cdot 3a \cos t \sin t \, dt = 12\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t \, dt \\ &= 12\pi a^2/5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{8.23} \quad A &= 2 \times 2\pi \int_0^{\pi/4} a \cos 2\theta \sin \theta \frac{a \, d\theta}{\cos 2\theta} = 4\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \sin \theta \, d\theta \\ &= 4\pi a^2 (1 - \sqrt{2}/2). \end{aligned}$$

8.24 Posons $x = a \cos t$, $y = b \sin t$; alors

$$ds = (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2} dt$$

$$A = 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} a \cos t (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2} dt.$$

Posons $u = \sin t$; alors

$$A = 2\pi a \int_{-1}^1 (b^2 + c^2 u^2)^{1/2} du.$$

Suivant un calcul classique effectué au tome 3,

$$\begin{aligned} A &= 2\pi a \left[\frac{b^2}{2c} \operatorname{Arg sh} \frac{c}{b} u + \frac{b}{2} u \left(1 + \frac{c^2}{b^2} u^2 \right)^{1/2} \right]_{-1}^1 \\ &= 2\pi \left(a^2 + \frac{ab^2}{c} \operatorname{Arg sh} \frac{c}{b} \right) = 2\pi \left(a^2 + \frac{ab^2}{c} \ln \frac{a+c}{b} \right). \end{aligned}$$

8.25 De même,

$$A = 2\pi \int_0^\pi b \sin t (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{1/2} dt.$$

En posant $u = \cos t$, on se ramène à

$$A = 2\pi b \int_{-1}^1 (a^2 - c^2 u^2)^{1/2} du = 2\pi \left(b^2 + \frac{a^2 b}{c} \operatorname{Arc sin} \frac{c}{a} \right).$$

$$\mathbf{8.26} \quad A = 2 \times 2\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \cos t \operatorname{tg} t \, dt = 4\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = 4\pi a^2.$$

CHAPITRE 9

$$9.1 \quad V = \pi \int_0^{ak} x^2 \operatorname{sh} \frac{x}{a} dx, \quad \text{où} \quad k = \operatorname{Arg} \operatorname{ch} \frac{h}{a}.$$

A l'aide de deux intégrations par parties, on voit que

$$\int x^2 \operatorname{sh} \frac{x}{a} dx = ax^2 \operatorname{ch} \frac{x}{a} - 2a^2 x \operatorname{sh} \frac{x}{a} + 2a^3 \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

$$\text{D'où} \quad V = \pi a^3 (k^2 \operatorname{ch} 1 - 2k \operatorname{sh} 1 + 2 \operatorname{ch} 1).$$

$$9.2 \quad V = \pi \int_0^{\pi} e^{2x} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} e^{2x} (1 - \cos 2x) dx \\ = \frac{\pi}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} - e^{2x} \frac{\cos 2x + \sin 2x}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{8} [e^2 - 1].$$

9.3 Nous savons que l'hyperbole rencontre la droite aux points $x = 1$ et $x = 4$ (voir exercice 8.3).

$$V = \pi \int_1^4 \frac{16}{x^2} dx = 16\pi \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 12\pi.$$

9.4 Nous avons déjà paramétré cette parabole (voir exercice 8.6) en posant $x = at^2$, $y = a(t-1)^2$. Le volume V est la différence entre le volume $V_1 = \pi a^3/3$ d'un cône de révolution et

$$V_2 = 2\pi a^3 \int_0^1 (t-1)^4 t dt = 2\pi a^3 \left[\frac{t^6}{6} - \frac{4t^5}{5} + \frac{3t^4}{2} - \frac{4t^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{a^3}{15}.$$

$$\text{D'où} \quad V = \frac{\pi a^3}{3} - \frac{\pi a^3}{15} = \frac{4\pi a^3}{15}.$$

$$9.5 \quad V = \pi \int_0^{\pi^{2/4}} x^2 dz = 2\pi \int_0^1 \frac{x^2}{(1-x^2)^{1/2}} \operatorname{Arc} \sin x dx.$$

Posons $x = \sin t$; alors

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/2} t \sin^2 t dt = 2\pi \int_0^{\pi/2} t \frac{1 - \cos 2t}{2} dt \\ = \frac{\pi^3}{3} - \pi \left[t \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\pi/2} + \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = \frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi}{2}.$$

$$9.6 \quad V = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dz.$$

$$\text{Or,} \quad z = \frac{a+x}{x} (b^2 - x^2)^{1/2} \quad \text{et} \quad dz = -\frac{a(b^2 - x^2) + (a+x)x^2}{x^2(b^2 - x^2)^{1/2}} dx.$$

Donc
$$V = 2\pi \int_0^b \frac{a(b^2 - x^2) + (a+x)x^2}{(b^2 - x^2)^{1/2}} dx.$$

Posons $x = b \sin t$, pour faire disparaître la puissance 1/2; alors

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\pi/2} (ab^2 \cos^2 t + ab^2 \sin^2 t + b^3 \sin^3 t) dt \\ &= 2\pi b^2 \int_0^{\pi/2} (a + b \sin^3 t) dt = \pi^2 ab^2 + 2\pi b^3 \left[-\frac{3 \cos t}{4} + \frac{\cos 3t}{12} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \pi^2 ab^2 + \frac{4}{3} \pi b^3. \end{aligned}$$

9.7
$$V = \frac{1}{c} \int_{-a}^a (a^2 - x^2)^{1/2} dx \int_{-h}^h y dy = \frac{1}{c} \pi \frac{a^2 h^2}{2}.$$

9.8
$$V = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} (x+a)^2 dy = \pi a^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta (2 \cos^2 \theta + 1) d\theta.$$

Posons $2\theta = \varphi$; alors

$$V = \frac{\pi a^3}{8} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \varphi (2 + \cos \varphi) d\varphi = \frac{\pi^2 a^3}{4}.$$

9.9
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 dy = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (ab^2 + b^3 \cos^3 \theta) d\theta \\ &= \pi^2 ab^2 + \frac{4}{3} \pi b^3. \end{aligned}$$

9.10 La section par un plan parallèle à xOy de cote z est une ellipse, d'aire $\pi abz/p$. D'après la formule des trois niveaux,

$$V = \frac{h}{6} \left(\pi ab \frac{h}{p} + 4\pi ab \frac{h}{2p} \right) = \pi ab \frac{h^2}{2p}.$$

(On aurait aussi pu se ramener au cas d'un parabolôide de révolution, en posant $y = (b/a) Y$.)

