mathématiques

Bernard
Gostiaux

Cours de mathématiques spéciales

2. Topologie, analyse réelle

puf

Topologie, analyse réelle

COLLECTION DIRIGÉE PAR PAUL DEHEUVELS

COURS DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

TOME 2

Topologie, analyse réelle

BERNARD GOSTIAUX

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

ISBN 2 13 045836 X
ISSN 0246-3822

Dépôt légal — 1re édition : 1993, août

Sommaire

Avant-propos

Cet exposé de la topologie ne respecte pas le programme de la classe de Mathématiques Spéciales, car comment respecter un programme qui change, dans lequel on procède à des allègements pas toujours très structurés.

Dès que l'on dispose d'une application, il y a deux espaces topologiques, donc en fait un espace produit. Vouloir limiter l'étude des compacts au cas métrique c'est les vider de leur contenu et, en favorisant à l'excès l'aspect séquentiel, passer sous-silence les recouvrements finis.

C'est pour ces raisons que j'ai préféré commencer par un exposé de la topologie générale, avant d'aborder les espaces métriques puis les espaces vectoriels normés, que l'on retrouvera dans le tome 3, dans le cadre des espaces préhilbertiens.

Je n'ai pu résister au désir de donner une construction de $\mathbb{R}$ comme complété de $\mathbb{Q}$, construction qui achève la mise en place des grands ensembles mathématiques, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{C}$, étudiés dans le tome 1.

Après bien des hésitations, et pour rester à un niveau assez élémentaire, je me suis décidé à exposer l'intégrale de Riemann. Lors de l'étude des espaces fonctionnels, dans le tome 3, on pourra la comparer à l'intégrale des fonctions réglées.

Notations

CHAPITRE 1

Topologie générale

L'étude de la topologie, d'abord générale, puis métrique sera faite en supposant connues les propriétés de $\mathbb{R}$, ce qui permettra de donner des exemples. Mais la construction de $\mathbb{R}$ et la justification des propriétés citées sera faite ensuite au chapitre 5.

1. Vocabulaire

DÉFINITION 1.1. — *On appelle espace topologique $\mathcal{T}$ tout couple formé d'un ensemble E et d'une partie $\mathcal{O}$ de $\mathcal{P}(E)$, (les éléments de $\mathcal{O}$ étant les ouverts de la topologie $\mathcal{T}$), vérifiant :*

1) $\varnothing$ et E sont des ouverts,

2) toute réunion d'ouverts est un ouvert,

3) toute intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert.

Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts de la toplogie $\mathcal{T}$ contient $\varnothing$ et E, il est stable par réunion et par intersection finie.

Sur un ensemble E, on peut définir plusieurs topologies, sauf si E est un singleton, auquel cas $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, E\}$.

1.2. Soient $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ les familles d'ouverts de deux topologies $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ sur E, on dira que *$\mathcal{T}_2$ est plus fine que $\mathcal{T}_1$ si $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$.*

Donc tous les ouverts de $\mathcal{T}_1$, sont des ouverts pour $\mathcal{T}_2$, qui peut en avoir d'autres.

EXEMPLE 1.3. — Si sur E on prend pour famille d'ouverts $\mathcal{O} = \{\varnothing, E\}$ on a une topologie, la moins fine de toutes celles que l'on peut définir sur E, appelée *topologie grossière*.

EXEMPLE 1.4. — Si sur E on prend $\mathcal{O} = \mathcal{P}(E)$, qui est stable par réunion, intersection, contient $\emptyset$ et E, on a encore les ouverts d'une topologie, la plus fine de toutes sur E, *c'est la topologie discrète.*

EXEMPLE 1.5. — *Topologie d'ensemble ordonné*

Soit un ensemble E totalement ordonné. Pour faciliter la compréhension on peut penser à $E = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$. On suppose $E \neq \emptyset$.

On appelle intervalle ouvert toute partie de E de l'un des types suivants :

$$]a, b[\ = \{c, c \in E,\ a < c < b\}, \quad \text{et ceci} \quad \forall (a, b) \in E^2;$$
$$]a,\ ) = \{c, c \in E,\ c > a\} \text{ ou } (\ , a[= \{c, c \in E, c < a\},$$

et ceci pour tout a de E;
enfin E entier.

On appelle ouvert toute réunion d'intervalles ouverts. Les ouverts définissent une topologie car :

E, intervalle ouvert est un ouvert, c'est la réunion des intervalles de la famille $\{E\}$,

$\emptyset =]a, a[$, si $a \in E$, est un intervalle ouvert, donc un ouvert.

Toute réunion d'ouverts est un ouvert : si les $(O_i)_{i \in I}$ sont des ouverts, c'est que chaque O_i est du type $O_i = \bigcup\limits_{k_i \in K_i} C_{k_i}$, avec C_{k_i} intervalle ouvert, donc $O = \bigcup\limits_{i \in I} O_i = \bigcup\limits_{i \in I} (\bigcup\limits_{k_i \in K_i} C_{k_i})$ est bien réunion d'intervalles ouverts.

Toute intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert : par récurrence il suffit de le faire pour 2 ouverts. Soient $O_1 = \bigcup\limits_{k_1 \in K_1} C_{k_1}$ et $O_2 = \bigcup\limits_{k_2 \in K_2} C_{k_2}$ deux réunions d'intervalles ouverts. D'après le théorème 1.27 d'Algèbre, on a :

$O_1 \cap O_2 = \bigcup\limits_{(k_1, k_2) \in K_1 \times K_2} (C_{k_1} \cap C_{k_2})$ et on va justifier que chaque $C_{k_1} \cap C_{k_2}$ est un intervalle ouvert. C'est évident si l'un des deux est $\emptyset$ ou E. Si on a $C_{k_1} =]a, b[$ et $C_{k_2} =]c,\ )$ par exemple alors

$$\text{alors} \quad \begin{aligned} C_{k_1} \cap C_{k_2} &= \{x;\ a < x, x < b, c < x\} \\ &= \{x;\ \sup(a, c) < x;\ x < b\} =]\sup(a, c), b[. \end{aligned}$$

C'est bien un intervalle ouvert. On vérifierait de même les résultats dans les autres cas.

On a donc une topologie sur E. Un cas particulier important est celui de la « droite achevée », $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, ensemble ordonné par la relation

$$(x \leqslant y) \Leftrightarrow \Big((x = -\infty) \text{ ou } (y = +\infty)$$
$$\text{ou } \big((x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } x \leqslant y\big)\Big). \qquad \blacksquare$$

DÉFINITION 1.6. — *Une partie A d'un espace topologique E est dite fermée dans E si et seulement si son complémentaire ensembliste $E - A$ est ouvert.*

On parle encore d'un fermé de E.

Il résulte immédiatement des propriétés caractérisant les ouverts, qu'une topologie $\mathcal{T}$ peut être définie par la donnée de la famille $\mathcal{F}$ de ses fermés, famille vérifiant :

E et $\varnothing$ sont des fermés ;

toute intersection de fermés est un fermé ;

toute réunion d'un nombre fini de fermés est un fermé.

DÉFINITION 1.7. — *On appelle voisinage d'un élément x de l'espace topologique E, toute partie V de E telle qu'il existe un ouvert O vérifiant : $x \in O \subset V$.*

On appellerait de même, *voisinage V d'une partie A de E* toute partie V telle qu'il existe un ouvert O vérifiant $A \subset O \subset V$.

THÉORÈME 1.8. — *Une partie O de E topologique est un ouvert si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points.*

C'est l'un des théorèmes fondamentaux de la topologie, d'un emploi très fréquent.

Soit O un ouvert, si $O = \varnothing$, $\forall x \in \varnothing$, n'importe quoi est vrai puisqu'il n'y a pas de x dans $\varnothing$. En particulier, $\forall x \in \varnothing$, $\varnothing$ est voisinage de x.

Si $O \neq \varnothing$, alors $\forall x \in O, \exists O$ ouvert avec $x \in O \subset O$: la définition 1.7. est vérifiée.

Réciproquement, si O est une partie, voisinage de chacun de ses points, $\forall x \in O$, $\exists \cup(x)$ ouvert avec $x \in \cup(x) \subset O$, et on a alors l'égalité $O = \bigcup_{x \in O} \cup(x)$ puisque chaque x_0 de O est dans $\cup(x_0)$ donc dans la réunion et que la réunion des $\cup(x)$ est contenue dans O. Mais alors O, réunion d'ouverts est un ouvert. ■

On peut se poser la question de savoir si on peut se donner un espace topologique $\mathcal{T} = (E, \mathcal{O})$ par la famille des voisinages de tous ses éléments. C'est possible si sont vérifiées les conditions suivantes.

1.9. Axiome des voisinages. *Soit un ensemble E non vide. On se donne, pour tout x de E une partie $\mathcal{V}(x)$ de $\mathcal{P}(E)$ dont les éléments sont appelés voisinages de x, et soit $\mathcal{V} = \bigcup_{x \in E} \mathcal{V}(x)$. Alors $\mathcal{V}$ est la famille des voisinages d'une topologie si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1) $\forall x \in E, \mathcal{V}(x) \neq \emptyset$;
2) $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $x \in V$;
3) $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, si $\exists V \in \mathcal{V}(x), V \subset A \Rightarrow A \in \mathcal{V}(x)$;
4) Si V est V' sont dans $\mathcal{V}(x)$, $V \cap V' \in \mathcal{V}(x)$;
5) $\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $W \subset V$ et $\forall y \in W$, $V \in \mathcal{V}(y)$.

Il est facile de vérifier que, si on part d'un espace topologique $\mathcal{T} = (E, \mathcal{O})$ avec E non vide, les voisinages vérifient ces conditions.

1) $\forall x \in E$, E ouvert contenant x est voisinage de x donc $E \in \mathcal{V}(x)$ qui est non vide.

2) La définition de V voisinage de x impose $x \in V$, et aussi, si A est une partie contenant V voisinage de x, avec O ouvert tel que $x \in O \subset V$ on a $x \in O \subset A$ donc A est voisinage de x, soit $A \in \mathcal{V}(x)$ d'où le 3).

Le 4) est obtenu car avec V et V' voisinages de x, et O et O' ouverts tels que $x \in O \subset V$ et $x \in O' \subset V'$, on a $x \in (O \cap O') \subset (V \cap V')$ avec $O \cap O'$ ouvert donc $V \cap V'$ est voisinage de x.

Quand au 5), si V est un voisinage de x, il existe un ouvert O avec $x \in O \subset V$ et $\forall y \in O$, O est voisinage de y d'après le théorème 1.8.

Réciproquement on suppose donnée une famille de parties de E vérifiant les cinq conditions. On appelle ouvert toute partie O de E telle que $\forall x \in O, O \in \mathcal{V}(x)$.

On définit bien ainsi les ouverts d'une topologie car les conditions de la définition 1.1 sont vérifiées. On a $\emptyset$ ouvert car,

$\forall x \in \emptyset$, le prédicat portant sur l'ensemble vide, ce qui est derrière est vrai, donc $\emptyset \in \mathcal{V}(x)$: $\emptyset$ est un ouvert.

Puis, $\forall x \in E$, d'après 1) $\exists V \in \mathcal{V}(x)$, comme $V \subset E$, le 3) implique $E \in \mathcal{V}(x)$ donc E est ouvert.

Ensuite si les $(O_i)_{i \in I}$ sont des ouverts, soit $O = \bigcup_{i \in I} O_i$. Si $O = \emptyset$ il est ouvert. On suppose donc $O \neq \emptyset$, soit $x \in O$.

Il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in O_{i_0}$, avec O_{i_0} ouvert donc $O_{i_0} \in \mathcal{V}(x)$, et comme $O_{i_0} \subset O$, le 3) donne $O \in \mathcal{V}(x)$. D'où O ouvert.

Enfin si $O_1, \ldots, O_n$, $n \in \mathbb{N}$, sont des ouverts en nombre fini, si $O = \bigcap_{i=1}^{n} O_i$ est vide, c'est un ouvert. On suppose donc O non vide et soit $x \in O = \bigcap_{i=1}^{n} O_i$, pour chaque i, $O_i \in V(x)$, le 4)$\Rightarrow O_1 \cap O_2 \in \mathcal{V}(x)$ puis $(O_i \cap O_2) \cap O_3 \in \mathcal{V}(x)$... et finalement $O \in \mathcal{V}(x)$ par application itérée de 4). Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

On obtient bien ainsi les ouverts d'une topologie, $\mathcal{T}$.

Une question se pose alors : partant de cette topologie, on va obtenir des voisinages des points au sens de la définition 1.7, la moindre des choses serait de retrouver les voisinages du point de départ.

C'est là que la 5^e condition va servir.

Soit V un voisinage de x pour la topologie $\mathcal{T}$, il existe O ouvert avec $x \in O \subset V$. Mais O ouvert contenant x implique $O \in \mathcal{V}(x)$ par définition des ouverts, et $O \subset V \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$ d'après le 3). On a donc V voisinage de x pour $\mathcal{T} \Rightarrow V \in \mathcal{V}(x)$.

Réciproquement, soit $V \in \mathcal{V}(x)$ on cherche un ouvert O de $\mathcal{T}$ tel que $x \in O \subset V$ pour conclure V voisinage de x pour $\mathcal{T}$.

Soit $O = \{t \in E,\ V \in \mathcal{V}(t)\}$. Comme $V \in \mathcal{V}(x)$ on a $x \in O$ qui est non vide. D'après le 2), si $V \in \mathcal{V}(t)$, on a $t \in V$, donc $O \subset V$. Enfin O est ouvert pour la topologie $\mathcal{T}$ car si $t \in O$, $V \in \mathcal{V}(t)$ et d'après le 5), $\exists W \in \mathcal{V}(t)$ tel que $\forall y \in W,\ V \in \mathcal{V}(y)$.

Mais alors les y de W vérifient la condition d'appartenance à O, donc $W \subset O$; comme $W \in \mathcal{V}(t)$, le 3) $\Rightarrow O \in \mathcal{V}(t)$.

On a donc $\forall t \in O,\ O \in \mathcal{V}(t)$ ce qui est la définition de O ouvert, et on a bien $x \in O$ ouvert avec $O \subset V \Rightarrow V$ est voisinage de x ou sens de $\mathcal{T}$.■

Remarque : D'un point de vue topologique, dans $\mathcal{V}(x)$ il y a des éléments superflus puisque toute partie contenant un voisinage de x est également voisinage de x. Ceci amène à poser la définition suivante.

DÉFINITION 1.10 — *Soit un espace topologique $\mathcal{T} = (E, \mathcal{O})$. On appelle base de voisinages d'un élément x de E toute famille $\mathcal{B}(x)$ de voisinages de x telle que, $\forall V$ voisinage de x, $\exists W \in \mathcal{B}(x)$ avec $W \subset V$.*

EXEMPLE 1.11. — Sur $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, les intervalles $]x - \frac{1}{n},\ x + \frac{1}{n}[$ pour n dans $\mathbb{N}^*$ forment une base de voisinages de x. Mais les $[x - \frac{1}{n^2},\ x + \frac{1}{n}[$ aussi... Il n'y a pas unicité des bases de voisinages.

EXEMPLE 1.12. — Pour la topologie discrète sur E, $\{x\}$ est une base de voisinages de x.

REMARQUE 1.13. — On notera par la suite E au lieu de $\mathcal{T} = (E, \mathcal{O})$ un espace topologique, lorsqu'il n'y a qu'une topologie considérée.

2. Fermeture, intérieur, frontière

Fermeture d'adhérence

DÉFINITION 1.14 – *Soit A une partie d'un espace topologique E. On appelle fermeture de A, le plus petit fermé de E contenant A.*

Bien sûr, cette définition n'a de sens que si cette fermeture existe.

On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des fermés de E contenant A. Cet ensemble $\mathcal{F}$ est non vide puisque E est un fermé contenant A. Si on considère alors $f(A) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$, cette partie de E est un fermé comme intersection de fermés, qui contient A puisque $\forall F \in \mathcal{F},\ A \subset F$, et pour l'inclusion c'est le plus petit fermé contenant A, puisque tout fermé F contenant A est dans la famille $\mathcal{F}$, donc tel que $f(A) \subset F$.

1.15. *La fermeture de A existe donc, c'est l'intersection de tous les fermés de E contenant A.*

Cette caractérisation globale rappelle celle de sous groupe engendré par une partie A, (Théorème 4.10 d'Algèbre). C'est parce qu'on retrouve une notion plus générale, celle de famille de Moore.

DÉFINITION 1.16. — *Une famille $\mathcal{M}$ de parties d'un ensemble E est une famille de Moore si $E \in \mathcal{M}$ et si $\mathcal{M}$ est stable par intersection.*

C'est le cas pour les sous-groupes d'un groupe, pour les sous-anneaux d'un anneau, ici pour les fermés d'un espace topologique, ce serait le cas des parties convexes d'un espace affine réel.

Chaque fois qu'on dispose d'une famille de Moore $\mathcal{M}$ sur E, si A est une partie de E on pourra introduire la plus petite partie de E contenant A et appartenant à $\mathcal{M}$, (plus petite pour l'inclusion), et ce sera toujours l'intersection de tous les M de $\mathcal{M}$ tels que $A \subset M$.

Il est intéressant de pouvoir caractériser aussi, élément par élément, l'appartenance à cette partie, ici à la fermeture. C'est ce qui amène à introduire la notion de point adhérent.

DÉFINITION 1.17 — *Soit A une partie de E espace topologique. Un élément x de E est dit adhérent à A si et seulement si tout voisinage V de x est tel que $V \cap A \neq \emptyset$.*

DÉFINITION 1.18 — *On appelle adhérence d'une partie A de E topologique l'ensemble noté $\overline{A}$ des éléments de E adhérents à A.*

THÉORÈME 1.19 — *La relation $A = \overline{A}$ caractérise les fermés de E topologique.*

Car si A est fermé et si on a $x \notin A$, alors $x \in \Omega = E \setminus A$ ouvert, et comme Ω est voisinage de chacun de ses points, (Théorème 1.8), on a un voisinage Ω de x tel que $\Omega \cap A = \emptyset$, donc x non adhérent à A.

Puis si $x \notin \overline{A}$, x n'est pas dans A, sinon tout voisinage V de x contenant x vérifierait $x \in V \cap A$, donc $V \cap A \neq \emptyset$ et x serait dans $\overline{A}$ ce qui est exclu.

Donc, pour A fermé, $(x \notin A) \Leftrightarrow (x \notin \overline{A})$ d'où $A = \overline{A}$.

Si $A = \overline{A}$, A est fermé, car justifier ceci revient à prouver que $\Omega = E \setminus A$ est ouvert, or si $x \in \Omega$, $x \notin A$ avec $A = \overline{A}$ donc $\exists V$ voisinage de x tel que $V \cap A = \emptyset$, soit $V \subset E \setminus A = \Omega$, *a fortiori* Ω est voisinage de x, et ce pour tout x de Ω : on a bien Ω ouvert, (Théorème 1.8). ■

THÉORÈME 1.20 — *La fermeture d'une partie A de E espace topologique est son adhérence.*

En effet, soit $f(A)$ la fermeture de A. On a $A \subset f(A)$, donc $\overline{A} \subset \overline{f(A)}$. (Il est évident que si x est adhérent à A, avec $A \subset B$, alors x est adhérent à B car tout voisinage V de x étant tel que $V \cap A \neq \emptyset$ on aura *a fortiori* $V \cap B = \emptyset$). Comme $f(A)$ est fermé, $f(A) = \overline{f(A)}$, (Théorème 1.19), d'où $\overline{A} \subset f(A)$.

Or $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, car soit x dans $\overline{\overline{A}}$, V au voisinage de x et O un ouvert tel que $x \in 0 \subset V$. On a O voisinage de x, x adhérent à $\overline{A}$ donc $O \cap \overline{A} \neq \emptyset$ et si $y \in O \cap \overline{A}$, on a encore O ouvert, voisinage de y et y adhérent à A donc

$O \cap A \neq \emptyset$. Comme $O \cap A \subset V \cap A$, *a fortiori* $V \cap A \neq \emptyset$ et ce pour tout V voisinage de x, d'où $x \in \overline{A}$. On vient de justifier l'inclusion $\overline{\overline{A}} \subset \overline{A}$; mais comme pour une partie X quelconque il est clair que $X \subset \overline{X}$, on a l'égalité $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$ d'où, (Théorème 1.19), $\overline{A}$ fermé.

Mais alors, ayant $A \subset \overline{A} \subset f(A)$ avec $\overline{A}$ fermé et $f(A)$ plus petit fermé contenant A, c'est que $\overline{A} = f(A)$. ■

THÉORÈME 1.21. — *Propriétés de l'adhérence. Soit E un espace topologique. On a $\overline{\emptyset} = \emptyset$; $A \subset \overline{A}$; $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$; $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$; si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties de E, en nombre fini, on a $\overline{\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A}_i$.*

Mais pour une réunion quelconque, ou plus précisément d'une famille de cardinal infini on a seulement : $\left(\bigcup\limits_{i\in I} \overline{A}_i\right) \subset \left(\overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}\right)$, et pour l'intersection, on a $\left(\overline{A \cap B}\right) \subset \overline{A} \cap \overline{B}$, sans égalité en général.

Il est évident que $\overline{\emptyset} = \emptyset$, puis $A \subset \overline{A}$ et $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ ont été justifiés, (Théorème 1.20), ainsi que $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$. Pour la réunion, on a d'abord chaque inclusion $A_i \subset \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)$ donc $\overline{A}_i \subset \overline{\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)}$ d'où $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (\overline{A}_i) \subset \overline{\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)}$. Mais $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A}_i$ est un fermé, (réunion d'un nombre fini de fermés), ce fermé contient $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ donc il contient aussi la fermeture de cette réunion, d'où l'inclusion $\overline{\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A}_i$ et l'égalité $\bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{A}_i = \overline{\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right)}$.

Pour une réunion d'une infinité de parties, on a seulement $\bigcup\limits_{i\in I} \overline{A}_i \subset \left(\overline{\bigcup\limits_{i\in I} A_i}\right)$ comme le montre l'exemple de $E = \mathbb{R}$ avec $\mathbb{Q}$ partout dense dans E, c'est-à-dire tel que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Alors, comme pour $q \in \mathbb{Q}$, $\overline{\{q\}} = \{q\}$ on a l'inclusion stricte $\mathbb{Q} = \bigcup\limits_{q\in\mathbb{Q}} \overline{\{q\}} \subsetneqq \overline{\bigcup\limits_{q\in\mathbb{Q}} \{q\}} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

De même si dans $E = \mathbb{R}$ on prend $A = \mathbb{Q}$ et $B = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ on aura $\overline{A} = \overline{B} = \mathbb{R}$, mais $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset \subset \overline{A} \cap \overline{B} = \mathbb{R}$.

Dans ces exemples, on a supposé connue la topologie de $\mathbb{R}$, (chapitre 5).

Une autre définition, riche de conséquences, s'impose avant de passer à l'intérieur d'une partie, c'est celle de *point d'accumulation*.

DÉFINITION 1.22. — *Soit A une partie de E espace topologique. Un point x de E est dit point d'accumulation de A si et seulement si pour tout voisinage V de x on a $(V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset$.*

Il est bien clair qu'un point d'accumulation de A est adhérent à A, mais la réciproque est fausse. Par exemple, si A est un singleton, $A = \{x\}$, on a $x \in \overline{A}$, mais pour tout voisinage V de x, $(V - \{x\}) \cap \{x\} = \emptyset$ donc x n'est pas point d'accumulation de A.

DÉFINITION 1.23. — *On appelle point isolé d'une partie A de E topologique tout a de A qui n'est pas point d'accumulation de A.*

Intérieur

DÉFINITION 1.24. — *On appelle intérieur d'une partie A de E topologique le plus grand, (pour l'inclusion), ouvert de E, contenu dans A.*

On note $\overset{\circ}{A}$ cet intérieur : c'est la réunion de tous les ouverts de E contenus dans A.

THÉORÈME 1.25. — *Soit A une partie de E, on a $\overset{\circ}{A} = \{x; x \in E$, A voisinage de $x\}$*

Car soit $\widetilde{A} = \{x;\ x \in E,\ A$ voisinage de $x\}$. Si $x \in \widetilde{A}$, $\exists\, O$ ouvert avec $x \in O \subset A$. Mais alors $O \subset \overset{\circ}{A}$, plus grand ouvert contenu dans A donc $x \in \overset{\circ}{A}$: on a $\widetilde{A} \subset \overset{\circ}{A}$. Puis si $x \in \overset{\circ}{A}$, ouvert donc voisinage de chacun de ses points, *a fortiori* A, contenant $\overset{\circ}{A}$, est voisinage de x, d'où $x \in \widetilde{A}$ et l'inclusion $\overset{\circ}{A} \subset \widetilde{A}$ d'où l'égalité. ■

Comme les complémentaires des ouverts inclus dans A sont exactement les fermés contenant $E \setminus A$, et que le complémentaire d'une réunion est l'intersection des complémentaires, on a le

THÉORÈME 1.26. — *Soit A une partie de E topologique, on a :*

$E \setminus \overset{\circ}{A} = \left(\overline{E \setminus A}\right)$ *et de même* $E \setminus \overline{A} = \left(\overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}\right)$.

Il nous reste la 2^e^ égalité à justifier. Mais si dans $E \setminus \overset{\circ}{A} = \left(\overline{E \setminus A}\right)$ on remplace A par $E \setminus A$ il vient

$E \setminus \left(\overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}\right) = \overline{E \setminus (E \setminus A)} = \overline{A}$ d'où en passant au complémentaire $\overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}} = E \setminus \overline{A}$. ■

On peut alors justifier les propriétés suivantes de l'intérieur, soit directement, soit à partir de celles des adhérences et en utilisant le théorème 1.26. On a, avec des notations évidentes :

THÉORÈME 1.27. — $\overset{\circ}{E} = E$; $\overset{\circ}{A} \subset A$; $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$; $\left(\overset{\circ}{\widehat{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}}\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \overset{\circ}{A_i}$ *; puis*

$$\left(\overset{\circ}{\widehat{\bigcap_{i \in I} A_i}}\right) \subset \bigcap_{i \in I} \overset{\circ}{A_i} \quad \text{et} \quad \bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{A_i} \subset \left(\overset{\circ}{\widehat{\bigcup_{i \in I} A_i}}\right).$$

Par exemple $\forall i_0 \in I$, $\bigcap_{i \in I} A_i \subset A_{i_0}$ donc $\overset{\circ}{\widehat{\bigcap_{i \in I} A_i}}$ est un ouvert inclus dans A_i, donc *a fortiori* dans $\overset{\circ}{A_{i_0}}$, intérieur de A_{i_0}, et ceci $\forall i_0 \in I$, d'où : $\overset{\circ}{\widehat{\bigcap_{i \in I} A_i}} \subset \bigcap_{i \in I} \overset{\circ}{A_i}$. Si card I est fini alors $\bigcap_{i=1}^{n} \overset{\circ}{A_i}$ est un ouvert, inclus dans $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, donc inclus dans le plus grand ouvert contenu dans $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$, c'est-à-dire dans $\overset{\circ}{\widehat{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}}$ d'où l'égalité $\bigcap_{i=1}^{n} \overset{\circ}{A_i} = \overset{\circ}{\widehat{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}}$. Mais si card I infini on n'a rien de plus en général. ■

Frontière d'une partie

DÉFINITION 1.28. — *On appelle frontière d'une partie A de E, l'ensemble $\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$, noté $Fr(A)$.*

On a donc $FrA = \{x;\ x \in \overline{A},\ x \notin \mathring{A}\} = \{x; x \in \overline{A}; x \in E \setminus \mathring{A}\}$ et comme $E \setminus \mathring{A} = \overline{E \setminus A}$, c'est que $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap (\overline{E \setminus A})$.

Autrement dit, élément par élément, on a

THÉORÈME 1.29. — *Un point x de E est dans la frontière de A si et seulement si pour tout voisinage V de x, on a*

$$V \cap A \neq \emptyset \quad \text{et} \quad V \cap (E \setminus A) \neq \emptyset. \qquad \blacksquare$$

DÉFINITION 1.30. – *Soit E topologique. Une partie A de E est dite*

non dense si et seulement si $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$;

dense si et seulement si $\mathring{\overline{A}} \neq \emptyset$;

partout dense si et seulement si $\overline{A} = E$.

Ainsi, lors de la construction de $\mathbb{R}$, on verra que $\mathbb{Q}$ est partout dense dans $\mathbb{R}$. Notons qu'il ne s'agit pas d'une propriété liée au cardinal de A, car $\mathbb{Q}$ est équipotent à $\mathbb{N}$, mais $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \Rightarrow \mathring{\overline{\mathbb{Q}}} = \mathbb{R}$ est non vide, alors que $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \Rightarrow \mathring{\overline{\mathbb{N}}} = \emptyset$ d'où $\mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$ mais pas $\mathbb{N}$.

3. Continuité, homéomorphismes

La topologie est introduite pour traduire les notions de continuité des applications, ou de limite. Nous entrons donc avec ce paragraphe dans le vif du sujet.

DÉFINITION 1.31. — *Soient deux espaces topologiques E et F. Une application f de E dans F est dite continue en $a \in E$ si et seulement si pour tout voisinage V de $f(a)$, dans F, il existe un voisinage U de a dans E tel que $f(U) \subset V$.*

Dans cette définition, on retrouve une notion introduite dans le chapitre I des structures fondamentales, celle d'application f de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{P}(F)$ associée à f, car $f(U) = \{f(x), x \in U\}$. On utilisera aussi l'application $f^{-1} : \mathcal{P}(F) \mapsto \mathcal{P}(E)$ défini par : $f^{-1}(V) = \{x;\ x \in E,\ f(x) \in V\}$ si $V \in \mathcal{P}(F)$. Les propriétés de ces applications ont été étudiées au théorème 1.29 d'Algèbre.

THÉORÈME 1.32. — *Soient E et F topologiques et a dans E. Une application f de E dans F est continue en a si et seulement si pour tout voisinage V de $f(a)$ dans F, $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a.*

En effet, si f est continue en a, par définition, à V voisinage de $f(a)$ on associe U voisinage de a dans E tel que $f(U) \subset V$. Mais alors $U \subset f^{-1}(V)$ puisque $\forall x \in U, f(x) \in V$. Les propriétés des voisinages impliquent que $f^{-1}(V)$ est *a fortiori* voisinage de a.
Réciproquement si, pour tout V voisinage de $f(a)$, on sait que $f^{-1}(V)$ est un voisinage de a, inutile d'aller chercher plus loin, on tient un voisinage $U = f^{-1}(V)$ de a, tel que $f(U) \subset V$. ■

EXEMPLE 1.33 — *Identité, $i : x \rightsquigarrow x$, de E dans E est continue en tout a de E*, puisque, pour tout V voisinage de $a = i(a)$, $i^{-1}(V) = V$ est voisinage de a.

Mais aussi : *toute application constante de E dans F, E et F topologiques, est continue pour tout a de E*, car si $\forall x \in E$, $f(x) = b$, soit $a \in E$, V un voisinage de $b = f(a)$, comme $f^{-1}(V) = E$ puisque $\forall x \in E, f(x) = b \in V$, et que E ouvert est voisinage en particulier de a, on a $f^{-1}(V)$ voisinage de a.

Ces exemples sont importants parce que, utilisés avec le théorème de continuité des applications composées, ils fourniront la solution dans beaucoup de cas d'étude de continuité.

DÉFINITION 1.34. — *Soient E et F topologiques. On dit que f application de E dans F est continue sur E, (ou plus brièvement continue) si et seulement si elle est continue en tout point a de E.*

THÉORÈME 1.35. — *Soient E et F topologiques et f une application de E dans F. Elle est continue si et seulement si pour tout O de F, $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E.*

Ce théorème est aussi l'un des fondements de la topologie. En particulier il sert à justifier qu'une partie d'un espace topologique est ouverte, quant on la fait apparaître comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.
Justification : si f est continue, soit O un ouvert de F. Si $f^{-1}(O)$, est vide, c'est un ouvert de E. Sinon, soit $a \in f^{-1}(O)$, alors $b = f(a) \in O$ ouvert donc voisinage de chacun de ses points, (1.8), en particulier O est voisinage de b, f est continue donc $f^{-1}(O)$ est voisinage de a, ceci étant

vrai $\forall a \in f^{-1}(O)$, on a $f^{-1}(O)$ ouvert comme voisinage de chacun de ses éléments, (1.8.).

Réciproquement, si on a la propriété du théorème, soit $a \in E$ et V un voisinage de $f(a)$, il existe O ouvert de F tel $f(a) \in O \subset V$ (définition des voisinages). Mais alors $a \in f^{-1}(O) \subset f^{-1}(V)$, avec $f^{-1}(O)$ ouvert, donc $f^{-1}(V)$ est bien un voisinage de a : f est continue en a d'après le théorème 1.32.

COROLLAIRE 1.36. — *Soient E et F topologiques et f une application de E dans F. Elle est continue si et seulement si pour tout fermé L de F on a $f^{-1}(L)$ est un fermé de E.*

En effet (L fermé de F) $\Leftrightarrow$ ($O = F \setminus L$ est ouvert de F), puis $f^{-1}(L) = f^{-1}(F \setminus O) = E \setminus f^{-1}(O)$, (Théorème 1.29 d'Algèbre), et on a bien $f^{-1}(L)$ fermé $\Leftrightarrow f^{-1}(O)$ ouvert. Le corollaire en résulte. ■

Il convient de remarquer que ce sont les images réciproques qui interviennent, pas les images directes des parties. On introduit la terminologie suivante :

DÉFINITION 1.37. — *Soient E et F topologiques. Une application f de E dans F est dite ouverte, (resp. fermée) si et seulement si pour tout ouvert O de E, (resp. L fermé de E) on a $f(O)$ ouvert de F, (resp. $f(L)$ fermé de F).*

Mais attention, f peut être ouverte ou fermée sans être continue, ou continue sans être ouverte ou fermée.

Encore du vocabulaire.

DÉFINITION 1.38. — *Soient E et F topologiques. On appelle homéomorphisme de E sur F toute bijection f de E sur F telle que f et f^{-1} soient continues.*

Ici f^{-1} ne va pas de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E)$, mais de F dans E et elle est définie par : $\forall y \in F$, $f^{-1}(y)$ est le seul x de E tel que $f(x) = y$.

Il est clair que la continuité de f^{-1} se traduisant par :

$\forall$ ouvert O de E, $\left(f^{-1}\right)^{-1}(O) = f(O)$ est un ouvert de F, on a f bijective de E sur F est un homéomorphisme si et seulement si elle est continue et ouverte, ou bien continue et fermée.

Continuons la mise en place des « outils » de la topologie avec le

THÉORÈME 1.39. — *(Transitivité de la continuité). Soient E, F, G trois espaces topologiques, $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$. On suppose f continue en a et g continue en $b = f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.*

En effet, soit W un voisinage, dans G, de $c = (g \circ f)(a) = g(b)$, il existe V voisinage de b dans F tel que $g(V) \subset W$, (continuité de g en b), et à V on associe U voisinage de a dans E tel que $f(U) \subset V$.

Mais alors, $\forall x \in U, (g \circ f)(x) = g(f(x))$ avec $f(x) \in V$, donc $g(f(x)) \in W$: on a bien trouvé U voisinage de a tel que $(g \circ f)(U) \subset W$ d'où la continuité de $g \circ f$ en a. ■

Après cette étude de la notion de continuité, nous allons aborder celle de limite, plus générale, la continuité en étant un cas particulier.

4. Notion de limite, filtre, base de filtre

La traduction de la notion de continuité est la raison d'être de la topologie générale. Mais une autre notion s'introduit très rapidement : celle de suite qui permet, par un passage à la limite de ramener l'étude des problèmes au cas fini. Cette notion prendra toute son importance dans le cadre des espaces métriques où bon nombre des théorèmes établis en topologie générale auront des réciproques. Enfin, dans le cadre des espaces vectoriels normés, interviendront les séries.

DÉFINITION 1.40. — *Soit un ensemble E, on appelle suite d'éléments de E toute application de $\mathbb{N}$ dans E.*

Si u est une telle application, des raisons de commodité ont amené à noter u_n au lieu de $u(n)$ la valeur prise par l'application u en n de $\mathbb{N}$. On note encore $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite u, et on emploie la terminologie de suite de terme général u_n, mais il est fondamental de se rappeler qu'une suite est une application de $\mathbb{N}$ dans E, ce qui évite, entre autre, de confondre une suite avec l'ensemble des valeurs prises.

DÉFINITION 1.41. — *Soit une suite u d'éléments de E, on appelle suite extraite de u, toute suite du type $u \circ \varphi$ où φ est une injection croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

On notera donc $u_{\varphi(n)}$ le terme général de la suite extraite $u \circ \varphi$.

DÉFINITION 1.42. — *Soit une suite u d'éléments de E espace topologique. Elle est dite convergente vers $l \in E$ si et seulement si, pour tout voisinage V de l, il existe $n(V)$ tel que $\forall n \geqslant n(V), u_n \in V$.*

On note $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

THÉROÈME 1.43. — *Si une suite u de E topologique converge vers $l \in E$, alors toute suite extraite de u converge aussi vers l.*

On sait que $\forall V$ voisinage de $l, \exists n_0$, fonction de V bien sûr, mais on ne l'écrit pas, tel que, $\forall n \geqslant n_0, u_n \in V$.

Si $u \circ \varphi$ est une suite extraite de u, comme φ est strictement croissante il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant p_0$, $\varphi(p) \geqslant n_0$ d'où $u_{\varphi(p)} \in V$.

Mais alors, à V voisinage de l, on associe p_0 tel que $\forall p \geqslant p_0$, $u_{\varphi(p)}, \in V$: c'est la traduction de $\lim\limits_{p \to +\infty} u_{\varphi(p)} = l$. ■

EXEMPLE 1.44. — *E est un ensemble muni de la topologie discrète.* Une suite u converge seul l si et seulement si elle devient constante et égale à l.

Car $\{l\}$ est voisinage de l dans la topologie discrète (1.4) donc $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in \{l\}$: si la suite converge elle devient constante. La réciproque est valable pour toute topologie. ■

EXEMPLE 1.45. — *Sur E muni de la topologie grossière (voir 1.3) toute suite converge vers n'importe quel élément de E.*

Soit une suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E et $a \in E$. Le seul voisinage de a est l'ensemble E entier, mais alors $\exists n_0 = 0$, $\forall n \geqslant 0, u_n \in E$: la suite converge vers a.

Cet exemple montre qu'il faut peut-être éliminer, (contrex !) certains espaces topologiques car il peut être gênant d'avoir plusieurs limites pour une seule suite, et comme on dit « s'il y a de la gêne, il n'y a pas de plaisir ».

On introduit pour ce faire la notion d'espace séparé.

DÉFINITION 1.46. — *Un espace topologique E est dit séparé si et seulement si pour toute paire d'éléments x et y de E, $(x \neq y)$, il existe deux voisinages de x et y respectivement, disjoints.*

THÉORÈME 1.47. — *Si une suite u d'éléments de E, séparé, converge, sa limite est unique.*

Car, si on suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l'$, avec $l \neq l'$, comme E est séparé, il existe V_l voisinage de l et $V_{l'}$ voisinage de l' avec $V_l \cap V_{l'} = \varnothing$. Puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ donc $\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, u_n \in V_l$ et de même $\exists n_0', \forall n \geqslant n_0', u_n \in V_{l'}$ d'où, $\forall n \geqslant \sup(n_0, n_0')$, $u_n \in V_l \cap V_{l'} = \varnothing$! C'est absurde. Donc la limite est unique. ■

THÉORÈME 1.48. — *Dans E séparé, tout singleton est fermé, mais la réciproque est fausse.*

Soit E séparé et $x \in E$. On a ($\{x\}$ fermé) $\Leftrightarrow$ ($\Omega = E \setminus \{x\}$ ouvert), soit encore Ω voisinage de chacun de ses points (Théorème 1.8).

Or si $y \in \Omega$, $y \neq x$ et E séparé $\Rightarrow \exists V_x$ et V_y voisinages respectifs de x et de y, disjoints, mais alors comme $x \in V_x \Rightarrow x \notin V_y$ d'où $y \in V_y \subset \Omega$, *a fortiori* Ω est voisinage de y. ■

Pour un contre exemple il est clair que si tout singleton de E est fermé, par réunion finie de fermés, toute partie de cardinal fini de E est fermée. Si donc E était de cardinal fini, toute partie de E serait fermée, mais aussi ouverte, la topologie serait discrète, donc séparée car $\{x\}$ et $\{y\}$, pour $x \neq y$ seraient des voisinages disjoints de x et y respectivement.

On prend donc E de cardinal infini et on appelle fermé de E, soit E, soit les parties de cardinal fini. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés : on a une topologie car 1) $\varnothing$ et E sont fermés.

2) Toute union finie de fermés est :

- soit $= E$, donc fermée,
- soit réunion d'un nombre fini de fermés eux-mêmes tous de cardinal fini, donc de cardinal fini, donc fermée.

3) Enfin toute intersection de fermés sera soit E si seul E figure dans la famille, soit de cardinal fini s'il y a un fermé de cardinal fini dans l'intersection : c'est un fermé.

On a bien une topologie, dans laquelle les singletons (de cardinal 1) sont fermés. La topologie est non séparée. En effet, soit x et y distincts dans E.

Si E est séparé, il existe deux ouverts O_x et O_y disjoints avec $x \in O_x$ et $y \in O_y$, les ouverts contenus dans les voisinages disjoints de x et y.

Or les ouverts de E sont $\varnothing$, (complémentaire de E) et des, (pas toutes les) parties de cardinal infini. Comme $x \in O_x, O_x \neq \varnothing$, donc $E \setminus O_x$ est un fermé de cardinal fini : il ne peut pas contenir O_y qui étant aussi non vide, est de cardinal infini : on a $O_x \cap O_y \neq \emptyset$, cela contredit l'hypothèse E séparé.

Valeur d'adhérence

DÉFINITION 1.49. — *Un élément a de E topologique est dit valeur d'adhérence d'une suite u d'éléments de E si et seulement si, pour tout voisinage V de a et pour tout n_0 de $\mathbb{N}$, il existe $n \geqslant n_0$ tel que $u_n \in V$.*

Si on formule avec des quantificateurs, on s'aperçoit que l'on change de place les deux derniers quantificateurs de la notion de limite car : $(a = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n) \Leftrightarrow (\forall V$ voisinage de a, $\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, u_n \in V)$, mais $(a$ valeur d'adhérence$) \Leftrightarrow (\forall V$ voisinage a, $\forall n_0 \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant n_0, u_n \in V)$.

Pourquoi ce terme de valeur d'adhérence? Et bien parce qu'avec $A_{n_0} = \{u_n, n \geqslant n_0\}$, comme $\forall V$ voisinage de a, $\exists n \geqslant n_0, u_n \in V$, c'est que $A_{n_0} \cap V \neq \emptyset$, et ce $\forall V$ voisinage de a : c'est que $a \in \overline{A}_{n_0}$, (adhérence) et ce, $\forall n_0 \in \mathbb{N}$. Finalement on a :

THÉORÈME 1.50. — *L'ensemble A des valeurs d'adhérence d'une suite u est un fermé : on a $A = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \overline{A}_n$ avec $A_n = \{u_p; p \geqslant n\}$.* ■

Cette intersection de fermés emboîtés se retrouvera dans le cadre des espaces compacts, voir 2.7.

Bien sûr, A peut être vide, la suite u définie par $u_n = n$, n'a pas de valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$ par exemple.

REMARQUE 1.51. — *Si une suite u de E espace séparé est convergente vers l de E, l'ensemble des valeurs d'adhérence est $\{l\}$.*

Car $\forall V$ voisinage de l, $\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, u_n \in V$. Il est alors évident que $\forall p_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n \geqslant p_0$ tel que $u_n \in V$: il suffit de prendre $n \geqslant \sup(p_0, n_0)$. Donc l est valeur d'adhérence.

C'est la seule car soit $a \neq l$, il existe V_a et V_l voisinages disjoints de a et l, (E séparé), il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0, u_n \in V_l$, mais alors $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \notin V_a$: il est impossible de trouver un $n \geqslant n_0$ avec $u_n \in V_a$, c'est que a n'est pas valeur d'adhérence de la suite.

La réciproque est fausse. La suite u définie dans $\mathbb{R}$ par $u_{2n} = n$ et $u_{2n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ n'admet que 0 comme valeur d'adhérence mais ne converge pas. Cependant, on verra que dans un espace compact, (2.7), si une suite admet une seule valeur d'adhérence, elle est convergente.

Il est intéressant d'introduire alors la notion de filtre, et de base de filtre, qui généralise celle de continuité, de limite d'une suite, et qui permettra, en une seule démonstration de traiter plusieurs cas.

DÉFINITION 1.52. — *Soit un ensemble E. On appelle filtre sur E toute partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ vérifiant les 3 conditions suivants :*

1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}$ est non vide,
2) $\mathcal{F}$ est stable par intersection finie,
3) Si $F \in \mathcal{F}$ et si $A \subset E$ est tel que $F \subset A$, alors $A \in \mathcal{F}$.

EXEMPLE 1.53. — Dans E topologique, les voisinages d'un élément forment un filtre.

EXEMPLE 1.54. — Soit E topologique, A une partie de E, x un point d'accumulation de A (définition 1.22), les $(V - \{x\}) \cap A$, avec V voisinage quelconque de x, forment un filtre.

DÉFINITION 1.55. — *Soit un ensemble E. On appelle base de filtre sur E toute partie $\mathcal{B}$ non vide de parties non vides de E telle que*
$\forall B_1, \in \mathcal{B},\ \forall B_2 \in \mathcal{B},\ \exists B_3 \in \mathcal{B}$ *avec* $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

EXEMPLE 1.56. — $E = \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = \{[n, +\infty[, n \in \mathbb{N}\}$ où l'on note $[n, +\infty[= \{p;\ p \in \mathbb{N},\ p \geqslant n\} = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$, c'est la base de filtre de Frechet sur $\mathbb{N}$.

EXEMPLE 1.57. — $E = \mathbb{R}, \mathcal{B} = \{]x - \dfrac{1}{n+1},\ x + \dfrac{1}{n+1}[;\ n \in \mathbb{N}\}$ pour x réel fixé.

EXEMPLE 1.58. — $E = \mathbb{R}, \mathcal{B} = \{]a, +\infty[;\ a \in \mathbb{R}\}$.

Il est facile de vérifier que, si $\mathcal{B}$ est une base de filtre sur E, la partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{P}(E)$ définie par $(X \in \mathcal{F}) \Leftrightarrow (\exists B \in \mathcal{B}, B \subset X)$ est un filtre car $\emptyset \notin \mathcal{B} \Rightarrow$ les X de $\mathcal{F}$ sont non vides; $\mathcal{F}$ est non vide car E lui appartient; si X_1 et X_2 sont dans $\mathcal{F}$, avec B_1 et B_2 de la base de filtre $\mathcal{B}$ tels que $B_1 \subset X_1$ et $B_2 \subset X_2$, et avec $B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ on a $B_3 \subset X_1 \cap X_2$ *a fortiori*, donc $X_1 \cap X_2 \in \mathcal{F}$, d'où la stabilité par intersection finie de $\mathcal{F}$; enfin, si Y de E contient un X de $\mathcal{F}$ qui lui-même contient un B de $\mathcal{B}$, on a $B \subset Y$ d'où $Y \in \mathcal{F}$. ■

Par exemple, dans E topologique, les ouverts contenant a sont une base de filtre du filtre des voisinages de a.

Nous pouvons alors généraliser la notion de limite et de valeur d'adhérence.

DÉFINITION 1.59. — *Soit un ensemble X muni d'un filtre $\mathcal{F}$, (resp. base de filtre $\mathcal{B}$), et f une application de X dans E topologique. On dit que f converge vers l de E pour le filtre $\mathcal{F}$ (resp. base de filtre $\mathcal{B}$) si et seulement si, $\forall V$ voisinage de l, $\exists F \in \mathcal{F}$, $f(F) \subset V$, (resp. $\exists B \in \mathcal{B}, f(B) \subset V$).*

Il est clair que si X est topologique, si $\mathcal{F}$ est le filtre des voisinages de a, et si $l = f(a)$ on traduit la notion de f continue en a. Par contre, avec l quelconque dans E, on traduit l'étude du prolongement par continuité de f en a. Avec l'exemple 1.56 de base de filtre, on aurait la limite d'une suite f de $\mathbb{N}$ dans E, alors que l'exemple 1.58 traduit l'étude des limites lorsque la variable devient infinie dans $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 1.60. — *Soit X muni d'un filtre, (resp. base de filtre) et $f : X \mapsto E$ avec E espace topologique séparé. Si l'application f admet une limite suivant le filtre, (resp. base filtre) elle est unique.*

Car si on suppose que $\lim\limits_{\mathcal{B}} f = l$ mais aussi $= l'$, (on traite le cas d'une base de filtre), avec $l \neq l'$, soient V_l et $V_{l'}$ voisinages disjoints de l et l', et B et B' dans $\mathcal{B}$ tels que respectivement $f(B) \subset V_l$ et $f(B') \subset V_{l'}$, on est bien embarrassé avec B'' non vide, $B'' \subset B \cap B'$, car alors $f(B'') \neq \emptyset$ et $f(B'') \subset \big(f(B) \cap f(B')\big) \subset (V_l \cap V_{l'}) = \emptyset$: c'est absurde. Donc la limite est unique.

On peut aussi introduire les valeurs d'adhérences suivant un filtre.

DÉFINITION 1.61. — *Soit X un ensemble muni d'un filtre (resp. base de filtre) et f une application de X dans E topologique. Un élément a de E est dit valeur d'adhérence de f suivant le filtre (resp. base de filtre) si pour tout F de $\mathcal{F}$ (resp. $\forall B \in \mathcal{B}$) et pour tout voisinage V de a on a $f(F) \cap V \neq \emptyset$ (resp. $f(B) \cap V \neq \emptyset$).*

Le lecteur avisé, (mais ne le sont-ils pas tous) aura remarqué que l'ensemble des valeurs d'adhérence est alors le fermé $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} \overline{f(F)}$, (resp. $\bigcap\limits_{B \in \mathcal{B}} \overline{f(B)}$).

Et le lecteur encore plus avisé se dira que l'on peut encore généraliser en remplaçant E et les voisinages à l'arrivée par... un autre ensemble Y muni d'un filtre, (ou d'une base de filtre). Et oui, et c'est ce que l'on fait pour traiter le cas de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ par exemple.

Pour continuer l'étude de la topologie, et avant d'aborder la compacité, la connexité... il nous faut encore parler des sous-espaces topologiques et des espaces produits.

5. Sous-espace topologique

1.62. Soit une partie A d'un espace topologique E. On considère *l'injection canonique* : $i : A \mapsto E$ définie par : $\forall x \in A,\ i(x) = x$, considéré comme élément de E.

On veut munir A d'une topologie $\mathcal{T}_A$ rendant i continue, et la moins fine rendant i continue. Pour cela il faut et il suffit que pour tout O ouvert de E, $i^{-1}(O) = O \cap A$ soit un ouvert de $\mathcal{T}_A$ et que $\mathcal{T}_A$ soit la topologie la moins fine contenant les $O \cap A$ parmi ses ouverts. Or on a

THÉORÈME 1.63. — *Soit A une partie de E espace topologique. Les $O \cap A, \forall O$ ouvert de E sont les ouverts d'une topologie $\mathcal{T}_A$ sur A, appelée topologie de sous espace.*

En effet $\varnothing = \varnothing \cap A$ et $A = E \cap A$ sont dans $\mathcal{T}_A$, (abus de notation, je désigne ici par $\mathcal{T}_A$ les ouverts de la topologie).

Si on a des ouverts $(\omega_i)_{i \in I}$ de $\mathcal{T}_A$, c'est qu'il existe des O_i ouverts de E tels que $\omega_i = O_i \cap A$ et alors $\bigcup\limits_{i \in I} \omega_i = \bigcup\limits_{i \in I} (O_i \cap A) = (\bigcup\limits_{i \in I} O_i) \cap A$, avec $O = \bigcup\limits_{i \in I} O_i$ ouvert de E : on a bien $\bigcup\limits_{i \in I} \omega_i \in \mathcal{T}_A$. On vérifierait de même la stabilité par intersection finie des ouverts de $\mathcal{T}_A$. ■

THÉORÈME 1.64. — *Soit A un sous-espace topologique de E. Les fermés de A sont les $F \cap A$, $\forall F$ fermé de E; les voisinages de $a \in A$, dans A, sont les $V \cap A$, $\forall V$ voisinage de a dans E.*

En effet, on a L est un fermé de $A \Leftrightarrow \exists \omega$ ouvert de A tel que $L = A - \omega$. Mais ceci équivaut à : $\exists O$ ouvert de E tel que

$$\begin{aligned} L = A - (O \cap A) &= \{x;\ x \in A, x \notin O \cap A\} \\ &= \{x;\ x \in A,\ x \notin O\} = A \cap (E \smallsetminus O) \\ &= A \cap F \text{ avec } F = E \smallsetminus O, \text{ fermé de } E. \end{aligned}$$

Puis, si V_A est un voisinage de a de A pour la topologie $\mathcal{T}_A$, il existe ω ouvert de $\mathcal{T}_A$ avec $a \in \omega \subset V_A \subset A$, donc il existe O ouvert de E tel que : $a \in (O \cap A) \subset V_A \subset A$.

Soit alors $V = V_A \cup O$, comme $a \in O$ ouvert de E, inclus dans V on a V voisinage de a dans E, et $V \cap A = (V_A \cap A) \cup (O \cap A)$.

Or $V_A \subset A$, donc $V_A \cap A = V_A$ et comme $O \cap A \subset V_A$, il reste finalement $V \cap A = V_A$: on obtient bien V_A sous la forme voulue.

Réciproquement soit a $\in A$ et V un voisinage de a dans E, avec O ouvert de E tel que $a \in O \subset V$ on a : $a \in O \cap A \subset V \cap A$: donc $V \cap A$ est bien voisinage de a dans la topologie $\mathcal{T}_A$ puisque $O \cap A$ est un ouvert de A.

Pour résumer, la topologie de sous-espace c'est simple : on coupe tout par A. Mais ne simplifions pas trop car des surprises sont possibles.

Ainsi des ouverts de A peuvent être des fermés de E, ou vice versa.

EXEMPLE 1.65. — $E = \mathbb{R}, A = \{0\} \cup]1,2[$.

Alors $\{0\}$ est un ouvert de A, (c'est $A \cap]-1/2, 1/2[$ par exemple) et $]1,2[$ est un fermé de A car $A \cap [1,2] =]1,2[$.

Transitivité de la notion de sous-espace

THÉORÈME 1.66. — *Soit E un espace topologique, et A et B deux parties de E, avec $A \subset B$. La topologie $\mathcal{T}_A$ de A sous-espace de E est la même que la topologie $\mathcal{T}'_A$ de A sous-espace du sous-espace B.*

Cet énoncé peut sembler farfelu, mais en fait il permet, très rapidement de ne plus se poser de question de structure.

Les ouverts de $\mathcal{T}'_A$ sont les $A \cap \omega$, $\forall \omega$ ouvert de B sous-espace, donc $\forall \omega$ du type $O \cap B$ avec O ouvert de E; on a donc $A \cap \omega = A \cap O \cap B$ avec $A \cap B = A$ car $A \subset B$: il reste bien les $A \cap O$, ouverts de $\mathcal{T}_A$.

Nous avons considéré les notions de continuité, limite, espace séparé, il est normal de voir ce qu'elles deviennent avec les sous-espaces topologiques.

Continuité et sous-espace. Il y a deux questions, suivant que le sous-espace est au départ ou à l'arrivée.

THÉORÈME 1.67. — *Soient E et F deux espaces topologiques, et B un sous-espace topologique de F. Soit f une application de E dans F, à valeurs dans B. On a f continue en x, (resp. sur E) si et seulement si, considérée comme à valeurs dans B elle l'est.*

On note f_B la fonction f, considérée comme à valeurs dans B. On a, avec i injection canonique de B dans F, $f = i \circ f_B$. Comme i est continue de B dans F, (par définition de la structure de sous-espace) on a f_B continue en x (resp. sur E) d'où f continue en x (resp. sur E) d'après le théorème 1.39.

Réciproquement si f est continue en x, on a f_B continue car si $(V \cap B)$ est un voisinage de $f_B(x) = f(x)$ dans B, il existe U voisinage de x dans E tel que $f(U) \subset V$. Mais comme f est à valeur dans B, on a $f(U) \subset B$ donc $f_B(U) \subset (V \cap B)$: on a bien continuité de f_B. ■

Et au départ? lors là, attention : pas d'équivalence! On a :

THÉORÈME 1.68. — *Soient E et F topologiques et $f : E \mapsto F$ une application continue. Si A est un sous-espace de E la restriction $f|_A$ de f à A est continue de A dans F. (De même si f est continue en $a \in A$, $f|_A$ est continue en a).*

En effet soit V un voisinage, dans F, de $f(a) = f|_A(a)$.

Comme on suppose f continue en a, il existe U voisinage de a dans E tel que $f(U) \subset V$, mais alors $U \cap A$ est voisinage de a dans A, (Théorème 1.64), et on a $f|_A(U \cap A) \subset f(U) \subset V$: on a bien $f|_A$ continue en a puisque pour tout voisinage V de $f|_A(a)$, il existe $U \cap A$ voisinage de a dans A tel que $f|_A(U \cap A) \subset V$.

Par contre (continuité de $f|_A$ en a) $\not\Rightarrow$ (continuité de f en a).

EXEMPLE 1.69. — $F = E = \mathbb{R}, A = \mathbb{Q}, f = \chi_{\mathbb{Q}}$ fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ définie par $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 si $x \notin \mathbb{Q}$.

On a $f|_{\mathbb{Q}}$ est constante, égale à 1, donc continue de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, (1.33), de même d'ailleurs que $f|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$, constante, est continue de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Mais f n'est continue nulle part.

On peut cependant remarquer que si A, sous-espace de E, est un voisinage de a dans la topologie de E, alors si $f|_A$ est continue en a, de A dans F, on aura f continue en a, de E dans F, car si V est un voisinage de $f(a) = f|_A(a)$, il existe U_A voisinage de a dans le sous-espace A, donc du type $U_A = U \cap A$ avec U voisinage de a dans E, tel que $f|_A(U \cap A) = f(U \cap A) \subset V$, mais comme A est aussi voisinage de a dans E, on a $U \cap A$ voisinage de a dans E tel que $f(U \cap A) \subset V$ d'où f continue en a.

Sous-espace et séparation

THÉORÈME 1.70. — *Tout sous-espace d'un espace séparé est séparé.*

Car soit A une partie de E espace topologique séparé, a et b deux éléments distincts de A, si V_a et V_b sont deux voisinages disjoints de a et b dans E, (voir définition 1.46), alors $A \cap V_a$ et $A \cap V_b$ sont deux voisinages de a et b dans A (Théorème 1.64), disjoints, donc A est bien séparé.

6. Produit fini d'espaces topologiques

Soient des espaces topologiques *en nombre fini*, $E_1, \ldots, E_n$, n entier $\geqslant 2$, et leur produit cartésien $E = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \prod_{i=1}^{n} E_i$ dont les éléments sont les n-uplets $x = (x_1, \ldots, x_n)$. On dispose des n projections canoniques $p_i : E \mapsto E_i$ définies par

1.71. $$p_i(x) = x_i = \text{la « } i^{\text{eme}} \text{ composante » de } x.$$

On appelle *topologie produit* sur E la topologie la moins fine rendant continue chaque projection p_i.

C'est donc la topologie la moins fine, contenant dans ses ouverts les parties du type $p_i^{-1}(\omega_i) = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_{i-1} \times \omega_i \times E_{i+1} \times \ldots \times E_n$ et ceci pour tout ouvert ω_i de E_i.

Donc les intersections finies de parties du type $p_i^{-1}(\omega_i)$ doivent être aussi des ouverts, ainsi que les réunions de ces intersections finies. Or, si on se donne, $\forall i = 1 \ldots, n$, des ω_i ouverts de E_i et si on considère $\Omega = \omega_1 \times \omega_2 \times \ldots \times \omega_n = \bigcap_{i=1}^{n} p_i^{-1}(\omega_i)$, on appelle une partie de ce type un *ouvert élémentaire*, et on va vérifier que les réunions d'ouverts élémentaires vérifient les conditions des ouverts d'une topologie : ce sera la topologie cherchée.

THÉORÈME 1.72. — *Soient $E_1, \ldots, E_n$ des espaces topologiques. Soient $(\omega_i)_{i=1\ldots n}$ des ouverts des E_i, les réunions d'ouverts élémentaires, parties du type $\Omega = \omega_1 \times \omega_2 \times \ldots \times \omega_n$ de $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ sont les ouverts d'une topologie sur E, la moins fine rendant continue chaque projection p_i de E sur E_i, appelée topologie produit.*

Le fait que ce sera la moins fine rendant les p_i continue a été justifié en introduction. Il reste à vérifier que l'on a les ouverts d'une topologie.

Les ouverts élémentaires sont des ouverts (réunion d'une partie formée d'un seul ouvert élémentaire) donc $\emptyset = \emptyset \times E_2 \times \ldots \times E_n$ par exemple et $E = E_1 \times E_2 \times \ldots E_n$ sont ouverts.

La stabilité de la notion d'ouvert par réunion d'ouverts est évidente, (réunion de réunions... c'est une réunion).

Enfin soient $\Omega_1, \ldots, \Omega_p$ des ouverts en nombre fini, avec, $\forall k$ de $\{1, \ldots, p\}$, $\Omega_k = \bigcup_{j_k \in J_k} (\omega_1^{jk} \times \ldots \times \omega_n^{jk})$, les ω_i^{jk} ouverts de E_i. On a :

$$\bigcap_{k=1}^{p} \Omega_k = \bigcup_{\substack{(j_1,\ldots,j_p)\\ \in J_1 \times \ldots \times J_p}} \left[\left(\bigcap_{k=1}^{p} \omega_1^{jk} \right) \times \ldots \times \left(\bigcap_{k=1}^{p} \omega_i^{jk} \right) \ldots \times \left(\bigcap_{k=1}^{p} \omega_n^{jk} \right) \right]$$

est bien réunion d'ouverts élémentaires. On a une topologie sur $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$. ■

REMARQUE 1.73. — Pour la topologie sur E, l'image directe d'un ouvert Ω de E pour une projection p_i est un ouvert de E_i, mais c'est faux pour un fermé.

Seuls les ouverts élémentaires non vides interviennent. Soit donc $\Omega = \bigcup_{j \in J} (\omega_1^j \times \ldots \times \omega_n^j)$ avec les ω_k^j ouverts non vides de E_k, on a $p_i(\Omega) = \bigcup_{j \in J} p_i(\omega_1^j \times \ldots \times \omega_i^j \times \ldots \times \omega_n^j) = \bigcup_{j \in J} \omega_i^j$ est bien ouvert de E_i.

Par contre, prenons $E = \mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle, (on verra que c'est la topologie produit), l'hyperbole $H = \{(x, y);\ xy - 1 = 0\}$ est un fermé de E, $\left((x, y) \overset{\theta}{\rightsquigarrow} xy - 1 \right)$ est continue car polynômiale et $H = \theta^{-1}\{0\}$, or la projection de H sur « l'axe de x » est $\mathbb{R}^*$ non fermé.

Nous disposons maintenant des notions de sous-espace, d'espace produit, de continuité, limite, séparation : qu'obtient-on en les confrontant ?

D'abord, sur les espaces produits, vérifions l'associativité de la structure, ce qui permettra de ramener leur étude théorique au cas de deux.

THÉORÈME 1.74. — *Soient A, B, C trois espace topologiques, les espaces produits $A \times B \times C$, $A \times (B \times C)$ et $(A \times B) \times C$ sont homéomorphes.*

Soit θ la bijection de $(A \times B) \times C$ sur $A \times B \times C$ qui au couple $((x, y), z)$ associe le triplet (x, y, z). C'est un homéomorphisme (c'est-à-dire θ et θ^{-1} sont continues), car si Ω est un ouvert de $A \times B \times C$, avec $\Omega = \bigcup_{j \in J} (\omega_A^j \times \omega_B^j \times \omega_C^j)$, ω_A^j, ω_B^j et ω_C^j étant des ouverts de A, B, C respectivement, on a

$$\theta^{-1}(\Omega) = \bigcup_{j \in J} \theta^{-1}\left(\omega_A^j \times \omega_B^j \times \omega_C^j\right) = \bigcup_{j \in J} \left[\left(\omega_A^j \times \omega_B^j\right) \times \omega_C^j\right].$$

Or $\omega_A^j \times \omega_B^j$ est un ouvert de l'espace produit $A \times B$: on obtient donc pour $(\omega_A^j \times \omega_B^j) \times \omega_C^j$ un ouvert élémentaire de l'espace produit de $(A \times B)$ par C : finalement $\theta^{-1}(\Omega)$ est ouvert de $(A \times B) \times C$.

Si de même $\mathcal{O}$ est un ouvert de $(A \times B) \times C$, $\mathcal{O}$ est une réunion d'ouverts élémentaires du type $O^i \times \omega_C^i$ avec O^i ouvert de $A \times B$ donc lui-même du type $O^i = \bigcup_{k_i \in K_i} \omega_A^{k_i} \times \omega_B^{k_i}$. On a donc

$$\mathcal{O} = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{k_i \in K_i} \omega_A^{k_i} \times \omega_B^{k_i} \right) \times \omega_C^i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{k_i \in K_i} (\omega_A^{k_i} \times \omega_B^{k_i}) \times \omega_C^i$$

d'image par θ, l'image d'une réunion, c'est la réunion des images),

$\theta(\mathcal{O}) = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{k_i \in K_i} \omega_A^{k_i} \times \omega_B^{k_i} \times \omega_C^i$: c'est bien en ouvert de l'espace topologique produit $A \times B \times C$. ■

On vérifierait de même que :

THÉORÈME 1.75. — *Les espaces produits $E \times F$ et $F \times E$ sont homéomorphes.*

Avec l'homéomorphisme $\theta : (x, y) \rightsquigarrow (y, x)$. ■

On a aussi :

THÉORÈME 1.76. — *Soient des sous-espaces A_i des espaces topologiques $E_1, \dots, E_n$. Alors, sur $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$, les topologies de A sous-espace de $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$, et de A espace produit des sous-espaces A_i des E_i sont les mêmes.*

On se sent mieux ! D'autant qu'*a priori* l'individu normalement constitué ne se posait même pas la question. Et il obtient la réponse avant même de concevoir le problème !

Justifions-le dans le cas de deux espaces. Soient A et B deux sous-espaces de E et F respectivement. Les ouverts de $A \times B$ sous-espace de $E \times F$ sont les $(A \times B) \cap \left(\bigcup_{i \in I} \omega_E^i \times \omega_F^i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \cap \omega_E^i) \times (B \cap \omega_F^i)$ avec ω_E^i et ω_F^i ouverts de E et F respectivement. On retrouve exactement les réunions d'ouverts élémentaires de la topologie produit de A sous-espace de E par celle de B sous-espace de F. ■

THÉORÈME 1.77. – *Un espace produit $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ est séparé si et seulement si chaque E_i est séparé.*

Grâce au théorème 1.74, on le justifie pour un produit de deux espaces.

Soient E_1 et E_2 séparés et $X = (x_1, x_2), Y = (y_1, y_2)$ deux éléments distincts de $E = E_1 \times E_2$: une de leur composante au moins est distincte, par exemple $x_1 \neq y_1$. Mais alors dans E_1 séparé il existe deux voisinages disjoints les contenant, *a fortiori* il existe deux ouverts disjoints $w_1(x_1)$ et $\omega_1(y_1)$ dans E_1 avec $x_1 \in \omega_1(x_1)$ et $y_1 \in \omega_1(y_1)$.

On a $X = (x_1, x_2) \in \Omega_1 = \omega_1(x_1) \times E_2$ et $Y = (y_1, y_2) \in \Omega_2 = \omega_1(y_1) \times E_2$, or Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts de E, (car ouverts élémentaires), disjoints (leur première composante l'est) voisinages respectifs de X et Y : l'espace $E_1 \times E_2$ est donc séparé.

Réciproquement si $E = E_1 \times E_2$ est séparé, on a E_1, (et E_2) séparé car soit x_1 et y_1 deux éléments distincts de E_1.

On choisit a_2 dans E_2, les éléments $X = (x_1, a_2)$ et $Y = (y_1, a_2)$ sont distincts dans E séparé : il existe des voisinages disjoints de X et Y dans E ; donc des ouverts de E, disjoints, les contenant ; donc (structure des ouverts d'un produit) des ouverts élémentaires disjoints les contenant. On a finalement ω_1^X, ω_1^Y ouverts de E_1 et ω_2^X, ω_2^Y ouverts de E_2 tels que :

$$X = (x_1, a_2) \in \omega_1^X \times \omega_2^X \quad \text{et} \quad Y = (y_1, a_2) \in \omega_1^Y \times \omega_2^Y$$

avec en outre $\left(\omega_1^X \times \omega_2^X\right) \cap \left(\omega_1^Y \times \omega_2^Y\right) = \emptyset$. Comme $a_2 \in \omega_2^X \cap \omega_2^Y$ qui est non vide, forcément $\omega_1^X \cap \omega_1^Y = \emptyset$: dans E_1 on a trouvé deux voisinages disjoints ω_1^X et ω_1^Y de x_1 et y_1 respectivement. ■

THÉORÈME 1.78. — *Un espace topologique E est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x, x), x \in E\}$ est un fermé de l'espace produit $E \times E$.*

Car (Δ fermé de $E \times E$) $\Leftrightarrow$ ($\Omega = E \times E \setminus \Delta$ est ouvert), donc voisinage de chacun de ses éléments, c'est-à-dire des couples (x, y) de $E \times E$ avec $x \neq y$. Donc Δ fermé de $E \Leftrightarrow \forall (x, y) \in E^2$ avec $x \neq y$ il existe un ouvert de E^2, contenant (x, y), inclus dans Ω, mais à son tour ceci équivaut à : il existe un ouvert élémentaire $\omega_x \times \omega_y$ avec $(x, y) \in \omega_x \times \omega_y$ et $\omega_x \times \omega_y \subset \Omega = E \times E \setminus \Delta$, cette dernière inclusion équivalent à $\omega_x \cap \omega_y = \emptyset$.

On a bien Δ fermé $\Leftrightarrow \forall x \neq y$, $\exists \omega_x$ et ω_y ouverts de E contenant x et y respectivement, et disjoints. C'est bien la traduction de E séparé.

Nous pouvons maintenant aborder les liens entre continuité et structure produit en considérant deux cas de figure, suivant que la structure produit est au départ, ou à l'arrivée.

THÉORÈME 1.79. — *Soit E un espace topologique, et $F = \prod_{i=1}^{n} F_i$ un espace topologique produit des espace F_i. Soit $f : E \mapsto F$ une application de composantes les $f_i : E \mapsto F_i$. Pour que f soit continue en $a \in E$, (resp. sur E) il faut et il suffit que chaque f_i soit continue en a (resp. sur E).*

Donc dans ce sens, pas de problème : on passe de f à ses composantes par équivalence.

Si, pour $x \in E$, $f(x)$ est le n-uplet $f(x) = (y_1, \ldots, y_n)$ on note f_i l'application $x \rightsquigarrow f_i(x) = y_i = (p_i \circ f)(x)$ avec p_i, projection de F sur F_i introduite en 1.71.

Si donc f est continue en a, comme p_i est continue partout par construction de la topologie produit, $f_i = p_i \circ f$ est continue en a (composition d'applications continues, Théorème 1.39).

Et si chaque f_i est continue en a, f le sera en a car, soit V un voisinage de $f(a) = (f_1(a), \ldots, f_n(a))$. Il existe un ouvert puis un ouvert élémentaire $\omega_1 \times \ldots \times \omega_n$ contenant $f(a)$, inclus dans V.

Or si $f_i(a) \in \omega_i$ ouvert de F_i donc voisinage de $f_i(a)$, comme f_i est continue, $\exists U_i$ voisinage de a dans E tel que $f_i(U_i) \subset \omega_i$.

Mais alors $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ est un voisinage de a dans E, et comme $\forall i, f_i(U) \subset f_i(U_i) \subset \omega_i$ on a $f(U) = \{(f_1(x), \ldots, f_n(x)), x \in U\}$ tel que $f(U) \subset \omega_1 \times \ldots \times \omega_n \subset V$: f est continue en a (définition 1.31 de la continuité).

La continuité sur E en résulte. ∎

Les choses sont moins simples si la structure produit est au départ.

Soit donc $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ un espace topologique, produit des espaces E_i et $a = (a_1, \dots, a_n)$ un élément de E. Soit f une application de E dans F espace topologique. On considère l'application *dite partielle,* φ_i *de* E_i *dans* F *définie par* $x_i \rightsquigarrow \varphi_i(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$.

1.80. *Si* φ_i *est continue en* a_i*, on dira qu'il y a continuité partielle en* a*, par rapport à la* i^{eme} *variable.*

On a alors le :

THÉORÈME 1.81. — *Soit* f *une application définie sur l'espace topologique produit* $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$*, à valeurs dans* F*, topologique. Si* f *est continue en* $a = (a_1, \dots, a_n)$ *alors il y a continuité partielle en* a *par rapport à chaque variable. Mais la réciproque est fausse.*

En effet, φ_i est en fait décomposée en $\varphi_i = f \circ \theta_i$ avec $\theta_i : x_i \rightsquigarrow (a_1, \dots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ continue car ses composantes le sont (Théorème 1.79) $n - 1$ d'entre elles étant constantes, et la i^{eme} étant l'identité, (exemple 1.33). Comme $\theta_i(a_i) = a$ et que f est continue en a, φ_i est continue en a_i, (Théorème 1.39), il y a bien continuité partielle. ∎

1.82. *Contre exemple* Sur $\mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

En $(0, 0)$ il y a continuité partielle par rapport à x et par rapport à y puisque, pour $y = 0$ fixé, $f(x, 0) = 0$ si $x \neq 0$ et $f(0, 0) = 0$: l'application partielle $x \rightsquigarrow f(x, 0)$ est constante donc continue partout, en particulier en 0. Il en est de même de $y \rightsquigarrow f(0, y) = 0$. Mais f n'est pas continue en $(0, 0)$, sinon, l'application $\varphi : t \rightsquigarrow (t, t)$ étant continue sur $\mathbb{R}$, (ses composantes le sont), $f \circ \varphi$ le serait en $t = 0$, or $f \circ \varphi(0) = 0$ et si $t \neq 0$, $(f \circ \varphi)(t) = \dfrac{t^2}{2t^2} = \dfrac{1}{2}$: il y a discontinuité.

Et qu'en est-il des limites : pas de problème

THÉORÈME 1.83. — *Soit* X *un ensemble muni d'un filtre* $\mathcal{F}$*,* f *une application de* X *dans* $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ *espace produit, de composantes les* $f_i = p_i \circ f$.

On a $\lim_{\mathcal{F}} f = l = (l_1, \ldots, l_n)$ *existe dans* $E \Leftrightarrow$ *pour chaque indice* $i = 1, \ldots, n$, $\lim_{\mathcal{F}} f_i = l_i$.

Des remarques :

1) On a le même énoncé avec des bases de filtre.

2) Ce résultat s'appliquera aux suites.

3) J'aurai pu faire l'économie du Théorème 1.79 cas particulier du Théorème 1.83, mais la continuité est tellement importante. Et puis, d'un point de vue didactique, (ouf, je l'ai placé, je suis dans le vent !), passer du particulier au général, ce n'est pas mal.

Soit donc f telle que $\lim_{\mathcal{F}} f = l$ existe, avec $l = (l_1, \ldots, l_n)$ dans E. Soit V_i un voisinage de l_i dans E_i, et ω_i ouvert de E_i tel que $l_i \in \omega_i \subset V_i$, on a $l \in E_1 \times \ldots \times E_{i-1} \times \omega_i \times E_{i+1} \times \ldots \times E_n$, noté V. C'est un ouvert élémentaire de E, donc voisinage de chacun de ses points, donc de l et il existe alors F dans le filtre $\mathcal{F}$ tel que $f(F) \subset V$. En particulier on aura $f_i(F) \subset \omega_i \subset V_i$: on a bien, $\forall V_i$ voisinage de l_i, l'existence de F dans $\mathcal{F}$ tel que $f_i(F) \subset V_i$, d'où $\lim_{\mathcal{F}} f_i = l_i$.

Réciproquement, si on suppose que pour chaque i, $\lim_{\mathcal{F}} f_i = l_i$, soit alors V un voisinage de $l = (l_1, \ldots, l_n)$ dans E, et un ouvert élémentaire $\omega_1 \times \ldots \times \omega_n$ de E, contenant l, contenu dans V.

Pour chaque i, ω_i ouvert contenant l_i est voisinage de l_i, (toujours ce bon vieux Théorème 1.8), et comme $\lim_{\mathcal{F}} f_i = l_i$, il existe $F_i \in \mathcal{F}$ tel que $f_i(F_i) \subset \omega_i$.

Le filtre $\mathcal{F}$ est stable par intersection finie, donc $F = \bigcap_{i=1}^{n} F_i \in \mathcal{F}$ et $f(F) \subset f_1(F) \times f_2(F) \times \ldots \times f_n(F) \subset \omega_1 \times \omega_2 \times \ldots \times \omega_n \subset V$: on a trouvé $F \in \mathcal{F}$ tel que $f(F) \subset V$ d'où $\lim_{\mathcal{F}} f = l$. ■

Des conséquences de tout cela.

THÉORÈME 1.84. — *Soient f et g deux applications continues de X topologique dans E séparé. L'ensemble des x de X tels que $f(x) = g(x)$ est un fermé de X.*

En effet $\theta : x \rightsquigarrow (f(x), g(x))$ est continue de X dans $E \times E$ car ses composantes le sont, (Théorème 1.79), or la diagonale Δ est un fermé de

$E \times E$ car E séparé, (Théorème 1.78), donc $\theta^{-1}(\Delta) = \{x, x \in E, f(x) = g(x)\}$ est fermé de X. ■

COROLLAIRE 1.85. — *Soit f continue de X topologique dans E séparé, son graphe $\Gamma = \{(x, f(x))\,;\ x \in X\}$ est un fermé de $X \times E$.*

Car les applications f_1 et g_1 de $X \times E$ dans E, séparé, définies par $f_1 : (x, y) \rightsquigarrow y$ et $g_1 : (x, y) \rightsquigarrow f(x)$ sont continues, (f_1 est une projection, et g_1 composée de $(x, y) \rightsquigarrow x$, projection, et de f).

Donc $\{(x, y);\ (x, y) \in X \times E; f_1(x, y) = g_1(x, y)\}$ est un fermé de $X \times E$ or $(f_1(x, y) = g_1(x, y)) \Leftrightarrow (y = f(x)) \Leftrightarrow ((x, y) \in \Gamma)$ d'où le résultat. ■

La réciproque est fausse : soit $X = E = \mathbb{R}$ et $f : X \mapsto E$ définie par $f(0) = 0$ et si $x \neq 0, f(x) = \dfrac{1}{x}$.

L'application f n'est pas continue, et pourtant son graphe $\Gamma = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y);\ xy = 1\}$ est fermé comme union de deux fermés, (un singleton dans $\mathbb{R}^2$ séparé, et l'hyperbole H déjà rencontré en 1.73.

D'ailleurs, cette hyperbole amène à une justification qui s'impose :

1.86 *La topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$ est celle d'espace produit, pour la topologie d'ensemble ordonné sur $\mathbb{R}$, rencontrée en 1.5.*

En effet, Ω non vide, est ouvert de $\mathbb{R}^2$, (topologie usuelle) si et seulement si, pour tout $x = (\alpha, \beta)$ de Ω, $\exists r(x) > 0$ tel que $\mathcal{O}_x =]\alpha - r(x), \alpha + r(x)[\times]\beta - r(x), \beta + r(x)[\subset \Omega$. Mais il est facile de vérifier, qu'avec ces notations, $\Omega = \bigcup_{x \in \Omega} \mathcal{O}_x$, les $\mathcal{O}_x$ étant des ouverts élémentaires de la topologie produit. Donc Ω est un ouvert de la topologie produit. Il en est de même pour $\emptyset$.

Puis, réciproquement, si Ω est un ouvert de la topologie produit, si $\Omega \neq \emptyset$, soit $x = (\alpha, \beta)$ dans Ω, réunion d'ouverts élémentaires il existe deux ouverts ω_α et ω_β de $\mathbb{R}$ tels que $x = (\alpha, \beta) \in \omega_\alpha \times \omega_\beta \subset \Omega$.

Puis $\alpha \in \omega_\alpha$ donc $\exists r_\alpha > 0$ tel que $]\alpha - r_\alpha, \alpha + r_\alpha[\subset \omega_\alpha$, et $\beta \in \omega_\beta$ donc $\exists r_\beta > 0$ tel que $]\beta - r_\beta, \beta + r_\beta[\subset \omega_\beta$, finalement, avec $r_x = \inf(r_\alpha, r_\beta)$ on a un $r_x > 0$ tel que $x \in]\alpha - r_x, \alpha + r_x[\times]\beta - r_x, \beta + r_x[\subset \Omega$: Ω est bien un ouvert de $\mathbb{R}^2$ pour la topologie usuelle. ■

Cette justification s'étend au cas de $\mathbb{R}^n$, et nous permettra de ne pas attendre la construction de $\mathbb{R}$ pour utiliser, en exemple ou contre exemple, des propriétés déjà connues.

EXERCICES

1. Soit E un espace topologique contenant une partie dénombrable partout dense. Montrer que toute famille d'ouverts disjoints, non vides, est dénombrable.

2. Soit f application de E dans F, (espaces topologiques). Montrer que f est continue si et seulement si pour toute partie A de E, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

3. Démontrer que $\mathbb{N}$ n'admet pas, dans $\mathbb{R}$, de base dénombrable de voisinages.

4. Soit k réel positif, pour n entier non nul on pose

$$\omega_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$

$$\text{et} \quad \Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \omega_n.$$

Condition nécessaire et suffisante pour que Ω soit fermé.

5. Montrer que $f : E \mapsto F$ est continue si et seulement si $g : x \rightsquigarrow (x, f(x))$ est un homéomorphisme de E sur le graphe $\Gamma = \{(x, f(x));\ x \in E\}$, sous-espace topologique de $E \times F$.

6. Soit E topologique tel que tout point admet un voisinage fermé qui est sous-espace séparé de E. Montrer que E est séparé.

7. Soit E topologique, A et B deux parties de E telles que $E = A \cup B$. Soit $D \subset (A \cap B)$, D étant ouvert de A et ouvert de B. Montrer que D est ouvert de E.

8. Soit A une partie de E espace topologique. Montrer que A est non dense si et seulement si tout ouvert non vide de E contient un ouvert non vide ne rencontrant pas A.

9. Trouver, dans $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle, une partie A telle que $A, \overline{A}, \mathring{A}, \overline{\mathring{A}}, \mathring{\overline{A}}, \mathring{\overline{\mathring{A}}}$, et $\overline{\mathring{\overline{A}}}$ soient distincts.