9.11 Les sections des deux surfaces par un plan parallèle à yOz d'abscisse x sont les ellipses d'équations

$$y^2/b^2 + z^2/c^2 = 2 - x^2/a^2 \quad \text{et} \quad y^2/b^2 + z^2/c^2 - x/a = 0.$$

Ces ellipses se rencontrent si et seulement si elles sont confondues, auquel cas

$$x^2/a^2 + x/a - 2 = 0.$$

La racine $x = -2a$ est évidemment à rejeter; il reste $x = a$.

Ainsi, le volume est limité par le parabolôide lorsque $x \in [0, a]$ et par l'ellipsoïde lorsque $x \in [a, a\sqrt{2}]$.

Les ellipses considérées ci-dessus ont pour aires respectives $\pi bc(2 - x^2/a^2)$ et $\pi bc x/a$. D'après la formule des trois niveaux, appliquée au parabolôide puis à

l'ellipsoïde,

$$\begin{aligned} V &= \pi \frac{abc}{6} (0+1+4\frac{1}{2}) + \pi \frac{abc}{6} (\sqrt{2}-1) \left\{ 1+0+4 \left[2 - \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right] \right\} \\ &= \pi \frac{abc}{6} (8\sqrt{2}-7). \end{aligned}$$

9.12 $V = 2 \iint (a^2 - x^2)^{1/2} dx dy$, le domaine d'intégration étant $x^2 + y^2 \leq a^2$.
D'où, en intégrant par rapport à y puis par rapport à x ,

$$V = 4 \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = 8 \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{16a^3}{3}.$$

9.13 En coordonnées cylindriques,

$$V = 2 \iint (a^2 - \rho^2)^{1/2} \rho d\rho d\theta, \quad \text{où } \rho \in [0, b] \text{ et } \theta \in [0, 2\pi].$$

Posons $t = \rho^2$; alors

$$V = 2\pi \int_0^{b^2} (a^2 - t)^{1/2} dt = -\frac{4\pi}{3} [(a^2 - t)^{3/2}]_0^{b^2} = \frac{4\pi}{3} [a^3 - (a^2 - b^2)^{3/2}].$$

Si $b = a$, on retrouve le volume de la sphère.

9.14 En coordonnées cylindriques,

$$V = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}} \rho^3 d\rho + \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}} \rho^3 d\rho.$$

En changeant θ en $\pi/2 - \theta$, on voit que ces deux intégrales sont égales.

$$V = 2 \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta}} \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^4 \theta}{\cos^8 \theta} d\theta.$$

Posons $t = \tan \theta$; alors

$$V = \frac{1}{2} \int_0^1 (t^4 + t^6) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) = \frac{6}{35}.$$

9.15 En coordonnées cylindriques, $z \in [0, a \cos 2\theta]$ et

$$V = \iint a \cos 2\theta \rho d\rho d\theta, \quad \text{où } \theta \in [-\pi/4, \pi/4] \text{ et } \rho \in [0, a].$$

Donc
$$V = a \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta \int_0^a \rho d\rho = \frac{a^3}{2}.$$

CHAPITRE 10

Ensembles finis

10.1 Puisque G_1 est barycentre des points A , B et C affectés des coefficients α_1 , β_1 et γ_1 ,

$$(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \mathbf{GG}_1 = \alpha_1 \mathbf{GA} + \beta_1 \mathbf{GB} + \gamma_1 \mathbf{GC}.$$

De même,

$$(\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \mathbf{GG}_2 = \alpha_2 \mathbf{GA} + \beta_2 \mathbf{GB} + \gamma_2 \mathbf{GC}.$$

En ajoutant membre à membre, nous obtenons la relation

$$\begin{aligned} (\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1) \mathbf{GG}_1 + (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2) \mathbf{GG}_2 &= \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2) \mathbf{GA} + (\beta_1 + \beta_2) \mathbf{GB} + (\gamma_1 + \gamma_2) \mathbf{GC} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Les nombres $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$ et $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2$ étant implicitement supposés non nuls, les vecteurs \mathbf{GG}_1 et \mathbf{GG}_2 sont colinéaires, ce qui montre que les points G , G_1 et G_2 appartiennent à une même droite.

10.2 Par définition des barycentres,

$$\mathbf{OG}_I = \frac{\sum_{i \in I} \alpha_i \mathbf{OA}_i}{\sum_{i \in I} \alpha_i}$$

et

$$\mathbf{OG}_J = \frac{\sum_{j \in J} \alpha_j \mathbf{OA}_j}{\sum_{j \in J} \alpha_j} = - \frac{\sum_{j \in J} \alpha_j \mathbf{OA}_j}{\sum_{i \in I} \alpha_i}.$$

Il en découle que

$$\mathbf{G}_J \mathbf{G}_I = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{OA}_i}{\sum_{i \in I} \alpha_i}$$

L'assertion en résulte aussitôt.

10.3 Soit O un point du plan. Alors

$$\mathbf{OG} = \frac{\mathbf{OA} + \mathbf{OB} + \mathbf{OC}}{3} \quad \text{et} \quad \mathbf{OG}' = \frac{\mathbf{OA}' + \mathbf{OB}' + \mathbf{OC}'}{3}.$$

Par définition,

$$\mathbf{OA}' = \frac{\alpha \mathbf{OB} + \beta \mathbf{OC}}{3},$$

$$OB' = \frac{\alpha OC + \beta OA}{3},$$

$$OC' = \frac{\alpha OA + \beta OB}{3}.$$

D'où

$$OG' = \frac{(\alpha + \beta) OA + (\alpha + \beta) OB + (\alpha + \beta) OC}{3(\alpha + \beta)} = OG,$$

ce qu'il fallait prouver.