10. Caractériser tous les homéomorphismes de $[0,1]$, (sous-espace de $\mathbb{R}$) sur lui-même.

11. Soit E topologique. Vérifier que (A fermé $\Leftrightarrow$ ((frontière de A) $\subset A$) et (A ouvert) $\Leftrightarrow$ ($A\cap$ (frontière de A) $= \emptyset$).

12. Monter que, si E est un espace topologique, la diagonale Δ, sous-espace de l'espace produit $E \times E$ est homéomorphe à E.

13. Soit f fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ dérivable. Montrer que $f'(a)$ est valeur d'adhérence de $f'(]a,b[)$.

14. Vérifier que (A et B ouverts disjoints de E) implique $(\overset{\circ}{\overline{A}} \cap \overset{\circ}{\overline{B}} = \emptyset)$ et que (A et B fermés de E avec $A \cup B = E$) $\Rightarrow$ $(\overline{\overset{\circ}{A}} \cup \overline{\overset{\circ}{B}} = E)$.

15. Montrer que $A = \{(x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \{x,y\} \text{ libre}\}$ est un ouvert de $(\mathbb{R}^n)^2$.

SOLUTIONS

1. Il existe une partie dénombrable $A = \{a_k, k \in K, K \subset \mathbb{N}\}$, telle que $\overline{A} = E$, (K peut être une partie finie de $\mathbb{N}$).
Soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts non vides, disjoints de E.
Pour chaque i de I, il existe x_i dans O_i et comme x_i est adhérent à A, que O_i est voisinage de x_i, (O_i ouvert) on a $O_i \cap A \neq \emptyset$, donc il existe $k(i) \in K$ tel que $a_{k(i)} \in O_i \cap A$.

Les O_i étant disjoints, l'application $i \rightsquigarrow k(i)$ est une injection de I dans K donc $\operatorname{card} I \leqslant \operatorname{card} K \leqslant \operatorname{card} \mathbb{N}$: on a bien I dénombrable, (c'est-à-dire fini ou équipotent à $\mathbb{N}$).

2. Soit f continue de E dans $F, A \subset E$.
Si $A = \emptyset, \overline{A} = \emptyset$ et $f(\overline{A}) = \emptyset \subset \overline{f(A)}$.
Sinon, soit x dans $\overline{A}$, et U un voisinage quelconque de $f(x)$, il existe V voisinage de x tel que $f(V) \subset U$, comme $x \in \overline{A}$, on a $V \cap A \neq \emptyset$, d'où avec $x' \in V \cap A$, $f(x') \in \cup \cap f(A)$ qui est non vide : on a bien $f(x)$ adhérent à $f(A)$, tout voisinage de $f(x)$ rencontrant $f(A)$.
Réciproquement si f vérifie la propriété, on va prouver que pour tout fermé K de F, $f^{-1}(K)$ est un fermé de E. C'est évident si $f^{-1}(K)$ est $\emptyset$.

Supposons donc $A = f^{-1}(K) \neq \emptyset$. Si A est non fermé, on a $A \subsetneq \overline{A}$, soit $x \in \overline{A} - A$. Comme $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$, $f(x)$ est adhérent à $f(A) = f(f^{-1}(K)) \subset K$.

Mais $\overline{f(f^{-1}(K))} \subset \overline{K} = K$, ($K$ fermé) implique $f(x) \in K$ d'où $x \in f^{-1}(K) = A$: c'est absurde. Donc A est fermé et f est continue.

3. On procède par l'absurde en supposant que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base dénombrable de voisinages de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Soit $O = \bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}}]p - \frac{1}{4}, p + \frac{1}{4}[$: c'est un voisinage (ouvert) de $\mathbb{N}$, donc les $U_n = V_n \cap O$ forment aussi une base dénombrable de voisinages de $\mathbb{N}$.

Si on pose $U_{n,p} = V_n \cap]p - \frac{1}{4}, p + \frac{1}{4}[$, c'est un voisinage de p,

et $U_n = \bigcup\limits_{p\in\mathbb{N}} U_{n,p}$.

On choisit alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, un intervalle $I_n \subsetneq U_{n,n}$, I_n ouvert contenant n. Alors $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un ouvert, (réunion d'ouverts) contenant $\mathbb{N}$, et ce voisinage Ω de $\mathbb{N}$ ne contient aucun U_n, car s'il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que $U_{n_0} \subset \Omega$, alors $U_{n_0} \cap]n_0 - \frac{1}{4}, n_0 + \frac{1}{4}[\subset \Omega \cap (]n_0 - \frac{1}{4}, n_0 + \frac{1}{4}[$.

Mais Ω est la réunion des $I_p \subsetneq U_{p,p} \subset]p - \frac{1}{4}, p + \frac{1}{4}[$ donc pour $p \neq n_0$, $I_p \cap]n_0 - \frac{1}{4}, n_0 + \frac{1}{4}[= \emptyset$, et pour $p = n_0$ il vient $I_{n_0} \cap]n_0 - \frac{1}{4}, n_0 + \frac{1}{4}[= I_{n_0}$, on aurait donc $\Omega \cap]n_0 - \frac{1}{4}, n_0 + \frac{1}{4}[= I_{n_0}$. Mais on montre de même que $U_{n_0} \cap]n_0 - \frac{1}{4}, n_0 + \frac{1}{4}[= U_{n_0}, n_0$.

On aurait donc $U_{n_0,n_0} \subset I_{n_0} \subsetneq U_{n_0,n_0}$: *c'est absurde*.
Finalement, $\mathbb{N}$ n'a pas de base dénombrable de voisinages.

4. Dans un plan euclidien on peut représenter ω_n par le disque fermé de centre $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ de rayon $\frac{k}{n}$.

Les points $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ sont dans ω_n donc dans Ω; si Ω est fermé, la limite $(0,0)$ de ces points est dans Ω, donc il existe n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $(0,0) \in \omega_n$, soit encore tel que $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{k^2}{n^2}$, ou $k^2 \geqslant 2$. Donc Ω fermé $\Rightarrow k \geqslant \sqrt{2}$.

Mais si $k \geqslant \sqrt{2}$, on a $\omega_{n+1} \subset \omega_n$, car avec la distance euclidienne, si $M(x,y)$ est dans ω_{n+1} disque fermé de centre $A_{n+1}\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$ et de rayon $\dfrac{k}{n+1}$ on aura

$$\begin{aligned} d(M, A_n) &\leqslant d(M, A_{n+1}) + d(A_{n+1}, A_n) \\ &\leqslant \frac{k}{n+1} + \sqrt{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right)^2} \\ &\leqslant \frac{k}{n+1} + \sqrt{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \text{ or } \sqrt{2} \leqslant k, \end{aligned}$$

donc $d(M, A_n) \leqslant k\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{k}{n}$: on a bien M dans ω_n.
Mais alors $k \geqslant \sqrt{2} \Rightarrow \Omega = \omega_1$, c'est bien un fermé et finalement, (Ω fermé) $\Leftrightarrow (k \geqslant \sqrt{2})$.

5. D'abord g est bijective car si $m = (x, y) \in \Gamma$, c'est que $y = f(x)$, et $g^{-1}(m) = x$ est unique, (et existe).

Si f est continue, l'application g est continue de E dans $E \times F$, (ses fonctions composantes le sont), à valeurs dans Γ, elle est donc continue de E dans Γ.

Puis $g^{-1} : \Gamma \mapsto E$ définie par $(x, f(x)) \rightsquigarrow x$ apparaît comme la restriction à Γ de la projection $(x, y) \rightsquigarrow x$ de $E \times F$ sur E : elle est donc continue.

Réciproquement, si g et g^{-1} sont continues, g étant continue de E dans Γ, et à valeurs dans Γ, est continue en tant qu'application de E dans $E \times F$, mais alors sa deuxième composante, $x \rightsquigarrow f(x)$ est continue de E dans F.

6. Soient x et y distincts de E et V et W des voisinages respectifs de x et y qui sont fermés et sous-espaces séparés de E.

Si $y \notin V = \overline{V}$, en traduisant y non adhérent à V, il existe W' voisinage de y tel que $V \cap W' = \emptyset$: mais alors V et W' sont voisinages disjoints de x et y respectivement.

On traiterait de même le cas $x \notin W = \overline{W}$.

Reste donc le cas où $y \in V$ et $x \in W$, mais alors x et y sont dans $V \cap W$ qui, sous-espace de V, (ou de W) est séparé. Il existe donc $U(x)$ et $U(y)$ voisinages disjoints de x et y dans $V \cap W$. *A fortiori*, (topologie de sous-espace) il existe $U'(x)$ et $U'(y)$ voisinages de x et y dans E, tels que $U(x) = U'(x) \cap V \cap W$ et $U(y) = U'(y) \cap V \cap W$.

Mais alors $U'(x) \cap V$ est voisinage de x dans E, (intersection de deux voisinages de x dans E) et de même $U'(y) \cap W$ est voisinage de y dans E et ils sont disjoints car

$$U'(x) \cap V \cap V'(y) \cap W = U(x) \cap U(y) = \emptyset.$$

Dans tous les cas on a deux voisinages disjoints de x et y distincts de E qui est donc séparé.

7. Comme D est ouvert de A et de B, il existe deux ouverts de E, notés O_A et O_B tels que $D = O_A \cap A = O_B \cap B$. Comme $E = A \cup B$ on a $O_A = O_A \cap (A \cup B) = (O_A \cap A) \cup (O_A \cap B)$.

Mais $D = O_A \cap A \subset A \cap B$ par hypothèse, donc $O_A \cap A \subset B$ et comme $O_A \cap A \subset O_A$, on a $O_A \cap A \subset O_A \cap B$.
Il en résulte que $(O_A \cap A) \cup (O_A \cup B) = O_A \cap B$, et finalement $O_A = O_A \cap B$ donc $O_A \subset B$.
Par symétrie des rôles joués on a aussi $O_B \subset A$, soit $O_B = O_B \cap A$. Mais alors :

$$\begin{aligned} O_A \cap O_B &= (O_A \cap B) \cap (O_B \cap A) = (O_A \cap A) \cap (O_B \cap B) \\ &= D \cap D = D \end{aligned}$$

il en résulte que D, intersection de deux ouverts de E est un ouvert de E.

8. On sait que A non deux signifie que l'intérieur de $\overline{A}$ est vide, donc c'est équivalent à $E - (\mathring{\overline{A}}) = E$ soit encore $\overline{E - \overline{A}} = E$.
Soit O un ouvert non vide de E, comme $E - \overline{A}$ est partout dense, $O' = O \cap (E - \overline{A})$ est non vide, or c'est un ouvert, (intersection de 2 ouverts) disjoint de $\overline{A}$ donc *a fortiori* de A, et $O' \subset O$.

Si réciproquement, on a la propriété, soit $\mathring{\overline{A}}$: c'est un ouvert de E et s'il est non vide, il existe O ouvert non vide avec $O \subset \mathring{\overline{A}}$ et $O \subset A = \emptyset$.
Soit $a \in O, a \in \mathring{\overline{A}} \subset \overline{A}$, donc O étant voisinage de a qui est adhérent à A, on doit avoir $A \cap O \neq \emptyset$. C'est absurde d'où $\mathring{\overline{A}} = \emptyset$ et A non dense.

9. Soit $A = ((]-1, 0[\cup]0, 1[) \times]0, 1[) \cup (\{0\} \times]1, +\infty[) \cup C$ avec $C = \{$ points à coordonnées rationnelles de $]2, 3[\times]0, 1[$.
On a

$$\mathring{A} = (]-1, 0[\cup]0, 1[) \times]0, 1[;$$

$$\overline{\mathring{A}} = [-1, 1] \times [0, 1] \text{ et } \mathring{\overline{\mathring{A}}} =]-1, 1[\times]0, 1[;$$

$$\overline{A} = [-1, 1] \times [0, 1] \cup (\{0\} \times [1, +\infty[) \cup ([2, 3] \times [0, 1])$$

$$\mathring{\overline{A}} = (]-1, 1[\times]0, 1[) \cup (]2, 3[\times]0, 1[) \text{ et}$$

$$\overline{\mathring{\overline{A}}} = [-1, 1] \times [0, 1] \cup [2, 3] \times [0, 1].$$

Les sept ensembles, sauf erreur, sont distincts, mais vous avez certainement trouvé d'autres exemples.

10. La relation d'ordre étant fondamentale sur $\mathbb{R}$, la monotonie va intervenir.
Soit f homéomorphisme de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$, soient $a < b < c$ trois éléments de $[0, 1]$ et α, β, γ leurs images respectives, distinctes car f est injective.
Supposons que $f(a) < f(c)$ et que $\beta = f(b) \notin]f(a), f(c)[$, donc, comme il faut bien placer $f(b)$ quelque part, supposons $f(b) < f(a)$.

Alors $\alpha = f(a) \in]f(b), f(c)[$, donc, f étant continue, il existe a' entre b et c tel que $f(a') = \alpha$, (théorème des valeurs intermédiaires) donc f est non injective. L'hypothèse $f(b) > f(c)$ conduirait aussi à une absurdité donc $f(b) \in]f(a), f(c)[$.

Mais alors f est strictement monotone car, pour tout x et y tels que $0 < x < y < 1$, *si par exemple* $f(0) < f(1)$, on aura : $f(0) < f(x) < f(1)$ donc $f(1) - f(x) > 0$, puis $f(x) < f(y) < f(1)$ donc $f(y) - f(x) > 0$, d'où f strictement croissante. De plus $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ car f est surjective. Le choix $f(1) < f(0)$ conduit à f strictement décroissante avec $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.

Réciproquement soit f strictement monotone de $[0,1]$ sur $[0,1]$. Elle est bijective. Elle est aussi continue car, supposons par exemple f croissante, et soit x dans $[0,1]$ et $\varepsilon > 0$ vérifiant $\varepsilon < \inf(f(x), 1 - f(x))$ si on a $0 < f(x) < 1$, ou $\varepsilon < 1$ si $f(x) = 0$ ou $f(x) = 1$. Les éléments $f(x) - \varepsilon$ et $f(x) + \varepsilon$, (si $0 < f(x) < 1$, sinon il ne reste que $f(x) - \varepsilon$ ou $f(x) + \varepsilon$) ont des antécédents x_1 et x_2, f surjective, avec $x_1 < x < x_2$, f croissante, et par croissance, $f([x_1, x_2]) \subset [f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon]$.

Si $\alpha = \inf(x_2 - x, x - x_1)$ on a trouvé $\alpha > 0$ tel que $|t - x| < \alpha \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Si $f(x) = 0$ ou 1, c'est-à-dire, f étant croissante, si $x = 0$ ou 1, on aménage la formulation.

Donc f est continue, sa réciproque aussi, la même justification s'applique à f^{-1} qui elle aussi est strictement monotone.

Donc f homéomorphisme de $[0,1]$ sur $[0,1]$ équivaut à f strictement monotone de $[0,1]$ sur $[0,1]$.

11. Rappelons que la frontière de A, notée $\mathrm{Fr}(A)$ est, par définition, $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{\complement A}$.

Si A fermé, $A = \overline{A}$ donc $\mathrm{Fr}(A) \subset \overline{A} = A$; et si $\mathrm{Fr}(A) \subset A$ si A n'était pas fermé, on aurait $A \subsetneqq \overline{A}$, soit $x \in \overline{A}, x \notin A$ on aurait $x \in \complement A \subset \overline{\complement A}$ donc $x \in \overline{A} \cap \overline{\complement A} = \mathrm{Fr}(A) \subset A$: c'est absurde, d'où A fermé et l'équivalence.

Par contraposée, A ouvert $\Leftrightarrow B = \complement A$ est fermé, donc vu ce qui précède, A ouvert $\Leftrightarrow \mathrm{Fr}(B) \subset B$.

Or $\quad \mathrm{Fr}(B) = \overline{B} \cap \overline{\complement B}$ avec $B = \complement A$, et $\complement B = A$, c'est encore

$$\mathrm{Fr}(B) = \overline{\complement A} \cap \overline{A} = \mathrm{Fr}(A) \text{ d'où } A \text{ ouvert} \Leftrightarrow (\mathrm{Fr}(A)) \subset \complement(A)$$

soit encore A ouvert $\Leftrightarrow \mathrm{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.

12. Soit $\Delta = \{(x,x);\ x \in E\}$ sous-espace de l'espace produit $E \times E$.

L'application $f : E \mapsto \Delta$, $x \rightsquigarrow f(x) = (x,x)$ est une bijection de E sur Δ, continue car ses applications composantes le sont, (avec $E \times E$ espace d'arrivée), or f est à valeurs dans Δ, donc si elle est continue comme à valeurs dans $E \times E$, elle l'est à valeurs dans Δ. (Théorème 1.67.)

Quant à $f^{-1} : (x,x) \rightsquigarrow x$, c'est la restriction à Δ de la première projection de $E \times E$ sur $E : (x,y) \rightsquigarrow x$ par exemple, donc f^{-1} est continue, on a un homéomorphisme.

13. On a $f'(a)$ valeur d'adhérence de $f'(]a;b[$ si et seulement si, $\forall \varepsilon > 0$, il existe $f'(\xi) \in f'(]a,b[)$ tel que $\left|f'(\xi) - f'(a)\right| \leqslant \varepsilon$.
Or, la dérivabilité à droite en a se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in]a, a+\alpha[, \left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)\right| \leqslant \varepsilon.$$

Comme la formule des accroissements finis s'applique à f sur $[a,x]$, pour $x \in]a, a+\alpha[$, on trouve $\xi \in]a,x[\subset]a,b[$ tel que $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(\xi)$, d'où $\left|f'(\xi) - f'(a)\right| \leqslant \varepsilon$.
Ceci bien sûr ne donne pas $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = f'(a)$.

14. Comme $A \cap B = \varnothing$, $A \subset (E - B)$ avec $E - B$ fermé, d'où pour les adhérences, $\overline{A} \subset \overline{E - B}$ soit $\overline{A} \subset (E - B)$, donc $\overset{\circ}{\overline{A}} \subset \widehat{E - B}^{\circ} = E - \overline{B}$. Mais alors $\overset{\circ}{\overline{A}} \cap \overline{B} = \varnothing$ et comme $\overset{\circ}{\overline{B}} \subset \overline{B}$, *a fortiori* $\overset{\circ}{\overline{A}} \cap \overset{\circ}{\overline{B}} = \varnothing$.
Pour le résultat sur les fermés on va passer aux complémentaires.
Soient A et B fermés de E avec $A \cup B = E$, et $A' = E - A$, $B' = E - B$. Ce sont deux ouverts disjoints de E, donc d'après ce qui précède $\overset{\circ}{\overline{A'}} \cap \overset{\circ}{\overline{B'}} = \varnothing$.

Or $\overline{A'} = \overline{(E - A)} = E - \overset{\circ}{A}$ donc $\overset{\circ}{\overline{A}}{}' = \widehat{E - \overset{\circ}{A}}^{\circ} = E - \overline{\overset{\circ}{A}}$.

On a donc $(E - \overline{\overset{\circ}{A}}) \cap (E - \overline{\overset{\circ}{B}}) = \varnothing$, or c'est encore

$$E - \left(\overline{\overset{\circ}{A}} \cup \overline{\overset{\circ}{B}}\right) = \varnothing.$$

C'est donc que $\overline{\overset{\circ}{A}} \cup \overline{\overset{\circ}{B}} = E$.

15. C'est une plaisanterie car les n-uplets $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ forment une partie libre de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si, $\exists i \neq j$, $x_i y_j - x_j y_i \neq 0$ car on écrit que le rang de la matrice formée des 2 lignes de composantes est deux.
Or $\varphi_{i,j} : (x,y) \rightsquigarrow x_i y_j - x_j y_i$ est continue de $(\mathbb{R}^n)^2$ dans $\mathbb{R}$, car polynômiale et $A = \bigcup\limits_{i \neq j} \varphi_{ij}^{-1}(0)$ est ouvert comme réunion d'ouverts.

CHAPITRE 2

La compacité

Les notions de topologie générale du chapitre I vont vous permettre d'aborder l'étude d'une structure très importante, celle d'espaces compacts. Un grand nombre des résultats établis dans ce chapitre, portant sur des suites, auront une réciproque dans le cadre des espaces métriques, (chapitre IV). Mais il me semble appauvrissant de ne considérer que le point de vue métrique.

1. Espaces compacts

DÉFINITION 2.1. — *Un espace topologique E est dit compact si et seulement si il est séparé, et possède la propriété suivante : pour toute famille $(\omega_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E de réunion E, il existe une partie finie J de I telle que $E = \bigcup\limits_{j\in J} \omega_j$.*

2.2. On appelle *recouvrement ouvert* de E toute famille $(\omega_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E telle que $\bigcup\limits_{i\in I} \omega_i = E$, un tel recouvrement sera dit fini si $\mathrm{card}(I)$ fini, et on appelle encore *propriété de recouvrement fini* celle de la définition.

2.3. Du point de vue des notations, il est plus parlant de dire que : pour toute famille $(\omega_i)_{i\in I}$ d'ouverts recouvrant E, il existe un nombre fini, n, de ces indices, notés $i_1, \ldots, i_n$, tels que

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} \omega_{i_k}.$$

EXEMPLE 2.4. — E espace fini, séparé est compact, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'ouverts.

THÉORÈME 2.5. — *Un espace E séparé est compact si et seulement si il vérifie la propriété suivante : de toute famille $(F_i)_{i\in I}$ de fermés de E, d'intersection vide, on peut extraire un nombre fini, n, de ces fermés, notés $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$, tels que $\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} = \emptyset$.*

Car si E est compact, et si les $(F_i)_{i\in I}$ sont des fermés de E tels que $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, avec $\omega_i = E \setminus F_i$, ouvert de E, on a $\bigcup_{i\in I} \omega_i = E$, car $\bigcup_{i\in I}(E \setminus F_i) = E \setminus (\bigcap_{i\in I} F_i) = E \setminus \emptyset = E$, donc E étant compact, il existe un nombre fini, n, de ces ouverts, notes $\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_n}$ tels que $E = \bigcup_{k=1}^{n} \omega_{i_k} = \bigcup_{k=1}^{n} (E \setminus F_{i_k}) = E \setminus (\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k})$ donc $\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} = \emptyset$. On procède de même pour la réciproque. ■

COROLLAIRE 2.6. — *Dans E compact, toute famille totalement ordonnée par inclusion, de fermés non vides a une intersection non vide.*

Soit des $(F_i)_{i\in I}$ fermés non vides de E, si $F = \bigcap_{i\in I} = \emptyset$; comme E est compact, il existe un nombre fini de ces fermés, notés $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$ d'intersection vide. Or ils sont comparables entre eux par inclusion : il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $F_{i_k} \subset F_{i_l}$, $\forall l = 1 \dots, n$, (F_{i_k} est le plus petit), d'où $\bigcap_{l=1}^{n} F_{i_l} = \emptyset = F_{i_k}$: absurde car les F_i sont tous non vides. ■

COROLLAIRE 2.7. — *Dans E compact, toute suite possède au moins une valeur d'adhérence, et si elle n'en a qu'une, elle converge vers cette valeur.*

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, on a vu que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ avec F_n, adhérence de $A_n = \{u_k, k \in \mathbb{N}, k \geqslant n\}$, (Théorème 1.50). Or, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$ donc $\overline{A}_{n+1} = F_{n+1} \subset F_n$: les F_n sont des fermés, (car l'adhérence est fermée), non vides, les A_n étant non vides, totalement ordonnés par inclusion, le corollaire 2.6. donne A non vide d'où l'existence de valeurs d'adhérence.

Supposons qu'il n'y en ait qu'une, a. Soit V un voisinage de a et O ouvert avec $a \in O \subset V$. Les $G_n = F_n \cap (E \setminus O)$ sont des fermés, d'intersection vide car $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} G_n = (E \setminus O) \cap (\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n) = (E \setminus O) \cap \{a\}$ avec $a \in O$.

Mais $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} G_n = \varnothing$ et E compact donc il existe une intersection d'un nombre fini des G_n déjà vide, par exemple $\bigcap\limits_{k=1}^{p} G_{n_k} = \varnothing$, (Théorème 2.5).

Si $n_i = \sup\{n_k, k = 1, \ldots, p\}$, (qui existe car p est fini), comme la suite G_n est ordonnée en décroissant on a $\bigcap\limits_{k=1}^{p} G_{n_k} = G_{n_i} = \varnothing = F_{n_i} \cap (E \setminus O)$. C'est donc que $F_{n_i} \subset O$. *A fortiori*, $\forall n \geqslant n_i, u_n \in A_{n_i} \subset F_{n_i} \subset O \subset V$: finalement, $\forall V$ voisinage de a, il existe $n_i \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_i, u_n \in V$: c'est bien la justification de $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$.

REMARQUE 2.8. — La réciproque est fausse, car dans E quelconque, pour la topologie grossière, toute suite admet n'importe quel élément de E comme valeur d'adhérence et pourtant E non séparé n'est pas compact.

Mais... (première d'une longue famille) dans le cas métrique on aura la réciproque : si toute suite admet une valeur d'adhérence E métrique sera compact, voir le corollaire 4.66.

THÉORÈME 2.9. — *Toute partie A de cardinal infini de E compact admet au moins un point d'accumulation.*

Il est équivalent de justifier que, dans E compact, si une partie A n'a pas de point d'accumulation, elle est de cardinal fini, ce que nous allons faire. Soit donc A sans point d'accumulation.

Si $x \in E$, x n'est pas point d'accumulation, donc (négation de la définition 1.22)) il existe un voisinage $V(x)$ de x tel que $(A - \{x\}) \cap V(x) = \varnothing$, d'où *a fortiori* un ouvert O_x avec $x \in O_x \subset V(x)$, et tel que $(A - \{x\}) \cap O_x = \varnothing$, ce qui revient à écrire $A \cap O_x \subset \{x\}$.

Mais ceci est vrai pour tout x de E, on a donc :

$\forall x \in E, \exists O_x$ ouvert de E contenant x, tel que $A \cap O_x \subset \{x\}$.

On a $E = \bigcup_{x \in E} O_x$, car chaque x de E est dans O_x, donc dans la réunion qui elle, est contenue dans E.

Puis E est compact, donc il existe un nombre fini de ces ouverts recouvrant E. Si on note $E = \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i}$ ce recouvrement fini, on a alors

$$A = A \cap E = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i} \right) = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap O_{x_i}) \subset \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

vu la définition des O_x. On a bien card (A) fini. ■

REMARQUE 2.10. — Cette propriété aura aussi sa réciproque vraie dans le cas des espaces métriques compacts, mais elle est fausse en général, comme on le voit avec E de cardinal infini muni de la topologie grossière, (voir 4.66).

2. Sous-espaces compacts

DÉFINITION 2.11. – *Soit E un espace topologique. Une partie A de E est dite sous-espace compact de E, (ou plus brièvement compact de E) si elle est munie, par sa topologie de sous-espace d'une structure d'espace compact.*

THÉORÈME 2.12. — *Soit A un sous-espace de l'espace topologique E, A étant séparé pour sa topologie de sous-espace. Alors A est un compact de E si et seulement si, de toute famille $(\omega_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E dont la réunion contient A on peut extraire un nombre fini de ces ouverts dont la réunion contient A.*

Bien sûr, si E lui-même est séparé, cas le plus fréquent, A, sous-espace, sera séparé, (Théorème 1.70).

On suppose A sous-espace séparé de E. *Soit A compact de E.*

Si on a $A \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$, ω_i ouverts de E, on a $A = A \cap (\bigcup_{i \in I} \omega_i)$ soit $A = \bigcup_{i \in I} (A \cap \omega_i)$ avec cette fois les $A \cap \omega_i$ ouverts de A, donc il existe un recouvrement fini extrait du précédent : $A = \bigcup_{k=1}^{n} (A \cap \omega_{i_k})$ soit $A = A \cap (\bigcup_{k=1}^{n} \omega_{i_k})$ d'où $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} \omega_{i_k}$.

Donc du recouvrement $A \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$ de A par des ouverts de E on a extrait un recouvrement fini : $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} \omega_{i_k}$.

Réciproquement si on a A séparé vérifiant cette propriété, on a A compact de E car il est séparé, et si $A = \bigcup_{i \in I} O_i$, O_i ouvert de A sous-espace, donc du type $O_i = \omega_i \cap A$ avec ω_i ouvert de E, l'égalité $A = \bigcup_{i \in I} (\omega_i \cap A)$ équivaut à $A \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$ qui implique l'existence de $\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n}$ en nombre fini tels que $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} \omega_{i_k}$ d'où $A = \bigcup_{k=1}^{n} (\omega_{i_k} \cap A) = \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k}$. ■

L'intérêt de ce théorème, c'est que l'on reste sur la topologie de E pour raisonner. Justifons ainsi le

THÉORÈME 2.13. — *Les segments* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$ *sont des compacts de* $\mathbb{R}$. On suppose $a \leqslant b$, (si $b < a$, $\varnothing$ est compact sans difficulté). Soit $(\omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$, (topologie d'ensemble ordonné) avec $[a, b] \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$ et soit

$A = \{x;\ x \in [a, b];\ [a, x] \subset$ une réunion d'un nombre fini des $\omega_i\}$.

Cet ensemble A est non vide, ($x = a$ est tel que $[a, a] = \{a\} \subset$ un ω_{i_0}, donc $a \in A$), majoré par b : il admet une borne supérieure m. Cette propriété admise ici, sera justifié au chapitre V en 5.53).

Or $m \in [a, b] \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$ donc $\exists i_0 \in I$ avec $m \in \omega_{i_0}$, ω_{i_0} réunion d'intervalles ouverts, (exemple 1.5), donc m est dans un intervalle ouvert inclus dans ω_{i_0}, *a fortiori* $\exists \alpha > 0$, avec $]m - \alpha, m + \alpha[\subset \omega_{i_0}$. On a $m - \alpha$ qui n'est plus majorant de A donc $\exists x \in A$ avec $m - \alpha \leqslant x \leqslant m$, mais alors $[a, x]$ est contenu dans la réunion d'un nombre fini des ω_i. Soit alors $y \in [m, m + \alpha[$, on a $[x, y] \subset \omega_{i_0}$, d'où $[a, y] \subset$ réunion d'un nombre fini des ω_i. Mais alors l'hypothèse $m < b$ permettrait de choisir un $y \in]m, \inf(m+\alpha, b)[$ et on aurait $y \in A$, avec $y > m$, m borne supérieure de A, c'est absurde. C'est donc que $m = b$, et en prenant $y = m = b$ dans ce qui précède, on conclut bien à $[a,b] \subset$ réunion finie des ω_i. Comme $\mathbb{R}$ est séparé, (si $x \neq y$, par exemple $x < y$, avec $\alpha = \dfrac{y-x}{2}$ les intervalles $]x-\alpha, x+\alpha[$ et $]y-\alpha, y+\alpha[$ sont voisinages disjoints de x et y respectivement), on a bien $[a,b]$ compact. ■

Ce théorème, et ceux qui vont suivre dans ce paragraphe, sont fondamentaux en topologie.

THÉORÈME 2.14. — *Dans E compact, tout fermé est compact.*

D'abord E compact est séparé, donc si F est un fermé de E, en tant que sous-espace il est séparé, (Théorème 1.70).

Soient des fermés $(F_i)_{i\in I}$ de F, d'intersection vide, comme il existe des fermés $(G_i)_{i\in I}$ de E tels que $F_i = G_i \cap F$ et que F est fermé de E, en fait les F_i sont des fermés de E, compact, donc, (Théorème 2.5), il existe un nombre fini de ces fermés, notes $F_{i_1}, \dots, F_{i_n}$, $n \in \mathbb{N}$, tels que $\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k} = \emptyset$: on a bien F compact. ■

THÉORÈME 2.15. — *Dans E séparé, tout compact est fermé.*

Soit A un compact de E espace séparé. On va justifier que A est fermé en prouvant que $\Omega = E \setminus A$ est ouvert, c'est-à-dire voisinage de chacun de ses éléments, (Théorème 1.8).

Soit donc $x_0 \in \Omega$, $\forall y \in A$, on a $x_0 \neq y$ donc il existe deux voisinages de x_0 et y, disjoints, (E séparé) d'où *a fortiori* $\forall y \in A$, $\exists O_y$ et $\omega_y(x_0)$ ouverts disjoints contenant respectivement y et x_0.

On a $A \subset \bigcup_{y\in A} O_y$, A compact, donc il existe $y_1 \dots y_n$ en nombre fini n, tels que $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} O_{y_k}$, (Théorème 2.12).

Soit $\omega = \bigcap_{k=1}^{n} \omega_{y_k}(x_0)$ c'est un ouvert, (intersection finie d'ouverts), contenant x_0, et on a : $A \cap \omega \subset \bigcup_{k=1}^{n} (O_{y_k} \cap \omega)$.

Mais $(\omega \subset \omega_{y_k}(x_0)) \Rightarrow (O_{y_k} \cap \omega \subset O_{y_k} \cap \omega_k(x_0) = \emptyset)$, d'où $A \cap \omega = \emptyset$ d'où $\omega \subset \Omega$.

Finalement, pour tout x_0 de Ω on a trouvé ω ouvert de E avec $x_0 \in \omega \subset \Omega$: on a bien Ω ouvert car voisinage de chacun de ses éléments.

COROLLAIRE 2.16. — *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont exactement les fermés bornés.*

Car si K est un compact de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ étant séparé, K est fermé, (2.15) et en écrivant $K \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-n, n[$, il existe un recouvrement de K par un nombre fini de ces intervalles ouverts et si n_0 est le plus grand entier intervenant dans ce recouvrement fini on aura $K \subset]-n_0, n_0[$ d'où K borné.

Réciproquement si K est fermé borné, il existe $a > 0$ tel que $K \subset [-a, a]$, (on traduit K borné).

Puis, la topologie de K sous-espace de $[-a, a]$ étant la même que celle de K sous-espace de $\mathbb{R}$, (Théorème 1.66), K apparaît comme un sous-espace du compact $[-a, a]$ (Théorème 2.13), avec K fermé de $[-a, a]$, car $K = K \cap [-a, a]$ est intersection de $[-a, a]$ par un fermé, K, de $\mathbb{R}$. On a bien K fermé de $[-a, a]$ compact, donc K compact, (Théorème 2.14). ■

THÉORÈME 2.17. — *Dans E séparé, toute intersection de compacts est un compact; toute réunion d'un nombre fini de compacts et un compact.*

Soient des $(K_i)_{i \in I}$ compacts de E, séparé. Ils sont fermés, (2.15) donc $K = \bigcap_{i \in I} K_i$ est un fermé de E. On fixe $i_0 \in I$, on a $K \subset K_{i_0}$ mais alors K est un fermé de K_{i_0} compact donc il est compact.

Pour la réunion, on procède différemment.

Soient $K_1, \dots, K_n$, $n \in \mathbb{N}$, des compacts de E en nombre fini. D'abord $K = \bigcup_{r=1}^{n} K_r$, sous-espace de E séparé est séparé, (Théorème 1.70). Puis, si on a $K \subset \bigcup_{i \in I} \omega_i$, *a fortiori* chaque K_r est contenu dans $\bigcup_{i \in I} \omega_i$, avec les ω_i ouverts de E. Mais K_r compact donc $\exists I_r$ partie de cardinal fini de I telle que $K_r \subset \bigcup_{i \in I_r} \omega_i$ d'où $K \subset \bigcup_{i \in J} \omega_i$ avec $J = \bigcup_{r=1}^{n} I_r$ partie de cardinal fini : on a bien extrait du recouvrement ouvert par les ω_i, un recouvrement fini, donc K est compact. ■

3. Compacité et continuité. Espaces produits

THÉORÈME 2.18. — *Soit f une application continue de K compact dans E séparé alors $f(K)$ est un compact de E.*

Comme $f(K)$ sous-espace de E, séparé, est séparé il suffit de justifier la propriété de recouvrement fini.

Or si $f(K) \subset \bigcup_{i\in I} \omega_i$, avec ω_i ouvert de E, f étant continue les $f^{-1}(\omega_i)$ sont des ouverts de K et on aura $K = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(\omega_i)$. Mais K étant compact, il existe un sous-recouvrement fini extrait de celui là, donc $\exists i_1, \dots, i_n$ dans I tels que $K = \bigcup_{r=1}^{n} f^{-1}(\omega_{i_r})$ d'où

$$f(K) = f\Big(\bigcup_{r=1}^{n} f^{-1}(\omega_{i_r})\Big) = \bigcup_{r=1}^{n} f\left(f^{-1}(\omega_{i_r})\right) \subset \bigcup_{r=1}^{n} \omega_{i_r}$$

on a bien justifié $f(K)$ compact, (attention, on a $f\left(f^{-1}(\omega_{i_r})\right) \subset \omega_{i_r}$). ∎

COROLLAIRE 2.19. — *Une fonction f continue de K compact non vide dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes.*

Car $\mathbb{R}$ étant séparé, $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc un fermé borné de $\mathbb{R}$, (Corollaire 2.16). Mais si m et M sont les bornes inférieures et supérieures de ce fermé $f(K)$, qui existent si K non vide, elles appartiennent à ce fermé d'où l'existence de a et b dans K tels que

$$f(a) = m = \inf\{f(x), x \in K\}$$
et
$$f(b) = M = \sup\{f(x), x \in K\}.$$ ∎

Cette propriété de borne atteinte pour une fonction continue d'un compact dans $\mathbb{R}$ est fondamentale en analyse. A bon entendeur salut!

COROLLAIRE 2.20. — *Toute bijection continue de K compact sur E séparé est bicontinue, donc est un homéomorphisme.*

Car justifier la continuité de f^{-1} revient à prouver, par exemple que pour tout fermé F de K, on a $\left(f^{-1}\right)^{-1}(F)$ fermé de E. Or, (f bijective)

$(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ et F fermé de K compact est lui-même compact, (Théorème 2.14), donc son image continue dans E séparé est un compact de E, mais $f(F)$ compact de E séparé est fermé dans E, (Théorème 2.15), ce qui achève la justification.

THÉORÈME 2.21. — *Un espace produit* $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ *est compact si et seulement si chaque* E_i *est compact.*

Vu l'étude faite de la topologie produit, il suffit de traiter le cas d'un produit de 2 espaces (Théorème 1.74).

On considère donc un espace E produit de X et Y.

D'abord on sait que E est séparé si et seulement si X et Y le sont, (Théorème 1.77.).

Si E est compact, les projections p et q :

$$p : (x, y) \rightsquigarrow x \quad \text{et} \quad q : (x, y) \rightsquigarrow y,$$

étant continues, (structure produit) de E sur X et Y respectivement, espaces séparés, on a $p(E) = X$ et $q(E) = Y$ qui sont compacts, (Théorème 2.18).

Réciproquement On suppose X et Y compacts, donc séparés. On a déjà E séparé. On veut prouver que $X \times Y$ est compact.

Soit donc $X \times Y = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ un recouvrement ouvert de $X \times Y$. Il faut en extraire un sous-recouvrement fini.

On fixe x dans X. A chaque y de Y on associe $(x, y) \in X \times Y$ donc il existe un indice $i(x, y) \in I$ tel que $(x, y) \in \mathcal{O}_{i(x,y)}$. Mais, (structure produit), il existe alors un ouvert élémentaire, noté $\omega_{i(x,y)} \times \omega'_{i(x,y)}$ avec $\omega_{i(x,y)}$ ouvert de X et $\omega'_{i(x,y)}$ ouvert de Y tels que

$$(x, y) \in \omega_{i(x,y)} \times \omega'_{i(x,y)} \subset \mathcal{O}_{i(x,y)}.$$

On a $\bigcup_{y \in Y} \omega'_{i(x,y)} = Y$, compact, donc il existe un recouvrement fini de Y extrait de celui-là. On va noter B_x la partie de cardinal fini de Y telle que $\bigcup_{y \in B_x} \omega'_{i(x,y)} = Y$.

Soit $\Omega_x = \bigcap_{y \in B_x} \omega_{i(x,y)}$: c'est une intersection finie d'ouverts de X, contenant tous x : c'est un ouvert de X contenant x, et la bande

$$\Omega_x \times Y = \Omega_x \times \bigcup_{y\in B_x} \omega'_{i(x,y)} = \bigcup_{y\in B_x} \left(\Omega_x \times w'_{i(x,y)}\right)$$
$$\subset \bigcup_{y\in B_x} \left(\omega_{i(x,y)} \times \omega'_{i(x,y)}\right) \subset \bigcup_{y\in B_x} \mathcal{O}_{i(x,y)},$$

est contenue dans une réunion d'un nombre fini des $\mathcal{O}_i$.

Puis, comme Ω_x est un ouvert de X contenant x, on a $\bigcup_{x\in X} \Omega_x = X$, et comme X est compact, il existe une partie finie A de X telle que $\bigcup_{x\in A} \Omega_x = X$, d'où $X\times Y = \bigcup_{x\in A} (\Omega_x \times Y) \subset \bigcup_{x\in A} \left(\bigcup_{y\in B_x} \mathcal{O}_{i(x,y)}\right) \subset X\times Y$ d'où en fait $X \times Y$ est réunion d'un nombre fini de $\mathcal{O}_i$ obtenus pour les $i(x, y)$, les x étant en nombre fini dans A, et pour chaque x de A, les y dans B_x étant aussi en nombre fini. ■

COROLLAIRE 2.22. — *Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont exactement les fermés bornés de $\mathbb{R}^n$*

Car si K est un compact de $\mathbb{R}^n$, il est fermé car $\mathbb{R}^n$ est séparé, (Théorème 2.15), et du recouvrement $K \subset \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} (]-p, p[)^n$, comme on peut extraire un recouvrement fini, si p_0 est le plus grand entier intervenant pour ces ouverts en nombre fini, *a fortiori* $K \subset [-p_0, p_0]^n \Rightarrow K$ est borné.

Puis, si K est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$, $\exists a > 0$ tel que $K \subset [-a, a]^n$. Or $[-a, a]$ est compact de $\mathbb{R}$ (Théorème 2.13), donc $[-a, a]^n$ est un compact (2.21), et K fermé de $\mathbb{R}^n$ inclus dans $[-a, a]^n$ est en fait fermé de $[-a, a]^n$ mais fermé dans un compact c'est un compact (Théorème 2.14). ■

4. Espaces localement compacts. Compactification

DÉFINITION 2.23. — *On appelle espace localement compact, tout espace topologique séparé E tel que chaque élément x de E possède au moins un voisinage compact.*

Par exemple E compact est localement compact, E convenant comme voisinage compact de tout x de E.

$\mathbb{R}$ *est localement compact*, $[x - 1, x + 1]$ étant voisinage compact de x ; $\mathbb{Z}$ sous-espace de $\mathbb{R}$ est localement compact, car pour tout p de $\mathbb{Z}$ $\{p\} =]p - \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}[\cap \mathbb{Z}$ est voisinage compact de p dans $\mathbb{Z}$.

Mais $\mathbb{Q}$ *sous-espace de* $\mathbb{R}$ *n'est pas localement compact*, ni compact d'ailleurs car non fermé borné de $\mathbb{R}$. Si $\mathbb{Q}$ était localement compact 0 admettrait un voisinage compact, K, dans $\mathbb{Q}$. Il existerait donc Ω ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in (\Omega \cap \mathbb{Q}) \subset K$. Donc il existerait $\alpha > 0$ tel que $0 \in (]-\alpha, \alpha[\cap \mathbb{Q}) \subset K$. On aurait alors $[-\alpha/2, \alpha/2] \cap \mathbb{Q}$ fermé de $\mathbb{Q}$ contenu dans K compact de $\mathbb{Q}$, donc $W = [-\alpha/2, \alpha/2] \cap \mathbb{Q}$ serait un compact, (fermé dans un compact). Soit x un irrationnel de $]-\alpha/2, \alpha/2[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand, les $F_n = [x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}] \cap W$ sont des fermés de W compact, non vides, totalement ordonnés par inclusion : leur intersection est non vide (corollaire 2.6). Or cette intersection est $\{x\} \cap W$ avec x irrationnel et $W \subset \mathbb{Q}$: elle est vide. C'est absurde. Donc $\mathbb{Q}$ n'est pas localement compact. ■

THÉORÈME 2.24. — *Tout fermé F de E localement compact est localement compact.*

D'abord E est séparé, F sous-espace de E est aussi séparé.

Soit $x \in F$, il existe V voisinage de x dans E, compact de E, mais alors $V \cap F$ est un voisinage de x dans F, (forme des voisinages de la topologie de sous-espace, voir Théorème 1.64) et $V \cap F$ est aussi un fermé de V puisque F est un fermé de E, avec V compact, finalement $V \cap F$ est un compact de F, voisinage de x dans F, on a bien F localement compact. (On a utilisé : $V \cap F$ compact dans V, mais contenu dans F, donc aussi compact de F : c'est le Théorème 1.66.).

THÉORÈME 2.25. — *Toute intersection finie de sous-espaces localement compacts de E séparé, est localement compacte.*

Soit $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, A_i sous-espaces localement compacts de E séparé. On a déjà A sous-espace de E est séparé, puis si $a \in A$, $\forall_i = 1, \dots, n$ il existe V_i voisinage compact de a dans A_i. Mais alors $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_i$ est un voisinage de a dans A, car $V_i \subset A_i \Rightarrow V \subset A$ puis, si W_i : est voisinage de a dans E tel que $V_i = W_i \cap A_i$ on aura $V = V \cap A = \left(\bigcap_{i=1}^{n}(W_i \cap A_i)\right) \cap A = \left(\bigcap_{i=1}^{n} W_i\right) \cap A$ est voisinage de a dans A puisque $\bigcap_{i=1}^{n} W_i$ est voisinage de a dans E.

De plus V_i est compact pour la topologie de sous-espace de A_i, lui-même sous-espace de E donc en fait V_i est un compact de E, (Théorème 1.66, sur la transitivité de la structure de sous-espace). Mais alors V, intersection de compacts de E en est un de E, (Théorème 2.17), or $V \subset A$, donc V est aussi compact de A, (toujours ce théorème 1.66 dont on se demandait, au chapitre I s'il avait une utilité !).

REMARQUE 2.26. — *C'est faux pour une réunion finie de localement compacts.*

Par exemple $A = \{(x,y);\ (x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ est localement compact ainsi que $B = \{(0,0)\}$, mais pas $A \cup B$, car un voisinage V de $(0,0)$ dans $A \cup B$, ne peut pas être compact de $A \cup B$, car il le serait aussi dans $\mathbb{R}^2$, mais il n'est pas fermé dans $\mathbb{R}^2$.

THÉORÈME 2.27. – *Un produit fini d'espaces localement compacts est localement compact.*

On le justifie pour un produit de 2 espaces, grâce au théorème 1.74.

Or si A et B sont localement compacts, ils sont séparés donc $E = A \times B$ est aussi séparé, (1.77), puis si $x = (a,b) \in A \times B$ avec V_a et V_b voisinages compacts de a et b dans A et B respectivement, on vérifie que $V_a \times V_b$ est voisinage de (a,b) dans E et on sait (Théorème 2.21) qu'il est compact.

REMARQUE 2.28. — *L'image continue d'un localement compact n'est pas forcément localement compacte.*

On a vu que $\mathbb{Z}$ est localement compact pour sa topologie, (discrète) de sous espace de $\mathbb{R}$, mais que $\mathbb{Q}$ ne l'est pas. Or $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ étant équipotents, il existe une bijection f de $\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Q}$, qui est continue, (topologie discrète sur $\mathbb{Z}$). On a donc $\mathbb{Q}$ séparé, image continue de $\mathbb{Z}$ localement compact et pourtant $\mathbb{Q}$ ne l'est pas. ■

Quel est l'intérêt d'introduire les espaces localement compacts ? D'abord on peut justifier qu'une fonction continue de E localement compact dans $\mathbb{R}$, moyennant certaines hypothèses, est bornée sur E et atteint ses bornes : cela peut servir. On a :

THÉORÈME 2.29. — *Soit E localement compact, $f : E \mapsto \mathbb{R}$ continue. Si $\forall h \in \mathbb{R}, \exists K$ compact de E tel que $\forall x \notin K, f(x) \geqslant h$ alors f est minorée sur E et atteint sa borne inférieure.*

Soit $a \in E$, il existe, pour h fixé avec $h > f(a)$, un compact K tel que $\forall x \notin K$, $f(x) \geqslant h > f(a)$; donc $a \in K$. Mais la restriction de f au compact K est continue de K dans $\mathbb{R}$ donc atteint sa borne inférieure m en $b \in K$. On a donc $b \in K$ tel que, $\forall x \in K$, $f(b) \leqslant f(x)$. Comme $a \in K$ on a $\forall x \notin K$, $f(b) \leqslant f(a) < h \leqslant f(x)$: finalement m est bien la borne inférieure de f sur E et elle est atteinte en b.

On aurait de même, si f de E localement compact, dans $\mathbb{R}$ est telle que $\forall h \in \mathbb{R}, \exists K$ compact de E tel que $\forall x \notin K$, $f(x) \leqslant h$, alors f est majorée sur E et atteint sa borne supérieure.

L'autre intérêt des espaces localement compacts, c'est de pouvoir les plonger dans des espaces compacts et de pouvoir ainsi leur étendre certains résultats utilisant la compacité.

DÉFINITION 2.30. — *Soit un espace topologique non compact, E. On appelle compactifié de E tout espace $\widetilde{E}$ contenant E tel que :*

1) la topologie de E soit celle de E sous-espace de $\widetilde{E}$,
2) $\widetilde{E}$ soit compact,
3) l'adhérence de E dans $\widetilde{E}$ soit $\widetilde{E}$.

DÉFINITION 2.31. — *On appelle compactifié d'Alexandroff de E non compact, tout compactifié $\widetilde{E}$ de E tel que* $\operatorname{card}(\widetilde{E} \setminus E) = 1$.

THÉORÈME 2.32. — *Soit E localement compact, non compact, il admet des compactifiés d'Alexandroff.*

Soit E localement compact et $\omega \notin E$. On considère $\widetilde{E} = E \cup \{\omega\}$ et on appelle ouvert de $\widetilde{E}$ les ouverts de E et les complémentaires dans $\widetilde{E}$ des compacts de E. Notons que si K est un compact de E, on aura $\widetilde{E} \setminus K = (E \cup \{\omega\}) \setminus K = (E \setminus K) \cup \{\omega\}$ avec $E \setminus K$ ouvert de E car E séparé et K compact de E est alors fermé de E, (Théorème 2.15).

On a une topologie car d'abord $\varnothing$ ouvert de E l'est pour $\widetilde{E}$, et $\widetilde{E} = \widetilde{E} \setminus \varnothing$ avec $\varnothing$ compact de E, est ouvert de $\widetilde{E}$. Vérifions la stabilité par réunion.

Soit $(O_i)_{i \in I}$ des ouverts de E et $I_1 = \{i, i \in I, O_i$ ouvert de $E\}$ et $I_2 = I \setminus I_1$. Alors $\forall_i \in I_2$, O_i est du type $\widetilde{E} \setminus K_i$ avec K_i compact de E.

On a :

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} O_i = \left(\bigcup_{i \in I_1} O_i\right) \cup \left(\bigcup_{i \in I_2} (\widetilde{E} \setminus K_i)\right)$$

$$= \left(\bigcup_{i \in I_1} O_i\right) \cup \left(\widetilde{E} \setminus (\bigcap_{i \in I_2} K_i)\right)$$

On suppose d'abord I_1 et I_2 non vides. Alors $O = \bigcup_{i \in I_1} O_i$ est un ouvert de E, et $K = \bigcap_{i \in I_2} K_i$ est un compact de E, (Théorème 2.17), d'où $\Omega = O \cup (\widetilde{E} \setminus K)$. Comme $\omega \in \widetilde{E} \setminus K$ on peut remplacer O par $O \cup \{\omega\}$ mais alors $O \cup \{\omega\} = (E \setminus (E \setminus O)) \cup \{\omega\} = \left(\widetilde{E} \setminus (E \setminus O)\right)$ et

$$\Omega = \left(\widetilde{E} \setminus (E \setminus O)\right) \cup \left(\widetilde{E} \setminus K\right) = \widetilde{E} \setminus ((E \setminus O) \cap K)$$

avec $E \setminus O$ fermé de E donc $(E \setminus O) \cap K$ fermé de K compact, donc compact, et finalement Ω, complémentaire dans $\widetilde{E}$ d'un compact de E est bien ouvert de $\widetilde{E}$. Si $I_2 = \emptyset$ et $I_1 \neq \emptyset$ il reste $\Omega = O$ ouvert de E donc de $\widetilde{E}$, et si $I_1 = \emptyset$, (et $I_2 \neq \emptyset$) il reste $\Omega = \widetilde{E} \setminus K$ ouvert de $\widetilde{E}$. On a donc stabilité par réunion.

Stabilité par intersection finie : soient des ouverts $(O_i)_{i \in I}$ avec cette fois-ci I de cardinal fini $\neq 0$, on fait le même découpage de I en $I_1 \cup I_2$ avec I_1 et I_2 fini, en supposant d'abord I_1 et I_2 non vides.

Alors $\Omega = \bigcap_{i \in I} O_i = \left(\bigcap_{i \in I_1} O_i\right) \cap \left(\bigcap_{i \in I_2} (\widetilde{E} \setminus K_i)\right)$. On a $O = \bigcap_{i \in I_1} O_i$ est un ouvert de E, (cardI_1 fini) et $\bigcap_{i \in I_2} (\widetilde{E} \setminus K) = \widetilde{E} \setminus (\bigcup_{i \in I_2} K_i)$. Mais $K = \bigcup_{i \in I_2} K_i$ est compact de E, (union finie de compacts) et $\widetilde{E} \setminus K = (E \setminus K) \cup \{\omega\}$, d'où $\Omega = O \cap ((E \setminus K) \cup \{\omega\}) = O \cap (E \setminus K)$ puisque $\omega \notin O$.

Comme $E \setminus K$ est un ouvet de E, (K compact dans E séparé est fermé) on a finalement Ω ouvert de E, donc de $\widetilde{E}$. Là encore, si $I_2 = \emptyset, \Omega = O$ est ouvert de E donc de $\widetilde{E}$ et si $I_1 = \emptyset, \Omega = \widetilde{E} \setminus K$ est encore ouvert de $\widetilde{E}$.

L'espace $\widetilde{E}$ est alors compact

D'abord la topologie de $\widetilde{E}$ est séparée. Soit x et y distincts dans $\widetilde{E}$. Si d'abord x et y sont dans E, séparé, il existe O_x et O_y ouverts de E, (donc de $\widetilde{E}$), disjoints et contenant respectivement x et y; si $x \in E$ et $y = \omega$, x admet dans E, localement compact, un voisinage compact K, et $\omega \in \widetilde{E} \setminus K$ ouvert de $\widetilde{E}$, on a donc des voisinages de x et ω dans $\widetilde{E}$, disjoints.

Soit enfin $(O_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de $\widetilde{E} = E \cup \{\omega\}$. Il existe $i_0 \in I$ tel que $\omega \in O_{i_0}$ qui est donc forcément du type $O_{i_0} = \widetilde{E} \setminus K_{i_0}$ avec K_{i_0} compact de E. Puis $K_{i_0} = K_{i_0} \cap \widetilde{E} = \bigcup\limits_{i\in I}(O_i \cap K_{i_0})$. Si O_i est un ouvert de E, $O_i \cap K_{i_0}$ est ouvert de K_{i_0} sous-espace de E. Si O_i est du type $\widetilde{E} \setminus L_i$ avec L_i compact de E, alors $O_i \cap K_{i_0} = (\widetilde{E} \setminus L_i) \cap K_{i_0} = (E \setminus L_i) \cap K_{i_0}$ car $\omega \notin K_{i_0}$, or $E \setminus L_i$ est ouvert de E, donc on a encore $O_i \cap K_{i_0}$ ouvert de K_{i_0}. On a donc un recouvrement ouvert du compact K_{i_0} : il existe $J \subset I$, card J fini, tel que $K_{i_0} = \bigcup\limits_{j\in J}(O_i \cap K_{i_0})$.

D'où $\widetilde{E} = \left(\widetilde{E} \setminus K_{i_0}\right) \cup K_{i_0} = O_{i_0} \cup \left(\bigcup\limits_{j\in J} O_j\right)$: on a extrait un recouvrement fini de celui des $(O_i)_{i\in I}$.

Il reste à vérifier *que $\widetilde{E}$ est un compactifié de E* : la topologie de E sous-espace de $\widetilde{E}$ a pour ouverts les $O_i \cap E = O_i$, $\forall O_i$ ouvert de E, et les $\left(\widetilde{E} \setminus K_i\right) \cap E = ((E \setminus K_i) \cup \{\omega\}) \cap E = E \setminus K_i$, $\forall K_i$ compact de E : ce sont encore des ouverts de E. On a donc tous les ouverts de E, sous-espace de $\widetilde{E}$ sont des ouverts de E, et réciproquement d'où la même topologie.

L'adhérence de E est $\widetilde{E}$ car $E \subset \overline{E} \subset \widetilde{E} = E \cup \{\omega\}$. Donc si $\overline{E} \neq \widetilde{E}$ c'est que $\overline{E} = E$ mais alors E serait fermé dans $\widetilde{E}$ compact : il serait compact ce qu'on a écarté au départ.

On a obtenu un compactifié de E, qui est d'Alexandroff puisque $\widetilde{E} \setminus E = \{\omega\}$ est de cardinal 1.

Remarque 2.33. — Tous les compactifiés ne sont pas d'Alexandroff. Ainsi $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$, (voir 1.5), muni de la topologie d'ensemble ordonné est un compactifié de $\mathbb{R}$, (vérification laissée au lecteur), mais $\mathrm{card}(\overline{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}) = 2$.

Remarque 2.34. — De même, des espaces non localement compacts peuvent avoir des compactifiés. Ainsi $\mathbb{Q}$ est non localement compact et pourtant $\overline{\mathbb{R}}$ en est un compactifié, (non d'Alexandroff).

EXERCICES

1. Soient A et B deux compacts de E et F espaces topologiques, et U un voisinage de $A \times B$ dans $E \times F$. Montrer qu'il existe V voisinage de A et W voisinage de B tels que $V \times W \subset U$.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien, $\mathcal{D} = \{(M_1, M_2, M_3) \in \mathcal{P}^3;\ M_1, M_2, M_3$ alignés$\}$. Montrer que $\mathcal{D}$ est un fermé de $\mathcal{P}^3$.
Soit K_1, K_2, K_3 trois compacts du plan tels qu'aucune droite du plan ne les rencontre. Montrer que parmi les cercles rencontrant K_1, K_2 et K_3 il y en a un de rayon maximum et un de rayon minimum.

3. Soit E espace topologique, F espace compact, A un fermé de $E \times F$. Montrer que la projection de A sur E est un fermé de E. Cas de la projection sur F ?

4. Soit E espace topologique, F espace compact, $f : E \mapsto F$ une application dont le graphe Γ est un fermé de $E \times F$.
Montrer que f est continue. Peut-on supprimer F compact ?

5. Soient E et F espaces compacts, G un espace séparé et f une application de $E \times F$ dans G, continue qui a $(x, t) \in E \times F$ associe $f(x, t)$.
On suppose, pour chaque t de F fixé, que $x \rightsquigarrow f(x, t)$ est injective.
a) Montrer que pour y_0 fixé dans G, $L = \{t \in F, \exists x \in E, f(x, t) = y_0\}$ est fermé de F.
b) Montrer que l'application de L dans E qui à t associe le seul x tel que $f(x, t) = y_0$ est continue.

6. Soient A et B deux compacts disjoints de E topologique séparé. Montrer qu'il existe des voisinages disjoints de A et B.

7. Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence de :

1) l'image réciproque de tout compact est un compact,
2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} |f(x)| = +\infty$.

8. Soit E topologique séparé, F compact. On suppose qu'il existe f fermée de E dans F telle que $\forall y \in F$, $f^{-1}(y)$ soit un compact de E.
Montrer que E est un compact.

9. Soit γ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, \gamma(x)$ soit compact non vide. On suppose que, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall \Omega$ ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $\gamma(x_0) \subset \Omega$, il existe U ouvert tel que $x_0 \in U$ et $\forall x \in U$, $\gamma(x) \subset \Omega$.
Montrer que $\{(x, y);\ x \in \mathbb{R},\ y \in \gamma(x)\}$ est fermé.

SOLUTIONS

1. Soit U voisinage de $A \times B$.
On fixe x_0 dans A. Pour $y \in B$, $(x_0, y) \in U$ voisinage de $A \times B$ donc il existe un ouvert élémentaire noté $O_y \times O'_y$ avec O_y ouvert de E, O'_y ouvert de F, tels que $(x_0, y) \in O_y \times O'_y \subset U$.
On a $B \subset (\bigcup_{y \in B} O'_y)$, et B est compact, donc on extrait un recouvrement fini de ce recouvrement. Comme la situation dépend de x_0, on peut noter $Y(x_0)$ la partie finie de B, telle que $B \subset (\bigcup_{y \in Y(x_0)} O'_y)$. Soit alors $\Omega(x_0) = \bigcap_{y \in Y(x_0)} O_y$: c'est un ouvert de E contenant x_0, (intersection finie d'ouverts de E contenant tous x_0), et en notant $\Omega'(x_0) = \bigcup_{y \in Y(x_0)} O'_y$, on a un ouvert de F contenant B, tel que :

$$\Omega(x_0) \times \Omega'(x_0) = \Omega(x_0) \times \bigcup_{y \in Y(x_0)} O'_y = \bigcup_{y \in Y(x_0)} (\Omega(x_0) \times O'_y)$$
$$\subset \bigcup_{y \in Y(x_0)} (O_y \times O'_y) \subset U.$$

Puis, $\Omega(x_0)$ étant un ouvert de E contenant x_0 de A, on a $A \subset \bigcup_{x_0 \in A} \Omega(x_0)$, avec A compact : on extrait un recouvrement fini.
Soit X une partie de cardinal fini de A telle que $A \subset \bigcup_{x_0 \in X} \Omega(x_0)$. On note $V = \bigcup_{x_0 \in X} \Omega(x_0)$: c'est un voisinage (ouvert) de A dans E. Si $W = \bigcap_{x_0 \in X} \Omega'(x_0)$, c'est un voisinage (ouvert) de B dans F, chaque $\Omega'(x_0)$ étant un ouvert de F contenant B, et card (X) fini.

Mais alors $A \times B \subset V \times W = \bigcup_{x_0 \in X} (\Omega(x_0) \times W)$ avec W contenu dans chaque $\Omega'(x_0)$ d'où

$$A \times B \subset V \times W \subset \bigcup_{x_0 \in X} (\Omega(x_0) \times \Omega'(x_0)) \subset U$$

il en résulte que l'ouvert $V \times W$ de $E \times F$ est bien un voisinage de $A \times B$ contenu dans U.

2. On rapporte le plan $\mathcal{P}$ à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (0;\ \vec{i}, \vec{j})$.
Chaque point M_i est caractérisé par le couple (x_i, y_i) de ses coordonnées.
On soit que M_1, M_2, M_3 sont alignés si et seulement si

$$f(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3) = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \end{vmatrix} = 0$$

La fonction f est polynômiale, donc continue, d'où $\mathcal{D} = f^{-1}(\{0\})$ est un fermé de $\mathcal{P}$.
Supposons alors que pour $i = 1, 2, 3$, $M_i \in K_i$. Ces points sont non alignés, (vu l'hypothèse) donc sont sur un cercle d'équation

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2 + y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2 + y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, si on développe par rapport à la 1^{ere} ligne on a une équation du type $a(x^2y^2) + bx + cy + d = 0$ avec $a = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ car les points sont non alignés et c'est une équation de cercle, vérifiée par les coordonnées des M_i, car le déterminant a alors 2 lignes égales. On peut vérifier que le carré du rayon est $R^2 = \dfrac{b^2 + c^2 - 4ad}{4a^2}$, c'est donc une expression polynômiale donc continue, par rapport aux x_i et y_j. Sur le compact $K_1 \times K_2 \times K_3$, la fonction continue $(M_1, M_2, M_3) \rightsquigarrow R^2$ est donc bornée et atteint ses bornes d'où l'existence d'un cercle de rayon minimum et d'un de rayon maximum parmi ceux qui rencontrent K_1, K_2 et K_3.

3. Soit p la projection de $E \times F$ sur E, on va montrer que $\Omega = E - p(A)$ est ouvert c'est-à-dire voisinage de chacun de ses points.
Soit $x_0 \in \Omega$, alors $\forall y \in F, (x_0, y) \notin A$, donc (x_0, y) est dans $E \times F - A$, ouvert, donc il existe un ouvert élémentaire $\omega(y) \times \omega'(y)$ avec $\omega(y)$ ouvert de E contenant x_0, $\omega'(y)$ ouvert de F contenant y, tel que $\omega(y) \times \omega'(y) \subset$

$E \times F - A$, (eh oui, la notation est bizarre mais x_0 étant fixé, tout dépend de y).

On a $F = \bigcup_{y \in F} \omega'(y)$, F compact : on extrait un recouvrement fini noté

$F = \bigcup_{i=1}^{n} \omega'(y_i)$.

Soit $O = \bigcap_{i=1}^{n} \omega(y_i)$: c'est un ouvert de E contenant x_0

$$\text{et } O \times F = O \times \bigcup_{i=1}^{n} \omega'(y_i) = \bigcup_{i=1}^{n} O \times \omega'(y_i)$$

$$\subset \bigcup_{i=1}^{n} \omega(y_i) \times \omega'(y_i) \ \subset E \times F - A.$$

Cela signifie que $\forall x \in O$, et $\forall y \in F$, $(x, y) \notin A$: l'ouvert O est contenu dans $E - p(A)$. On a trouvé O ouvert de E contenant x_0 et contenu dans Ω, ce pour tout x_0 de Ω qui est bien ouvert.

La projection sur F n'est pas forcément fermée. Par exemple $E = \mathbb{R}, F = [-1, 1]$, $A = \{(x, y);\ x(y^2 - 1) = 1\}$ est fermé de $E \times F$, (image réciproque de $\{0\}$ par l'application polynômiale, donc continue, $(x, y) \rightsquigarrow x(y^2 - 1) - 1$). Le projeté de A sur E est $] - \infty, 1]$, fermé, mais sur F c'est $] - 1, 1[$ non fermé.

4. Justifier f continue, c'est prouver que pour tout fermé A de F, $f^{-1}(A)$ est un fermé de E.

Or si A est fermé de F, $E \times A$ est fermé de $E \times F$ car son complémentaire est $E \times (F - A)$ ouvert élémentaire de $E \times F$.

Donc $\Gamma \cap (E \times A) = \{(x, f(x));\ x \in E, f(x) \in A\}$ est un fermé de $E \times A$ puisqu'on suppose Γ fermé. Si on utilise le résultat de l'exercice 3, le projeté sur E de $\Gamma \cap (E \times A)$ est un fermé de E, or c'est $\{x;\ f(x) \in A\} = f^{-1}(A)$. On a bien f continue.

Sans l'hypothèse F compact c'est faux, par exemple $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ a pour graphe $\Gamma = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y);\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 1\}$. C'est un fermé de $\mathbb{R}^2$ bien que f ne soit pas continue en O.

5. a) Comme G est séparé, $\{y_0\}$ est un fermé de G et f étant continue, $f^{-1}(\{y_0\}) = \{(x, t) \in E \times F;\ f(x, t) = y_0\}$ est un fermé de $E \times F$, compact, donc $f^{-1}(\{y_0\})$ est un compact de $E \times F$ et son image par la projection de $E \times F$ sur F est un compact de F donc un fermé, (F étant séparé). Cette projection c'est L.

b) L'injectivité de $x \rightsquigarrow f(x, t)$, pour t fixé, assure, pour t dans L l'existence et l'unicité de x tel que $f(x, t) = y_0$. On note $\varphi(t)$ cet élément, il faut justifier la continuité de $\varphi : L \mapsto E$.

Soit P un fermé de E, $P \times F$ est fermé de $E \times F$, (complémentaire égal à $(E-P) \times F$ ouvert élémentaire de $E \times F$), mais alors $P \times F \cap f^{-1}(\{y_0\})$ est un fermé de $E \times F$ compact, donc c'est un compact, sa projection sur F, (c'est le même raisonnement) est un compact de F donc un fermé, et cette projection c'est l'ensemble des t, tel que $f(x,t) = y_0$ mais avec $x \in P$: c'est donc encore $\{t;\ \varphi(t) = x \in P\} = \varphi^{-1}(P)$, fermé de F, inclus dans L. On a, $\forall P$ fermé de E, $\varphi^{-1}(P)$ fermé de L, car $\varphi^{-1}(P) = \varphi^{-1}(P) \cap L$ est bien fermé du sous-espace L, donc φ continue.

6. Si A est $\varnothing$, il est voisinage de lui-même, disjoint de E qui est voisinage de B. On suppose donc A non vide, et par la même occasion $B \neq \varnothing$ aussi.
Soit x fixé dans A, si $y \in B$, $A \cap B = \varnothing \Rightarrow x \neq y$ dans E séparé donc il existe deux voisinages $V(y)$ de x et $W(y)$ de y, disjoints et ouverts, (quitte à prendre les ouverts contenus dans les voisinages).

On a $B \subset \bigcup_{y \in B} W(y)$, B compact et un recouvrement ouvert : « tilt », on extrait un recouvrement fini, $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} W(y_i) = \Omega(x)$, associé à des éléments $y_1, \ldots, y_n$ de B, avec $\Omega(x)$ ouvert.

Alors $O(x) = \bigcap_{i=1}^{n} V(y_i)$ est un ouvert contenant x, (intersection finie d'ouverts contenant x) et $O(x) \cap \Omega(x) = \bigcup_{i=1}^{n} (O(x) \cap W(y_i)$ avec

$$O(x) \cap W(y_i) \subset V(y_i) \cap W(y_i) = \varnothing, \text{ donc } O(x) \cap \Omega(x) = \varnothing.$$

Puis on a $A = \bigcup_{x \in A} O(x)$, avec A compact et les $O(x)$ ouverts : on recouvre A par un nombre fini d'ouverts notés $O(x_k)$ pour $k = 1, \ldots, p$ et $A \subset \bigcup_{k=1}^{p} O(x_k) = O$, ouvert, alors que B étant dans chaque ouvet $\Omega(x_k)$ on a aussi $B \subset (\bigcap_{k=1}^{P} \Omega(x_k)) = \Omega$, ouvert.

De plus ces voisinages ouverts, O de A et Ω de B sont disjoints car $O \cap \Omega = \bigcup_{k=1}^{P} (O(x_k) \cap \Omega)$ avec $O(x_k) \cap \Omega \subset O(x_k) \cap \Omega(x_k)$, or $O(x_k) \cap \Omega(x_k)$ est vide, donc $O \cap \Omega = \varnothing$.

7. *1) $\Rightarrow$ 2)* Soit $A > 0$, $f^{-1}([-A, A])$ est un compact de $\mathbb{R}$ donc un fermé borné, il existe $B > 0$ tel que $f^{-1}([-A, A]) \subset [-B, B]$ donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $|x| \geqslant B \Rightarrow |f(x)| \geqslant A$, c'est bien $\lim_{|x| \to +\infty} |f(x)| = +\infty$.

2) ⇒ 1) Soit K un compact de $\mathbb{R}$, c'est un fermé et f est continue donc $f^{-1}(K)$ est fermé; puis $\exists A > 0$ tel que $K \subset [-A, A]$.
On associe $B > 0$ tel que $\forall x, |x| \geqslant B \Rightarrow |f(x)| > A$ puisque $\lim\limits_{|x| \to +\infty} |f(x)| = +\infty$; donc $|x| \geqslant B \Rightarrow f(x) \notin K$: on a $f^{-1}(K) \subset [-B, B]$ et finalement, $f^{-1}(K)$, fermé borné de $\mathbb{R}$ est bien compact.

8. Vu la formulation, on va justifier que E est compact en montant que de toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de fermés de E, d'intersection vide, on peut extraire une sous-famille d'intersection vide.
Soit $(A_i)_{i \in I}$ des fermés de E avec $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \varnothing$.

Soit $y \in F$, $f^{-1}(y)$ est un compact de E, les $\left(A_i \cap f^{-1}(y)\right)_{i \in I}$ sont des fermés de $f^{-1}(y)$, d'intersection vide, il existe donc une partie finie I_y de I telle que $\bigcap\limits_{i \in I_y} \left(A_i \cap f^{-1}(y)\right) = \varnothing$, soit encore, avec $B_y = \left(\bigcap\limits_{i \in I_y} A_i\right)$, fermé de E, $B_y \cap f^{-1}(y) = \varnothing$, donc, $\forall x \in B_y\ f(x) \neq y$. Comme f est fermée, $f(B_y)$ est un fermé de F et $\bigcap\limits_{y \in F} f(B_y) = \varnothing$ car si $z \in \bigcap\limits_{y \in F} f(B_y)$, on a $f(x) = z$ pour un x de B_z, (contredit : $\forall x \in B_z$, $f(x) \neq z$).
On a $\bigcap\limits_{y \in F} f(B_y) = \varnothing$, avec F compact et les $f(B_y)$ fermés de F, donc il existe $y_1, \dots, y_n$, en nombre fini dans F, tels que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} f(B_{y_i}) = \varnothing$.
Or $f\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} By_i\right) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} f(By_i) = \varnothing$ donc $\bigcap\limits_{i=1}^{n} By_i = \varnothing$, et comme $B_{y_i} = \bigcap\limits_{j \in I_{y_i}} A_j$, avec I_{y_i} de cardinal fini, on a finalement $\bigcap\limits_{k \in \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} I_{y_i}\right)} A_k$ qui est une intersection vide, d'un nombre fini des A_k : on a bien E compact.

9. Soit $A = \{(x, y);\ x \in \mathbb{R},\ y \in \gamma(x)\}$ c'est une partie de $\mathbb{R}^2$, métrique, soit donc (a, b) adhérent à A et $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de A qui converge vers (a, b).
Si $b \notin \gamma(a)$, $\{b\}$ et $\gamma(a)$ sont deux compacts disjoints de $\mathbb{R}$ métrique, donc $d = d(b, \gamma(a)) > 0$ et l'ouvert $\Omega = \{x;\ d(x, \gamma(a) < \frac{d}{2}\}$ est un ouvert contenant $\gamma(a)$, tel que $b \notin \overline{\Omega}$. Mais alors Ω contenant $\gamma(a)$, on applique l'hypothèse.

Soit alors un ouvert U tel que $a \in U$ et $\forall x \in U$, $\gamma(x) \subset \Omega$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0$, $x_n \in U$, on doit donc avoir $\gamma(x_n) \subset \Omega$.
Or les y_n sont dans $\gamma(x_n)$ car $(x_n, y_n) \in A$, donc,
$\forall n \geqslant n_0$, $y_n \in \Omega \Rightarrow b = \lim\limits_{n \to +\infty} y_n$ serait dans $\overline{\Omega}$ ce qui est exclu.

C'est donc que $b \in \gamma(a)$ et que (a, b) de $\overline{A}$ est dans A d'où A fermé.

CHAPITRE 3

La connexité

Ce chapitre, assez court, va nous amener à donner une formulation de l'idée intuitive suivante : « être d'un seul tenant ». Mais cette formulation va mettre en place un outil puissant en topologie.

1. Espaces connexes

DÉFINITION 3.1. — *Un espace topologique E est dit connexe si et seulement si il n'existe pas de partition de E en deux ouverts.*

Rappelons qu'une partition $E = O_1 \cup O_2$ signifie que $O_1 \cap O_2 = \varnothing$ avec O_1 et O_2 non vides.

On a immédiatement des formulations équivalentes qui auraient pu être prises comme définition.

THÉORÈME 3.2. — *Soit E espace topologique. Il y a équivalence entre les 4 propriétés suivantes.*

(i) E est connexe.

(ii) Il n'existe pas de partition de E en deux fermés.

(iii) Les seules parties à la fois ouvertes et fermées de E sont $\varnothing$ et E.

(iv) Les seules applications continues de E dans $\{0, 1\}$ discret sont les applications constantes.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Car si on suppose que $E = F_1 \cup F_2$ avec $F_1 \neq \varnothing$, $F_2 \neq \varnothing$ et $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, F_1 et F_2 fermés, alors $F_1 = E \setminus F_2$ et $F_2 = E \setminus F_1$ sont aussi ouverts : on a une partition de E connexe en deux ouverts, c'est exclu.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Car si A est une partie de E, ouverte, fermée et non vide, comme $E = A \cup (E \setminus A)$, on obtient E réunion de 2 fermés disjoints, A

étant non vide, c'est que $E \setminus A = \emptyset$, sinon on aurait une partition en deux fermés. Donc $A = E$.

(iii) ⇒ (iv) Car soit $f : E \mapsto \{0,1\}$ discret, f étant continue. Si f n'est pas constante, $O_1 = f^{-1}(\{0\})$ et $O_2 = f^{-1}(\{1\})$ sont non vides et disjoints, donc ils sont aussi différents de E puisque $O_1 \cup O_2 = E$.

Puis $\{0\}$ ouvert et fermé de $\{0,1\}$ muni de la topologie discrète implique O_1 ouvert et fermé de E, non vide et différent de E, cela contredit (iii). Donc f est constante.

(iv) ⇒ (i) Car si E n'était pas connexe, on aurait une partition $E = O_1 \cup O_2$ en deux ouverts de E. En posant $f(x) = 0$, $\forall x \in O_1$ et $f(x) = 1, \forall x \in O_2$, on construit f continue de E dans $\{0,1\}$ discret car $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, $f^{-1}(\{0\}) = O_1$, $f^{-1}(\{1\}) = O_2$ et $f^{-1}(\{0,1\}) = E$ sont des ouverts, puis f non constante puisque $O_1 \neq \emptyset$ et $O_2 \neq \emptyset$ donc 0 et 1 sont des valeurs prises. On contredirait (iv). C'est impossible d'où E connexe. ■

La connexité est donc une structure riche (comme les pâtes Lustucru, publicité gratuite !), puisqu'on se trouve déjà à la tête de 4 formulations. Personnellement j'ai un faible pour la 3^e qui sert de la manière suivante.

3.3. *Pour démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}(x)$ est valable pour tout x de E connexe, il suffit de vérifier que l'ensemble $\Omega = \{x;\ x \in E, \mathcal{P}(x) \text{ vraie}\}$ est ouvert, fermé non vide de E : ce sera E.*

Mais avant de se livrer aux délices de la connexité, on peut se demander si les connexes existent.

DÉFINITION 3.4. — *Une partie A de E sera dite un connexe de E si et seulement si elle est connexe pour sa topologie de sous-espace.*

Les singletons sont des connexes, le (iii) étant trivialement vérifié.

On ne travaille pas pour rien : les connexes existent.

En fait l'étude des espaces métriques (corollaire 4.77) montrera que les *intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes*. Mais ici on va prouver qu'une partie qui n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ n'est pas connexe.

Ainsi $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe, $\mathbb{Z}$ non plus, pour la topologie de sous-espace de $\mathbb{R}$.

Il serait bon de savoir caractériser les intervalles avant toute chose. On a :

THÉORÈME 3.5. — *Une partie A de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si* $(\forall x \in A)$, $(\forall y \in A)$, $([x,y] \subset A)$.

Rappelons que $[x, y] = \{t, t \in \mathbb{R},\ x \leqslant t \leqslant y\}$ et si $y < x$, on a $[x, y]$ vide.

Il est facile de voir que tous les types d'intervalles de $\mathbb{R}$, à savoir $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$, $]-\infty, a]$; $]-\infty, a[$; $]a, +\infty[$; $[a, +\infty[$; $[a, b]$; $]a, b]$; $[a, b[$ et $]a, b[$ vérifient la condition.

Justifions la réciproque. Soit A vérifiant la propriété. Si A est vide, c'est un intervalle, $A =]0, 0[$ par exemple.

Si la partie A est non vide, elle est soit majorée et minorée, soit majorée non minorée, soit non majorée mais minorée, enfin soit non majorée et non minorée.

Supposons la du troisième type, et soit m la borne inférieure de $A \neq \emptyset$, (propriété admise de $\mathbb{R}$ qui sera justifiée un jour ou l'autre, en 5.56) : on va prouver que $A = [m, +\infty[$ ou $]m, +\infty[$. En effet on a déjà $A \subset [m, +\infty[$, et soit z dans $]m, +\infty[$. On a $z > m$, donc z non minorant de A : $\exists x \in A$ avec $m \leqslant x < z$; puis A non majoré $\Rightarrow$ $\exists y \in A$ avec $y > z$, (sinon z majorerait A), mais alors $z \in [x, y] \subset A$ donc $z \in A$. Finalement on obtient $]m, +\infty[\subset A \subset [m, +\infty[$, les extrémités ne diffèrent que par la présence ou non de m : c'est que $A = [m, +\infty[$ ou $]m, +\infty[$.

On procéderait de même dans les autres cas. ■

Nous pouvons maintenant justifier le

THÉORÈME 3.6. — *Une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle n'est pas connexe.*

En effet soit A une partie de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un intervalle. D'après le théorème 3.5, il existe x et y de A, tels que $[x, y] \not\subset A$.

Ceci impose $x < y$, sinon $[x, y] = \emptyset$ ou $\{x\}$ est dans A, et l'existence de $e \notin A$, $e \in]x, y[$. Comme $A \subset (]-\infty, e[\cup]e, +\infty[)$, on a alors A réunion des 2 ouverts $]-\infty,\ e[\cap A$ et $A \cap]e, +\infty[$, non vides, le premier contenant x, le deuxième y. Donc A est non connexe. ■

THÉORÈME 3.7. — *Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de E topologique. Si $\bigcap_{i \in I} A_i$ est non vide, $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ est un connexe de E.*

Supposons que A soit réunion de 2 ouverts de A, O_1 et O_2, disjoints. Alors, $\forall i \in I$, $A_i = A_i \cap A = A_i \cap (O_1 \cup O_2) = (A_i \cap O_1) \cup (A_i \cap O_2)$ est réunion de deux ouverts disjoints de A_i, (la topologie de A_i sous-espace de E ou de A_i sous-espace de A sous espace lui-même de E est la même, théorème 1.66).

Comme A_i est connexe, l'un de ces ouverts est vide. Or, si $a \in \bigcap_{i \in I} A_i$, a est *a fortiori* dans A, donc dans O_1 ou O_2 : par exemple $a \in O_1$. Alors $A_i \cap O_1 \neq \varnothing$: c'est que $A_i \cap O_2 = \varnothing$ et ceci $\forall_i \in I$, le choix de O_1 contenant a étant indépendant de l'indice i. Mais alors $O_2 = O_2 \cap A = O_2 \cap (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} (A_i \cap O_2) = \varnothing$: on a bien justifié la connexité de A. ■

THÉORÈME 3.8. — *Soient E et F topologiques et f continue de E dans F. Si E est connexe, alors $f(E)$ est un connexe de F.*

D'abord, f étant à valeurs dans $f(E)$, avoir f continue de E dans F équivaut à f continue de E dans le sous-espace topologique $f(E)$ de F (Théorème 1.67). Soit alors Ω une partie ouverte et fermée non vide de $f(E)$, $f^{-1}(\Omega)$ est un ouvert et fermé de E, (f continue), non vide car si $y_0 = f(x_0)$ est dans Ω, avec $x_0 \in E$, on a x_0 dans $f^{-1}(\Omega)$. Comme E est connexe c'est que $f^{-1}(\Omega) = E$, mais alors $f(E) = f(f^{-1}(\Omega)) \subset \Omega \subset f(E)$: donc $\Omega = f(E)$. Les seules parties ouvertes et fermées de $f(E)$ sont donc $\varnothing$ et $f(E)$: on a bien $f(E)$ connexe. ■

COROLLAIRE 3.9. — *Toute partie convexe d'un espace vectoriel normé est connexe.*

Projetons nous jusqu'au chapitre 6 pour utiliser la topologie des espaces vectoriels normés. Si C est une partie convexe de E espace vectoriel normé, c'est que $\forall (a, b) \in C^2$, le segment noté $[a, b]$ défini par $[a, b] = \{a + t(b - a);\ t \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ est contenu dans C. Ce qui équivaut encore à dire que C est stable par passage aux barycentres à coefficients positifs.