10.4 Prenons l'origine en A . Alors

$$AC' = \frac{\beta AB}{\alpha + \beta}, \quad AA' = \frac{\beta' AB + \gamma' AC}{\beta' + \gamma'}, \quad AB' = \frac{\gamma'' AC}{\gamma'' + \alpha''}.$$

Les points A' , B' et C' sont alignés si et seulement si les vecteurs $C'A'$ et $C'B'$ sont colinéaires. Or,

$$C'A' = \frac{\beta' AB + \gamma' AC}{\beta' + \gamma'} - \frac{\beta AB}{\alpha + \beta}, \quad C'B' = \frac{\gamma'' AC}{\gamma'' + \alpha''} - \frac{\beta AB}{\alpha + \beta}.$$

Les vecteurs AB et AC étant linéairement indépendants, il faut et il suffit que les composantes de $C'A'$ et de $C'B'$ sur AB et AC soient proportionnelles, c'est-à-dire

$$\left(\frac{\beta'}{\beta' + \gamma'} - \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right) \frac{\gamma''}{\gamma'' + \alpha''} = - \frac{\beta \gamma'}{(\alpha + \beta)(\beta' + \gamma')}.$$

On obtient alors la condition annoncée en réduisant au même dénominateur.

10.5 a) Soit G le barycentre des points A , B et C affectés des coefficients 2, 3 et -1 . Alors

$$2MA + 3MB - MC = 4MG.$$

Il existe un point M et un seul répondant à la question, à savoir le point défini par la relation

$$MG = \frac{1}{4}k.$$

b) L'application $M \mapsto 2MA + 3MB - 5MC$ est constante. Si $k = 3AB - 5AC$, l'ensemble cherché est le plan tout entier; dans le cas contraire, cet ensemble est vide.

10.6 Soit G le barycentre des points A et B affectés des coefficients 2 et -3 . Alors

$$2\|MA\|^2 - 3\|MB\|^2 = -\|MG\|^2 + 2\|GA\|^2 - 3\|GB\|^2.$$

L'ensemble cherché est donc celui des points M tels que

$$\|MG\|^2 = 2\|GA\|^2 - 3\|GB\|^2 - \alpha.$$

Si $\alpha \leq 2\|GA\|^2 - 3\|GB\|^2$, l'ensemble est le cercle de centre G et de rayon $\sqrt{2\|GA\|^2 - 3\|GB\|^2 - \alpha}$. Dans le cas contraire, l'ensemble est vide.

10.7 a) L'angle de la tangente avec Ox est $\alpha = \theta + V$. D'où

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\theta + V) = m.$$

Or,
$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = -\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = -\cot \frac{\theta}{2}.$$
 D'où

$$V = \pi/2 + \theta/2 + k\pi \quad \alpha = 3\theta/2 + \pi/2 + k\pi$$

et

$$\theta_k = \frac{2}{3} \left(\alpha - \frac{\pi}{2} - k\pi \right),$$

ce qui montre qu'il existe trois points de contact, correspondant à $k = 0, k = 1$ et $k = 2$.

b) Posons $z = x + jy = \rho e^{j\theta}$. Alors

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{1}{3}(z_0 + z_1 + z_2) \\ &= \frac{a}{3} [(1 + \cos \theta_0) e^{j\theta_0} + (1 + \cos \theta_1) e^{j\theta_1} + (1 + \cos \theta_2) e^{j\theta_2}]. \end{aligned}$$

Comme $e^{j\theta_1} = \omega e^{j\theta_2}$ et que $e^{j\theta_0} = \omega^2 e^{j\theta_2}$,

$$e^{j\theta_0} + e^{j\theta_1} + e^{j\theta_2} = (1 + \omega + \omega^2) e^{j\theta_2} = 0.$$

De même, $\cos \theta e^{j\theta} = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2} e^{j\theta} = \frac{1}{2}(e^{2j\theta} + 1)$; d'où

$$\cos \theta_0 e^{j\theta_0} + \cos \theta_1 e^{j\theta_1} + \cos \theta_2 e^{j\theta_2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\omega^4 + \omega^2 + 1) e^{2j\theta_2} = \frac{3}{2}$$

(car $\omega^4 = \omega$). Finalement,

$$z_G = \frac{a}{3} \cdot \frac{3}{2}, \quad \text{soit } x_G = \frac{a}{2} \quad \text{et } y_G = 0.$$

Le point G est donc indépendant de m .

Courbes

10.8 $ds = 3a \sin t \cos t dt \quad l = 3a/2$

$$x_G = 2a \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin t dt = \frac{2a}{5} [\sin^5 t]_0^{\pi/2} = \frac{2a}{5}.$$

Par raison de symétrie, $y_G = x_G$.

10.9 Soit l'arc $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, $t \in [-\alpha, \alpha]$. Alors $y_G = 0$, $l = 2R\alpha$ et

$$x_G = \frac{R}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos t \, dt = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

$$10.10 \quad X_T = x - \frac{y}{y'} \quad X_G = \frac{\int_0^x t \sqrt{1+y'^2(t)} \, dt}{\int_0^x \sqrt{1+y'^2(t)} \, dt}.$$

D'où

$$\int_0^x t \sqrt{1+y'^2(t)} \, dt = \left(x - \frac{y}{y'}\right) \int_0^x \sqrt{1+y'^2(t)} \, dt.$$

Dérivons, pour faire disparaître l'une des intégrales :

$$x \sqrt{1+y'^2(x)} = \left(x - \frac{y}{y'}\right) \sqrt{1+y'^2(x)} + \frac{yy''}{y'^2} \int_0^x \sqrt{1+y'^2(t)} \, dt,$$

soit

$$\int_0^x \sqrt{1+y'^2(t)} \, dt = \frac{y'}{y''} \sqrt{1+y'^2(x)}.$$

Dérivons encore une fois, pour faire disparaître l'autre intégrale :

$$\sqrt{1+y'^2(x)} = \sqrt{1+y'^2(x)} - \frac{u'y'''}{y'^2} \sqrt{1+y'^2(x)} + \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2(x)}},$$

ou encore

$$\frac{y'y''}{1+y'^2} = \frac{y'''}{y''}.$$

C'est une équation différentielle à variables séparées; il vient aussitôt

$$y'^2 = k^2(1+y'^2), \quad \text{ou} \quad \frac{y'''}{\sqrt{1+y'^2}} = k.$$

Ainsi,

$$\text{Arg sh } y' = k(x-a), \quad \text{ou} \quad y' = \text{sh } k(x-a).$$

Puisque la courbe est tangente en O à Ox , $a=0$, et

$$y = \frac{1}{k} (\text{ch } kx - 1),$$

équation d'une chaînette. (Si $k=0$, le point T est indéterminé.)