Mais $t \rightsquigarrow a + t(b - a)$ est continue, (affine en dimension finie, ou bien vérification immédiate) donc, l'intervalle $[0, 1]$ étant un connexe de $\mathbb{R}$, (admis pour l'instant), le segment $[a, b]$ est un connexe de E. Mais alors, en fixant a dans C on aura.

$C = \bigcup_{c \in C} [a, c]$, connexe comme réunion de connexes d'intersection non vide. ■

THÉORÈME 3.10. — *L'adhérence d'un connexe A de E topologique est un connexe de E.*

Supposons $\overline{A}$ réunion de deux ouverts disjoints O_1 et O_2, avec O_1 non vide et soit x dans O_1. Comme x est adhérent à A, et que O_1 est voisinage de x pour la topologie de $\overline{A}$, (O_1 étant ouvert), on a $O_1 \cap A \neq \emptyset$. Mais alors $A = A \cap \overline{A} = A \cap (O_1 \cup O_2) = (A \cap O_1) \cup (A \cap O_2)$ est réunion de deux ouverts disjoints et $A \cap O_1$ étant non vide, c'est que $A \cap O_2 = \emptyset$, ce qui implique $\overline{A} \cap O_2 = O_2 = \emptyset$ car si $b \in O_2$, b étant adhérent à A on en déduirait $A \cap O_2 \neq \emptyset$ ce qui est exclu. On a bien $\overline{A}$ connexe ■

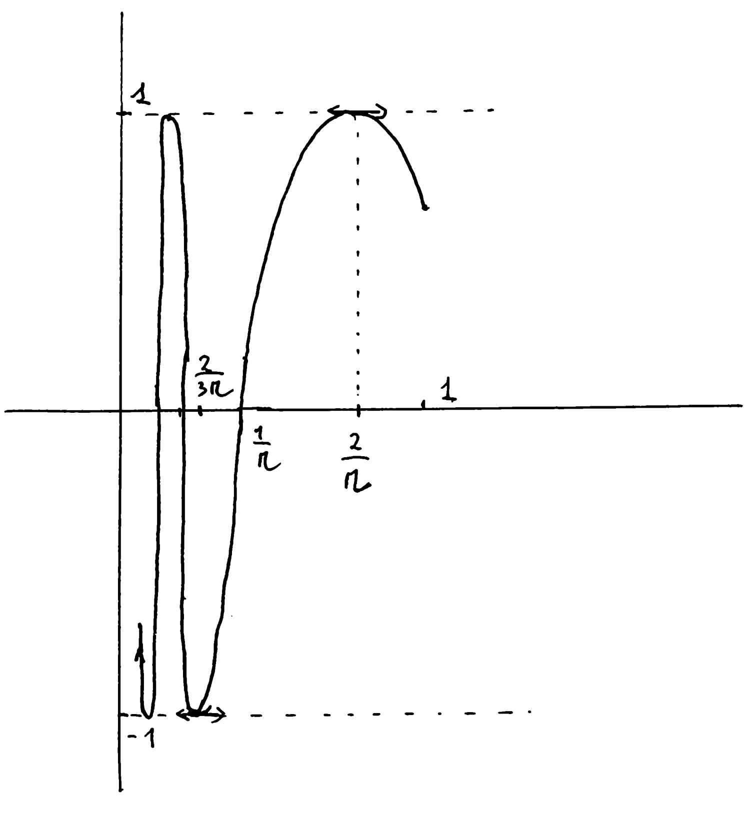
DÉFINITION 3.11. — *On appelle continu tout espace compact et connexe.*

On a donc, vu le théorème 3.8, le :

THÉORÈME 3.12. — *L'image continue d'un continu dans un espace séparé est un continu.*

L'image continue de A compact dans F séparé étant un compact (Théorème 2.18), et le théorème 3.8 donnant $f(A)$ connexe si f est continue de A dans F, le résultat est établi. ■

3.13. *Un exemple intéressant.*



L'application $x \rightsquigarrow (x, \sin\frac{1}{x})$ est continue de $]0,1]$ connexe dans $\mathbb{R}^2$ séparé, son graphe, Γ est connexe, et son adhérence $\overline{\Gamma}$ est un connexe, compact car fermé borné, donc c'est un continu, particulier,

$$\overline{\Gamma} = (\{0\} \times [-1,1]) \cup \Gamma \text{ formé de deux morceaux disjoints!}$$

On peut constater que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\sin\dfrac{1}{\frac{1}{n\pi}} = 0$, $\sin\dfrac{1}{\frac{2}{\pi(1+4n)}} = 1$ et $\sin\dfrac{1}{\frac{2}{\pi(3+4n)}} = -1$: il y a accumulation sur $\{0\} \times [-1,1]$.

DÉFINITION 3.14. — *On appelle domaine d'un espace topologique E toute partie D de E ouverte et connexe.*

Les domaines sont le point de départ du calcul différentiel.

2. Composantes connexes

Soit un espace topologique E et $a \in E$. Le sous-espace $\{a\}$ est connexe donc l'ensemble $\mathcal{F}$ des parties F de E connexes et contenant a est non vide. Comme une réunion de connexes d'intersection non vide est connexe (Théorème 3.7), la réunion des F de $\mathcal{F}$ est un connexe contenant a et c'est le plus grand pour l'inclusion, car tout connexe contenant a étant dans la famille $\mathcal{F}$, est *a fortiori* inclus dans cette réunion. Ceci justifie l'introduction de la notion de composante connexe.

DÉFINITION 3.15. — *Soit a un élément de E topologique. On appelle composante connexe de a, le plus grand, (pour l'inclusion) connexe de E contenant l'élément a.*

THÉORÈME 3.16. — *Les composantes connexes sont des fermés de E.*

En effet si $C(a)$ est la composante connexe de a, l'adhérence de $C(a)$ est encore un connexe, (Théorème 3.10), contenant a, donc inclus dans le plus grand connexe $C(a)$, qui contient a. D'où $C(a) \subset \overline{C(a)}$, donc $C(a)$ fermé.

THÉORÈME 3.17. — *Les composantes connexes de E forment une partition de E, ce sont les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$: $(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow$ (x et y ont même composante connexe).*

Tout x de E étant dans sa composante connexe, si on note $(C_i)_{i\in I}$ la famille des composantes connexes distinctes (indexation injective), on a donc $\forall x \in E, \exists! i(x) \in I,\ x \in C_{i(x)}$ donc $E = \bigcup_{i\in I} C_i$. Les C_i sont non vides par définition, et si $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ avec $a \in C_i \cap C_j$, on aurait $C_i \cup C_j$ connexe comme union de connexes d'intersection non vide (Théorème 3.7). Mais alors si C_i est la compsoante connexe de x_i, et C_j celle de x_j, on a $x_i \in C_i \subset (C_i \cup C_j)$ d'où $C_i \cup C_j \subset C_i$ qui est le plus grand connexe contenant x_i. D'où en fait $C_i = C_i \cup C_j$, et de même $C_j = C_i \cup C_j$.

Finalement, $C_i \cap C_j \neq \emptyset \Rightarrow C_i = C_j$: on a bien une partition.

Enfin si C_i est la composante connexe de x_i et si $a \in C_i$, avec $C(a)$ composante connexe de a, on a encore $a \in C_i \cap C(a)$, d'où $C_i \cup \mathcal{C}(a)$ connexe contenant à la fois x_i et a, donc $(C_i \cup \mathcal{C}(a)) \subset \mathcal{C}(a)$, mais aussi $(C_i \cup \mathcal{C}(a)) \subset C_i$ qui est le plus grand connexe contenant x_i, donc $C_i = (C_i \cup \mathcal{C}(a)) = C(a)$: C_i apparaît bien comme la composante connexe de tous ses éléments.

Il est alors facile de justifier que $(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow$ (x et y ont même composante connexe), est une équivalence sur E, de classes les composantes connexes. ■

Les composantes connexes rendent bien des services dans les raisonnements, surtout quand on se rappelle qu'une réunion de deux connexes d'intersection non vide est un connexe.

Dans l'univers impitoyable des composantes connexes, de sombres drames se nouent : dès qu'une composante connexe en effleure une autre, elles s'absorbent mutuellement en une sorte de phagocytose sauvage. Voyons un peu ce mécanisme. Un fond sonore serait le bienvenu.

THÉORÈME 3.18. — *Un espace topologique produit $A \times B$ est connexe si et seulement si A et B le sont.*

D'abord, si $A \times B$ est connexe, les projections étant continues de $A \times B$ sur A et B respectivement, (Théorème 1.72), leurs images A et B sont connexes, (Théorème 3.8).

Puis, soit A et B connexes et $E = A \times B$. On considère deux éléments (a,b) et (a',b') de E et on va montrer qu'ils ont même composante connexe. En effet $\{a\} \times B$, image continue de B par l'application $y \rightsquigarrow (a,y)$, est connexe, (Théorème 3.8), et de même $A \times \{b'\}$, est connexe. Comme (a,b') est dans $\{a\} \times B \cap A \times \{b'\}$, la réunion $\{a\} \times B \cup A \times \{b'\}$ est un connexe de E, (Théorème 3.7), contenant (a,b) et (a',b').

Ces deux éléments ont *a fortiori* même composante connexe. Comme ils sont quelconques dans E, cet espace produit est connexe car formé d'une seule composante connexe. ■

3. Espaces localement connexes

DÉFINITION 3.19. — *Un espace topologique E est dit localement connexe en a de E si a admet une base de voisinages connexes. Il est dit localement connexe s'il l'est en tous ses éléments, donc si $\forall a \in E$, il existe une base de voisinage connexes de a.*

EXEMPLE 3.20. — $\mathbb{R}$, *(ou un intervalle I de $\mathbb{R}$), est localement connexe.*

Car, $\forall a \in I$, si V est un voisinage de a dans I, il existe O ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $a \in (O \cap I) \subset V \subset I$. Puis, O ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion d'intervalles ouverts donc $\exists \alpha > 0$, $a \in]a-\alpha, a+\alpha[\subset O$, d'où *a fortiori* $a \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap I \subset V$, avec $]a-\alpha, a+\alpha[\cap I$ intervalle de $\mathbb{R}$, donc connexe (Corollaire 4.77). Mais ce connexe de $\mathbb{R}$ étant contenu dans I est aussi connexe de I, (transitivité de la structure de sous-espace). Enfin $]a-\alpha, a+\alpha[\cap I$ est un ouvert de I, (intersection d'un ouvert de $\mathbb{R}$ et de I).

Finalement, $\forall a \in I, \forall V$ voisinage de a dans I, on a trouvé un voisinage connexe de a contenu dans V : les voisinages connexes de a dans I forment une base de voisinages de a. ■

EXEMPLE 3.21. — $\mathbb{Q}$, *sous-espace de $\mathbb{R}$, n'est pas localement connexe.*

Car soit $a \in \mathbb{Q}$, si $C(a)$ est un connexe de $\mathbb{Q}$, (donc de $\mathbb{R}$ car $\mathbb{Q}$ sous-espace de $\mathbb{R}$), contenant a, c'est que $C(a)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ inclus dans $\mathbb{Q}$: ce ne peut être que $\{a\} = [a, a]$. Mais $\{a\}$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{Q}$, donc pas voisinage de a dans $\mathbb{Q}$: il n'existe aucun voisinage connexe de a dans $\mathbb{Q}$. ■

EXEMPLE 3.22. – $\mathbb{Z}$, *sous-espace de $\mathbb{R}$ est localement connexe.*

Car ici, avec $a \in \mathbb{Z}$, $\{a\} = [a, a] =]a - 1/2, a + \frac{1}{2}[\cap \mathbb{Z}$ est un ouvert de $\mathbb{Z}$, donc un voisinage connexe de a, et $\{a\}$ est évidemment contenu dans tout voisinage de a dans $\mathbb{Z}$. ■

REMARQUE 3.23. — Comme $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont équipotents, soit f une bijection de $\mathbb{Z}$, discret, sur $\mathbb{Q}$ sous-espace de $\mathbb{R}$. La topologie de $\mathbb{Z}$ étant discrète, f est continue. Il résulte donc des exemples précédents que l'image continue, (même bijective), d'un espace localement connexe n'est pas forcément localement connexe.

L'intérêt de la notion de connexité locale réside dans la connaissance de la structure des ouverts d'un espace localement connexe. On a le

THÉORÈME 3.24. — *Un espace E est localement connexe si et seulement si pour tout ouvert Ω de E les composantes connexes de Ω sont des ouverts de Ω donc de E.*

Remarquons d'abord que si ω est une partie de Ω qui est un ouvert du sous-espace Ω, $\exists O$ ouvert de E tel que $\omega = O \cap \Omega$, mais Ω étant lui-même ouvert de E, ω est aussi ouvert de E; et réciproquement, si ω est à la fois contenu dans Ω, et ouvert de E alors $\omega = \Omega \cap \omega$ est un ouvert du sous-espace Ω.

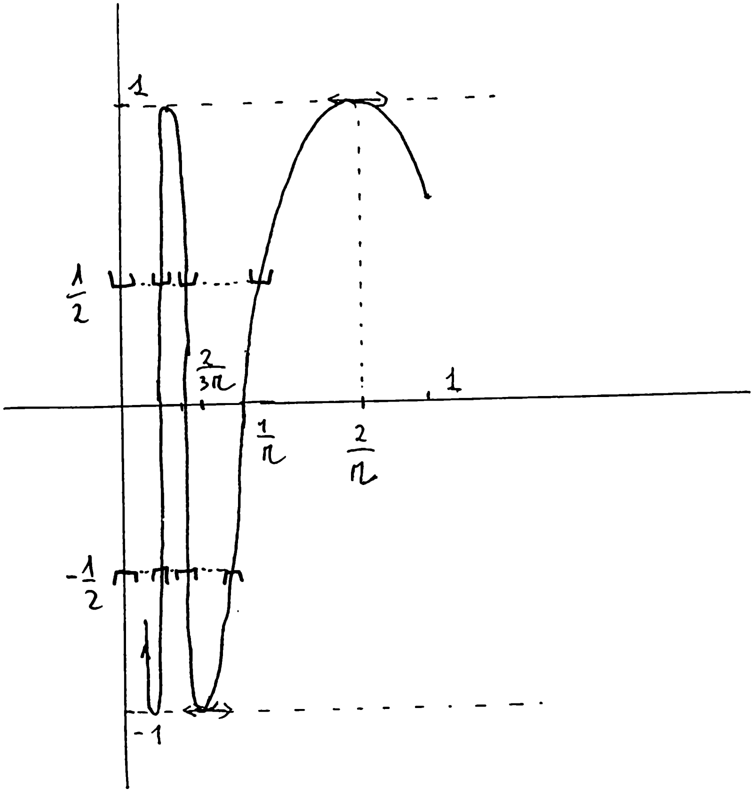
Soit alors E localement connexe et Ω un ouvert non vide de E. Soit $x \in \Omega$ et $\mathcal{C}(x)$ sa composante connexe dans Ω. Alors, pour tout y de $\mathcal{C}(x)$ on a $y \in \Omega$ ouvert de E donc voisinage de y, mais E étant localement connexe il existe un voisinage connexe $V(y)$ de y inclus dans Ω. Mais alors, dans Ω, $\mathcal{C}(x)$ et $V(y)$ sont deux connexes de Ω, contenant y, leur réunion est encore un connexe de Ω, ce connexe contient x, il est donc contenu dans $\mathcal{C}(x)$, composante connexe de x dans Ω. Finalement on a $\mathcal{C}(x) \subset \mathcal{C}(x) \cup V(y) \subset \mathcal{C}(x)$ d'où $V(y) \subset \mathcal{C}(x)$. Comme $V(y)$ est voisinage de y dans E, *a fortiori* on a $\mathcal{C}(x)$ voisinage de y, pour la topologie de E, et ce pour tout y de $\mathcal{C}(x)$: on a finalement $\mathcal{C}(x)$ ouvert de E.

Réciproquement si E est tel que pour tout ouvert de E les composantes connexes sont des ouverts, alors E est localement connexe car si $V(x)$ est un voisinage de x, avec Ω ouvert de E tel que $x \in \Omega \subset V(x)$, si $\mathcal{C}(x)$ est la composante connexe de x dans Ω, c'est un ouvert donc un voisinage de x et $x \in \mathcal{C}(x) \subset V(x)$ avec $\mathcal{C}(x)$ voisinage connexe de x : les voisinages connexes de x forment bien une base de voisinages de x. ■

REMARQUE 3.25. — *Localement connexe* $\not\Leftrightarrow$ *connexe* : $\mathbb{Z}$ est localement connexe mais pas connexe.

REMARQUE 3.26. — *Connexe* $\not\Leftrightarrow$ *localement connexe.*

Soit $\Gamma = \{(x, \sin \frac{1}{x});\ x \in]0,1]\}$ et $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup (\{0\} \times [-1,1])$ son adhérence, $\overline{\Gamma}$ est connexe, non localement connexe.



Soit en effet $\Omega = (\mathbb{R}\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[) \cap (\overline{\Gamma})$, c'est un ouvert de $\overline{\Gamma}$.

Quelles sont les composantes connexes de Ω?

Il y a $\{0\}\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ d'une part, puis comme $\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$ si $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{6}+2k\pi$ ou $\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ soit $x = \frac{6}{\pi(1+12k)}$ ou $\frac{6}{\pi(5+12k)}$ alors que $\sin\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$ si $\frac{1}{x} = \frac{7\pi}{6}+2k\pi$ ou $\frac{11\pi}{6}+2k\pi$ soit $x = \frac{6}{\pi(7+12k}$ ou $\frac{6}{\pi(11+12k)}$ les autres composantes connexes sont les parties du type

$$\mathcal{C}_{k,1} = \{(x, \sin\frac{1}{x});\quad \frac{6}{\pi(7+12k)} < x < \frac{6}{\pi(5+12k)}\} \text{ ou du type}$$

$$\mathcal{C}_{k,2} = \{(x, \sin\frac{1}{x});\quad \frac{6}{\pi(13+12k)} < x < \frac{6}{\pi(11+12k)}\}$$

Mais $\{0\}\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ n'est pas ouvert de $\overline{\Gamma}$, car tout ouvert $\mathcal{O}$ contenant $(0,0)$ est du type $\mathcal{O}=\omega\cap\overline{\Gamma}$ avec ω ouvert de $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$, et un tel ω rencontre une infinité de composantes de chaque type $\mathcal{C}_{k,1}$ et $\mathcal{C}_{k,2}$, donc $\mathcal{O}$ ne reste pas contenu dans la composante connexe $\{0\}\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$. ∎

COROLLAIRE 3.27. — *Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. Alors Ω est une réunion d'une famille dénombrable d'intervalles ouverts non vides disjoints de $\mathbb{R}$.*

Comme $\mathbb{R}$ est localement connexe, Ω étant réunion de ses composantes connexes celles-ci sont des ouverts de $\mathbb{R}$, (Théorème 3.24), et aussi des intervalles, (forme des connexes de $\mathbb{R}$). Mais ces composantes connexes étant disjointes et non vides donc du type $]a,b[$ avec $a<b$ (éventuellement $a=-\infty$ et (ou) $b=+\infty$), on peut choisir un rationnel dans chaque composante connexe et définir ainsi une injection de l'ensemble des composantes connexes dans $\mathbb{Q}$. Le cardinal de cet ensemble est donc fini ou celui de $\mathbb{N}$, ce qui est la définition de dénombrable, (équipotent à une partie de $\mathbb{N}$).

L'intérêt de ce corollaire apparaîtra surtout dans l'étude des equations différentielles, mais on va s'en servir déjà à la fin du paragraphe suivant.

Il faut remarquer que les composantes connexes de Ω sont à la fois des ouverts de Ω et de $\mathbb{R}$ mais aussi des fermés de Ω.

4. Connexité par arcs

DÉFINITION 3.28. — *Un espace topologique E est dit connexe par arcs si, $\forall(x,y)$ de E^2, il existe une application continue f de $[0,1]$ dans E avec $f(0)=x$ et $f(1)=y$.*

3.29. L'ensemble des $(t,f(t))$ pour $t\in[0,1]$ est un arc de E d'extrémités x et y.

THÉORÈME 3.30. — *Un espace E non vide, connexe par arcs est connexe.*

Soit a fixé dans E, et pour b variant dans E, soit Γ_b un arc d'extrémités a et b. C'est un connexe de E, (image continue du segment $[0,1]$, connexe de $\mathbb{R}$), donc $E = \bigcup_{b \in E} \Gamma_b$ est connexe comme réunion de connexes d'intersection non vide.

THÉORÈME 3.31. — *Si Ω est un ouvert non vide, connexe d'un espace vectoriel normé il est connexe par arcs.*

Car soit a fixé dans Ω, pour montrer que Ω est connexe par arcs on va justifier que l'ensemble $\mathcal{A}$ des b de Ω tels qu'il existe un arc de Ω d'extrémités a et b est Ω. Comme a est quelconque, on aura bien un arc entre x et y quelconques de Ω. Pour cela on prouve que $\mathcal{A}$ est ouvert fermé non vide de Ω connexe : ce sera Ω.

D'abord $\mathcal{A} \neq \emptyset$ car $a \in \mathcal{A}$ puisque $t \rightsquigarrow f(t) = a$ est un arc d'extrémités a et a.

$\mathcal{A}$ ouvert : soit $b \in \mathcal{A}$ et $\Gamma = \{(t, f(t));\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ un arc de Ω d'extrémités a et b. Comme $b \in \Omega$ ouvert de E espace vectoriel normé, (définition 4.18), $\exists \alpha > 0$ tel que $\{x;\ x \in E,\ ||x - b|| < \alpha\} \subset \Omega$.

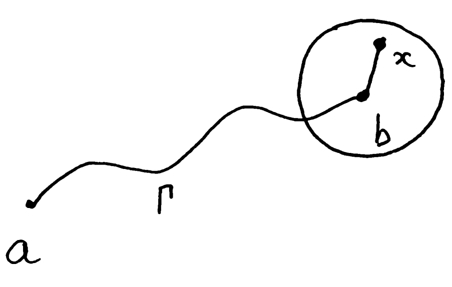
Mais une telle boule ouverte est convexe (Théorème 6.3), et le segment $[b, x]$, ensemble des $g(t) = tx + (1-t)b;\ t \in [0, 1]$ est un arc d'extrémités b et x.

En mettant « bout à bout » les 2 arcs, on en construit un d'extrémités a et x. En fait on définit h par

$$h(t) = f(2t) \text{ pour } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \text{ d'où } h(0) = f(0) = a,\ h(\frac{1}{2}) = f(1) = b,$$

$$\text{et } h(t) = g\left(2(t - \frac{1}{2})\right) \text{ pour } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1,$$

$$\text{(d'où } \quad h(\frac{1}{2}) = g(0) = b \text{ et } h(1) = g(1) = x.$$



Il est facile de vérifier que h est continue, avec $h(0) = a$ et $h(1) = x$.

Mais alors la boule ouverte de centre b de rayon α, notée $\mathcal{B}_O(b, \alpha)$ est contenue dans $\mathcal{A}$, qui est donc voisinage de b, et ce pour tout b de $\mathcal{A}$, d'où $\mathcal{A}$ ouvert.

Enfin $\mathcal{A}$ *est fermé* car si $b \in \overline{\mathcal{A}}$, adhérence prise dans Ω bien sûr, b étant dans Ω ouvert de E espace vectoriel normé, il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathcal{B}_O(b, \alpha) \subset \Omega$. Mais cette boule ouverte, voisinage de b, rencontre $\mathcal{A}$, (définition de l'adhérence). Soit $x \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B}_O(b, \alpha)$: il existe un arc de Ω d'extrémités a et x, un segment d'extrémités x et b, dans $\mathcal{B}_O(b, \alpha) \subset \Omega$, d'où en les mettant « bout à bout » un arc de Ω d'extrémités a et b. Donc $b \in \mathcal{A}$. On a $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$ d'où $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}$ est fermé. Comme Ω est connexe, c'est que $\mathcal{A} = \Omega$ d'où le résultat. ■

3.32. Cette réciproque n'est pas toujours vraie : connexe $\not\Leftrightarrow$ connexe par arcs.

C'est encore ce bon vieux $\overline{\Gamma} = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup \{(x, \sin \frac{1}{x});\ 0 < x \leqslant 1\}$ qui va nous donner un contre exemple.

Soit $a = (0, \alpha)$ et $b = (\beta, \sin \frac{1}{\beta})$ avec $\beta > 0$, deux points de Γ et supposons qu'il existe un arc d'extrémité a et b, c'est-à-dire une application continue $t \rightsquigarrow f(t) = (u(t), v(t))$ de $[0, 1]$ dans $\overline{\Gamma}$ vérifiant $f(0) = (0, \alpha)$ et $f(1) = (\beta, \sin \frac{1}{\beta})$.

Les deux applications u et v sont continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et on a soit $u(t) = 0$ et $v(t) \in [-1, 1]$,

soit $u(t) \in]0, 1]$ et alors $v(t) = \sin \dfrac{1}{u(t)}$.

On considère $\Omega = \{t;\ u(t) > 0\}$ c'est $u^{-1}(]0, +\infty[)$, donc c'est un ouvert de $[0, 1]$, (u continue). Cet ouvert est réunion de ses composantes connexes qui sont des intervalles, (connexes) ouverts de $[0, 1]$ (théorème 3.24).

Soit J une de ces composantes connexes de bornes c et d : *a priori* J peut être égal à $]c, d[$; $]c, d]$; $[c, d[$ ou $[c, d]$ mais étant ouvert de $[0, 1]$ donc du type $[0, 1] \cap$ (un ouvert de $\mathbb{R}$), si $c \in J$, (resp. $d \in J$) c'est que $c = 0$, (resp. $d = 1$). Or $u(0) = 0$ donc $0 \notin \Omega$: on a donc forcément $c > 0$ et J du type $]c, d]$ ou $]c, d[$ avec $c < d$, (les composantes connexes étant non vides). De plus $u(c) = 0$, (sinon $c \in \Omega$ et le connexe $\{c\} \cup J$ serait, dans Ω, un connexe contenant strictement une composante connexe de Ω, c'est exclu.

Mais alors l'image par u continue de J est un connexe, donc un intervalle de $]0, +\infty[$, ($J \subset \Omega = u^{-1}(]0, +\infty[)$, de borne inférieure 0 car

$\lim\limits_{t \to c^+} u(t) = u(c) = 0$. Comme pour tout t de $J, v(t) = \sin \dfrac{1}{u(t)}$, on aura, par continuité de v, $v(c) = \lim\limits_{t \to c^+} \left(\sin \dfrac{1}{u(t)} \right)$ existe alors que $u(t) = x$ décrivant un intervalle de $\mathbb{R}^+$ de borne inférieure 0, la fonction $x \rightsquigarrow \sin \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite si x tend vers 0^+. Il n'existe donc pas d'arc joignant a et b et restant à valeurs dans $\overline{\Gamma}$ qui n'est donc pas connexe par arcs. ■

EXERCICES

1. Soit E un espace topologique, A une partie de E, et C un connexe de E d'intersection non vide avec l'intérieur de A et l'intérieur de $(E - A)$.
Montrer que $C \cap (F_r(A)) \neq \emptyset$.

2. Soient A et B deux connexes non vides de E et F espaces topologiques connexes, avec $A \neq E$ et $B \neq F$. Montrer que $E \times F - A \times B$ est connexe.

3. Montrer que E topologique est connexe si et seulement si pour toute partie A et E non vide et distincte de E, la frontière de A est non vide.

4. Soit E un espace topologique, $(A_i)_{i \in I}$ une famille non vide d'ouverts connexes formant une partition de E. Montrer que ce sont les composantes connexes de E. Condition sur I pour que, les $(A_i)_{i \in I}$ étant des fermés connexes formant une partition, ce soient les composantes connexes de E.

5. Quelles sont les composantes connexes d'un espace produit $E \times F$ en fonction des composantes connexes de E et de F ?

6. Soient A et B connexes de E, espace topologique, tels que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.

SOLUTIONS

1. Comme la frontière de A est $\overline{A}- \overset{\circ}{A}$, et que $\overset{\circ}{\widehat{E-A}}= E - \overline{A}$, on a $E = \overset{\circ}{A} \cup \mathrm{Fr}\,(A) \cup (\overset{\circ}{\widehat{E-A}})$, ces trois parties de E étant disjointes, d'où

$$C = C \cap E = (C \cap \overset{\circ}{A}) \cup (C \cap \mathrm{Fr}\,(A)) \cup (C \cap (\overset{\circ}{\widehat{E-A}}))\,.$$

Mais alors, si $C \cap \mathrm{Fr}(A) = \varnothing$, C serait réunion de deux ouverts non vides et disjoints, $C \cap \overset{\circ}{A}$ et $C \cap (\overset{\circ}{\widehat{E-A}})$. Ceci contredit C connexe. Donc $C \cap \mathrm{Fr}(A) \neq \varnothing$.

2. Si on prouve que deux éléments quelconques m et n de $E \times F - A \times B$ sont dans la même composante connexe de $E \times F - A \times B$, cet espace topologique n'aura qu'une composante connexe, donc sera connexe.
Soit $m = (x, y)$ et $n = (z, t)$ dans $E \times F - A \times B$.
On a soit $x \notin A$, soit $y \notin B$, (et $z \notin A$ ou $t \notin B$).
Par exemple supposons que $x \notin A$ et $t \notin B$: considérons l'élément $r = (x, t)$, *a fortiori* $r \in E \times F - A \times B$.
Puis r et m sont dans $\{x\} \times F$, connexe comme image continue de F connexe par l'application $v \rightsquigarrow (x, v), v \in F$.
De même r et n sont dans $E \times \{t\}$ connnexe.
Mais alors $(\{x\} \times F) \cup (E \times \{t\})$ est un connexe de $E \times F - A \times B$, comme réunion de 2 connexes d'intersection non vide. Ce connexe contient m et n qui sont, *a fortiori*, dans la même composante connexe de $E \times F - A \times B$.
On traiterait de même les autres cas, $x \notin A, z \notin A$ mais $t \in B$ se faisant par exemple en prenant $v \notin B$ et en introduisant $p = (x, v)$ et $q = (z, v)$ qui sont dans $E \times F - A \times B$ et en vérifiant que $\{x\} \times F \cup E \times \{v\}$ est connexe, (comme union de 2 connexes contenant p; puis ce connexe contient q, mais $\{z\} \times F$ aussi, donc $(\{x\} \times F) \cup (E \times \{v\}) \cup (\{z\} \times F)$ est un connexe de $E \times F - A \times B$, contenant m et n qui, cette fois encore seront dans la même composante connexe.

3. On suppose E connexe. Soit $A \neq \varnothing$, $A \subsetneq E$. Si $\mathrm{Fr}\,(A) = \varnothing$, c'est $\overline{A} - \overset{\circ}{A} = \varnothing \Leftrightarrow \overset{\circ}{A} = \overline{A}$, d'où, comme $A \neq \varnothing$ et $A \neq E$ avec $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$, on aurait A ouvert et fermé non vide et distinct de E c'est absurde. Donc $\mathrm{Fr}\,(A) \neq \varnothing$.
Réciproquement si E vérifié la propriété, alors il est connexe car si A est ouvert et fermé, on a $\overset{\circ}{A} = A = \overline{A}$ d'où $\mathrm{Fr}\,(A) = \varnothing$ c'est que $A = \varnothing$ ou E.

4. Soit $a \in E = \bigcup_{i \in I} A_i$, $\exists i_0 \in I$, $a \in A_{i_0}$. Si $\mathcal{C}(a)$ est la composante connexe de a, donc le plus grand connexe contenant a, alors $A_{i_0} \subset \mathcal{C}(a)$, et si $b \in \mathcal{C}(a) \setminus A_{i_0}$, $\exists i \neq i_0$ dans I tel que $b \in A_i$. Mais alors $b \in A_i \cap \mathcal{C}(a)$

d'où $A_i \cup \mathcal{C}(a)$ connexe, (union de 2 connexes d'intersection non vide), comme $a \in A_i \cup \mathcal{C}(a)$, *a fortiori* on a $A_i \cup \mathcal{C}(a) \subset \mathcal{C}(a)$, (plus grand connexe contenant a), d'où $A_i \subset \mathcal{C}(a)$: $\mathcal{C}(a)$ est une réunion de parties A_i. Notons $\mathcal{C}(a) = \bigcup_{j\in J} A_j$, avec $J \subset I$. Si card $J > 1$, soit $j_1 \in J$, alors $\mathcal{C}(a) = A_{j_1} \cup (\bigcup_{j\in J\setminus\{j_1\}} A_j)$ est une partition de $\mathcal{C}(a)$ connexe en 2 ouverts : c'est absurde. Donc card $J = 1$ et les A_i sont bien les composantes connexes de E.

Si on suppose que les A_i sont des fermés connexe *en nombre fini* formant une partition de E, ce sont les composantes connexes car le même raisonnement s'applique et on arrive à $\mathcal{C}(a) = A_{j_1} \cup (\bigcup_{j\in J\setminus\{j_1\}} A_j)$, partition de $\mathcal{C}(a)$ connexe en deux fermés puisque $J \subset I$ est de cardinal fini.

Si card (I) infini, on peut avoir J infini, et la réunion des A_j pour j dans $J \setminus \{j_1\}$ n'est pas forcément un fermé.

Exemple : $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}$ est une partition de $\mathbb{R}$ en fermés connexes qui ne sont pas les composantes connexes.

5. Soit $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_j)_{j\in J}$ les familles des composantes connexes de E et F; les parties $A_i \times B_j$ sont des connexes de $E \times F$, (Théorème 3.18.).

Soit $p = (a, b)$ dans $E \times F$, $\exists i_0 \in I$, $a \in A_{i_0}$ et $\exists j_0 \in J$, $b \in B_{j_0}$. Donc $(a, b) \in A_{i_0} \times B_{j_0}$ connexe, et si $\mathcal{C}(p)$ est la composante connexe de p dans $E \times F$, alors $A_{i_0} \times B_{j_0} \subset \mathcal{C}(p)$.

Si $\mathcal{C}(p) \neq A_{i_0} \times B_{j_0}$, soit $q \in \mathcal{C}(p) \setminus A_{i_0} \times B_{j_0}$, par le même raisonnement, $\exists (i_1, j_1) \in I \times J$, $q \in A_{i_1} \times B_{j_1}$, et $A_{i_1} \times B_{j_1}$ est aussi dans $\mathcal{C}(p)$ qui est aussi la composante connexe de q. En fait $\mathcal{C}(p)$ est une réunion de parties du type $A_i \times B_j$: il existe $K \subset I \times J$, K non vide, tel que $\mathcal{C}(p) = \bigcup_{(i,j)\in K} A_i \times B_j$.

La projection $(x, y) \rightsquigarrow x$ étant continue de $E \times F$ dans E, sa restriction à $\mathcal{C}(p)$ est continue, donc l'image de $\mathcal{C}(p)$ est un connexe de E, or si $I' = \{i, i \in I, \exists j \in J, (i, j) \in K\}$, cette image est $\bigcup_{i\in I} A_i$, qui est donc connexe.

Soit x un élément quelconque de cette réunion, et i_0 dans I' tel que $x \in A_{i_0} \subset \bigcup_{i\in I'} A_i$: comme A_{i_0} est censé être le plus grand connexe de E contenant x, (composante connexe) et que $\bigcup_{i\in I'} A_i$ est un connexe contenant x, c'est que $\bigcup_{i\in I'} A_i \subset A_{i_0}$, donc que $I' = \{i_0\}$.

De même la projection sur F de $\mathcal{C}(p)$ est formée d'un seul B_{j_0} et finalement $\mathcal{C}(p) = A_{i_0} \times B_{j_0}$ avec $p \in A_{i_0} \times B_{j_0}$.

6. Si $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$, la réunion de deux connexes d'intersection vide est connexe : c'est du cours, (Théorème 3.7.).

On suppose donc $A \cap B = \emptyset$. Procédons par l'absurde en supposant $A \cup B$ non connexe : il existe alors O_1 et O_2 ouverts disjoints non vides de $A \cup B$, avec $A \cup B = O_1 \cup O_2$.

Donc $A = A \cap (O_1 \cup O_2)$ est la réunion des 2 ouverts $A \cap O_1$ et $A \cap O_2$ de A, ouverts disjoints : l'un des deux est vide. Par exemple $A \cap O_2 = \emptyset$. De même, $B = (B \cap (O_1 \cup O_2) = (B \cap O_1) \cup (B \cap O_2)$, avec B connexe donc l'un des 2 ouverts est vide, et ce n'est pas $B \cap O_2$ sinon, $O_2 = O_2 \cap (O_1 \cup O_2) = O_2 \cap (A \cup B) = (A \cap O_2) \cup (B \cap O_2)$ serait vide. Donc forcément $B \cap O_1 = \emptyset$, (et le choix de $A \cap O_1 = \emptyset$ conduirait à $B \cap O_2 = \emptyset$).

Mais alors $A = A \cap O_1$, donc $A \subset O_1$ et $O_1 \subset (A \cup B)$ donc $O_1 = (O_1 \cap A) \cup (O_1 \cap B)$ avec $O_1 \cap B$ vide d'où $O_1 = O_1 \cap A \Rightarrow O_1 \subset A$ et $A = O_1$.

On obtient de même $B = O_2$ ouvert de $A \cup B$, donc il existe O ouvert de E tel que $B = O \cap (A \cup B)$ d'où

$$B \cap A = O \cap A \cap (A \cup B) = (O \cap A \cap A) \cup (O \cap A \cap B).$$

Comme $A \cap B = \emptyset$, il reste $B \cap A = O \cap A = \emptyset$.

Il est temps de se rappeler que $\overline{A} \cap B$ est non vide. Soit $x \in B \cap \overline{A}$, comme $B \subset O$ on a $x \in O$ qui est voisinage de x dans E, x est adhérent à A donc on doit avoir $O \cap A$ non vide et, on ne sait pas comment, mais on a trouvé $O \cap A = \emptyset$. Curieux non? N'allons pas plus loin pour conclure à l'absurdité de l'hypothèse $A \cup B$ non connexe.

CHAPITRE 4

Espaces métriques

Dans ce chapitre nous allons particulariser des espaces topologiques en considérant le cas d'une topologie associée à une distance. De ce fait la structure topologique devient plus riche, mais s'applique à moins d'espaces. L'importance des formulations séquentielles, (à l'aide des suites) va s'accentuer, et nous introduirons deux notions nouvelles, non formulables en topologie générale : *celle de continuité uniforme* et celle *d'espaces complets*.

Je supposerai encore connues les propriétés usuelles de $\mathbb{R}$, mais les mécanismes de raisonnement mis en place dans ce chapitre serviront à étudier une construction possible de $\mathbb{R}$ dans le chapitre suivant. Le lecteur plus soucieux d'efficacité et de rendement immédiat pourra ainsi sauter le chapitre V sans scrupule.

1. Distances et écarts

DÉFINITION 4.1. — *On appelle distance sur un ensemble E toute application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :*

1) $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) \geqslant 0$ *et* $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2) $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = d(y, x)$,
3) $\forall (x, y, z) \in E^3,\ d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

4.2. La condition 3 porte le nom d'inégalité triangulaire : c'est un outil pour majorer.

4.3. Exemple fondamental Sur $\mathbb{R}$, à l'aide de la valeur absolue, (rappelons que $|x| = x$ si $x \geqslant 0$, et $|x| = -x$ si $x \leqslant 0$) on vérifie facilement que l'application d définie par $d(x, y) = |x - y|$ est une distance.

EXEMPLE 4.4. — Plus généralement, si G est un groupe commutatif noté ici additivement, et s'il existe une application N de G dans $\mathbb{R}$ vérifiant

(i) $\forall x \in G, N(x) \geqslant 0$ et $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_G$, (élément neutre du groupe)

(ii) $\forall x \in G, N(-x) = N(x)$,

(iii) $\forall (x,y) \in G^2, N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$, alors l'application $d : G \times G \mapsto \mathbb{R}$ définie par $d(x,y) = N(x-y)$ est une distance car

1) $\forall (x,y) \in G^2, d(x,y) = N(x-y) \geqslant 0$ et $(d(x,y) = 0) \Leftrightarrow (N(x-y) = 0) \Leftrightarrow (x - y = 0_G) \Leftrightarrow (x = y)$;

2) $\forall (x,y) \in G^2, d(y,x) = N(y-x) = N(-(x-y)) = N(x-y)$ d'après (ii) donc $d(x,y) = d(y,x)$;

3) $\forall (x,y,z) \in G^3, d(x,z) = N(x-z) = N(x-y+y-z)$
$\leqslant N(x-y) + N(y-z)$, d'après (iii)
soit encore $\leqslant d(x,y) + d(y,z)$.

C'est bien l'inégalité triangulaire. ■

EXEMPLE 4.5. — Soit d une distance sur un ensemble E. Les applications d' et d'' de E^2 dans $\mathbb{R}$ définies par $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ et $d''(x,y) = \inf(1, d(x,y))$ sont des distances.

La vérification des propriétés 1) et 2) est immédiate. Justifions l'inégalité triangulaire.

Pour d'. L'application $\varphi : t \rightsquigarrow \dfrac{t}{1+t}$ est croissante de $\mathbb{R} - \{-1\}$ dans $\mathbb{R}$ car $\varphi'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} > 0$. Soient alors x, y, z dans E on a

$$d'(x,y) = \varphi(d(x,y)) \leqslant \varphi(d(x,z) + d(z,y)) \text{ soit encore}$$

$$\begin{aligned} d'(x,y) &\leqslant \frac{d(x,z) + d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} \\ &\leqslant \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} \\ &\leqslant \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1 + d(z,y)}, \end{aligned}$$

(on « divise par plus petit... »).

C'est bien $d'(x,y) \leqslant d'(x,z) + d'(z,y)$.

Pour d'' On veut prouver que $d''(x,y) \leqslant d''(x,z) + d''(z,y)$. Comme les valeurs de d'' sont inférieures ou égales à 1, si $d''(x,z)$ ou $d''(z,y) = 1$ c'est évident.

On suppose donc que $d''(x,z)$ et $d''(z,y)$ sont inférieurs strictement à 1.

Si $d''(x,y) < 1$, en fait $d''(x,y) = d(x,y)$; $d''(x,z) = d(x,z)$ et $d''(z,y) = d(z,y)$: l'inégalité triangulaire est vérifiée, c'est celle pour d.

Si $d''(x,y) = 1$, c'est que $d(x,y) \geqslant 1$ et alors on a

$$d''(x,y) = 1 \leqslant d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y) = d''(x,z) + d''(z,y) :$$

on a bien l'inégalité triangulaire. ∎

DÉFINITION 4.6. — *On appelle écart sur un ensemble E toute application f de $E \times E$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que*

1) $x = y \Rightarrow f(x,y) = 0$,
2) $f(x,y) = f(y,x)$, *pour tout x et y de E,*
3) $\forall (x,y,z) \in E^3, f(x,y) \leqslant f(x,z) + f(z,y)$.

Il est facile de vérifier que toute somme d'écarts est un écart, toute limite d'écarts, toute enveloppe supérieure d'écarts est un écart alors que ce serait faux pour des distances qui ne seraient pas prises en nombre fini.

DÉFINITION 4.7. — *On appelle espace métrique tout couple (E,d) formé d'un ensemble et d'une distance d sur E.*

Cette distance va servir à définir une topologie, et le concept d'espace métrique est de nature topologique.

DÉFINITION 4.8. — *Si A est une partie d'un espace métrique E de distance d, on appelle sous-espace métrique le couple $(A, d|_{A\times A})$.*

Métrique produit

Soient $(E_i, d_i)_{i=1,\dots,n}$ des espaces métriques en nombre fini. On définit classiquement sur $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$, trois distances notées $d^{(\infty)}$, $d^{(1)}$ et $d^{(2)}$ de la manière suivante.

Si $x = (x_1, \dots, y_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux n-uplets de E on pose :

4.9.
$$d^{(\infty)}(x,y) = \sup\{d_i(x_i,y_i);\ 1 \leqslant i \leqslant n\};$$
$$d^{(1)}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i,y_i) \text{ et}$$
$$d^{(2)}(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(d_i(x_i,y_i))^2}.$$

Il est facile de vérifier qu'il s'agit de distances, (vérification laissée au lecteur), l'inégalité triangulaire pour $d^{(2)}$ se justifiant à l'aide de la structure euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, (voir 14.2 en Analyse fonctionnelle).

On a de plus, $\forall (x,y) \in E$:

4.10.
$$d^{(\infty)}(x,y) \underset{①}{\leqslant} d^{(2)}(x,y) \underset{②}{\leqslant} d^{(1)}(x,y) \underset{③}{\leqslant} nd^{(\infty}(x,y).$$

On a ① car $\left(d^{(\infty)}(x,y)\right)^2$ est l'un des $(d_i(x_i,y_i))^2$, c'est donc inférieur à la somme de tous les carrés des $\left(d_j(x_j,y_j)\right)$.

Pour ②, en élevant au carré on a

$$\left(d^{(2)}(x,y)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}(d_i(x_i,y_i))^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}(d_i(x_i,y_i))^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} d_i(x_i,y_i)d_j(x_j,y_j),$$

les d_i étant à valeurs positives, soit encore

$$\left(d^{(2)}(x,y)\right)^2 \leqslant \left(d^{(1)}(x,y)\right)^2.$$

Enfin on a ③ car chaque $d_i(x_i,y_i)$ étant majoré par $d^{(\infty)}(x,y)$, leur somme est majorée par $nd^{(\infty)}(x,y)$.

Encore du vocabulaire

DÉFINITION 4.11. — *Soient deux espaces métriques E et E' de distances respectives d et d'. On appelle isométrie de E sur E' toute bijection f de E sur E' vérifiant :* $\forall (x,y) \in E^2$, $d'(f(x),f(y)) = d(x,y)$.

On pourrait se contenter de l'aspect surjectif de f, car si la 2ᵉ condition est vérifiée, f est injective puisque, si $f(x) = f(y)$, on a $d'(f(x), f(y)) = 0$ d'où $d(x, y) = 0$ soit $x = y$, ce qui serait faux pour des écarts.

DÉFINITION 4.12. — *Soit (E, d) un espace métrique, $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}$. On appelle boule ouverte (resp. fermée) de centre a de rayon r l'ensemble noté $\mathcal{B}_O(a, r) = \{x;\ x \in E, d(a, x) < r\}$,*
(resp. $\mathcal{B}_f(a, r) = \{x;\ x \in E, d(a, x) \leqslant r\}$).

Il convient de remarquer que pour $r \leqslant 0$, la boule ouverte de centre a de rayon r est vide, ainsi que, pour $r < 0$ la boule fermée. C'est pourquoi, la nature ayant horreur du vide, on est souvent conduit à préciser $r > 0$, mais ce n'est pas une obligation.

DÉFINITION 4.13. — *On appelle sphère de centre a de rayon r l'ensemble noté $S(a, r) = \{x;\ d(a, x) = r\}$.*

Il est clair que $\mathcal{B}_f(a, r) = \mathcal{B}_O(a, r) \cup S(a, r)$ avec $\mathcal{B}_O(a, r) \cap S(a, r) = \emptyset$ mais... ne parlons pas de partition car la sphère pourrait fort bien être vide.

Exemple : dans $\mathbb{R}$ muni de $d(x, y) = |x - y|$, on considère l'espace métrique $(A, d_A = d|_{A \times A})$ avec $A = \{0\} \cup]1, +\infty[$, on a $\mathcal{B}_O(0, 1) = \mathcal{B}_f(0, 1) = \{0\}$ et la sphère de centre O de rayon 1 dans A est vide.

DÉFINITION 4.14. — *On appelle diamètre d'une partie A de E, métrique pour la distance d la borne supérieure, (éventuellement égale à $+\infty$) des $d(x, y)$; $\forall (x, y) \in A^2$.*

4.15. Une partie A est dite *bornée* si et seulement si elle est de diamètre fini, et *A est bornée si et seulement si elle est contenue dans une boule, ouverte ou fermée.*

D'abord, si

$$A \subset \mathcal{B}_O(a, r) \Rightarrow A \subset \mathcal{B}_f(a, r) \text{ et si on a}$$
$$A \subset \mathcal{B}_f(a, r) \text{ alors } A \subset \mathcal{B}_O(a, 2r) \text{ pour } r > 0.$$

Donc la nature ouverte ou fermée de la boule n'intervient pas.

Puis, si $A \subset \mathcal{B}_f(a, r)$, $\forall (x, y) \in A^2$ on a $d(x, a) \leqslant r$ et $d(a, y) \leqslant r$ d'où $d(x, y) \leqslant d(x, a) + d(a, y) \leqslant 2r$, donc le diamètre de A est fini, inférieur ou égal à $2r$.

Et si A est de diamètre fini, r, en fixant $a \in A$, (si $A \neq \emptyset$), $\forall b \in A, d(a,b) \leqslant r \Rightarrow A \subset \mathcal{B}_f(a,r)$. (Si $A = \emptyset$, A est contenue dans toute boule). ■

DÉFINITION 4.16. — *Soient A et B deux parties d'un espace métrique. On appelle distance de A et B la borne inférieur des $d(x,y)$, $\forall (x,y) \in A \times B$.*

On pouvait imposer A et B non vides dans cette définition, ou prendre $d(A,B) = 0$ si A ou B est vide.

4.17. *On peut vérifier que*

$$\begin{aligned} d(A,B) &= \inf \{d(x,y);\ (x,y) \in A \times B\}, \\ &= \inf \{d(\{x\},B);\ x \in A\}, \\ &= \inf \{d(A,\{y\});\ y \in B\}. \end{aligned}$$

2. Topologie d'un espace métrique

DÉFINITION 4.18. — *Soit (E,d) un espace métrique. On appelle ouvert toute partie Ω de E vérifiant : $\forall x \in \Omega, \exists r_x \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}_0(x,r_x) \subset \Omega$.*

THÉORÈME 4.19. — *Les ouverts ainsi définis sont ceux d'une topologie sur E appelée topologie métrique.*

Et par la suite, quand on parlera d'espace métrique, c'est l'espace topologique muni de la topologie associée à la distance que l'on considérera.

Justifions ce théorème :

1) $\emptyset$ est ouvert car $\forall x \in \emptyset, \ldots$ n'importe quoi derrière est vérifié, puisque portant sur un prédicat vide.

2) E est ouvert, $\forall a \in E, \forall r \in \mathbb{R}_+^*$, en ait, $\mathcal{B}_0(a,r) \subset E$.

3) Les ouverts sont stables par réunion : soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts, et $O = \bigcup_{i \in I} O_i$, alors, $\forall x \in O$, $\exists i \in I, x \in O_i$, et O_i ouvert donc $\exists r_x \in \mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}_0(x,r_x) \subset O_i \subset O$.

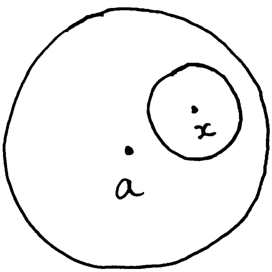
4) Enfin ils sont stables par intersection fini : soit des ouverts $O_1, \ldots, O_n$ en nombre fini et $O = \bigcap_{i=1}^{n} O_i$, si $x \in O$, alors $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$,

$x \in O_i$, ouvert, donc $\exists r_i > 0$, $\mathcal{B}_0(x, r_i) \subset 0_i$. Si $r = \inf\{r_1, \ldots, r_n\}$, on a $r > 0$ car c'est l'un des r_i, et $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $x \in \mathcal{B}_0(x, r) \subset \mathcal{B}_0(x, r_i) \subset O_i$, d'ou finalement $\mathcal{B}_0(x, r) \subset O$: l'intersection O des ouverts $O_1, \ldots, O_n$ est bien un ouvert. ■

THÉORÈME 4.20. — *Les ouverts de E espace métrique sont exactement les réunions de boules ouvertes.*

D'abord toute boucle ouverte $\mathcal{B}_0(a, \rho)$ est un ouvert car, si $\rho \leqslant 0$, on a l'ensemble vide, ouvert, et si $\rho > 0$, alors $\forall x \in \mathcal{B}_0(a, \rho)$, on a $\mathcal{B}_0(x, \rho - d(a, x)) \subset \mathcal{B}_0(a, \rho)$; car, $\forall y \in \mathcal{B}_0(x, \rho - d(a, x))$ on a $d(a, y) \leqslant d(a, x) + d(x, y)$ avec $d(x, y) < \rho - d(a, x)$ d'où
$d(a, y) < d(a, x) + \rho - d(a, x)$ soit $d(a, y) < \rho$. Comme $\rho - d(a, x) > 0$ on a bien trouvé un réel strictement positif $r_x = \rho - d(a, x)$ tel que
$\mathcal{B}_0(x, r_x) \subset \mathcal{B}_0(a, \rho)$.

Le schéma suivant résume bien cette situation, mais avec un gros défaut, il semble suggérer que E est un espace euclidien.



Les boules ouvertes étant des ouverts, toute réunion de boules ouvertes est un ouvert, puis, si Ω est un ouvert, $\forall x \in \Omega$, $\exists r_x > 0$, $\mathcal{B}_0(x, r_x) \subset \Omega$ d'où

$$\Omega \subset \bigcup_{x \in \Omega} \mathcal{B}_0(x, r_x) \subset \Omega \text{ et l'égalité } \Omega = \bigcup_{x \in \Omega} \mathcal{B}_0(x, r_x). \qquad ■$$

Il convient de remarquer que si Ω est vide, la traduction de y appartient à une réunion indexée par $\emptyset$ commençant par $\exists x \in \emptyset \ldots$, chose impossible à vérifier, implique qu'aucun y de E n'est dans cette réunion, qui est vide.

REMARQUE 4.21. — *La topologie d'ensemble ordonné introduite sur $\mathbb{R}$, (exemple 1.5), est la topologie de $\mathbb{R}$ métrique, avec la distance associée à la valeur absolue.*

Car les ouverts de $\mathbb{R}$ ordonné sont les réunions d'intervalles ouverts.

Soit I, un intervalle ouvert, si $I = \emptyset$, c'est un ouvert de $\mathbb{R}$ métrique ; et si $I \neq \emptyset$, avec a et b bornes de I, (éventuellement $a = -\infty, b = +\infty$) on sait que $a < b$, et $\forall x \in I, \exists r_x > 0$, $r_x < \inf(b-x, x-a)$ tel que $\mathcal{B}_0(x, r_x) =]x - r_x, x + r_x[\subset]a, b[= I$; donc dans chaque cas I est un ouvert de $\mathbb{R}$ métrique : les ouverts de $\mathbb{R}$ ordonné sont des ouverts de $\mathbb{R}$ métrique.

Réciproquement, une boule ouverte est soit $\emptyset$, soit du type $]a - r, a + r[$ avec $r > 0$, c'est donc un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ ordonné : les ouverts de $\mathbb{R}$ métrique sont des réunions d'intervalles ouverts donc des ouverts de $\mathbb{R}$ ordonné. ■

REMARQUE 4.22. — *Une partie V de E métrique est voisinage de a si et seulement si il existe $r > 0$, $\mathcal{B}_0(a, r) \subset V$.* (justification immédiate).■

THÉORÈME 4.23. — *La topologie d'espace métrique est une topologie séparée.*

Car si x et y sont deux éléments distincts de E, on a $d(x, y) > 0$ donc les boules ouvertes $\mathcal{B}_0\left(x, \dfrac{d(x,y)}{2}\right)$ et $\mathcal{B}_0\left(y, \dfrac{d(x,y)}{2}\right)$ sont deux voisinages de x et y respectivement, disjoints, l'existence de z dans leur intersection donnant, par inégalité triangulaire :

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) < \frac{d(x,y)}{2} + \frac{d(x,y)}{2} \text{ soit}$$
$$d(x, y) < d(x, y) : \text{ absurde.}$$
■

Les notions de limite, de continuité, prennent une formulation plus simple dans le cadre des espaces métriques : c'est le règne du couple (ε, α) qui commence.

Ainsi, la formulation de l'existence de $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, avec f application de E métrique dans F métrique et a dans E devient :

4.24 $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, d_E(x, a) < \alpha \Rightarrow d_F(f(x), b) < \varepsilon$
puisque les voisinages des éléments sont remplacés par des boules ouvertes et que celles-ci sont caractérisées par leurs rayons, les centres étant connus. ■

Bien sûr, très rapidement on note d pour $d_E, d_F \ldots$, l'appartenance des éléments à tel ou tel espace métrique suffisant pour savoir de quelle distance il s'agit.

Remarquons enfin qu'une boule ouverte étant *a fortiori* contenue dans la boule fermée de même centre et même rayon, et contenant une boule fermée de rayon plus petit, on peut formuler 4.24 avec des boules fermées, en :

4.25. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, d(x,a) \leqslant \Rightarrow d(f(x),b) \leqslant \varepsilon,$
les rayons eux restant > 0. Pas d'état d'âme à ce sujet, d'autant plus que le résultat peut être obtenu par un passage à la limite qui ne préservera pas les inégalités strictes.

Outre cette facilité d'écriture, les espaces métriques vont donner toute leur importance aux suites grâce au

THÉORÈME 4.26. — *Dans E métrique, tout point admet une base dénombrable de voisinages.*

En effet, si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres > 0 qui converge vers 0, (par exemple $r_n = \dfrac{1}{n+1}$), les $\mathcal{B}_0(a, r_n)$ forment une telle base car $\forall V$ voisinage de a, $\exists r > 0$, $\mathcal{B}_0(a,r) \subset V$. Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$ et $r > 0 \Rightarrow \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, r_n < r$, (traduire la limite avec $\varepsilon = r$ par exemple, pour $n \geqslant n_0, r_n \in]-r, r[$). En particulier $\mathcal{B}_0(a, r_{n_0}) \subset V$.

L'existence de cette famille dénombrable de voisinage va permettre de caractériser des notions topologiques à l'aide des suites. Ainsi on a

THÉORÈME 4.27. — *Soit A une partie de E métrique, on a $x \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.*

D'abord, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A converge vers x, alors $\forall V$ voisinage de x, $\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, a_n \in V$, donc *a fortiori* $V \cap A \neq \varnothing$, on a : $x \in \overline{A}$, et dans ce sens la structure métrique de E n'intervient pas.

Réciproquement soit $x \in \overline{A}$, $A \subset E$ *métrique*, alors $\forall n \in \mathbb{N}$,
$A \cap \mathcal{B}_0(x, \dfrac{1}{n+1}) \neq \varnothing$, car $\mathcal{B}_0(x, \dfrac{1}{n+1})$ est voisinage de x, d'où a_n dans A avec $d(x, a_n) < \dfrac{1}{n+1}$: la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A converge vers x. ■

THÉORÈME 4.28. — *Soit A une partie de E métrique, on a x point d'accumulation de A si et seulement si il existe une suite de points tous distincts de A, qui converge vers x.*

Là encore, justification en deux temps, la structure métrique ne servant que pour la réciproque.

Si on a une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments distincts de A, qui converge vers $x, \forall V$ voisinage de $x, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, a_n \in V$. Comme il y a une infinité de a_n distincts avec $n \geqslant n_0$ on n'a aucun mal à en trouver un différent de x, donc on a $(V - \{x\}) \cap A \neq \varnothing$: x est point d'accumulation de A.

Réciproquement si x est point d'accumulation de A on va construire par récurrence une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments distincts qui converge vers x.

D'abord $(A - \{x\} \cap \mathcal{B}_0(x,1) \neq \varnothing : \exists a_0 \in A$ avec $0 < d(x, a_0) < 1$.

Soit $r_1 = \inf(\frac{1}{2}, d(x, a_0)$ on a $r_1 > 0$, $(A - \{x\}) \cap \mathcal{B}_0(x, r_1) \neq \varnothing$ donc $\exists a_1 \in A$ avec $0 < d(x, a_1) < r_1$. Mais alors $a_1 \neq a_0$ puisque

$$d(x, a_1) < r_1 \leqslant d(x, a_0); \quad \text{et } d(x, a_1) < \frac{1}{2}.$$

Supposons construits $a_0, a_1, \ldots, a_n$ distincts dans A, avec $\forall k \leqslant n$,

$$0 < d(x, a_k) < \frac{1}{k+1},$$

on peut même imposer la décroissance des $d(x, a_k)$.

Avec $r_{n+1} = \inf\{\frac{1}{n+2}, d(x, a_k), k = 0, \ldots, n\}$, on a $r_{n+1} > 0$ car c'est l'un des nombres > 0 dont on prend l'inf, mais alors x point d'accumulation de A donne $(A - \{x\}) \cap \mathcal{B}_0(x, r_{n+1}) \neq \varnothing$, donc $\exists a_{n+1}$ dans $A - \{x\}$ tel que

$$d(x, a_{n+1}) < r_{n+1} \text{ ce qui implique } a_{n+1} \neq a_k, \forall k = 0, \ldots, n$$

et $d(x, a_{n+1}) < \dfrac{1}{n+2}$. On construit bien ainsi une suite de points distincts de A qui converge vers x. ■

THÉORÈME 4.29. — *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E métrique. On a u valeur d'adhérence de la suite si et seulement si il existe une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers u.*

Si $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite qui converge vers u, alors $\forall V$, voisinage de $u, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, x_{\varphi(n)} \in V$, mais comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty, \forall p \in \mathbb{N}$, il existe un $\varphi(n) \geqslant p$ tel que $x_{\varphi(n)} \in V$: on a bien u valeur d'adhérence (voir la définition 1.49).

Réciproquement si u valeur d'adhérence, soit $r_0 = 1, p_0 = 0, \exists$ un entier $n_0 \geqslant p_0$ tel que $x_{n_0} \in \mathcal{B}_0(u, r_0)$. On pose $\varphi(0) = n_0$. Supposons construits $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$ tels que $\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(n)$ et que $\forall k \leqslant n,\, d\left(u, x_{\varphi(k)}\right) \leqslant \dfrac{1}{k+1}$. Alors avec $\mathcal{B}_0(u, \dfrac{1}{n+2})$ voisinage de u et $p_{n+1} = \varphi(n) + 1$, on sait qu'il existe un entier supérieur ou égal à p_{n+1}, noté $\varphi(n+1)$, tel que $x_{\varphi(n+1)} \in \mathcal{B}_0\left(u, \dfrac{1}{n+2}\right)$: on construit ainsi une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers u. ■

THÉORÈME 4.30. — *Soit E métrique, F topologique séparé, $f : E \mapsto F$ et a dans E. On a $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E qui converge vers a, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ existe.*

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ existe, doit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E qui converge vers a, alors $\forall V$ voisinage de l, $\exists W$ voisinage de a dans E tel que $f(W) \subset V$; puis à W on associe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0, x_n \in W$, finalement on a, $\forall V$ voisinage de $l, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, f(x_n) \in V$: la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et converge vers l.

Il convient de remarquer que la *structure métrique* n'est pas intervenue.

Réciproquement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E qui converge vers a, la suite des $f(x_n)$ est convergente, alors la limite ne dépend pas du choix de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car si pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = l$ et pour $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x'_n) = l'$, en définissant la suite $(x''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x''_{2k} = x_k$ et $x''_{2k+1} = x'_{k+1}$, il est facile de vérifier que $\lim\limits_{n\to+\infty} x''_n = a$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x''_n) = l''$ existe, mais alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x''_{2n}) = l''$, (suite extraite), or $f(x''_{2n}) = f(x_n)$ tend vers l d'où $l = l''$, (Théorème 1.47), et aussi $l' = l''$ en extrayant les $f(x''_{2n+1})$.

Soit l la limite commune de toutes ces suites. On veut prouver l'existence de la limite de f lorsque x tend vers a, cette limite devant être l vu la première partie du théorème. Si on n'a pas $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$, en prenant la négation, on a : $\exists V$ voisinage de $l, \forall W$ voisinage de $a, \exists x \in W$, $f(x) \notin V$, donc en particulier $\forall n \in \mathbb{N}$, avec $W = \mathcal{B}_0(a, \dfrac{1}{n+1})$, $\exists x_n \in E$ avec $d(x_n, a) < \dfrac{1}{n+1}$ et $f(x_n) \notin V$. Mais alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E converge vers a, avec $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne converge pas vers l puisque $\forall n$, $f(x_n) \notin V$. Mais *a fortiori* la suite des $f(x_n)$ ne converge pas, (seule limite possible l) : c'est contraire à l'hypothèse. On a donc bien $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$. ■

On aurait des résultats analogues avec A partie de E, E métrique, f de A dans F et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$, ou bien a point d'accumulation de A et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A - \{a\}}} f(x) \ldots$ en imposant bien sûr les mêmes conditions sur les suites.

COROLLAIRE 4.31. — *Soit E métrique, F topologique séparé, f application de E dans F est continue en a si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E qui converge vers a, la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.*

En effet, dans ce cas la limite commune des suites $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est $f(a)$ car la suite constante $x_n = a$ converge vers a. ∎

COROLLAIRE 4.32. — *Soit E métrique et F topologique séparé. Une application f de E dans F est continue sur E si et seulement si sa restriction à tout compact de E est continue.*

D'abord f continue de E dans F et K sous-espace compact de E donne : $f|_K$ est continue de K dans E (Théorème 1.68).

Réciproquement, si $a \in E$, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de E qui converge vers a, $K = \{a\} \cup \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un compact de E, (séparé et si $(\omega_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de K, $\exists i_0 \in I, a \in \omega_{i_0}$ ouvert donc voisinage de a mais alors $\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, x_n \in \omega_{i_0}$; la partie finie $\{x_0, x_1, \ldots, x_{p_0 - 1}\}$ de K est alors recouverte par un nombre fini des ω_i d'où un recouvrement fini de K). Mais alors $f|_K$ est continue, et comme $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ dans K on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$ existe, (corollaire 4.31).

Dans les paragraphes suivants nous verrons l'importance des suites s'accentuer : étude des espaces métriques compacts ou métriques connexes, continuité uniforme. Mais avant de les aborder on peut se demander si, sur un espace topologique métrique, d'autres distances peuvent ou non donner la même topologie.

DÉFINITION 4.33. — *Deux distances sont dites topologiquement équivalentes sur le même ensemble E si elles définissent la même topologie.*

Cela signifie que les distances d et d' vont définir les mêmes ouverts, (même si les boules ouvertes ne sont pas les mêmes : ne pas oublier le facteur réunion de boules ouvertes...)

4.34. Mais ceci équivaut à dire que l'identité $i : x \rightsquigarrow x$ de E muni de d sur E muni de d' est bicontinue, (en tant qu'ensemble, si O est une partie de E, $i^{-1}(O) = i(O) = O$).

EXEMPLE 4.35. — Sur $E =]0, +\infty[$ les deux distances $d : d(x,y) = |x-y|$ et $d' : d'(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ sont topologiquement équivalentes.

Car dire que $i : (E,d) \rightsquigarrow (E,d')$ est continue revient à dire que $f : x \rightsquigarrow \frac{1}{x}$ est continue de $]0,+\infty[$ sur lui-même pour topologie usuelle de $]0,+\infty[$, associée à d au départ et à l'arrivée.

De même $i^{-1} = x \rightsquigarrow x$ de (E,d') sur (E,d) est continue car rendre $d(a,x) = |a-x| \leqslant \varepsilon$ pour $d'(a,x) = |\frac{1}{a} - \frac{1}{x}| \leqslant \alpha$, c'est encore traduire la continuité de f en $\frac{1}{a}$ et remplacer x par $\frac{1}{x}$. ■

Deux remarques avant de clore ce paragraphe

REMARQUE 4.36. — *L'adhérence d'une boule ouverte peut être contenue strictement dans la boule fermée :* $\overline{\mathcal{B}_O(a,r)} \underset{\neq}{\subset} B_f(a,r)$.

Soit $E = \mathbb{R}^2$ pour $d^{(\infty)}, A = \{0,0\} \cup [\frac{1}{4}, 1] \times [0,1]$ muni de $d_A = d|_{A\times A}$ et $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

On a $\mathcal{B}_O(a, \frac{1}{2}) = [\frac{1}{4}, 1[\times]0,1[$; $\overline{\mathcal{B}_O(a, \frac{1}{2})} = [\frac{1}{4}, 1] \times [0,1]$
alors que $\mathcal{B}_f(a, \frac{1}{2}) = \{(0,0)\} \cup [\frac{1}{4}, 1] \times [0,1] = A$: on a sur cet exemple

$$\mathcal{B}_O(a,r) \subset \overline{\mathcal{B}_O(a,r)} \underset{\neq}{\subset} \mathcal{B}_f(a,r).$$ ■

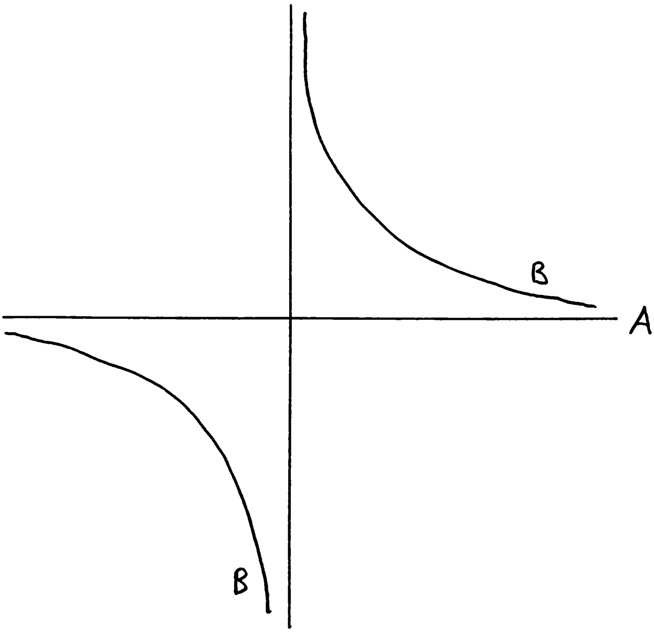
On verra en 6.3, que dans un espace vectoriel normé on a l'égalité, $\overline{\mathcal{B}_O(a,r)} = \mathcal{B}_f(a,r)$.

REMARQUE 4.37. — *Si deux parties A et B de E, même fermées, sont de distance nulle, on n'a pas forcément $A \cap B \neq \varnothing$.*

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de $d^{(\infty)}$, $A = \{0\} \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times \{0\}$ et
$B = \{(x,y);\ xy = 1\}$.

Ce sont des fermés de $\mathbb{R}^2$. Par exemple $\{0\} \times \mathbb{R} = \{(x,y);\ x = 0\}$ est fermé car $(x,y) \overset{p}{\rightsquigarrow} x$ est continue, (projection dans un espace produit) et

$\{0\} \times \mathbb{R} = p^{-1}(\{0\})$ est image réciproque d'un fermé. On a $A \cap B = \varnothing$ et pourtant $d(A, B) = 0$ car $\forall x \neq 0$, $(x, 1/x) \in B, (x, 0) \in A$ et $d\left((x, \frac{1}{x}), (x, 0)\right) = |\frac{1}{x}|$ tend vers 0 si x tend vers l'infini donc $d(A, B) = O$.



■

THÉORÈME 4.38. — *Soit A une partie de l'espace métrique (E, d). La topologie de sous-espace sur A est celle d'espace métrique $(A, d|_{A\times A})$.*

En effet, soit O un ouvert du sous-espace topologique A de E métrique, il existe Ω ouvert de E métrique tel que $O = A \cap \Omega$.

On suppose O non vide, ($\varnothing$ étant ouvert dans les 2 topologies) et soit a dans O, comme $a \in \Omega$ ouvert de E, $\exists r_a > 0$, $\mathcal{B}_O(a, r_a) \subset \Omega$. Mais alors $A \cap \mathcal{B}_O(a, r_a) = \{x;\ x \in A,\ d_A(a, x) < r_a\}$ est la boule ouverte de A, de centre a, de rayon r_a, elle est contenue dans $O = A \cap \Omega$: ceci prouve que O est un ouvert de A métrique pour la distance d_A.

Soit réciproquement O un ouvert de A métrique, si O est la réunion des boules ouvertes de centre a_i, de rayon r_i, pour $i \in I$, boules ouvertes dans A, on a ces boules égales à $\mathcal{B}_O(a_i, r_i) \cap A$, donc

$$O = \bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_0(a_i, r_i) \cap A = A \cap \left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_0(a_i, r_i) \right) = A \cap \Omega$$

avec $\Omega = \bigcup_{i\in I} \mathcal{B}_0(a_i, r_i)$ ouvert de E, donc O est bien ouvert du sous-espace A. ■

En conséquence, les résultats connus des sous-espaces topologiques s'expriment à l'aide de la distance d_A, qu'en général on continue de noter d.

THÉORÈME 4.39. — *Soient $E_1, \dots, E_n$ des espaces métriques pour les distances respectives d_i et $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ muni de la distance $d^{(\infty)}$. La topologie de $(E, d^{(\infty)})$ métrique est la topologie d'espace produit.*

En effet une boule ouverte $\mathcal{B}_0(a, r)$ de $(E, d^{(\infty)})$, avec $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ est l'ensemble des $x = (x_1, \dots, x_n)$ tels que $(\sup \{d_i(x_i, \alpha_i), i = 1, \dots n\}) < r$, c'est donc $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}_0(\alpha_i, r)$. C'est un ouvert élémentaire de l'espace produit. Tout ouvert de $(E, d^{(\infty)})$ métrique étant réunion de boules ouvertes est *a fortiori* réunion d'ouverts élémentaires, donc est un ouvert de E, espace produit.

Réciproquement, si Ω est ouvert de E, espace produit, c'est une réunion d'ouverts élémentaires. Si $a = (\alpha_1, \dots, d_n) \in \Omega$, il existe un ouvert élémentaire $\omega_1 \times \dots \times \omega_n$ contenant a; mais alors $\forall i = 1, \dots, n$, c'est que $\alpha_i \in \omega_i$ ouvert de (E_i, d_i) métrique donc $\exists r_i > 0$, $\mathcal{B}_0(\alpha_i, r_i) \subset \omega_i$.

Si $r = \inf \{r_1, \dots, r_n\}$, on a $r > 0$, (car c'est l'un des r_i), et la boule ouverte de centre a de r dans $(E, d^{(\infty)})$ est telle que $a \in \mathcal{B}_0(a, r) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}_0(\alpha_i, r) \subset \prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}_0(\alpha_i, r_i) \subset \prod_{i=1}^{n} \omega_i \subset \Omega$: ceci justifie bien le fait que Ω est ouvert de $(E, d^{(\infty)})$ métrique. ■

En fait pour les distances $d^{(1)}$ et $d^{(2)}$ définies en 4.9., on a aussi la même topologie, mais on a un peu plus, et ce plus sera précisé par l'introduction de la continuité uniforme.

3. Continuité uniforme

Cette notion s'introduit dans le cadre des espaces métriques.

DÉFINITION 4.40. — *Soient (E, d_E) et (F, d_F) métriques. Une application f de E dans F sera dite uniformément continue si et seulement si on a :*

4.41. $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in E^2, (d_E(x, y) < \alpha \Rightarrow d_F(f(x), f(y) < \varepsilon)$.

REMARQUE 4.42. — Si f est uniformément continue, elle est continue en chaque x de E car si on a la propriété 4.41 de la définition, *a fortiori* on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0, \forall y \in E,\ d_E(x, y) < \alpha \Rightarrow d_F(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

REMARQUE 4.43. — La continuité en tout x n'implique pas la continuité uniforme.

Par exemple $f : x \rightsquigarrow \dfrac{1}{x}$ de $]0, +\infty[$ sur lui-même, pour la distance associée à la valeur absolue est continue, mais pas uniformément. Sinon : soit

$$\varepsilon = 1,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x, y) \in (]0, +\infty[)^2,\ |x - y| < \alpha \Rightarrow |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}| < 1.$$

Prenons $x = \dfrac{1}{2^n}$, $y = \dfrac{1}{2^{n+1}}$, $|x - y| = \dfrac{1}{2^{n+1}}$ devient $< \alpha$ pour n assez grand alors que $|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}| = |2^n - 2^{n+1}| = 2^n$ ne reste pas majoré par 1 : il n'y a pas continuité uniforme.

REMARQUE 4.44. — Lorsqu'il n'y a pas risque de confusion, on notera d pour d_E et d_F.

REMARQUE 4.45. — Dans la formulation 4.41. on peut prendre des inégalités larges, mais avec $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$.

THÉORÈME 4.46. — *Soient E, F, G trois espaces métriques, $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$ deux applications uniformément continues. Alors $g \circ f$ est uniformément continue de E dans G.*

En effet soit $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall (y,y') \in F^2$, $d(y,y') < \alpha \Rightarrow d(g(y),\ g(y')) < \varepsilon$, (continuité uniforme de g).

Mais f étant uniformément contenue, à cet $\alpha > 0$ on associe $\beta > 0$ tel que $\forall (x,x') \in E^2$, $d(x,x') < \beta \Rightarrow d(f(x),\ f(x')) < \alpha$ d'où *a fortiori* $d(g(f(x)),\ g(f(x'))) < \varepsilon$. On a bien associé à $\varepsilon > 0$ un $\beta > 0$ tel que $\forall (x,x') \in E^2$, $d(x,x') < \beta \Rightarrow d(g \circ f(x),\ g \circ f(x')) < \varepsilon$: c'est la continuité uniforme de $g \circ f$. ■

THÉORÈME 4.47. — *Soient E et F métriques. Une application f de E dans F est uniformément continue si et seulement si il existe une application φ de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty]$, croissante, nulle en 0 continue en 0 vérifiant :* $\forall (x,x') \in E^2,\ d(f(x), f(x')) \leqslant \varphi(d(x,x'))$.

4.48. Une telle fonction φ s'appelle un *module de continuité* pour f.

L'intérêt de cette notion est de justifier rapidement des continuités uniformes.

Si f admet un module de continuité, soit $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0, 0 \leqslant t \leqslant \alpha \Rightarrow 0 \leqslant \varphi(t) = \varphi(t) - \varphi(0) \leqslant \varepsilon$, (continuité de φ en 0, avec $\varphi(0) = 0$).

Mais alors, $\forall (x,x') \in E^2$, si $d(x,x') \leqslant \alpha$ on a bien $d(f(x), f(x')) \leqslant \varphi(d(x,x')) \leqslant \varepsilon$ vu le choix de α. Donc f est uniformément continue.

Réciproquement, si f est uniformément continue et si on pose, $\forall t$ de $\mathbb{R}_+, \varphi(t) = \sup\{d(f(x), f(x'));\ (x,x') \in E^2,\ d(x,x') \leqslant t\}$ il est clair que $\varphi(0) = 0$, car si $d(x,x') \leqslant 0$, on a $x = x'$, donc $d(f(x), f(x')) = 0$; puis $\varphi(t() \in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ car l'ensemble des valeurs peut être non majoré dans $\mathbb{R}$;

φ est croissante : si $t' > t$, $\varphi(t')$ est borne supérieure d'un ensemble contenant toutes les valeurs ayant $\varphi(t)$ pour borne supérieure;

φ est continue en 0 car $(\forall \varepsilon > 0)$, $(\exists \alpha > 0)$, $(d(x,x') \leqslant \alpha \Rightarrow d(f(x), f(x')) \leqslant \varepsilon)$; mais alors si $0 \leqslant t \leqslant \alpha$, $\forall (x,x')$ tel que $d(x,x') \leqslant t$ aura $d(f(x), f(x')) \leqslant \varepsilon$: cet ε majore l'ensemble ayant $\varphi(t)$ pour borne supérieure d'où $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \varepsilon$: on a bien la continuité de φ en 0;

Enfin, d'après la définition de φ, on a bien, $\forall (x,x') \in E^2$,
$d(f(x), f(x')) \leqslant \varphi(d(x,x'))$. ■

DÉFINITION 4.49. — *Deux distances d et d' sur E sont dites uniformément équivalentes si et seulement si l'identité $i : (E,d) \rightsquigarrow (E,d')$ est uniformément continue, ainsi que sa réciproque i^{-1}.*

Il est évident que deux distances uniformément équivalentes le sont aussi topologiquement, (définition 4.33), mais la réciproque est fausse. Pour le voir justifions d'abord le résultat suivant :

THÉORÈME 4.50. — *Soient E et F métriques et f uniformément continue de E dans F. Elle le reste si on remplace sur E, ou sur F, la distance par une distance uniformément équivalente.*

Si on remplace, sur E, d par d' uniformément équivalente, soit $\widetilde{f}$: $(E, d') \rightsquigarrow F$ avec $\widetilde{f} = f \circ i$, i identité $x \rightsquigarrow x$ de (E, d') sur (E, d). On a alors f uniformément continue et d et d' étant uniformément équivalentes, i est uniformément continue, d'où $\widetilde{f}$ uniformément continue, (Théorème 4.46). On procède de même pour la distance sur F.

EXEMPLE 4.51. — Soit (E, d) métrique. On définit la distance d' sur E par $d'(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} = \varphi(d(x, y))$ avec $\varphi(t) = \dfrac{t}{1+t}$ définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$, (exemple 4.5).

Les distances d et d' sont uniformément équivalentes car pour l'identité i : (E, d) sur (E, d'), φ est un module de continuité : on a bien $\varphi(0) = 0$, φ croissante, (la dérivée $\varphi'(t) = \dfrac{1}{(1+t)^2} > 0$), φ est continue en 0 et $\forall (x, y) \in E^2$, E munie de d, on a

$$d'(i(x), i(y)) = d'(x, y) = \varphi(d(x, y)).$$

Comme $\varphi(t) = s = \dfrac{t}{1+t} \Leftrightarrow s(1+t) = t \Leftrightarrow t = \dfrac{s}{1-s}, (s \neq 1)$, la fonction $\varphi^{-1} : s \rightsquigarrow \dfrac{s}{1-s}$ est un module de continuité pour i^{-1} qui est aussi uniformément continue, donc d et d' sont uniformément équivalente. ■

4.52. *Deux distances topologiquement équivalentes ne le sont pas forcément uniformément.*

Reprenons l'exemple 4.35. On considère $E =]0, +\infty[$, $d(x, y) = |x - y|$ et $d'(x, y) = |\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}|$, alors l'identité $i : (E, d) \mapsto (E, d')$ n'est pas uniformément continue car cela revient à dire que $f : x \rightsquigarrow \dfrac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue de $]0, +\infty[$ muni de d dans $]0, +\infty[$ muni de d, et on l'a justifié en 4.43.

Au passage on a un contre exemple du théorème 4.50 car l'identié de $]0, +\infty[$ muni de d sur lui-même est uniformément continue, mais ne le reste pas si on remplace d par d', au départ ou à l'arrivée.

Pour être complet, il nous reste à parler de distances équivalentes :

DÉFINITION 4.53. — *Deux distances d et d' sont dites équivalentes sur E si et seulement si il existe deux constantes positives a et b telles que $\forall (x,y) \in E^2$, $d(x,y) \leqslant ad'(x,y)$ et $d'(x,y) \leqslant bd(x,y)$.*

Comme les applications $t \rightsquigarrow at$ et $t \rightsquigarrow bt$, pour $t \in [0,+\infty[$ sont alors des modules de continuité pour l'identité $i : x \rightsquigarrow x$ de (E,d') sur (E,d) et pour sa réciproque, i et i^{-1} sont alors uniformément continues.

4.54. *On a donc, pour les distances :*
(équivalentes) $\Rightarrow$ (uniformément équivalentes) $\Rightarrow$ (topologiquement équivalentes)
sans aucune réciproque. Il reste à voir ce dernier point pour équivalentes et uniformément équivalentes.

Or sur $\mathbb{R}$, d définie par $d(x,y) = |x-y|$ et d' définie par $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ sont uniformément équivalentes, (exemple 4.51), mais non équivalentes car d' étant à valeurs majorées par 1, si d lui était équivalente, avec $a \geqslant 0$ tel que $d(x,y) \leqslant ad'(x,y)$ pour tout couple (x,y) on aurait d à valeurs majorées, ce qui est faux. ■

Par contre, on verra que dans le cadre des espaces vectoriels normés, (c'est-à-dire pour des distances associées à des normes) les trois notions n'en font qu'une, (voir 6.20).

On peut formuler différemment la définition 4.53 en utilisant le terme de lipschitzien.

DÉFINITION 4.55. — *Soient E et F métriques. Une application f de E dans F est dite lipschitzienne si et seulement si il existe une constante positive k telle que, $\forall (x,y) \in E^2$, $d(f(x),f(y)) \leqslant kd(x,y)$.*

On dit encore k.lipschitzienne.

Il est clair que $\varphi = t \rightsquigarrow kt$ de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$ est alors un module de continuité pour f qui est donc uniformément continue, d'où (fk· lipschitzienne) $\Rightarrow$ (f uniformément continue) et réciproque fausse.

La définition 4.53 se formule encore par : d et d' sont équivalentes sur E si et seulement si l'identité $i : (E,d) \rightsquigarrow (E,d')$ est lipschitzienne ainsi que sa réciproque.

Un cas particulier important :

THÉORÈME 4.56. — *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f dérivable de I dans $\mathbb{R}$, on a (f lipschitzienne) $\Leftrightarrow$ (la dérivée est bornée sur I).*

Car, si il existe $k \geqslant 0$ tel que, $\forall t \in I, |f'(t)| \leqslant k$, comme par accroissements finis il existe ξ entre x et g de I tel que : $f(x) - f(y) = (x-y)f'(\xi)$, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x-y|$: c'est bien $d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x,y)$. Donc f est k lipschitzienne.

Réciproquement, pour $x \neq y$, si on a $|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}| \leqslant k$, quand x tend vers y, à la limite $|f'(y)| \leqslant k$: la dérivée est bornée. ■

Dans le cadre du calcul différentiel, on récupérera sous le nom de théorème des accroissements finis un théorème permettant de majorer la norme de $f(x)-f(y)$ en fonction de celle de $x-y$: ce sera une formulation du type f lipschitzienne.

THÉORÈME 4.57. — *Soient $(E_i, d_i)_{i=1,\dots,n}$ des espaces métriques. Sur $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$, les distances $d^{(\infty)}, d^{(1)}$ et $d^{(2)}$ sont équivalentes.*

Ces distances ont été définies en 4.9, et la suite d'inégalité :

$$d^{(\infty)}(x,y) \leqslant d^{(2)}(x,y) \leqslant d^{(1)}(x,y) \leqslant n\, d^{(\infty)}(x,y)$$

justifiée en 4.10 montre bien cette équivalence. Outre le fait que la topologie sur E est alors la topologie produit, la continuité uniforme est préservée. Aussi prendra-t-on toujours l'une de ces 3 distances, sauf cas particulier précisé. ■

THÉORÈME 4.58. — *Soit E métrique de distance d. Cette distance est uniformément continue de $E \times E$ muni de $d^{(\infty)}$, (ou $d^{(1)}$ ou $d^{(2)}$), dans $\mathbb{R}$.*

Vu le théorème 4.57, peu importe le choix de $d^{(\infty)}, d^{(1)}$, sur E. Soient (x,y) et (x',y') deux éléments de E^2. Par inégalité triangulaire on a $d(x,y) \leqslant d(x,x') + d(x',y') + d(y',y)$ soit encore

$$d(x,y) - d(x',y') \leqslant d(x,x') + d(y,y') = d^{(1)}((x,y),(x',y')).$$

Mais on aurait de même

$$d(x',y') - d(x,y) \leqslant d(x',x) + d(y,y') \qquad \text{soit}$$
$$-d^{(1)}((x,y),(x',y')) \leqslant d(x,y) - d(x',y') \leqslant d^{(1)}((x,y),(x',y'))$$

ou encore $$|d(x,y) - d(x',y')| \leqslant d^{(1)}\left((x,y),(x',y')\right).$$

C'est dire que d est 1. Lipschitzienne (donc uniformément continue) de $(E \times E, d^{(1)})$ dans $\mathbb{R}$. ■

COROLLAIRE 4.59. — *Soit A et B compacts non vides de E métrique. La distance de A et B est atteinte :* $(\exists (a,b) \in A \times B), (d(a,b) = d(A,B))$.

En effet A et B étant des compacts de E, $A \times B$ est un compact de E^2, (Théorème 2.21), la distance étant continue de E^2 dans $\mathbb{R}$, sa restriction au compact non vide $A \times B$ est continue, mais alors elle est borné et atteint ses bornes (corollaire 2.19) : il existe donc $(a,b) \in A \times B$ tel que $d(a,b) = d(A,B)$.

■

4.60. En particulier, si $d(A,B) = 0$, on aura $d(a,b) = 0$ donc $a = b$ est un élément de $A \cap B$ qui est non vide (avec A et B non vides).

THÉORÈME 4.61. — *Soient E et F métriques et $f : E \mapsto F$ une application continue. Si E est compact, la fonction f est uniformément continue.*

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour $x \in E$, la continuité en x entraîne l'existence de $\alpha(x) > 0$ tel que $d(x,x') < \alpha(x) \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \varepsilon/2$.

On a $E = \bigcup\limits_{x \in E} \mathcal{B}_0(x, \frac{\alpha(x)}{2})$. Comme E est compact, il existe un recouvrement fini de E, associé aux boules associées à $x_1, \ldots, x_n$. Soit $\alpha = \inf\{\frac{\alpha(x_i)}{2}, i = 1, \ldots, n\}$. Cet α est > 0 car c'est l'un des $\frac{\alpha(x_i)}{2}$. On a alors $\big(\forall (x,y) \in E^2\big)$, $(d(x,y) < \alpha) \Rightarrow (d(f(x), f(y)) < \varepsilon)$ car $\exists i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $x \in \mathcal{B}_0\left(x_i, \frac{\alpha(x_i)}{2}\right)$, (on a un recouvrement fini de E), mais alors $d(x_i, y) \leqslant d(x_i, x) + d(x,y)$ avec $d(x_i, x) < \frac{\alpha(x_i)}{2}$ par le choix de i et $d(x,y) < \alpha \leqslant \frac{\alpha(x_i)}{2}$, donc $d(x_i, y) < \alpha(x_i)$.

La définition de $\alpha(x_i)$ implique que

$$d(f(x), f(x_i)) < \varepsilon/2$$

et que

$$d(f(x_i), f(y)) < \varepsilon/2,$$

d'où par inégalité triangulaire, $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$: c'est bien la continuité uniforme. ■

Remarque pour clore ce paragraphe, (mais elle aurait du être faite bien plus tôt, c'est un oubli de ma part).

4.63. $\forall (x, y, z) \in E^3$, avec (E, d) métrique, on a $|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y)$.

C'est une formulation équivalente de l'inégalité triangulaire. Son intérêt pratique c'est de pouvoir minorer $d(x, y)$.

Si on a 4.63, comme un nombre réel est toujours inférieur à sa valeur absolue car il lui est égal s'il est positif, et sinon il est négatif, on a

$$d(x, z) - d(y, z) \leqslant |d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y)$$

d'où $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ ce qui est l'inégalité triangulaire.

Si on part de l'inégalité triangulaire : on a

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \text{ où } d(x, z) - d(y, z) \leqslant d(x, y),$$

mais on a aussi

$$d(y, z) \leqslant d(y, x) + d(x, z) \text{ d'où } d(y, z) - d(x, z) \leqslant d(x, y)$$

soit encore

$$-d(x, y) \leqslant d(x, z) - d(y, z) \leqslant d(x, y)$$

ce qui équivaut à $|d(x, z) - d(y, z)| \leqslant d(x, y)$. ■

4. Espaces métriques compacts

On va caractériser, pour un espace métrique, le fait d'être compact par une propriété portant sur les suites. Pour cela on utilisera le

THÉORÈME 4.64. — *Soit K un fermé de E métrique tel que toute suite de K admette une suite extraite convergente. Alors pour toute famille $(\omega_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E recouvrant K, il existe un réel $\rho > 0$ tel que* $(\forall x \in K), (\exists i(x) \in I), (\mathcal{B}_0(x, \rho) \subset \omega_{i(x)})$.

Procédons par l'absurde. La négation serait :

$\forall \rho > 0,\ \exists x(\rho) \in K,\ \forall i \in I,\ \mathcal{B}_0(x(\rho), \rho) \not\subset \omega_i$. En prenant pour ρ des valeurs indexées par $\mathbb{N}$ on aura une suite de K à partir de laquelle on utilisera l'hypothèse faite sur K.

On a donc, $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \in K, \forall i \in I,\ \mathcal{B}_0(x_n, \dfrac{1}{n+1}) \not\subset \omega_i$. (On prend $\rho = \dfrac{1}{n+1}$ dans la négation).

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K admet une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente (hypothèse sur K), et $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} \in \overline{K} = K$, ($K$ fermé).

Mais alors $\exists i_0 \in I, l \in \omega_{i_0}$, (on a un recouvrement de K) et ω_{i_0} est ouvert donc $\exists \alpha > 0,\ \mathcal{B}_0(l, \alpha) \subset \omega_{i_0}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\varphi(n)+1} = 0$, ($\varphi$ est strictement croissante) à cet $\alpha > 0$ on associe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$ on ait à la fois $d(x_{\varphi(n)}, l) < \dfrac{\alpha}{2}$ et $\dfrac{1}{\varphi(n)+1} < \dfrac{\alpha}{2}$.

On aura, $\forall y \in \mathcal{B}_0(x_{\varphi(n)}, \dfrac{1}{\varphi(n)+1})$, par inégalité triangulaire, $d(l,y) \leqslant d(l, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, y) < \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{1}{\varphi(n)+1} < \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha}{2}$, d'où $\mathcal{B}_0(x_{\varphi(n)}, \dfrac{1}{\varphi(n)+1}) \subset \mathcal{B}_0(l, \alpha) \subset \omega_{i_0}$ ce qui contredit le choix de $x_{\varphi(n)}$.
Finalement on a le théorème 4.64. ∎

THÉORÈME 4.65. — *E métrique est compact si et seulement si toute suite de E admet une suite extraite convergente.*

On a vu, (Corollaire 2.7) que dans E compact toute suite admet au moins une valeur d'adhérence, ce qui dans E métrique équivaut à l'existence d'une suite extraite convergente, (Théorème 4.29).

Passons à la réciproque. D'abord E métrique est séparé. On suppose de plus que toute suite de E admet une suite extraite convergente.

Soit $(\omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de E. Comme E est un fermé de E, le théorème 4.64 s'applique donc $\exists \rho > 0, \forall x \in E,\ \exists i(x) \in I$, $\mathcal{B}_0(x, \rho) \subset \omega_{i(x)}$.

Soit x_0 dans E, si $E = \mathcal{B}_0(x_0, \rho)$ on a $E \subset \omega_{i(x_0)}$: recouvrement fini, sinon $\exists x_1 \in E \setminus \mathcal{B}_0(x_0, \rho)$, donc avec $d(x_0, x_1) \geqslant \rho$.

Si $E = \mathcal{B}_0(x_0, \rho) \cup \mathcal{B}_0(x_1, \rho)$ on a $E \subset \left(\omega_{i(x_0)} \cup \omega_{i(x_1)}\right)$: recouvrement fini, sinon, $\exists x_2 \in E$ avec $d(x_2, x_0) \geqslant \rho$ et $d(x_2, x_1) \geqslant \rho$.

Supposons construits $x_0, \dots x_n$ des points distants 2 à 2 de ρ au moins. Si, à chaque étape indexée par n on a $E \underset{\neq}{\subset} \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{B}_0(x_k, \rho)$, on peut trouver un autre élément x_{n+1} distant lui aussi de ρ au moins des précédents. Mais cette suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'aurait pas de suite extraite convergente vers l (sinon, une telle suite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ serait telle qu'avec $\varepsilon = \dfrac{\rho}{3}$, $\exists n_0, \forall n \geqslant n_0$, $d(l, x_{\varphi(n)}) \leqslant \rho/3$ d'où, par inégalité triangulaire, si $p \geqslant n_0$ et $q \geqslant n_0$, $d(x_{\varphi(p)}, x_{\varphi(q)}) \leqslant 2\rho/3 < \rho$ ce qui est absurde).

C'est donc que le processus s'arrête, autrement dit il existe un rang n tel que $E = \bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{B}_0(x_k, \rho) \subset \bigcup_{k=0}^{n} \omega_{i(k)}$: on a bien extrait un recouvrement fini du recouvrement ouvert du départ. ■

COROLLAIRE 4.66. — *Pour E métrique, on a les formulations équivalentes suivantes :*

1) E est compact;

2) toute suite de E admet une suite extraite convergente;

3) toute suite de E admet une valeur d'adhérence;

4) toute partie A de E de cardinal infini admet au moins un point d'accumulation.

On a (2) $\Leftrightarrow$ (3) par le théorème 4.29.

On a (4) $\Leftrightarrow$ (2) grâce au théorème 4.28. En effet, si on a (2) et si A est de cardinal infini, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments tous distincts de A car il existe une injection de $\mathbb{N}$ dans A, cette suite admet une suite extraite convergente, $(a_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, vers l, qui est point d'accumulation de A d'après le théorème 4.28, d'où (4).

Réciproquement, si on a (4) et si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de E, soit A l'ensemble des valeurs prises. Si $\operatorname{card}(A)$ est fini, il existe une valeur prise, l, pour une infinité d'indices : $\exists$ une injection φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{\varphi(n)} = l$, la suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Et si $\operatorname{card} A$ est infini, A admet un point d'accumulation l.

Soit $\varepsilon = 1, \exists\ \varphi(0)$ tel que $0 < d(l, x_{\varphi(0)}) < 1$.

Soit $\varepsilon = \inf\ (\dfrac{1}{2}, d(l, x_i);\ i \leqslant \varphi(0), d(l, x_i) \neq 0\}$, il existe $\varphi(1)$ tel que $0 < d(l, x_{\varphi(1)}) < \varepsilon$, et comme $\varepsilon \leqslant$ chaque $d(l, x_i)$ non nul pour $i \leqslant \varphi(0)$, on peut affirmer que $\varphi(1) > \varphi(0)$.

En prenant ainsi des ε qui diminuent et permetent d'exclure les x_i d'indices trop petits on construit une suite extraite convergente. A la $n^{\text{ième}}$ étape on prendra $\varepsilon = \inf\{\frac{1}{n+1}, d(l, x_i)$ pour $i \leqslant \varphi(n-1)$ et tel que $d(l, x_i) \neq 0\}$ pour construire $x_{\varphi(n)}$.

Mais alors ces 3 conditions équivalentes entre elles le sont à la première par le théorème 4.65. ■

Corollaire 4.67. — *Soit A une partie de E métrique. On a $\overline{A}$ compact si et seulement si de toute suite de A on peut extraire une suite convergente.*

Si $\overline{A}$ compact, de toute suite de A, (donc de $\overline{A}$), on peut extraire une suite convergente : c'est le théorème 4.65.

Réciproquement soit $\overline{A}$ tel que de toute suite de A on peut extraire une suite convergente. Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\overline{A}$ cette fois, comme $x_n \in \overline{A}$, en particulier $A \cap \mathcal{B}_0(x_n, \frac{1}{n+1}) \neq \emptyset$, on choisit a_n dans A avec $d(x_n, a_n) < \frac{1}{n+1}$. Il existe φ injection croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite extraite des $a_{\varphi(n)}$ converge vers l dans E, (hypothèse), d'où $d(l, x_{\varphi(n)}) \leqslant d(l, a_{\varphi(n)}) + \frac{1}{\varphi(n)+1}$ qui tend vers 0, donc la suite extraite des $x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l : $\overline{A}$ est bien compact. ■

Théorème 4.68. — *Dans E métrique compact, il existe une famille dénombrable de boules ouvertes telle que tout ouvert de E soit réunion d'une sous-famille de ces boules.*

Soit $n \in \mathbb{N}$, les $\mathcal{B}_0(x, \frac{1}{n+1})$, quand x décrit E, recouvrent E donc il existe A_n partie de E de cardinal fini telle que $E = \bigcup_{x\in A_n} \mathcal{B}_0(x, \frac{1}{n+1})$.

Les $\mathcal{B}_0(x, \frac{1}{n+1})$, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A_n$ forment une famille dénombrable de boules ouvertes. Soit ω un ouvert de E, si $y \in \omega$ $\exists \alpha > 0$, $\mathcal{B}_0(y, \alpha) \subset \omega$. Si n est tel que $\frac{1}{n+1} < \frac{\alpha}{2}$, il existe dans la partie A_n un x tel que $y \in \mathcal{B}_0(x, \frac{1}{n+1})$, mais alors $\forall z \in \mathcal{B}_0(x, \frac{1}{n+1})$ on aura $d(y, z) \leqslant d(y, x) + d(x, z) < \frac{2}{n+1} < \alpha$. On a donc trouvé une boule $\mathcal{B}_0(x, \frac{1}{n+1})$ de la famille telle que $y \in \mathcal{B}_0(x, \frac{1}{n+1}) \subset \mathcal{B}_0(y, \alpha) \subset \omega$.

Quand y varie dans ω on obtient bien des boules ouvertes de la famille dont la réunion donne ω. ■

COROLLAIRE 4.69. — *Un espace métrique compact E contient un sous-ensemble dénombrable partout dense.*

Avec les notations du théorème précédent, $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ convient car soit y dans E, V un voisinage de y, et ω un ouvert tel que $y \in \omega \subset V$. Si $\mathcal{B}(x, \dfrac{1}{n+1})$ est une boule de la famille précédente contenant y et contenu dans ω, on a $x \in A \cap V$ qui est bien non vide. ■

THÉORÈME 4.70. — *Soit E métrique, K un compact de E et f une application de E dans F métrique. Si f est continue en chaque x de K, alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \rho > 0$, $\forall x \in K$, $d(x,y) < \rho \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$.*

C'est « un poil plus » que la continuité uniforme sur K car les y peuvent sortir de K.

En effet, $\forall x \in K$, $\exists \rho_x$, $d(x,y) \leqslant \rho_x \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon/2$, avec y dans E, pas forcément dans K). Comme $K \subset \bigcup_{x\in K} \mathcal{B}_0(x, \dfrac{\rho_x}{2})$, on extrait un recouvrement fini associé aux éléments $x_1, \dots, x_n$.

Soit $\rho = \inf\{\dfrac{\rho_{x_i}}{2}, i = 1, \dots, n\}$. Il est > 0, (c'est l'un de ces nombres) et $\forall x \in K$, $\exists i < n$ tel que $x \in \mathcal{B}_0(x_i, \dfrac{\rho_{x_i}}{2})$. Comme $\rho \leqslant \dfrac{\rho_{x_i}}{2}$ la boule ouverte $\mathcal{B}_0(x, \rho)$ est contenue dans $\mathcal{B}_0(x_i, \rho_{x_i})$ mais alors $\forall y$ tel que $d(x,y) < \rho$ on aura $d(f(x), f(x_i) \leqslant \varepsilon/2$ et $d(f(y), f(x_i)) \leqslant \varepsilon/2$ d'où par inégalité triangulaire, $d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$. ■

5. Espaces métriques connexes

Dans le chapitre III, j'ai admis que les intervalles de $\mathbb{R}$ étaient connexes : c'est ce que nous allons justifier.

DÉFINITION 4.71. — *Un espace métrique E est dit bien enchaîné si et seulement si $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*)$, $(\forall (a,b) \in E^2)$, il existe une suite finie $(a_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ de points de E, vérifiant $a_0 = a, a_n = b$ et $\forall i = 0, \dots, n-1, d(a_i, a_{i+1}) \leqslant \varepsilon$*

4.72. Une telle suite sera appelée une *chaîne* de pas $\leqslant \varepsilon$, entre a et b.

THÉORÈME 4.73. — *Tout espace E métrique connexe est bien enchaîné.*

Soit $\varepsilon > 0$ fixé et $a \in E$, fixé. Si on prouve que l'ensemble $E(a, \varepsilon) = \{b;\ b \in E;$ il existe une chaîne finie de pas $\leqslant \varepsilon$ entre a et $b\}$ est E entier, on aura terminé. Pour cela il suffit de prouver que $E(a, \varepsilon)$ est ouvert, fermé, non vide dans E connexe ce sera E.

1) $E(a, \varepsilon)$ non vide car $\mathcal{B}_0(a, \varepsilon) \subset E(a, \varepsilon)$.

2) $E(a, \varepsilon)$ ouvert : si $b \in E(a, \varepsilon)$, la boule ouverte $\mathcal{B}_0(b, \varepsilon)$ est contenue dans $E(a, \varepsilon)$ car $\forall y \in \mathcal{B}_0(b, \varepsilon)$ en rajoutant le « maillon » (b, y) à une chaîne de pas $\leqslant \varepsilon$ entre a et b on en a une entre a et y.

3) $E(a, \varepsilon)$ est fermé, soit $x \in \overline{E(a, \varepsilon)}$, alors $\mathcal{B}_0(x, \varepsilon) \cap E(a, \varepsilon) \neq \emptyset$ et si b est dans l'intersection, à la chaîne de pas $\leqslant \varepsilon$ entre a et b on ajoute le maillon (b, x) d'où une chaîne entre a et x.

Donc $E(a, \varepsilon) = E$: $\forall b \in E$ il existe une chaîne de pas $\leqslant \varepsilon$ entre a et b.

4.74. Réciproque fausse : $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe car ce n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$, (voir le théorème 3.6), mais $\mathbb{Q}$ est bien enchaîné car si a et b sont dans $\mathbb{Q}$, avec $a \leqslant b$ par exemple, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists r \in \mathbb{Q}$ avec $0 < r < \varepsilon$, (voir en fait la construction de $\mathbb{R}$ au chapitre V), puis il existe un et un seul $n \in \mathbb{N}$ tel que $a + nr \leqslant b < a + (n+1)r$ d'où une chaîne : $a_0 = a, a_1 = a + r, \ldots, a_n = a + nr, a_{n+1} = b$ de rationnels entre a et b avec, $\forall i = 0, \ldots, n, d(a_i, a_{i+1}) \leqslant \varepsilon$. ■

Par contre on a :

THÉORÈME 4.75. — *Si E est métrique compact bien enchaîné il est connexe.*
Sur les compacts, il faut avoir le réflexe : application continue à valeurs réelles atteint ses bornes. Sur un métrique, la distance est continue, (Théorème 4.58).

Ici cela donne : si E non connexe, il existe une partition de E en deux fermés A et B, non vides. Ce sont des compacts, (fermés dans un compact) donc la distance de A et B est atteinte, (Corollaire 4.59) : $\exists (a, b) \in A \times B$, $d(a, b) = d(A, B)$. Comme $A \cap B = \emptyset, a \neq b$ donc $d(a, b) > 0$.

Soit alors $\varepsilon > 0$ vérifiant $\varepsilon < d(a, b)$, essayez donc de joindre $a \in A$ et $b \in B$ par une chaîne de pas $\leqslant \varepsilon \ldots$'

(Si $a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b$ était une telle chaîne, avec i_0 borne supérieure de l'ensemble des $i \leqslant n$ tels que $a_i \in A$, on a $i_0 < n$ car $a_n \notin A$, mais $a_{i+1} \in B = E \setminus A$, donc $d(a_i, a_{i+1}) \geqslant d(A, B) = d(a, b) > \varepsilon$ ce qui contredit le fait que le pas de la chaîne est $\leqslant \varepsilon$). ■

Moi j'aime mieux imaginer que je traverse une rivière à gué avec une distance entre les pierres plus grande que mes pas.

COROLLAIRE 4.76. — *Les segments de $\mathbb{R}$ sont connexes.*

Car $I = [a, b]$ est un compact (fermé borné de $\mathbb{R}$, théorème 2.13), bien enchaîné, car si x et y sont dans I, avec $x \leqslant y$, et si $\varepsilon > 0$ est un réel donné, $\exists! n \in \mathbb{N}$ tel que $x + n\varepsilon \leqslant y < x + (n+1)\varepsilon$: on construit une chaîne entre x et y en posant $x_0 = x, x_1 = x + \varepsilon, \dots, x_n = x + n\varepsilon, x_{n+1} = y$.■

COROLLAIRE 4.77. — *Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes.*

Car si I est un intervalle, en fixant $x \in I$, I est la réunion des segments d'extrémités x et y lorsque y parcourt I.

C'est donc une réunion de connexes d'intersection non vide : c'est un connexe (Théorème 3.7). ■

COROLLAIRE 4.78. — *L'image continue d'un connexe dans $\mathbb{R}$ est un intervalle*

Car c'est un connexe de $\mathbb{R}$, voir théorème 3.8. ■

En particulier, l'image continue d'un intervalle de $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ ce qui donne le *théorème dit des valeurs intermédiaires.*

4.79. *Soit I intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \mapsto \mathbb{R}$ continue, a et b dans I et γ dans le segment d'extrémités $f(a), f(b)$, il existe c entre a et b tel que $f(c) = \gamma$.*

Car supposons par exemple $a < b$, alors $K = f([a, b])$ est un intervalle, (image d'un connexe), compact, (image continue d'un compact), contenant $f(a)$ et $f(b)$, donc contenant le segment d'extrémités $f(a)$ et $f(b)$, (voir caractérisation des intervalles de $\mathbb{R}$, théorème 3.5), en particulier $\gamma \in K$ d'où l'existence de c. ■

C'est de ce résultat que découlent le théorème de Rolle, la formule des accroissements finis version Taylor $\exists c$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$, Taylor Lagrange d'ordre $n, \dots,$ les formules de la moyenne dans les intégrales formulées avec $\exists c$ entre a et b tel que, (voir 7.7 et 8.37).

Bien souvent des conclusions du type « $\exists c$ réel vérifiant... », en analyse, sont liées à cet aspect des connexes de $\mathbb{R}$.

6. Espaces complets

La structure d'espace complet est en quelque sorte l'aboutissement de la topologie car c'est la plus riche du point de vue des résultats. Elle est liée à la question suivante : comment savoir si une suite est convergente, sans connaître sa limite. Ce qui amène à l'étude des suites de Cauchy.

DÉFINITION 4.80. — *Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E métrique. Elle est dite de Cauchy si et seulement si elle vérifie la condition suivante.*

4.81. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant n,\ \forall q \geqslant n,\ d(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon.$

On peut remarquer que choisir deux entiers p et q supérieurs à n, revient à en choisir un, p, supérieur à n, et à prendre q sous la forme $p + r$, $r \in \mathbb{N}$ d'où la formulation suivante :

4.82. *$u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall p \geqslant n$, $\forall r \in \mathbb{N}$, $d(u_{p+r}, u_p) \leqslant \varepsilon$.*

DÉFINITION 4.83. — *Un espace métrique E est dit complet si et seulement si toute suite de Cauchy de E converge dans E.*

REMARQUE 4.84. — *Il faut noter que toute suite convergente, dans E métrique est de Cauchy*, car si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ existe dans E, comme on a $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n$, $\forall p \geqslant n$, $d(u_p, l) \leqslant \varepsilon/2$, en choisissant p et q supérieurs à n, par inégalité triangulaire on aura $d(u_p, u_q) \leqslant d(u_p, l) + d(l, u_q) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, ce qui traduit le fait que la suite est de Cauchy. ■

Mais la réciproque est fausse en général, par exemple, $E =]0, +\infty[$ métrique pour la distance usuelle, $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est de Cauchy dans E (car convergente dans $E' = [0, +\infty[$), mais non convergente dans E.

Il peut sembler artificiel de donner un tel exemple, où l'on retire de E la limite d'une suite. Il n'en est rien car on verra qu'une suite de Cauchy converge toujours mais... parfois dans le complété de E et non dans E.

Avant d'étudier les propriétés des espaces complets, il y a un certain nombre de résultats sur les suites de Cauchy à obtenir.

THÉORÈME 4.86. — *Toute suite extraite d'une suite de Cauchy est encore de Cauchy. L'image uniformément continue d'une suite de Cauchy est de Cauchy.*

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E métrique, et $v = (v_n)_{n \in N}$ avec $v_n = u_{\varphi(n)}$, (φ injection croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$) une suite extraite de u. Comme on sait que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant n,\ \forall q \geqslant n,\ d(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon$$

et que $\varphi(k) \geqslant k$, $\forall k \in \mathbb{N}$, si p et q sont $\geqslant n$ on aura $\varphi(p)$ et $\varphi(q) \geqslant n$ d'où, à $\varepsilon > 0$, on associe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p \geqslant n,\ \forall q \geqslant n,\ d(v_p, v_q) \leqslant \varepsilon$: la suite v est de Cauchy.

Soit alors F métrique et f uniformément continue de E dans F. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy dans E. On a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) \leqslant \alpha \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon,$$

puis, à cet $\alpha > 0$ on associe n tel que $\forall p \geqslant n,\ \forall q \geqslant n,\ d(u_p, u_q) \leqslant \alpha$ (car la suite u est de Cauchy). Mais alors, $\forall p \geqslant n,\ \forall q \geqslant n$, on aura $d(f(u_p), f(u_q)) \leqslant \varepsilon$ et finalement :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \geqslant n,\ \forall q \geqslant n,\ d(f(u_p), f(u_q)) \leqslant \varepsilon$$

la suite des $f(u_n)$ est de Cauchy dans F. ■

COROLLAIRE 4.87. — *Si $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E métrique pour la distance d, elle le reste pour toute distance d' uniformément équivalente à d.*

En effet, soit (E, d') métrique, d' uniformément équivalente à d, on a vu que l'identité $i : x \rightsquigarrow x$ de (E, d) sur (E, d') est alors uniformément continue, (définition 4.49), donc la suite des $i(u_n) = u_n$ est de Cauchy dans (E, d'). ■

Ce résultat est faux pour d' topologiquement équivalente à d : ainsi sur $]0, +\infty[$ muni de d définie par $d(x, y) = |x - y|$ la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ est de Cauchy, mais pour d' définie par $d'(x, y) = |\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}|$ on a $d'(u_p, u_q) = |p + 1 - (q + 1)| = |p - q| \geqslant 1$ si $p \neq q$: ceci aura bien du mal a être rendu $\leqslant \varepsilon$ pour un $\varepsilon < 1$.

Dans les espaces complets, on ne considérera donc que des distances uniformément équivalentes, (ou équivalentes). Comme on a vu que sur un espace métrique produit les trois distances usuelles sont équivalentes, (Théorème 4.57), on peut formuler la condition pour qu'une suite à valeur dans un espace produit soit de Cauchy avec l'une de ces trois distances.

THÉORÈME 4.88. — *Soient $(E_i, d_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ des espaces métriques et $E = \prod_{i=1}^{k} E_i$ l'espace produit, métrique pour l'une des trois distances équivalentes, $d^{(\infty)}$, $d^{(1)}$ ou $d^{(2)}$. Soit $u_n = \left(u_n^{(1)}, \ldots, u_n^{(k)}\right)$ le terme général d'une suite u à valeurs dans E. On a u de Cauchy si et seulement si chaque suite des $\left(u_n^{(i)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E_i, d_i).*

Soit E muni de $d^{(\infty)}$. Les projections $p_i : E \mapsto E_i$ définies par $(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_k) \overset{p_i}{\rightsquigarrow} x_i$ sont 1-lipschitziennes, car, pour tout $i \leqslant k$ on a :

$$\begin{aligned} d_i(p_i(x), p_i(y)) = d_i(x_i, y_i) &\leqslant \sup\{d_j(x_j, y_j); 1 \leqslant j \leqslant k\} \\ &\leqslant d^{(\infty)}(x, y). \end{aligned}$$

Mais alors les p_i sont *a fortiori* uniformément continues, et si u est de Cauchy, la suite des $p_i(u_n)$ est de Cauchy dans (E_i, d_i), (Théorème 4.86).

Réciproquement si chaque suite $\left(u_n^{(i)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E_i, d_i), soit $\varepsilon > 0$, pour chaque $i \leqslant k$, il existe n_i avec $\forall p \geqslant n_i, \forall q \geqslant n_i$, $d_i\left(u_p^{(i)}, u_q^{(i)}\right) \leqslant \varepsilon$, mais *a fortiori*, $\forall p \geqslant n = \sup\{n_1, \ldots, n_k\}$, $\forall q \geqslant n$ on aura

$$d^{(\infty)}(u_p, u_q) = \sup\left\{d_i\left(u_p^{(i)}, u_q^{(i)}\right);\ 1 \leqslant i \leqslant k\right\} \leqslant \varepsilon :$$

suite u est bien de Cauchy. ∎

THÉORÈME 4.89. — *Si dans E métrique, une suite de Cauchy admet une suite extraite convergente, elle est elle-même convergente.*

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy dans E métrique, admettant la suite extraite de $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers $l \in E$. Si on traduit, on a : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n$, $\forall p \geqslant n$, $\forall q \geqslant n$, $d(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon/2$ et aussi, au même $\varepsilon > 0$ on associe r_0 tel que $\forall r \geqslant r_0$, $d(u_{\varphi(r)}, l) \leqslant \varepsilon/2$.

Comme φ est strictement croissante, il existe un $r_1 \geqslant r_0$ tel que $\varphi(r_1) \geqslant n$, mais alors $\forall p \geqslant n$, $d(u_p, l) \leqslant d(u_p, u_{\varphi(r_1)}) + d(u_{\varphi(r_1)}, l)$

$$\leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

On a bien finalement, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n$, $\forall p \geqslant n$, $d(u_p, l) \leqslant \varepsilon$.

Le lecteur un tant soit peu averti aura converti « suite extraite convergente » en « compact » et se sera déjà dit que :

COROLLAIRE 4.90. — *Tout espace métrique compact est complet.*

Car soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans E mémtrique compact. Elle admet une suite extraite convergente, (propriété des compacts, théorème 4.65), donc elle est convergente.

Bien sûr, il existe des espaces complets non compacts, $\mathbb{R}$ par exemple (résultat encore admis « présentement », mais patience... la justification approche).

Avant d'aborder les théorèmes « choc » par leurs conséquences, quelques théorèmes de structure.

THÉORÈME 4.91. — *Dans E métrique, tout sous-espace complet est fermé.*

Soit $A \subset E$, A étant complet pour la topologie de sous-espace, si $x \in \overline{A}$, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x (traduction de l'adhérence propre aux espaces métriques : théorème 4.27), en tant que suite convergente elle est de Cauchy (remarque 4.84), mais A étant complet, la limite est dans A. Donc $\overline{A} \subset A$, d'où $\overline{A} = A$ est fermé. ■

THÉORÈME 4.92. — *Dans E espace complet, tout fermé est sous-espace complet.*

Soit F un fermé de E complet et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de F, en tant que suite de Cauchy de E complet, $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe dans E, mais les u_n sont dans F fermé donc $l \in \overline{F} = F$: toute suite de Cauchy de F converge dans F qui est donc complet. ■

COROLLAIRE 4.93. — *Les complets de $\mathbb{R}$ sont les fermés de $\mathbb{R}$.*

A rapprocher de : les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés de $\mathbb{R}$, corollaire 2.16.

Tout ceci est vrai pour la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ associée à la distance $d(x, y) = |x - y|$, et en admettant que $\mathbb{R}$ est complet; (ça vient... ça vient). ■

THÉORÈME 4.94. — *Toute intersection de complets de E métrique est un complet. Tout réunion d'un nombre fini de complets de E est un complet.*

Si les $(F_i)_{i\in I}$ sont des sous-espaces complets de E, ce sont des fermés, (Théorème 4.91), donc $F = \bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est un fermé de E, or $F \subset F_i$, (ceci pour chaque i de I) donc F est un fermé de F_i, complet, c'est un complet, (Théorème 4.92).

Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces complets de E en nombre fini et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $F = \bigcup_{i=1}^{p} F_i$ il existe forcément un indice $i \leqslant p$ tel que $\operatorname{card}\{n;\ u_n \in F_i\}$ soit infini. En indexant ces entiers en croissant, on construit une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ extraite de u, et à valeurs dans F_i.

Cette suite, extraite d'une suite de Cauchy est de Cauchy, (Théorème 4.86), dans F_i complet donc convergente dans F_i. Comme $F_i \subset F$, elle est convergente dans F, mais alors la suite de Cauchy initiale converge dans F, (Théorème 4.89). On a donc F complet, (toute suite de Cauchy dans F étant convergente dans F). ■

On peut se demander, par analogie avec l'étude des compacts, ce qu'il en est de l'image continue d'un complet. La réponse n'est pas simple parce que la continuité ne suffit pas pour conserver le caractère de Cauchy des suites.

REMARQUE 4.95. — *L'image continue d'un complet n'est pas forcément un complet.*

Exemple : $\mathbb{R}$ est complet, $x \rightsquigarrow f(x) = \operatorname{Arctg} x$ est continue, son image $f(\mathbb{R}) =]-\pi/2, \pi/2[$ n'est pas un espace complet, (non fermé de $\mathbb{R}$) et pourtant f est uniformément continue car $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$: par accroissements finis f est 1. Lipschitzienne. Alors... alors... que se passe-t-il ?

Simplement la chose suivante. Si une suite est de Cauchy dans l'image $f(E)$, c'est sur la suite des antécédants qu'il faudrait avoir le caractère de Cauchy pour appliquer l'hypothèse E complet !

D'où le :

THÉORÈME 4.96. — *Soient E et F métriques, f bijective continue de E sur F, f^{-1} étant uniformément continue de F sur E. Alors si E est complet, F l'est.*

Car si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de F, les $x_n = f^{-1}(y_n)$ forment une suite de Cauchy de E car f^{-1} est uniformément continue, (Théorème 4.86), donc $l = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ existe dans E complet, mais alors f

étant continue, $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(l)$ existe dans F : la suite de Cauchy $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans F qui est donc complet. ■

DÉFINITION 4.97. — *On appelle isomorphisme de structure uniforme de E sur F, espaces métriques, toute bijection f de E sur F uniformément continue ainsi que f^{-1}.*

Il résulte du théorème 4.96 qu'un isomorphisme de structure uniforme, f, de E sur F, échange les complets de E et F au sens où l'image par f d'un complet de E en est un de F et que l'image par f^{-1} d'un complet de F en est un de E.

En particulier :

COROLLAIRE 4.98. — *La structure d'espace complet est conservée par changement de distances uniformément équivalentes.*

Car alors l'identité est un isomorphisme de structure uniforme. ■

Il n'est est pas de même pour des distances topologiquement équivalentes : $E = [1, +\infty[$ est complet pour d : $d(x,y) = |x-y|$, distance usuelle sur $\mathbb{R}$, car c'est un fermé de $\mathbb{R}$, (Corollaire 4.93).

Pour d' : $d'(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$, la suite $x_n = n$ est de Cauchy car si $p \geqslant n$ et $q \geqslant n$, $d'(x_p, x_q) = \left|\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right| \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqslant \frac{2}{n}$ donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n$ tel que $\frac{2}{n} \leqslant \varepsilon$, mais alors $\forall p \geqslant n$, $\forall q \geqslant n$, $d'(x_p, x_q) \leqslant \varepsilon$.

Cette suite ne converge pas, pour d', dans E, car si elle convergeait vers $a \in E$, $\forall n \geqslant a+1$ on aurait $d'(a, x_n) = \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{a} - \frac{1}{n}$ car $n \geqslant a+1 > a \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{a+1} \geqslant \frac{1}{n}$; mais alors $\frac{1}{a} - \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} > 0$ donc soit $\alpha = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} > 0$, $\forall n \geqslant a+1$, $d'(a, x_n) \geqslant \alpha$; il est impossible que $\lim_{n\to+\infty} d'(a, x_n) = 0$.

La *structure d'espace complet n'est pas purement topologique.*

Comme on a vu que les trois distances $d^{(\infty)}$, $d^{(1)}$ et $d^{(2)}$ sont équivalentes (donc uniformément équivalentes) on va pouvoir étudier les espaces produits d'espaces complets pour l'une de ces distances.

THÉORÈME 4.99. — *Soit (E_i, d_i) des espaces métriques en nombre fini, p. Alors $E = \prod_{i=1}^{p} E_i$ est complet pour l'une des trois distances équivalentes $d^{(\infty)}$, $d^{(1)}$ ou $d^{(2)}$ si et seulement si chaque (E_i, d_i) l'est.*

Si chaque (E_i, d_i) *est complet*, soit $x_n = \left(x_n^{(1)}, \ldots, x_n^{(p)}\right)$ le terme général d'une suite de Cauchy de $(E, d^{(\infty)})$, d'après le Théorème 4.88, chaque suite $x_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E_i, d_i) complet donc convergente, et si $l_i = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n^{(i)}$, la topologie de E étant celle d'espace produit on a $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$, (avec $l = (l_1, \ldots, l_p)$), pour la distance $d^{(\infty)}$, donc $(E, d^{(\infty)})$ est complet. Réciproquement, si $(E, d^{(\infty)}$ est complet, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (E_i, d_i). Pour chaque $j \leqslant p, j \neq i$, on choisit $a_j \in E_j$ et on définit, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in E$ par $x_n^{(i)} = u_n$ et $\forall j \neq i$, $x_n^{(j)} = a_j$, constant par rapport à n.

Chaque suite $(x_n^{(j)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E_j, (constante donc convergente donc de Cauchy si $j \neq i$, et c'est l'hypothèse faite si $j = i$), donc la suite des x_n est de Cauchy dans $(E, d^{(\infty)})$, (Théorème 4.88) donc convergente. Si $l = (l_1, \ldots, l_p)$ est la limite, en particulier on aura $l_i = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n^{(i)}$: chaque suite de Cauchy de E_i est convergente dans E_i donc E_i est complet. ■

Les théorèmes de structure étant justifiés, nous allons, en très peu de temps, établir des théorèmes « énormes » par leurs conséquences, tels que le **Théorème du point fixe** qui sera le point de départ de l'étude des équations différentielles, (Théorème de Cauchy Lipschitz); celui des **approximations successives**, outil employé en calcul différentiel pour étudier les difféomorphismes, et qui entraînera le théorème dit des fonctions implicites dont dépend la géométrie différentielle, **le Théorème du prolongement des applications uniformément continues**, point de départ des constructions d'espaces de fonctions intégrables; **le Théorème de Baire** aux multiples conséquences... C'est dire l'importance des pages qui suivent.

4.100. Critère de Gauchy *Soit un ensemble E muni d'un filtre, (ou d'une base de filtre), $\mathcal{B}$ et f une application de E dans F espace métrique complet. On a $\lim\limits_{\mathcal{B}} f$ existe si et seulement si :*

$\forall\varepsilon > 0, \exists B \in \mathcal{B}, \forall(x, y) \in B^2, d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon.$

D'abord, si $\lim_{\mathcal{B}} f = l$ existe dans F métrique, à $\varepsilon > 0$ on associe B de $\mathcal{B}$ tel que $\forall x \in B$, $d(f(x), l) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, d'où, par inégalité triangulaire, $\forall (x, y) \in B^2$, $d((f(x), f(y)) \leqslant d(f(x), l) + d(l, f(y)) \leqslant \varepsilon$.

Réciproquement, on peut s'inspirer du Théorème 4.30, mais il est plus facile d'utiliser le Théorème 4.101, (des fermés emboîtés) qui suit. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $B_n \in \mathcal{B}$, tel que le diamètre de $f(B_n)$ soit inférieur à $\frac{1}{n+1}$: c'est le critère pour $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$.

On remplace les éléments B_n du filtre $\mathcal{B}$ par les $B'_n = \bigcap_{i=0}^{n} B_i$: ce sont alors des parties non vides, emboîtées et les fermés $F_n = \overline{f(B'_n)}$ deviennent des fermés emboîtés non vides, de diamètres majorés par $\frac{1}{n+1}$, dans F complet : leur intersection est un singleton, (Théorème 4.101).

Soit donc $\{l\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{f(B'_n)}$, on va justifier que $\lim_{\mathcal{B}} f = l$.

En effet, soit $\alpha > 0$, il existe n_0 tel que $f(B'_{n_0})$ soit de diamètre inférieur à $\frac{\alpha}{2}$, et l étant adhérent à $f(B'_{n_0})$, il existe x dans B'_{n_0} tel que $d(l, f(x)) < \frac{\alpha}{2}$. Mais alors, $\forall y \in B'_{n_0}$ on aura $d(l, f(y)) \leqslant d(l, f(x)) + d(f(x), f(y)) < \alpha$: on a trouvé $B'_{n_0} \in \mathcal{B}$ tel que $f(B'_{n_0}) \subset \mathcal{B}_0(l, \alpha)$. ■

THÉORÈME 4.101. — *Dit « des fermés emboités ». Soit dans E complet une famille indexée par $\mathbb{N}$, indexation décroissante pour l'inclusion, de fermés non vides, $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec $\lim_{n \to +\infty}$ diamètre $(F_n) = 0$. Alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est un singleton.*

En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in F_n$ qui est non vide. Puis, $\forall p \geqslant n, x_p \in F_p \subset F_n$ donc $\forall p \geqslant n$, $\forall q \geqslant n$, $d(x_p, x_q) \leqslant$ diamètre (F_n), majorant qui tend vers 0. Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0$, diam $(F_n) \leqslant \varepsilon$, *a fortiori* on aura $\forall p \geqslant n_0$, $\forall q \geqslant n_0$, $d(x_p, x_q) \leqslant \varepsilon$. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de Cauchy dans E complet, converge. Soit l sa limite. Comme $\forall p \geqslant n$, $x_p \in F_n$ on aura $l \in \overline{F}_n = F_n$, ($F_n$ fermé) d'où $l \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$, qui est non vide ; enfin, si $y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$, $d(l, y) \leqslant$ diam (F_n), inégalité vérifiée pour tout n, donc si n tend vers l'infini, il vient $d(l, y) \leqslant 0$ d'où $d(l, y) = 0$ soit $y = l$: l'intersection est bien un singleton. ■

THÉORÈME 4.102. — *Dit du point fixe. Soit E espace complet et $f : E \mapsto E$ une application contractante. Alors il existe un et un seul élément a de E tel que $f(a) = a$. Cet élément a est le point fixe de f. De plus toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E définie par la donnée de x_0 quelconque de E et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a.*

DÉFINITION 4.103. — *Une application $f : E \mapsto F$, métriques, est dite contractante si et seulement si elle est k-lipschitzienne avec $0 \leqslant k < 1$.*

Voir la définition 4.55 pour k-Lipschitzienne.

On suppose donc l'existence de $k \in [0, 1[$ tel que $\forall (x, y) \in E^2$, $d(f(x), f(y)) \leqslant kd(x, y)$. On se donne x_0 dans E et on définit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. On doit prouver la convergence de cette suite, donc qu'elle est de Cauchy, E étant complet. Or, on a

$$\forall n \geqslant 1,\ d(x_{n+1}, x_n) = d\left(f(x_n), f(x_{n-1})\right) \leqslant kd(x_n, x_{n-1}).$$

On en déduit donc :

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant kd(x_n, x_{n-1} \leqslant k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leqslant \dots$$

et par une récurrence

$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant k^p d(x_{n-p+1}, x_{n-p}),$$

tant que $p \leqslant n$, ce qui conduit à $d(x_{n+1}, x_n) \leqslant k^n d(x_1, x_0)$. Par inégalité triangulaire, on a, pour $q > 0$,

$$d(x_{p+q}, x_p) \leqslant \sum_{r=0}^{q-1} d(x_{p+r+1}, x_{p+r})$$

d'où

$$\begin{aligned} d(x_{p+q}, x_p) &\leqslant \sum_{r=0}^{q-1} k^{p+r} d(x_1, x_0) \\ &\leqslant k^p d(x_1, x_0) \cdot \left(1 + k + \dots + k^{q-1}\right), \end{aligned}$$

avec $\quad 1 + k + \dots + k^{q-1} = \dfrac{1 - k^q}{1 - k} \leqslant \dfrac{1}{1 - k},$

d'où, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall q \in \mathbb{N}$, (justifié pour $q > 0$, mais vrai aussi si $q = 0$),

$$d(x_{p+q}, x_p) \leqslant \frac{d(x_1, x_0)}{1-k}\ k^p.$$

Ce majorant tend vers 0 si p tend vers l'infini, donc on a :

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ k^n \dfrac{d(x_1, x_0)}{1-k} \leqslant \varepsilon,$

soit *a fortiori*, $\forall p \geqslant n_0$, $\forall q \in \mathbb{N}$, $d(x_{p+q}, x_p) \leqslant \varepsilon$:
la suite des $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien de Cauchy dans E complet. Elle converge. Soit a sa limite. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers a et que f est continue, (uniformément en fait car k-Lipschitzienne) on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(a)$, (Corollaire 4.31), et comme $x_{n+1} = f(x_n)$, on obtient, à la limite l'égalité $a = f(a)$.

Enfin a est seul point fixe, car si $b = f(b)$ on aura

$$d(a, b) = d\left(f(a), f(b)\right) \leqslant k d(a, b)$$

d'où

$$(1-k) d(a, b) \leqslant 0 \text{ avec } 1 - k > 0 \text{ donc } d(a, b) \leqslant 0,$$

donc $d(a, b) = 0$ d'où $a = b$. ■

Remarque 4.104. — Il ne suffit pas d'avoir, $\forall (x, y) \in E^2$, $d\left(f(x), f(y)\right) < d(x, y)$ (ce qui serait une définition plus intuitive du mot « contractante »), pour conclure.

Exemple $E = [0, +\infty[$, complet car fermé de $\mathbb{R}$, $f : E \mapsto E$ définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2+1},\ d\left(f(x), f(y)\right) = \left|\sqrt{x^2+1} - \sqrt{y^2+1}\right|$$

$$= \left|\frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}}\right| = \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}}\ |x - y|\ .$$

On a $0 \leqslant x < \sqrt{x^2+1}$ et $0 \leqslant y < \sqrt{y^2+1}$, donc

$$\left|\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1}}\right| < 1$$

on a bien $d\left(f(x), f(y)\right) < |x - y| = d(x, y)$, mais f n'a pas de point fixe sur E car si $a \geqslant 0$ vérifiait $a = \sqrt{a^2+1}$ on aurait $a^2 + 1 = a^2$ soit $0 = 1$: bizarre ! ■

REMARQUE 4.105. — *Si f n'est pas contractante, mais s'il existe un produit de composition $g = f^p = f \circ f \circ \ldots \circ f$, (p fois) qui le soit, alors f admet un (et un seul) point fixe, celui de g, ceci dans E complet.*

Car, le théorème du point fixe s'applique à g qui admet un seul point fixe, noté a. On a alors :

$$g(f(a)) = f^p(f(a)) = f(f^p(a)) = f(g(a)) = f(a),$$

donc $f(a)$ est point fixe de g qui n'en a qu'un, a, d'où $f(a) = a$: f admet a pour point fixe. C'est le seul car $f(b) = b \Rightarrow (f \circ f)(b) = f(b) = b$, d'où par récurrence $f^p(b) = b$: un point fixe de f est point fixe de $g = f^p$, d'où l'unicité.

REMARQUE 4.106. — Si on considère que l'un des buts des mathématiques est de parvenir à des *résultats existentiels*, (qui affirment l'existence d'éléments solution d'un problème, et qui, autant que possible, les caractérisent par des conditions ne les faisant pas intervenir) on comprend que le *théorème du point fixe est un outil affirmant l'existence d'une solution d'un problème formulé de la manière suivante : trouver le point fixe d'une application contractante dans un espace complet.* (Rendez-vous à la case : « équations différentielles », on ne passe pas par la case départ, on ne gagne pas 20 000 F.)

C'est le deuxième outil de ce type, le premier étant celui dit *des valeurs intermédiaires* qui affirme l'existence d'un zéro d'une fonction continue d'un connexe dans $\mathbb{R}$, prenant des valeurs de signes contraires, (Théorème 4.79).

La remarque 4.106 s'applique dans l'étude des méthodes numériques de résolution d'une équation $f(x) = 0$: on s'efforcera de la mettre sous une forme $\varphi(x) = x$, φ étant contractante.

On établira de la même façon, dans le chapitre sur les espaces vectoriels normés le théorème dit des approximations successives, (voir 6.37).

THÉORÈME 4.107. — *Du prolongement d'une application uniformément continue. Soient E et F espaces métriques, F étant complet. Soit X une partie de E partout dense dans E et $f : X \mapsto F$ une application uniformément continue. Alors il existe une et une seule application g de E dans F, continue, de restriction à X égale à f. De plus g est uniformément continue.*

Soit $y \in E = \overline{X}$, il existe des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X qui convergent vers y, (Théorème 4.27). Comme on veut définir g continue on devra avoir $g(y) = \lim_{n\to+\infty} g(x_n)$, (Corollaire 4.31) et comme on veut que $g|_x \equiv f$, il faut que $f(x_n) = g(x_n)$: on est donc ramené à justifier la convergence de ces suites $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Or $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente dans E, (vers y), est de Cauchy, son image par f uniformément continue de X dans F est de Cauchy (Théorème 4.86), dans F complet donc convergente. De plus la limite des $f(x_n)$ est indépendante du choix de la suite des x_n de X qui converge vers y, car si $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite qui converge vers y, en posant $x''_{2n} = x_n$ et $x''_{2n+1} = x'_n$ on construit une troisième suite de X qui converge vers y, donc $l'' = \lim_{k\to+\infty} f(x''_k)$ existe, et en extrayant les suites de rang pair et impair on aura $l'' = \lim_{n\to+\infty} f(x''_{2n}) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ ainsi que $l'' = \lim_{n\to+\infty} f(x''_{2,+1}) = \lim_{n\to+\infty} f(x'_n)$, l'espace métrique étant séparé.

On définit alors $g : E \mapsto F$ par $g(y) =$ la valeur commune des limites des suites $(f(x))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de X qui converge vers y. C'est la seule façon de prolonger f par une application continue, mais il reste à justifier que g ainsi définie est continue, et même uniformément. On sait que $f : X \mapsto F$ est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0, \exists\alpha > 0, \forall (x, x') \in X^2, d(x, x') \leqslant \alpha \Rightarrow d(f(x), f(x')) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Soient alors y et y' dans E vérifiant $d(y, y') \leqslant \dfrac{\alpha}{3}$, et deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X qui convergent vers y et y' respectivement.

Comme alors $g(y) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$ et $g(y') = \lim_{n\to+\infty} f(x'_n)$, en traduisant ces limites, avec le ε du départ et le α associé, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$ on ait les conditions suivantes :

$$d(x_n, y) \leqslant \frac{\alpha}{3},$$
$$d(x'_n, y') \leqslant \frac{\alpha}{3},$$
$$d(g(y), f(x_n)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$
$$d(g(y'), f(x'_n)) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

En particulier, pour un tel n , on aura

$$d(x_n, x'_n) \leqslant d(x_n, y) + d(y, y') + d(y', x'_n) \leqslant 3 \cdot \frac{\alpha}{3} = \alpha$$

d'où *a fortiori* $d(f(x_n), f(x'_n)) \leqslant \varepsilon/3$, (choix de α au départ), mais alors, par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} d(g(y), g(y')) &\leqslant d(g(y), f(x_n)) + d(f(x_n), f(x'_n)) \\ &\quad + d(f(x'_n), g(y')) \\ &\leqslant 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

et finalement, on a bien g uniformément continue car :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (y, y') \in E^2,$$
$$d(y, y') \leqslant \frac{\alpha}{3} \Rightarrow d(g(y), g(y')) \leqslant \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Ce théorème, de caractère théorique, permettra par exemple de définir l'intégrale des fonctions réglées à partir de celle des fonctions en escalier, par un passage à la limite. Il permet aussi de traiter des questions stables par passage à la limite en se ramenant à une partie X partout dense de l'espace de départ, justification du lemme de Lebesque par exemple, voir chapitre 15 sur les séries de Fourier, en Analyse Fonctionnelle.

Passons, pour terminer ce paragraphe consacré à l'artillerie lourde, au théorème de Baire, (the last, not the least).

THÉORÈME 4.108. — *Théorème de Baire. Soit E espace métrique complet, et $(\mathcal{O}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts de E, chaque $\mathcal{O}_n$ étant partout dense dans E. Alors $\mathcal{O} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ est encore partout dense dans E.*

Soit $x \in E$, V un voisinage de x, on veut prouver que $V \cap \mathcal{O}$ est non vide. Or exhiber un élément dans un complet, quand il y a du dénombrable dans l'air, c'est construire une suite de Cauchy et considérer sa limite. Le passage à la limite rendra larges les inégalités strictes, on va prendre quelques précautions.

D'abord, $\exists r > 0$, $\mathcal{B}_f(x, r) \subset V$. On note $\mathcal{B}_f$ les boules fermées.

Puis $x \in \overline{\mathcal{O}_0} = E$, et $\mathcal{B}_0(x, r)$ est voisinage de x donc $\mathcal{B}_0(x, r) \cap \mathcal{O}_0$ est non vide, or c'est un ouvert, donc il contient une boule ouverte non vide, quitte à diminuer le rayon, il contient une boule fermée non vide donc $\exists \mathcal{B}_f(x_0, r_0) \subset \mathcal{B}_0(x, r) \cap \mathcal{O}_0$. On a $r_0 > 0$ et on peut imposer la condition $r_0 < 1$. Puis $x_0 \in \overline{\mathcal{O}_1} = E$, $\mathcal{B}_0(x_0, r_0)$ est voisinage de x_0, donc $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{B}_0(x_0, r_0)$ est un ouvert non vide, qui contient donc une boule... fermée non vide $\mathcal{B}_f(x_1, r_1)$, avec $r_1 > 0$, et on peut imposer $r_1 < \dfrac{1}{2}$.

Et on continue ainsi. Si on suppose obtenue une boule fermée $\mathcal{B}_f(x_n, r_n) \subset \mathcal{O}_n \cap \mathcal{B}_0(x_{n-1}, r_{n-1})$ avec $0 < r_n < \dfrac{1}{n+1}$, (hypothèse de récurrence), en traduisant que $x_n \in E = \overline{\mathcal{O}}_{n+1}$, comme $\mathcal{B}_0(x_n, r_n)$ est voisinage de x_n, on aura $\mathcal{O}_{n+1} \cap \mathcal{B}_0(x_n, r_n)$ ouvert non vide d'où l'existence d'une boule fermée non vide :

$$\mathcal{B}_f(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \mathcal{O}_{n+1} \cap \mathcal{B}_0(x_n, r_n),$$

et on impose $0 < r_{n+1} < \dfrac{1}{n+2}$.

C'est récurrent. Les boules fermées $\mathcal{B}_f(x_n, r_n)$ sont alors des fermés emboîtés puisque $\mathcal{B}_f(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \mathcal{B}_0(x_n, r_n) \subset \mathcal{B}_f(x_n, r_n)$. Leurs diamètres, $2r_n$ sont majorés par $\dfrac{2}{n+1}$, donc tendent vers 0, mais alors, (Théorème 4.101), leur intersection est un singleton, $\{l\}$.

On a alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $l \in \mathcal{B}_f(x_n, r_n) \subset \mathcal{O}_n$, donc $l \in \mathcal{O} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n$, mais aussi $l \in \mathcal{B}_f(x_0, r_0) \subset \mathcal{B}_0(x, r) \cap \mathcal{O}_0 \subset \mathcal{B}_0(x, r) \subset V$.

C'est gagné ! On a construit $l \in V \cap (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n)$, ceci pour tout V voisinage de x, d'où x de E, (quelconque) adhérent à $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n\right)$. ■

COROLLAIRE 4.109. — *Soit E métrique complet non vide. Si E est réunion d'une famille dénombrable de fermés, l'un de ces fermés au moins est d'intérieur non vide.*

Comme dans le théorème de Baire on n'impose pas aux ouverts d'être distincts, ici on n'imposera pas aux fermés de l'étre. Donc si on a une famille finie de fermés, on la transforme en une suite de fermés en reprenant dans l'indexation, le même fermé.

On suppose donc que $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, les F_n étant fermés. Soit $\mathcal{O}_n = E \setminus F_n$, on a $\overline{\mathcal{O}}_n = E \setminus (\overset{\circ}{F}_n)$, (Théorème 1.26) donc si $\forall n \in \mathbb{N}$, $\overset{\circ}{F}_n = \varnothing$ on aura $\overline{\mathcal{O}}_n = E$. Le théorème de Baire s'applique et $\mathcal{O} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_n$ est partout dense.

Or $\mathcal{O} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (E \setminus F_n) = E \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n) = \varnothing$: on aurait $E = \overline{\mathcal{O}} = \overline{\varnothing} = \varnothing$ ce qui est exclu. Donc l'un au moins des F_n est d'intérieur non vide. ■

Ce corollaire nous permettra de justifier, dans le cadre des espaces vectoriels, entre autres résultats, le fait qu'un espace vectoriel normé de dimension dénombrable stricte (c'est-à-dire équipotente à $\mathbb{N}$) n'est jamais complet, (voir 6.33).

7. Complétion d'un espace métrique

Dans ce paragraphe nous allons étudier le mécanisme permettant de plonger un espace métrique dans un espace complet, et ceci en supposant, pour la dernière fois, $\mathbb{R}$ complet.

Puis, en partant de $\mathbb{Q}$ et, en modifiant la démonstration, on construira $\mathbb{R}$ comme un complété de $\mathbb{Q}$ dans le chapitre suivant.

DÉFINITION 4.110. — *Soit E un espace métrique. On appelle complété de E tout espace métrique F complet, tel qu'il existe une injection $i : E \mapsto F$ vérifiant :*

1) $\forall (x, y) \in E^2,\ d_E(x, y) = d_F(i(x), i(y))$,
2) l'adhérence, dans F, de $i(E)$ est égale à F.

THÉORÈME 4.111. — *Soit E un espace métrique, la distance étant à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors E admet des complétés.*

On admet donc encore que $\mathbb{R}$ est complet.

Soit $\mathcal{C} = \{$ suites de Cauchy d'éléments de $E\}$. On suppose E non vide, sinon il est complet ; alors il y a des suites de Cauchy, les suites constantes par exemple, qui sont convergentes.

On définit sur $\mathcal{C}$ une équivalence $\mathcal{R}$ par :

4.112. Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $\mathcal{C}$, on a $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$.

C'est une équivalence (*reflexive* : $x\mathcal{R}x$ car $d(x_n, x_n) = 0$; *symétrique* : si $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$ on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} d(y_n, x_n) = 0$; *transitive* si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, par inégalité triangulaire $d(x_n, z_n) \leqslant d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$, le majorant tend vers 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, z_n) = 0$ d'où $x\mathcal{R}z$).

Soit $F = \mathcal{C}/\mathcal{R}$ l'ensemble quotient. On va définir une distance d_F sur F.

Soit α et β deux éléments de F, représentés respectivement par $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de $E \times E$ est de Cauchy dans $E\times E$, pour la distance $d^{(\infty)}$, (Théorème 4.88) et la distance d étant uniformément continue de $(E \times E, d^{(\infty)})$ dans $\mathbb{R}$, (Théorème 4.58), la suite des $d(x_n, y_n)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet, donc convergente (Théorème 4.86).

C'est le seul endroit où l'hypothèse $\mathbb{R}$ complet intervient, c'est ce point qu'il faudra modifier si par exemple, d est à valeurs dans $\mathbb{Q}$.

De plus si x' et y' sont d'autres suites de Cauchy représentant α et β, on a $d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x'_n) + d(x'_n, y'_n) + d(y'_n, y_n)$ et comme $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = 0$ ainsi que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(y'_n, y_n) = 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) \leqslant \lim_{n\to+\infty} d(x'_n, y'_n);$$

mais on établirait de même l'inégalité inverse d'où l'égalité $\lim d(x_n, y_n) = \lim d(x'_n, y'_n)$.

On définit donc sur l'ensemble quotient $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ l'application d_F par :

4.113. $d_F(\alpha, \beta) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n)$, si $x \in \alpha$ et $y \in \beta$, ceci ayant un sens car cette limite existe et est indépendante du choix des représentants x et y de α et β.

Il reste à voir que d_F est une distance, et que (F, d_F) est un complété de E. On a d_F distance sur F car $d_F(\alpha, \beta)$ est $\geqslant 0$, (limite de nombres positifs), et si $d_F(\alpha, \beta) = 0$, avec $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans α et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans β c'est que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$, donc que $x\mathcal{R}y$ d'où $\alpha = \beta$.

Il est évident que $d_F(\alpha, \beta) = d_F(\beta, \alpha)$ quant à l'inégalité triangulaire, si on a γ de F, représente par $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'inégalité $d(x_n, z_n) \leqslant d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$ donne, par passage à la limite $d_F(\alpha, \gamma) \leqslant d_F(\alpha, \beta) + d_F(\beta, \gamma)$.

Il existe une injection $i : E \mapsto F$ telle que $\forall (u, v) \in E^2$ $d(u, v) = d_F(i(u), i(v))$.

Soit $u \in E$, on note $\dot{u}$ la suite de Cauchy constante égale à u, et $\overline{u}$ la classe d'équivalence dans $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ de $\dot{u}$.

Soit i l'application de E dans F définie par $i(u) = \overline{u}$: c'est une injection car $i(u) = i(v) \Leftrightarrow \overline{u} = \overline{v} \Leftrightarrow \dot{u}\mathcal{R}\dot{v} \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} d(u, v) = 0 \Leftrightarrow d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$, (puisque les termes généraux des suites $\dot{u}$ et $\dot{v}$ sont u et v).

De plus $d_F(i(u), i(v)) = \lim\limits_{n\to+\infty} d(u, v) = d(u, v)$, avec $i(u)$ et $i(v)$ représentés par les suites constantes de termes généraux u et v.

On a $\overline{i(E)} = F$, (adhérence, dans F, pour d_F). En effet, soit $\alpha \in F$ représente par $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite de Cauchy de E. En traduisant cette hypothèse on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall p \geqslant n_0,\ d(x_n, x_p) \leqslant \varepsilon.$$

On introduit alors l'élément $i(x_n)$ représenté par la suite de terme constant valant x_n, on aura, pour $n \geqslant n_0$,

$$d_F(i(x_n), \alpha) = \lim_{p \to +\infty} d(x_n, x_p) \leqslant \varepsilon,$$

(on a toujours x_n, constant par rapport à p, terme général de la suite $\dot{x}_n$ représentant $i(x_n)$), d'où l'existence de la suite des $(i(x_n))_{i \in \mathbb{N}}$ dans $i(E)$ vérifiant $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0$, $d_F(i(x_n), \alpha) \leqslant \varepsilon$ ce qui est la traduction, dans (F, d_F) métrique, de l'appartenance de α à l'adhérence de $i(E)$, (Théorème 4.27).

Il ne reste plus qu'à justifier le fait que F est complet pour d_F pour avoir gagné.

Soit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F, de Cauchy pour d_F. On lui associe une suite de E qui sera de Cauchy dans (E, d) en choisissant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in E$ tel que $d_F(i(x_n), \alpha_n) < \dfrac{1}{n+1}$, (ce qui est possible car α_n est adhérent à $i(E)$ donc la boule ouverte de centre α_n de rayon $\dfrac{1}{n+1}$ rencontre $i(E)$).

La suite $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (E, d) car

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall m \geqslant n_0,\ d_F(\alpha_n, \alpha_m) \leqslant \varepsilon/3,$$

et aussi

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{3},\ \frac{1}{m+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{3};$$

(on traduit $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy pour d_F et $\dfrac{1}{n+1} \to 0$ dans $\mathbb{R}$). Mais alors, $\forall n \geqslant n_0$, $\forall m \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d_F(i(x_n), i(x_m)) \\ &\leqslant d_F(i(x_n), \alpha_n) + d_F(\alpha_n, \alpha_m) + d_F(\alpha_m, i(x_m)) \\ &\leqslant 3 \cdot \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Soit α la classe d'équivalence de cette suite de Cauchy $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N} \text{ on a } d_F(\alpha, \alpha_n) &\leqslant d_F(\alpha, i(x_n)) + d_F(i(x_n), \alpha_n) \\ &< d_F(\alpha, i(x_n)) + \frac{1}{n+1}.\end{aligned}$$

Or α étant représenté par la suite x des x_p et $i(x_n)$ par la suite constante égale à x_n, on a $d_F(\alpha, i(x_n)) = \lim\limits_{p\to+\infty} d(x_p, x_n)$.

Soit encore $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0$, $\forall p \geqslant n_0$, $d(x_p, x_n) \leqslant \varepsilon/2$, (car $x = (x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy) et $\forall n \geqslant n_0$, $\dfrac{1}{n+1} \leqslant \varepsilon/2$, d'où $\forall n \geqslant n_0$, $d_F(\alpha, \alpha_n) \leqslant \varepsilon$: la suite des $(\alpha_n)_n \in \mathbb{N}$ de Cauchy dans (F, d_F) est bien convergente vers α dans (F, d_F). ■

On a ainsi construit un complété F de E.

Il est clair que toute suite de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E devient convergente dans F au sens suivant : *on assimile les x_n de E à leurs images $i(x_n)$ dans F*, comme $d_F(i(x_n), i(x_m)) = d(x_n, x_m)$ il est facile de voir que cette suite $(i(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (F, d_F) complet; donc convergente, et si $\alpha = \lim\limits_{n\to+\infty} i(x_n)$, limite prise pour d_F on dira que α est la limite des x_n. Tout repose sur cette assimilation des x_n aux $i(x_n)$.

Il reste à reprendre ce mécanisme, dans le cas de $\mathbb{Q}$ au point suivant : si α et β sont deux classes d'équivalence de $\mathcal{C}/\mathcal{R}$ représentées par $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comment définir $d_F(\alpha, \beta)$ puisqu'on ne sait plus ici que la suite des $d(x_n, y_n)$ converge. La réponse va être obtenue grâce à une relation d'ordre car sur $\mathbb{Q}$ la distance est définie à partir d'une valeur absolue elle-même associée à une relation d'ordre. Rendez-vous au chapitre suivant qui mettra en évidence l'importance de la structure de corps ordonné sur $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

EXERCICES

1. Soit E métrique tel que toute boule fermée soit compacte. Montrer que E est complet, et que les compacts de E sont les fermés bornés.

2. Montrer que E métrique complet est compact si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des ouverts de diamètre $< \varepsilon$.

3. Soient A et B deux fermés disjoints de E métrique. Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V de E tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

4. Soit un espace métrique connexe non borné, E. Montrer que toute sphère est non vide.

5. Soient A et B deux parties connexes de E métrique telles que $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$. Montrer que $A \cup B$ est connexe.

6. Soit A une partie non vide de E métrique, r un réel > 0 et $V_r(A) = \{x;\ x \in E;\ d(x, A) < r\}$. Montrer que $V_r(A)$ est un voisinage de $\overline{A}$. Montrer que si A est compact, pour tout U voisinage de A, il existe $r > 0$ tel que $V_r(A) \subset U$.

7. Soit A un ouvert de E métrique. Montrer que pour tout $B \subset E$ on a $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$. Donner sur $\mathbb{R}$ des exemples d'ouverts A et B tels que $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ soient distincts.

8. Soit E métrique compact non vide et $f : E \mapsto E$ telle que

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \neq y,\ d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Montrer que f admet un et un seul point fixe.

9. Soit K un espace métrique compact et $(O_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de K recouvrant K. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que pour toute partie A de K de diamètre inférieur ou égal à a, il existe $i_0 \in I$ tel que $A \subset 0_{i_0}$.

10. Soit (E, d) un espace métrique, K un compact non vide de E. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in K,\ \mathcal{B}_f(x, r)$ soit compacte. Montrer que $\forall \rho \in]0, r[,\ F(\rho) = \{x, x \in E,\ d(x, K) \leqslant \rho\}$ est compact.

11. Soit E métrique compact et $f : E \mapsto E$ telle que $\forall (x, y) \in E^2$, $d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y)$. Montrer que f est bijective et qu'elle conserve les distances.

12. Soit E un espace métrique, A et B deux parties de E telles que $\overline{A} \cap B = \varnothing$ et $A \cap \overline{B} = \varnothing$. Soit $\Omega = \{x \in E;\ d(x, A) < d(x, B)\}$ et $\Omega' = \{x \in E;\ d(x, B) < d(x, A)\}$. Montrer que ce sont deux ouverts disjoints de E contenant A et B respectivement.

13. Soit (E, d) métrique et une application $(m, n) \rightsquigarrow a_{m,n}$ de $\mathbb{N}^2$ dans E. On suppose que, pour chaque m fixé, la suite $(a_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α_m de E et que $\lim\limits_{m\to+\infty} \alpha_m = \alpha$ existe dans E.
Montrer qu'il existe une injection croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, notée φ, telle que $\lim\limits_{m\to+\infty} a_{m,\varphi(m)} = \alpha$.

14. Soit f une fonctin de $\mathbb{R}$ dans E métrique, périodique, ayant une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

15. Soient A et B deux parties non vides de E métrique. Montrer que $d(A, B) = d(\overline{A}, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$. Vérifier que A et B compacts et $d(A, B) = 0 \Rightarrow A \cap B \neq \varnothing$; que de même A compact, B fermé et $d(A, B) = 0 \Rightarrow A\cap B \neq \varnothing$. Cas de A et B fermés avec $d(A, B) = 0$.

16. Donner un exemple de A compact, B fermé, dans E métrique avec $d(A, B)$ non atteinte.

SOLUTIONS

1. Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E, elle est bornée, car avec $\varepsilon = 1$, $\exists n_0$, $\forall p \geqslant n_0$, $\forall q \geqslant n_0$, $d(x_p, x_q) \leqslant 1$. En particulier, $\forall p \geqslant n_0$, $d(x_{n_0}, x_p) \leqslant 1$ et si r est la borne supérieure de $\{1, d(x_{n_0}, x_n), n \leqslant n_0\}$ on aura les x_n dans $\mathcal{B}_f(x_0, r)$, boule fermée compacte.
Mais alors la suite admet une suite extraite convergente, comme elle est de Cauchy elle est elle-même convergente, d'où E complet. Si K est un compact de E, métrique donc séparé, il est fermé, et il est borné car avec $a \in E$, $K \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_0(a, n)$, on extrait un recouvrement fini de K et si n_0 est le plus grand n intervenant, on aura $K \subset \mathcal{B}_f(a, n_0)$, donc K borné.
Si K est fermé borné, avec $r > 0$ et $a \in E$ tel que $K \subset \mathcal{B}_f(a, r)$, on a $K = K \cap \mathcal{B}_f(a, r)$ est un fermé de $\mathcal{B}_f(a, r)$, par l'hypothèse cette boule est compacte, donc K fermé d'un compact est compact.

2. Soit E métrique compact, $\varepsilon > 0$, comme $E \subset \bigcup\limits_{x\in E} \mathcal{B}_0(x, \frac{\varepsilon}{3})$, on extrait un recouvrement fini par des ouverts de diamètre $2\frac{\varepsilon}{3}$. On a la propriété sans l'hypothèse complet.

Réciproquement, soit E métrique complet vérifiant la propriété. Pour justifier E compact, on va prouver que toute suite admet une suite extraite convergente.

Soit $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E.
Comme E est recouvert par un nombre fini d'ouverts de diamètre < 1, il existe une injection φ_1 de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que la suite extraite $\left(x_{\varphi_1(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit dans un ouvert O_1 de diamètre < 1, puis il existe une suite extraite $\left(x_{\varphi_1\circ\varphi_2(n)}\right)$ dans un ouvert O_2, de diamètre $< \dfrac{1}{2}$ et en itérant, $\forall p \in \mathbb{N}^*$ on a une suite extraite $\left(x_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_{p-1}\circ\varphi_p(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ contenue dans un ouvert O_p de diamètre $< 1/p$, tout en restant dans les ouverts O_j de diamètre inférieur à $\dfrac{1}{j}$, pour $j = 1, 2, \ldots, p-1$.
Mais en posant $x_{\alpha(p)} = x_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_{p-1}\circ\varphi_p(0)}$, pour $q>p$, $x_{\alpha(q)} = x_{\varphi_1\circ\ldots\circ\varphi_{p-1}(\varphi_p\circ\ldots\circ\varphi_q(0))}$ est dans O_p ainsi que $x_{\alpha(p)}$ donc $d(x_{\alpha(p)}, x_{\alpha(q)}) < \dfrac{1}{p}$.
Mais alors, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists p_0 \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{p_0} < \varepsilon$ d'où $\forall p \geqslant p_0$, $\forall q \geqslant p$, $d(x_{\alpha(p)}, x_{\alpha(q)}) \leqslant \varepsilon$: la suite extraite des $(x_{\alpha(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E complet donc convergente. Finalement E est métrique compact.

3. Si A (ou B) est vide, $U = A$, (ou $V = B$) et $V = E$ (et $U = E$) donnera une solution.
On suppose A et B non vides.
Soit $y \in B$, donc $y \in E - A$, ouvert, (A fermé disjoint de B).
Comme $E - A$ est réunion de boules ouvertes, il existe $\rho(y) > 0$ tel que $y \in \mathcal{B}_0(y, \rho(y)) \subset E - A$, d'où $d(y, A) > 0$.
On pose $V = \displaystyle\bigcup_{y\in B} \mathcal{B}_0(y, \frac{1}{2}d(y, A))$: c'est un ouvert contenant B. De la même façon soit $U = \displaystyle\bigcup_{x\in A} \mathcal{B}_0(x, \frac{1}{2}d(x, B))$ c'est un ouvert contenant A.
Les ouverts U et V sont disjoints car si $z \in U \cap V$, il existe x_0 dans A et y_0 dans B tel que

$$z \in \mathcal{B}_0(x_0, \frac{1}{2}d(x_0, B)) \cap \mathcal{B}_0(y_0, \frac{1}{2}d(y_0, A)),$$

mais alors

$$\begin{aligned} d(x_0, y_0) &\leqslant d(x_0, z_0) + d(z_0, y_0) \\ &< \frac{1}{2}d(x_0, B) + \frac{1}{2}d(y_0, A). \end{aligned}$$

Comme $d(x_0, B) \leqslant d(x_0, y_0)$ mais aussi $d(y_0, A) \leqslant d(x_0, y_0)$, on obtient *a fortiori*

$$d(x_0, B) < \frac{1}{2}d(x_0, B) + \frac{1}{2}d(y_0, A) \text{ d'où } d(x_0, B) < d(y_0, A)$$

et

$$d(y_0, A) < \frac{1}{2}d(x_0, B) + \frac{1}{2}d(y_0, A) \text{ d'où } d(y_0, A) < d(x_0, B)$$

ces 2 résultats étant contradictoires. D'où $U \cap V = \emptyset$.

4. Soit S la sphère de centre a, de rayon $r > 0$. On a $E = \mathcal{B}_0(a,r) \cup S \cup \{x;\ d(x,a) > r\}$ avec $\mathcal{B}_0(a,r)$ ouvert non vide, (contient a) et $\{x;\ d(a,x) > r\}$ ouvert, (d continue), non vide sinon E serait borné. Si S est vide on a une partition de E connexe en deux ouverts non vides : absurde. Donc S non vide.
Si $r = 0$, $S = \{x;\ d(x,a) = 0\} = \{a\}$ est non vide.

5. Soient 2 ouverts disjoints U et V de $A \cup B$ tels que $A \cup B = U \cup V$, on va justifier que l'un des ouverts U ou V est vide.

Soit x dans $\overline{A} \cap B$ supposé non vide. Comme $x \in B \subset (U \cup V)$, x est dans l'un de ces ouverts, par exemple $x \in U$.

Comme x est dans $\overline{A}$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x, (on est dans E métrique), or $x \in U$ ouvert de $A \cup B$, et les x_n dans $A \cup B$ convergent vers x : $\exists n_0, \forall n \geqslant n_0,\ x_n \in U$, d'où $A \cap U \neq \emptyset$.
Mais alors $A = A \cap (A \cup B) = A \cap (U \cup V) = (A \cap U) \cup (A \cap V)$ avec A connexe, $A \cap U$ et $A \cap V$ ouverts disjoints de A et $A \cap U$ non vide, c'est que $A \cap V = \emptyset$ et $A \cap U = A$ soit encore $A \subset U$.
Puis $V \subset (A \cup B) \Rightarrow V = (V \cap A) \cup (V \cap B) = V \cap B$ puisque $A \cap V = \emptyset$, d'où $V \subset B$.
Enfin $B = B \cap (A \cup B) = B \cap (U \cup V) = (B \cap U) \cup (B \cap V) = (B \cap U) \cup V$ d'où B connexe, réunion des 2 ouverts V et $B \cap U$, disjoints car U et V le sont, et avec $B \cap U \neq \emptyset$ car x du départ est dans $\overline{A} \cap B$ et dans U par l'hypothèse, donc $V = \emptyset$.

6. L'application $x \rightsquigarrow d(x, A)$ est 1. Lipschitzienne donc uniformément continue. En effet, soit $y \in E$. Pour tout z de A on a $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$. Comme $d(x,A) = \inf\{d(x,t);\ t \in A\}$, on a $d(x,A) \leqslant d(x,z)$, d'où

$$d(x,A) \leqslant d(x,y) + d(y,z),$$

vrai pour tout z de A, donc

$$d(x,A) \leqslant d(x,y) + d(y,A)$$

ce qui implique

$$d(x,A) - d(y,A) \leqslant d(x,y),$$

mais aussi, pour ne pas faire de jaloux

$$d(y,A) - d(x,A) \leqslant d(y,x) = d(x,y),$$

d'où $-d(x,y) \leqslant d(x,A) - d(y,A) \leqslant d(x,y)$ et finalement
$|d(x,A) - d(y,A)| \leqslant d(x,y)$.
Mais alors $V_r(A)$ est image réciproque de $]-\infty, r[$ ouvert par une application continue : c'est un ouvert.

Soit x dans $\overline{A}$, il existe une suite a_n d'éléments de A qui converge vers x donc $d(x, a_n)$ tend vers 0.
Comme $d(x, A) \leqslant d(x, a_n)$, à la limite $d(x, A) = 0 < r$ d'où $x \in V_r(A)$: mais alors $V_r(A)$, ouvert contenant $\overline{A}$ est voisinage de $\overline{A}$.
Soit A un compact de E et U un voisinage de A, O un ouvert tel que $A \subset O \subset U$.
Pour tout x de $A \subset O$, $\exists \rho(x) > 0$ tel que $\mathcal{B}_0(x, \rho(x)) \subset O$.
On a $A \subset \bigcup_{x \in A} \mathcal{B}_0(x, \frac{\rho(x)}{3})$: on extrait un recouvrement fini du compact A, associé à des éléments notés $x_1, \ldots, x_n$.
Soit $r = \inf\{\frac{\rho(x_i)}{3}, i = 1, \ldots, n\}$, si $z \in V_r(A)$, on a $d(z, A) < r$, donc il existe x dans A tel que $d(z, x) < r$, puis il existe i dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $x \in \mathcal{B}_0(x_i, \frac{\rho(x_i)}{3})$ d'où $d(x_i, z) < 2\frac{\rho(x_i)}{3} \Rightarrow z \in \mathcal{B}_0(x_i, \rho(x_i)) \subset O$ et finalement $A \subset V_r(A) \subset O \subset U$.