Surfaces planes

$$10.11 \quad A = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \quad x_G = \frac{3}{8} \int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{2} \quad y_G = \frac{3}{8} \int_0^2 \frac{x^4}{2} dx = \frac{6}{5}$$

10.12 Les courbes se rencontrent aux points dont l'abscisse vérifie

$$x^4 = 16(4x).$$

On obtient $x = 0$ et $x = 4$.

$$A = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \left[\frac{4}{3} x^{3/2} - \frac{x^3}{12} \right]_0^4 = \frac{16}{3}$$

$$x_G = \frac{1}{4} \int_0^4 x \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \frac{3}{16} \left[\frac{4}{5} x^{5/2} - \frac{x^4}{16} \right]_0^4 = \frac{3}{16} \cdot \frac{48}{5} = \frac{9}{5}$$

Par raison de symétrie, $y_G = x_G$.

$$10.13 \quad \text{Nous savons que } l = \int_0^{\pi/2} 3a \sin t \cos t dt = 3a.$$

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{3a} \int_0^{\pi/2} (a \cos^3 t) (3a \sin t \cos t) dt = a \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \sin t dt \\ &= -\frac{a}{5} [\cos^5 t]_0^{\pi/2} = \frac{a}{5}. \end{aligned}$$

Par raison de symétrie, $y_G = x_G$.

10.14 On peut bien entendu faire un calcul direct : $A = \pi(R^2/4)$ et, en coordonnées polaires,

$$x_G = \frac{1}{A} \iint \rho^2 \cos \theta d\rho d\theta = \frac{1}{A} \int_0^R \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{4R}{3\pi}.$$

Par raison de symétrie, $y_G = x_G$.

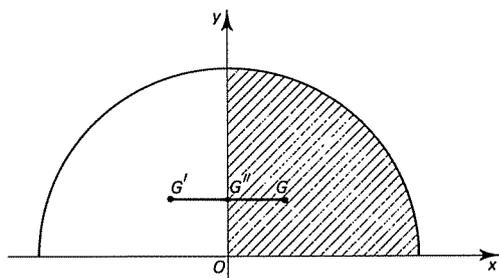


FIG. 10.1

On peut aussi utiliser la remarque suivante : soit G' le centre d'inertie du quart de disque symétrique par rapport à Oy .

Le milieu G'' du segment $[G, G']$ est le centre d'inertie du demi-disque. Or,

$$y_{G''} = \frac{1}{2}(y_G + y_{G'}) \quad \text{et} \quad y_{G'} = y_G.$$

Nous avons vu dans le cours que $y_{G''} = 4R/3\pi$; donc, sans nouveau calcul, $y_G = 4R/3\pi$.

10.15 Soient a et b les demi-axes de l'ellipse. En posant $x/a = X/R$ et $y/b = Y/R$, nous nous ramenons au cas du cercle; or, nous venons de voir que $x_G = y_G = 4R/3\pi$. Donc

$$x_G = 4a/3\pi \quad y_G = 4b/3\pi.$$

10.16

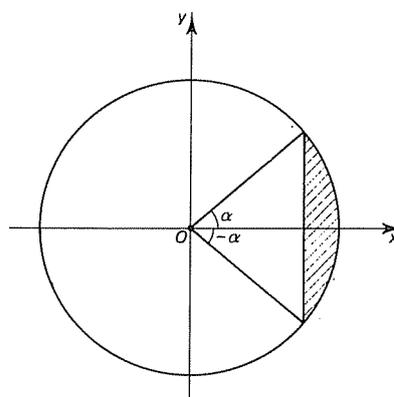


FIG. 10.2

$$A = - \int y \, dx = R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \sin^2 t \, dt = R^2 \left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right)$$

$$x_G = \frac{1}{A} \int xy \, dx = \frac{R^3}{A} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos t \sin^2 t \, dt = \frac{2R^3}{3A} \sin^3 \alpha \quad y_G = 0.$$

On vérifie que si $\alpha = \pi/2$, $x_G = 4R/3$ et que si $\alpha = \pi$, $x_G = 0$.

10.17 Le centre d'inertie G est le barycentre des centres d'inertie G' et G'' des surfaces limitées par le cercle et l'ellipse, affectés des coefficients $\frac{1}{2}\pi a^2$ et $-\frac{1}{2}\pi ab$. Or, $y_{G'} = 4a/3$ et $y_{G''} = 4b/3$; donc

$$y_G = \frac{4}{3} \frac{a^2 - b^2}{a - b} = \frac{4}{3} (a + b).$$

Par raison de symétrie, $x_G = 0$.

10.18 Rappelons que $A = a^2(2 - \pi/2)$. D'autre part, $y_G = 0$. Enfin,

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{A} \iint x \, dx \, dy = \frac{1}{A} \iint \rho \cos \theta \rho \, d\rho \, d\theta = \frac{a^3}{3A} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \rho^3 \cos \theta \, d\theta \\ &= \frac{a^3}{3A} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(8 \cos^3 \theta - 12 \cos \theta + \frac{6}{\cos \theta} - \frac{1}{\cos^3 \theta} \right) \cos \theta \, d\theta \\ &= \frac{a^3}{3A} \left[\frac{1}{4} \sin 4\theta - \sin 2\theta + 3\theta - \operatorname{tg} \theta \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= \frac{a}{3} \frac{3\pi - 8}{4 - \pi} \end{aligned}$$

10.19 Rappelons que $A = a^2/2$. D'autre part, $y_G = 0$. Enfin,

$$x_G = \frac{1}{A} \iint x \, dx \, dy = \frac{a^3}{3A} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \rho^3 \cos \theta \, d\theta.$$

Posons d'abord $\sin \theta = t$; alors

$$I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\cos 2\theta)^{3/2} \cos \theta \, d\theta = \int_{-\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}/2} (1 - 2t^2)^{3/2} \, dt.$$

Posons maintenant $t = \frac{1}{2} \sin u$; alors $1 - 2t^2 = \cos^2 u$ et

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^4 u \, du = \frac{1}{8\sqrt{2}} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (\cos 4u + 4 \cos 2u + 3) \, du \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \left[\frac{\sin 4u}{4} + 2 \sin 2u + 3u \right]_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{9\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$x_G = \frac{a}{6\sqrt{2}} \left(\frac{9\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{2} \right).$$

10.20 Rappelons que si $\rho = a e^{m\theta}$,

$$A = \frac{a^2}{4m} (\exp 2m\theta_2 - \exp 2m\theta_1).$$

$$x_G = \frac{a^3}{3A} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{3m\theta} \cos \theta \, d\theta \quad y_G = \frac{a^3}{3A} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{3m\theta} \sin \theta \, d\theta.$$

Introduisons $z_G = x_G + jy_G$:

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{a^3}{3A} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \exp(3m\theta + j\theta) d\theta \\ &= \frac{a^3}{3A} \frac{1}{3m + j} [\exp(3mj\theta_2 + \theta_2) - \exp(3m\theta_1 + j\theta_1)]. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à séparer les parties réelle et imaginaire pour obtenir x_G et y_G .