7. Soit $x \in A \cap \overline{B}$, x est dans A et il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de B qui converge vers x. Comme A ouvert est voisinage de x, il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $x_n \in A$. Mais alors les x_n, pour $n \geqslant n_0$ sont dans $A \cap B$ et convergent vers x, donc $x \in \overline{A \cap B}$.
Soit $a < b < \gamma < c < \alpha < d < \delta$ et

$$A =]a, b[\cup]c, d[, \; B =]b, \gamma[\cup]\alpha, \delta[.$$

Alors

$$A \cap \overline{B} = [\alpha, d[; \; \overline{A} \cap B =]\alpha, d];$$
$$\overline{A \cap B} = [\alpha, d] \text{ et } \overline{A} \cap \overline{B} = \{b\} \cup [\alpha, d] :$$

ces quatre ensembles sont distincts.

8. Comme f est 1. Lipschitzienne, elle est continue. La distance étant continue de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$, l'application $g : x \rightsquigarrow d(x, f(x))$ est continue de E compact dans $\mathbb{R}$ donc elle est bornée et atteint ses bornes, (on suppose $E \neq \emptyset$).
Soit m sa borne inférieure atteinte en a.
Si $m = g(a) = d(a, f(a)) \neq 0$, comme $a \neq f(a)$ alors $d(f(a), f(f(a))) < d(a, f(a))$ soit $g(f(a)) < m$: c'est absurde. Donc $a = f(a)$ et f admet un point fixe.
Il est unique, car si pour $a \neq b$ on avait $f(a) = f(b)$, l'hypothèse conduirait à $d(f(a), f(b)) < d(a, b)$ soit $d(a, b) < d(a, b)$ ce qui est difficile à réaliser : on a un seul point fixe.

9. Si la propriété était fausse, en particulier on aurait :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \; \exists A_n \subset K, \text{ diamètre } (A_n) \leqslant \frac{1}{n} \text{ et } \forall i \in I, \; A_n \not\subset O_i.$$

En particulier $A_n \neq \emptyset$, (car $\emptyset \subset O_i$), soit $x_n \in A_n$, on extrait de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers $\lambda \in K$.

Il existe i_0 tel que $\lambda \in O_{i_0}$ ouvert, donc $\exists \alpha > 0$, $\mathcal{B}_f(\lambda, \alpha) \subset O_{i_0}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\varphi(n)} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} d(\lambda, x_{\varphi(n)}) = 0$, il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $d(\lambda, x_{\varphi(n)}) \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$ et $\operatorname{diam}(A_{\varphi(n)}) \leqslant \dfrac{1}{\varphi(n)} \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$, mais alors,

$$\begin{aligned}\forall y \in A_{\varphi(n)}\ ,\ d(\lambda, y) &\leqslant d(\lambda, x_{\varphi(n)}) + d(x_{\varphi(n)}, y)\\ &\leqslant \frac{\alpha}{2} + \operatorname{diam}(A_{\varphi(n)}) \leqslant \alpha,\end{aligned}$$

d'où $A_{\varphi(n)} \subset \mathcal{B}_f(\lambda, \alpha) \subset O_{i_0}$: c'est absurde. La propriété est donc vraie.

10. Soit $\rho \in]0, r[$ fixé, et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de $F(\rho)$. Pour n fixé, la fonction $y \rightsquigarrow d(x_n, y)$ est continue, donc sur K compact elle est bornée et atteint ses bornes : $\exists y_n \in K$ tel que $d(x_n, y_n) = d(x_n, K) \leqslant \rho$ puisque $x_n \in F(\rho)$. La suite $(y_n)_{n\in N}$ admet une suite extraite $\left(y_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ qui converge vers un y de K.
On a $d(y, x_{\varphi(n)}) \leqslant d(y, y_{\varphi(n)} + d(y_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)})$.
Comme $d(y_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)} \leqslant \rho < r$ et que $d(y, y_{\varphi(n)}$ tend vers 0,
$\exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ d(y, y_{\varphi(n)}) + d(y_{\varphi(n)}, x_{\varphi(n)}) \leqslant r$.
Donc pour $n \geqslant n_0$, les $x_{\varphi(n)}$ sont dans $\mathcal{B}_f(y, r)$, avec y dans K, donc on est dans un compact, et cette suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\geqslant n_0}$ admet à son tour une suite extraite convergente, dans $F(\rho)$ qui est fermé, donc $F(\rho)$ est compact.

11. On a déjà f injective car $f(x) = f(y)$ implique

$$0 = d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y) \text{ d'où } d(x, y) = 0 \text{ et } x = y.$$

On va exploiter la caractérisation des métriques compacts par l'existence de suites extraites convergentes pour prouver que f conserve les distances. Soient a et b dans E, on considère les suites des $a_n = f^n(a)$ et $b_n = f^n(b)$, ($f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f, n$ fois).
La suite $(a_n, b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de $E \times E$ compact, donc elle admet une suite extraite convergente $(a_{\varphi(n)}, b_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$.
Mais alors $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall m \geqslant n_0,\ d(a_{\varphi(n)}, a_{\varphi(m)}) \leqslant \varepsilon$ et $d(b_{\varphi(n)}, b_{\varphi(m)}) \leqslant \varepsilon$.
Si $n < m$, $\varphi(n) < \varphi(m)$, (suite extraite), et comme

$$a_{\varphi(n)} = f^{\varphi(n)}(a) \text{ et } a_{\varphi(m)} = f^{\varphi(n)} \circ f^{\varphi(m)-\varphi(n)}(a),$$

par application itérée de l'inégalité $d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y)$, on a, pour $m > n$:
$\varepsilon \geqslant d(a_{\varphi(n)}, a_{\varphi(m)} \geqslant d(a, a_{\varphi(m)-\varphi(n)})$, et la même inégalité avec les b_k.

Supposons que $d(a,b) < d(f(a),f(b))$, on applique ce qui précède avec $\varepsilon < \dfrac{d(f(a),f(b)) - d(a,b)}{2}$, il existe n_0, $\forall n \geqslant n_0$, $\forall m > n_0$, on ait

$$\begin{aligned} d(a_{\varphi(m)-\varphi(n)}, b_{\varphi(m)-\varphi(n)}) &\leqslant d(a_{\varphi(m)-\varphi(n)}, a) \\ &\quad + d(a,b) + d(b, b_{\varphi(m)-\varphi(n)}) \\ &\leqslant 2\varepsilon + d(a,b) < d(f(a),f(b)) \end{aligned}$$

vu le choix de ε. Or $m > n \Rightarrow \varphi(m) - \varphi(n) \geqslant 1$ et alors par hypothèse

$$\begin{aligned} & d(a_{\varphi(m)-\varphi(n)}, b_{\varphi(m)-\varphi(n)}) \\ &\quad = d(f^{\varphi(m)-\varphi(n)-1}(f(a)), f^{\varphi(m)-\varphi(n)-1}(f(b))) \\ &\quad \geqslant d(f(a),f(b)). \end{aligned}$$

On parvient donc à $d(f(a),f(b)) < d(f(a),f(b))$ ce qui est absurde. D'où $d(a,b) = d(f(a),f(b))$ et f est une isométrie.

Puis f est surjective, car si $x \in E$, la suite des $x_n = f^n(x)$ admet dans E compact une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente en particulier $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_{\varphi(n+1)}, x_{\varphi(n)}) = 0$. Or, f étant une isométrie, on a :

$$\begin{aligned} d(x_{\varphi(n+1)}, x_{\varphi(n)}) &= d\left(f^{\varphi(n+1)}(x), f^{\varphi(n)}(x)\right) \\ &= d\left(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x), x\right) \end{aligned}$$

et cette distance tend vers 0. Comme $\varphi(n+1) - \varphi(n) \geqslant 1$, les $f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x)$ sont dans $f(E)$ donc $x \in \overline{f(E)}$. Mais f est une isométrie donc est continue, $f(E)$ image continue d'un compact est un compact de E séparé donc c'est un fermé d'où $x \in f(E)$, et ce $\forall x \in E$: on a $f(E) = E$ d'où la surjectivité de f.

12. On a rappelé, (exercice 6) que l'application $x \rightsquigarrow d(x,A)$ est continue. *A fortiori*, $x \rightsquigarrow f(x) = d(x,A) - d(x,B)$ est continue de E dans $\mathbb{R}$, et $\Omega = f^{-1}(]-\infty, 0[)$ ainsi que $\Omega' = f^{-1}(]0,+\infty[)$ sont deux ouverts disjoints de E.
Si $x \in A, d(x,A) = 0$ et $d(x,B) > 0$ sinon, $d(x,B) = 0$ entraînerait l'existence d'une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de B telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x,y_n) = 0$ d'où $x \in \overline{B}$ mais alors $A \cap \overline{B}$ serait non vide. Donc, pour x dans A, $f(x) < 0 \Rightarrow x \in \Omega$ d'où $A \subset \Omega$ et de même $B \subset \Omega'$.

13. Soit une suite $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de réels décroissant strictement vers 0. Pour m fixé, $\exists n(m)$ tel que $\forall n > n(m)$, $d(\alpha_m, a_{m,n}) < \varepsilon_m$. On choisit $\varphi(0)$ arbitrairement, puis on choisit $\varphi(1) \geqslant 1 + \sup(n(1), \varphi(0))$, on a $\varphi(1) > \varphi(0)$ et $d(\alpha_1, a_{1,\varphi(1)}) < \varepsilon_1$.

On suppose choisis $\varphi(2), \varphi(3), \ldots, \varphi(m-1)$, avec $\varphi(1) < \varphi(2) < \varphi(3) < \ldots < \varphi(m-1)$ et $\forall i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, $d(\alpha_i, a_{i,\varphi(i)}) < \varepsilon_i$.
Si on choisit $\varphi(m) \geqslant 1 + \sup(n(m), \varphi(m-1))$, on aura bien $\varphi(m) > \varphi(m-1)$ et $d(\alpha_m, a_{m,\varphi(m)}) < \varepsilon_m$.
C'est donc récurrent et, pour tout m on a $d(\alpha, a_{m,\varphi(m)}) \leqslant d(\alpha, \alpha_m) + \varepsilon_m$ donc $\lim\limits_{m \to +\infty} a_{m,\varphi(m)} = \alpha$.

14. Si f est non constante, il existe a et b dans $\mathbb{R}$ avec $f(a) \neq f(b)$. Soit $\varepsilon = d(f(a), f(b)) > 0$. Il existe $A > 0$ tel que, si $l = \lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$, on ait $\forall t \geqslant A$, $d(f(t), l) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$ d'où $\forall t \geqslant A$, $\forall t' \geqslant A$, $d(f(t), f(t')) \leqslant 2\dfrac{\varepsilon}{3}$.
Si T est une période de $f, T > 0$, les $a + nT$ et les $b + nT$ tendent vers $+\infty$ si n tend vers $+\infty$, donc $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $a + n_0T \geqslant A$ et $b + n_0T \geqslant A$ d'où :

$$d(f(a), f(b)) = d(f(a + n_0T), f(b + n_0T)) \leqslant 2\frac{\varepsilon}{3} \text{ soit } \varepsilon \leqslant \frac{2\varepsilon}{3}$$

ce qui est absurde. Donc f est constante.

15. Comme $A \subset \overline{A}$, $\inf\{d(x, y);\ (x, y) \in \overline{A} \times B\} \leqslant \inf\{d(x, y);\ (x, y) \in A \times B\}$ (borne inférieure portant sur « des éléments en plus ») donc $d(\overline{A}, B) \leqslant d(A, B)$.
Or si $(x, y) \in \overline{A} \times B$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x. Pour tout n, $d(A, B) \leqslant d(x_n, y)$, la distance est continue de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ donc à la limite on aura $d(A, B) \leqslant d(x, y)$ et ce pour tout (x, y) de $\overline{A} \times B$ d'où *a fortiori* $d(A, B) \leqslant d(\overline{A}, B)$ et l'égalité $d(A, B) = d(\overline{A}, B)$. Il en résulte que $d(\overline{A}, B) = d(\overline{A}, \overline{B})$.
Si A et B sont compacts, $A \times B$ est compact de $E \times E$, d est continue sur $A \times B$ donc atteint sa borne inférieure : $\exists (a, b) \in A \times B$ tel que $d(A, B) = d(a, b)$. Si cette distance est nulle, $a = b \in A \cap B$ donc $d(A, B) = 0$ et A et B compacts $\Rightarrow A \cap B \neq \varnothing$.
Soit A compact, B fermé avec $d(A, B) = 0$, il existe une suite (a_n, b_n) de $A \times B$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} d(a_n, b_n) = 0$.
La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A compact admet une suite extraite $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers a dans A; comme alors $d(a, b_{\varphi(n)}) \leqslant d(a, a_{\varphi(n)}) + d(a_{\varphi(n)}, b_{\varphi(n)})$ on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} d(a, b_{\varphi(n)}) = 0$, donc a $\in \overline{B}$ avec B fermé d'où $a \in A \cap B$ qui est non vide.
(Cette propriété $d(A, B)$ atteinte avec A compact, B fermé, lorsqu'elle est nulle est fausse si elle est différente de 0 comme le montre l'exercice 16).
Enfin $A = \{(x, y);\ (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 1\}$ et $B = \mathbb{R} \times \{0\}$ sont deux fermés disjoints de $\mathbb{R}^2$, de distance nulle.

16. Il ne faut pas chercher A et B avec $d(A, B) = 0$ sinon la distance est atteinte, (exercice n° 15).

On se place dans E espace vectoriel de dimension infinie, (sinon comme avec $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$, $d(A,B) = d\big(A, B \cap \mathcal{B}_f(a_0, d(a_0, b_0))\big)$ on remplacerait B par un fermé borné, donc un compact.
Par exemple $E = \mathbb{R}[X]$, normé par

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right\| = \sup\{|a_k|;\ 0 \leqslant k \leqslant n\}.$$

Alors $K = \{0\}$ est un compact, et $F = \{(1 + \dfrac{1}{n+1})X^n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est un fermé de E. En effet, soit P adhérent à F et $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de F qui converge vers P.
Soit $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, $\exists i_0$ tel que $\forall i \geqslant i_0$, $||P_i - P|| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Si $n = d^\circ P$, pour tout $k > n$, le coefficient de X^k dans P est nul, donc celui de X^k dans P_i, pour $i \geqslant i_0$, est inférieur à $\dfrac{1}{2}$ en valeur absolue, or les coefficients intervenant dans les P_i sont tous de module supérieur à 1. C'est donc que $\forall i \geqslant i_0$, $P_i \in \{(1 + \dfrac{1}{r+1})X^r;\ r \leqslant n\}$. Cet ensemble étant fini, et la suite $(P_i)_{i \geqslant i_0}$ convergente vers P, elle devient stationnaire et P est l'un de ces P_r, $(r \leqslant n)$, donc $P \in F$, d'où F fermé.
On a :

$$\begin{aligned} d(K,F) &= \inf\{d(0, (1 + \frac{1}{n+1})X^n);\ n \in \mathbb{N}\} \\ &= \inf\{1 + \frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\} = 1 \end{aligned}$$

et cette borne n'est pas atteinte.

CHAPITRE 5

Construction de $\mathbb{R}$

Le lecteur pressé, attitude si courante à notre époque, peut sauter ce chapitre qui ne traite que de la construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, et de la justification des propriétés fondamentales de $\mathbb{R}$, certaines ayant été utilisées dans les espaces compacts. Le corps $\mathbb{R}$ va apparaître comme un complété de $\mathbb{Q}$ mais l'étude des espaces métriques ayant été faite avec des distances à valeurs dans $\mathbb{R}$, il faut ici reprendre un certain nombre de généralités et commencer par définir des distances non à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Groupes ordonnés

On a défini dans l'étude algébrique des structures, ce qu'est un groupe, et ce qu'est une relation d'ordre. Sur le même ensemble E on peut disposer d'une structure de groupe et d'une structure d'ensemble ordonné, sans rapport entre ces deux structures. Par contre on peut imposer à la relation d'ordre d'être compatible avec la loi de groupe.

DÉFINITION 5.1. — *On appelle groupe ordonné tout triplet $(G, \cdot, \leqslant)$ où $(G, \cdot)$ est un groupe, $\leqslant$ une relation d'ordre sur G compatible avec la loi, c'est-à-dire vérifiant :*

$$\forall (x, y, z) \in G^3,\ x \leqslant y \Rightarrow (xz \leqslant yz) \text{ et } (zx \leqslant zy).$$

5.2. Si $(G, \cdot, \leqslant)$ est un groupe ordonné et si e est l'élément neutre, les éléments x vérifiant $x \geqslant e$ sont appelés *positifs*, ceux vérifiant $x \leqslant e$ sont appelés *négatifs*, la terminologie vient du cas du groupe additif $\mathbb{Z}$, d'élément neutre 0 pour l'addition.

THÉORÈME 5.3. — *Soit $(G, \cdot, \leqslant)$ un groupe ordonné.*

Soit alors $G_+ = \{x;\ x \geqslant e\}$ *et* $G_- = \{x;\ x \leqslant e\}$. *On a :*

1) $G_- = (G_+)^{-1}$, *et* $G_+ = (G_-)^{-1}$,
2) $G_+ \cap G_- = \{e\}$,
3) $G_+ \cdot G_+ \subset G_+$,
4) $a \cdot b \in G_+ \Leftrightarrow b \cdot a \in G_+$.

1) Si $x \in G_+$, $x \geqslant e$ on multiplie par x^{-1} inverse de x, la compatibilité implique : $x^{-1}x \geqslant x^{-1}e$ soit $e \geqslant x^{-1}$: $x^{-1} \in G_-$ d'où $(G_+)^{-1} \subset G_-$ et, si $y \in G_-$, on a $y \leqslant e$ donc $y^{-1}y \leqslant y^{-1}e$ soit $e \leqslant y^{-1}$: $y^{-1} \in G_+$ et alors $y = (y^{-1})^{-1} \in (G_+)^{-1}$ d'où l'inclusion inverse $G_- \subset (G_+)^{-1}$ et l'égalité $G_- = (G_+)^{-1}$.

2) $G_+ \cap G_- = \{e\}$ car si $x \in G_+ \cap G_-$ on a $x \geqslant e$ et $x \leqslant e$ d'où $x = e$, par antisymétrie de la relation d'ordre.

3) $G_+ \cdot G_+ \subset G_+$: si $a \geqslant e$ et $b \geqslant e$ on a par compatibilité $ba \geqslant b$ et $b \geqslant e$ d'où $ba \geqslant e$ par transitivité de la relation d'ordre.

4) *Si* $ab \in G_+$, on a $ab \geqslant e$, on multiplie à gauche par a^{-1} d'où $b \geqslant a^{-1}$, puis à droite par b^{-1}, d'où $e \geqslant a^{-1}b^{-1} = (ba)^{-1}$ donc $(ba)^{-1} \in G_-$ et $ba \in (G_-)^{-1} = G^+$ d'après (1).

Donc $(ab \in G_+) \Rightarrow (ba \in G_+)$ et l'équivalence par symétrie des rôles joués. ■

Remarque 5.4. — *L'ordre est total sur* G *si et seulement si* $G = G_+ \cup G_-$, car si l'ordre est total, $\forall x \in G, x$ est comparable à e donc on a soit $x \leqslant e$ et $x \in G_+$; soit $x \leqslant e$ et $x \in G_-$; et si $G = G_+ \cup G_-$, soient $(x, y) \in G^2$, $xy^{-1} \in G = G_+ \cup G_-$, par exemple $xy^{-1} \in G_+$, alors $xy^{-1} \geqslant e \Rightarrow x \geqslant y$ en multipliant à droite par y, (toujours la compatibilité de l'ordre avec la loi), donc x et y sont comparables.

Théorème 5.5. — *Soit un groupe* $(G, \cdot)$ *d'élément neutre* e. *Si on se donne une partie* G_+ *de* G *vérifiant :*

1) $G_+ \cap (G_+)^{-1} = \{e\}$,
2) $G_+ \cdot G_+ \subset G_+$,
3) $ab \in G_+ \Leftrightarrow\ ba \in G_+$,

alors la relation $(a \leqslant b) \Leftrightarrow (a^{-1}b \in G_+)$ *est une relation d'ordre sur* G, *telle que* $(G, \cdot, \leqslant)$ *soit un groupe ordonné,* G_+ *étant alors l'ensemble des éléments positifs.*

De plus l'ordre est total si et seulement si $G = G_+ \cup (G_+)^{-1}$.

Les éléments négatifs sont alors ceux de $(G_+)^{-1} = G_-$.
On définit donc $a \leqslant b$ par $a^{-1}b \in G_+$.

Cette relation *est réflexive* : $\forall a \in G, a^{-1}a = e \in G_+$, (*cf.* 1)) donc $a \leqslant a$; elle est *antisymétrique* : si $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$ c'est que

$$a^{-1}b \in G_+ \text{ et } b^{-1}a = (a^{-1}b)^{-1} \in G_+ \text{ donc } a^{-1}b \in (G_+)^{-1}$$

d'où $a^{-1}b \in G_+ \cap (G_+)^{-1} = \{e\}$ donc $a^{-1}b = e$ soit $a = b$; *transitive* : si $a \leqslant b$ et $b \leqslant c$ on a $a^{-1}b \in G_+$ et $b^{-1}c \in G^+$, donc d'après le 2), $(a^{-1}b)(b^{-1}c) \in G^+$, soit $a^{-1}c \in G_+$ d'où $a \leqslant c$; on a une relation d'ordre.

Si de plus $G = G_+ \cup (G_+)^{-1}, \forall (a,b) \in G^2$ on a soit $a^{-1}b \in G_+$ et alors $a \leqslant b$, soit $a^{-1}b \in (G_+)^{-1}$ or $a^{-1}b = (b^{-1}a)^{-1}$, dans ce cas $(b^{-1}a) \in G_+$, donc $b \leqslant a$: l'ordre est total puisque a et b quelconques sont comparables.

L'ordre est compatible avec la loi de groupe : si $a \leqslant b$, c'est que $a^{-1}b \in G_+$ donc, $\forall x \in G, (a^{-1}b)x\,x^{-1} \in G_+$, or $(a^{-1}b)x\,x^{-1} = (a^{-1}bx)x^{-1}$, ce produit étant dans G_+, par le 3) on a : $x^{-1}(a^{-1}bx) \in G_+$ soit $(ax)^{-1}(bx) \in G_+$, d'où $ax \leqslant bx$; par ailleurs on a : $xa \leqslant xb$ car ceci équivaut à $(xa)^{-1}xb \in G_+$, soit encore à : $a^{-1}(x^{-1}x)b = a^{-1}b \in G_+$ ce qui est vrai.

Il est alors évident que
$(x \text{ positif}) \Leftrightarrow (e \leqslant x) \Leftrightarrow (e^{-1}x = x \in G_+)$. ■

REMARQUE 5.6. — Si le groupe $(G, \bullet)$ est commutatif, la condition 3 est automatiquement vérifiée.

THÉORÈME 5.7. — *Le groupe* $(\mathbb{Z}, +, \geqslant)$ *est un groupe totalement ordonné.*

Rappelons qu'au chapitre 4 d'algèbre (voir 4.35), on a étendu l'ordre total sur $\mathbb{N}$ en une relation d'ordre total sur $\mathbb{Z}$ de la manière suivante : après construction du symétrisé $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{N}$ pour $+$, soit $z = \overline{(a,b)}$ un relatif quelconque (classe d'équivalence du couple (a,b) d'entiers pour la relation $(a,b)\mathcal{R}(a',b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'$), a et b étant comparables dans $\mathbb{N}$, on a soit $a \geqslant b$, et alors $\exists\, c \in \mathbb{N}$ avec $a = b + c$

d'où $\quad a + 0 = b + c \Leftrightarrow (a,b)\mathcal{R}(c,0)$

$$\Leftrightarrow z = \overline{(c,0)} \text{ identifié à } c;$$

soit $\quad a < b, \text{ donc } \exists c \in \mathbb{N} \text{ avec } b = a + c$

d'où $\quad a + c = b + 0 \Leftrightarrow (a,b)\mathcal{R}(0,c)$

$$\Leftrightarrow z = \overline{(0,c)} = -c.$$

Mais alors dans $(\mathbb{Z}, +)$ d'élément neutre 0 pour l'addition on a une partie identifiée à $\mathbb{N}$, notée par abus $\mathbb{N}$, telle que

1) $\mathbb{N} \cap (-\mathbb{N}) = \{0\}$;

2) $\mathbb{N} + \mathbb{N} \subset \mathbb{N}$; et, comme l'addition est commutative, on a

3) $z + z' \in \mathbb{N} \Leftrightarrow z' + z \in \mathbb{N}$.

Le théorème 5.5 s'applique et nous dit que l'ordre sur $\mathbb{Z}$ obtenu par $a \leqslant b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{N}$ est une relation d'ordre compatible avec l'addition. De plus cet ordre est total car on a rappelé que $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N})$. ■

2. Corps ordonnés, valeur absolue

DÉFINITION 5.8. — *On appelle anneau ordonné tout quadruplet* $(A, +, \cdot, \leqslant)$ *tel que* $(A, +, \cdot)$ *soit un anneau,* $\leqslant$ *une relation d'ordre sur* A *telle que* $(A, +, \leqslant)$ *soit un groupe ordonné et qu'en plus la relation d'ordre soit compatible avec la multiplication par les éléments positifs.*

THÉORÈME 5.9. — *L'anneau* $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leqslant)$ *est un anneau ordonné.*

Car $(\mathbb{Z}, +, \leqslant)$ est un groupe ordonné, puis si on a $x \leqslant y$ c'est-à-dire $y - x$ positif, $\forall z \geqslant 0$ on a $(y - x)z = z(y - x) \geqslant 0$, (les éléments positifs sont ceux de $\mathbb{N}$, stable par produit, (voir 4.41),

donc
$$\begin{aligned} & yz - xz \geqslant 0 \quad \text{et} \quad zy - zx \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow \quad & yz \geqslant xz \quad \text{et} \quad zy \geqslant zx \end{aligned}$$

il y a bien comptabilité pour la multiplication par les éléments positifs. ■

Propriétés des anneaux ordonnés. Soit $A_+ = \{x;\ x \in A, x \geqslant 0\}$, (éléments positifs), et $A- = \{x; x \in A,\ x \leqslant 0\}$. Si A est un anneau ordonné, on a :

5.10. $\forall (x, y) \in A^2$, $\forall z \in A_+$, $(x < y) \Rightarrow (xz \leqslant yz$ et $zx \leqslant zy)$.

5.11. Si l'ordre est total sur A, $A = A_+ \cup A_-$, les éléments de $A_+ - \{0\}$ sont *dits strictement positifs, et de signe* $+$, ceux de $A_- - \{0\}$ *sont strictement négatifs, de signe* $-$ et on a

5.12. la règle des signes :

si x et y sont de même signe, xy est positif

si x et y sont de signe contraire, xy est négatif.

Si $x > 0$ et $y > 0$ on a $xy \geqslant 0y$ soit $xy \geqslant 0$, (compatibilité par multiplication par des éléments positifs), donc xy positif.

Si $x < 0$ et $y < 0$, comme $A_- = -(A_+)$, (notation additive dans le théorème 5.3), on a $-x > 0$ et $-y > 0$ donc $(-x)(-y) \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} \text{Or} \qquad (-x)(-y) + (-x)(y) &= (-x)(-y+y), \text{ (distributivité)} \\ &= (-x)(0) = 0; \\ \text{et} \qquad xy + (-x)(y) &= (x + (-x))y = 0y = 0 \end{aligned}$$

donc en fait $(-x)(-y) = xy =$ opposé de $(-x)(y)$ d'où ici $xy \geqslant 0$: on a bien xy positif.

Enfin, si $x > 0$ et $y < 0$, on a $x > 0$ et $-y > 0$ donc $(x)(-y) \geqslant 0$.

Mais $x(-y) + (xy) = 0$, donc $x(-y)$ est $-(xy)$ et d'après 1) de 5.3, comme $x(-y) \geqslant 0$ c'est que $xy \leqslant 0$: xy est négatif. ∎

THÉORÈME 5.13. — *Un anneau unitaire, totalement ordonné est de caractéristique nulle, si l'anneau est non nul.*

D'abord, vu la règle des signes, dans un anneau ordonné les carrés sont positifs. On suppose l'anneau unitaire. Si 1 est élément neutre du produit, on a $1^2 = 1$ donc $1 \geqslant 0$, mais $1 \neq 0$, (anneau non nul) donc $1 > 0$ en fait.

Mais alors, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $n \cdot 1 > 0$ (car c'est vrai si $n = 1$, et si $p \cdot 1 > 0$ comme $1 > 0$, on aura $p \cdot 1 + 1 \geqslant 0 + 1$, soit $(p+1) \cdot 1 \geqslant 1 > 0$.

Comme il n'existe pas d'entier non nul n vérifiant $n \cdot 1 = 0$ on a bien un anneau de caractéristique nulle, (Théorème 5.32). ∎

DÉFINITION 5.14. — *On appelle corps ordonné tout corps, C, qui, en tant qu'anneau, est un anneau ordonné.*

THÉORÈME 5.15. — *Si un corps K est totalement ordonné, pour tout élément x non nul, x et x^{-1} sont de même signe.*

On peut déjà remarquer que, dans un corps le produit de deux éléments non nuls étant non nul, la règle des signes devient :

5.16. *si x et y sont de même signe, xy est de signe $+$*

si x et y sont de signes contraires, xy est de signe $-$,

car $xy \geqslant 0$ et $xy \neq 0$ donne $xy > 0$, soit de signe $+$.

Soit donc $x \neq 0$, si x et x^{-1} étaient de signes contraires on aurait $1 = x\,x^{-1}$ de signe $-$ or c'est un carré donc il est positif, non nul, donc $x\,x^{-1}$ de signe $+$ d'où x et x^{-1} de même signe. ■

De ce fait la règle des signes s'étend aux quotients.

THÉORÈME 5.17. — *Le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels est un corps totalement ordonné par l'ordre suivant : si q est représenté par le couple $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, on dira que $q \in \mathbb{Q}_+ \Leftrightarrow ab \geqslant 0$.*

Rappelons (voir 5.34) que le corps des fractions de $\mathbb{Z}$ s'obtient en considérant sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ l'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $(a, b)\mathcal{R}(a', b') \Leftrightarrow ab' = a'b$. Donc, pour tout représentant (a, b) ou (a', b') d'un rationnel q on a soit $a = a' = 0$, (si $q = 0$), soit, lorsque $q \neq 0$, a et b ainsi que a' et b' simultanément de même signes ou de signes opposés car si a et b de même signe par exemple $+$, l'égalité $ab' = a'b$ implique, si b' de signe $-$, que ab' est de signe $-$, donc $a'b$ aussi, donc a' de signe $-$ et on traiterait de la même façon les autres cas.

On a donc, pour (a, b) et (a', b') représentants de q, ab et $a'b'$ simultanément dans $\mathbb{Z}_+$ ou dans $\mathbb{Z}_-$.

On peut légitimement poser :

$$\begin{aligned} &q \in \mathbb{Q}_+ \Leftrightarrow q = \text{ classe de } (a, b) \text{ avec } ab \geqslant 0 \\ &\textit{et} \\ &q \in \mathbb{Q}_- \Leftrightarrow q = \text{ classe de } (a, b) \text{ avec } ab \leqslant 0. \end{aligned}$$

1) On a $\mathbb{Q}_+ \cap -(\mathbb{Q}_+) = \{0\}$. Notons $\overline{(a, b)}$ la classe de (a, b). Soit $q \in \mathbb{Q}_+ \cap -(\mathbb{Q}_+)$.

Alors $\exists q' \in \mathbb{Q}_+$ tel que $q = -q'$; si $q' = \overline{(a', b')}$, $-q' = \overline{(-a', b')}$ mais $q' \in \mathbb{Q}_+ \Rightarrow a'b' \geqslant 0$ et $-q' \in \mathbb{Q}_+ \Rightarrow -a'b' \geqslant 0$ d'où $a'b' \in \mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \{0\}$ puisque $\mathbb{Z}$ est un anneau ordonné.

Or $b' \neq 0$, donc $a' = 0$ donc $q' = q = 0$.

2) $\mathbb{Q}_+ + (\mathbb{Q}_+) \subset \mathbb{Q}_+$: soient $q = \overline{(a, b)}$ et $q' = \overline{(a', b')}$ deux éléments de $\mathbb{Q}_+$. On sait que $q + q' = \overline{(ab' + ba', bb')}$. On a $(ab' + ba')bb' = (ab)(b')^2 + (b^2)(a'b')$.

Or $ab \in \mathbb{Z}_+, a'b' \in \mathbb{Z}_+, (q$ et q' dans $\mathbb{Q}_+)$. les carrés b^2 et b'^2 sont positifs et $\mathbb{Z}$ est un anneau ordonné : on a $(ab' + ba')bb' \geqslant 0$ d'où $q + q' \in \mathbb{Q}_+$. Comme $+$ est commutative, le groupe $(\mathbb{Q}, +)$ est déjà un groupe ordonné pour l'ordre : $(q \leqslant q') \Leftrightarrow (q' - q \in \mathbb{Q}_+)$, d'après le théorème 5.5.

Cet ordre est compatible pour la multiplication par des rationnels positifs : car si $q_1 = \overline{(a_1, b_1)}$ et $q_2 = \overline{(a_2, b_2)}$ sont dans $\mathbb{Q}_+$ on a $a_1 b_1 \in \mathbb{Z}_+$

et $a_2b_2 \in \mathbb{Z}_+$. Or q_1q_2 est en particulier la classe de (a_1a_2, b_1b_2). Mais $(a_1a_2)(b_1b_2) = (a_1b_1)\,(a_2b_2)$ est dans $\mathbb{Z}_+$, ($\mathbb{Z}$ est anneau ordonné) donc $q_1q_2 \in \mathbb{Q}_+$.

Conséquence : si $q \leqslant q'$ et $q'' \in \mathbb{Q}_+$ on a $q' - q \in \mathbb{Q}_+$ et $q'' \in \mathbb{Q}_+$

donc $$(q' - q)q'' \in \mathbb{Q}_+ \text{ soit } q'q'' - qq'' \in \mathbb{Q}_+$$
$$\text{soit } q'q'' \leqslant qq''. \qquad \blacksquare$$

Et les réels dans tout cela ? Et la topologie dans tout cela ? Nous y arrivons en introduisant la valeur absolue.

DÉFINITION 5.18. — *On appelle valeur absolue sur un corps K totalement ordonné l'application notée $x \rightsquigarrow |x|$ de K dans K_+ définie par $|x| = x$ si $x \in K_+$ et $|x| = -x$ si $x \in K_-$.*

5.19. *Propriétés de cette valeur absolue* : On a :

1) $\forall x \in K, |x| \geqslant 0$ et $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2) $\forall (x,y) \in K^2, |xy| = |x| \cdot |y|$;

3) $\forall (x,y) \in K^2, ||x| - |y|| \leqslant |x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Tiens, tiens... j'ai déjà vu cela quelque part.

1) Comme, $\forall x \in K,\ |x| \in K_+ = \{y \in K, y \geqslant 0\}$ on a bien $|x| \geqslant 0$. Si $x = 0$, comme $0 \in K_+$, $|0| = 0$, et si $|x| = 0$, c'est que x ou $-x$ est nul, mais $-0 = 0$ donc dans les deux cas $x = 0$.

2) Il y a trois cas de figure à examiner suivant que x et y sont :

a) tous deux dans K_+, alors $xy \in K_+$ et (2) $\Leftrightarrow xy = x\,y$ vrai ;

b) tous deux dans K_-, donc $|x| = -x$, $|y| = -y$, on a vu qu'alors $xy \in K_+$, (règle des signes) donc $|xy| = xy$, et il faut justifier l'égalité $xy = (-x)(-y)$: on l'a vu dans la justification de 5.12 ;

c) l'un, x, dans K_+, l'autre dans K_-, alors $xy \in K_-$ et il faut justifier que $-(xy) = x(-y)$ soit $x(-y) + xy = 0$ or c'est $x(-y+y) = x0 = 0$ vrai.

3) *Justifions d'abord* $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ là encore avec trois cas :

a) si x et y dans K_+, $x+y$ aussi, on a $|x+y| = x+y$ et l'inégalité s'écrit $x+y \leqslant x+y$: vrai ;

b) x et y dans $K_-, x \leqslant 0$, donc $x+y \leqslant 0+y$ or $y \leqslant 0$ donc $x+y \leqslant 0$: l'inégalité s'écrit $-(x+y) \leqslant -x+(-y)$, vérifiée car en fait il y a égalité, $-(x+y) = -x+(-y) =$ opposé de $(x+y)$;

c) x dans K_+, y dans K_-, on peut alors avoir $x+y \in K_+$ ou non :

si $x+y \in K_+$, il faut justifier que $x+y \leqslant x-y$ soit, en ajoutant $-x$ puis y, aux deux membres, que $2 \cdot y \leqslant 0$: vrai car $y \in K_-$, qui est stable par addition ;

si $x+y \in K_-$, on doit prouver que $-x-y \leqslant x-y$, soit en ajoutant x et y aux deux membres, que $0 \leqslant 2 \cdot x$, ce qui est vrai.

On a donc *l'inégalité triangulaire*, de laquelle on va déduire l'inégalité $||x|-|y|| \leqslant |x+y|$ en remarquant d'abord que $\forall y \in K$, comme $-y = (-1)(y)$ et que $|-1| = 1$ on a $|-y| = |-1||y| = |y|$, puis $x = x+y+(-y)$ donne $|x| \leqslant |x+y| + |-y|$ soit $|x| \leqslant |x+y|+|y|$ d'où $|x|-|y| \leqslant |x+y|$, (on ajoute $-|y|$, élément de K, la relation d'ordre étant compatible avec la loi $+$).

Mais de même on aurait $|y|-|x| \leqslant |x+y|$, (ne faisons pas de jaloux : x et y ont le même rôle).

Comme en fait, $||x|-|y||$ est soit $|x|-|y|$ soit son opposé c'est-à-dire $|y|-|x|$ et que ces deux éléments de K sont inférieurs à $|x+y|$, on a bien $||x|-|y|| \leqslant |x+y|$. ■

On peut alors, sur un corps K totalement ordonné, introduire une distance et définir une topologie. On a

DÉFINITION 5.20. — *Soit K un corps totalement ordonné. On appelle distance d sur K, l'application $d : K \times K \mapsto K_+$ définie par :*

$$\forall (x,y) \in K^2, d(x,y) = |x-y|.$$

5.21. On appelle encore *corps valué le corps K totalement ordonné muni de sa valeur absolue.*

5.22. Il est bien clair que les propriétés des distances à valeurs dans $\mathbb{R}$ sont vérifiées car

1) $\forall (x,y) \in K^2,\ d(x,y) \geqslant 0$ et $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2) $\forall (x,y) \in K^2,\ d(x,y) = d(y,x)$,
3) $\forall (x,y,z) \in K^3,\ d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$,

avec des inégalités écrites dans K.

Le 1) est évident. Le 2) vient de :

$d(y,x) = |y-x| = |(-1)(x-y)| = |-1||x-y|$. Comme $-1 \in K_-$ on a $|-1| = -(-1) = 1$, d'où $d(x,y) = d(y,x)$. Quand au 3), on a $d(x,z) = |x-z| = |x-y+(y-z)| \leqslant |x-y| + |y-z|$.

On pourra donc définir des boules ouvertes, (fermées), par

5.23. $\mathcal{B}_0(a,r) = \{x;\ x \in K,\ d(a,x) < r\}$, *ceci pour* $r \in K_+$ d'où l'introduction d'une topologie, celle d'espace métrique, la seule différence étant que les rayons des boules sont les éléments positifs de K, donc ceux de K_+.

Il est clair que tous les raisonnements du chapitre IV, (espaces métriques), ne faisant pas intervenir la structure complète de $\mathbb{R}$ s'appliquent à condition de régler la question d'ordre « métaphysique » suivante :

5.24. *peut-on couper les $\varepsilon > 0$ en deux ou trois..., lorsque ces ε sont dans* K^+. Ne croyez pas que je coupe les cheveux en quatre. C'est le fondement des raisonnements topologiques métriques : s'amuser à couper les ε en morceaux que l'on rajoute.

La réponse est oui (ouf) car si *K est corps totalement ordonné* il est de *caractéristique nulle*, (Théorème 5.13), donc si $\varepsilon \in K_+$, si $n \in \mathbb{N}^*, n \cdot 1$ admet un inverse, noté $\dfrac{1}{n}$, dans K et comme on a vu que $n > 0$, son inverse est de même signe, d'où $\dfrac{1}{n} \cdot \varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{n}$ est encore dans K_+ : les ε, comme les tartes, se coupent en morceaux.

5.25. On définit donc une topologie sur K, associée à cette distance. Cette topologie est séparée. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K converge vers $l \in K$ *si et seulement si,* $\forall \varepsilon \in K_+^*$, *(ou encore* $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in K$), $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0$, $d(l, u_n) \leqslant \varepsilon$; la topologie étant séparée, en cas de convergence cette limite est unique.

Nous allons maintenant aborder le problème de la construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$, en introduisant bien sûr les suites de Cauchy.

3. Complété d'un corps valué archimédien

DÉFINITION 5.26. — *Soit un corps valué K. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K est dite de Cauchy si et seulement si elle vérifie la condition :*

$$\forall \varepsilon > 0, \ (\varepsilon \in K), \ \exists n_0, \ \forall p \geqslant n_0, \ \forall q \geqslant n_0, \ d(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon.$$

Comme à la remarque 4.84, on vérifie qu'une suite de K convergente dans K est de Cauchy, mais la réciproque est fausse.

Prenons par exemple dans $\mathbb{Q}$ la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_n = 1 + \dfrac{1}{1!} + \ldots + \dfrac{1}{n!}$.

Cette suite est de Cauchy car si $p > q$

$$
\begin{aligned}
0 < u_p - u_q &= \frac{1}{(q+1)!} + \ldots + \frac{1}{p!} \\
&\leqslant \frac{1}{(q+1)!}\left(1 + \frac{1}{(q+2)} + \ldots + \frac{1}{(q+2)(q+3)\ldots p}\right),
\end{aligned}
$$

or on a $\dfrac{1}{(q+2)(q+3)\ldots(p)} \leqslant \dfrac{1}{(q+2)^{p-q-1}}$,

puis
$$
\begin{aligned}
S &= 1 + \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(q+2)^{p-q-1}} \\
&= \frac{1 - \dfrac{1}{(q+2)^{p-q}}}{1 - \dfrac{1}{q+2}} < \frac{1}{\dfrac{q+1}{q+2}},
\end{aligned}
$$

donc on a $0 < u_p - u_q < \dfrac{1}{(q+1)!}\dfrac{q+2}{q+1}$, le majorant tend vers 0 (dans $\mathbb{Q}$) si q tend vers $+\infty$, (justification laissée au lecteur), donc $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_+^*$, $\exists n_0$, $\forall q \geqslant n_0$, $\forall p \geqslant q$, $d(u_p, u_q) = |u_p - u_q| \leqslant \varepsilon$: la suite des $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$.

Il en est de même de la suite des $\mathcal{V}_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$, (vérification immédiate). De plus la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, celle des $(\mathcal{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement décroissante, pour $n \geqslant 2$, car

$$
\mathcal{V}_{n+1} - \mathcal{V}_n = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-n-1}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} < 0 \text{ si } n \geqslant 2.
$$

Si $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ existe dans $\mathbb{Q}$, comme $\dfrac{1}{n!} \to 0$, la suite des $\mathcal{V}_n$ convergerait aussi dans $\mathbb{Q}$ vers l et on aurait, $\forall n \geqslant 2$, $u_n < l < \mathcal{V}_n$ vu les monotonies strictes des deux suites.

Mais si l admet $\dfrac{p}{q}$ pour représentant irréductible, avec $q > 0$, on a $q \geqslant 2$, (sinon $q = 1 \Rightarrow l \in \mathbb{Z}$, si la suite converge elle devient constante or elle est strictement croissante). On a donc

$$
u_q < l < \mathcal{V}_q
$$

soit

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{q!}<\frac{p}{q}<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{q!}+\frac{1}{q!}.$$

On multiplie par $q! > 0$, le corps étant ordonné, il vient en posant $a = q!u_q$, entier : $a < p(q-1)! < a+1$, absurde car il n'y a pas d'entier (ici $p(q-1)!$) entre 2 entiers consécutifs, (voir Algèbre 3.33). ■

DÉFINITION 5.27. — *Un corps valué K est dit complet, si toute suite de Cauchy de K converge dans K.*

On vient de voir que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet, et c'est en complétant $\mathbb{Q}$ que l'on va obtenir $\mathbb{R}$. Pour cela on utilisera une propriété de $\mathbb{Q}$, celle d'être archimédien.

DÉFINITION 5.28. — *Un groupe totalement ordonné est archimédien si $\forall x > 0$, $\forall y \geqslant 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx \geqslant y$.*

THÉORÈME 5.29. — *Le groupe additif $(\mathbb{Q},+)$ est archimédien.*

Soient $x > 0$ et $y \geqslant 0$ dans $\mathbb{Q}$, on peut les écrire sous forme $x = \dfrac{p}{q}$ et $y = \dfrac{r}{q}$, en « réduisant » au même dénominateur, avec $q > 0$. On a donc p et r dans $\mathbb{Z}$, avec $p > 0$ et $r \geqslant 0$. Si on justifie l'existence d'un entier n tel que $np \geqslant r$, c'est-à-dire le fait que le groupe additif $\mathbb{Z}$ est archimédien, en multipliant par $\dfrac{1}{q}$, avec $\dfrac{1}{q} > 0$, comme q, on aura bien $n \cdot \dfrac{p}{q} \geqslant \dfrac{r}{q}$.

Or le fait que $(\mathbb{Z},+)$ soit archimédien est évident.

En effet, soit $p > 0$ e $r \geqslant 0$. On a $p \geqslant 1$, car il n'y a pas d'entier entre 0 et 1, (voir Algèbre 3.33); r étant $\geqslant 0$ on a $rp \geqslant r \cdot 1 = r$. Donc on a bien des entiers n tels que $np \geqslant r$.

THÉORÈME 5.30. *Soit K un corps valué archimédien. Il existe un corps $\widetilde{K}$ valué, complet pour la distance associée et tel qu'il existe une injection $i : K \mapsto \widetilde{K}$ vérifiant :*

1) $\forall x \in K,\ |i(x)| = i(|x|)$,

2) $\overline{i(K)} = \widetilde{K}$, adhérence prise pour la distance associée sur $\widetilde{K}$ à sa valeur absolue.

Donc $\widetilde{K}$ est un complété de K, au sens de la définition 4.110. Il convient de remarquer que l'on note $|\ |$ les deux valeurs absolues, sur K et sur $\widetilde{K}$. On notera de même d les deux distances associées.

Une bonne partie du travail a été faite au chapitre 4, § 7, auquel on se référera.

On considère $\mathcal{C} = \{$ suites de Cauchy de $K\}$. Si x et y sont deux éléments de $\mathcal{C}$, de termes généraux x_n et y_n, on définit la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{C}$ par $(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0)$.

Il est facile de vérifier que $\mathcal{R}$ est une équivalence, (voir 4.112).

Soit $\widetilde{K}$ l'ensemble quotient $\mathcal{C}/\mathcal{R}$. On va procéder par étapes.

5.31. Première étape. *On peut munir $\widetilde{K}$ d'une structure de groupe.*

Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux éléments de $\widetilde{K}$, de représentants $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $z_n = x_n + y_n$ est de Cauchy, car $\forall\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in K$, $\exists n_0$, $\forall p \geqslant n_0$, $\forall q \geqslant n_0$, $d(x_p, x_q) \leqslant \varepsilon/2$ et $d(y_p, y_q) \leqslant \varepsilon/2$ car on a deux suites de Cauchy, et on coupe ε en deux, (voir la remarque 5.24, pas si inutile que cela), donc, $\forall p \geqslant n_0, \forall q \geqslant n_0$, on a :

$$d\left((x_p + y_p),\ (x_q + y_q)\right)$$
$$= |x_p + y_p - (x_q + y_q)| \leqslant |x_p - x_q| + |y_p - y_q| \leqslant \varepsilon.$$

De plus, grâce à l'inégalité triangulaire, si x' et y' sont d'autres suites de Cauchy représentant $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ respectivement, les suites $x + y$ et $x' + y'$ sont équivalentes car

$$d\left((x_n + y_n),\ (x'_n + y'_n)\right)$$
$$= |x_n + y_n - (x'_n + y'_n)| \leqslant |x_n - x'_n| + |y_n - y'_n|$$

majorant qui tend vers 0.

Mais alors $x + y$ et $x' + y'$ ayant même classe d'équivalence dans $\mathcal{C}/\mathcal{R}$, si on pose $\mathcal{X} + \mathcal{Y} =$ classe de $(x + y)$ si $x \in \mathcal{X}$ et $y \in \mathcal{Y}$, cette définition a un sens et il est facile de vérifier que $(\widetilde{K}, +)$ est un groupe additif, l'élément nul étant $\mathcal{O} =$ classe de la suite nulle de terme général $a_n = 0, (0 \in K)$, l'opposé de $\mathcal{X}$ classe de x étant la classe de la suite $-x$ des $-x_n$ si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

5.32. Deuxième étape*. On peut munir également $\widetilde{K}$ d'une structure de corps.*

Ici c'est un peu plus délicat. Aussi divisons la difficulté.

LEMME 5.33. – *Une suite de Cauchy $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de K est bornée.*

Soit $\varepsilon \in K_+^*$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall p \geqslant n_0$, $\forall q \geqslant n_0$, $|x_p - x_q| \leqslant \varepsilon$.

En particulier, $\forall p \geqslant n_0$, $|x_p| \leqslant |x_p - x_{n_0}| + |x_{n_0}| \leqslant \varepsilon + |x_{n_0}|$.

Comme K est totalement ordonné, $a = \max\{|x_0|, |x_1|, \dots, |x_{n_0-1}|, \varepsilon + |x_{n_0}|\}$ existe dans K, (c'est l'un de ces éléments) et on a bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leqslant a$. ■

LEMME 5.34. — *Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de Cauchy de K, la suite, produit terme à terme, z, des $z_n = x_n y_n$ est de Cauchy. On note xy cette suite.*

Ces deux suites étant de Cauchy sont bornées donc en fait il existe $a \in K_+^*$, (ou $a > 0$ dans K) tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n| \leqslant a$ et $|y_n| \leqslant a$.

On a par ailleurs, $|x_p y_p - x_q y_q| = |x_p(y_p - y_q) + y_q(x_p - x_q)|$, d'où

$$\begin{aligned}|x_p y_p - x_q y_q| &\leqslant |x_p||y_p - y_q| + |y_q||x_p - x_q|\\ &\leqslant a\left(|y_p - y_q| + |x_p - x_q|\right)\end{aligned}$$

Mais alors, $\forall \varepsilon > 0$, comme $a^{-1} > 0$, $\dfrac{\varepsilon}{2a} = \dfrac{\varepsilon a^{-1}}{2} > 0$, donc, en traduisant le caractère de Cauchy des 2 suites x et y, on a :

$\exists n_0$, $\forall p \geqslant n_0$, $\forall q \geqslant n_0$, $|y_p - y_q| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2a}$ et $|x_p - x_q| \leqslant \varepsilon/2a$ d'où $|x_p y_p - x_q y_q| \leqslant \varepsilon$: la suite des $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans K. ■

LEMME 5.35. — *Si $x\mathcal{R}x'$ et $y\mathcal{R}y'$ on a $(xy)\mathcal{R}(x'y')$. Autrement dit le produit des suites de Cauchy est compatible avec l'équivalence.*

Ce qui permettra la définition d'un produit sur l'ensemble quotient $\widetilde{K}$.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} |x_n - x'_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} |y_n - y'_n| = 0$.

or,
$$\begin{aligned}|x_n y_n - x'_n y'_n| &= |(x_n - x'_n)y_n + x'_n(y_n - y'_n)|\\ &\leqslant |y_n|\,|x_n - x'_n| + |x'_n|\,|y_n - y'_n|,\end{aligned}$$

avec les suites des x'_n et y_n bornés, (lemme 5.33).

Il existe donc $a \in K_+^*$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x'_n| \leqslant a$ et $|y_n| \leqslant a$. Soit alors $\varepsilon > 0$, $\frac{1}{2a} \in K_+^*$ donc $\frac{\varepsilon}{2a} \in K_+^*$, si on traduit les limites nulles, il vient : $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0$, $|x_n - x'_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2a}$ et $|y_n - y'_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{2a}$ d'où, à $\varepsilon > 0$, on a associé n_0, tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|x_n y_n - x'_n y'_n| \leqslant \varepsilon$: on a $\lim\limits_{n \to +\infty} d(x_n y_n, x'_n y'_n) = 0$ d'où l'équivalence des suites de Cauchy xy et $x'y'$. ∎

5.36. *On peut donc, sur l'ensemble quotient $\widetilde{K}$ définir un produit par : $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ = la classe d'équivalence de la suite de Cauchy xy des $x_n y_n$ si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{X}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{Y}$.*

Cette définition a un sens vu le Lemme 5.35, (indépendance par rapport aux représentants choisis), et on vérifie facilement que $(\widetilde{K}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire, l'élément unité étant $\mathbb{1}$ classe de la suite constante égale à 1. Pour achever la deuxième étape, il nous faut obtenir la structure de corps et pour cela définir l'inverse d'un élément $\mathcal{X} \neq \mathcal{O}$ dans $\widetilde{K}$.

LEMME 5.37. — *Soit $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de K qui ne converge pas vers 0. Alors $\exists \alpha > 0$, $(\alpha \in K)$ et $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que*

soit, $\forall n \geqslant n_1, x_n \geqslant \alpha$,

soit, $\forall n \geqslant n_1, x_n \leqslant -\alpha$.

Comme x ne converge pas vers 0, il existe $a > 0, (a \in K)$, tel que $\forall n_0 \in \mathbb{N}$, $\exists n \geqslant n_0$, $d(x_n, 0) = |x_n| \geqslant a$. On peut couper a en deux, (5.24).

Soit $\alpha = \frac{a}{2}$, à cet $\alpha > 0$, comme la suite est de Cauchy, on associe n_0 tel que $\forall p \geqslant n_0$, $\forall q \geqslant n_0$, $d(x_p, x_q) < \alpha$.

A n_0 on associe $n_1 \geqslant n_0$ tel que $|x_{n_1}| \geqslant a$. Mais alors $\forall n \geqslant n_1$, on a $|x_{n_1}| - |x_n| \leqslant ||x_{n_1}| - |x_n|| \leqslant |x_{n_1} - x_n|$, (voir en 5.19 ces propriétés de l'inégalité triangulaire).

Or	n et n_1 sont $\geqslant n_0$, donc $\lvert x_{n_1} - x_n\rvert < \alpha$,
d'où	$\lvert x_{n_1}\rvert - \lvert x_n\rvert < \alpha$, soit $\lvert x_{n_1}\rvert - \alpha < \lvert x_n\rvert$,
avec	$\lvert x_{n_1}\rvert \geqslant 2\alpha$, $(a = 2\alpha)$, il reste $\lvert x_n\rvert > \alpha$, $\forall n \geqslant n_1$.

Mais alors $\forall n \geqslant n_1$, $\forall n' \geqslant n_1$, x_n et $x_{n'}$ sont de même signe, car si on avait $x_n > 0$ et $x_{n'} < 0$ par exemple, alors

$$x_n - x_{n'} \text{ serait égal à } |x_n| + |x_{n'}| \text{ donc serait } > 2\alpha$$

alors que, n et n' étant supérieur à n_0, on a $|x_n - x_{n'}| = d(x_n, x_{n'}) < \alpha$. Finalement, on a bien $\alpha > 0$ et n_1 tel que

$$\begin{array}{llll} \text{soit,} & \forall n \geqslant n_1, & x_n \geqslant \alpha, & \text{si les } x_n \text{ sont tous positifs),} \\ \text{soit,} & \forall n \geqslant n_1, & x_n \leqslant -\alpha, & \text{si les } x_n \text{ sont tous négatifs).} \end{array} \quad \blacksquare$$

LEMME 5.38. — *Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy qui ne converge pas vers 0, (dans K), la suite des $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ définie pour n assez grand est de Cauchy, on la note x^{-1}, c'est la suite inverse de x.*

D'après le lemme 5.37. $\exists \alpha > 0$, $\exists n_1$, $\forall n \geqslant n_1$, $x_n \geqslant \alpha$ ou $x_n \leqslant -\alpha$, donc $x_n \neq 0$. On peut considérer l'inverse $x_n^{-1} = \dfrac{1}{x_n}$, pour $n \geqslant n_1$, et poser $x_n^{-1} = 1$ par excemple si $n < n_1$.

Alors, $\forall p \geqslant n_1$, $\forall q \geqslant n_1$, $d\left(\dfrac{1}{x_p}, \dfrac{1}{x_q}\right) = \left|\dfrac{x_q - x_p}{x_p x_q}\right| \leqslant \dfrac{|x_p - x_q|}{\alpha^2}$ puisque $|x_p| \geqslant \alpha$ et $|x_q| \geqslant \alpha$ donnent $\dfrac{1}{\alpha} \geqslant \dfrac{1}{|x_p|}$ et $\dfrac{1}{\alpha} \geqslant \dfrac{1}{|x_q|}$.

Soit donc $\varepsilon > 0$, $\exists n_\cdot \in \mathbb{N}$ auquel on impose d'être supérieur à n_1, tel que $\forall p \geqslant n_0$, $\forall q \geqslant n_0$, $|x_p - x_q| \leqslant \alpha^2\varepsilon$, (on traduit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy avec $\alpha^2\varepsilon$), donc $\forall p \geqslant n_0$, $\forall q \geqslant n_0$, $d\left(\dfrac{1}{x_p}, \dfrac{1}{x_q}\right) \leqslant \varepsilon$: la suite des $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.

LEMME 5.39. — *Si x et y sont équivalents et si l'une ne tend pas vers 0, alors l'autre ne tend pas vers 0, et les suites inverses x^{-1} et y^{-1} sont équivalentes.*

D'abord si $x\mathcal{R}y$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0$, donc si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, la suite y non plus ne converge pas vers 0. Puis, avec n_1 et α tels que $\forall n \geqslant n_1$, $|x_n| \geqslant \alpha$ et $|y_n| \geqslant \alpha > 0$, on aura :

$\left|\dfrac{1}{x_n} - \dfrac{1}{y_n}\right| = \left|\dfrac{y_n - x_n}{x_n y_n}\right| \leqslant \dfrac{|y_n - x_n|}{\alpha^2}$: majorant qui converge vers 0, comme on l'a vu dans le lemme 5.38, d'où $x^{-1}\mathcal{R}y^{-1}$.

5.40. *Conséquence.* Soit une classe d'équivalence $\mathcal{X}$ de $\widetilde{K}$, non nulle.

Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}$, la suite x ne converge pas vers 0, sinon elle serait équivalente à la suite constante, nulle, qui définit l'élément nul de $\widetilde{K}$.

Si on note $\mathcal{X}^{-1}$ = la classe d'équivalence de la suite inverse x^{-1} définie au lemme 5.38 cette définition a un sens, (lemme 5.39), et il est facile de voir que $\mathcal{X}\,\mathcal{X}^{-1} = \mathcal{X}^{-1}\mathcal{X} = \mathbf{1}$ puisque, $\mathcal{X}\,\mathcal{X}^{-1}$ est la classe de la suite de terme général $x_n \cdot \dfrac{1}{x_n} = 1$, pour n assez grand.

Il est immédiat de vérifier que $\widetilde{K}$ est donc un corps commutatif. ■

On avance ! Nous voici à la

5.41. *Troisième étape.* *On peut munir $\widetilde{K}$ d'une structure de corps totalement ordonné.*

On va définir (voir théorème 5.5) une partie $\widetilde{K}_+$ de $\widetilde{K}$ telle que l'on ait : $\widetilde{K}_+ \cap (-\widetilde{K}_+) = \{\mathcal{O}\}$, $\widetilde{K}_+ + \widetilde{K}_+ \subset \widetilde{K}_+$: le groupe commutatif $(\widetilde{K}, +)$ sera totalement ordonné car on aura en outre $\widetilde{K} = \widetilde{K}_+ \cup (-\widetilde{K}_+)$. Comme le produit de deux éléments de $\widetilde{K}_+$ sera encore dans $\widetilde{K}_+$, l'ordre sera compatible avec le produit par les éléments positifs : on aura un corps totalement ordonné, (voir définitions 5.14 et 5.8).

Soit alors $\mathcal{X} \neq \mathcal{O}$ dans $\widetilde{K}$, si x représente $\mathcal{X}$, on vient de voir en 5.40 que la suite x, de Cauchy, ne converge pas vers 0, donc, (lemme 5.37), $\exists \alpha > 0,\ \alpha \in K$, et $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, tels que :

soit $\forall n \geqslant n_1,\ x_n \geqslant \alpha$, (premier cas),
soit $\forall n \geqslant n_1,\ x_n \leqslant -\alpha$, (deuxième cas).

Si $x' \in \mathcal{X}$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} d(x_n, x'_n) = 0$, en traduisant cela avec $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2}$, (qui existe dans K_+), $\exists n_2$, (auquel on impose d'être $\geqslant n_1$) tel que $\forall n \geqslant n_2$, $d(x_n, x'_n) \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$ soit encore, $\forall n \geqslant n_2$, $-\dfrac{\alpha}{2} \leqslant x_n - x'_n \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$.

Mais alors dans le premier cas,

$$\forall n \geqslant n_2 \text{ on a } x'_n \geqslant x_n - \frac{\alpha}{2} \geqslant \alpha - \frac{\alpha}{2} > 0,$$

(et dans le deuxième, $\forall n \geqslant n_2$ on a $x'_n \leqslant x_n + \dfrac{\alpha}{2} \leqslant -\alpha + \dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{\alpha}{2}$).

5.42. *Conséquence :* *si $\mathcal{X} \neq \mathcal{O}$, pour tout représentant x de $\mathcal{X}$ on a*

soit les x_n deviennent supérieurs à un $\beta > 0$ à partir d'un certain rang, dans ce cas on dira que $\mathcal{X}$ est strictement positif;

soit les x_n deviennent inférieurs à un $\beta < 0$ à partir d'un certain rang, et dans ce cas on dira que $\mathcal{X}$ est strictement négatif.

Si on note $\widetilde{K}_+ = \{\mathcal{O}\} \cup \{\mathcal{X}, \mathcal{X}$ strictement positif $\}$

et $\widetilde{K}_- = \{\mathcal{O}\} \cup \{\mathcal{X}, \mathcal{X}$ strictement négatif$\}$

on vient de voir que $\widetilde{K} = \widetilde{K}_+ \cup \widetilde{K}_-$.

On a $\widetilde{K}_- = -\widetilde{K}_+$. Procédons par double inclusion. Soit $-\mathcal{X}$ avec $\mathcal{X} \in \widetilde{K}_+$. Si $\mathcal{X} = \mathcal{O}, -\mathcal{X} = \mathcal{O}$ est dans $\widetilde{K}_-$. Si $\mathcal{X}$ est non nul, avec x qui représente $\mathcal{X}$ on sait que les x_n deviennent supérieurs à un $\beta > 0$, mais alors les $-x_n$ deviennent inférieurs à $-\beta < 0$, dans K, et comme $-x$ représente $-\mathcal{X}$ on a $-\mathcal{X} \in \widetilde{K}_-$. On a $-\widetilde{K}_+ \subset \widetilde{K}_-$. On justifierait de même l'inclusion $\widetilde{K}_- \subset \widetilde{K}_+$.

On a $\widetilde{K}_+ \cap (-\widetilde{K}_+) = \{\mathcal{O}\}$ car si $\mathcal{X}$ classe de x est dans l'intersection, avec $\mathcal{X} \neq \mathcal{O}$, alors les x_n deviennent tous strictement positifs et négatifs pour n assez grand : c'est absurde. Comme $\mathcal{O} \in \widetilde{K}_+ \cap (-\widetilde{K}_+)$, on a bien $\widetilde{K}_+ \cap (-\widetilde{K}_+) = \{0\}$.

On a $\widetilde{K}_+ + \widetilde{K}_+ \subset \widetilde{K}_+$ car si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont dans $\widetilde{K}_+$, si l'un des deux est nul, $\mathcal{X} + \mathcal{Y}$ est égal à $\mathcal{X}$ ou $\mathcal{Y}$, donc $\mathcal{X} + \mathcal{Y} \in \widetilde{K}_+$, et si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont strictement positifs tous les deux, si x et y représentent ces classes, les x_n et les y_n devenant tous $\geqslant \alpha > 0$, et $\geqslant \beta > 0$, pour n assez grand, on aura dans K corps ordonné, $x_n + y_n \geqslant \alpha + \beta > 0$, et $x_n y_n \geqslant \alpha\beta > 0$, pour n assez grand, d'où $\mathcal{X} + \mathcal{Y} > \mathcal{O}$, et $\mathcal{X}\mathcal{Y} > \mathcal{O}$ aussi.

Comme $\mathcal{X} \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O}$, on a en même temps justifié la compatibilité de l'ordre sur $\widetilde{K}$ avec le produit par les éléments positif de $\widetilde{K}$, *donc $\widetilde{K}$ est un corps totalement ordonné, donc muni d'une valeur absolue, (définition 5.18).* ■

5.43. Quatrième étape. *Il existe une injection $i : K \mapsto \widetilde{K}$ telle que $\forall u \in K$, $|(i(u)| = i(|u|)$, et que pour la topologie métrique sur $\widetilde{K}$, on ait $i(K)$ partout dense dans $\widetilde{K}$.*

Soit $u \in K$, on notera $\overline{u}$ la suite de Cauchy de terme constant $u_n = u$, et $i(u)$ la classe de $\overline{u}$ dans $\widetilde{K}$.

Cette application i est injective car si $i(u) = i(v)$, avec $\overline{u}$ et $\overline{v}$ suites équivalentes, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} d(u_n, v_n) = 0$, or $u_n = u, v_n = v$, c'est que $d(u, v) = 0$ donc $u = v$ dans K métrique.

On a alors $|i(u)| = i(u)$ si cet élément est positif dans $\widetilde{K}$, c'est-à-dire, soit si $i(u) = \mathcal{O}$, mais alors $u =$ constant tend vers 0 : $u = 0$, soit si

$i(u) > \mathcal{O}$: la suite constante $\overline{u}$ à son terme général qui devient > 0 : dans les 2 cas $u \geqslant 0$ dans K donc $|u| = u$ et alors $i(u) = i(|u|)$: on a bien $|i(u)| = i(|u|)$ dans ce cas.

Puis, si $|i(u)| = -i(u)$, c'est que $i(u) \in \widetilde{K}_-$, donc que $i(u) = \mathcal{O}$ mais alors $u = 0$; ou que $\overline{u}$ est une suite constante à termes devenant < 0, donc $u < 0$ dans K.

Dans ces 2 cas $u \leqslant 0$ dans K, donc $|u| = -u$ et $i(|u|) = i(-u) = -i(u)$, (vérification facile) : on a donc $|i(u)| = i(|u|)$ pour tout u de K.

Soit alors $\mathcal{X} \in \widetilde{K}$ représentée par la suite de Cauchy $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \widetilde{d}(i(x_n), \mathcal{X}) = \mathcal{O}$.

Cette densité de $i(K)$ dans K s'exprimant à l'aide de la distance $\widetilde{d}$ sur $\widetilde{K}$, il faut commencer par évaluer celle-ci.

LEMME 5.44. — *Soit $\mathcal{X}$ un élément de $\widetilde{K}$ représenté par la suite de Cauchy $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors la suite notée $|x|$ des $|x_n|$ est de Cauchy et représente $|\mathcal{X}|$.*

Soit d'abord $\mathcal{X} = \mathcal{O}$, classe de la suite identiquement nulle, si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ représente aussi $\mathcal{O}$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} d(x_n, 0) = 0$, avec $d(x_n, 0) = |x_n| = d(|x_n|, 0)$ donc la suite des $|x_n|$ converge aussi vers 0 : elle est de Cauchy et représente $\mathcal{O} = |\mathcal{O}|$.

Puis, si $\mathcal{X} > 0$, c'est qu'il existe $\alpha > 0$ dans K et n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1$, $x_n \geqslant \alpha$, donc $|x_n| = x_n$ pour $n \geqslant n_1$: il est alors évident que la suite des $|x_n|$ est de Cauchy et qu'elle représente $\mathcal{X}$ classe de x, puisque $\forall n \geqslant n_1$, $d(x_n, |x_n|) = 0$.

Comme $\mathcal{X} = |\mathcal{X}|$ dans ce cas, (définition de la valeur absolue dans $\widetilde{K}$ totalement ordonné) on a bien $|\mathcal{X}|$ représenté par $|x|$.

Le cas $\mathcal{X} < 0$ se traiterait de même cas alors $|\mathcal{X}| = -\mathcal{X}$ est représentée par la suite $-x$ des $-x_n$, or il existe $\alpha > 0$ et n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1$, $x_n \leqslant -\alpha$ d'où $|x_n| = -x_n$, (dans K puisque ces éléments sont négatifs) donc la suite des $|x_n|$ représente bien encore $|\mathcal{X}|$.

LEMME 5.45. — *Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux éléments de $\widetilde{K}$ représentés par les suites de Cauchy $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la distance $\widetilde{d}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ est l'élément de $\widetilde{K}$ représenté par la classe de la suite de Cauchy des $|x_n - y_n|$.*

En effet par définition, $\widetilde{d}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = |\mathcal{X} - \mathcal{Y}|$. Or la structure additive de $\widetilde{K}$ est telle que la suite des $x_n - y_n$ représente $\mathcal{X} - \mathcal{Y}$, (5.31), donc (lemme 5.44), celle des $|x_n - y_n|$ représente bien $\widetilde{d}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. ∎

LEMME 5.46. — *Si $\mathcal{X} \in \widetilde{K}$ est représenté par la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \widetilde{d}(i(x_n), \mathcal{X}) = \mathcal{O}$, (limite dans $\widetilde{K}$).*

Soit $\varepsilon \in \widetilde{K}^*_+$, (c'est-à-dire $\varepsilon > \mathcal{O}$ dans $\widetilde{K}$), ε étant la classe dans $\widetilde{K}$ d'une suite de terme général ε_n dans K. On sait qu'il existe $\alpha > 0$ et $n_1 \in \mathbb{N}$, ($\alpha > 0$ dans K) tel que, $\forall n \geqslant n_1$, $\varepsilon_n \geqslant \alpha$. Pour cet $\alpha > 0$ dans K, en traduisant $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy avec $\dfrac{\alpha}{2} > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, (auquel on impose $n_0 \geqslant n_1$) tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\forall m \geqslant n_0$, $|x_n - x_m| \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$.

Mais alors, pour n fixé $\geqslant n_0$ et m variant :
la suite constante des x_n représente $i(x_n)$,
la suite constante des $\dfrac{\alpha}{2}$ représente $i(\dfrac{\alpha}{2})$,
la suite des x_m représente $\mathcal{X}$,
donc la suite des $(|x_n - x_m|)_{m\in\mathbb{N}}$ représente $\widetilde{d}(i(x_n), \mathcal{X})$ (lemme 5.45), et $\forall n \geqslant n_0$ on a $\widetilde{d}(i(x_n), \mathcal{X}) < \varepsilon$, puisqu'il existe $\dfrac{\alpha}{2} > 0$ dans K et n_0 tel que, $\forall m \geqslant n_0$, avait $\varepsilon_m - |x_n - x_m| \geqslant \alpha - \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\alpha}{2} > 0$ dans K, d'où l'inégalité $\varepsilon - \widetilde{d}(i(x_n), \mathcal{X}) > \mathcal{O}$ dans $\widetilde{K}$, l'ordre étant défini en 5.41. ■

Il nous reste à justifier le

LEMME 5.47. — *Le corps $(\widetilde{K}, \widetilde{d})$ est complet.*

Soit en effet $(\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\widetilde{K}$.

Comme $i(K)$ est partout dense dans $\widetilde{K}$ pour $\widetilde{d}$, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver x_n dans K tel que

$$\widetilde{d}(i(x_n), \mathcal{X}_n) \leqslant i\left(\frac{1_K}{n+1}\right),$$

($\dfrac{1_K}{n+1}$ est l'inverse dans le corps K de $(n+1)1_K$, avec 1_K élément neutre pour le produit, dans K).

La suite des $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans K. D'abord on a :

$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $i(d(x_p, x_q)) = \widetilde{d}(i(x_p), i(x_q))$, car $d(x_p, x_q) = |x_p - x_q|$ est le terme constant d'une suite représentant $\widetilde{d}(i(x_p), i(x_q))$, (lemme 5.45), donc
$i(d(x_p, x_q)) \leqslant \widetilde{d}(i(x_p),\ \mathcal{X}_p) + \widetilde{d}(\mathcal{X}_p, \mathcal{X}_q) + \widetilde{d}(\mathcal{X}_q, i(x_q))$.

Soit alors $\varepsilon > 0$ dans K, et son image $i(\varepsilon) > 0$ dans $\widetilde{K}$, la suite $(\mathcal{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, à $i\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{1}{3}i(\varepsilon)$ en fait, on associe n_0 tel que $\forall p \geqslant n_0$, $\forall q \geqslant n_0$, $\widetilde{d}(\mathcal{X}_p, \mathcal{X}_q) < \frac{i(\varepsilon)}{3}$, puis K étant archimédien, (il faut bien que cela serve, voir définition 5.28), il existe n_1 tel que $n_1\frac{\varepsilon}{3} \geqslant 1_K$, (ordre dans K) d'où *a fortiori* $\forall p \geqslant n_1$, $\frac{1_K}{p+1} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ dans K, donc $i\left(\frac{1_K}{p+1}\right) \leqslant i\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) = \frac{i(\varepsilon)}{3}$.

Finalement, $\forall p \geqslant \sup(n_0, n_1)$, $\forall q \geqslant \sup(n_0, n_1)$, on aura $\widetilde{d}(i(xp), \mathcal{X}_p) \leqslant i(\frac{1_K}{p+1}) \leqslant \frac{i(\varepsilon)}{3}$ et $\widetilde{d}(\mathcal{X}_p, \mathcal{X}_q) \leqslant \frac{i(\varepsilon)}{3}$, d'où finalement $i(d(x_p, x_q)) < i(\varepsilon)$ d'où l'on déduit l'inégalité $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ dans le corps K puisque les suites constantes des $d(x_p, x_q)$ et ε représentent $i(d(x_p, x_q))$ et $i(\varepsilon)$, vu la définition de l'ordre dans $\widetilde{K}$, (voir 5.41).

Soit $\mathcal{X}$ la classe d'équivalence dans $\widetilde{K}$, de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \widetilde{d}(\mathcal{X}_n, \mathcal{X}) = \mathcal{O}$, (dans $\widetilde{K}$), ce qui prouvera bien que la suite de Cauchy dans $\widetilde{K}$ des $\mathcal{X}_n$, converge dans $\widetilde{K}$ muni de la distance $\widetilde{d}$.

En fait, $\forall n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}\widetilde{d}(\mathcal{X}_n, \mathcal{X}) &\leqslant \widetilde{d}(\mathcal{X}_n, i(x_n)) + \widetilde{d}(i(x_n), \mathcal{X}) \\ &\leqslant i\left(\frac{1_K}{n+1}\right) + \widetilde{d}(i(x_n), \mathcal{X}),\end{aligned}$$

d'après le choix des x_n dans K.

Soit $\varepsilon > \mathcal{O}$ dans $\widetilde{K}$, si ε est représenté par la suite de Cauchy des ε_n de K, on a vu qu'il existe $\alpha > 0$ dans K et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\varepsilon_n \geqslant \alpha$, d'où $\varepsilon \geqslant i(\alpha)$ en fait.

On a alors vu qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \geqslant n_1$, $\frac{1_K}{n+1} < \frac{\alpha}{2}$, (vient de K archimédien) d'où $i\left(\frac{1_K}{n+1}\right) < i\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Puis, pour n fixé et m variant on a : la suite constante (par rapport à m) de terme général x_n représente $i(x_n)$ celle des x_m représente $\mathcal{X}$, donc toujours pour n fixé et m variant, celle des $|x_n - x_m|$ représente $\widetilde{d}(i(x_n), \mathcal{X}) = |i(x_n) - \mathcal{X}|$ (Lemme 5.45). Mais alors, si on traduit le fait que la suite x des x_n est de Cauchy, à $\frac{\alpha}{2}$ on associe n_2 tel que $\forall p \geqslant n_2$, $\forall q \geqslant n_2$ $|x_p - x_q| \leqslant \frac{\alpha}{2}$.

Soit alors n fixé $\geqslant n_2$, $\widetilde{d}(i(x_n), \mathcal{X})$ est l'élément de $\widetilde{K}$ représente par la suite des éléments $\left(|x_n - x_q|\right)_{q\in\mathbb{N}}$, éléments tous $\leqslant \dfrac{\alpha}{2}$ si $q \geqslant n_2$, il en résulte que $\widetilde{d}(i(x_n), \mathcal{X}) \leqslant i\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

Finalement, $\forall n \geqslant \sup(n_1, n_2)$ on aura :

$$\widetilde{d}(\mathcal{X}_n, \mathcal{X}) \leqslant i\left(\frac{1_K}{n+1}\right) + \widetilde{d}(i(x_n), \mathcal{X}) \leqslant i\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

soit $\leqslant \dfrac{1}{2}(i(\alpha)) + i(\alpha)) = i(\alpha) \leqslant \varepsilon$: ce qui achève la justification du théorème 5.30. ■

THÉORÈME 5.48. — *Le corps $\widetilde{K}$ ainsi construit est archimédien.*

En effet, soit $\mathcal{X} > 0$ dans $\widetilde{K}$, et $\mathcal{Y} \geqslant 0$. On cherche à justifier l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \cdot \mathcal{X} \geqslant \mathcal{Y}$. D'abord, si $\mathcal{Y} = \mathcal{O}, n = 1$ convient.

Puis si x représente $\mathcal{X}$ et y représente $\mathcal{Y}$, la suite de Cauchy y est bornée dans K (Lemme 5.33) : il existe $\beta \in K$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n \leqslant \beta$. De plus $\mathcal{Y} \geqslant 0$ exclut le fait d'avoir $\beta < 0$ donc $\beta \geqslant 0$, (K totalement ordonné).

Puis $\mathcal{X} \neq \mathcal{O} \Rightarrow \exists \alpha > 0$ dans K, $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0$, $x_n \geqslant \alpha$, (Lemme 5.37 appliqué à x qui ne converge pas vers 0 dans K).

Enfin, dans K archimédien, $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $p\alpha \geqslant \beta$ donc *a fortiori*, $(p+1)\alpha \geqslant \beta + \alpha$.

Mais alors on a $(1+p) \cdot \mathcal{X} > \mathcal{Y}$ car $(1+p) \cdot \mathcal{X} - \mathcal{Y}$ admet, parmi ses représentants, la suite Cauchy des $(1+p) \cdot x_n - y_n$ avec,

$$\forall n \geqslant n_0, (1+p)x_n \geqslant (1+p)\alpha \geqslant \beta + \alpha \text{ et } y_n \leqslant \beta \Rightarrow -y_n \geqslant -\beta$$

d'où $(1+p) \cdot x_n - y_n \geqslant \alpha$:

c'est bien la définition de $(1+p)\mathcal{X} - \mathcal{Y} > \mathcal{O}$, (voir 5.42). ■

Tout ce que nous venons de voir s'applique en prenant comme corps de départ $\mathbb{Q}$. On note $\mathbb{R}$ le corps $\widetilde{\mathbb{Q}}$ construit. Ses éléments sont appelés réels. L'injection i de $\mathbb{Q}$ dans $\widetilde{\mathbb{Q}}$ permet d'identifier le réel $i(q)$ avec q, pour tout rationnel q. On dit *qu'on a plongé $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}$ apparaît comme un corps ordonné archimédien complet pour la distance d, (au lieu de $\widetilde{d}$), associée à cet ordre, et tel que $\mathbb{Q}$ soit partout dense dans $\mathbb{R}$.*

On va pouvoir maintenant justifier la propriété de $\mathbb{R}$ admise dans les premiers chapitres, à savoir que tout ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, ce qui nous a permis, (voir 2.13), de justifier que les segments $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ sont compacts, ou (Théorème 3.5)), que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les seuls connexes de $\mathbb{R}$.

Mais avant de faire cela, et d'établir d'autres propriétés de $\mathbb{R}$, on peut justifier que :

THÉORÈME 5.49. — *Tout corps commutatif archimédien complet est isomorphe à $\mathbb{R}$.*

On peut donc dire qu'une propriété vraiment réelle fait intervenir la structure de corps ordonné, et l'aspect complet de la topologie associée.

Voici les grandes lignes de la justification.

Soit K corps commutatif archimédien complet. Etant archimédien, il est totalement ordonné, (définition 5.28) donc de caractéristique nulle (Théorème 5.13).

Soit donc $\mathbf{1}_K$ l'élément unité de K, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \cdot 1_K \in K$, mais les opposés de ces éléments sont aussi dans K : $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \cdot 1_K \in K$.

On définit $\theta : \mathbb{Z} \mapsto K$ par $\theta(n) = n \cdot 1_K$: θ est un morphisme de groupe additif.

Par ailleurs on va considérer ici que l'on a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, ces inclusions étant en fait les plongements successifs d'un demi-groupe dans son symétrisé et de $\mathbb{Q}$ dans son complété $\widetilde{\mathbb{Q}}$.

Les éléments $n \cdot 1_K$, pour $n \neq 0$ ont des inverses dans le corps K, et on peut noter $\dfrac{1_K}{n}$ l'inverse $(n \cdot 1_K)^{-1}$ de $n \cdot 1_K$, d'où l'existence, $\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ de l'élément $p \cdot \dfrac{1_K}{q}$ encore noté $\left(\dfrac{p}{q}\right) 1_K$ dans K et en posant, $\forall r \in \mathbb{Q}$, si $r = \dfrac{p}{q}$, $\theta(r) = \dfrac{p}{q} \cdot 1_K$ on définit *un morphisme d'anneau injectif de $\mathbb{Q}$ dans K*. (Il est clair que si $\dfrac{p'}{q'} = r$ également, c'est que $p'q = pq'$ alors $q(p' \cdot 1_K) = q'(p \cdot 1_K)$ d'où $(p' \cdot 1_K) = \dfrac{1}{q}(q'(p \cdot 1_K))$ et $\dfrac{1}{q'}(p' \cdot 1_K) = \dfrac{1}{q}(p \cdot 1_K)$ d'où l'indépendance du choix du représentant). On vérifie facilement que θ est un morphisme d'anneaux injectif de $\mathbb{Q}$ dans K.

On a donc identifié $\mathbb{Q}$ à un sous-corps $\theta(\mathbb{Q})$ de K. Pour passer aux réels, il nous faut comparer les distances sur $\mathbb{Q}$ et $\theta(\mathbb{Q})$ donc les valeurs absolues, donc les relatives d'ordre. Or 1 et 1_K étant positifs dans $\mathbb{Q}$ et K respectivement, (ce sont des carrés) on a $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n \cdot 1_K$ positif si $n \in \mathbb{N}$, (compatibilité de l'ordre avec l'addition) d'où, si $n < 0$ dans $\mathbb{Z}$,

$-n \in \mathbb{N} \Rightarrow -(n \cdot 1_K) \in K_+$ donc $n \cdot 1_K$ négatif dans K et finalement, $\forall n \in \mathbb{Z}$), $(n \cdot 1_K > 0) \Leftrightarrow (n \in \mathbb{N}^*)$.

De même, avec $n \neq 0$, dans le corps K, $n \cdot 1_K$ et son inverse $(n \cdot 1_K)^{-1} = \frac{1}{n} \cdot 1_K$ sont de même signe (Théorème 5.15) : propriété des corps ordonnés, et vu la façon de définir l'ordre sur $\mathbb{Q}$, (Théorème 5.17), on vérifie que r dans $\mathbb{Q}$ est positif si et seulement si il admet un représentant $\frac{p}{q}$ avec $p \geqslant 0$ et $q > 0$, (dans $\mathbb{Z}$), mais alors $\frac{1_K}{q}$ est positif, (comme $q \cdot 1_K$) dans K, et $p \cdot \frac{1_K}{q}$ aussi, d'où $\theta(r) \geqslant 0$ dans $\theta(\mathbb{Q})$.

Conséquence ici : $\forall (r, s) \in \mathbb{Q}^2$, $|r - s| = |\theta(r) - \theta(s)|$, *les valeurs absolues étant prises respectivement dans* $\mathbb{Q}$ *et* K.

5.50. *On peut alors étendre θ en un morphisme injectif de $\mathbb{R}$ sur un sous corps de K.*

En effet soit x un réel, il est limite d'une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels puisque $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. Cette suite convergente dans $\mathbb{R}$ est de Cauchy, et comme $d(r_p, r_q) = d(\theta(r_p), \theta(r_q))$ la suite des $(\theta(r_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans K (il suffit de l'écrire pour le voir). Comme K est complet, la suite des $\theta(r_n)$ converge dans K. Soit l sa limite. Si $(r'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite qui converge vers x dans $\mathbb{R}$, on aura $l' = \lim\limits_{n\to+\infty} \theta(r'_n)$ existe aussi dans K, mais de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} |(r_n - r'_n| = 0$, dans $\mathbb{R}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |\theta(r_n) - \theta(r'_n)| = |l - l'| = 0$ dans K : la limite de toutes les suites $(\theta(r_n))_{n\in\mathbb{N}}$, si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels convergent vers x réel, ne dépend que de x.

On posera donc $\theta(x) =$ la limite d'une suite $(\theta(r_n))_{n\in\mathbb{N}}$, avec $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathbb{Q}$ qui converge vers x réel.

θ est un morphisme de corps. C'est facile à vérifier car si les suites r_n et s_n convergent vers x et y réels, les suites $r_n + s_n$ d'une part et $r_n s_n$ d'autre part convergent vers $x + y$ et xy donc

$$\theta(x + y) = \lim_{n\to+\infty} \theta(r_n + s_n), \text{ et } \theta(xy) = \lim_{n\to+\infty} \theta(r_n s_n),$$

avec $\theta(r_n + s_n) = \theta(r_n) + \theta(s_n)$ et $\theta(r_n s_n) = \theta(r_n)\theta(s_n)$ car θ est un morphisme de $\mathbb{Q}$ sur $\theta(\mathbb{Q})$. Enfin l'inégalité triangulaire, et le fait que les suites de Cauchy sont bornées, donne

$$\lim_{n\to+\infty}(\theta(r_n)\theta(s_n)) = \left(\lim_{n\to+\infty}\theta(r_n)\right)$$
$$\left(\lim_{n\to+\infty}\theta(s_n)\right) = \theta(x)\theta(y).$$

et $\lim_{n\to+\infty}(\theta(r_n)\theta(s_n) = \left(\lim_{n\to+\infty}\theta(r_n)\right)$
$$\left(\lim_{n\to+\infty}\theta(s_n)\right) = \theta(x)\theta(y).$$

θ est injectif. Soit en effet x non nul dans $\mathbb{R}$.

Si $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de rationnels représentant x, il existe $\alpha > 0$ dans $\mathbb{Q}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geqslant n_0$, $|r_n| > \alpha$, mais alors $\theta(\alpha) > 0$ dans K et, $\forall n \geqslant n_0$, $d(0, \theta(r_n)) > \theta(\alpha)$ donc $\theta(x) = \lim_{n\to+\infty}\theta(r_n)$ dans K n'est pas nul dans K.

Enfin θ est surjectif : c'est-à-dire tout élément de K est une limite d'éléments de $\theta(\mathbb{Q})$ en fait. Le côté archimédien de K va revenir.

Soit $x \in K$, d'abord $x = 0_K = \theta(0) \in \theta(\mathbb{R})$.

Si $x > 0$, (dans K). Soit $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{n+1}\cdot 1_K$ est > 0 dans K, donc il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p\cdot\dfrac{1_K}{n+1} \geqslant x$. L'ensemble des entiers p vérifiant cette inégalité étant non vide, admet une plus petite valeur p_0, et $x > 0 \Rightarrow p_0 > 0$ donc $p_0 - 1 \in \mathbb{N}$, et on a $(p_0-1)\cdot\dfrac{1_K}{n+1} < x \leqslant p_0\dfrac{1_K}{n+1}$.

Soit $r_n = p_0\dfrac{1_K}{n+1}$, on a $d(r_n, x) = |r_n - x| < \left|\dfrac{1_K}{n+1}\right| = \dfrac{1_K}{n+1}$ (ordre sur $\theta(\mathbb{Q})$ prolonge celui de $\mathbb{Q}$).

La suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans K car $\forall\varepsilon > 0$ dans $K, \exists n_0$, $\dfrac{2\cdot 1_K}{n_0+1} < \varepsilon$, alors $\forall p \geqslant n_0$, $\forall q \geqslant n_0$, $\dfrac{1_K}{q+1} + \dfrac{1_K}{p+1} \leqslant \dfrac{2\cdot 1_K}{n_0+1} < \varepsilon$ d'où *a fortiori*, $|r_p - r_q| \leqslant |r_p - x| + |x - r_q| < \varepsilon$. Mais, avec $r_n = \dfrac{p_0}{n+1}\cdot 1_K = \theta\left(\dfrac{p_0}{n+1}\right)$, en posant $s_n = \dfrac{p_0}{n+1}$, la suite des s_n est une suite de $\mathbb{Q}$ cette fois, et comme on a vu que pour un rationnel q on a $|q| = |\theta(q)|$, (valeurs absolues prises dans $\mathbb{Q}$ et K respectivement) on $|s_p - s_q| = |r_p - r_q|$ donc la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, donc dans $\mathbb{R}$, elle converge alors vers x' réel.

On a $\theta(x') = x$. En effet $\theta(x')$ est la limite, dans K, de la suite des $\theta(s_n)$, $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $\mathbb{Q}$ qui converge vers x' sur $\mathbb{R}$, vu la définition de

θ. Puis les $\theta(s_n)$, c'est-à-dire les r_n, convergent dans K vers x. En effet, on a : $\forall \varepsilon > 0$ dans $K, \exists n_1, \forall n \geqslant n_1, \dfrac{1_K}{n+1} \leqslant \varepsilon$, (toujours K archimédien, ce qui donne n_1, tel que $n_1\varepsilon > 1_K$), d'où $d(x, r_n) \leqslant \varepsilon$, pour $n \geqslant n_1$.

L'unicité de la limite d'une suite dans K métrique donc séparé finalement $\theta(x') = x$.

Mais alors, on a bien un isomorphisme θ de $\mathbb{R}$ sur K : on peut donc dire qu'à un isomorphisme près *il n'existe qu'un corps archimédien complet.* ■

4. Quelques propriétés de $\mathbb{R}$

THÉORÈME 5.51. — *Dit des segments emboîtés. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, avec $\forall n, b_n \geqslant a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ est un singleton.*

Car les $F_n = [a_n, b_n]$ sont des fermés de $\mathbb{R}$ métrique, (F_n est la boule fermée de centre $\dfrac{b_n + a_n}{2}$ de rayon $\dfrac{b_n - a_n}{2}$, c'est un fermé vu les propriétés topologiques métriques). Vu la monotonie des suites on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, enfin le diamètre, $b_n - a_n$, des F_n tend vers 0 : dans $\mathbb{R}$ complet, l'intersection des F_n est un singleton (Théorème 4.101 dont on reprend la justification.). ■

On dit encore que :

5.52. *Les 2 suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes* et dans ce cas elles convergent vers la même limite, l'élément de $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.

THÉORÈME 5.53. *Tout ensemble non vide majoré de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

Rappelons qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dite majorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A$, $x \leqslant m$; un tel élément est alors un majorant de A, et on appellera borne supérieure de A l'élément m_0 de $\mathbb{R}$, (s'il existe) qui est majorant de A, et plus petit majorant, donc tel que $\forall m_1 < m_0$, $\exists a \in A$, $m_1 < a$, ce qui traduit le fait que m_1 n'est plus majorant.

On définirait de même une partie minorée, et les termes de minorant et de borne inférieure de A.

Soit ici A non vide et majorée : il existe $a_0 \in A$ et il existe b_0 majorant de A. On a donc $a_0 \leqslant b_0$.

Si $a_0 = b_0$, b_0 est borne supérieure de A puisque tout $m < b_0$ ne serait plus majorant de A, car m serait strictement inférieur à a_0.

5.54. *Notons donc que, si un majorant de A est dans A c'est la borne supérieure de A*

Si $a_0 < b_0$, soit $c_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$, milieu de $[a_0, b_0]$: on a soit c_0 est majorant de A, alors on posera $a_1 = a_0, \in A$ et $b_1 = c_0$ majorant de A;

soit c_0 non majorant de A, donc il existe $a_1 \in A$ avec $c_0 < a_1$, dans ce cas on pose $b_1 = b_0$, on a $a_1 \leqslant b_1 = b_0$, (car b_0 majore A).

On a donc obtenu un nouveau segment $[a_1, b_1]$ avec $a_1 \geqslant a_0$ et $a_1 \in A$ $b_1 \leqslant b_0$ et b_1 majorant de A, et $|a_1 - b_1| \leqslant \dfrac{|a_0 - b_0|}{2}$.

On refait le même travail à partir de $[a_1, b_1]$ avec soit $a_1 = b_1$, (et c'est la borne supérieure), sinon, en considérant le milieu $\dfrac{a_1 + b_1}{2} = c_1$, on distingue les 2 cas c_1 majorant ou non de A, d'où construction d'un nouveau segment $[a_2, b_2]$ avec $a_2 \geqslant a_1$, et $a_2 \in A$, $b_2 \leqslant b_1$ et b_2 majorant de A, et de plus $b_2 - a_2 \leqslant \dfrac{b_1 - a_1}{2} \leqslant \dfrac{(b_0 - a_0)^2}{2^2}$.

5.55. Si a chaque étape, on a $a_n < b_n$, par ce procédé *de dichotomie* on construit une suite $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ de segments emboîtés de longueur tendant vers 0, (car, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n \geqslant n$, et $\mathbb{R}$ archimédien implique $\dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ tend vers 0), le théorème 5.51 nous dit que dans ce cas $\displaystyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{m_0\}$ est un singleton.

On a m_0 borne supérieure de A car : si m_0 non majorant, il existerait $a \in A$, avec $a > m_0$, en prenant $\varepsilon = \dfrac{a - m_0}{2}$, comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} b_n = m_0$ $\exists n_1, \forall n \geqslant n_1$ $m_0 \leqslant b_n \leqslant m_0 + \varepsilon = \dfrac{a + m_0}{2} < a$, mais alors les b_n, majorant de A seraient $< a$ avec $a \in A$: absurde.

Puis, si $m_1 < m_0$, m_1 est non majorant de A, car avec $\varepsilon = \dfrac{m_0 - m_1}{2}$, en traduisant cette fois $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n = m_0$, $\exists n_2, \forall n \geqslant n_2$, on ait $m_0 - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant m_0$.

Or $m_1 < \dfrac{m_0 + m_1}{2} = m_0 - \dfrac{m_0 - m_1}{2} \leqslant a_n$: on a bien des a_n de A strictement supérieurs à m_1.

Donc m_0 est borne supérieure de A. Dans le cas où, à une étape, on obtient $a_n = b_n$, c'est qu'un élément a_n de A est en même temps majorant de A : c'est la borne supérieure vu la remarque 5.54. ■

On aurait de même.

COROLLAIRE 5.56. — *Tout ensemble non vide, minoré, de réels, admet une borne inférieure.*

Attention, contrairement au cas de $\mathbb{N}$, ces bornes ne sont pas forcément atteintes : par exemple 0, borne inférieure de $A = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est pas atteinte.

COROLLAIRE 5.57. — *Une suite croissante $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels est convergente si et seulement si elle est majorée et dans ce cas $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ est la borne supérieure de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.*

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle est de Cauchy, donc bornée (lemme 5.33), et en particulier majorée. De plus si m est la borne supérieure de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leqslant m$, (majorant) et $\forall \varepsilon > 0$, $m - \varepsilon$ n'est plus majorant (m est le plus petit majorant), donc $\exists n_0$, $m - \varepsilon < u_{n_0}$, par croissance on a donc, $\forall n \geqslant n_0$ la double inégalité $m - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant m$. Donc $m = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. La topologie, métrique de $\mathbb{R}$ étant séparée, $l = m$.

Réciproquement : on vient de justifier que si m, borne supérieure de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ existe, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = m$.

On aurait de même :

COROLLAIRE 5.58. — *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de réels est convergente si et seulement si elle est minorée*, (la limtie étant la borne inférieure de l'ensemble des u_n). ■

On ne saurait clore ce chapitre de construction de $\mathbb{R}$ sans méditer sur la question suivante : les réels ne seraient-ils pas un peu... « irréels ».

Il ne s'agit pas seulement d'un propos « d'après Chateau d'Yquem » comme, certains collègues et néanmoins amis pourraient le penser, mais d'une remarque liée au fait qu'on ne connaît aucun phénomène physique représenté par $\mathbb{R}$, même pas... le temps, sur la nature duquel on ne sait rien et que l'on admet pouvoir représenter par $\mathbb{R}$.

Quant à dire que $\sqrt{2}$, ou π,... existent, oui, ils existent dans $\mathbb{R}$ que l'on a construit, mais qu'est ce qu'un carré « physique » ? Et si la matière est corpusculaire, (à caractère fini) quelle est la réalité de sa diagonale ?

Ce propos, amusant, est d'autant plus intéressant que par contre, les complexes, construits à partir de $\mathbb{R}$ ne sont pas, eux, si complexes que cela, et que beaucoup de situations sont plus claires dans $\mathbb{C}$ que dans $\mathbb{R}$, (réduction des endomorphismes en dimension finie, analycité des fonctions...), comme nous le verrons par la suite.

EXERCICES

1. Soit G un groupe topologique, c'est-à-dire un groupe G muni d'une topologie telle que la loi de composition soit continue de $G \times G$ dans G, ainsi que l'application qui à un élément de G associe son inverse. Montrer qu'un sous-groupe ouvert est fermé. Nature des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$.

2. Soit f uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe a et b réels positifs tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \leqslant a|x| + b.$$

3. Soit E un espace métrique. Montrer que $f : \mathbb{R} \mapsto E$, continue et ayant une limite quand x tend vers $+\infty$ et vers $-\infty$, est uniformément continue.
Montrer que f périodique continue est uniformément continue, $f(: \mathbb{R} \mapsto E)$.

4. Soit f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, $(a < b)$, telle que

$$\forall x \in]a, b[, \ \exists \varepsilon_x \in]0, \ \inf(x-a, b-x)[, \qquad f(x) = \frac{1}{2}[f(x+\varepsilon_x) + f(x-\varepsilon_x)].$$

Montrer que f est affine.

5. Soit E l'ensemble des matrices symétriques carrées d'ordre p, réelles. On l'ordonne par $(A \leqslant B) \Leftrightarrow$ ($B - A$ est matrice d'une forme quadratique positive). Montrer qu'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante majorée de matrices symétriques est convergente.

6. Soit f une fonction continue d'un cercle dans une droite. Montrer qu'il existe deux points diamétralement opposés du cercle, ayant même image.

7. Soit $E = \mathbb{Q} \cap [0, \dfrac{1}{\pi}]$. Etudier la continuité, la continuité uniforme de $f : E \mapsto \mathbb{R}$ qui a x associé $\dfrac{1}{1-\pi x}$.

8. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 + x - \dfrac{x}{1+|x|}$.
Vérifier qu'elle est 1. Lipschitzienne, mais non contractante.

9. Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si x est irrationnel et $f(r) = \dfrac{1}{q}$ si $r = \dfrac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$.
Etude de la continuité de f.

10. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.
a) Montrer que $f(x) \leqslant x$.
b) En déduire $f(y) + x \leqslant f(x) + y$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, puis que $f(x) = x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

11. Etude de la fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et $f(x) = \dfrac{1}{E\left(\dfrac{1}{x^2}\right)}$ si $x \neq 0$, où $E(t)$ désigne le seul p de $\mathbb{Z}$ tel que $p \leqslant t < p+1$.

12. Pour $x \geqslant 0$, on note $E(x)$ la partie entière de x et $r(x) = x - E(x)$. Soit f de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, continue, telle que $\forall (x,y) \in [0,+\infty[^2$, $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.
1) Montrer que pour $x \geqslant 0$ et $a > 0$ on a
$f(x) \leqslant E(\dfrac{x}{a}) f(a) + f\left(ar(\dfrac{x}{a})\right)$.

2) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \inf\{\dfrac{f(a)}{a};\ a>0\}$.

13. Soit g de $]0,1]$ dans $[-1,1]$ telle que $\lim\limits_{x\to 0+} g(x) = 0$.
Montrer qu'il existe g_1 et g_2 continues de $[0,1]$ dans $[-1,1]$, nulles en 0, g_1 décroissante et g_2 croissante, vérifiant $g_1(x) \leqslant g(x) \leqslant g_2(x)$ pour tout x de $]0,1]$.

14. Déterminer $f : [0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$, continue, telle que $\forall (x,y) \in ([0,+\infty[)^2$, $f(x)+f(y) = f(\sqrt[n]{x^n+y^n})$, n fixé dans $\mathbb{N}^*$.

15. Trouver les fonctions f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y)f(x-y) = (f(x))^2\,(f(y))^2.$$

16. Déterminer les intervalles I de $\mathbb{R}$ et les fonctions f de I dans $\mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ f(x)+f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

17. Existence d'une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = \exp(x^2/2)\cos(f(x))$.

18. Soit $f :]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ croissante telle que $g : x \rightsquigarrow \dfrac{f(x)}{x}$ soit décroissante, montrer que f et g sont continues sur $]0,+\infty[$.

SOLUTIONS

1. Soit un groupe G noté additivement.
Comme l'application $(x,y) \rightsquigarrow x+y$ est continue de $G\times G$ dans G, les translations sont continues car, pour a fixé dans G on a : $x \rightsquigarrow (x,a)$ continue de G dans G^2 (applications composantes continues) d'où $x \rightsquigarrow x+a$ continue de G dans G, soit δ_a, translation à droite par a continue. Il en est de même de $\gamma_a : x \rightsquigarrow a+x$, translation à gauche. Ce sont des homéomorphismes, puisque $(\delta_a)^{-1} = \delta_{-a}$ et $(\gamma_a)^{-1} = \gamma_{-a}$.
Soit alors H sous-groupe ouvert de G, $\mathcal{R}$ l'équivalence définie par
$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (x-y \in H) \Leftrightarrow (x \in H+\{y\} = \delta_y(H))$.

Les classes d'équivalence sont donc des ouverts, (image d'un ouvert par un homéomorphisme) et comme on a une partition $G = H\cup$ ($\cup$ des autres classes d'équivalence) en deux ouvets, H est un fermé.
La structure de corps ordonné est fondamentale sur $\mathbb{R}$ d'où l'idée de s'intéresser au signe des éléments non nuls.
Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. On peut avoir $H = \{0\}$.
Sinon, $\exists h \neq 0$ dans H, d'où soit $h > 0$, soit $h < 0$ mais alors $-h$ est dans H et $-h > 0$. On suppose donc $H \neq \{0\}$ et on considère l'ensemble non vide $H_+^* = \{h > 0, h \in H\}$. Cet ensemble non vide, minoré par 0, admet une borne inférieure a, qui peut être nulle ou non.
1^er^ cas $a > 0$.
L'élément a est dans H_+^*, car a est d'abord adhérent à H_+^*, et si a $\notin H_+^*$, c'en est un point d'accumulation.
Mais alors il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments distincts de H_+^*, qui converge vers a, et avec $\varepsilon \in]0, \dfrac{a}{2}[$ et n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|a - h_n| < \varepsilon$, en fixant n et n' supérieurs à n_0, on aurait $0 < |h_n - h_{n'}| \leqslant 2\varepsilon < a$, (si $n \neq n'$) d'où $h_n - h_{n'}$, ou $h_{n'} - h_n$ dans H_+^*, strictement inférieur à la borne inférieure a : c'est absurde.
Comme $a \in H$, $a\mathbb{Z} \subset H$, et si $b \in H$, la division euclidienne de b par a donne q dans $\mathbb{Z}$ et $r \in [0, a[$ tels que $b = aq + r$ mais $q \cdot a \in H$, (sous-groupe additif) d'où $r = b - aq \in H$ et comme $0 < r < a$ est exclu on a $r = 0$ d'où $b \in a\mathbb{Z}$ et $H = a\mathbb{Z}$.

2^e^ cas $a = 0$, 0 est donc point d'accumulation de H_+^*, (car adhérent à H_+^* et non dans H_+^*), donc il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H, tous > 0 et tous distincts qui converge vers 0.
Soit alors $x \in \mathbb{R}$, n fixé, il existe un seul $q \in \mathbb{Z}$ tel que

$$q \cdot h_n \leqslant x < q \cdot h_n + h_n,$$

donc $$x_n = q \cdot h_n \text{ est dans } H \text{ et } |x - x_n| < h_n$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$: x est adhérent à H, d'où $\overline{H} = \mathbb{R}$. Comme $\{0\} = 0 \cdot \mathbb{Z}$, finalement un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit du type $a\mathbb{Z}$, soit partout dense dans $\mathbb{R}$.

2. On va traduire la continuité uniforme.
Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x - y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.
En particulier, $\forall x \in [-\alpha, \alpha]$, $|f(x)| \leqslant |f(0)| + \varepsilon$.
Sur $[\alpha, 2\alpha]$, f ne varie pas plus de ε par rapport à $f(\alpha)$ et comme $|f(\alpha)| \leqslant |f(0)| + \varepsilon$, on a :

$$\forall x \in [\alpha, 2\alpha], \ |f(x)| \leqslant |f(0)| + 2\varepsilon,$$

mais de même

$$\forall x \in [-2\alpha, -\alpha], \ f(x) \leqslant |f(0)| + 2\varepsilon,$$

$f(x)$ ne variant pas plus de ε de $f(-\alpha)$ avec $|f(-\alpha)| \leqslant |f(0)| + \varepsilon$.

Par une récurrence immédiate on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [n\alpha, (n+1)\alpha] \cup [-(n+1)\alpha, -n\alpha],$$
$$|f(x)| \leqslant |f(0)| + (n+1)\varepsilon.$$

Pour ces x, on a $n\alpha \leqslant |x| \leqslant (n+1)\alpha$ d'où en fait

$$n \leqslant \frac{|x|}{\alpha} \text{ et } |f(x)| \leqslant (|f(0)| + \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\alpha}|x|.$$

3. Soit $l = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $l' = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Soit $\varepsilon > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geqslant A \Rightarrow d(l, f(x)) \leqslant \varepsilon/2$

et $\forall x \leqslant -A \Rightarrow d(l', f(x)) \leqslant \varepsilon/2$

Mais alors, $\forall (x, y) \in [A, +\infty[^2$ on a $d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$

et $\forall (x, y) \in]-\infty, -A]^2$ on a $d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$.

On considère le compact $[-A-1, A+1]$, sur ce compact f continue est uniformément continue donc au même $\varepsilon > 0$ on associe $\alpha > 0$ tel que $(x, y) \in [-A-1, A+1]^2$ et $|x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$.
Soit $\eta = \inf(1, \alpha, A)$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $|x-y| \leqslant \eta$.
Si x, (ou y) est dans $[-A, A]$, les 2 réels x et y sont dans $[-A-1, A+1]$ et $|x-y| \leqslant \eta \leqslant \alpha \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$.
Si ni x, ni y ne sont dans $[-A, A]$ comme $|x-y| \leqslant A$, on ne peut pas avoir l'un de ces réels $\leqslant -A$ et l'autre $\geqslant A$ donc ils sont soit tous les deux $\geqslant A$, soit tous les deux $\leqslant -A$ et dans les deux cas $d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$.
On a finalement : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta \geqslant 0,\ |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$ donc f est uniformément continue.
Si on suppose f $T\cdot$ périodique, continue, la continuité sur le compact $[-1, T+1]$ est uniforme. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, (on impose $\alpha < 1$), tel que $\forall (x, y) \in [-1, T+1]^2,\ |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow d(f(x) f(y)) \leqslant \varepsilon$.
Soient x et y réels quelconques vérifiant $|x-y| \leqslant \alpha$. Il existe un seul $n \in \mathbb{Z}$ tel que $nT \leqslant x < nT + T$ et alors $y \in [nT - 1, nT + T + 1]$.
Posons $x = nT + x'$ et $y = nT + y'$, on a x' et y' dans $[-1, T+1]$ et $|x' - y'| = |x - y| \leqslant \alpha$ d'où $d(f(x'), f(y')) \leqslant \varepsilon$ soit, (f $T\cdot$ périodique), $d(f(x), f(y)) \leqslant \varepsilon$. C'est bien la continuité uniforme de f.

4. Si f est affine, elle doit joindre les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ donc coïncider avec $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(a) + \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$. On doit donc justifier que $\varphi = f - g$ est nulle sur $[a, b]$, sachant que φ, (comme f) vérifie la condition de l'énoncé, (à vérifier, g étant affine) et que de plus $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

La fonction φ, continue sur $[a, b]$ compact est bornée et atteint ses bornes, m et M, (inférieure et supérieure).

Soit $A = \varphi^{-1}(M)$, c'est un fermé non vide de $[a, b]$, donc un compact de bornes inférieures et supérieures x_0 et x_1.
Si $x_0 = a$, $M = \varphi(x_0) = 0$, si $x_0 = b$ on a aussi $M = 0$.
Si $a < x_0 < b$, $\exists \varepsilon_{x_0} > 0$ tel que $2\varphi(x_0) = f(x_0 + \varepsilon_{x_0}) + f(x_0 - \varepsilon_{x_0})$.
Or $2\varphi(x_0) = 2M, f(x_0 + \varepsilon_{x_0} \leqslant M$, (borne supérieure de φ) mais

$$f(x_0 - \varepsilon_{x_0}) < M \text{ car } x_0 = \inf\left(\varphi^{-1}(M)\right).$$

On obtient donc $2M < 2M$, c'est absurde.
Donc $x_0 = a$ ou b et $M = 0$.

On justifie de même que $m = 0$ en considérant le compact $B = \varphi^{-1}(m)$ et ses bornes inférieures et supérieures. Finalement $\varphi = 0$ d'où f affine.

5. On a une relation d'ordre sur E car $A - A = 0$ est matrice de la forme quadratique nulle, donc $A \leqslant A$: on a réflexivité.

Si $A \leqslant B$ et $B \leqslant A$, $\forall X$ vecteur colonne d'ordre p, on a ${}^tX(B - A)X \geqslant 0$ et $\leqslant 0$ donc c'est nul : la matrice $B - A$ associée à la forme quadratique nulle est elle-même nulle, d'où $B = A$ et l'antisymétrie.
Enfin si $A \leqslant B$ et $B \leqslant C$, pour tout X vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$ on a

$${}^tX(C-A)X = {}^tX(C-B+B-A)X = {}^tX(C-B)X + {}^tX(B-A)X \geqslant 0$$

comme somme de deux réels positifs, d'où $C - A$ matrice symétrique d'une forme quadratique positive et $C \geqslant A$: il y a transitivité.

On est dans un espace vectoriel de dimension $\dfrac{p(p+1)}{2}$ sur $\mathbb{R}$, donc normé avec toutes les normes équivalentes.
On suppose que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée, donc que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \leqslant A_{n+1} \leqslant B$, B matrice symétrique fixée. Mais alors, $\forall$ vecteur colonne X de $\mathbb{R}^p$, on a

$$\begin{aligned}&{}^tX(B - A_{n+1})X \geqslant 0 \text{ et } {}^tX(A_{n+1} - A_n)X \geqslant 0 \text{ d'où}\\&{}^tXA_nX \leqslant {}^tXA_{n+1}X \leqslant {}^tXBX.\end{aligned}$$

La suite réelle, des $({}^tXA_nX)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée donc convergente.
Posons $Q(X) = \lim\limits_{n\to+\infty} {}^tXA_nX$. On définit ainsi une forme quadratique Q, car :

$$Q(X+Y) - Q(X-Y) = \lim_{n\to+\infty} \left[{}^t(X+Y)A_n(X+Y) - {}^t(X-Y)A_n(X-Y)\right]$$

et la bilinéarité du second membre en X et Y donne celle du premier; de même on justifie que $Q(\lambda X) = \lambda^2 Q(X)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si q_{ij} est le terme général de la forme Q dans la base canonique de $\mathbb{R}^p$, on a $q_{ij} = \dfrac{1}{4}(Q(e_i + e_j) - Q(e_i - e_j))$. Avec E_i et E_j vecteurs colonnes associés à e_i et e_j, on a

$$\begin{aligned} q_{ij} &= \frac{1}{4} \lim_{n\to+\infty} \left[{}^t(E_i+E_j)A_n(E_i+E_j) - {}^t(E_i-E_j)A_n(E_i-E_j) \right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(a_{ij}^{(n)} \right) \end{aligned}$$

avec $a_{ij}^{(n)}$ terme général de la matrice A_n et finalement les matrices A_n tendent vers Q symétrique pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}^{\frac{p(p+1)}{2}}$.

6. On peut considérer le cercle comme l'ensemble des points du plan complexe définis par $\Gamma = \{ae^{it}, t \in [0, 2\pi]\}$, $a > 0$, et la droite $D = \{c + bx;\ x \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{C} - \{0\}\}$, et finalement on a une fonction continue g de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $t \rightsquigarrow$ le x associé à $f(ae^{it})$, si f est continue de Γ dans D.
On relie les points diamétralement opposés en considérant la fonction h : $t \rightsquigarrow g(t+\pi) - g(t)$. Elle est continue, et $h(0) = g(\pi) - g(0)$ alors que $h(\pi) = g(2\pi) - g(\pi) = g(0) - g(\pi) = -h(0)$ (g est $2\pi\cdot$ périodique). Comme $h(0)h(\pi) \leqslant 0$ c'est que soit h s'annule en 0 ou π, soit h s'annule en un point de $]0, \pi[$, d'où f qui prend finalement même valeur en au moins deux points diamétralement opposés.

7. La fonction $g : x \rightsquigarrow 1 - \pi x$ est continue de E dans $\mathbb{R}$ (car $\pi\cdot$ Lipschitzienne). Elle ne s'annule pas sur E, (car $\frac{1}{\pi}) \notin E$) donc la fonction $x \rightsquigarrow \dfrac{1}{g(x)}$ est continue sur E, car c'est $h \circ g$ avec $h : \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}$ définie par $t \rightsquigarrow \dfrac{1}{t}$.
Mais g n'est pas uniformément continue, sinon l'image d'une suite de Cauchy de E serait de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

Comme il existe des rationnels r_n de E, qui dans R convergent vers $\dfrac{1}{\pi}$, (traduire $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$), une telle suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, les $g(r_n) = \dfrac{1}{1-\pi r_n}$ ne forment pas une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$, sinon $\lim\limits_{n\to+\infty} g(r_n)$ existerait dans $\mathbb{R}$, or cette limite est $+\infty$.

8. Si f était contractante, $\mathbb{R}$ étant complet, elle aurait un point fixe. Or $x = 1 + x - \dfrac{x}{1+|x|} \Leftrightarrow x = 1 + |x|$.
Une telle égalité est impossible si $x < 0$, et s'écrit $x = 1 + x$ si $x \geqslant 0$: il n'y a pas de point fixe donc f n'est pas contractante.
Pour justifier que f est $1\cdot$ Lipschitzienne, il faut distinguer les cas x et y de même signe ou pas.
Si x et y sont $\geqslant 0$, comme sur $[0, +\infty[$, $f(x) = 1 + x - \dfrac{x}{1+x}$ on a $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(1+x)^2} \in [0, 1[$, donc par accroissements finis, f est $1\cdot$ Lipschitzienne sur $]0, +\infty[$.
De même sur $]-\infty, 0]$, $f(x) = 1 + x - \dfrac{x}{1-x}$ d'où $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{(1-x)^2}$ et on a encore $f'(x) \in [0, 1[$ puisque $x \leqslant 0$.

Il reste le cas $xy < 0$: par exemple $x > 0, y < 0$, alors

$$f(x) - f(y) = x(1 - \frac{1}{1+x}) - y(1 - \frac{1}{1-y}) = \frac{x^2}{1+x} + \frac{y^2}{1-y}$$
$$= \frac{x^2 - x^2y + y^2 + xy^2}{(1+x)(1-y)} = \frac{xy(y-x) + x^2 + y^2}{(1+x)(1-y)}.$$

Donc $|f(x) - f(y)| < \dfrac{xy(y-x)}{(1+x)(1-y)} + \dfrac{x^2y^2 - 2xy}{(1+x)(1-y)}$, car $-2xy > 0$ ainsi que $(1+x)(1-y)$ vu les signes de x et y, et $xy(y-x) \geqslant 0$.

C'est encore $\quad |f(x) - f(y)| < \dfrac{(x-y)(-xy) + (x-y)^2}{(1+x)(1-y)}$

$$< (x-y)\left(\frac{x-y-xy}{1+x-y-xy}\right).$$

Comme x, $-y$ et $-xy$ sont > 0, le rapport $\dfrac{x-y-xy}{1+x-y-xy} \in]0,1[$ donc on a bien $|f(x) - f(y)| < |x-y|$ ce qui achève la justification de f 1.Lipschitzienne.

9. Si x_0 est rationnel, avec $x_0 = \dfrac{p}{q}$, $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, p et q premiers entre eux, on a $f(x_0) = \dfrac{1}{q} > 0$, or dans tout voisinage de x_0 il y a des irrationnels tels que $f(x) = 0$: si $\varepsilon = \dfrac{1}{2q}$, il n'existe aucun voisinage $V(x_0)$ tel que $\forall x \in V(x_0)$, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$: f est discontinue en chaque rationnel.

Si x_0 est irrationnel, soit $\varepsilon > 0$, $\exists q_0 \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{q_0} < \varepsilon$. Si on trouve un voisinage $V(x_0)$ ne contenant aucun rationnel du type $\dfrac{p}{q}$ avec $q < q_0$, pour tout x de $V(x_0)$ on aura $f(x) = 0$ ou $= \dfrac{1}{q}$ avec $q \geqslant q_0$; comme $f(x_0) = 0$, on aura $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Or pour chaque $q = 1, 2, \ldots, q_0 - 1$, il existe un seul $p(q)$ tel que $\dfrac{p(q)}{q} < x_0 < \dfrac{p(q)+1}{q}$, inégalités strictes car x_0 irrationnel. Soit alors $\alpha_q = \inf\{(x_0 - \dfrac{p(q)}{q}),\ (\dfrac{p(q)+1}{q} - x_0)\}$ puis $\alpha = \inf\{\alpha_q,\ q = 1, 2, \ldots, q_0 - 1\}$.

Sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ les x sont soit irrationnels, soit du type $\dfrac{p}{q}$ irréductible mais avec $q \geqslant q_0$, donc $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$: f est continue en x_0 irrationnel.

10. a) On a $f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) \leqslant f(\frac{x}{2}) + f(\frac{x}{2})$ soit $f(x) \leqslant 2f(\frac{x}{2})$.

Mais alors $f(\frac{x}{2}) \leqslant 2f(\frac{x}{2^2}) \Rightarrow f(x) \leqslant 2^2 f(\frac{x}{2^2})$ et on justifie par récurrence, que, $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) \leqslant 2^n f(\frac{x}{2^n})$; c'est encore
$f(x) \leqslant x \cdot \frac{2^n}{x} f(\frac{x}{2^n})$ si $x \neq 0$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{2^n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(\frac{x}{2^n})}{\frac{x}{2^n}} = 1$, d'où l'inégalité $f(x) \leqslant x$, pour tout $x \neq 0$, en passant à la limite quand n tend vers l'infini.
Pour $x = 0$, avec $x = y = 0$ on a $f(0) \leqslant 2f(0)$ soit $0 \leqslant f(0)$, puis x et $y = -x$, avec $x \neq 0$ conduit à

$$f(0) = f(x - x) \leqslant f(x) + f(-x) \leqslant x + (-x) = 0.$$

Donc $f(0) = 0$ et on a bien $f(x) \leqslant x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
b) On a alors :

$$f(y) = f(y + x - x) \leqslant f(y + x) + f(-x) \leqslant f(x) + f(y) + (-x)$$

d'où $$f(y) + x \leqslant (f(x) + f(y) \leqslant f(x) + y.$$

Si on traduit $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ 0 < |x| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{x} - 1 \right| < \varepsilon$$

soit encore $|f(x) - x| < \varepsilon |x|$ d'où $|f(x)| < (\varepsilon + 1)|x|$, si $0 < |x| < \alpha$.
Il en résulte que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
Mais alors, dans l'inégalité $f(y) + x \leqslant f(x) + y$, si x est fixé et si y tend vers 0, il vient $x \leqslant f(x)$, d'où finalement $f(x) = x$ pour tout x réel.

11. La fonction f est paire. On a, pour $x > 0$, $E(\frac{1}{x^2}) = p \Leftrightarrow p \leqslant \frac{1}{x^2} < p + 1$ soit, pour $p > 0$, c'est encore si $\frac{1}{p+1} < x^2 \leqslant \frac{1}{p}$ ou $\frac{1}{\sqrt{p+1}} < |x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{p}}$.
Pour $p = 0$, $E(\frac{1}{x^2}) = 0$ équivaut à $\frac{1}{x^2} < 1$, soit $|x| > 1$.

Donc f est nulle sur $]1, +\infty[$, constante égale à $\frac{1}{p}$ sur l'intervalle $]\frac{1}{\sqrt{p+1}}, \frac{1}{\sqrt{p}}]$, pour $p \geqslant 1$. Elle est donc continue à gauche en chaque $\frac{1}{\sqrt{p}}$ mais discontinue à droite. Sur $]-\infty, 0[$ on conclut par parité.

Mais en 0, f est continue car, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, $\forall p \geqslant p_0,\ \frac{1}{p} \leqslant \varepsilon$, mais alors, si $|x| < \frac{1}{\sqrt{p_0}}$, on aura toujours $f(x)$ du type $\frac{1}{p}$ avec $p \geqslant p_0$, donc $|f(x) - f(0)| = |f(x)| \leqslant \varepsilon$.

On peut remarquer que si $x \in]\frac{1}{\sqrt{p+1}}, \frac{1}{\sqrt{p}}]$, on a $\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{px}$ dans $[\frac{\sqrt{p}}{p}, \frac{\sqrt{p+1}}{p}[$, avec p qui tend vers l'infini si x tend vers 0 donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ existe : f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

12. 1) On a, par récurrence, $f(x+ny) \leqslant f(x) + nf(y)$ car c'est vrai si $n = 1$, et si on suppose l'inégalité vérifiée pour n, on aura $f(x+(n+1)y) = f((x+ny)+y) \leqslant f(x+ny) + f(y) \leqslant f(x) + nf(y) + f(y)$ soit encore $f(x+(n+1)y) \leqslant f(x) + (n+1)f(y)$: c'est le résultat à l'ordre $n+1$.

Soit alors $x \geqslant 0, a > 0$, on a $\frac{x}{a} = E(\frac{x}{a}) + r(\frac{x}{a})$ donc $x = E(\frac{x}{a})a + ar(\frac{x}{a})$ et, $E(\frac{x}{a})$ étant un entier, en appliquant le résultat précédent avec $E(\frac{x}{a}) = n$:

$$f(x) \leqslant E(\frac{x}{a})f(a) + f(a\,r(\frac{x}{a})).$$

2) On a déjà $\frac{f(x)}{x} \geqslant \inf\{\frac{f(a)}{a}, a > 0\}$, cet inf pouvant être $-\infty$. On suppose d'abord que $\beta = \inf\{\frac{f(a)}{a}, a > 0\}$ est réel.

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists a_0$ tel que $\frac{f(a_0)}{a_0} \leqslant \beta + \varepsilon$.

On applique le 1) avec a_0, et on divise par x, il vient : $\forall x > 0$,

$$\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{a_0}{x} E\left(\frac{x}{a_0}\right)\frac{f(a_0)}{a_0} + \frac{1}{x} f\left(a_0 r(\frac{x}{a_0})\right).$$

Or $r(\frac{x}{a_0}) \in [0, 1[$, donc $a_0 r(\frac{x}{a_0}) \in [0, a_0]$ compact, sur lequel f continue est bornée, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} f\left(a_0 r(\frac{x}{a_0})\right) = 0$.

Puis $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_0}{x} E(\frac{x}{a_0}) = 1$, car si $\frac{x}{a_0} \in [n, n+1[$, $n > 0$, on a $\frac{a_0}{x} E(\frac{x}{a_0}) \in]\frac{n}{n+1}, 1]$, et si x tend vers $+\infty$, n tend vers $+\infty$, donc $\frac{n}{n+1}$ tend vers 1.

Finalement, $\forall x > 0$, $\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{a_0}{x} E(\frac{x}{a_0})(\beta + \varepsilon) + \frac{1}{x} f\left(a_0 r(\frac{x}{a_0})\right)$ le majorant tendant vers $\beta + \varepsilon$ si x tend vers $+\infty$, donc au même $\varepsilon > 0$, on associe x_0, $\forall x \geqslant x_0$, $\frac{f(x)}{x} \leqslant \beta + 2\varepsilon$, d'où en fait :

$$\forall x \geqslant x_0,\ \beta \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \beta + 2\varepsilon \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \beta.$$

Si $\inf\{\frac{f(a)}{a},\ a > 0\} = -\infty$, (cas de $f(x) = -x^2$ par exemple) on fait le même calcul avec un $B < 0$ quelconque, $\exists a_0$, $\frac{f(a_0)}{a_0} \leqslant B$, on a un majorant qui tend vers B et devient $\leqslant B+1$ si x assez grand. Comme $B<0$ est quelconque, on a encore $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$.

13. On traduit $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ à l'aide d'une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 0 en décroissant strictement, avec $\varepsilon_0=1$.
A chaque ε_n on associe $\alpha_n>0$ tel que $x\in]0,\alpha_n]\Rightarrow |g(x)|<\varepsilon_n$. On peut en fait imposer, par récurrence, $\alpha_{n+1}<\inf(\alpha_n,\varepsilon_{n+1})$ donc la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit strictement vers 0, et sur $[\alpha_{n+1},\alpha_n]$ on a $|g(x)|<\varepsilon_n$.
Pour $n\geqslant 1$, sur $[\alpha_{n+1},\alpha_n], g_2$ est la fonction affine joignant les points $(\alpha_{n+1},\varepsilon_n)$ et $(\alpha_n,\varepsilon_{n-1})$ alors que g_1 elle joint les points $(\alpha_{n+1},-\varepsilon_n)$ et $(\alpha_n,-\varepsilon_{n-1})$.
Sur $[\alpha_1,1]$ on posera $g_2(t)=1$ et $g_1(t)=-1$.
Enfin $g_1(0)=g_2(0)=0$. On a ainsi g_1 et g_2 continues, (ne pas oublier que $\varepsilon_0=1$), g_1 décroissante et g_2 croissante, encadrant g.

14. Ce genre d'exercice se traite souvent en cherchant la fonction sur $\mathbb{N}$ puis $\mathbb{Z}$ puis $\mathbb{Q}$ et en passant à $\mathbb{R}$ par continuité puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Vu l'allure, on introduit $g : t \rightsquigarrow f\left(\sqrt[n]{t}\right)$, de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. Elle sera continue si f l'est, et la formule $f(x)+f(y)=f\left(\sqrt[n]{x^n+y^n}\right)$ devient, en posant $x^n=s$ et $y^n=t$:

$$\forall(s,t)\in\mathbb{R}_+ : f\left(\sqrt[n]{s}\right)+f\left(\sqrt[n]{t}\right)=f\left(\sqrt[n]{s+t}\right) \text{ soit encore}$$

$$\boxed{1} \qquad g(s)+g(t)=g(s+t).$$

On sait que g doit être linéaire, car dans $\boxed{1}$, si $t=0$ on a $g(s)+g(0)=g(s)$ d'où $g(0)=0$; puis en posant $g(1)=a$ par récurrence on obtient $g(n)=na$ pour tout n de $\mathbb{N}$, (vrai si $n=1$ et si $g(n)=n\cdot a$, $g(n+1)=g(n)+g(1)=na+a$); d'où $g(n-n)=g(0)=0=g(n)+g(-n)\Rightarrow g(-n)=-g(n)$ donc $\forall p\in\mathbb{Z}$ on obtient $g(p)=p\cdot a$.
Comme $g(q\cdot\frac{1}{q})$ avec $q\in\mathbb{N}^*$, vaut $q\cdot g(\frac{1}{q})$, (grâce à $\boxed{1}$) on a $g(\frac{1}{q})=\frac{1}{q}g(1)=\frac{a}{q}$, d'où l'on déduit $g(r)=ra$ pour tout r de $\mathbb{Q}$ et par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $g(x)=ax$. En revenant au problème $f\left(\sqrt[n]{x}\right)$ est du type ax donc $f(t)$ du type at^n.

15. Avec $x=y=0$, on a $(f(0))^2=(f(0))^4$ donc $(f(0))^2=0$ ou 1 d'où $f(0)=0,1$ ou -1.
Si f est solution, $-f$ est solution.
Avec x quelconque et $y=0$ on obtient $(f(x))^2=(f(x))^2(f(0))^2$ donc si f n'est pas identiquement nulle, $\exists x$ tel que $f(x)\neq 0$ d'où $f(0)=\pm1$.
La fonction $f=0$ est solution. On l'écarte et quitte à changer f en $-f$ on suppose que $f(0)=1$.
Alors avec $x=y$, on a $f(2x)=(f(x))^4$, donc f est à valeurs positives ou nulles. En fait f reste à valeurs strictement positives car si on a b tel que

$f(b)=0$, avec $x=y=\dfrac{b}{2}$ il vient $f(b)f(0)=0=\left(f(\dfrac{b}{2})\right)^4$ d'où $f(\dfrac{b}{2})=0$ et par récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $f(\dfrac{b}{2^n})=0$. Comme f est continue, on aura $f(0)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(\dfrac{b}{2^n})=0$ c'est absurde.

Donc $f(0)=1\Rightarrow f(x)>0$ pour tout x.

Avec $x=y$ on a $f(2x)=(f(x))^4=(f(x))^{2^2}$.

Puis avec $2x$ et x on a

$$\begin{aligned} f(3x)f(x) &= (f(2x))^2\,(f(x))^2\\ &= (f(x))^8\,(f(x))^2 \end{aligned}$$

et comme $f(x)>0$ il reste $f(3x)=(f(x))^9=(f(x))^{3^2}$.

Supposons que $f(nx)=(fx))^{n^2}$, avec $n\in\mathbb{N}^*$, soit vrai jusqu'au rang p. (C'est vrai si $p=2$ et 3).

Alors

$$f(nx+x)f(nx-x)=(f(nx))^2\,(f(x))^2$$

soit

$$f((n+1)x)\cdot(f(x))^{(n-1)^2}=(f(x))^{2n^2+2}$$

donc

$$f((n+1)x)=(f(x))^{2n^2+2-1+2n-n^2}=(f(x))^{(n+1)^2}.$$

On a donc $f(nx)=(f(x))^{n^2}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ en fait.

Si on pose $f(1)=a$, cela conduit à $f(n)=a^{(n^2)}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

La fonction f est paire car

$$f(x-x)f(x+x)=(f(x))^2\,(f(-x))^2 \text{ donne, avec } f(0)=1,$$
$$(f(x))^4=(f(x))^2\,(f(-x))^2 \text{ d'où } (f(-x))^2=(f(x))^2$$

et f restant à valeurs positives, $f(-x)=f(x)$.

Donc, $\forall n\in\mathbb{Z},\ f(n)=a^{(n^2)}$.

Puis avec $q\in\mathbb{N}^*$ on a $f(q\cdot\dfrac{1}{q})=\left(f(\dfrac{1}{q})\right)^{q^2}=f(1)=a$ d'où $f(\dfrac{1}{q})=a^{1/q^2}$.

Mais alors, $\forall r=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ on a $f(r)=f(p\cdot\dfrac{1}{q})=\left(f(\dfrac{1}{q})\right)^{p^2}=a^{\frac{p2}{q2}}$ et l'égalité $f(r)=a^{(r^2)}$ valable sur $\mathbb{Q}$ partout dense dans $\mathbb{R}$ donne, f étant continue, $f(x)=a^{(x^2)}$ sur $\mathbb{R}$.

Les solutions sont donc $f = 0$ et les fonctions du type $x \rightsquigarrow \varepsilon a^{(x^2)}$ avec $\varepsilon = 1$ ou -1.

16. L'intervalle I doit être tel que $xy = -1$ est exclu avec $(x, y) \in I^2$. La fonction f étant dérivable, on dérive la relation en x d'où

$$f'(x) = \frac{1-y^2}{(1+xy)^2} f'\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

Donc si 1 ou -1 est dans I, $f'(x) = 0$ sur I, f est constante et cette constante k vérifie $k + k = k$, d'où $k = 0$.

On a donc comme solutions, *I intervalle quelconque et $f = 0$ sur I* (c'est vraiment une solution !).

Si on écarte ce cas, I doit être dans $]-\infty, -1[$ ou $]-1, 1[$ ou $]1, +\infty[$.

Si $I \subset]1, +\infty[$, pour $x > 1$ et $y > 1$ on a $\dfrac{x+y}{1+xy} < 1$ car c'est équivalent à $x+y-xy-1 < 0$ soit $x(1-y)+y-1 < 0$ ou encore $(x-1)(1-y) < 0$: vrai. La relation ne peut pas être vérifiée, $\dfrac{x+y}{1+xy}$ ne restant pas dans I.

Si $I \subset]-\infty, -1[$, pour $x < -1$ et $y < -1$, on a $1 + xy > 0$ et alors $\dfrac{x+y}{1+xy} > -1$ car

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x+y > -1-xy \\
&\Leftrightarrow x+1+y(1+x) > 0 \text{ soit} \\
&\Leftrightarrow (x+1)(y+1) > 0 \text{ ce qui est vrai !}
\end{aligned}$$

Là encore il n'y a pas de solution.

Il reste à examiner *le cas de $I \subset]-1, 1[$*, alors $|xy| < 1 \Rightarrow 1 + xy \neq 0$, et d'autre part $\dfrac{x+y}{1+xy} \in]-1, 1[$ car $\left(\dfrac{x+y}{1+xy}\right)^2 < 1$ équivaut à $0 < (1-x^2)(1-y^2)$, tous calculs faits, ce qui est vrai.

L'allure de la relation incite à poser $x = \operatorname{th} u, y = \operatorname{th} v$ (u et v dans $\mathbb{R}$) et on doit avoir, la fonction th réalisant un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$, $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(\operatorname{th}(u)) + f(\operatorname{th}(v)) = f\left(\frac{\operatorname{th} u + \operatorname{th} v}{1 + \operatorname{th} u \operatorname{th} v}\right) = f(\operatorname{th}(u+v)).$$

Donc $g = f \circ \operatorname{th}$ doit être continue sur $\mathbb{R}$ et vérifier $g(u+v) = g(u) + g(v)$, on sait alors que g est linéaire du type $u \rightsquigarrow au$, (voir exercice 14) d'où $f(x) = a \operatorname{Arg}\operatorname{th} x$ sur I intervalle de $]-1, 1[$.

17. On peut justifier qu'il existe une solution et une seule. La continuité de f en 0 donne $f(0) = \cos(f(0))$, donc $f(0) = a$ unique solution de l'équation $\cos x = x$.

Il y a une seule solution : car si g est aussi solution, on aura

$f(x) - g(x) = e^{x^2/8}\left(\cos\left(f(\frac{x}{2})\right) - \cos\left(g(\frac{s}{2})\right)\right)$ avec, par accroissements finis, $\left|\cos\left(f(\frac{x}{2})\right) - \cos\left(g(\frac{x}{2})\right)\right| \leqslant \left|f(\frac{x}{2}) - g(\frac{x}{2})\right|$, d'où

$$\left|f(x) - g(x)\right| \leqslant e^{x^2/8}\left|f(\frac{x}{2}) - g(\frac{x}{2})\right|, \text{ qui donne}$$

$$\left|f(\frac{x}{2}) - g(\frac{x}{2})\right| \leqslant e^{\frac{x^2}{8\cdot 4}}\left|f(\frac{x}{2^2}) - g(\frac{x}{2^2})\right| \ldots \text{on itère et finalement}$$

$$|f(x) - g(x)| \leqslant e^{\frac{x^2}{8}(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{2n-2}})}\left|f(\frac{x}{2^n}) - g(\frac{x}{2^n})\right|.$$

Or $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^4} + \ldots + \dfrac{1}{2^{2n-2}} = \dfrac{1 - \dfrac{1}{2^{2n}}}{1 - \dfrac{1}{2^2}} \leqslant \dfrac{4}{3}$

d'où $\left|f(x) - g(x)\right| \leqslant e^{\frac{x^2}{6}}\left|f(\frac{x}{2^n}) - g(\frac{x}{2^n})\right|$. Comme $f(0) = g(0)$ la limite (si n tend vers l'infini) du majorant est nulle donc $f(x) = g(x)$ pour tout x d'où l'unicité d'une solution éventuelle.

Quand à l'existence, on définit la suite $u_n(x)$ par : $u_0(x) = a =$ la racine de $(\cos x = x)$, et la relation de récurrence :

$$u_{n+1}(x) = e^{\frac{x^2}{8}}\cos\left(u_n(\frac{x}{2})\right).$$

On suppose x fixé.

On a $|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leqslant e^{\frac{x^2}{8}}\left|u_n(\frac{x}{2}) - u_{n-1}(\frac{x}{2})\right|$, par le même calcul, ceci conduit à :

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leqslant e^{\frac{x^2}{6}}\left|u_1(\frac{x}{2^n}) - u_0(\frac{x}{2^n})\right|.$$

Or $u_1(\frac{x}{2^n}) - u_0(\frac{x}{2^n}) = e^{\frac{x^2}{8\cdot 2^{2n}}}\cos\left(u_0(\frac{x}{2^{n+1}})\right) - a$ avec $u_0(\frac{x}{2^{n+1}}) = a$ et $\cos a = a$, il reste

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leqslant |a|e^{\frac{x^2}{6}}\left|e^{\frac{x^2}{8\cdot 4^n}} - 1\right|.$$

Le majorant est équivalent à $|a|e^{\frac{x^2}{6}}\dfrac{x^2}{8\cdot 4^n}$ terme général d'une série convergente, donc la série des $u_{n+1} - u_n$ converge, la suite des $u_n(x)$ admet une limite $u(x)$, pour tout x qui vérifie la relation $u(x) = e^{x^2/8}\cos\left(u(\frac{x}{2})\right)$ pour tout x.

Le problème posé a donc une solution unique.

18. Il s'agit de montrer qu'en chaque $x > 0$, f et g ont des limites à droite et à gauche, égales à la valeur de f ou de g en x.

Or $\{f(t), t < x\}$ est non vide, majoré par $f(x)$, donc admet une borne supérieure et cette borne supérieure est limite de $f(t)$ lorsque t tend vers x par valeurs inférieures, (croissance de f).

Donc $f(x^-) = \lim\limits_{t \to x^-} f(x)$ existe et $f(x^-) \leqslant f(x)$.

De même $f(x^+)$ existe et $f(x^+) \geqslant f(x)$.

Mais g étant décroissante, on a aussi existence des limites à droite et à gauche en x pour g avec cette fois :

$$g(x^-) \geqslant g(x) \geqslant g(x^+).$$

Comme $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, on a $g(x^-) = \dfrac{f(x^-)}{x}$ et $g(x^+) = \dfrac{f(x^+)}{x}$ d'où les inégalités $\dfrac{f(x^-)}{x} \geqslant \dfrac{f(x)}{x} \geqslant \dfrac{f(x^+)}{x}$ et comme $x > 0$, $f(x^-) \geqslant f(x) \geqslant f(x^+)$ et finalement $f(x^-) = f(x) = f(x^+)$: il y a continuité de f, donc aussi de g.

CHAPITRE 6

Espaces vectoriels normés

Après une parenthèse consacrée à la construction de $\mathbb{R}$, nous revenons à des choses sérieuses (!) en étudiant la structure d'espace vectoriel normé. La structure topologique devient plus riche, mais s'applique à moins d'espaces.

1. Définitions, premières propriétés

DÉFINITION 6.1. — *Soit un espace vectoriel réel E. On appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}$ vérifiant :*

1) $\forall x \in E,\ N(x) \geqslant 0$ *et* $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
2) $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$,
3) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$.

Traditionnellement on note $||x||$ au lieu de $N(x)$. L'inégalité du 2) est *l'inégalité triangulaire*.

On peut définir également des normes sur un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{Q}$, puisque, $\forall \lambda$ complexe ou rationnel, le module de λ existe dans $\mathbb{R}$. Dans le cas d'un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ il faut cependant faire attention au fait que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

6.2. En posant $d(x, y) = ||x - y||$, il est immédiat de vérifier que (E, d) est un espace métrique (exemple 4.4) et ce qu'on appelle *espace vectoriel normé* c'est l'espace topologique E muni de la structure métrique associée à d elle-même associée à une norme.

On va voir qu'il y a des propriétés propres aux espaces vectoriels normés (E.V.N. en abrégé).

THÉORÈME 6.3. — *Soit E un espace vectoriel normé réel. Les boules sont convexes. L'adhérence de la boule ouverte $\mathcal{B}_0(a,r)$ est la boule fermée de même centre et de même rayon. L'espace vectoriel engendré par une boule ouverte de rayon $r > 0$ est E.*

Soient u et v dans $\mathcal{B}_0(a,r)$. On veut prouver que le segment d'extrémités u et v est dans cette boule, c'est-à-dire que, $\forall t$ réel, avec $0 \leqslant t \leqslant 1$, on a $tu + (1-t)v \in \mathcal{B}_0(a,r)$. Or $a = ta + (1-t)a$ donc

$$\begin{aligned} d(a, tu + (1-t)v) &= ||ta + (1-t)a - (tu + (1-t)v)|| \\ &= ||t(a-u) + (1-t)(a-v)|| \\ &\leqslant |t|\ ||a-u|| + |1-t|||a-v||. \end{aligned}$$

Mais $t \geqslant 0, 1-t \geqslant 0$, ces 2 nombres ne sont pas simultanément nuls, et on a $||a-u|| < r$ et $||a-v|| < r \Rightarrow t||a-u|| \leqslant tr$, (égalité seulement si $t = 0$) et $(1-t)||a-v|| \leqslant (1-t)r$, (égalité seulement si $t = 1$) donc $d(a, tu + (1-t)v) < r$. On fait de même pour les boules fermées.

Comme on a $\mathcal{B}_0(a,r) \subset \mathcal{B}_f(a,r)$, en passant aux adhérences il vient $\overline{\mathcal{B}_0(a,r)} \subset \mathcal{B}_f(a,r)$, (un fermé est égal à son adhérence, 1.19).

Il y a égalité car si $y \in \mathcal{B}_f(a,r) - \mathcal{B}_0(a,r)$, les $x_n = a + (1 - \dfrac{1}{n+1})(y-a)$ sont dans $\mathcal{B}_0(a,r)$, $\left(||a - x_n|| = (1 - \dfrac{1}{n+1})r < r\right)$ et convergent vers y car $||y - x_n|| = ||(y-a)(\dfrac{1}{n+1})|| = \dfrac{r}{n+1}$ tend vers 0, donc $y \in \overline{\mathcal{B}_0(a,r)}$. (A comparer avec la remarque 4.36).

Enfin soit $F = \text{Vect}\,(\mathcal{B}_0(a,r))$ le sous-espace vectoriel de E engendré par la boule ouverte de centre a, de rayon $r > 0$. Soit $x \neq a, x \in E$.

Soit $y = a + \dfrac{r(x-a)}{2||x-a||}$, on a $||y-a|| = \dfrac{r}{2}$, donc $y \in \mathcal{B}_0(a,r) \subset F$, comme $a \in F$, $\dfrac{r}{2||x-a||} \cdot (x-a) \in F$, mais $\dfrac{r}{2||x-a||}$ est un scalaire non nul, donc $x - a \in F$, d'où $x \in F$, (car $a \in F$).

Finalement $E \subset F \subset E$: on a le résultat. ∎

COROLLAIRE 6.4. — *Un sous-espace vectoriel strict, H, de E vectoriel normé, est d'intérieur vide.*

Si $\overset{\circ}{H} \neq \emptyset$, il existe une boule ouverte non vide dans $\overset{\circ}{H}$ donc dans H, l'espace vectoriel qu'elle engendre, E est inclus dans H, c'est absurde. ∎

THÉORÈME 6.5. — *Soit E vectoriel normé. L'addition est uniformément continue de $E \times E$, (métrique pour $d^{(\infty)}$, $d^{(1)}$ ou $d^{(2)}$) dans E.*

Soit $(E, || \ ||)$ un espace vectoriel normé, d la distance associée. On considère les distances $d^{(\infty)}$, $d^{(1)}$ et $d^{(2)}$ associées à d sur $E \times E$, (voir 4.9 pour la définition de ces distances). On peut aussi prendre toute distance qui leur est uniformément équivalente.

On a alors, $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall (x', y') \in E^2$,

$$\begin{aligned} ||(x+y) - (x'+y')|| &= ||(x-x') + (y-y')|| \\ &\leqslant ||x-x'|| + ||y-y'|| \\ \text{soit encore} \quad &\leqslant d^{(1)}\left((x,y),(x',y')\right) ; \end{aligned}$$

dont l'addition est 1· Lipschitzienne, (avec $d^{(1)}$ sur E^2) donc uniformément continue. (Voir en 4.55 la définition de k· Lipschitzienne). ■

THÉORÈME 6.6. — *La multiplication par un scalaire : $(\lambda, x) \rightsquigarrow \lambda x$ est continue de $\mathbb{R} \times E$ dans E, (mais pas uniformément).*

Car
$$\begin{aligned} ||\lambda x - \lambda' x'|| &= ||\lambda(x-x') + x'(\lambda - \lambda')|| \\ &\leqslant |\lambda| \, ||x-x'|| + |\lambda - \lambda'|| \, ||x'||. \end{aligned}$$

On veut prouver la continuité en (λ, x). Soit $\varepsilon > 0$, on impose déjà $||x' - x|| \leqslant 1$ d'où $||x'|| \leqslant 1 + ||x||$, on aura alors, si $||x - x'|| \leqslant \inf\left(1, \dfrac{\varepsilon}{2|\lambda|}\right)$ lorsque $\lambda \neq 0$, (et $||x - x'|| \leqslant 1$ si $\lambda = 0$), et si $|\lambda - \lambda'| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2(1+||x||)}$, l'inégalité $||\lambda x - \lambda' x'|| \leqslant \varepsilon$, d'où la continuité du produit. ■

6.7. Ces propriétés peuvent devenir fausses sur E vectoriel, pour des distances non associées à des normes.

EXEMPLE 6.8. — Sur E vectoriel réel on définit une distance par $d(a, b) = 0$ si $a = b$ et 1 sinon. On a bien une distance, $\mathcal{B}_0(a, 1) = \{a\}$, $\mathcal{B}_f(a, 1) = E$ alors que $\overline{\mathcal{B}_0(a, 1)} = \{a\}$.

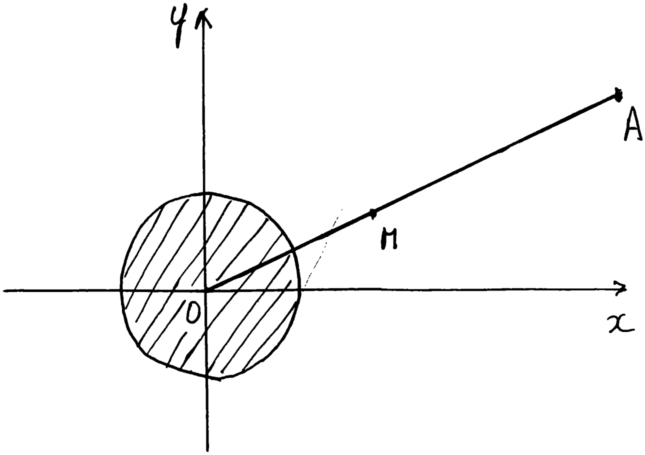
EXEMPLE 6.9. – *Distance SNCF sur* $\mathbb{R}^2$

On pose :

$d(M,N) = ||OM|| + ||ON||$ si O, M, N non alignés,

et $d(M,N) = ||MN||$ si O, M, N alignés,

(avec $||OM|| = \sqrt{x^2 + y^2}$ si x et y sont les coordonnées de M).



Si $M \neq O$, il est facile de voir que $\mathcal{B}_f(M, \frac{3}{2}||OM||)$ est non convexe, car dans le « prolongement » de OM on va en A tel que $||OA|| = \frac{5}{2}||OM||$.

Il importe donc de savoir reconnaître une distance associée à une norme sur E vectoriel. On a

THÉORÈME 6.10. — *Une distance d sur E vectoriel est associée à une norme si et seulement si elle est positivement homogène et invariante par translation. C'est-à-dire si on a :*

$\forall(\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times E \times E$, $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$, *et*

$\forall(x, y, z) \in E^3$, $d(x+z, y+z) = d(x,y)$.

Soit E, normé. Alors $\forall(x,y,z) \in E^3$ on a

$$d(x+z, y+z) = ||(x+z) - (y+z)|| = ||x-y|| = d(x,y)$$

il y a invariance par translation ;

et $\quad \forall(\lambda, x, y) \in \mathbb{R} \times E \times E, d(\lambda x, \lambda y) = ||\lambda(x-y)|| = |\lambda| d(x,y)$

la distance est positivement homogène.

Réciproquement soit E muni de d vérifiant les hypothèses du théorème, on pose $||x|| = d(0,x)$. On a une norme car

$$||x|| \geqslant 0 \text{ et } ||x|| = 0 \Leftrightarrow d(0,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;$$
$$||x+y|| = d(0,x+y) \leqslant d(0,x) + d(x,x+y)$$

or $d(x,x+y) = d(x-x,x+y-x) = d(0,y)$, on a donc $||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$: c'est l'inégalité triangulaire.

Enfin, $||\lambda x|| = d(0,\lambda x) = d(\lambda 0, \lambda x) = |\lambda| d(0,x) = |\lambda|\, ||x||$: on a une norme, telle que la distance associée $\widetilde{d}$ soit d car

$$\widetilde{d}(x,y) = ||x-y|| = d(x-y,0) = d(x-y+y,y) = d(x,y).$$

Un peu de vocabulaire dans ce paragraphe introductif.

DÉFINITION 6.11. — *On appelle espace de Banach, ou plus brièvement Banach, un espace vectoriel réel ou complexe, E, normé et complet pour cette norme.*

Si de plus la norme est associée à un produit scalaire, (ce qui est étudié avec les formes quadratiques) l'espace sera dit de Hilbert réel (s'il est complet), ou de Hilbert si E est vectoriel complexe, la norme étant associée à un produit scalaire hermitien. Dans ces deux cas si l'espace n'est pas complet il sera dit préhilbertien réel, ou préhilbertien (voir chapitres 14 d'Analyse Fonctionnelle et 12 d'Algèbre).

Quelques exemples dans le domaine réel

EXEMPLE 6.12. — $E = \mathbb{R}^n$ On introduit classiquement 3 normes sur $\mathbb{R}^n$, définies, pour $X = (x_1, \ldots, x_n)$ par

$$||X||_\infty = \sup\{|x_i|;\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

$$||X||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$||X||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^2\right)^{1/2}$$

Il est facile de vérifier que les 2 premières sont des normes. L'inégalité triangulaire pour la 3$^{\text{e}}$ norme ne s'obtient pas facilement. En fait c'est une conséquence de l'inégalité de Minkowski, établie pour les formes quadratiques positives (Algèbre, 11.61). Cette norme $||\ ||_2$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ associée au produit scalaire $\langle X, Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, (Analyse Fonctionnelle, chapitre 14).

Les distances $d^{(\infty)}$, $d^{(1)}$ et $d^{(2)}$ associées à ces normes sont équivalentes (Théorème 4.57). Par ailleurs on a vu dans ce chapitre IV sur les espaces métriques, que pour $d^{(\infty)}$, $d^{(1)}$ ou $d^{(2)}$, un produit d'espaces complets est complet (Théorème 4.99) : *donc* $\mathbb{R}^n$ *est complet pour chacune de ces trois normes*. Un des résultats de ce chapitre sera de montrer qu'il en est de même pour toute norme de $\mathbb{R}^n$.

EXEMPLE 6.13. — $E = \mathbb{R}[X]$ *espace des polynômes.*

Si $P(X) = \sum_{n=0}^{d^\circ P} a_n X^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n X^n$, les a_n étant presque tous nuls (ce qui signifie que card $\{n;\ a_n \neq 0\}$ est fini) on munit E de trois normes par :

$$||P||_\infty = \sup\{|a_n|;\quad 0 \leqslant n \leqslant d^\circ P\},$$
$$||P||_1 = \sum_{n=0}^{d^\circ P} |a_n| \quad \text{et } ||P||_2 = \left(\sum_{n=0}^{d^\circ P} (a_n)^2\right)^{1/2},$$

et on verra dans ce chapitre que E étant de dimension strictement dénombrable n'est complet pour aucune norme.

EXEMPLE 6.14. — *Espace* $E = l^2(\mathbb{R})$ des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série des $(u_n)^2$ converge, (voir Analyse Fonctionnelle, chapitre 11 pour l'étude des séries).

Si les deux séries de termes généraux, u_n et v_n sont telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2$ convergent, comme pour tout n on a $(u_n + v_n)^2 = u_n^2 + v_n^2 + 2u_n v_n$, et que $2u_n v_n \leqslant u_n^2 + v_n^2$ ($\Leftrightarrow (u_n - v_n)^2 \leqslant 0$ ce qui est vrai dans $\mathbb{R}$ corps ordonné), on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant (u_n + v_n)^2 \leqslant 2(u_n^2 + v_n^2).$$

La suite croissante, des sommes partielles $S_p = \sum_{n=0}^{p}(u_n+v_n)^2$ est majorée par $A = 2\sum_{n=0}^{\infty}(u_n^2 + v_n^2)$ donc elle est convergente (Corollaire 5.57) : la série $w = u + v$ de terme général $u_n + v_n$ est dans E si u et v sont dans E.

Comme, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, si $u \in E$, la série λu de terme général λu_n est telle que $\sum_{n=0}^{p}(\lambda u_n)^2 = \lambda^2 \sum_{n=0}^{p} u_n^2$, la convergence de la série des u_n^2 implique celle de la série des $(\lambda u_n)^2$, donc $\lambda u \in E$. On a bien E espace vectoriel réel, (sous espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, espace vectoriel des suites réelles).

Il est normé par $||u||_2 = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2\right)^{1/2}$, et cette norme en fait un espace de Hilbert, les justifications seront faites lors de l'étude des espaces préhilbertiens réels.

EXEMPLE 6.15. — *Espace* $F = l_1(\mathbb{R})$ des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série des $|u_n|$ converge.

Il est facile de vérifier que F est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, et même de $l^2(\mathbb{R})$ car si $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ converge, en particulier $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = 0$, donc $\exists n_0, \forall n \geqslant n_0,\ |u_n| < 1 \Rightarrow u_n^2 < |u_n|$: la série des u_n^2 converge, (chapitre 11 sur les séries, Théorème 11.22).

Sur $l_1(\mathbb{R})$ on dispose déjà de la norme $||u||_2$, mais on peut définir $||u||_\infty = \sup\{|u_n|;\ n \in \mathbb{N}\}$ et $||u||_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$. Il est facile de vérifier que ce sont des normes.

Pour $||\ \ ||_\infty$*,* $l_1(\mathbb{R})$ *n'est pas complet.* Par exemple, en posant $u^{(p)} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{p+1}, 0, \ldots)$, (les termes de $u^{(p)}$ devenant nuls à partir de celui d'indice $p + 1$), alors pour $q > p$, on a

$u^{(q)} - u^{(p)} = (0, \ldots, \frac{1}{p+2}, \ldots, \frac{1}{q+1}, 0, \ldots 0)$

d'où $||u^{(q)} - u^{(p)}||_\infty = \frac{1}{p+2}$. On a donc :

$\forall\varepsilon > 0,\ \exists p_0$ tel que $\frac{1}{p_0+2} < \varepsilon$:

d'où $\forall p \geqslant p_0, \forall q \geqslant p,\ ||u^{(q)} - u^{(p)}|| \leqslant \varepsilon$

donc la suite $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(l_1(\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$. Mais elle ne converge pas dans $l^1(\mathbb{R})$ pour $\|\ \|_\infty$, car si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_1(\mathbb{R})$, et s'il existe n_0 tel que $u_{n_0} \neq \dfrac{1}{n_0+1}$, soit $\varepsilon = |u_{n_0} - \dfrac{1}{n_0+1}|$, alors, $\forall p > n_0$, $\|u^{(p)} - u\|_\infty$ serait en particulier $\geqslant |u_{n_0} - \dfrac{1}{n_0+1}| = \varepsilon$ donc $\exists \varepsilon > 0, \forall n_1$, $\exists p \geqslant n_1$, (tous les $p \geqslant n_0$ conviennent en fait) tel que $\|u^{(p)} - u\|_\infty \geqslant \varepsilon$.

La seule limite possible serait donc u avec, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ mais... cette suite u n'est pas dans $l_1(\mathbb{R})$.

Par contre pour $\|\ \|_1, l_1(\mathbb{R})$ *est complet*, car soit $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $l_1(\mathbb{R})$ pour $\|\ \|_1$.

Alors on a :

$$\boxed{1} \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists p_0,\ \forall p \geqslant p_0,\ \forall q \geqslant p_0,\ \|u^{(p)} - u^{(q)}\|_1 \leqslant \varepsilon$$

Comme

$$\|u^{(p)} - u^{(q)}\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n^{(p)} - u_n^{(q)}| = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} |u_n^{(p)} - u_n^{(q)}|,$$

et que cette suite croissante des sommes partielles converge vers $\|u^{(p)} - u^{(q)}\|_1 \leqslant \varepsilon$ si et seulement si elle est majorée par ε, on peut formuler $\boxed{1}$ en $\boxed{1'}$:

$$\boxed{\boxed{1'}\ \varepsilon > 0,\ \exists p_0,\ \forall p \geqslant p_0,\ \forall q \geqslant p_0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} |u_n^{(p)} - u_n^{(q)}| \leqslant \varepsilon.}$$

Toute la suite du raisonnement est contenue dans $\boxed{1'}$ que l'on va lire de plusieurs façons.

Dans $\boxed{1'}$, pour un n fixé, avec un $N \geqslant n$, on aura *a fortiori*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists p_0,\ \forall p \geqslant p_0,\ \forall q \geqslant p_0,\ |u_n^{(p)} - u_n^{(q)}| \leqslant \sum_{k=0}^{N} |u_k^{(p)} - u_k^{(q)}| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui traduit le fait que la suite $(u_n^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$, n fixé, est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet, donc convergente. Soit $u_n = \lim\limits_{p\to+\infty} u_n^{(p)}$.

On reprend $\boxed{1'}$ en fixant $p \geqslant p_0$, avec N fixé aussi, comme, $\forall q \geqslant p_0$, $\sum_{n=0}^{N} |u_n^{(p)} - u_n^{(q)}| \leqslant \varepsilon$, que l'on a une somme finie de quantités ayant une limite si q tend vers $+\infty$, la continuité de l'addition (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, car $\mathbb{R}$ est un E.V.N.) nous donne $\lim_{q \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} |u_n^{(p)} - u_n^{(q)}| = \sum_{n=0}^{N} |u_n^{(p)} - u_n| \leqslant \varepsilon$.

On a donc :

$$\boxed{1''} \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists p_0,\ \forall p \geqslant p_0,\ \forall N \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} |u_n^{(p)} - u_n| \leqslant \varepsilon.$$

Mais ceci étant vrai $\forall N$, et la série des $|u_n^{(p)} - u_n|$ étant à termes positifs, elle converge et sa somme vérifie $||u^{(p)} - u||_1 \leqslant \varepsilon$, en notant u la suite de terme général u_n.

On a donc u, pour l'instant dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, telle que

$$\boxed{1'''} \qquad \forall \varepsilon > 0,\ \exists p_0,\ \forall p \geqslant p_0,\ ||u^{(p)} - u||_1 \leqslant \varepsilon,$$

en particulier $u^{(p_0)} - u$ est dans $l_1(\mathbb{R})$, $u^{(p_0)}$ aussi, donc $u \in l_1(\mathbb{R})$, (espace vectoriel) et $\boxed{1'''}$ est la traduction de $\lim_{p \to +\infty} u^{(p)} = u$, limite dans $l_1(\mathbb{R})$ pour la norme $||\ ||_1$. ■

J'ai détaillé ce raisonnement car c'est celui qu'on retrouvera dans les espaces fonctionnels pour justifier qu'un espace de fonctions est complet.

Enfin, pour $||\ ||_2$, cet espace $l_1(\mathbb{R})$ n'est pas complet, car en reprenant les suites $u^{(p)}$ avec $u^{(p)} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{p+1};\ 0, 0, \ldots 0\right)$, on a une suite de Cauchy, car $(||u^{(p)} - u^{(q)}||_2)^2 = \sum_{k=p+2}^{q+1} \frac{1}{k^2}$, si $q > p$ tend vers 0 si p et q tendent vers $+\infty$, car la série des $\frac{1}{k^2}$ converge.

Elle ne converge pas, vers un $u \in l_1(\mathbb{R})$, pour $||\ ||_2$, car si u est telle qu'il existe n_0 avec $u_{n_0} \neq \frac{1}{n_0 + 1}$ on a encore, $\forall p \geqslant n_0$, $(||u^{(p)} - u||_2)^2 \geqslant |u_{n_0} - \frac{1}{n_0 + 1}|^2$ donc $||u^{(p)} - u||_2 \to 0$ est exclu.

Comme la suite u de terme général $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ n'est pas dans $l_1(\mathbb{R})$, la suite de Cauchy des $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite dans $l_1(\mathbb{R})$, pour $|| \ ||_2$.

Mais elle en a une, u, dans $l_2(\mathbb{R})$, pour $|| \ ||_2$, la suite u de terme général $\dfrac{1}{n+1}$. L'étude un peu longue de cet exemple nous montre que, sur un même espace vectoriel, *on peut disposer de normes non uniformément équivalentes*. Il faudra donc *être précis dans le language*, et savoir aussi voir si des normes sont ou non uniformément équivalentes. Comme ceci est lié à la continuité uniforme de l'identité, et que l'identité est une application linéaire, nous allons étudier plus précisément la continuité de ces applications.

Mais avant, signalons un dernier exemple.

EXEMPLE 6.16. — *Soit* $[a, b]$ *un segment de* $\mathbb{R}$ *et* $E = C^\circ([a, b], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des applications continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles.

On le munit de 3 normes usuelles : $||f||_\infty = \sup\{|f(t)|;\ t \in \mathbb{R}\}$, $||f||_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|dt$ et $||f||_2 = \left(\displaystyle\int_a^b f^2(t)dt\right)^{1/2}$ et, pour ces normes on a : $(E, || \ ||_\infty)$ complet, alors que pour $|| \ ||_1$ et $|| \ ||_2$ il n'est pas complet. Les justifications seront données au chapitre 12 sur les espaces fonctionnels.

2. Applications linéaires continues

Une remarque pour commencer. Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Une application $f : E \mapsto F$ est dite Lipschitzienne s'il existe une constante $k \geqslant 0$ telle que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ ||f(x) - f(y)|| \leqslant k||x - y||$$

vu la définition des distances associées aux normes et la définition 4.55.

6.17. Si de plus f est linéaire, $f(x) - f(y) = f(x - y)$ et il est facile de voir que si x et y sont quelconques dans E, $z = x - y$ est quelconque dans E, donc *pour* f *linéaire de* E *dans* F, *on a*
$f \cdot k\cdot$ *Lipschitzienne* $\Leftrightarrow \forall x \in E,\ ||f(x)|| \leqslant k||x||$.

On a alors le

THÉORÈME 6.18. — *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés et* f *linéaire de* E *dans* F. *On a équivalence entre*

1) f est uniformément continue,

2) f est continue en 0,

3) f est bornée sur la boule unité fermée,

4) f est $k\cdot$ Lipschitzienne.

On a 1) $\Rightarrow$ 2) de manière évidente.

Puis 2) $\Rightarrow$ 3) : soit f continue en 0, $\varepsilon = 1515$ fixé, $\exists \alpha > 0$ tel que $||x - 0|| = ||x|| \leqslant \alpha \Rightarrow ||f(x) - f(0)|| \leqslant 1515$. Or $f(0) = 0$, (f linéaire) puis, pour tout x non nul de E, $\dfrac{\alpha}{||x||}$ est un réel strictement positif. Si le corps de base est $\mathbb{R}$, le vecteur $\dfrac{\alpha}{||x||}x$ est de norme α, donc on a $\|f\left(\dfrac{\alpha}{||x||}x\right)\| = \|\dfrac{\alpha}{||x||}f(x)\| = \dfrac{\alpha}{||x||}||f(x)|| \leqslant 1515$ d'où $||f(x)|| \leqslant \dfrac{1515}{\alpha}||x||$, inégalité encore vraie si $x = 0$, d'où *a fortiori*, si $||x|| \leqslant 1$, $||f(x)|| \leqslant \dfrac{1515}{\alpha}$, f est bornée sur la boule unité fermée.