10.21 Soient O et O' les centres des deux cercles. Le centre d'inertie du disque entaillé peut être considéré comme le centre d'inertie du disque de centre O et de rayon R , ayant pour densité 1 sur la partie non entaillée et la densité $0 = -1 + 1$ sur la partie entaillée; c'est donc le barycentre des points O et O' affectés des coefficients πR^2 et $-\pi R^2/4$, ou encore 1 et $-1/4$. Ainsi, le point G est défini par

$$OG = -\frac{1}{3} OO'.$$

10.22 La condition de l'énoncé se traduit par

$$\int_0^{x_M} xy dx = kx_M \int_0^{x_M} y dx.$$

Dérivons les deux membres :

$$x_M y_M = kx_M y_M + k \int_0^{x_M} y dx.$$

Dérivons encore une fois, en supprimant l'indice M , désormais inutile :

$$xy' + y = kxy' + ky + ky.$$

Séparons les variables :

$$\frac{dy}{y} = \frac{2k-1}{1-k} \frac{dx}{x}.$$

Ainsi,

$$y = C|x|^{(2k-1)/(1-k)}.$$

Les cas particuliers correspondent respectivement à $y = C|x|$, $y = C\sqrt{|x|}$ et $y = Cx^2$.

Surfaces de révolution

10.23 Nous savons que $A = \pi Rl$, où l est la longueur de la génératrice.

$$x_G = y_G = 0.$$

$$z_G = \frac{1}{A} \int_0^h 2\pi xz \sqrt{1 + \frac{1}{m^2}} dz = \frac{2\pi}{A} \frac{h^3}{3m^2} \sqrt{1+m^2} = \frac{2h}{3},$$

l'équation d'une génératrice étant $z = mx$.

10.24 Soit le paraboloidé d'équation $x^2 + y^2 = 2pz$, engendré par la parabole d'équation $x^2 = 2pz$ en tournant autour de son axe. Alors

$$x_G = y_G = 0$$

$$z_G = \frac{\int xz \, ds}{\int x \, ds}, \quad \text{où } ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} \, dx.$$

D'où

$$\begin{aligned} \int x \, ds &= \int_0^p x \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{p^2} \sqrt{1 + \frac{t}{p^2}} \, dt = \frac{p^2}{3} \left[\left(1 + \frac{t}{p^2}\right)^{3/2} \right]_0^{p^2} \\ &= \frac{p^2}{3} (2\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int xz \, ds &= \frac{1}{2p} \int_0^p x^3 \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} \, dx = \frac{1}{4p} \int_0^{p^2} t \sqrt{1 + \frac{t}{p^2}} \, dt \\ &= \frac{p}{4} \int_0^{p^2} \left[\left(\frac{t}{p^2} + 1\right) \sqrt{1 + \frac{t}{p^2}} - \sqrt{1 + \frac{t}{p^2}} \right] dt \\ &= \frac{p^3}{2} \left[\frac{1}{5} (4\sqrt{2} - 1) - \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1) \right] = \frac{p^3}{15} (\sqrt{2} + 1) \end{aligned}$$

$$z_G = \frac{\sqrt{2} + 1}{5(2\sqrt{2} - 1)} p.$$

$$\mathbf{10.25} \quad x_G = y_G = 0 \quad z_G = \frac{\int xz \, ds}{\int x \, ds}$$

où $x = R \cos \varphi$, $z = R \sin \varphi$, $ds = R \, d\varphi$, $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$.

$$\begin{aligned} z_G &= R \frac{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi}{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi \, d\varphi} = \frac{R}{2} \frac{\sin^2 \varphi_2 - \sin^2 \varphi_1}{\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1} = \frac{R}{2} (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2) \\ &= \frac{1}{2} (z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Le centre d'inertie est le milieu du segment joignant les centres des cercles limitant la zone.

Volumes

10.26 Nous savons que le centre d'inertie du volume limité par un tétraèdre n'est autre que le centre de gravité des quatre sommets. Or, ceux-ci ont pour coordonnées $(0, 0, 0)$, $(6, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$ et $(0, 0, 2)$. D'où

$$x_G = 3/2, \quad y_G = 3/4, \quad z_G = 1/4.$$

10.27 Prenons Oz pour axe de révolution et O au sommet du cône. L'équation d'une méridienne est $z = mx$, ou encore $z = hx/R$.

$$V = \frac{1}{3}\pi h^3/m^2 = \frac{1}{3}\pi hR^2$$

$$x_G = y_G = 0 \quad z_G = \frac{1}{V} \int_0^h \pi x^2 z \, dz = \frac{1}{V} \frac{h^4}{4m^2} = \frac{3h}{4}.$$

10.28 Par raison de symétrie, $x_G = y_G = 0$.

$$V = \pi \int_0^2 x^2 \, dz = \pi \int_0^2 (4-z^2)^2 \, dz = \frac{256\pi}{15}$$

$$z_G = \frac{1}{V} \pi \int_0^2 x^2 z \, dz = \frac{15}{256} \int_0^2 (4-z^2)^2 z \, dz = \frac{5}{8}.$$

10.29 Soit l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

$$V = \frac{4}{3}\pi abc$$

$$x_G = \frac{1}{V} \iiint x \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{V} \int x \, dx \iint dy \, dz = \frac{1}{V} \int x A(x) \, dx.$$

L'aire d'une section par un plan parallèle à Oz est $\frac{\pi}{4} bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$. D'où

$$x_G = \frac{\pi bc}{4V} \int_0^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) x \, dx = \frac{\pi bc}{4V} \frac{a^2}{4} = \frac{3a}{8}.$$

De même, $y_G = 3b/8$ et $z_G = 3c/8$.