On a supposé que le corps de base était $\mathbb{R}$. Si c'est $\mathbb{C}$, $\dfrac{\alpha}{||x||} \in \mathbb{C}$, on a un scalaire du corps, mais si c'est $\mathbb{Q}$ il y a problème si la norme n'est pas à valeurs dans $\mathbb{Q}$. En fait, il existe des rationnels λ arbitrairement proches de $\dfrac{\alpha}{||x||}$, ou bien une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers $\dfrac{\alpha}{||x||}$ par valeurs inférieures, avec $\lambda_n \geqslant 0$. Alors les $\lambda_n x \in E$, et $||\lambda_n x|| \leqslant \lambda_n ||x||$ donc *a fortiori* $||\lambda_n x|| \leqslant \dfrac{\alpha}{||x||}||x|| = \alpha$, on a encore $||f(\lambda_n x)|| \leqslant 1515 \Rightarrow ||f(x)|| \leqslant \dfrac{1515}{\lambda_n}$, vrai pour tout n, à la limite on aura $||f(x)|| \leqslant \dfrac{1515}{\dfrac{\alpha}{||x||}} = \dfrac{1515}{\alpha}||x||$: on peut continuer.

C'est pour éviter ces difficultés, entre autres, qu'on suppose désormais le corps de base réel ou complexe, les aménagements pour $\mathbb{Q}$ étant laissés à l'amateur.

3) $\Rightarrow$ 4) est évident : si $k = \sup\{||f(x)||;\ ||x|| \leqslant 1\}$, alors pour tout $y \neq 0$, $\dfrac{y}{||y||}$ est dans la boule unité fermée donc

$$\left\|f\left(\frac{1}{||y||}y\right)\right\| = \left\|\frac{1}{||y||}f(y)\right\| = \frac{1}{||y||}\ ||f(y)|| \leqslant k,$$

soit $||f(y)|| \leqslant k||y||$, inégalité également vérifiée par $y = 0$, d'où f est $k\cdot$ Lipschitzienne.

4) $\Rightarrow$ 1) car si f linéaire est $k\cdot$ Lipschitzienne, $\forall(x, y) \in E^2$ on a $||f(x) - f(y)|| \leqslant k||x - y||$ et on a vu au chapitre des espaces métriques que ceci implique la continuité uniforme (voir 4.55).

REMARQUE 6.19. — *La manière la plus efficace* de justifier que f linéaire de E dans F, (e.v.n) est continue, est de trouver $k \geqslant 0$ telle que $\forall x \in E$, $||f(x)|| \leqslant k||x||$, car on se livre alors à des calculs de majoration, en général faciles.

REMARQUE 6.20. — *Pour E espace vectoriel, et pour des distances associées à des normes les notions de distances topologiquement équivalentes, distances uniformément équivalentes et distances équivalentes n'en font qu'une.*

En effet, dès que l'identité $i : x \rightsquigarrow x$ de $(E, || \, ||)$ sur $(E, || \, ||')$ est continue, elle l'est uniformément et elle est $k\cdot$ Lipschitzienne. ■

Soient alors E et F deux e.v.n, f et g deux applications linéaires continues de E dans F. Comme l'addition est continue de $F \times F$ dans F et la multiplication par un scalaire de $\mathbb{R} \times F$ dans F, (ou $\mathbb{C} \times F$ dans F) (Théorèmes 6.5 et 6.6), les applications linéaires $f + g$ et $\lambda \cdot f$ sont continues (composées d'applications continues). On a donc justifié que l'ensemble noté $\mathcal{L}_C(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E, F)$, espace des applications linéaires. Peut-on le normer à son tour, de manière « naturelle » ? Oui.

THÉORÈME 6.21. — *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. L'espace vectoriel $\mathcal{L}_C(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F est normé par l'application $f \rightsquigarrow |||f||| = \sup\{||f(x)||;\ x \in E,\ ||x|| \leqslant 1\}$.*

6.22. *Attention à la notation de cette norme, appelée norme d'application linéaire continue*, elle est particularisée par ces trois traits car elle va avoir des propriétés intéressantes pour les majorations.

On a $|||f|||$ existe si f est continue, $|||f||| \geqslant 0$ et si $|||f||| = 0$, $\forall y \neq 0$ comme $\dfrac{y}{||y||}$ est de norme 1, $||f(\dfrac{y}{||y||})|| \leqslant 0$, donc $\dfrac{1}{||y||} f(y) = 0$ d'où $f(y) = 0$ pour tout $y \neq 0$. Comme $f(0) = 0$ on a bien f nulle.

Il est clair que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ (\text{ou } \mathbb{C}), |||\lambda f||| = \sup\{||\lambda f(x)||;\ x \in E,\ ||x|| \leqslant 1\}$$
$$= \sup\{|\lambda|\ ||f(x)||;\ x \in E,\ ||x|| \leqslant 1\},$$

donc c'est $|\lambda| \sup\{||f(x)||;\ x \in \mathcal{B}_f(0,1)\} = |\lambda|\ |||f|||$.

Enfin, comme $||(f+g)(x)|| \leqslant ||f(x)|| + ||g(x)||$, en passant aux bornes supérieures pour x dans $\mathcal{B}_f(0,1)$, on a bien $|||f+g||| \leqslant |||f||| + |||g|||$.■

THÉORÈME 6.23. — *Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, et $f : E \mapsto F$ puis $g : F \mapsto G$ linéaires continues. On a $g \circ f : E \mapsto G$ linéaire continue et $|||g \circ f||| \leqslant |||g|||\ |||f|||$.*

De plus, $\forall x \in E,\ ||f(x)|| \leqslant |||f|||\ ||x||$.

Ce sont ces deux formules de majoration qui donnent tout son intérêt à la norme d'application linéaire continue.

La deuxième a déjà été justifiée car si x est non nul dans E, $\dfrac{x}{||x||}$ est dans la boule unité fermée donc $\dfrac{1}{||x||}||f(x)|| = ||f\left(\dfrac{1}{||x||}x\right)|| \leqslant |||f|||$ d'où $||f(x)|| \leqslant |||f|||\ ||x||$, formule valable aussi pour $x = 0$.

Quant à la première, elle en découle car, pour x dans la boule unité fermée de E, on a :

$$||(g \circ f)(x)|| = ||g(f(x))|| \leqslant |||g|||\ ||f(x)|| \text{ avec } ||f(x)|| \leqslant |||f|||\ ||x||$$

d'où $||(g \circ f)(x)|| \leqslant |||g|||\ |||f|||\ ||x|| \leqslant |||g|||\ |||f|||$: et ceci pour tout x de la boule unité fermée de E. *A fortiori* la borne supérieure des $||(g \circ f)(x)||$ est inférieure ou égale à $|||g|||\ |||f|||$ d'ou l'inégalité $|||g \circ f||| \leqslant |||g|||\ |||f|||$.

■

THÉORÈME 6.24. — *Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $f \in L_C(E,F)$. On a les égalités*

$|||f||| = \sup\{||f(x)||;\ x \in E,\ ||x|| = 1\}$;

$|||f||| = \sup\{\dfrac{||f(x)||}{||x||},\ x \in E - \{0\}\}$;

$|||f||| = \inf\{k;\ k \in \mathbb{R}+,\ f$ *est k· Lipschitzienne*$\}$.

D'abord, comme pour $x \in E - \{0\}$, $\dfrac{x}{||x||}$ est dans la sphère unité S_1 de E les ensembles $\{f(z);\ z \in S_1\}$ et $\{\dfrac{f(x)}{||x||}, x \in E - \{0\}\}$ sont les mêmes donc leurs bornes (éventuelles) sont égales. Or $S_1 \subset \mathcal{B}_f(0,1)$ donc $m = \sup\{||f(z)||;\ z \in S_1\} \leqslant |||f|||$.

Puis, si $x \in \mathcal{B}_f(0,1) - \{0\}$, $\dfrac{x}{||x||} \in S_1$ donc $||f\left(\dfrac{x}{||x||}\right)|| \leqslant m$ soit $\dfrac{1}{||x||}||f(x)|| \leqslant m$ d'où $||f(x)|| \leqslant m||x|| \leqslant m$, c'est aussi vrai si $x = 0$ d'où $|||f||| \leqslant m$ et finalement $|||f||| = m$. On a bien justifié que $|||f||| = \sup\{||f(z)||;\ z \in S_1\} = \sup\{\dfrac{||f(z)||}{||z||};\ z \in E - \{0\}\}$.

Comme d'après le théorème 6.23 f continue est en particulier, $|||f|||$ lipschitzienne, on a $|||f||| \in \{k;\ k \geqslant 0,\ f$ est $k\cdot$ Lipschitzienne$\}$, donc i borne inférieure de cet ensemble existe et on a l'inégalité $i \leqslant |||f|||$.

Puis, si f linéaire est k Lipschitzienne, $\forall x \in E$, $||f(x)|| \leqslant k||x||$ donc k majore $\{||f(x)||;\ ||x|| \leqslant 1\}$ d'ou k majore $|||f|||$, mais alors $|||f|||$ minore $\{k;\ f$ est $k\cdot$ Lipschitzienne) et $|||f||| \leqslant i$ d'où l'égalité $|||f||| = \inf\{k;\ k \in \mathbb{R}_+,\ f$ est k. Lipschitzienne $\}$. ■

THÉORÈME 6.25. — *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. L'espace vectoriel normé $L_c(E,F)$ est complet, pour la norme d'application linéaire continue, lorsque F est complet.*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L_c(E,F)$. Alors on a :

$\boxed{1}$ $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall p \geqslant n_0,\ \forall q \geqslant n_0,\ |||f_p - f_q||| \leqslant \varepsilon$$

ou encore

$\boxed{1'}$ $$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall p \geqslant n_0,\quad \forall q \geqslant n_0,\ \forall x \in E,\ ||f_p(x) - f_q(x)|| \leqslant \varepsilon||x||.$$

Soit $x \neq 0$ dans E, $\varepsilon' > 0$ quelconque, on écrit $\boxed{1}$ avec $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon'}{||x||}$, on a donc $\forall \varepsilon' > 0$, $\exists n_0$, $\forall p \geqslant n_0$, $\forall q \geqslant n_0$, $||f_p(x) - f_q(x)|| \leqslant \varepsilon'$: la suite $\big(f_p(x)\big)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F complet donc convergente. On note $f(x)$ sa limite. Comme $\forall p \in \mathbb{N}$, $f_p(0) = 0$, on pose aussi $f(0) = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0)$ et on définit ainsi, point par point, $f : E \mapsto F$ par $f(x) = \lim\limits_{p\to+\infty} f_p(x)$.

Il reste à voir si f est linéaire, continue, et si f est limite des f_p pour $|||\ |||$.

On a f linéaire. Soient x et y dans E, λ et μ dans $\mathbb{R}$, (ou $\mathbb{C}$),

on a
$$\begin{aligned} f(\lambda x+\mu y) &= \lim_{n\to+\infty} f_n(\lambda x+\mu y) \\ &= \lim_{n\to+\infty} (\lambda f_n(x)+\mu f_n(y)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} (\lambda f_n(x)) + \lim_{n\to+\infty} (\mu f_n(y)), \end{aligned}$$

(continuité de l'addition et existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda f_n(x) = \lambda \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ par continuité du produit par un scalaire).

D'où $f(\lambda x+\mu y) = \lambda f(x)+\mu f(y)$: f est linéaire. Repartons alors de $\boxed{1'}$ dans laquelle on fixe $p \geqslant n_0$, on fixe x dans E et on fait tendre q vers $+\infty$. En utilisant la continuité de la norme, (justifiée en 6.26, c'est un oubli) il vient :

$$\boxed{1''} \qquad \forall \varepsilon>0,\ \exists n_0,\ \forall p \geqslant n_0,\ \forall x\in E,\ \|f_p(x)-f(x)\| \leqslant \varepsilon\|x\|,$$

soit encore

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists n_0,\ \forall p\geqslant n_0,\ \sup\{\|(f_p-f)(x)\|;\ x\in \mathcal{B}_f(0,1)\} \leqslant \varepsilon,$$

mais ceci entraîne deux choses. D'abord que $f_p - f$, linéaire, est bornée sur la boule unité fermée donc est continue, comme f_p est continue, il en résulte que f est continue ; puis $\boxed{1''}$ signifie que $\lim\limits_{p\to+\infty} f_p = f$ dans $\mathcal{L}_c(E,F)$ pour la norme d'application linéaire continue : on a le résultat. ■

THÉORÈME 6.26. — *Si E est un espace vectoriel normé, la norme est uniformément continue de E dans $\mathbb{R}$.*

Car, $\forall (x,y)\in E^2$ on a $\big|\|x\|-\|y\|\big| \leqslant \|x-y\|$ car c'est équivalent à $-\|x-y\| \leqslant \|x\|-\|y\| \leqslant \|x-y\|$ soit encore à $\|y\| \leqslant \|x-y\|+\|x\|$, (comme $y = y-x+x$, c'est l'inégalité triangulaire) et à

$$\|x\| \leqslant \|x-y\|+\|y\| : \text{ c'est l'inégalité triangulaire.}$$

Mais ceci signifie que $x \rightsquigarrow \|x\|$ est 1· Lipschitzienne de $(E, \|\ \|)$ dans $\mathbb{R}$, donc uniformément continue, (voir 4.55).

3. Propriétés des espaces vectoriels normés de dimension finie, réels ou complexes

Elles reposent sur le fait, qu'en dimension finie sur $\mathbb{R}$, (ou $\mathbb{C}$) toutes les normes sont équivalentes, c'est-à-dire que les distances associées, le sont, donc que l'identité de E, muni d'une norme dans E muni de l'autre est lipschitzienne.

Pour justifier ce résultat, on a besoin de savoir que E vectoriel de dimension fini, donc identifié à $\mathbb{R}^n$ si E est réel, (ou à $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ s'il est complexe), est tel que pour la norme $\| \ \|_\infty$, les fermés bornés sont compacts, ce que l'on sait puisque pour cette norme, on a la topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$ et que ce résultat a été justifié au corollaire 2.22.

THÉORÈME 6.28. — *Sur $\mathbb{R}^n$, toutes les normes sont équivalentes.*

Soit donc $E = \mathbb{R}^n$ normé par $\| \ \|_\infty$, et N une autre norme sur E.

On note $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique, donc

$X = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.$

L'identité $i : X \rightsquigarrow X$ de $(E, \| \ \|_\infty)$ dans (E, N) est continue car $N(i(X)) = N\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} N(x_k e_k)$, avec

$$N(x_k e_k) = |x_k| N(e_k) \leqslant N(e_k) \cdot \sup\{|x_j|;\ j = 1, \dots, n\},$$

d'où
$$N(i(X)) \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} N(e_k)\right) \|X\|_\infty.$$

En posant $\alpha = \sum_{k=1}^{n} N(e_k)$, on a i qui est $\alpha\cdot$ Lipschitzienne donc continue, et aussi $N(X) \leqslant \alpha \|X\|_\infty$ pour tout X de E.

La sphère unité $S_1 = \{X;\ X \in E,\ \|X\|_\infty = 1\}$ est fermé bornée dans $(E, \| \ \|_\infty)$ donc compacte (Corollaire 2.22). On a S_1 fermée car $X \rightsquigarrow \|X\|_\infty$ est continue, (Théorème 6.26) et S_1 est image réciproque de $\{1\}$ fermé de $\mathbb{R}$ par cette application.

Mais alors $i(S_1)$ est un compact de (E, N), (image continue d'un compact dans un séparé, théorème 2.18), et la norme N étant continue de (E, N) dans $\mathbb{R}$ est bornée sur ce compact et atteint ses bornes (Corollaire 2.19).

En particulier, si $\beta = \inf\{N(X);\ X \in E,\ ||X||_\infty = 1\}$, comme β est atteinte, il existe X_0 dans S_1 tel que $\beta = N(X_0)$ d'où $\beta > 0$ puisque $||X_0||_\infty$ de norme 1 est non nul.

Mais alors,

$$(\forall X \in E - \{0\}),\ \left(\frac{X}{||X||_\infty} \in S_1\right) \Rightarrow \left(N(\frac{X}{||X||_\infty}) \geqslant \beta\right),$$

d'où $N(X) \geqslant ||X||_\infty \beta$, inégalité vraie *a fortiori* si $X = 0$, et finalement on a bien α et β strictement positifs tels que

$$\forall X \in E,\ \beta||X||_\infty \leqslant N(X) \leqslant \alpha||X||_\infty :$$

N et $||\ ||_\infty$ sont équivalentes.

Par transitivité de la notion d'équivalence on en déduit bien l'équivalence de toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$. ■

COROLLAIRE 6.29. — *Soit E vectoriel normé (réel ou complexe) de dimension finie, alors E est complet.*

Car $\mathbb{R}$ est complet, donc $(\mathbb{R}^n, ||\ ||_\infty)$ l'est en tant que produit d'espaces métriques complets pour $d^{(\infty)}$, (Théorème 4.99), et vu l'équivalence des normes cette notion est conservée pour toute norme. ■

COROLLAIRE 6.30. — *Les compacts de $\mathbb{R}^n$, espace vectoriel normé, sont les fermés bornés, quelle que soit la norme.* C'est le corollaire 2.22. ■

COROLLAIRE 6.31. — *Soit E vectoriel normé de dimension finie, F vectoriel normé alors une application linéaire de E dans F est toujours continue, (quelles que soient les normes sur E et F).*

Vu l'équivalence des normes sur E on peut prendre n'importe quelle norme, par exemple $||\ ||_\infty$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et f linéaire de E dans $(F, ||\ ||)$.

Pour tout $X = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ on a

$$||f(X)|| = ||f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)|| = ||\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)|| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|\ ||f(e_i)||$$

avec $|x_i| \leqslant ||X||_\infty$, il vient $||f(X)|| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} ||f(e_i)||\right) ||X||_\infty :$

f est $\left(\sum_{i=1}^{n} ||f(e_i)||\right)$ lipschitzienne donc continue. ■

Corollaire 6.32. — *Un sous-espace F de dimension finie de E espace vectoriel normé est forcément fermé de E, (quelle que soit la norme de E).*

Soit E normé, de norme notée $|| \ ||$. La restriction de cette norme munit F d'une structure d'espace vectoriel normé.

Soit $X \in \overline{F}$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge vers X. Soit $\varepsilon = 1$, $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0$, $||u_n - X|| \leqslant 1$ donc $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \in \mathcal{B}_f(X,1) \cap F$.

Or $\mathcal{B}_f(X,1)$ est fermé de E, donc $\mathcal{B}_f(X,1) \cap F$ est fermé de F (topologie de sous-espace) borné car par inégalité triangulaire, la distance de deux éléments de $\mathcal{B}_f(X,1)$ est majorée par 2.

Mais alors $\mathcal{B}_f(X,1) \cap F$ est un compact de F, donc il existe une suite extraite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un $Y \in \mathcal{B}_f(X,1) \cap F$.

Comme dans E, $\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = X$, (suite extraite d'une suite convergente), la topologie métrique étant séparée c'est que $X = Y \in F$. On a $\overline{F} \subset F$ d'où F fermé. ■

Corollaire 6.33. — *Un espace vectoriel normé réel de dimension dénombrable stricte n'est jamais complet.*

Même pas une petite fois..., non ! Jamais !

Car soit E ayant une base $\mathcal{B} = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$.

On a $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Vect}\,(e_0, e_1, \ldots, e_n)$.

Les sous-espaces $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ sont fermés, (corollaire 6.32 d'intérieur vide, car sous-espaces stricts de E (Corollaire 6.4). Mais alors on a vu comme conséquence du théorème de Baire que E n'est pas complet, (Corollaire 4.109). ■

Corollaire 6.34. — *Soit E un espace vectoriel normé, K un compact de E, A un fermé de E, contenu dans un sous-espace de dimension finie F de E, la distance de A et K est atteinte, (K et A supposés non vides).*

Soit $d = d(A,K) = \inf\{||x-y||;\ (x,y) \in A \times K\}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $d + \dfrac{1}{n+1}$ n'est plus minorant, donc il existe (x_n, y_n) dans $A \times K$ tel que $d \leqslant ||x_n - y_n|| \leqslant d + \dfrac{1}{n+1} \leqslant d+1.$

A fortiori $||x_n|| \leqslant ||y_n|| + d + 1$. Or les y_n sont dans K compact donc borné : les x_n sont dans une partie bornée de E, soit B cette partie du type $\mathcal{B}_f$ (Alfred, Arthur). (Il n'y a aucune raison que les rayons des boules soient toujours r ou ε).

En fait les x_n sont alors dans $C = (A \cap \mathcal{B}_f$ (Alfred, Arthur)) qui est un fermé borné de F, sous-espace de dimension finie, donc c'est un compact. Mais les $(x_n, y_n) \in C \times K$ compact : il y a une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}\right)$ convergente vers $(u, v) \in C \times K$ et la norme étant continue, en passant à la limite dans l'inégalité

$$d \leqslant ||x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}|| \leqslant d + \frac{1}{\varphi(n)+1} \text{ il vient } d = ||u - v||$$

la distance est atteinte. ■

REMARQUE 6.35. — En particulier, tout singleton étant compact, (il n'est pas bien difficile d'extraire des recouvrements finis dans ce cas), *si A est un fermé de E contenu dans un sous-espace de F de dimension finie, $\forall b \in E$, $d(A, b)$ est atteinte.* On peut le justifier plus brièvement en remarquant que, si $a_0 \in A$, $d(A, b) = d\big((A \cap \mathcal{B}_f(b, ||b - a_0||)),\ \{b\}\big)$, or $\{b\}$ et $A \cap \mathcal{B}_f(b, ||a - a_0||)$ sont deux compacts, (fermés bornés en dimension finie), et la distance de 2 compacts est atteinte, (inf d'une fonction continue sur le compact produit).

Tous ces corollaires montrent l'importance de l'équivalence des normes en dimension finie, mais aussi du fait que dans ce cadre (compact) $\Leftrightarrow$ (fermé borné). Ce n'est pas étonnant car cette notion caractérise les espaces vectoriels normés de dimension finie. On a :

THÉORÈME 6.36. — *(de Riesz). Un espace vectoriel normé réel E est de dimension finie si et seulement si sur E on a : (compact) $\Leftrightarrow$ (fermé borné).*

Vu le corollaire 6.30 il nous reste la réciproque à justifier.

Soit donc E vectoriel réel, dans lequel la propriété d'être compact équivaut à celle d'être fermé borné.

En particulier la boule unité fermée $B_1 = \mathcal{B}_f(0, 1)$ est un compact de E. Comme $B_1 \subset \bigcup_{x \in B_1} \mathcal{B}_0(x, \frac{1}{2})$, on extrait un recouvrement fini de ce recouvrement. Soient $x_1, \ldots, x_n$ les centres intervenant, et $F = \text{Vect}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Si $E \setminus F \neq \emptyset$, soit $y \in E \setminus F$, $\delta = d(y, F)$ est atteinte en un x de F, (corollaire 6.34 ou remarque 6.35). Comme $x \neq y$ on a $\delta > 0$.

Soit $z = \dfrac{x-y}{||x-y||}$ c'est un élément de B_1 donc il existe x_i tel que $z \in \mathcal{B}_0(x_i, \frac{1}{2})$.

Soit $z' = x - ||x-y||x_i$, comme x et x_i sont dans F, z' est aussi dans F, or $z' - y = x - y - ||x-y||x_i$ donc $\dfrac{z'-y}{||x-y||} = \dfrac{x-y}{||x-y||} - x_i = z - x_i$ est de norme strictement inférieure à $1/2$, (choix de x_i), d'où $||z'-y|| < \dfrac{1}{2}||x-y||$, soit $||z'-y|| < \dfrac{\delta}{2}$: absurde car on aurait dans F, un élément z' trop près de y. Donc $E = F$ est bien de dimension finie. ■

4. Artillerie lourde sur les Banach

Le fait de savoir que $E \simeq \mathbb{R}^n$ est toujours complet, que $E \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ne l'est jamais, et que pour des espaces de dimension strictement supérieure au cardinal de $\mathbb{N}$ cela dépend de la norme est plus important que la simple satisfaction d'une curiosité de collectionneur de résultats. Il y a un grand nombre de résultats propres aux espaces vectoriels normés complets, et il importe de savoir si on peut ou non les utiliser.

Nous verrons, lors de l'étude des séries, ce qui concerne la notion de série convergente en norme dans un Banach, ou le théorème d'interversion des limites par exemple. Mais on peut établir ici quelques résultats intéressants, utilisés ensuite en calcul différentiel.

THÉORÈME 6.37. — *Dit des approximations successives. Soit a dans un Banach E et f une application continue de $\mathcal{B}_0(a,r)$ dans E, telle que $\varphi : x \rightsquigarrow x - f(x)$ soit contractante. Il existe un ouvert U contenant a tel que f établisse un homéomorphisme de U sur $\mathcal{B}_0(f(a),(1-k)r)$. De plus f^{-1} est $\dfrac{1}{1-k}$ Lipschitzienne φ étant k· Lipschitzienne, avec $0 \leqslant k < 1$.*

Déblayons le terrain : φ contractante signifie qu'il existe $k \in [0,1[$ telle que pour x et y dans $\mathcal{B}_0(a,r)$, $||\varphi(x) - \varphi(y)|| \leqslant k||x-y||$.

En particulier φ est uniformément continue, donc f aussi vu la définition de φ.

Si on suppose justifié que tout y de $\mathcal{B}_0(f(a),(1-k)r)$ a un antécédent, x, pour f dans $\mathcal{B}_0(a,r)$, cet antécédent est unique car si x' est aussi dans

$\mathcal{B}_0(a,r)$ et si on a $f(x) = f(x') = y$ alors $x - \varphi(x) = x' - \varphi(x')$ donc $x - x' = \varphi(x) - \varphi(x')$ d'où

$$||x - x'|| \leqslant k||x - x'|| \Leftrightarrow (1-k)||x - x'|| \leqslant 0$$

avec $1 - k > 0$ c'est que $||x - x'|| \leqslant 0$ donc finalement, que $x = x'$.

Il reste à trouver l'antécédent. Soit $y \in \mathcal{B}_0(f(a), (1-k)r)$. On définit, (si c'est possible) une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E en posant $x_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = y + \varphi(x_n)$. Comme $x_0 = a \in \mathcal{B}_0(a,r)$ sur laquelle φ est définie, x_1 existe. Le problème est de justifier qu'à chaque étape $x_n \in \mathcal{B}_0(a,r)$ ce qui assurera l'existence de x_{n+1}.

Au départ $x_1 - a = x_1 - x_0 = y + \varphi(x_0) - x_0 = y - f(x_0) = y - f(a)$ donc $||x_1 - a|| < (1-k)r < r$: x_1 existe dans $\mathcal{B}_0(a,r)$.

Supposons obtenu, jusqu'au rang n : x_n existe dans $\mathcal{B}_0(a,r)$. Alors x_{n+1} existe et $x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})$ d'où $||x_{n+1} - x_n|| \leqslant k||x_n - x_{n-1}||$.

Par récurrence, on obtient donc facilement :

$$||x_{n+1} - x_n|| \leqslant k||x_n - x_{n-1}|| \leqslant k^2||x_{n-1} - x_{n-2}|| \dots$$

d'où

$$||x_{n+1} - x_n|| \leqslant k^n||x_1 - x_0||$$

et aussi

$$||x_{n+1} - x_0|| = ||\sum_{p=0}^{n}(x_{p+1} - x_p)|| \leqslant \sum_{p=0}^{n} k^p||x_1 - x_0||$$

soit

$$||x_{n+1} - x_0|| \leqslant \frac{1 - k^{n+1}}{1-k}||x_1 - x_0|| \leqslant \frac{1}{1-k}||x_1 - x_0||.$$

Comme $||x_1 - x_0|| = ||x_1 - a|| < (1-k)r$, on a bien $||x_{n+1} - a|| = ||x_{n+1} - x_0|| < r$ donc au rang $n+1$, x_{n+1} existe et appartient à $\mathcal{B}_0(a,r)$.

Le procédé est récurrent, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe. De plus elle est de Cauchy dans E complet car $\forall q > p,\ x_q - x_p = \sum_{n=p}^{q-1}(x_{n+1} - x_n)$ d'où

$$\begin{aligned}||x_q - x_p|| &\leqslant \sum_{n=p}^{q-1} ||x_{n+1} - x_n|| \leqslant \sum_{n=p}^{q-1} k^n ||x_1 - x_0|| \text{ soit}\\ &\leqslant \frac{k^p - k^q}{1-k}||x_1 - x_0|| \leqslant \frac{k^p}{1-k}||x_1 - x_0||.\end{aligned}$$

Comme $\lim_{p\to+\infty} k^p = 0$ puisque $k \in [0, 1[$, on a bien :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall p \geqslant p_0,\ \forall q \geqslant p,\ ||x_p - x_q|| \leqslant \varepsilon.$$

Mais alors $x = \lim_{p\to+\infty} x_n$ existe dans E, et la relation $x_{n+1} = y + \varphi(x_n)$ jointe à la continuité de φ, donne à la limite, $x = y + \varphi(x) = y + (x - f(x))$, soit $y = f(x)$: on a trouvé un antécédent x pour y.

Est-il là où il faut? Oui car $||x_{n+1} - a|| \leqslant \frac{1}{1-k}||x_1 - x_0||$ donne à la limite $||x - a|| \leqslant \frac{1}{1-k}||x_1 - x_0||$ mais $||x_1 - x_0|| < (1-k)r$ donc $||x - a|| < r$: c'est gagné, $x \in \mathcal{B}_0(a, r)$.

Enfin $f^{-1} : y \rightsquigarrow x \in \mathcal{B}_0(a, r)$ tel que $f(x) = y$, est continue, car $\frac{1}{1-k}$ lipschitzienne. En effet, $\forall (x, x') \in (\mathcal{B}_0(a, r))^2$ on a $\varphi(x) - \varphi(x') = x - x' - (f(x) - f(x'))$ donc $x - x' = \varphi(x) - \varphi(x') + f(x) - f(x')$ d'où : $||x-x'|| \leqslant ||\varphi(x)-\varphi(x')||+||f(x)-f(x')|| \leqslant k||x-x'||+||f(x)-f(x')||$ soit $(1-k)||x - x'|| \leqslant ||f(x) - f(x')||$.

Donc si on part de y et y' dans $\mathcal{B}_0(f(a), (1-k)r)$, avec $x = f^{-1}(y)$ et $x' = f^{-1}(y')$ on aura $||f^{-1}(y) - f^{-1}(y')|| \leqslant \frac{1}{1-k}||y - y'||$.

En posant alors $U = f^{-1}(\mathcal{B}_0(f(a), (1-k)r))$ ouvert comme image réciproque d'un ouvert par f continue, on a bien trouvé l'ouvert cherché U contenant a tel que f réalise un homéomorphisme de U sur la boule $\mathcal{B}_0(f(a), (1-k)r)$. ■

Venons-en à un gros morceau : le théorème de Banach qui nous dira que si E et F sont complets, et f bijective continue linéaire de E sur F, alors f^{-1} est aussi continue. Pour l'établir, on passe par un résultat préliminaire.

THÉORÈME 6.38. — *Soient E et F deux Banach (e.v.n. complets), U et V les boules unités ouvertes de centre 0 dans E et F respectivement et f linéaire surjective continue de E sur F. Alors il existe $d > 0$ tel que $dV \subset f(U)$.*

Soit y dans F, il existe x dans E tel que $f(x) = y$, (f surjective). Si $n \in \mathbb{N}$ est tel que $n > ||x||$, $z = \frac{1}{n}x \in U = \mathcal{B}_0(0,1)$, donc $x = nz \in nU$ et $y = f(x) = nf(z) \in nf(U) \subset \bigcup_{p\in\mathbb{N}} f(pU)$, (car f linéaire donc $f(pU) = pf(U)$).

Comme ceci est vrai pour tout y de F, et que $f(pU) \subset \overline{f(pU)}$, (adhérence) on a $F = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \overline{f(pU)}$. Mais F complet étant réunion dénombrable de fermés, l'un au moins de ces fermés, est d'intérieur non vide (conséquence du théorème de Baire, corollaire 4.109) donc il existe $k \in \mathbb{N}$, $\exists W$ ouvert non vide de F tel que $W \subset \overline{f(kU)}$. On a $k > 0$, car $f(0 \cdot U) = \{0\}$ a pour adhérence $\{0\}$ d'intérieur vide.

Soit $y_0 \in W$, fixé, $\exists \eta > 0$, $\mathcal{B}_f(y_0, \eta) \subset W$. Soit alors y dans F, avec $||y|| \leqslant \eta$, $y_0 + y \in W$. Comme $W \subset \overline{f(kU)}$, on a deux suites $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans kU telles que $\lim_{n\to+\infty} f(x'_n) = y_0$ et $\lim_{n\to+\infty} f(x''_n) = y_0 + y$ d'où, par linéarité de f, $\lim_{n\to+\infty} f(x''_n - x'_n) = y$. Or $||x''_n - x'_n|| < 2k$ par inégalité triangulaire avec $||x'_n|| < k$ et $||x''_n|| < k$ car ce sont des éléments de $k \cdot U$.

En posant $x_n = x''_n - x'_n$, on a : $\forall y \in F$ tel que $||y|| \leqslant \eta$, $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de E telle que $||x_n|| < 2k$ et $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = y$. On peut donc en déduire que pour cet $\eta, \forall y \in F$ avec $||y|| \leqslant \eta$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in E$, $||x|| < 2k$ et $||f(x) - y|| < \varepsilon$.

Soit z non nul dans F, $y = \eta\frac{z}{||z||}$ est de norme η, et si, partant de $\varepsilon > 0$, on applique le résultat précédent avec $\frac{\varepsilon\eta}{||z||}$ au lieu de ε on aura :

$$\exists x \in E,\ ||x|| < 2k \text{ et } ||f(x) - \eta\frac{z}{||z||}|| < \varepsilon\frac{\eta}{||z||},$$

ce qui, en utilisant encore la linéarité de f implique $||f\left(\frac{||z||}{\eta}x\right) - z|| < \varepsilon$.

En posant $x' = \frac{||z||}{\eta}x$, on a $||x'|| < ||z||\frac{2k}{\eta}$, et, en posant $\delta = \frac{\eta}{2k}$, on a la propriété 6.39 :

6.39. $\exists \delta > 0,\ \forall z \in F,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in E,\ ||x|| \leqslant \dfrac{||z||}{\delta}$ *et* $||z - f(x)|| \leqslant \varepsilon$, (car pour $z = 0$, en mettant l'inégalité large, $x = 0$ convient).

Soit alors $\varepsilon > 0$ fixé et $y \in \delta V$, écrit sous la forme $y = \delta y'$ avec $y' \in V$.

1) On applique 6.39 pour y et $\dfrac{1}{2}\delta\varepsilon$: $\exists x_1 \in E$, $||x_1|| \leqslant \dfrac{||y||}{\delta}$ et $||y - f(x_1)|| \leqslant \dfrac{1}{2}\delta\varepsilon$. Comme $||y|| = \delta||y'||$ avec $||y'|| < 1, (y' \in V = \mathcal{B}_0(0,1)$ dont F), on a $||x_1|| < 1$.

2) On applique 6.39 pour $y - f(x_1) \in F$ et $\dfrac{1}{2^2}\delta\varepsilon$: $\exists x_2 \in E$, avec $||x_2|| \leqslant \dfrac{||y - f(x_1)||}{\delta}$ et $||(y - f(x_1)) - f(x_2)|| \leqslant \dfrac{\delta\varepsilon}{2^2}$.

On a en fait $||x_2|| \leqslant \dfrac{1}{2\delta}\delta\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Supposons construits $x_1, x_2, \dots, x_n$ tels que $||x_1|| < 1$ et, $\forall p$, avec $2 \leqslant p \leqslant n$, $||x_p|| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2^{p-1}}$, et $||y - f(x_1) - \dots - f(x_p)|| \leqslant \dfrac{\delta\varepsilon}{2^p}$.

3) On applique 6.39 pour $y - f(x_1) - \dots - f(x_n) \in F$ et $\dfrac{\delta\varepsilon}{2^{n+1}}$: il existe $x_{n+1} \in E$ tel que $||x_{n+1}|| \leqslant \dfrac{1}{\delta}||y - f(x_1) - \dots - f(x_n)|| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2^n}$ et $||(y - f(x_1) - \dots - f(x_n)) - f(x_{n+1})|| < \dfrac{\delta\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Le procédé est donc récurrent.

La série des $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans E complet car absolument convergente : si $X_p = x_1 + x_2 + \dots + x_p$, $\forall q > p > 1$, on a :

$$
\begin{aligned}
||X_q - X_p|| &= ||\sum_{n=p+1}^{q} x_n|| \text{ donc} \\
||X_p - X_q|| &\leqslant \sum_{n=p+1}^{q} \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} = \frac{\varepsilon}{2^p}\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{q-p-1}}\right) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2^p}\frac{1 - \dfrac{1}{2^{q-p}}}{\dfrac{1}{2}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{p-1}} :
\end{aligned}
$$

la suite des X_p est de Cauchy dans E complet.

Soit $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} x_n$, on a $\|\sum_{n=2}^{+\infty} x_n\| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n-1}} = \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \varepsilon$ d'où, comme $||x_1|| < 1$, on a $||x|| < 1+\varepsilon$.

Par continuité et linéarité de f, $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_1+x_2+\ldots+x_n) = \lim_{n\to+\infty} (f(x_1)+\ldots+f(x_n))$ donc comme $||y-(f(x_1)+\ldots+f(x_n))|| \leqslant \frac{\delta\varepsilon}{2^n}$ tend vers 0, on a $f(x) = y$.

Finalement, $\forall y \in \delta V$, $\exists x \in (1+\varepsilon)U$ tel que $f(x) = y$, soit encore $\delta V \subset f((1+\varepsilon)U) = (1+\varepsilon)f(U)$, (linéarité de f) d'où $\frac{\delta}{1+\varepsilon} V \subset f(U)$.

On a bien trouvé, (on se demande encore comment) $d = \frac{\delta}{1+\varepsilon} > 0$ tel que $dV \subset f(U)$. ■

THÉORÈME 6.40. — *Dit de l'application ouverte. Soient E et F deux Banach, f linéaire continue surjective de E sur F, elle est ouverte.*

On veut prouver que si Ω est un ouvert de E, $f(\Omega)$ est un ouvert de F. Soit $y_0 \in f(\Omega)$ et x_0 dans Ω tel que $f(x_0) = y_0$, ce qui suppose $\Omega \neq \emptyset$, mais $f(\emptyset) = \emptyset$ est bien un ouvert. Il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}_0(x_0, r) \subset \Omega$.

On applique le théorème 6.38 avec $d > 0$ tel que $dV \subset f(U)$ on a, par linéarité de f, $(dr)V \subset f(rU)$. (On note U et V les boules unités ouvertes de E et F).

Soit alors $y \in F$ tel que $||y - y_0|| < rd$, $y - y_0 \in drV \subset f(rU)$ donc il existe x dans U tel que $y - y_0 = f(rx)$. Or $y_0 = f(x_0)$ donc $y = f(x_0+rx)$ avec $x_0 + rx \in \mathcal{B}_0(x_0, r)$ car $||x_0 - (x_0 + rx)|| = ||rx|| = r||x|| < r$.

Donc, $\forall y \in \mathcal{B}_0(y_0, rd)$, $\exists x_0 + rx \in \mathcal{B}_0(x_0, r)$ tel que $y = f(x_0 + rx)$, d'où $\mathcal{B}_0(y_0, rd) \subset f(\mathcal{B}_0(x_0, r)) \subset f(\Omega)$: $f(\Omega)$ apparaît comme voisinage de chacun de ses points, c'est donc un ouvert. ■

COROLLAIRE 6.41. — *Théorème de Banach. Soient E et F deux Banach et f linéaire continue bijective de E sur F, alors f^{-1} est continue.*

En effet f est ouverte, donc $\forall$ ouvert Ω de $E, (f^{-1})^{-1}(\Omega) = f(\Omega)$ est un ouvert de F, ce qui est la traduction de $f^{-1} : F \mapsto E$ continue. ■

COROLLAIRE 6.42. — *Théorème du graphe fermé. Soient E et F deux Banach. Pour que $f : E \mapsto F$ linéaire soit continue, il faut et il suffit que son graphe $\Gamma = \{(x, f(x)), x \in E\}$ soit un fermé de $E \times F$.*

La partie directe du corollaire ne suppose pas la linéarité de f, comme on l'a vu, (Corollaire 1.85), c'est vrai pour f continue et F séparé.

On peut donner une autre justification de cette partie directe.

Si p et q sont les deux projections de $E \times F$ sur E et F respectivement,

$$\begin{aligned}
&\Gamma = \{(x,y) \in E \times F, \quad y = f(x)\} \text{ soit}\\
&\Gamma = \{(x,y) \in E \times F, \quad q((x,y)) = f(p(x,y))\} \text{ ou encore}\\
&\Gamma = (q - f \circ p)^{-1}(\{0\})
\end{aligned}$$

si f est continue, comme p et q le sont, on a un fermé, image réciproque d'un fermé par une application continue.

Réciproquement. On suppose Γ fermé de $E \times F$. Comme $q - f \circ p$ est linéaire car on suppose f linéaire, $\Gamma = (q - f \circ p)^{-1}(\{0\})$ est le noyau de $q - f \circ p$.

C'est un sous-espace vectoriel de $E \times F$, supposé fermé. Or E et F sont complets, donc $E \times F$ aussi, (Théorème 4.99) donc Γ fermé dans un complet est complet aussi ! (Théorème 4.92).

Soit $\widetilde{p} : \Gamma \mapsto E$ la projection $(x, f(x)) \rightsquigarrow x$.

On a $\widetilde{p}$ linéaire, bijective, continue, donc, (Corollaire 6.41), $\widetilde{p}^{-1}$ est continue de E dans Γ sous-espace de $E \times F$. Comme elle est à valeurs dans Γ, il revient au même de dire que $\widetilde{p}^{-1}$, considérée cette fois comme à valeurs dans $E \times F$ est continue, (Théorème 1.67).

Mais alors les 2 applications composantes $x \rightsquigarrow x$ et $x \rightsquigarrow f(x)$ de $\widetilde{p}^{-1}$ sont continues, (Théorème 1.79) d'où f continue. ■

Pour faire bonne mesure, justifions le

THÉORÈME 6.43. — *Banach Steinhauss. Soit E un Banach, F un e.v.n. et $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. Alors, ou bien $\exists M > 0$, $\forall \alpha \in A$, $|||f_\alpha||| \leqslant M$, ou bien il existe une partie V de E partout dense dans E telle que pour chaque x de V $\sup\limits_{\alpha \in A} ||f_\alpha(x)|| = +\infty$.*

Soit $x \in E$, on pose $\varphi(x) = \sup\limits_{\alpha \in A} ||f_\alpha(x)||$, ce sup pouvant être $+\infty$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $V_n = \{x, x \in E, \ \varphi(x) > n\}$.

Les V_n sont des ouverts : soit $x_0 \in V_n$, $\exists \alpha_0 \in A$, $||f_{\alpha_0}(x_0)|| > n$, mais f_{α_0} étant continue, cette inégalité stricte reste localement valable, (traduire la continuité de $x \rightsquigarrow ||f_{\alpha_0}(x)||$ en x_0 avec $\varepsilon = (||f_{\alpha_0}(x_0)|| - n)/2$ par exemple) : on a Ω ouvert de E contenant x_0 sur lequel $||f_{\alpha_0}(x)|| > n$ et *a fortiori* $\sup\limits_{\alpha} ||f_\alpha(x)|| \geqslant ||f_{\alpha_0}(x)|| > n$: on a $\Omega \subset V_n$.

Si chaque V_n est partout dense, il résulte du théorème de Baire, (Théorème 4.108) que $V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ est partout dense, et si $x \in V$, on a $\sup_{\alpha \in A} ||f_\alpha(x)|| > n$, ceci $\forall n \in \mathbb{N}$, donc $\sup_{\alpha \in A} ||f_\alpha(x)|| = +\infty$, on est dans le 2ᵉ cas de la conclusion du théorème.

Sinon, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, avec V_{n_0} non partout dense, donc $\exists x_0 \notin \overline{V}_{n_0}$, ce qui se traduit par : $\exists r > 0$, $\mathcal{B}_0(x_0, r) \cap V_{n_0} = \varnothing$, *a fortiori* en prenant ρ avec $0 < \rho < r$, on aura $\mathcal{B}_f(x_0, \rho) \cap V_{n_0} = \varnothing$.

On a alors, $\forall x \in E$, $||x|| \leqslant \rho \Rightarrow x + x_0 \notin V_{n_0}$ donc $\varphi(x_0 + x) \leqslant n_0$, ce qui est en particulier vrai pour $x = 0$: on a aussi $\varphi(x_0) \leqslant n_0$.

Vu la définition de φ, c'est que :

$$\forall \alpha \in A,\ \forall x \in E,\ ||x|| \leqslant \rho \Rightarrow ||f_\alpha(x_0)|| \leqslant n_0 \text{ et } ||f_\alpha(x + x_0)|| \leqslant n_0$$

d'où $||f_\alpha(x)|| = ||f_\alpha(x) + f_\alpha(x_0) - f_\alpha(x_0)|| \leqslant 2n_0$, puisque par linéarité de f_α on a $f_\alpha(x) + f_\alpha(x_0) = f_\alpha(x + x_0)$.

Mais alors, $\forall x'$ de norme $\leqslant 1$ dans E, $x = \rho x'$ est de norme $\leqslant \rho$ donc $||f_\alpha(\rho x')|| = \rho ||f_\alpha(x')|| \leqslant 2n_0$, d'où $||f_\alpha(x')|| \leqslant \dfrac{2n_0}{\rho}$: on a, pour chaque f_α, $\{||f_\alpha(x')||;\ ||x'|| \leqslant 1\}$ majoré par $\dfrac{2n_0}{\rho}$ d'où pour la norme d'application linéaire, $|||f_\alpha||| \leqslant \dfrac{2n_0}{\rho}$, et ce, $\forall \alpha \in A$. ■

Ces quelques résultats, joints au fait que $E \simeq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, normé, n'est jamais complet, montrent l'importance du théorème de Baire.

5. Continuité des applications multilinéaires

Soient $E_1, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels normés, de normes respectives notées $|| \ ||_i$. Sur l'espace produit $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ on définit trois normes classiques, équivalentes, avec, pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$:

6.44.

$$||X||^{(\infty)} = \sup\{||x_i||_i, i = 1, \ldots, n\},$$

$$||X||^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} ||x_i||_i$$

$$||X||^{2} = \left(\sum_{i=1}^{n} ||x_i||_i^2\right)^{1/2}$$

Par ailleurs, si F est un autre espace vectoriel, une application f : $\prod_{i=1}^{n} E_i \rightsquigarrow F$ sera dite *$n\cdot$ linéaire, ou multilinéaire* si elle est linéaire par rapport à chaque variable.

THÉORÈME 6.45. — *Soit $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ le produit des espaces vectoriels normés E_i, muni de l'une des trois normes $\|\ \|^{(\infty)}$, $\|\ \|^{(1)}$ ou $\|\ \|^{(2)}$. Soit f n·linéaire de E dans un espace vectoriel normé F. Il y a équivalence entre :*

1) f est continue;
2) f est continue en 0;
3) f est bornée sur $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}_f(0,1)$;
4) $\exists k \geqslant 0,\ \forall (x_1,\dots,x_n) \in E$,
$\|f(x_1,\dots,x_n)\| \leqslant k\|x_1\|_1\|x_2\|_2\dots\|x_n\|_n$.

Mais attention : $f \neq 0$ n'est jamais uniformément continue, (si $n \geqslant 2$), c'est la différence avec la continuité des applications linéaires.

1) $\Rightarrow$ 2) est évident.

2) $\Rightarrow$ 3).

On utilise la norme $\|X\|^{(\infty)}$ sur E. La continuité de f en 0 se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \sup\{\|x_i\|_i, i = 1,\dots,n\} \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(x_1,\dots,x_n)\| \leqslant \varepsilon.$$

Soit alors $x = (x_1,\dots,x_n)$ dans $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}_f(0,1)$,
le vecteur $\alpha\cdot x = (\alpha x_1, \alpha x_2,\dots,\alpha x_n)$ est tel que, $\forall i,\ \|\alpha x_i\|_i \leqslant \alpha$ donc $\|f(\alpha x_1,\alpha x_2,\dots,\alpha x_n)\| = \alpha^n\|f(x_1,\dots,x_n\| \leqslant \varepsilon$,

(n linéarité), soit $\|f(x_1,\dots,x_n)\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{\alpha^n}$: f est bornée sur $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}_f(0,1)$.

3) $\Rightarrow$ 4). D'abord si l'un des x_i est nul, f étant linéaire par rapport à chaque variable,

$$f(x_1,\dots,x_{i-1},0,x_{i-1},\dots,x_n) = 0 \text{ donc}$$
$$\|f(x_1,\dots,0,\dots,x_n)\| = 0 \leqslant \text{ tout nombre positif.}$$

On suppose donc $(x_1, \ldots, x_n)$ tel que chaque $x_i \neq 0$, alors le $n\cdot$ uplet $\left(\dfrac{x_1}{||x_1||_1}, \ldots, \dfrac{x_n}{||x_n||_n}\right) \in \prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}_f(0,1)$, si donc k majore les $||f(z)||$ pour z dans le produit des boules unités fermées, on a

$$||f\left(\frac{x_1}{||x_1||_1}, \ldots, \frac{x_n}{||x_n||_n}\right)|| \leqslant k,$$

d'où, en utilisant la $n\cdot$ linéarité l'inégalité $\dfrac{1}{||x_1||_1\ ||x_2||_2 \cdots ||x_n||_n} \cdot ||f(x_1, \ldots, x_n)|| \leqslant k$, d'où 4).

Enfin $4 \Rightarrow 1)$. Donnons à chaque x_i, un accroissement h_i auquel on impose $||h_i|| \leqslant 1$. On veut prouver la continuité de f en $(x_1, \ldots, x_n)$ donc on forme la différence $f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_n)$. On développe le premier terme en utilisant la n linéarité : on obtient 2^n termes, en prenant en chaque position soit x_i, soit h_i.

Parmi ces 2^n termes figure $f(x_1, \ldots, x_n)$ qui s'annule avec $-f(x_1, \ldots, x_n)$. Il reste donc $2^n - 1$ termes contenant tous au moins une fois un h_i.

Posons $r = \sup\{||x_i||;\ i = 1, \ldots, n\}$, chacun de ces $2^n - 1$ termes, se majorera en norme par $k||h||^{(\infty)}(\sup(r,1))^{n-1}$, avec $h = (h_1, \ldots, h_n)$, car il y a au moins un h_i, avec $||h_i|| \leqslant ||h||^{(\infty)}$, les autres vecteurs étant des x_j ou des h_j avec

$$||x_j|| \leqslant r \leqslant \sup(r,1) \text{ et } ||h_j|| \leqslant 1 \leqslant \sup(r,1),$$

d'où le produit des normes des autres vecteurs majoré par $(\sup(r,1))^{n-1}$. Finalement

$$||f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_n)|| \leqslant (2^n - 1)k(\sup(r,1))^{n-1}||h||^{(\infty)}$$

sera rendu $\leqslant \varepsilon$ si $||h||^{(\infty)} \leqslant \varepsilon/((2^n - 1)k(\sup(r,1))^{n-1})$. On a bien f continue en $(x_1, \ldots, x_n)$. ■

Enfin f n'est pas uniformément continue, (sauf bien sûr si elle est nulle.)

Soit f n-linéaire, non nulle : il existe un $n\cdot$ uplet $(u_1, \ldots, u_n)$ tel que $f(u_1, u_2, \ldots, u_n) \neq 0$.

Soit
$$x = ((t + \frac{1}{t})u_1, (t + \frac{1}{t})u_2, u_3, \ldots, u_n)$$
$$y = (\frac{1}{t}u_1, \frac{1}{t}u_2, u_3, \ldots, u_n) \text{ pour } t \in \mathbb{R}^*.$$

On a $||x-y||^{(\infty)} = |t| \sup\{||u_1||, ||u_2||\}$, tend vers 0 si t tend vers 0, et $f(x) - f(y) = (t^2+2)f(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ ne tend pas vers 0 si t tend vers 0.

Or si f était uniformément continue, on aurait :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ ||x-y||^{(\infty)} \leqslant \eta \Rightarrow ||f(x) - f(y)|| \leqslant \varepsilon$$

donc ici, il existerait $\alpha > 0$ tel que $|t| < \alpha \Rightarrow ||x-y||^{(\infty)} \leqslant \eta$, on devrait donc avoir $(2+t^2)||f(u_1, \ldots, u_n)|| \leqslant \varepsilon$ ce qui ne sera pas si au départ on choisit $\varepsilon = ||f(u_1, \ldots, u_n)||$ par exemple. On peut bien nier la formulation de la continuité uniforme. ■

EXERCICES

1. Soit A matrice carrée d'ordre p, antisymétrique. Montrer que $\exp(A)$ est orthogonale.

2. Soit $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel complexe des suites complexes bornées, normé par $||u||_\infty = \sup\{|u_n|;\ n \in \mathbb{N}\}$. Vérifier qu'il est complet, et que le sous-espace $\mathcal{B}_0$ des suites convergentes vers 0 est sous-espace complet de $\mathcal{B}$.

3. Soit E l'ensemble des applications Lipschitziennes de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Vérifier que c'est un espace vectoriel, et que N de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$N(f) = \sup\{|f(x)|;\ x \in [0,1]\} + \sup\left\{\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|;\ x \neq y, (x,y) \in [0,1]^2\right\}$$

est une norme sur E. L'espace (E, N) est-il complet ?

4. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ normé par la norme de la convergence uniforme. On indexe en une suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les rationnels de $[0,1]$. Pour f dans E on pose

$$L(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n f(q_n).$$

Montrer que L est une forme linéaire continue sur E dont la norme n'est pas atteinte.

5. Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ sont convexes, et que l'application $g : E \mapsto \mathbb{R}$ définie par $g(x) = d(x, A)$ est convexe.

6. Soit E un espace vectoriel réel normé, F un sous-espace de dimension finie et G un sous-espace tel que $F \subsetneqq G \subset E$. Montrer qu'il existe g dans G, de norme 1 tel que $\forall f \in F,\ \|g - f\| \geqslant 1$.

7. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, g fixée dans E. Pour $f \in E$ on pose $N_g(f) = \sup\{|f(t)g(t)|;\ t \in [0,1]\}$. Condition pour que N_g soit une norme. Condition pour qu'elle soit équivalente à la norme de la convergence uniforme.

8. Soit E l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des suites complexes bornées. Si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans E on pose $N(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$ et $N'(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|u_n|}{n!}$.
Vérifier que ce sont des normes. Les comparer.

9. Soit E un espace vectoriel normé, F un sous-espace vectoriel de E. On définit une application N de l'espace quotient E/F dans $\mathbb{R}^+$ par $N(\mathcal{X}) = d(x, F)$ si $x \in \mathcal{X}$.
a) Vérifier que c'est une semi-norme.
b) Condition pour que ce soit une norme.

10. Soient E et F deux Banach, $f : E \mapsto F$ une application continue telle qu'il existe $M > 0$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leqslant M.$$

On note g_n l'application $x \rightsquigarrow g_n(x) = \dfrac{1}{2^n} f(2^n x)$.
Convergence de la suite des g_n ?
Montrer que la fonction g, limite des g_n, est linéaire.

11. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$, normé, contenant $\mathcal{B}_0(0,a), a > 0$, et soit $E = \{u \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n);\ u(K) \subset K\}$. Montrer que E est un compact de $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$, normé.
L'hypothèse $\mathcal{B}_0(0,a) \subset K$ est-elle nécessaire ?

12. Soit E l'espace vectoriel des applications dérivables de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0,= 0$ et f' soit continue. Vérifier que $N_0(f) = \sup\{|f(x)|,\ x \in [0,1]\}$ et $N_1(f) = \sup\{|f'(x)|;\ x \in [0,1]\}$ sont deux normes sur E. Sont-elles équivalentes ?

13. Soit $E = \mathbb{C}^n, f \in L(E)$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} |||f^n|||^{1/n}$ existe, (avec $||\ |||$, norme d'application linéaire continue). On note $\rho(f)$ cette limite. Montrer que $\rho(f)$ est indépendante du choix de la norme sur E, que $\rho(fg) = \rho(gf)$. Que représente $\rho(f)$ si f est diagonalisable ?

14. Soit E l'espace vectoriel complexe des suites complexes convergentes normé par $||u|| = \sup\{|u_n|;\ n \in \mathbb{N}\}$. Si $\alpha \in \mathbb{C}$ et si b est la série absolument convergente des β_n on définit f de E dans $\mathbb{C}$ par

$f(u) = \alpha l + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n u_n$, avec $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Montrer que E est complet et que f est une forme linéaire continue.

15. Soit E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles qu'il existe, pour f dans E, une constante $k(f) \geqslant 0$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k(f)\sqrt{|x-y|}.$$

On pose $||f|| = ||f||_\infty + \sup\left\{\dfrac{|f(x) - f(y)|}{\sqrt{|x-y|}}; x \neq y\right\}$.

Montrer que c'est une norme sur E, et que E est complet.

16. Soit $E = \mathcal{C}^0([a,b)],\mathbb{R})$ normé par la norme de la convergence uniforme, $||f||_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [a,b]\}$.
Vérifier que $H = \{f \in E,\ f(x) \neq 0$ pour tout x de $[a,b]\}$ est un ouvert de E et que l'application $\varphi : H \mapsto E$, définie par $\varphi(f)(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, est continue.

17. Soit $E = \mathbb{R}^n$, normé, B la boule unité fermée et f une isométrie de E telle que $f(B) \subset B$. Pour $x \in B$ on définit la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = x$ et la relation de récurrence $x_{k+1} = f(x_k)$.
Montrer que chaque x_q est valeur d'adhérence de la suite des x_k et que $f(B) = B$.

18. Soit E vectoriel réel normé et H un hyperplan de E. Montrer que H est soit fermé, soit partout dense.

Soit u dans le dual E^*. Montrer que u est discontinue si et seulement si il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E qui converge vers 0 avec $u(x_n) = 1$ pour tout n.
Soit a unitaire de E, H un supplémentaire de $\mathbb{R}a$. Si x de E se décompose en $x = \lambda(x)\cdot a + v(x)$ avec $\lambda(x) \in \mathbb{R}$, $v(x) \in H$ montrer que λ est continue si et seulement si H est fermé.
Soit u dans le dual E^*. Montrer que u est continue si et seulement si $H = u^{-1}(0)$ est fermé de E.

19. Si A et B sont des sous-ensembles, d'un espace vectoriel normé E, on note $A + B = \{a + b;\ a \in A,\ b \in B\}$.
Démontrer que (A ou B ouvert) $\Rightarrow$ ($A + B$ ouvert);
que (A et B compacts) $\Rightarrow$ ($A + B$ compact);
que (A compact et B fermé) $\Rightarrow$ ($A + B$ fermé).
Donner un exemple avec A et B fermés et $A + B$ non fermé.

20. Soit E espace vectoriel normé, (réel), f et g deux endomorphismes tels que $f\circ g - g\circ f = id_E$. Calculer $f\circ g^n - g^n\circ f$ pour tout n de $\mathbb{N}$. Montrer que f et g ne sont pas simultanément continues.

21. Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E espace vectoriel normé, p la projection sur F parallèlement à G est supposée continue.
Montrer que F et G sont fermés et que si E est complet F et G le sont. Réciproque?

22. Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ normé par $||f|| = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$. Vérifier que E est complet. Soit $F = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ normé par $||f||_\infty$ et $\theta : F \mapsto E$ qui a f associe $\theta(f)$ définie par $\theta(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.
Montrer que θ est linéaire continue. Quelle est sa norme d'application linéaire continue?

23. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ normé par $||P|| = \sup\{|P(x)|; x \in [-1,1]\}$. Montrer que :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \forall P \in E,\ \exists Q \in E,\ ||P - Q|| \leqslant \varepsilon \text{ et } Q(2) = 0.$$

24. Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes, de degré n au plus, et $z_1, \ldots, z_p$ des nombres complexes distincts.

Vérifier que $N(P) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} |P(z_i)|$ est une semi-norme sur E.
A quelle condition est-ce une norme ?
On suppose $p \geqslant n+1$. Montrer qu'il existe A réel positif tel que

$$\forall P \in E, \ \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} |P'(z_i)| \leqslant A \cdot \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} |P(z_i)|.$$

25. Soit, dans E, espace vectoriel des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré n au plus, l'ensemble A des polynômes unitaires. Montrer qu'il existe a, b, c trois réels strictement positifs tels que, $\forall P \in A$ on ait

$$a \leqslant \sup\{|P(x)|;\ x \in [0,1]\};\ b \leqslant \int_0^1 |P(x)| dx \text{ et}$$
$$c \leqslant \left(\int_0^1 P^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

26. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, f dans $\mathcal{L}(E)$ tel que la suite des f^p soit bornée. On pose $g_p = \frac{1}{p}(I + f + \ldots + f^{p-1})$.
Montrer que $(f - I) \circ g_p$ tend vers 0, que la suite des g_p admet une valeur d'adhérence qui est un projecteur, puis que la suite des g_p converge vers un projecteur.

27. Soit E un espace vectoriel normé, $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts connexes non vides. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est un compact connexe non vide.

SOLUTIONS

1. Sur $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ de dimension finie, donc complet, toutes les normes sont équivalentes, et pour la norme d'application linéaire continue, on a $\left|\left|\left| \frac{A^n}{n!} \right|\right|\right| \leqslant \frac{|||A|||^n}{n!}$ d'où la convergence absolue, donc la convergence, de la série de $\frac{A^n}{n!}$, de somme notée $\exp(A)$. La transposition étant linéaire, sur E de dimension finie, est continue, donc

$$
\begin{aligned}
{}^t(\exp A) &= {}^t\left(\lim_{k\to+\infty}\sum_{n=0}^{k}\frac{A^n}{n!}\right)\\
&= \lim_{k\to+\infty}{}^t\left(\sum_{n=0}^{k}\frac{A^n}{n!}\right) = \exp({}^tA) = \exp(-A).
\end{aligned}
$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
(\exp A)\circ{}^t(\exp A) &= (\exp A)\circ(\exp(-A))\\
&= \exp(A-A),\ (A \text{ et } -A \text{ commutent}),\\
&= \exp 0 = I_n,\ \text{d'où } \exp(A) \text{ orthogonale.}
\end{aligned}
$$

2. Soit une suite $\left(u^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans $\mathcal{B}$. On notera $u_n^{(p)}$ le terme général de la suite $u^{(p)}$. La suite est de Cauchy, donc :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists p_0\in\mathbb{N},\ \forall p\geqslant p_0,\ \forall q\geqslant p_0,\ ||u^{(p)}-u^{(q)}||_\infty\leqslant\varepsilon$$

soit encore

$$\boxed{1}\ :\forall\varepsilon>0,\ \exists p_0\in\mathbb{N},\ \forall p\geqslant p_0,\ \forall q\geqslant p_0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ |u_n^{(p)}-u_n^{(q)}|\leqslant\varepsilon.$$

Cet énoncé $\boxed{1}$, lu pour n fixé, signifie que la suite $\left(u_n^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ complet, donc convergente. Soit α_n sa limite.
Dans $\boxed{1}$, pour $\varepsilon>0$ fixé, $p\geqslant p_0$, fixé, n fixé, si q tend vers l'infini il vient $|u_n^{(p)}-\alpha_n|\leqslant\varepsilon$, et ce pour tout n. Donc la suite $u^{(p)}-\alpha$, (α suite des α_n) est bornée, doù α bornée, puisque $u^{(p)}$ l'est. Enfin $\boxed{1}$ se lit encore :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists p_0\in\mathbb{N},\ \forall p\geqslant p_0,\ ||u^{(p)}-\alpha||_\infty\leqslant\varepsilon,$$

ce qui justifie la convergence dans $\mathcal{B}$, de la suite de Cauchy des $u^{(p)}$ vers α, d'où $\mathcal{B}$ complet.
Si de plus les $u^{(p)}$ sont dans $\mathcal{B}_0$, on aura $\mathcal{B}_0$ complet si on prouve l'appartenance de α à $\mathcal{B}_0$, donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$.
Soit $\varepsilon>0$, $\exists p_0\in\mathbb{N}$, $\forall p\geqslant p_0$, $||u^{(p)}-\alpha||_\infty\leqslant\varepsilon/2$.
Pour p_0 fixé, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n^{(p_0)}=0$ donc il existe n_0 tel que $\forall n\geqslant n_0$, $|u_n^{(p_0)}|_\infty\leqslant\varepsilon/2$.

Mais alors,

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant n_0,\ |\alpha_n| &\leqslant |\alpha_n - u_n^{(p_0)}| + |u_n^{(p_0)}| \\ &\leqslant ||\alpha - u^{(p_0)}||_\infty + \varepsilon/2 \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\end{aligned}$$

on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$ d'où $\mathcal{B}_0$ complet.

3. L'ensemble E est sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ car f Lipschitzienne est uniformément continue donc continue ; E est non vide, (la fonction nulle est Lipschitzienne), et si f et g sont respectivement a et b Lipschitzienne, si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, par inégalité triangulaire, $\lambda f + \mu g$ est $(a|\lambda| + b|\mu|)$. Lipschitzienne.
Pour f dans E, $N(f)$ existe car $||f||_\infty = \sup\{|f(x)|;\ x \in [0,1]\}$ existe, (f continue sur un compact est bornée), et si f est $k\cdot$ Lipschitzienne, $\forall x \neq y$, $|f(x) - f(y)| \leqslant k \cdot |x - y|$ donc la deuxième borne existe.
Il est facile de voir que $N(f) \geqslant 0$; $N(f) = 0 \Rightarrow ||f||_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$: enfin on a $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ et $N(f+g) \leqslant N(f) + N(g)$ sans difficulté, donc N est une norme.
Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (E, N), comme $||f||_\infty \leqslant N(f)$, la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *a fortiori* de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$, complet, pour la norme de la convergence uniforme, (voir chapitre 12). Il reste à voir si la limite f des f_n, obtenue pour $||\ ||_\infty$, est lipschitzienne, et si la limite est obtenue pour la norme N. En fait on a, en traduisant l'hypothèse suite de Cauchy.

$$\boxed{1}\quad \begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall p \geqslant n_0,\ \forall q \geqslant n_0,\ \forall (x,y) \in [0,1]^2 \text{ avec } x \neq y \\ |f_p(x) - f_q(x)| + \left|\dfrac{(f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(y)}{x - y}\right| \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

A fortiori : $|f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \varepsilon$, donc $(f_p(x))$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet, et $f(x) = \lim\limits_{p \to +\infty} f_p(x)$ existe, et ceci pour chaque x fixé de $[0,1]$.

On repart de $\boxed{1}$ avec x et y fixés, p fixé, $(p \geqslant n_0)$, et on fait tendre q vers l'infini : on a, (avec $x \neq y$)

$$\boxed{1'}\quad |f_p(x) - f(x)| + \left|\frac{(f_p - f)(x) - (f_p - f)(y)}{x - y}\right| \leqslant \varepsilon,$$

a fortiori $\left|\dfrac{(f_p - f)(x) - (f_p - f)(y)}{x - y}\right| \leqslant \varepsilon$, et ce pour tout $x \neq y$, d'où l'on tire $f_p - f$ est $\varepsilon\cdot$ Lipschitzienne : $f_p - f \in E$, comme f_p est dans E, f est dans E.

Enfin, l'inégalité $\boxed{1'}$ implique

$$||f_p - f||_\infty \leqslant \varepsilon \text{ et aussi } \sup\left\{\left|\frac{(f_p - f)(x) - (f_p - f)(y)}{x - y}\right|;\ x \neq y\right\} \leqslant \varepsilon$$

d'où $N(f_p - f) \leqslant 2\varepsilon$ et ce $\forall p \geqslant n_0, n_0$ associé à ε au départ, donc f est bien limite des f_n dans (E, N) qui est un Banach.

4. La série définissant L est absolument convergente car $\left|(-\frac{1}{2})^n f(q_n)\right| \leqslant \frac{||f||_\infty}{2^n}$. De plus $|L(f)| \leqslant ||f||_\infty \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2||f||_\infty$, donc L est bien une forme linéaire continue, la linéarité étant évidente.

La norme de L est 2. En effet, soit $\varepsilon > 0$, il existe p_0 tel que $\forall p \geqslant p_0$, $\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon.$

On suppose $p \geqslant p_0$, mais aussi assez grand pour que les indices n tels que $q_n = 0$ et $q_n = 1$ soient inférieurs à p.

On construit f_p affine par morceaux en joignant les points $(q_i, (-1)^i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant p$. Ces points sont en nombre fini, donc on peut ordonner leurs abscisses et construire f_p.

On a

$$||f_p||_\infty = 1 \text{ et } L(f_p) = \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{2^n} + \sum_{n>p} \left(-\frac{1}{2}\right)^n f_p(q_n)$$

avec

$$\left|\sum_{n>p} \left(-\frac{1}{2}\right)^n f_p(q_n)\right| \leqslant \sum_{n>p} \frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$$

d'où

$$\frac{1 - \dfrac{1}{2^{p+1}}}{\dfrac{1}{2}} - \varepsilon \leqslant L(f_p) \leqslant \frac{1 - \dfrac{1}{2^{p+1}}}{\dfrac{1}{2}} + \varepsilon$$

soit

$$2 - \frac{1}{2^p} - \varepsilon \leqslant L(f_p) \leqslant 2 - \frac{1}{2^p} + \varepsilon.$$

En fait $\sum_{n>p} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^p} \leqslant \varepsilon$, donc on a l'encadrement $2-2\varepsilon \leqslant L(f_p) \leqslant 2+\varepsilon$ d'où $|L(f_p)| \geqslant (2 - 2\varepsilon)||f_p||_\infty$: la norme de L est supérieure à $2 - 2\varepsilon$ et ce pour tout $\varepsilon > 0$ d'où $|||L||| = 2$.

Cette norme n'est pas atteinte.

Supposons qu'il existe f dans B, de norme 1, telle que $|L(f)| = 2$.

Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $L(f) = 2$. On va alors prouver que, pour tout n, on doit avoir $f(q_n) = (-1)^n$. Mais alors f prendra des valeurs des deux signes, donc, étant continue, elle s'annulera.

Avec $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = 0$, et une suite de rationnels, $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x, les $f(r_k)$ valant 1 ou -1 ne pourront pas converger vers 0 : c'est absurde. On aura bien la norme non atteinte.
Il reste à justifier que $f(q_n) = (-1)^n$ pour tout n.
Si c'est faux, $p = \inf\{n, f(q_n) \neq (-1)^n\}$ existe. Comme pour $r < p$, (s'il y en a), $f(q_r) = (-1)^r$ on a

$$\begin{aligned} L(f) &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^r} + \frac{(-1)^p f(q_p)}{2^p} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f(q_n), \\ &= 2 - \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{(-1)^p f(q_p)}{2^p} + r_p \end{aligned}$$

avec $r_p = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f(q_n)$, donc $|r_p| \leqslant \displaystyle\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^p}$ puisque $||f||_\infty = 1$.
Mais alors

$$\begin{aligned} L(f) - 2 &= -\frac{1}{2^{p-1}} + r_p + \frac{(-1)^p f(q_p)}{2^p} \\ &= 2^{-p}(-2 + 2^p r_p + (-1)^p f(q_p)). \end{aligned}$$

On a $2^p r_p \in [-1,1]$, et $f(q_p) \neq (-1)^p \Rightarrow (-1)^p f(q_p) \in [-1,1[$ d'où $2^p r_p + (-1)^p f(q_p) \in [-2,2[$: la valeur 2 est exclue, donc $L(f) - 2 \neq 0$ alors qu'on avait supposé $L(f) = 2$.
C'est bien que f doit vérifier $f(q_n) = (-1)^n$ pour tout n, mais alors f n'est pas continue.

5. Soient x et y dans $\overset{\circ}{A}$, $\exists r > 0$ tel que $\mathcal{B}_O(x,r) \subset A$ et $\mathcal{B}_O(y,r) \subset A$.
Soit t réel de $[0,1]$ et $z = tx + (1-t)y$. Pour tout u tel que $||u|| < r$ on a

$$\begin{aligned} z + u &= tx + (1-t)y + (t + (1-t))u \\ &= t(x+u) + (1-t)(y+u). \end{aligned}$$

Comme $x + u \in \mathcal{B}_O(x,r) \subset A$ et $y + u \in \mathcal{B}_O(y,r) \subset A$ par convexité on a $z + u$ dans A, d'où $\mathcal{B}_O(z,r) \subset A$ ce qui implique que z est dans $\overset{\circ}{A}$ qui est bien convexe.
Pour la convexité de $\overline{A}$: soient x et y dans $\overline{A}$, il existe deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A qui convergent vers x et y, donc pour $t \in [0,1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} tx_n + (1-t)y_n = tx + (1-t)y$, par continuité de l'addition et du produit par un scalaire. Or $tx_n + (1-t)y_n$ est dans A, (A convexe), d'où $tx + (1-t)y \in \overline{A}$.
Convexité de g.

Soient x et y dans A, on veut prouver que

$$d(tx + (1-t)y, A) \leqslant t\, d(x, A) + (1-t)d(y, A).$$

Pour cela, soit x_1 et y_1 dans A, on a

$$||tx + (1-t)y - (tx_1 + (1-t)y_1)|| \leqslant t||x - x_1|| + (1-t)||y - y_1||.$$

Comme $tx_1 + (1-t)y_1 \in A$ on a

$$d(tx + (1-t)y, A) \leqslant t||x - x_1|| + (1-t)||y - y_1||.$$

Pour x_1 fixé, on passe à l'inf pour y_1 dans A, donc

$$d(tx + (1-t)y, A) \leqslant t||x - x_1|| + (1-t)d(y, A);$$

on passe alors à la borne inférieure pour x_1 dans A, d'où

$$d(tx + (1-t)y, A) \leqslant td(x, A) + (1-t)d(y, A).$$

6. Soit a dans F et b dans $G \setminus F$. La distance de b à F est encore celle de b à $F \cap \mathcal{B}_f(b, ||b-a||) = K$, fermé borné de F espace vectoriel de dimension finie. Donc K est compact et cette distance δ est atteinte en un élément x de F. Comme $b \notin F$, on a $b \neq x$ donc $\delta > 0$.

Soit $\lambda > 0$. La distance de λb à F, (qui est stable par homothétie) est $\lambda\delta$, (atteinte entre autres en λx), en particulier la distance de $u = \frac{1}{\delta} b$ à F vaut 1, elle est atteinte en $x_0 = \frac{1}{\delta} x$.

En posant $g = u - x_0 = \frac{1}{\delta}(b - x)$ on a $g \in G$, (car $b \in G$ et $x \in F \subset G$, $||g|| = 1$, et $d(g, F) = d(u - x_0), F)$ or la distance est invariante par translation donc $d(g, F) = d(u, F + x_0)$, mais $x_0 \in F$ stable par translation d'où $d(g, F) = d(u, F) = 1$: on a bien $||g - f|| \geqslant 1$ pour tout f de F.

7. Comme fg est continue sur $[0, 1]$ compact, $N_g(f) = ||fg||_\infty$ existe et il est facile de voir que N_g est une semi-norme, de plus $N_g(f) \leqslant ||g||_\infty\, ||f||_\infty$. Ce sera une norme si $N_g(f) = 0 \Rightarrow f = 0$.

Or $N_g(f) = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$ si $t \in g^{-1}(\mathbb{R}^*)$, soit, f étant continue, $N_g(f) = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$ sur $\overline{g^{-1}(\mathbb{R}^*)}$.

D'où N_g est une norme si et seulement si $\overline{g^{-1}(\mathbb{R}^*)} = [0, 1]$ car, si $\overline{g^{-1}(\mathbb{R}^*)} = [0, 1]$, si $N_g(f) = 0 \Rightarrow f$ nulle sur $[0, 1]$, et si $\overline{g^{-1}(\mathbb{R}^*)} \subsetneq [0, 1]$, sur l'ouvert non vide $\Omega = [0, 1] - \overline{g^{-1}(\mathbb{R}^*)}$, on prend une composante connexe qui est un intervalle ouvert de $[0, 1]$ donc de longueur non nulle, sur lequel g est nulle. On peut construire f continue non nulle sur cet intervalle, (ouvert de $[0, 1]$), nulle en dehors, d'où $N_g(f) = 0$ avec $f \neq 0$.

Pour l'équivalence des normes, on a déjà $N_g(f) \leqslant ||g||_\infty\, ||f||_\infty$. On cherche une condition sur g pour qu'il existe une constante k positive telle que, $\forall f \in E$, $||f||_\infty \leqslant kN_g(f)$.

Si g ne s'annule pas sur $[0,1]$, la fonction $h = \dfrac{1}{g}$ est dans E et $f = h \cdot gf$, d'où $||f||_\infty \leqslant ||h||_\infty \cdot ||gf||_\infty$ soit encore $||f||_\infty \leqslant ||h||_\infty \cdot N_g(f)$: dans ce cas les normes sont équivalentes.
Si g s'annule sur $[0,1]$, soit $c \in [0,1]$ tel que $g(c) = 0$, $\forall \varepsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que sur $[a,b] = [0,1] \cap [c-\alpha, c+\alpha]$, $|g(x)| \leqslant \varepsilon$.
Soit f affine par morceaux, nulle sur $[0,1] - [a,b]$, valant 1 en c. On a $||f||_\infty = 1$, fg nulle hors de $[a,b]$, majorée en module par ε sur $[a,b]$ donc $N_g(f) = ||fg||_\infty \leqslant \varepsilon$.
Si N_g et $||\ ||_\infty$ étaient équivalentes, il existerait une constante k telle que, $\forall f \in E$, $||f||_\infty \leqslant kNg(f)$ ce qui conduirait à l'inégalité $1 \leqslant k\varepsilon$, valable $\forall \varepsilon > 0$, c'est absurde. Donc si g s'annule les normes ne sont pas équivalentes.

8. La suite u étant bornée, les séries définissant $N(u)$ et $N'(u)$ sont convergentes et on vérifie facilement que N et N' sont des normes.
Comme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = e^2$ existe, pour tout n, $\dfrac{1}{n!} \leqslant \dfrac{e^2}{2^n}$ donc $\dfrac{|u_n|}{n!} \leqslant e^2 \cdot \dfrac{|u_n|}{2^n}$ d'où, en sommant, $N'(u) \leqslant e^2 N(u)$: la norme N' est plus fine que N. Elles ne sont pas équivalentes. En effet, supposons qu'elles le soient, il existerait $k \geqslant 0$ tel que pour tout u de E, $N(u) \leqslant kN'(u)$.
Soit $u^{(p)}$ la suite de terme général $u_n^{(p)} = 2^n$ si $n \leqslant p$ et 0 si $n > p$. On a $N(u^{(p)}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{P} \frac{2^n}{2^n} = p+1$ alors que $N'(u^p) = \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{2^n}{n!}$.
On devrait avoir $(p+1) \leqslant k \cdot \displaystyle\sum_{n=0}^{p} \frac{2^n}{n!} \leqslant ke^2$ et ceci pour tout p, c'est absurde, d'où la non équivalence des normes.

9. D'abord N a un sens car si x et x' sont dans la même classe d'équivalence $\mathcal{X}$ de E/F, c'est que $x - x' \in F$; donc pour tout y de F, $||x-y|| = ||x' + x - x' - y|| \leqslant d(x', F)$ puisque $(x-x') - y \in F$; c'est vrai pour tout y d'où $d(x,F) \leqslant d(x',F)$; par symétrie des rôles joués, $d(x',F) \leqslant d(x,F)$ d'où $d(x,F) = d(x',F)$: on peut poser $N(\mathcal{X}) = d(x,F)$. C'est $\geqslant 0$, $N(\lambda \cdot \mathcal{X}) = d(\lambda x, F)$ avec $x \in \mathcal{X}$ car alors λx représente $\lambda \cdot \mathcal{X}$; or $d(\lambda x, F) = \inf\{||\lambda x - y||;\ y \in F\}$; si $\lambda \neq 0$, c'est encore $\inf\{||\lambda(x - \frac{y}{\lambda})||;\ y \in F\} = |\lambda| \inf\{||x-z||;\ z \in F\}$ car $z = \dfrac{y}{\lambda}$ parcourt F quand y varie dans F, d'où $N(\lambda \cdot \mathcal{X}) = |\lambda| N(\mathcal{X})$; et si $\lambda = 0$, $0x \in F$ donc $d(0x, F) = 0$, on a encore $N(\lambda \cdot \mathcal{X}) = |\lambda| N(\mathcal{X})$.
Enfin, soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{X}'$ dans E/F, représentés par x et x', alors $x + x' \in \mathcal{X} + \mathcal{X}'$ et $N(\mathcal{X} + \mathcal{X}') = d(x+x', F)$, c'est donc $\inf\{||x+x'-y||;\ y \in F\}$.
Soit $u \in F$, $v = y - u \in F$ si $y \in F$, et comme $y = u + v$ on a

$$||x + x' - y|| = ||x - u + x' - v|| \leqslant ||x-u|| + ||x'-v||,$$

d'où $N(\mathcal{X} + \mathcal{X}') \leqslant ||x-u|| + ||x'-v||$. Pour u fixé dans F il en résulte en passant à la borne inférieure, en v, que $N(\mathcal{X}+\mathcal{X}') \leqslant ||x-u|| + N(\mathcal{X}')$, d'où

finalement $N(\mathcal{X}+\mathcal{X}') \leqslant N(\mathcal{X}) + N(\mathcal{X}')$ en passant à la borne inférieure en u.
On a donc une semi-norme.
Ce sera une norme si $N(\mathcal{X}) = 0 \Rightarrow \mathcal{X} = 0$ dans E/F. C'est encore la condition : pour $x \in \mathcal{X}$, si $d(x,F) = 0 \Rightarrow x \in F$.
Or $d(x,F) = 0 \Leftrightarrow x$ adhérent à F, (il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F telle que $d(x, x_n) \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ par exemple) d'où N et une norme si et seulement si $\overline{F} \subset F$ c'est-à-dire F fermé de E.

10. La suite des fonctions g_n convergera simplement, (resp. uniformément) si et seulement si la série des $h_n = g_{n+1} - g_n$ converge simplement (resp. uniformément), voir chapitre 12.

$$\text{Or}\quad ||h_n(x)|| = ||\frac{1}{2^{n+1}}\left(f(2\cdot 2^n x) - 2f(2^n x)\right)||$$
$$= \frac{1}{2^{n+1}}||f(2^n x + 2^n x) - f(2^n x) - f(2^n x)|| \leqslant \frac{M}{2^{n+1}}.$$

On a donc convergence normale, avec F espace complet : il y a convergence uniforme, donc finalement g, limite uniforme des g_n, continues, existe et est continue. (Voir chapitre 12 sur les espaces fonctionnels.) Soient x et y dans E, comme

$$||\frac{1}{2^n}\left(f(2^n x + 2^n y) - f(2^n x) - f(2^n y)\right)|| \leqslant \frac{M}{2^n},$$

on a

$$||g_n(x+y) - g_n(x) - g_n(y)|| \leqslant \frac{M}{2^n},$$

à la limite on a

$$||g(x+y) - g(x) - g(y)|| \leqslant 0$$

d'où $g(x+y) = g(x) + g(y)$: g est additive.
Mais alors $g(2x) = 2g(x)$, puis si $g(nx) = n\cdot g(x)$ avec $n \in \mathbb{N}$, (vrai si $n=2$), $g((n+1)x) = g(nx+x) = g(nx) + g(x) = n\cdot g(x) + g(x)$ soit $g((n+1)x) = (n+1)g(x)$, d'où $g(px) = p\cdot g(x)\ \forall p \in \mathbb{N}^*$.