On aurait pu aussi se ramener par affinité au cas où $b = c$ (voir exercice 10.15) et utiliser le résultat du cours sur le centre d'inertie d'un demi-ellipsoïde de révolution en décomposant celui-ci en quatre (voir exercice 10.14).

10.30 Rappelons que $V = (\pi r^2)(2\pi R)$.

$$x_G = y_G = 0.$$

$$\begin{aligned}
 z_G &= \frac{1}{V} \int z A(z) dz \\
 &= \frac{1}{V} \int_0^{\pi/2} \pi [(R+r \cos t)^2 - (R-r \cos t)^2] r^2 \cos t \sin t dt \\
 &= \frac{4\pi}{V} \int_0^{\pi/2} Rr^3 \cos^2 t \sin t dt = \frac{2r}{3}.
 \end{aligned}$$

10.31 Le centre d'inertie G est le barycentre des centres d'inertie G' et G'' du tronc de cône et de la demi-boule, affectés des coefficients $V' = \frac{1}{3}\pi h R^2$ et $V'' = \frac{2}{3}\pi R^3$. Or, d'après l'exercice 10.27, $z_{G'} = 3h/4$ et, d'après le cours, $z_{G''} = h + 3R/8$. Donc

$$z_G = \frac{\frac{1}{3}\pi h R^2 \frac{3h}{4} + \frac{2}{3}\pi R^3 \left(h + \frac{3R}{8}\right)}{\frac{1}{3}\pi h R^2 + \frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3h^2 + 8Rh + 3R^2}{4(h + 2R)}.$$

Si $h = 0$, on retrouve $x_G = 3R/8$.

10.32 $M = \int_0^R A(z) \alpha \frac{z}{R} dz$, où $A(z) = \pi(R^2 - z^2)$. D'où

$$M = \alpha \frac{\pi}{R} \int_0^R (R^2 - z^2) z dz = \alpha \frac{R^3}{4}.$$

$$x_G = y_G = 0 \quad z_G = \frac{1}{M} \int_0^R A(z) \alpha \frac{z}{R} z dz = \frac{8R}{45}.$$

10.33 $M = \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) e^{-z/h} dz$

$$= \pi h [(z^2 + 2hz + h^2 - R^2) e^{-z/h}]_{-R}^R.$$

$$\begin{aligned}
 z_G &= \frac{1}{M} \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) z e^{-z/h} dz \\
 &= \frac{\pi h}{M} [(z^3 + 3hz^2 + 6h^2z - R^2z + 6h^3 - hR^2) e^{-z/h}]_{-R}^R.
 \end{aligned}$$

CHAPITRE 11

Courbes

$$11.1 \quad ds = \operatorname{ch} x/a \, dx \quad I_{Ox} = \int_{-a}^a a^2 \operatorname{ch}^3 x/a \, dx.$$

On linéarise :

$$\operatorname{ch}^3 \frac{x}{a} = \frac{1}{4} \left(\operatorname{ch} \frac{3x}{a} + 3 \operatorname{ch} \frac{x}{a} \right).$$

D'où

$$\begin{aligned} I_{Ox} &= \frac{a^2}{4} \left[\frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 \frac{x}{a} + 3 \operatorname{sh} \frac{x}{a} \right]_{-a}^a = \frac{a^3}{4} \left[\frac{1}{3} \operatorname{sh}^3 \frac{x}{a} + 3 \operatorname{sh} \frac{x}{a} \right]_{-a}^a \\ &= \frac{a^3}{2} \left(\frac{1}{3} \operatorname{sh} 3 + 3 \operatorname{sh} 1 \right) = 2 a^3 \operatorname{sh} 1 \left(1 + \frac{\operatorname{sh}^2 1}{3} \right). \end{aligned}$$

Si la densité linéique est 1, la masse M est égale à la longueur, soit $M = 2a \operatorname{sh} 1$.
Donc

$$I_{Ox} = Ma^2 (1 + \operatorname{sh}^2 1/3).$$

$$11.2 \quad ds = \sqrt{1 + 4e^{-2x}} \, dx \quad I_{Ox} = 4 \int_0^{+\infty} e^{-2x} \sqrt{1 + 4e^{-2x}} \, dx.$$

On pose $t = e^{-2x}$; alors

$$I_{Ox} = 2 \int_0^1 \sqrt{1 + 4t} \, dt = \frac{1}{3} [(1 + 4t)^{3/2}]_0^1 = \frac{5^{3/2} - 1}{3}.$$

11.3 $ds = 3a \sin t \cos t \, dt$, si $t \in [0, \pi/2]$. On multiplie par 4 le moment d'inertie correspondant à cet intervalle :

$$I_{Ox} = 4 \int_0^{\pi/2} 3a^3 \sin^7 t \cos t \, dt = \frac{3}{2} a^3 [\sin^8 t]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2} a^3.$$

Comme la longueur de l'astroïde est $6a$,

$$I_{Ox} = \frac{1}{4} Ma^2.$$

Surfaces

Nous appliquons la formule

$$I_{Ox} = \iint y^2 \, dx \, dy = \int dx \int y^2 \, dy = \int \frac{y^3}{3} \, dy.$$

$$\begin{aligned}
 11.4 \quad I_{Ox} &= \int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{1} dx = \frac{1}{12} \int_0^\pi (3 \sin x - \sin 3x) dx \\
 &= \frac{1}{12} \left[-3 \cos x + \frac{\cos 3x}{3} \right]_0^\pi = 4/9.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11.5 \quad I_{Ox} &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x + 1 - 1) dx \\
 &= \frac{1}{6} [\operatorname{tg}^2 x + \ln \cos x]_0^{\pi/4} = \frac{1}{6} (1 - \ln 2).
 \end{aligned}$$

$$11.6 \quad I_{Ox} = a^3 \int_{-a}^a \operatorname{ch}^3 \frac{x}{a} dx.$$

Le calcul effectué dans l'exercice 11.1 montre que

$$I_{Ox} = \frac{a^4}{6} (\frac{1}{3} \operatorname{sh} 3 + 3 \operatorname{sh} 1).$$

$$\begin{aligned}
 11.7 \quad I_{Ox} &= \frac{1}{3} \int_{-1/2}^{1/2} (1 - 4x^2)^3 dx = \frac{1}{3} \int_{-1/2}^{1/2} (1 - 12x^2 + 48x^4 - 64x^6) dx \\
 &= \frac{1}{3} \left[x - 4x^3 + \frac{48}{5} x^5 - \frac{64}{7} x^7 \right]_{-1/2}^{1/2} = 16/105.
 \end{aligned}$$

$$11.8 \quad I_{Ox} = \frac{1}{3} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = -\frac{1}{6} \left[\frac{1}{x^2} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{6}.$$

$$11.9 \quad I_{Ox} = \frac{8}{3} \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx = \frac{8}{9}.$$

11.10 Intégrons d'abord par rapport à x , qui varie entre $(y^2 - 4)/4$ et $(4 - y^2)/4$; nous obtenons ainsi

$$I_{Ox} = \int_{-2}^2 y^2 \frac{4 - y^2}{2} dy = \frac{64}{15}.$$

11.11 Les courbes se rencontrent lorsque $2x^3 = 8x$, c'est-à-dire lorsque $x = 0$ et $x = 2$.

$$I_{Ox} = \int_0^2 x^2 (2\sqrt{2} x^{1/2} - \sqrt{2} x^{3/2}) dx = \sqrt{2} \left[\frac{4}{7} x^{7/2} - \frac{2}{9} x^{9/2} \right]_0^2 = 128/63.$$

$$I_{Oy} = \frac{1}{3} \int_0^2 (16\sqrt{2} x^{3/2} - 2\sqrt{2} x^{9/2}) dx = 512/55.$$

$$11.12 \quad I_O = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \rho^3 d\theta = \frac{a^3}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^3 2\theta d\theta = 3a^4/64.$$

11.13 Le moment d'inertie cherché est la différence des moments d'inertie des deux disques.

Pour le deuxième disque, de rayon 1, $I_{Ox} = \pi/4$, $I_{Oy} = \pi + \pi/4$.

$$I_O = I_{Ox} + I_{Oy} = 3\pi/2.$$

Pour le premier disque, de rayon $3/2$, ces valeurs sont à multiplier par $(3/2)^4$.
Finalement,

$$I_O = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{81}{16} - 1 \right) = \frac{195\pi}{32}.$$

11.14 D'après le cours, le moment d'inertie par rapport à un côté est

$$I_D = bh^3/12 = 3\sqrt{3}a^4/96.$$

a) Le théorème de Huygens montre que

$$I_{D'} = I_D - M(a\sqrt{3}/6)^2 = 3\sqrt{3}a^4/96 - \sqrt{3}a^4/48 = \sqrt{3}a^4/96.$$

b) Toujours d'après le théorème de Huygens,

$$I_{D''} = I_{D'} + M(a\sqrt{3}/3)^2 = \sqrt{3}a^4/96 + \sqrt{3}a^4/12 = 3\sqrt{3}a^4/32.$$

Volumes

11.15

a) Le moment d'inertie par rapport à l'axe A est la différence entre les moments d'inertie des cylindres de rayons R et r :

$$I_A = \frac{h}{2} (R^4 - r^4) = \frac{h}{2} (R^2 - r^2) (R^2 + r^2) = \frac{M}{2} (R^2 + r^2).$$

b) D'après le théorème de Huygens,

$$I_{A'} = I_A + Mr^2 = \frac{M}{2} (R^2 + 3r^2).$$

c) De même,

$$I_{A''} = I_A + MR^2 = \frac{M}{2} (3R^2 + r^2).$$

$$11.16 \quad I_{Oz} = \frac{\pi}{2} \int_0^2 x^4 dz = \frac{\pi}{2} \int_0^2 z^2 dz = \frac{\pi}{2} \left[\frac{z^3}{3} \right]_0^2 = \frac{4\pi}{3}.$$

11.17

a) Soient Oz l'axe de révolution, O le sommet et $z = mx$ l'équation d'une génératrice. Alors

$$I_{Oz} = \int_0^h \pi \frac{x^4}{2} dz = \frac{\pi}{2m^4} \int_0^h z^4 dz = \frac{h^5}{10m^4} = \frac{3Mh^2}{10m^2}.$$

b) Pour calculer I_{Ox} , on applique le théorème de Huygens à la partie comprise entre les plans de cotes z et $z + \Delta z$. Le moment d'inertie de cette partie par rapport à Ox est $\pi \frac{x^4}{4} \Delta z + \pi x^2 z^2 \Delta z$. D'où

$$\begin{aligned} I_{Ox} &= \pi \int_0^h \left(\frac{x^4}{4} + x^2 z^2 \right) dz = \pi \int_0^h \left(\frac{1}{4m^4} + \frac{1}{m^2} \right) z^4 dz = \frac{\pi}{5} h^5 \frac{4m^2 + 1}{4m^4} \\ &= \frac{3Mh^2}{20m^2} (4m^2 + 1). \end{aligned}$$

Par raison de symétrie, $I_{Oy} = I_{Ox}$.

$$c) \quad I_O = I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz} = \frac{3Mh^2}{5m^2} (1 + 2m^2).$$

11.18

a) Représentons la section méridienne par

$$\begin{cases} x = R + r \cos t \\ z = r \sin t. \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} I_{Oz} &= \frac{\pi}{2} \int_{-r}^r [(R + r \cos t)^4 - (R - r \cos t)^4] dz \\ &= 4\pi r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R^3 r \cos t + Rr^3 \cos^3 t) \cos t dt \\ &= 4\pi Rr^2 \left(\frac{\pi}{2} R^2 + \frac{3\pi}{8} r^2 \right) = 2\pi^2 Rr^2 \left(R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right) = M \left(R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right). \end{aligned}$$

b) On calcule I_{Ox} comme dans l'exercice précédent. Le moment d'inertie par rapport à Ox de la partie comprise entre les plans de cotes z et $z + \Delta z$ est

$$\begin{aligned} &\frac{\pi}{4} [(R + r \cos t)^4 - (R - r \cos t)^4] \Delta z + \\ &+ \pi [(R + r \cos t)^2 - (R - r \cos t)^2] z^2 \Delta z. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} I_{Ox} &= 2\pi r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (R^3 r \cos t + Rr^3 \cos^3 t) \cos t dt + 4\pi r^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} Rr \cos^2 t \sin^2 t dt \\ &= \frac{\pi^2}{4} (4r^2 R^3 + 5r^4 R) = \frac{M}{8} (4R^2 + 5r^2). \end{aligned}$$

INDEX TERMINOLOGIQUE

A

AIRE, 85, 97.
ARCHIMÈDE (spirale d'), 40.
ASTROÏDE, 15.
ASYMPTOTE, 8.
 (cercle), 32.
 (point), 32.
ASYMPTOTIQUE (direction), 8.

B

BARYCENTRE, 127.
BERNOULLI (lemniscate de), 40.

C

CARDIOÏDE, 37.
CHAÎNETTE, 47.
CIRCULATION, 66.
CISSOÏDE, 38.
COURBURE
 (centre de), 54.
 (rayon de), 50.
CURVILIGNE
 (abscisse), 49.
 (intégrale), 66.
CYCLOÏDE, 20.
CYLINDRE, 113.

D

DESCARTES (folium de), 18.
DOUBLE
 (intégrale), 82.
 (point), 9.

E

ENTROPIE, 79.

G

GIRATION (rayon de), 145.
GRAVITÉ (centre de), 127.
GREEN-RIEMANN (formule de),
 89.
GULDIN
 (premier théorème de), 134.
 (second théorème de), 138.

H

HUYGENS (théorème de), 146.
HYPERBOLIQUE (spirale), 41.

I

INERTIE
 (centre d'), 127, 130, 135.
 (moment d'), 144.
INFINIE (branche), 8.
INFLEXION (point d'), 6.
INTÉGRABLE (fonction), 82.
INTÉGRANT (facteur), 76.

L

LOGARITHMIQUE (spirale), 41.
LONGUEUR
 d'un arc paramétré, 44.
 d'une ligne polygonale, 44.

M

MASSE, 85, 93.
MODULE d'un quadrillage, 82.
MOYENNE (valeur), 84.

N

NIVEAUX (formule des trois), 120.

O

OSCULATEUR (cercle), 54.

P

PARABOLIQUE (branche), 9.

PARAMÈTRE, 6.

d'une conique, 28.

PARAMÉTRÉ (arc), 6.

Q

QUADRILLAGE, 82.

QUARRABLE (partie), 85.

R

REBROUSSEMENT (point de), 7.

RECTIFIABLE (arc paramétré), 44.

RIEMANN (somme de), 82.

S

SEMI-CUBIQUE (parabole), 17.

SPIRALE, 40.

(branche), 32.

STROPHOÏDE, 39.

T

TANGENTE, 6.

TORE, 107.

TRACTRICE, 16.

TRIPLE (intégrale), 92.

V

VOLUME, 85, 93, 113.

SOMMAIRE DES TOMES 1 ET 2

TOME 1

Algèbre

Les ensembles.
Structures élémentaires.
Les nombres réels.
Les nombres complexes.
Introduction à l'algèbre linéaire.
Espaces vectoriels de dimension finie.
Les matrices.
Systèmes d'équations linéaires.
Polynômes et fractions rationnelles.
Diagonalisation des matrices carrées.
Applications du calcul matriciel aux quadripôles électriques.
Géométrie euclidienne.

TOME 2

Fonctions usuelles

Fonctions numériques.
Les dérivées.
Les différentielles.
Applications des dérivées à l'étude de la variation des fonctions.
Recherche des maximums et des minimums pour des applications pratiques.
Etude pratique de la variation des fonctions.
Les intégrales.
Fonctions logarithmes et exponentielles.

SOMMAIRE DES TOMES 3 ET 4

TOME 3

Calcul intégral et séries

Procédés pratiques de calcul des primitives.
Intégrales trigonométriques.
Intégrales abéliennes.
Développements limités.
Etude des formes indéterminées.
Intégrales généralisées.
Séries numériques.
Séries entières.
Séries de Fourier.
Transformation de Fourier.

TOME 4

Equations différentielles

Fonctions de plusieurs variables.
Différentielle d'une fonction de plusieurs variables.
Maximums et minimums des fonctions de plusieurs variables.
Equations différentielles du premier ordre.
Applications des équations différentielles du premier ordre.
Applications des équations différentielles linéaires du premier ordre aux circuits électriques.
Equations différentielles du deuxième ordre.
Applications des équations différentielles du deuxième ordre.
Applications des équations différentielles linéaires du deuxième ordre aux circuits électriques.
Transformation de Laplace.
Calcul numérique.

J. Quinet

Cours élémentaire de mathématiques supérieures

Depuis de nombreuses années, et au fil de plusieurs réimpressions, plus de 100 000 étudiants, ingénieurs, techniciens et professionnels se sont formés avec succès aux mathématiques supérieures grâce à cet ouvrage.

Cette nouvelle édition, totalement *refondue et augmentée de sujets nouveaux*, est l'œuvre d'une équipe de professeurs enseignant aux niveaux universitaire, technique et professionnel.

Les règles qui ont guidé sa rédaction restent celles de J. QUINET :

- EXPLIQUER ET FAIRE COMPRENDRE.
- AVOIR TOUJOURS POUR BUT L'APPLICATION PRATIQUE.
- Exposer la théorie par les moyens les plus *simples* et les plus *rapides*, en distinguant l'*essentiel* de ce qui est secondaire.
- Illustrer tout calcul et toute théorie par des exemples, des exercices et des applications à l'électricité, l'électronique, la mécanique, etc.

Une innovation : les solutions de *tous* les exercices proposés sont données à la fin de chaque volume.

Essentiellement pédagogique et moderne, cet ouvrage est, par la réponse qu'il donne aux besoins de la technique industrielle actuelle, un instrument indispensable de FORMATION PERMANENTE.

Le COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES comporte 5 tomes :

1. Algèbre
2. Fonctions usuelles
3. Calcul intégral et séries
4. Équations différentielles
5. Géométrie

Il est complété par le livre de J. Fourastié et B. Sahler "Probabilités et statistique".



9 782040 100797



ISBN 2-04-010079-2