Or $\quad g(x+0) = g(x) + g(0) \Rightarrow g(0) = 0$, puis, $\forall p \in \mathbb{N}$,
$g(px + (-p)x) = g(0) = 0 = g(px) + g(-p\cdot x)$, donc
$g(-p\cdot x) = -g(px) = (-p)\cdot g(x)$, donc $g(nx) = n\cdot g(x)$

est vrai pour tout n de $\mathbb{Z}$.
Soit p/q dans $\mathbb{Q}$ avec $q \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$g(\frac{p}{q}\cdot x) = p\cdot g\left(\frac{1}{q}x\right), \text{ en particulier si } p = q \text{ il vient}$$

$$g(x) = q\cdot g\left(\frac{1}{q}\cdot x\right) \text{ d'où } g\left(\frac{1}{q}\cdot x\right) = \frac{1}{q}\cdot g(x)$$

et finalement $g\left(\frac{p}{q}\cdot x\right) = \frac{p}{q}\cdot g(x)$.

Mais alors la relation $g(rx) = rg(x)$ valable pour tout rationnel r, jointe à la continuité de g et la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ conduit à $g(\lambda x) = \lambda g(x)$ pour tout λ de $\mathbb{R}$, (et tout x de E) d'où la linéarité de g.

11. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Il en est de même de $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, que l'on normera par la norme d'application linéaire continue.

On aura E compact de $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si E est fermé borné. Soit donc u adhérent à E, et $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers u, on a

$$\lim_{p\to+\infty} |||u-u_p||| = 0, \text{ donc } \forall\varepsilon > 0,\ \exists p_0,\ \forall p \geqslant p_0,\ |||u-u_p||| \leqslant \varepsilon$$

d'où, $\forall x \neq 0,\ ||u(x) - u_p(x)|| \leqslant \varepsilon ||x||$. Pour un x fixé non nul, il est facile d'en déduire que $u(x) = \lim\limits_{p\to+\infty} u_p(x)$.

Comme les $u_p(0)$ sont nuls, ils convergent vers $u(0) = 0$.

Si $x \in K$, les $u_p(x)$ sont dans K, compact donc fermé, mais alors $u(x) = \lim\limits_{p\to+\infty} u_p(x) \in K$, on a bien $u(K) \subset K$ d'où E fermé.

Il reste à justifier E borné. Soit $M > 0$ tel que $\forall z \in K$ on ait $||z|| \leqslant M$, et u quelconque dans E.

Pour tout z non nul de $\mathbb{R}^n$, si $\lambda \in [0,1[$, le vecteur $\lambda a \frac{z}{||z||}$ est dans $\mathcal{B}_O(0,a) \subset K$, donc son image par u est dans K, on a $\left\|u\left(\lambda a\frac{z}{||z||}\right)\right\| \leqslant M$ soit $\frac{\lambda a}{||z||}||u(z)|| \leqslant M$, (linéarité de u), ou encore $\frac{||u(z)||}{||z||} \leqslant \frac{M}{\lambda a}$, donc $|||u||| \leqslant \frac{M}{\lambda a}$: on a bien E borné, fermé de $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n)$, donc compact.

La condition est nécessaire. Si $K = [-1,1] \times \{0\}$, les applications u_λ de matrices $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ envoient $(x,0)$ sur $(x,0)$ et ne sont pas bornées si $\lambda \in \mathbb{R}$.

12. D'abord E est bien un espace vectoriel sous-espace de $\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ car si $f(0) = g(0) = 0$, $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda f + \mu g)(0) = 0$.

Puis $N_0(f) = ||f||_\infty$ existe, (f continue sur un compact est bornée) et c'est la norme de la convergence uniforme. Pour $N_1(f)$, ce nombre existe, (f' continue sur un compact) et $N_1(f) = 0 \Leftrightarrow f$ constante et comme $f(0) = 0$, on a $f = 0$. Les autres propriétés des normes sont évidentes.

Comme pour tout x de $[0,1]$, par accroissements finis, il existe ξ entre 0 et x tel que $f(x) = f(x) - f(0) = xf'(\xi)$ on a $|f(x)| \leqslant xN_1(f) \leqslant N_1(f)$ d'où en fait $N_0(f) \leqslant N_1(f)$.

Les normes ne sont pas équivalentes, car soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les fonctions définies par $f_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx$ sur $[0, \frac{\pi}{2n}]$, $(n \geqslant 2)$ et $f_n(x) = \frac{1}{n}$ sur $[\frac{\pi}{2n}, 1]$.

Elles sont dans E, $\left(f_n'(\frac{1}{n})\right) = 0$ existe car les dérivées à droite et à gauche sont égales); $N_0(f) = \frac{1}{n}$, et comme $f_n'(x) = \cos nx$ sur $[0, \frac{\pi}{2n}]$, $N_1(f_n) = 1$, donc il n'existe pas de constante a telle que $N_1(f) \leqslant aN_0(f)$ pour tout f de E, sinon on aurait $1 \leqslant \frac{a}{n}$, $\forall n \geqslant 2$, c'est difficile.

13. Comme pour la norme d'application linéaire continue, on a $|||f^n||| \leqslant (|||f|||)^n$, ici $(|||f^n|||)^{1/n} \leqslant |||f|||$: on a une famille de nombres majorée. Or dans une algèbre normée, (c'est le cas ici de $L(E)$), la suite des $|||f^n|||^{1/n}$ converge vers $\inf\{|||f^n|||^{1/n}\}$.
D'abord s'il existe n_0 tel que $|||f^{n_0}||| = 0$, pour $n \geqslant n_0$ on a $|||f^n||| = |||f^{n_0} \circ f^{n-n_0}||| \leqslant |||f^{n_0}||| \cdot |||f^{n-n_0}||| = 0$. Dans ce cas la suite devient constante, égale à 0, donc converge vers 0 qui est bien $\inf\{|||f^n|||^{1/n}, n \in \mathbb{N}\}$.
On suppose $|||f^n||| > 0$ pour tout n.
Soit $a = \inf\{f^n|||^{1/n};\ n \in \mathbb{N}\}$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $a \leqslant |||f^m|||^{1/m} \leqslant a + \varepsilon$.
Soit n quelconque, on le divise par m, (fixé), il existe $q(n) \in \mathbb{N}$ et $r(n) \in [0, m[$ tel que $n = p(n)m + r(n)$, d'où $f^n = (f^m)^{p(n)} \circ f^{r(n)}$ ce qui

entraîne
$$|||f^n||| \leqslant |||f^m|||^{p(n)}|||f^{r(n)}|||$$

et aussi
$$|||f^n|||^{1/n} \leqslant |||f^m|||^{\frac{p(n)}{n}}|||f|||^{\frac{r(n)}{n}}.$$

Or la relation de division donne $1 = \frac{p(n)}{n}m + \frac{r(n)}{n}$, d'où, en divisant par m, $\frac{p(n)}{n} = \frac{1}{m} + \frac{r(n)}{nm}$.
On obtient donc :
$$|||f^n|||^{1/n} \leqslant |||f^m|||^{\frac{1}{m}} \cdot |||f^m|||^{\frac{r(n)}{nm}}|||f|||^{\frac{r(n)}{n}}.$$

Quand n tend vers l'infini, (m toujours fixé), $r(n)$ étant majoré par m on a $\frac{r(n)}{nm} < \frac{1}{n}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} |||f^m|||^{\frac{r(n)}{nm}} = 1$.
De même $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{r(n)}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} |||f|||^{\frac{r(n)}{n}} = 1$.
En fait $\lim\limits_{n\to+\infty} |||f^m|||^{1/m}|||f^m|||^{\frac{r(n)}{nm}}|||f|||^{\frac{r(n)}{n}} = |||f^m|||^{1/m} \leqslant a + \varepsilon$ donc il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, ce majorant soit $\leqslant a + 2\varepsilon$. Finalement, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0$, $a \leqslant |||f^n|||^{1/n} \leqslant a + 2\varepsilon$, on a bien justifié que $\lim\limits_{n\to+\infty} |||f^n|||^{1/n} = \inf\{|||f^k|||^{1/k}, k \in \mathbb{N}\}$.

C'est indépendant du choix de la norme sur E : Soient $|| \ ||$ et $|| \ ||'$ deux normes sur $E = \mathbb{C}^n$. Elles sont équivalentes. Soit λ et μ deux constantes positives telles que $\forall x \in E$, on ait $\lambda||x|| \leqslant ||x||' \leqslant \mu||x||$. On aura alors, pour tout $x \neq 0$, $\dfrac{\lambda||f(x)||}{\mu||x||} \leqslant \dfrac{||f(x)||'}{||x||'} \leqslant \dfrac{\mu||f(x)||}{\lambda||x||}$, d'où, en passant aux bornes supérieures,

$$\frac{\lambda}{\mu}|||f||| \leqslant |||f|||' \leqslant \frac{\mu}{\lambda}|||f||| \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{1/n} |||f^n|||^{1/n} \leqslant (|||f^n|||')^{1/n} \leqslant \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{1/n} |||f^n|||^{1/n}.$$

Cet encadrement, joint au fait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{1/n} = 1 = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^{1/n}$ montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} |||f^n|||^{1/n} = \lim\limits_{n\to+\infty} (|||f^n|||')^{1/n}$.

Comme $(f \circ g)^{n+1} = f \circ (g \circ f)^n \circ g$ on a

$$|||(f \circ g)^{n+1}|||^{\frac{1}{n+1}} \leqslant |||f|||^{\frac{1}{n+1}} \left(|||(g \circ f)^n|||^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{n}{n+1}} |||g|||^{\frac{1}{n+1}}$$

d'où, en passant à la limite,

$$\rho(f \circ g) \leqslant \rho(g \circ f)$$

et en fait l'égalité $\rho(f \circ g) = \rho(g \circ f)$ vu la symétrie des rôles joués.
Si f diagonalisable, avec $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ base de vecteurs propres pour les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, et $|| \ ||_\infty$ sur E, associée à cette base, soit i_0 tel que $|\lambda_{i_0}| = \sup\{|\lambda_i|;\ i = 1, \ldots, n\}$.

Si $|\lambda_{i_0}| = 0$, $\forall_i, |\lambda_i| = 0, f = 0, |||f^k||^{\frac{1}{k}} = 0$ et $\rho(f) = 0$.

Si $|\lambda_{i_0}| \neq 0$, avec $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, pour tout k de $\mathbb{N}$ on a

$f^k(x) = \lambda_{i_0}^k \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}}\right)^k x_i e_i\right)$. Si $||x||_\infty = \sup\{|x_i|, i = 1, \ldots, n\}$ est majoré par 1,

$$\begin{aligned} ||f^{(k)}(x)|| &\leqslant |\lambda_{i_0}|^k \sup\{|\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}}|^k, i = 1, \ldots, n\} \\ &\leqslant |\lambda_{i_0}|^k, \end{aligned}$$

et pour $x = e_{i_0}$ il y a égalité, d'où $|||f^{(k)}||| = |\lambda_{i_0}|^k$ et $\rho(f) = |\lambda_{i_0}|$.
Dans tous les cas de f diagonalisable, on a $\rho(f) = \sup\{|\lambda_i|;\ \lambda_i$ valeur propre de $f\}$: c'est le rayon spectral de f.

14. L'espace des suites bornées à valeurs dns $\mathbb{C}$ est complet pour la norme $||u|| = \sup\{|u_n|;\ n \in \mathbb{N}\}$. En effet soit $\left(u^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de suites bornées, qui soit de Cauchy. On a :

$$\boxed{1} \qquad \forall\varepsilon > 0,\ \exists p_0,\ \forall p \geqslant p_0,\ \forall q \geqslant p_0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n^{(p)} - u_n^{(q)}| \leqslant \varepsilon.$$

Si on lit $\boxed{1}$ pour un n fixé, c'est la traduction de $\left(u_n^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$ complet, donc $x_n = \lim\limits_{p\to+\infty} u_n^{(p)}$ existe.

On repart de $\boxed{1}$ avec n fixé, p fixé $\geqslant p_0$, et q tendant vers l'infini on a donc, après passage à la limite :

$$\boxed{2} \qquad \forall\varepsilon > 0,\ \exists p_0,\ \forall p \geqslant p_0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n^{(p)} - x_n| \leqslant \varepsilon$$

si donc x est la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a $||u^{(p)} - x|| \leqslant \varepsilon$ dès que $p \geqslant p_0$. Pour $p = p_0$ en particulier, $u^{(p_0)} - x$ est bornée, comme $u^{(p_0)}$ l'est, la suite x est bornée, et enfin on a $\lim\limits_{p\to+\infty} ||u^{(p)} - x|| = 0$; la suite $(u^{(p)})_{p\in\mathbb{N}}$ converge bien vers x pour la norme de E.

Si de plus les $u^{(p)}$ sont dans E, il reste ici à justifier l'appartenance de x à E.

Pour cela, en notant $l_p = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n^{(p)}$, qui existe, on repart de l'expression $\boxed{1}$ dans laquelle, p et q étant fixés, on fait tendre n vers l'infini : on a

$$\boxed{3} \qquad \forall\varepsilon > 0,\ \exists p_0,\ \forall p \geqslant p_0,\ \forall q \geqslant p_0,\ |l_p - l_q| \leqslant \varepsilon,$$

donc la suite $(l_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Soit l sa limite. Dans $\boxed{3}$, si q tend vers l'infini on a $|l_p - l| \leqslant \varepsilon$ si $p \geqslant p_0$ et finalement, ce même $\varepsilon > 0$ étant fixé au départ, on passera de l à x_n en passant par $u_n^{p_0}$: pour cela, on traduit la convergence des $\left(u_n^{(p_0)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l_{p_0} : à cet $\varepsilon > 0$, on associe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n^{(p_0)} - l_{p_0}| \leqslant \varepsilon$, et alors, à $\varepsilon > 0$, on associe n_0, tel que $\forall n \geqslant n_0$:

$$|l - x_n| \leqslant |l - l_{p_0}| + |l_{p_0} - u_n^{(p_0)}| + |u_n^{(p_0)} - x_n| \leqslant 3\varepsilon,$$

d'où la convergence de la suite x des x_n vers l. L'espace E est complet.

La linéarité de f est évidente. Puis si $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, pour tout n, $|u_n| \leqslant ||u||$, à la limite, $|l| \leqslant ||u||$ donc $|f(u)| \leqslant |\alpha|\ ||u|| + \sum\limits_{n=0}^{\infty} |\beta_n|\ ||u||$ soit encore $|f(u)| \leqslant \left(|\alpha| + \sum\limits_{n=0}^{\infty} |\beta_n|\right) ||u||$: f est Lipschitzienne donc continue.

15. L'ensemble E est sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ car si f et g sont dans E, si $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, par inégalité triangulaire on aura

$$|(\lambda f+\mu g)(x)-(\lambda f+\mu g)(y)|\leqslant(|\lambda|k(f)+|\mu|k(g))\sqrt{|x-y|}.$$

L'existence d'une constante $k(f)$ assure l'existence de

$$\sup\left\{\frac{|f(x)-f(g)|}{\sqrt{1x-y|}};\ (x,y)\in[0,1]^2,\ x\neq g\right\}$$

donc celle de $||f||$, et on vérife facilement que l'on a une norme.
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E pour cette norme, *a fortiori* elle est de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ pour $||\ ||_\infty$. Or cet espace est complet, donc les f_n convergent déjà uniformément vers f continue. (Voir chapitre 12).
Est-ce que $f\in E$, et y a-t-il convergence pour la norme de E considérée ici ? Pour le voir on repart de la traduction « suite de Cauchy » :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N,\ \forall n\geqslant N,\ \forall m\geqslant N,\ \forall(x,y)\in[0,1]^2,\ x\neq y,$$
$$||f_n-f_m||_\infty+\frac{|f_n(x)-f_m(x)-(f_n(y)-f_m(y))|}{\sqrt{|x-y|}}\leqslant\varepsilon.$$

A fortiori on a $\dfrac{1}{\sqrt{|x-y|}}|f_n(x)-f_m(x)-(f_n(y)-f_m(y))|\leqslant\varepsilon.$
On fixe x et y et on fait tendre m vers l'infini, (n fixé $\geqslant N$) on a la limite $\dfrac{1}{\sqrt{|x-y|}}|(f_n-f)(x)-(f_n-f)(y)|\leqslant\varepsilon$ donc $f_n-f\in E$, $(\varepsilon=k(f_n-f))$, d'où $f\in E$ puisque $f_n\in E$, espace vectoriel; mais on a aussi, pour $n\geqslant N$

$$\sup\left\{\frac{|(f_n-f)(x)-(f_n-f)(y)|}{\sqrt{|x-y|}};\ x\neq y\right\}\leqslant\varepsilon$$

et $||f_n-f||_\infty\leqslant\varepsilon$, (vient de $||f_n-f_m||_\infty\leqslant\varepsilon$, et $m\to+\infty$) d'où $||f_n-f||\leqslant2\varepsilon$ pour tout $n\geqslant N$, ce qui traduit bien la convergence des f_n vers f dans E qui est donc complet.

16. Si f, de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas, elle est de signe constant, (théorème des valeurs intermédiaires), par exemple f reste à valeurs >0, (quitte à changer f en $-f$), mais alors f continue sur $[a,b]$ compact, à valeurs réelles, est bornée et atteint ses bornes : il existe m et M tels que

$$m=\inf\{f(x),\ x\in[a,b]\}\text{ et }M=\sup\{f(x),\ x\in[a,b]\}$$

et $\exists x_1\in[a,b]$ tel que $m=f(x_1)$ d'où $m>0$.

Mais alors, si g de E est telle que $||f-g||_\infty \leqslant \frac{m}{2}$, pour tout x de $[a,b]$ on aura $g(x) \geqslant f(x) - \frac{m}{2} \geqslant m - \frac{m}{2} > 0$ donc g ne s'annule pas : on a trouvé $\mathcal{B}_0(f, \frac{m}{2})$ contenue dans H qui est donc ouvert.
Avec les mêmes notations, et avec $||f-g||_\infty \leqslant \frac{m}{2}$, on a

$$|\varphi(f)(x) - \varphi(g)(x)| = \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}\right| = \frac{|g(x)-f(x)|}{|f(x)g(x)|}$$

avec $|f(x)| \geqslant m$ et $|g(x)| \geqslant \frac{m}{2}$ donc $|f(x)g(x)| \geqslant \frac{m^2}{2}$ cela conduit à $||\varphi(f) - \varphi(g)||_\infty \leqslant \frac{2}{m^2}||f-g||_\infty$.
Soit alors $\varepsilon > 0$, $f \in H$, (d'où m associé à f), il existe

$$\alpha = \inf\left(\frac{m}{2}, \frac{m^2}{2}\varepsilon\right) \text{ tel que } ||f-g||_\infty \leqslant \alpha \Rightarrow ||\varphi(f) - \varphi(g)||_\infty \leqslant \varepsilon$$

d'où la continuité de φ.

17. La boule unité fermée de E vectoriel normé de dimension finie est un compact, donc la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de ce compact admet une suite extraite $(x_{\varphi(k)})_{k\in N}$ convergente. On a donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0,\ \forall k \geqslant k_0,\ \forall k' > k,\ d\left(x_{\varphi(k)},\ x_{\varphi(k')}\right) \leqslant \varepsilon.$$

Soit alors un indice q fixé, on fixe $k \geqslant k_0$ tel que $\varphi(k) \geqslant q$.
C'est possible car $\lim\limits_{k\to+\infty} \varphi(k) = +\infty$.
Pour tout $k' \geqslant k$, on a alors $x_{\varphi(k)} = f^{\varphi(k)-q}(x_q)$, et $x_{\varphi(k')} = f^{\varphi(k)-q}\left(x_{\varphi(k')-\varphi(k)+q}\right)$ vu la définition des x_k.
Comme f est une isométrie, $d(x_{\varphi(k)}, x_{\varphi(k')}) = d(x_q, x_{\varphi(k')-\varphi(k)+q})$ et on a donc, q étant fixé, pour tout $\varepsilon > 0$, une suite strictement croissante d'indices, les $\varphi(k') - \varphi(k) + q$ pour $k' \geqslant k$ tels que $d(x_q, x_{\text{ces indices}}) \leqslant \varepsilon$.
Il est facile de construire une suite extraite de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x_q donc chaque x_q est valeur d'adhérence de la suite des x_k.
Mais alors chaque x_q, (et donc en particulier x_0) sera dans l'adhérence de $f(B)$. Or f, isométrie, est continue et B est compact donc $f(B)$ est un compact de $\mathbb{R}^n$, donc un fermé. Finalement on a : $x \in \overline{f(B)} = f(B)$ pour tout x de B et l'égalité $B = f(B)$.

18. L'adhérence de F sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel car $\overline{F}$ non vide, $(F \subset \overline{F})$, et si x et y sont dans $\overline{F}$, avec $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suites de F qui convergent vers x et y, si λ et μ sont réels,

$\lim\limits_{n\to+\infty}(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda x + \mu y$. Or les $\lambda x_n + \mu y_n$ sont dans F, (sous-espace vectoriel) donc $\lambda x + \mu y \in \overline{F}$.

Mais alors, si H est un hyperplan, on a $H \subset \overline{H} \subset E$ et si H n'est pas fermé, $H \underset{\neq}{\subset} \overline{H}$, il existe $a \in \overline{H} \setminus H$, donc $H \oplus \mathbb{R}a \subset \overline{H}$, or $H \oplus \mathbb{R}a = E$ puisque H est un hyperplan ne contenant pas a, d'où $\overline{H} = E$ dans ce cas.

Soit u dans le dual, elle est discontinue si et seulement si elle n'est pas bornée sur la sphère unité, ce qui permet de construire, $\forall n \in \mathbb{N}$, y_n avec $||y_n|| = 1$ et $|u(y_n)| > n$, (sinon n majorerait les $|u(y)|$, pour y sur la sphère unité.

En posant $x_n = \dfrac{1}{u(y_n)} \cdot y_n$, on a $u(x_n) = 1$, et $||x_n|| < \dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Réciproquement, si on a une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 avec $u(x_n) = 1$, u n'est pas continue, sinon $u(x_n)$ devrait tendre vers $0 = u(0)$.

Avec les notations du texte, $x \in H \Leftrightarrow \lambda(x) = 0$. Donc si λ est continue, $H = \lambda^{-1}(\{0\})$ est fermé de E.

Si λ n'est pas continue, en appliquant ce qui précède on a des x_n qui convergent vers 0 avec $\lambda(x_n) = 1$. Mais alors $x_n = \lambda(x_n)a + v(x_n) = a + v(x_n)$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - a) = -a$, avec les $v(x_n) \in H$ et $-a \notin H$: H n'est pas fermée on a donc fermé $\Leftrightarrow$ λ est une forme continue.

Soit enfin $H = \mathrm{Ker} u$ avec u dans le dual. SI $u = 0$, elle est continue et $\mathrm{Ker} u = E$ est fermé dans ce cas. On suppose donc $u \neq 0$, soit a de norme 1 non dans H. Alors $E = \mathbb{R}a \oplus H$, et si $x = \lambda(x)a + v(x)$ avec $v(x) \in H = \mathrm{Ker} u$ on aura $u(x) = \lambda(x)u(a)$, donc la forme u est encore égale à $u(a) \cdot \lambda$. On a donc (u continue) $\Leftrightarrow$ (λ continue), car $u(a) \neq 0 \Leftrightarrow$ (H fermé) d'après ce qui précède.

19. La translation $\mathcal{T}_b : x \rightsquigarrow x + b$ de E dans E est continue (car 1-Lipschitzienne), bijective de réciproque $\mathcal{T}_{-b}$ donc aussi continue. Donc $\mathcal{T}_b$ est un homéomorphisme, et $\mathcal{T}_b(A) = A + \{b\}$ est alors ouvert si A est ouvert.

Mais alors A ouvert $\Rightarrow A + B = \bigcup\limits_{b\in B}(A + \{b\})$ est ouvert comme réunion d'ouverts.

Si A et B sont compacts, $A \times B$ est compact de $E \times E$ et l'addition étant continue de $E \times E$ dans E séparé ici, l'image de $A \times B$ c'est-à-dire $A + B$ est un compact de E.

Si A est compact et B fermé, soit $x_n = a_n + b_n$ le terme général d'une suite convergeant vers $x \in \overline{A + B}$.

De la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A compact, on extrait une suite $\left(a_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $a \in A$; mais alors les $b_{\varphi(n)} = x_{\varphi(n)} - a_{\varphi(n)}$ convergent vers $x - a$, or ils sont dans B fermé, donc $x - a \in B$ et finalement $x \in A + B$, d'où $\overline{A + B} \subset A + B$. On a bien $A + B$ fermé.

Si $A = \{(x, y) \in R^2, xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times] - \infty, 0]$, on a 2 fermés de R^2, mais $A + B$ est non fermé, (les points de $\{0\} \times \mathbb{R}$ sont adhérents à $(A + B)$ mais non dans $(A + B)$).

20. La relation $f \circ g - g \circ f = id_E \Rightarrow f \circ g^2 - g \circ f \circ g = g$.
Or $g \circ f \circ g = g \circ (f \circ g) = g \circ (g \circ f + id_E)$ donc $f \circ g^2 - g \circ f \circ g = g$ devient $f \circ g^2 - g^2 \circ f - g = g$ d'où $f \circ g^2 - g^2 \circ f = 2g$. Si, pour $n \geqslant 2$, on a $f \circ g^n - g^n \circ f = ng^{n-1}$ en multipliant à droite par g on a $f \circ g^{n+1} - g^n f \circ g = ng^n \Rightarrow f \circ g^{n+1} - g^n(g \circ f + \mathrm{id}_E) = ng^n$ d'où $f \circ g^{n+1} - g^{n+1} \circ f = (n+1)g^n$, relation vraie $\forall n \geqslant 0$ en fait.
Si f et g sont continues, en prenant la norme d'application linéaire continue, on aura $n|||g^{n-1}||| \leqslant 2|||f|||\ |||g|||\ |||g^{n-1}|||$ pour tout n.
Or si on avait $g^{n-1} = 0$, la relation $f \circ g^{n-1} - g^{n-1} \circ f = (n-1)g^{n-2}$ donnerait $g^{n-2} = 0$ et on arriverait à $g = 0$, mais $f \circ g - g \circ f = id_E$ ne serait plus vérifiée. On simplifie par $|||g^{n-1}||| > 0$, on aurait donc, si f et g étaient continues, $n \leqslant 2|||f|||\ |||g|||$ et ce pour tout $n \geqslant 0$: c'est absurde.
Donc f et g ne sont pas simultanément continues.

21. Si p est la projection sur F parallèlement à G on a $G = \operatorname{Ker} p$, donc p continue $\Rightarrow G = p^{-1}(\{0\})$ fermé, (les singletons étant fermés dans E séparé). Mais de même le projecteur $q = \mathrm{id}_E - p$ est continu et son noyau F est fermé.
Si E est complet, F et G fermés dans un complet sont complets.
Supposons maintenant $E = F \oplus G$, avec F et G complets, et les projections p et q sur F et G respectivement, continues.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. On décompose X_n en $X_n = Y_n + Z_n$ avec $Y_n \in F$, $Z_n \in G$.
Les projections p et q, linéaires continues sont uniformément continues, donc les suites $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans F et G complets : elles convergent. Soient Y et Z leurs limites, la continuité de l'addition implique $\lim\limits_{n\to+\infty} X_n = Y + Z$, donc E est complet.

22. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de E. On a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \forall n \geqslant N,\ \forall m \geqslant N,\ ||f_n - f_m||_\infty + ||f'_n - f'_m||_\infty \leqslant \varepsilon.$$

A fortiori les 2 suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sont de Cauchy dans F qui est complet pour la norme de la convergence uniforme.
Il y a donc convergence uniforme sur $[0,1]$ des f'_n vers une fonction g, et comme il y a convergence uniforme (donc en un point) des f_n vers une fonction f, on a f dérivable, de dérivée égale à g. (Voir chapitre 12). Mais alors :

$$||f_n - f||_\infty + ||f'_n - g||_\infty = ||f_n - f||_\infty + ||f'_n - f'||_\infty = ||f_n - f||$$

et cette expression tend vers 0, donc E est complet.
Il est clair que θ est linéaire de F dans E, (linéarité de l'intégrale), et

$$||\theta(f)|| = ||\theta(f)||_\infty + ||(\theta(f))'||_\infty = ||\theta(f)||_\infty + ||f||_\infty$$

Or $|\theta(f)(x)| = \left|\displaystyle\int_0^x f(t)dt\right| \leqslant \displaystyle\int_0^x ||f||_\infty dt \leqslant ||f||_\infty$ puisque $x \in [0,1]$
d'où $||\theta(f)|| \leqslant 2||f||_\infty$, d'où θ continue et $|||\theta||| \leqslant 2$.

Avec f constante égale à 1, $||f||_\infty = 1$, $\theta(f)(x) = x \Rightarrow ||\theta(f)||_\infty = 1$, $||(\theta(f))'||_\infty = 1$ donc $||\theta(f)|| = 2$ il en résulte que $|||\theta||| = 2$.

23. L'application $v : Q \rightsquigarrow Q(2)$ est linéaire de E dans $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, son noyau H est un hyperplan de E.
L'application v est discontinue, car $\forall n$, $P_n(X) = X^n$ est de norme 1 or $v(P_n) = 2^n$ n'est pas borné.
Donc $H = \operatorname{Ker} v$ n'est pas fermé, (voir exercice 18), on a donc $H \subsetneqq \overline{H}$, donc $\overline{H} = E$. Mais alors si H est partout dense dans E, $\forall P \in E$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists Q \in H$, $||P - Q|| < \varepsilon$, et Q dans H correspond à $Q(2) = 0$.

24. Il est évident que $N(P) \geqslant 0$; $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $N(\lambda P) = |\lambda| N(P)$, et que $\forall (P, Q) \in E^2$, $N(P + Q) \leqslant N(P) + N(Q)$ donc on a une semi-norme.
Par contre $N(P) = 0 \Leftrightarrow P$ multiple de $(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_p)$ et si $p \leqslant n$, on peut avoir ceci pour P non nul dans E.
Par contre, si $P \geqslant n + 1$, P de degré n au plus ne peut pas avoir plus de $n + 1$ zéros distincts sans être nul, d'où (N norme) $\Leftrightarrow$ $(p \geqslant n + 1)$.
L'application $u : P \rightsquigarrow P'$ est alors linéaire de E dans E donc continue (car dim E fini), donc $\forall P$, $||u(P)|| \leqslant |||u|||\ ||P||$ soit encore

$$\sum_{i=1}^{P} |P'(z_i)| \leqslant |||u||| \sum_{i=1}^{P} |P(z_i)|.$$

25. Pour $k \leqslant n$, soit f_k l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui au polynôme P associe $f_k(P) =$ le coefficient de degré k dans P.
Les polynômes unitaires de degré n sont les éléments de $A_n = f_n^{-1}(\{1\})$, ceux unitaires de degré $n-1$ les éléments de $A_{n-1} = f_n^{-1}(\{0\}) \cap f_{n-1}^{-1}(\{1\})$ et plus généralement, les polynômes unitaires de degré $k < n$ sont les éléments de $A_k = \left(\bigcap_{i=n}^{k+1} f_i^{-1}(\{0\}) \right) \cap f_k^{-1}(\{1\})$.
Comme les formes linéaires f_k de E, espace vectoriel de dimension finie, dans $\mathbb{R}$ sont continues, les A_k sont fermés et $A = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ est un fermé de E, et ce quelle que soit la norme sur E.
Mais alors la distance de 0 à A étant égale à la distance de 0 au compact $B = A \cap \mathcal{B}_f(0, ||P_0||)$, si $P_0 \in A$, elle est atteinte et comme $0 \notin A$, elle est strictement positive. En prenant pour a, b ou c cette distance suivant que la norme sur E est $||P||_\infty = \sup\{|P(x)|; x \in [0, 1]\}$ ou $||P||_1 = \int_0^1 |P(x)| dx$ ou $||P||_2 = \left(\int_0^1 P^2(x) dx \right)^{1/2}$ on répond à la question.

26. Sur $\mathcal{L}(E)$ espace vectoriel normé de dimension finie toute les normes sont équivalentes, on prend celle d'application linéaire continue.

Si, pour tout p, $|||f^p||| \leqslant M$, on a $|||g_p||| \leqslant \frac{1}{p} \cdot pM = M$, la suite $(g_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est dans $\mathcal{B}_f(0, M)$ fermée bornée donc compacte : elle admet une valeur d'adhérence v. Si on prouve qu'elle n'en a qu'une elle sera convergente vers v, (Corollaire 2.7).

Comme $(f - I)g_p = \frac{1}{p}(f^p - I)$, on a $|||(f - I)g_p||| \leqslant \frac{1}{p}(M + M)$ donc $\lim_{p \to +\infty} (f - I)g_p = 0$. Avec $v = \lim_{k \to +\infty} g_{\varphi(k)}$, (suite extraite qui converge) on a donc $(f - I)_0 v = 0 = v \circ (f - I)$ car $f - I$ et les $g_{\varphi(k)}$, polynômes en f, commutent. Mais alors $(Imv) \subset \operatorname{Ker}(f - I)$ et $Im(f - I) \subset \operatorname{Ker} v$.

De plus, si $x \in \operatorname{Ker}(f - I)$, $f(x) = x$, donc, $\forall k, f^k(x) = x$ et $g_p(x) = \frac{1}{p} \cdot px = x$ donc $g_{\varphi(k)}(x) = x$ converge vers $v(x)$ d'où $x = v(x) \in Imv$: on a $Imv = \operatorname{Ker}(f - I)$; mais alors $Im(f - I)$ est sous-espace de dimension $\dim(E) - \dim \operatorname{Ker}(f - I)$ de $\operatorname{Ker} v$ lui-même de dimension $\dim E - \dim \operatorname{Ker}(f - I)$ donc $Im(f - I) = \operatorname{Ker} v$. Pour justifier que v est un projecteur on est amené à justifier que $Im(f - I)$ et $\operatorname{Ker}(f - I)$ sont en somme directe, donc, vu les dimensions, que $Im(f - I) \cap \operatorname{Ker}(f - I) = \{0\}$. Soit $y \in Im(f - I) \cap \operatorname{Ker}(f - I)$, écrit sous la forme $y = f(x) - x$, avec $f(y) = y$ soit $f^2(x) - f(x) = f(x) - x$ ou $f^2(x) = 2f(x) - x$, soit encore $f^2(x) = 2(y + x) - x = 2y + x$.

Si on suppose que $f^p(x) = py + x$ on aura $f^{p+1}(y) = pf(y) + f(x)$ soit $f^{p+1}(y) = py + y + x = (p + 1)y + x$: c'est récurrent.

Donc $\forall k$, $f^k(y) = ky + x$ avec $\left(f^k(y)\right)_{k \in \mathbb{N}}$ suite bornée, c'est que $y = 0$ d'où $E = Im(f - I) \oplus \operatorname{Ker}(f - I) = Imv \oplus \operatorname{Ker} v$.
On a vu que $\forall x \in \operatorname{Ker}(f - I) = Imv$, $v(x) = x$, donc si y de E se décompose en $y = x + z$ avec $x \in Imv$ et $z \in \operatorname{Ker} v$ on aura $v(y) = x$: v est le projecteur sur $\operatorname{Ker}(f - I)$ parallèlement à $Im(f - I)$, et cette unicité de la valeur d'adhérence prouve la convergence de la suite initiale.

27. Les K_n, compacts sont fermés donc $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est un fermé de E, c'est un fermé contenu dans l'un quelconque des K_n, compact, c'est donc un compact, non vide car avec les K_n fermés de K_0, d'intersection vide, il y aurait une famille finie des K_n d'intersection vide, étant comparables par inclusion ce serait le plus petit qui est non vide, donc K est déjà compact non vide.

Si K est non connexe, il existe F_1 et F_2 fermés disjoints non vides de K, de réunion K. Etant fermés de K compact, F_1 et F_2 sont compacts de E, (car de K); étant compacts disjoints de E métrique, leur distance d et > 0 et les ouverts O_1 et O_2 définis par $O_1 = \{x;\ d(x, F_1) < \frac{d}{2}\}$ et $O_2 = \{x;\ d(x, F_2) < \frac{d}{2}\}$ sont 2 ouverts de E disjoints les contenant.

Soit alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $H_n = (E \setminus (O_1 \cup O_2)) \cap K_n$.
Si $H_n = \varnothing$, $K_n \subset (O_1 \cup O_2)$, donc $K_n = (K_n \cap O_1) \cup (K_n \cap O_2)$ avec $O_1 \cap K_n$ ouvert de K_n contenant $F_1 \cap K_n$.

Or $F_1 = F_1 \cap K \subset F_1 \cap K_n$, donc F_1 non vide est dans $O_1 \cap K_n$, de même F_2 non vide est dans $O_2 \cap K_n$, ceci est absurde, K_n étant connexe, et $(O_1 \cap K_n, O_2 \cap K_n)$ formant une partition de K_n en deux ouverts. Donc H_n est non vide pour tout n. De plus les H_n sont des fermés de K_n, donc tous sont des fermés de K_0, de plus, vu leur forme, ils décroissent comme les K_n, donc leur intersection est non vide.

Mais $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n = (E \setminus (O_1 \cup O_2)) \cap (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n) = (E \setminus (O_1 \cup O_2)) \cap K$

avec $K = F_1 \cup F_2 \subset O_1 \cup O_2$, on a donc $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n = \varnothing$: c'est absurde.

Finalement K est connexe.

CHAPITRE 7

Fonctions de variable réelle, à valeurs réelles

Pourquoi ce chapitre particulier alors que la continuité par exemple se traite dans le cadre plus général des espaces topologiques. C'est parce que la structure de corps ordonné sur $\mathbb{R}$ va nous donner des propriétés liées aux maxima et minima, à la monotonie des applications et nous permettre de définir la notion de dérivée, qui sera généralisée au chapitre 16 par celle de différentiabilité dans le cadre des espaces vectoriels normés.

Ce chapitre sera donc rédigé en dégageant l'importance de la structure ordonnée de $\mathbb{R}$.

1. Continuité

Faisons d'abord le point sur ce qui est déjà connu. Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés de $\mathbb{R}$, (Corollaire 2.16).

Les connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$, (Théorème 3.6 et Corollaire 4.77).

Nous avons vu également qu'une fonction continue d'un compact (par exemple un segment $[a, b]$) dans $\mathbb{R}$ est uniformément continue (Théorème 4.61), de plus, si le compact est non vide, f est bornée et atteint ses bornes, (Corollaire 2.19).

Passons aux propriétés plus spécifiquement réelles, en faisant d'abord intervenir l'ordre sur $\mathbb{R}$, pour la variable.

DÉFINITION 7.1. — *Soit x_0 un point intérieur à l'intervalle I de $\mathbb{R}$, et f une application de I dans $\mathbb{R}$ (ou plus généralement dans E espace topologique). On dit que f est continue à droite, (resp. à gauche) en x_0 si et seulement si* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$, (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$.

Si I est du type $[a, b)$ on peut bien sûr parler de continuité à droite en a ; de même si $I = (a, b]$ pour la continuité à gauche en b.

On peut facilement vérifier que, pour x_0 intérieur à I, on a f continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0.

Si x_0 est un point de discontinuité, ce peut être parce que l'une au moins des limites à droite ou à gauche, en x_0, n'existe pas, ou bien parce qu'elles existent mais que l'une au moins est différente de $f(x_0)$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = l_1$ et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_2$, en x_0 intérieur à I et si $l_1 = l_2$, en posant $f(x_0) = l_1 = l_2$ on prolonge f par continuité en x_0. Même démarche avec une seule limite si x_0 est une borne de I.

DÉFINITION 7.2. — *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$, ou E topologique), et x_0 un point de discontinuité de f, intérieur à I. Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0)$ et $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0)$ existent, la discontinuité est dite de première espèce.*

Si de plus $f(x_0) = \dfrac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$, (ce qui suppose E vectoriel sur $\mathbb{R}$) on parle de discontinuité régulière.

On rencontrera ces fonctions au chapitre 15, dans le cadre des séries de Fourier.

Voici un résultat lié cette fois au fait que les valeurs de f sont réelles.

THÉORÈME 7.3. — *Soit X topologique, $f : X \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue en $x_0 \in X$. Si $f(x_0) \neq 0$, f est localement, (en x_0), du signe de $f(x_0)$.*

Soit $\varepsilon = \dfrac{|f(x_0)|}{2}$, il existe un voisinage $V(x_0)$ tel que, pour tout x de $V(x_0)$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$, soit encore

$$f(x_0) - \frac{|f(x_0)|}{2} \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + \frac{|f(x_0)|}{2}.$$

Si $f(x_0) > 0$ cette double inégalité implique $f(x) \geqslant \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$, alors que $f(x_0) < 0$ implique

$$f(x) \leqslant f(x_0) + \frac{-f(x_0)}{2}$$

soit
$$f(x) \leqslant \frac{f(x_0)}{2} < 0.$$

Dans chaque cas, on a bien f du signe de $f(x_0)$ sur le voisinage $V(x_0)$. ■

C'est ce théorème qui permettra, au chapitre suivant sur les intégrales, de dire que pour une fonction f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, à valeurs positives, non identiquement nulle, on a $\int_a^b f(t)dt > 0$.

La connaissance des connexes de $\mathbb{R}$, nous donne le **théorème dit des valeurs intermédiaires.**

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et si f est continue de I dans $\mathbb{R}$, $f(I)$, image continue d'un connexe est un connexe de $\mathbb{R}$, (Théorème 3.8), donc un intervalle. On va en déduire le :

THÉORÈME 7.4. — *Soit f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Si $f(a)f(b) < 0$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Si par exemple $f(a) < 0 < f(b)$, les réels $f(a)$ et $f(b)$ sont dans l'intervalle $f([a, b])$, donc le segment $[f(a), f(b)]$ est contenu dans l'intervalle $f([a, b])$, (caractérisation des intervalles vue au théorème 3.5) : en particulier $0 \in f([a, b])$. Comme $f(a) \neq 0$ et $f(b) \neq 0$, un antécédent de 0 est forcément dans $]a, b[$. ■

7.6. Cet énoncé est le point de départ du calcul des zéros des fonctions continues : il permet de déterminer des segments les contenant, *et la dichotomie*, (examen du signe de $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ pour déterminer un segment plus petit contenant un zéro) donnant un moyen de calculer une valeur approchée d'un zéro. Ceci nécessite la détermination d'un segment contenant un seul zéro, et c'est l'étude de la monotonie éventuelle de f qui résoudra cette question.

COROLLAIRE 7.7. — *Théorème des valeurs intermédiaires. Soit f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, de bornes supérieure et inférieure M et m. Pour tout $\gamma \in [m, M]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$.*

La fonction f, continue de $[a, b]$ compact dans $\mathbb{R}$ est bornée, et ses bornes m et M sont atteintes, disons en u et v. L'image continue de l'intervalle d'extrémités u et v est un intervalle contenant $m = f(u)$ et $M = f(v)$, donc contenant le segment $[m, M]$, donc contenant γ.

Il existe alors c entre u et v, (*a fortiori* entre a et b) tel que $f(c) = \gamma$. ■

REMARQUE 7.8. — *On a alors* $f([a, b]) = [m, M]$, puisque tout γ de $[m, M]$ est dans l'image, elle-même contenue dans $[m, M]$.

On peut donc dire que l'image continue d'un segment, par f à valeurs réelles, est un segment; alors que l'image continue d'un intervalle I est un intervalle J pas forcément de même nature.

Par exemple, par la fonction cosinus, $I =]-\infty, +\infty[$, ouvert, à pour image $[-1, 1]$; mais $[0, \frac{3\pi}{2}[$ aurait aussi $[-1, 1]$ pour image.

2. Fonctions monotones, fonctions réciproques

La notion de croissance ou de décroissance exige une structure d'ordre sur l'ensemble de départ et celui d'arrivée. Elle se formule donc très bien dans le cadre qui nous occupe.

DÉFINITION 7.9. — *Une fonction f définie sur une partie I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles est dite croissante, (resp. décroissante) si et seulement si $\forall (x, y) \in I^2$, $x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$).*

Autrement dit, (f croissante) $\Leftrightarrow$ (f morphisme pour la structure d'ordre), voir la définition 2.21 d'Algèbre.

On parle de croissance stricte lorsque l'on a $f(x) < f(y)$ dans la formulation de 7.9.

7.10. Il est clair que f croissante $\Leftrightarrow -f$ décroissante. On appellera *fonction monotone* sur I, une fonction qui est soit croissante, soit décroissante sur I, la monotonie pouvant être stricte ou large.

7.11. Si f est *strictement monotone elle est injective*, car x et y étant deux éléments distincts de I, donc de $\mathbb{R}$ totalement ordonné on a par exemple $x < y$ d'où $f(x) < f(y)$ si f est strictement croissante, ou $f(x) > f(y)$ en cas de décroissance, mais $f(x) \neq f(y)$ dans les deux cas.

Si de plus I est un intervalle, et si f est continue, $f(I)$ sera un intervalle et f réalisera une bijection de I sur $J = f(I)$. En fait l'application réciproque f^{-1} va alors être continue.

En effet on sait que toute bijection continue de K compact sur E séparé est bicontinue, (Corollaire 2.20). Supposons d'abord que $I = [a, b]$, I est compact, $\mathbb{R}$ est séparé, donc f bijective continue est telle que f^{-1} est continue sur $f(I)$.

Soit maintenant I quelconque, f bijective continue de I sur $f(I)$ et $y_0 = f(x_0) \in f(I) = J$. Supposons f strictement croissante.

Si y_0 n'est pas une borne de J, il existe y_1 et y_2 dans J tels que $y_0 \in]y_1, y_2[\subset [y_1, y_2] \subset J$, et avec $x_1 = f^{-1}(y_1)$ et $x_2 = f^{-1}(y_2)$, la remarque précédente appliquée à la restriction de f à $[x_1, x_2]$ donne la continuité en y_0 de la restriction de f^{-1} à $[y_1, y_2]$ d'où la continuité de f^{-1} en y_0, intérieur à $[y_1, y_2]$.

Si y_0 est une borne de J, borne supérieure par exemple, on introduit de même $y_1 = f(x_1)$ tel que $y_0 \in]y_1, y_0] \subset [y_1, y_0] \subset J$ et la conclusion demeure, la continuité de f^{-1} en y_0 étant ici une continuité à gauche.

On obtient donc le

THÉORÈME 7.12. — *Soit f une fonction continue strictement monotone d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. Alors f réalise une bijection bicontinue de I sur l'intervalle $J = f(I)$. De plus les monotonies de f et f^{-1} sont les mêmes.*

Seul le dernier point reste à justifier. Supposons f strictement croissante de I sur J et soient y_1 et y_2, avec $y_1 < y_2$, deux éléments de J. Si $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$ la stricte croissance de f impliquerait $y_1 \geqslant y_2$: c'est exclu, d'où $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$: on a bien f^{-1} strictement croissante. ■

REMARQUE 7.13. — *Avec f continue strictement monotone sur l'intervalle I, les natures des intervalles I et $f(I)$ sont les mêmes cette fois (aspect bijectif de f).*

REMARQUE 7.14. — Dans un repère normé du plan, les couples (α, β) et (β, α) étant représentés par des points symétriques par rapport à la première bissectrice, les graphes de f continue strictement monotone, et de sa réciproque f^{-1} sont aussi symétriques par rapport à la première bissectrice.

Mon propos étant de mettre en évidence le rôle joué par la connexité et la compacité, dans le cas particulier de $\mathbb{R}$, pour le passage d'une fonction strictement monotone continue à sa réciproque j'arrête là ce paragraphe, laissant à d'autres le soin de parler d'Arccos, Arctg, Argsh... Et ce d'autant plus qu'il est 8 heures, qu'après l'orage de cette nuit le ciel est dégagé, et que je vais aller me promener avec mon épouse.

3. Dérivation

C'est plusieurs mois après cette promenade, qui fut suivie de beaucoup d'autres que je reprends la plume pour vous entretenir de la dérivation.

DÉFINITION 7.15. — *Soit f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel normé E. Elle est dite dérivable en x_0 intérieur à I si et seulement si* $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I - \{x_0\}}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *existe.*

7.16. Cette limite, notée $f'(x_0)$, *est la dérivée en x_0 de f*, et si f est dérivable en chaque x de I l'application qui à x de I associe $f'(x)$ est la *fonction dérivée.*

De même que pour la continuité à droite ou à gauche, on peut parler de *dérivabilité à droite (resp. à gauche)* de f en x_0 lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0, x \in I}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, (et on notera $f'_d(x_0)$ ou $f'(x_0 + 0)$ cette dérivée à droite). On a de même

$$f'_g(x_0) \text{ ou } f'(x_0 - 0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0, x \in I}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

lorsque cette limite existe.

Une notation pratique : il sera commode de dire que f est dérivable en x_0, de dérivée $f'(x_0)$ si et seulement si, pour x voisin de x_0 (mais $x \neq x_0$) on définit $\varepsilon(x) \in E$ par :

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0,$$

7.17. ou encore que $f(x) - f(x_0) = (x - x_0) f'(x_0) + o(x - x_0)$.

C'est cette notation « petit o » que l'on retrouvera dans le cadre du calcul différential où on ne pourra plus « diviser » par l'accroissement de la variable si celle-ci est de nature vectorielle.

THÉORÈME 7.18. — *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, E espace vectoriel normé et f une application de I dans E dérivable (resp. à droite, à gauche) en x_0, alors f est continue (resp. à droite, à gauche) en x_0.*

Comme $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I - \{x_0\}}} \varepsilon(x) = 0$, on a bien $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in I - \{x_0\}}} f(x) = f(x_0)$. Le cas dérivable à droite où à gauche ne diffère que par la condition $x > x_0$ ou $x < x_0$, d'où la continuité à droite ou à gauche. ■

La continuité de l'addition, de $E \times E \mapsto E$, et du produit par un scalaire, de $\mathbb{R} \times E$ dans E, permet de justifier aisément le

THÉORÈME 7.19. — *Si f et g de I dans E sont dérivables en x_0, si λ et μ sont des scalaires réels, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en x_0 de dérivée $(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$.*

Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{D}(I, E)$ des applications dérivables de I, (intervalle de $\mathbb{R}$) dans E, (espace vectoriel normé) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que la dérivation est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(I, E)$.

7.20. On introduira aussi le sous-espace $\mathcal{C}^1(I, E)$ des applications dérivables de dérivée continue, de I dans E, sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(I, E)$ et plus généralement $\mathcal{C}^p(I, E)$ sous-espace des applications p fois dérivables, de dérivée $p^{\text{ième}}$ continue et ceci pour $p \in \mathbb{N}^+$. Par applications successives du théorème 7.18, f $f', \dots, f^{(p-1)}$ sont continues. Enfin on notera $\mathcal{C}^\infty(I, E)$ l'espace vectoriel des applications de I dans E ayant des dérivées, de tout ordre, donc aussi toutes continues d'après le théorème 7.18.

Cas de $E = \mathbb{R}$ et du produit de deux fonctions.

THÉORÈME 7.21. — *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}^* U\{\infty\}$, est une algèbre commutative, et on a, pour q entier et f et g q fois dérivables, $(fg)^{(q)} = \sum\limits_{k=0}^{q} C_q^k f^{(k)} g^{(q-k)}$, formule dite de Liebnitz.*

Ce résultat se justifie par récurrence sur q.

Pour $q = 1$, on a :

$$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x)(g(x) - g(x_0))}{x - x_0} + \frac{(f(x) - f(x_0))g(x_0)}{x - x_0}$$

et la dérivabilité de f et g en x_0, jointe à la continuité de f implique :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0),$$

formule au rang $q = 1$, mémorisée par une foultitude d'entre-vous sous l'aspect $(uv)' = u'v + uv'$.

Si la formule est vraie à l'ordre $q-1$, par linéarité de la dérivation on a :

$$\begin{aligned}(fg)^{(q)} = \left((fg)^{(q-1)}\right)' &= \sum_{k=0}^{q-1} C_{q-1}^k \left(f^{(k)}g^{(q-1-k)}\right)' \\ &= \sum_{k=0}^{q-1} C_{q-1}^k \left(f^{(k+1)}g^{(q-1-k)} + f^{(k)}g^{(q-k)}\right).\end{aligned}$$

On a donc une somme $k+1+q-1-k$ ou $k+q-k$ qui vaut q, et on peut réordonner en :

$$\begin{aligned}(fg)^{(q)} &= C_{q-1}^0 f^{(0)}g^{(q)} \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^{q-1}\left(C_{q-1}^{i-1} + C_{q-1}^i\right) f^{(i)}g^{(q-i)}\right) + C_{q-1}^{q-1} f^{(q)}g^{(0)}.\end{aligned}$$

Comme $C_{q-1}^0 = 1 = C_q^0$, $C_{q-1}^{q-1} = 1 = C_q^q$ et $C_{q-1}^{i-1} + C_{q-1}^i = C_q^i$ il reste $(fg)^{(q)} = \sum_{i=0}^{q} C_q^i f^{(i)}g^{(q-i)}$: la formule est justifiée par récurrence. ■

THÉORÈME 7.22. — *Soit f une fonction de I, (intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$ dérivable en x_0 de I, non nulle en x_0. Alors la fonction $1/f$ est définie sur un voisinage de x_0, dérivable en x_0 et* $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x_0) = \dfrac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

La fonction f est dérivable en x_0 donc continue en x_0 et comme elle est non nulle en x_0, elle reste localement non nulle, (du signe de $f(x_0)$, Théorème 7.3), donc $1/f$ est localement définie et sur ce voisinage, pour $x \neq x_0$, $\dfrac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = -\dfrac{1}{f(x)f(x_0)} \cdot \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ a pour limite $-\dfrac{1}{f^2(x_0)} f'(x_0)$, (continuité du produit). ■

COROLLAIRE 7.23. *Si u et v sont deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ dérivables en x_0, avec $v(x_0) \neq 0$, la fonction u/v est localement définie en x_0, dérivable en x_0, de dérivée* $\dfrac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$.

Vient de $\dfrac{u}{v} = u \cdot \dfrac{1}{v}$ et des théorèmes 7.21 et 7.22. ■

Enfin traitons le cas du produit de composition :

THÉORÈME 7.24. — *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction de I dans J dérivable en x_0, g une fonction de J dans $\mathbb{R}$ dérivable en $y_0 = f(x_0)$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 de dérivée :*
$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$.

Des aménagements sont possible avec des dérivées à droite ou à gauche, et g à valeurs dans E vectoriel normé.

On a, en utilisant la notation « petit o » vue en 7.17

$$g(y) = g(y_0) + (y - y_0)g'(y_0) + o(y - y_0), \text{ et aussi}$$
$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o(x - x_0)$$

donc, en posant $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + o(x - x_0)$ il vient

$$\begin{aligned} g(y) &= g(y_0) + \left[(x - x_0)f'(x_0) + o(x - x_0)\right] g'(y_0) + o(y - y_0) \\ &= g(y_0) + (x - x_0)f'(x_0)g'(y_0) + o(x - x_0)g'(y_0) + o(y - y_0). \end{aligned}$$

Il suffit de prouver que $o(y - y_0)$ est $o(x - x_0)$ pour conclure.

Or $y - y_0 = (x - x_0)f'(x_0) + o(x - x_0)$ donc :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 \text{ tel que } |x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |y - y_0| \leqslant |x - x_0|(|f'(x_0)| + \varepsilon)$$

Fixons $\varepsilon = 1515$, (j'ai une prédilection pour François 1^er^, Chambord, la Renaissance...) on aura $|y - y_0| \leqslant (1515 + |f'(x_0)|)|x - x_0|$ dès que $|x - x_0| \leqslant \alpha$, et le $o(y - y_0)$ étant une quantité du type $|y - y_0| \times$ (quelque chose qui tend vers 0 si y tend vers y_0), devient du type $|x - x_0|\ (1515 + |f'(x_0)|) \times$ (quelque chose qui tend vers 0 si x tend vers x_0 car alors y tend vers y_0). C'est donc un $o(x - x_0)$ et finalement $g(f(x)) - g(f(x_0)) = (x - x_0)g'(f(x_0))f'(x_0) + o(x - x_0)$. ■

Remarque : On peut conclure avec 800, 1789 ou tout autre nombre plus ou moins chargé de réminiscence historique.

THÉORÈME 7.25. — *Soit une fonction f continue strictement monotone d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J. Si f est dérivable en x_0, avec $f'(x_0) \neq 0$, sa fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et* $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

On a vu, (théorème 7.12), que f réalise une bijection de I sur J, et que f^{-1} est continue.

Si on forme le rapport $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$ pour $y \neq y_0$, avec $x = f^{-1}(y)$ on a $y = f(x)$ et $x \neq x_0$, et ce rapport est égal à $\dfrac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$, il tend donc vers $\dfrac{1}{f'(x_0)}$ lorsque x tend vers x_0, d'où le résultat. ■

4. Rolle and co

Dans ce paragraphe nous allons retrouver des résultats de caractère « existentiel », affirmant l'existence d'éléments vérifiant des conditions. Ici, ils sont liés à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 7.26 (de Rolle). — *Soit une fonction f définie continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$, (avec éventuellement des x de $]a, b[$ tels que $f'(x) = +\infty$ ou $-\infty$). Si $f(a) = f(b)$ alors il existe c de $]a, b[$ tel que* $f'(c) = 0$.

Si f est constante, $f'(x) = 0$ sur $]a, b[$, de tels c existent. Sinon f prend des valeurs différentes de $f(a)$ et $f(b)$, par exemple des valeurs supérieures. De plus, f continue sur $[a, b]$ compact, à valeurs réelles, est bornée et atteint ses bornes. En particulier la borne supérieure M est atteinte en c, et comme $M > f(a) = f(b)$, $c \in]a, b[$.

On a donc $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$, (éventuellement $f'(c) = +\infty$ ou $-\infty$) mais $f(x) - f(c) = f(x) - M$ est $\leqslant 0$, alors que, si $x < c$, $x - c < 0$ et si $x > c$, $x - c > 0$.

Comme $c \in]a,b[$, on a des x de part et d'autre de c donc

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

doit être positif et négatif : il ne reste que $f'(c) = 0$. ■

On peut raffiner.

THÉORÈME 7.27. — *(Rolle généralisé). Soit une fonction f de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, continue, dérivable sur $]a, +\infty[$, telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$. Alors il existe c dans $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.*

(On peut encore avoir $f'(x) = +\infty$ ou $-\infty$ pour des x de $]a, +\infty[$).

On va se ramener au théorème de Rolle.

D'abord si f est constante, (égale à $f(a)$), f' est nulle sur $]a, +\infty[$ donc c existe.

Sinon, soit $x_1 > a$ tel que $f(x_1) \neq f(a)$, par exemple $f(x_1) > f(a)$.

Soit $\gamma \in]f(a), f(x_1)[$: le théorème des valeurs intermédiaires (Corollaire 7.7.) assure l'existence de a' dans $]a, x_1[$ tel que $f(a') = \gamma$. Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a) < \gamma$, en traduisant cette limite avec $\varepsilon = \dfrac{\gamma - f(a)}{2}$, il existe A tel que, $\forall x \geqslant A$, $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$ d'où en particulier $f(x) \leqslant f(a) + \dfrac{\gamma - f(a)}{2} = \dfrac{\gamma + f(a)}{2} < \gamma$.

On choisit $x_2 > \sup(x_1, A)$, alors $\gamma \in]f(x_2), f(x_1)[$, le théorème des valeurs intermédiaires justifie l'existence de $b' \in]x_1, x_2[$ tel que $f(b') = \gamma$.

On peut alors appliquer le théorème de Rolle au segment $[a', b'] \subset [a, +\infty[$, sur lequel f est continue, f étant dérivable sur $]a', b'[$, (avec peut-être des $f'(x) = +\infty$ ou $-\infty$), vérifiant $f(a') = f(b')$. On a bien c dans $]a', b'[$ donc dans $]a, +\infty[$ avec $f'(c) = 0$. ■

COROLLAIRE 7.28. — *Soit f continue dérivable de I, (intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$. Entre deux zéros de f il y a un zéro de f' au moins.*

Une autre conséquence, elle-même riche de conséquences, est la *formule des accroissements finis.*

THÉORÈME 7.29. — *Soit f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$. Il existe c dans $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.*

Soit la fonction $\varphi : x \rightsquigarrow \varphi(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$, elle est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.

On a $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = f(b) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = 0$, donc $\varphi(a) = \varphi(b)$: le théorème de Rolle s'applique d'où l'existence de c dans $]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0 = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ d'où le résultat. ∎

Cette formule des accroissements finis est le point de départ de l'étude des variations d'une fonction de variable réelle à valeurs réelles, c'est-à-dire la détermination d'invervalles sur lesquels la fonction est monotone.

THÉORÈME 7.30. — *Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, dérivable sur I, est croissante , (resp. décroissante, constante) si et seulement si sa dérivée reste positive (resp. négative, nulle) sur I.*

Traitons le cas de la croissance, le passage de f à $-f$ donnant la décroissance, et la conjonction des deux le cas constant.

Si f est croissante, le rapport $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, pour $x \neq x_0$, est positif, donc sa limite quand x tend vers x_0 reste positive : on a $f'(x_0) \geqslant 0$ pour tout x_0 de I.

Réciproquement soient x et y dans I avec $x < y$, le segment $[x, y]$ est dans I, f dérivable sur I est continue sur I, (Théorème 7.18), les accroissements finis s'appliquent donc il existe ξ entre x et y tel que $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(\xi)$, l'hypothèse f' à valeur positive sur I implique donc la croissance de f. ∎

Avant d'étudier un raffinement de cette étude des variations voyons une autre application de la formule des accroissements finis concernant la dérivabilité d'une fonction aux bornes d'un intervalle.

THÉORÈME 7.31. — *Soit f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$. Si f' admet une limite λ lorsque x tend vers a^+, f admet en a une dérivée à droite égale à λ.*

Car pour $x > a$, f est continue sur $[a, x]$, dérivable sur $]a, x[$ donc il existe ξ entre a et x, tel que $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi)$ et si x tend vers a, ξ tend vers a donc $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lambda$ d'où $f'_d(a) = \lambda$.

Dans ce cas, f' est également continue à droite en a. ∎

Mais attention, $f'_d(a)$ peut exister sans que $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x)$ existe, comme le montre le cas de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et, pour $x \neq 0$, par $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$.

On a, pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$.

Si $x \in]0, 1[$, $\dfrac{1}{x}$ « décrit » tout l'intervalle $]1, +\infty[$, (image continue d'un connexe est un connexe, ici un intervalle), donc $\cos \dfrac{1}{x}$ prend toutes les valeurs entre -1 et 1 et f' n'a pas de limite si x tend vers 0. Cependant $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin \dfrac{1}{x}$ tend vers 0 donc $f'(0)$ existe.

On traiterait de la même façon la dérivée éventuelle de f à gauche en b.

J'ai dit qu'on pouvait raffiner l'étude des variations d'une fonction, et ce, en diminuant les hypothèses.

THÉORÈME 7.32. — *Soit f continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, ayant une dérivée à droite, finie ou non, en tout point de $[a, b[\setminus A$ avec A dénombrable. Si $f'_d(x) \geqslant 0$ sur $[a, b[\setminus A$, alors $f(b) \geqslant f(a)$ et si $f'_d(x) > 0$ en ou moins un point, $f(b) > f(a)$.*

On peut se demander si de tels énoncés sont bien sérieux ! Mais oui, mais oui. Pour l'instant on raisonne sur une fonction donnée. Mais quand on abordera l'étude des espaces fonctionnels, on considérera la dérivation, (ou l'intégration) comme un opérateur linéaire agissant sur des fonctions, et des passages à la limite introduisent tout naturellement ces parties dénombrables où une hypothèse n'est pas vérifiée.

On aurait le même résultat avec existence de $f'_g(x)$ sur $]a, b] \setminus A$. Il faut noter qu'on peut avoir $f'_d(x) = +\infty$, pour des x de $[a, b[\setminus A$.

Si l'ensemble A est équipotent à $\mathbb{N}$, on indexe ses éléments en une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et si $\operatorname{card} A = p + 1$, on gardera la notation $(a_n)_{0 \leqslant n \leqslant p}$.

On sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \dfrac{1}{2^{r+1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^r} \leqslant 2$ pour tout r.

Soit alors $\varepsilon > 0$. On introduit l'ensemble K définie par :

7.33. $$K = \Big\{ y \in [a,b];\ \forall x \in [a,y],\quad f(x) - f(a) \geqslant -\varepsilon(x-a) - \varepsilon \sum_{a_n < x} \frac{1}{2^n} \Big\}.$$

On va justifier que $K = [a,b]$. On aura donc en particulier $f(b) - f(a) \geqslant -\varepsilon(b-a) - 2\varepsilon$, et ce pour tout $\varepsilon > 0$ d'où $f(b) \geqslant f(a)$.

Je laisse au lecteur sagace le soin de trouver la modification à faire pour des dérivées à gauche.

On a $K \neq \varnothing$ puisque $a \in K$, ($0 \geqslant 0$: que c'est beau).

Si $z \in K$, pour tout y de $[a,z]$ il est clair que $y \in K$, car les x de $[a,y]$ sont *a fortiori* dans $[a,z]$.

La partie K non vide de $[a,b]$ est bornée : soit c sa borne supérieure. On va prouver que $c \in K$, puis que $c = b$.

7.34. ***Premier point :*** $c \in K$.

Si $c = a$, $c \in K$ est évident. Sinon, avec $c = \sup K$ et $c > a$, il existe une suite $(y_q)_{q \in \mathbb{N}}$ d'éléments de K qui converge vers c.

On a $\displaystyle f(y_q) - f(a) \geqslant -\varepsilon(y_q - a) - \varepsilon \sum_{a_n < y_q} \frac{1}{2^n}$.

Comme $a_n < y_q \Rightarrow a_n < c$, il y a plus d'indices n tels que $a_n < c$ que d'indices n vérifiant $a_n < y_q$.

Donc $\displaystyle\sum_{a_n < g_q} \frac{1}{2^n} < \sum_{a_n < c} \frac{1}{2^n}$ et *a fortiori*

$$f(y_q) - f(a) \geqslant -\varepsilon(y_q - a) - \varepsilon \sum_{a_n < c} \frac{1}{2^n}.$$

Dans cette inégalité, f étant continue, on peut passer à la limite (si q tend vers l'infini), on a :

$$f(c) - f(a) \geqslant -\varepsilon(c - a) - \varepsilon \sum_{a_n < c} \frac{1}{2^n}.$$

Comme pour $x \in [a, c[$, il existe $y \in K$ avec $x \leqslant y$, (définition d'une borne supérieure, sinon x majorerait K) on a également $f(x) - f(a) \geqslant -\varepsilon(x-a) - \varepsilon \sum\limits_{a_n < x} \frac{1}{2^n}$, donc cette inégalité est vérifiée pour tout x de $[a, c]$ d'où l'appartenance de c à K. ■

7.35. Deuxième point : $c = b$.

Si $c < b$, on peut avoir c dans A ou non, d'où différents cas à examiner.
Si $c \notin A$, f admet en c une dérivée à droite, qui peut-être $+\infty$.

1^er^ cas. Si d'abord $f'_d(c) \in \mathbb{R}$, soit le $\varepsilon > 0$ du départ, il existe y dans $]c, b]$ tel que $\forall x \in]c, y]$, $\left|\frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'_d(c)\right| \leqslant \varepsilon$ d'où l'on tire

$$f(x) - f(c) \geqslant (f'_d(c) - \varepsilon)(x - c) \geqslant -\varepsilon(x - c),$$

(car $f'_d(c) \geqslant 0$), donc *a fortiori* :

$$f(x) - f(c) \geqslant -\varepsilon(x - c) - \varepsilon \sum_{c \leqslant a_n < x} \frac{1}{2^n}.$$

Par ailleurs $c \in K$ donc

$$f(c) - f(a) \geqslant -\varepsilon(c - a) - \varepsilon \sum_{a_n < c} \frac{1}{2^n}.$$

On ajoute, donc $f(x) - f(a) \geqslant -\varepsilon(x - a) - \varepsilon \sum\limits_{a_n < x} \frac{1}{2^n}$, et ce pour tout $x \in]c, y]$. C'est vrai aussi $\forall x \in [a, c]$, donc c'est vrai $\forall x \in [a, y]$, d'où $y \in K$ avec $y > c$ borne supérieure de K : c'est absurde.

2^e^ cas. Si $f'_d(c) = +\infty$, soit $\varepsilon > 0$, (celui du départ) on a de même un $y \in]c, b]$ tel que $\forall x \in]c, y]$, $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant -\varepsilon$ et directement $f(x) - f(c) \geqslant -\varepsilon(x - c)$: on continue la justification de la même façon, c'est donc absurde.

3^e^ cas. Si $c \in A$ il existe un entier k tel que $c = a_k$. La fonction f est continue en c : avec toujours ce bon vieux $\varepsilon > 0$, on trouve $y \in]c, b]$ tel que $\forall x \in [c,y],\ f(x) - f(c) \geqslant -\dfrac{\varepsilon}{2^k}$ d'où *a fortiori* :

$$f(x) - f(c) \geqslant -\varepsilon(x-c) - \frac{\varepsilon}{2^k} \text{ et même}$$

$$f(x) - f(c) \geqslant -\varepsilon(x-c) - \varepsilon \sum_{c \leqslant a_n < x} \frac{1}{2^n}$$

puisque $\dfrac{1}{2^k}$ figure dans cette somme.

On peut enchaîner comme précédemment et conclure à $y \in K$ ce qui est absurde.

Finalement l'hypothèse $c < b$ conduit à une absurdité, d'où $b = c$ est dans K. ■

Mais on conclut alors, comme on l'a indiqué à la suite de 7.33, à l'inégalité $f(b) \geqslant f(a)$.

Supposons qu'on ait $f'_d(x_0) > 0$ en un x_0 de $[a,b]$ au moins.

D'abord on peut remarquer que pour tout sous-segment $[x,y]$ de $[a,b]$, la première partie du théorème s'applique et donne $f(x) \leqslant f(y)$: la fonction f est croissante. Si on avait $f(b) = f(a)$, elle serait alors constante, $(\forall x \in [a,b],\ f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) = f(a))$, mais alors $f'_d(x)$ serait nulle sur $[a,b[$: contredit $f'_d(x_0) > 0$. C'est donc que $f(b) > f(a)$. ■

COROLLAIRE 7.36. — *Soit une fonction f continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, ayant une dérivée à droite en tout point de $[a,b[\setminus A$ avec A partie dénombrable. Pour que f soit croissante, il faut et il suffit que $f'_d(x) \geqslant 0$ sur $[a,b[\setminus A$. Pour que f soit strictement croissante il faut et il suffit que $f'_d(x) \geqslant 0$ sur $[a,b[\setminus A$ et que l'ensemble des x où $f'_d(x) > 0$ soit partout dense dans $[a,b]$.*

La première partie du corollaire est évidente.

Pour la deuxième, si $f'_d(x) \geqslant 0$ sur $[a,b[\setminus A$ on a f croissante, et si $x < y$, il existe x_0 entre x et y, tel que $f'_d(x_0) > 0$, (l'ensemble partout dense rencontre $]x,y[$) donc $f(y) > f(x)$ d'après le théorème 7.32 donc f est strictement monotone.

Si f est strictement monotone on a déjà $f'_d(x) \geqslant 0$ sur $[a,b[\setminus A$, (limite d'un rapport positif).

La non densité de l'ensemble des x tels que $f'_d(x) > 0$ dans $[a,b]$ impliquerait l'existence d'un segment $[\alpha,\beta]$, avec $a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b$ sur lequel, $\forall x \in [\alpha,\beta] \setminus A$, $f'_d(x) = 0$. Mais alors on aurait aussi $-f'_d(x) = 0$, (donc $\geqslant 0$) sur $[\alpha,\beta] \setminus A$, d'où $-f$ croissante, ainsi que f, sur $[\alpha,\beta]$ d'où

f constante sur $[\alpha, \beta]$ ce qui contredit la stricte monotonie supposée au départ. ■

Voyons maintenant un résultat, technique, utile par ses applications.

THÉORÈME 7.37. — *(Accroissements finis généralisés). Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, à valeurs réelles, dérivables sur $]a, b[$. Il existe c dans $]a, b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.*

L'idée est d'introduire une fonction à laquelle on appliquera les accroissements finis, par exemple φ définie sur $[a, b]$ par
$\varphi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$.

On a φ continue, sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$,

$$\varphi(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \text{ et } \varphi(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b).$$

En fait le théorème de Rolle s'applique et donne $c \in]a, b[$ tel que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$ ■

REMARQUE 7.38. — Si $g(b) - g(a) \neq 0$ et $f'(c) \neq 0$, forcément $g'(c) \neq 0$ et cette formule se met sous une forme plus parlante :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

forme que l'on peut encore admettre, si $g(b) - g(a) \neq 0$ ainsi que $f(b) - f(a)$ car alors, si $g'(c) = 0$ c'est que $f'(c) = 0$ et on peut convenir que... $\frac{0}{0}$... mais honnêtement, c'est vaseux !

Application : *règle de l'Hospital* (Guillaume François Antoine, 1661-1704) Je préfère préciser ce point car on se demande toujours s'il n'y a pas quelque chose de maladif la-dessous.

THÉORÈME 7.39. — *Soient f et g deux fonctions définies dérivables sur un voisinage de a, (dans $\mathbb{R}$), à valeurs réelles, nulles en a. Si $g'(x)$ reste non nul sur un voisinage de a, (a pouvant être exclu) et si $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ existe, alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.*

En effet, $\forall x \neq a$, x dans le voisinage de a où toutes les hypothèses sont vérifiées, il existe ξ entre a et x tel que $(f(x) - f(a))g'(\xi) = (g(x) - g(a))f'(\xi)$, (accroissements finis généralisés).

De plus, $f(a) = g(a) = 0$, et, comme par les accroissements finis (tout court) on a ξ' entre x et a tel que $g(x) = (x - a)g'(\xi')$, $g(x)$ reste localement non nul pour $x \neq a$. On peut donc écrire, pour $x \neq a$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ avec ξ entre a et x donc si x tend vers a, ξ aussi tend vers a et le rapport tend vers l d'où le résultat. ∎

REMARQUE 7.40. — On peut formuler la même chose avec f et g définies de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivables sur $]a, b[$, nulles en a, g' non nulle sur un voisinage de a...

REMARQUE 7.41. — Il se peut que le rapport $\dfrac{f}{g}$ ait une limite sans que $\dfrac{f'}{g'}$ en ait une comme le montre l'exemple de f définie par $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$, et de g qui à x associe x. En 0, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ existe, mais $f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$ n'a pas de limite si x tend vers 0, or $g'(x) = 1$ donc ici $\dfrac{f'(x)}{g(x)} = f'(x)$ n'a pas de limite.

7.43. Règle de l'Hospital généralisée

Soient f et g deux fonctions définies dérivables de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, telles que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $g'(x) > 0$ sur $[a, +\infty[$. Alors, si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Soit en effet $\varepsilon > 0$, il existe A, $(A \geqslant a)$ tel que, $\forall x \geqslant A$
$l - \varepsilon \leqslant \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \leqslant l + \varepsilon$ ou encore, comme $g'(x) > 0$,
$(l - \varepsilon)g'(x) \leqslant f'(x) \leqslant (l + \varepsilon)g'(x)$.

Cette relation s'intègre entre A et $x \geqslant A$ et donne
$(l - \varepsilon)(g(x) - g(A)) \leqslant f(x) - f(A) \leqslant (l + \varepsilon)(g(x) - g(A))$ qui conduit, si on a pris A assez grand pour que $x \geqslant A$ implique $g(x) > 0$), à

$$l - \varepsilon - \frac{g(A)(l - \varepsilon) - f(A)}{g(x)} \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant (l + \varepsilon) - \frac{g(A)(l + \varepsilon) - f(A)}{g(x)}.$$

Le minorant tendant vers $l - \varepsilon$ et le majorant vers $l + \varepsilon$ puisque $g(x)$ tend vers $+\infty$, on a bien l'existence de $B \geqslant A$ tel que $\forall x \geqslant B$, $l - 2\varepsilon \leqslant \dfrac{f(x)}{g(x)} \leqslant l + 2\varepsilon$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$. ∎

Cette règle de l'Hospital généralisée est d'un emploi commode dans des recherches de limites ou d'équivalents, comme les exercices le montreront, mais il faut avoir l'honnêteté d'en vérifier les hypothèses.

5. Taylor and... développements limités

Il existe deux résultats connus sous le nom de « Formule de Taylor et quelqu'un d'autre » et qui sont en fait de nature différente.

L'un est de caractère global, supposant la fonction de variable réelle et à valeurs réelles : c'est Taylor Lagrange, l'autre est de caractère local faisant intervenir des hypothèses au voisinage d'un point, et se généralise très bien en calcul différentiel : c'est Taylor Young.

Formule de Taylor Lagrange

THÉORÈME 7.44. — *Soit f une fonction définie de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable à l'ordre n sur $[a, b]$ et à l'ordre $n + 1$ sur $]a, b[$, $f^{(n)}$ étant continue sur $[a, b]$. Alors, il existe c dans $]a, b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Soit A une constante réelle, on définit une fonction F de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} A.$$

On a $F(b) = 0$, et ce, quelque soit A. On choisit alors A pour avoir $F(a) = 0$, (c'est possible, on doit faire une division par $\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$).

Comme F est continue sur $[a,b]$, (l'existence de $f^{(n)}$ sur $[a,b]$ implique la continuité des dérivées précédentes et de f sur $[a,b]$ (Théorème 7.18), et on a supposé $f^{(n)}$ également continue sur $[a,b]$), et F dérivable sur $]a,b[$, le théorème de Rolle, (Théorème 7.26) s'applique d'où l'existence de c dans $]a,b[$ tel que $F'(c) = 0$.

Or
$$\begin{aligned}F'(x) &= -f'(x) + (f'(x) - (b-x)f''(x)) \\ &\quad + \left((b-x)f''(x) - \frac{(b-x)^2}{2!}f^{(3)}(x)\right) + \dots \\ &\quad \dots + \left(\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{n+1}(x)\right) \\ &\quad + \frac{(b-x)^n}{n!}A = \frac{(b-x)^n}{n!}\left[A - f^{(n+1)}(x)\right].\end{aligned}$$

D'où $0 = \dfrac{(b-c)^n}{n!}(A - f^{(n+1)}(c))$ avec $b \neq c$ donc $A = f^{(n+1)}(c)$, et en écrivant que $F(a) = 0$ on retrouve, avec $A = f^{(n+1)}(c)$, le résultat voulu. ■

Il existe un avatar de cette formule, (nous voici dans le nirvâna des mathématiques), c'est la formule de *Taylor Lagrange avec reste integral*. (J'oubliais de dire que $\dfrac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ s'est vu affublé du nom de « reste d'ordre n », ou de « terme complémentaire »). Ce n'est ni mieux ni pire, c'est autre chose, une formulation pouvant rendre service, mais qui, à mes yeux, perd ce *caractère existentiel* : « $\exists c \in\,],ab[$ tel que... »

THÉORÈME 7.45. — *Soit f définie sur $[a,x]$, dérivable à l'ordre $n+1$ sur $[a,x]$, la dérivée d'ordre $n+1$ étant intégrable sur $[a,x]$. On a :*

$$\begin{aligned}f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \\ + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)dt.\end{aligned}$$

Le lecteur averti que vous êtes aura remarqué une légère augmentation des hypothèses portant sur $f^{(n+1)}$. Que voulez-vous, on n'a rien gratuitement. L'existence de $f^{(n+1)}$ implique la continuité des dérivées précédentes, donc leur intégrabilité sur tout segment de $[a,b]$.

On obtient ce résultat par des intégrations par parties successives.

Partant de $I = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$, on pose $u = \dfrac{(x-t)^n}{n!}$ et $dv : f^{(n+1)}(t)dt$ d'où $du = \dfrac{-(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ et $v = f^{(n)}(t)$, donc

$$I = \left[\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)} dt \text{ soit encore}$$

$$I = -\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t).$$

On intègre encore par parties, (si $n \geqslant 2$) et on parvient ainsi à

$$I = -\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) - \frac{(x-a)^n}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)$$
$$- \ldots - \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \int_a^x f'(t)dt,$$

la dernière intégrale valant $f(x) - f(a)$. Il ne reste plus qu'à en déduire.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + I$$

avec $$I = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$ ■

Voyons maintenant la formule de Taylor Young qui elle, est à caractère local.

THÉORÈME 7.46. — *Soit f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, et a intérieur à I. Si f admet une dérivée d'ordre n en a, on a*

$\displaystyle\lim_{\substack{x \to a \\ x \in I - \{a\}}} F(x) = 0$, avec $F(x)$ égal à :

$$\frac{f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \dfrac{(x-a)^2}{2!} f'(a) - \ldots - \dfrac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)}{(x-a)^n}.$$

Souvent, on introduit la fonction $\varepsilon(x)$, définie pour x dans $I - \{a\}$ par

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x)$$

et on formule le théorème en disant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$. Ou encore en écrivant :

7.47. $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)$, ce qui est finalement la formulation la plus pratique.

La justification de ce résultat se fait par récurrence sur $n \geqslant 1$.

Pour $n = 1$, la dérivabilité de f en a permet bien d'écrire $f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + o(x-a)$.

Supposons le résultat vrai à l'ordre $n-1$, et soit f telle que $f^{(n)}(a)$ existe. La fonction g définie par :

$g(x) = f(x) - f(a) - (x-a)f'(a) - \ldots - \dfrac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$ est dérivable sur un voisinage de a sur lequel

$$g'(x) = f'(x) - f'(a) - (x-a)(f')'(a) - \ldots - \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}(f')^{(n-1)}(a).$$

L'hypothèse de récurrence appliquée à f' à l'ordre $n-1$ permet de dire que $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in I-\{a\}}} \dfrac{g'(x)}{(x-a)^{n-1}} = 0$. On traduit cela.

Soit $\varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, 0 < |x-a| < \alpha$, (et $x \in I$) $\Rightarrow |g'(x)| \leqslant \varepsilon |x-a|^{n-1}$.

On suppose α assez petit pour que $[a-\alpha, a+\alpha] \subset I$, et en fait on a alors :

sur $[a, a+\alpha]$, $-\varepsilon(x-a)^{n-1} \leqslant g'(x) \leqslant \varepsilon(x-a)^{n-1}$

et sur $[a-\alpha, a]$, $-\varepsilon(a-x)^{n-1} \leqslant g'(x) \leqslant \varepsilon(a-x)^{n-1}$

(égalité si $x = a$). Ces inégalités s'intègrent et conduisent à

$$-\varepsilon\frac{(x-a)^n}{n} \leqslant g(x) - g(a) \leqslant \frac{\varepsilon(x-a)^n}{n} \text{ sur } [a, a+\alpha]$$

et à $$-\varepsilon\frac{(a-x)^n}{n} \leqslant g(a) - g(x) \leqslant \varepsilon\frac{(a-x)^n}{n} \text{ sur } [a-\alpha, a]$$

car dans ce cas on intègre sur $[x, a]$.

Dans les 2 cas, on obtient $|g(x)-g(a)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{n}|x-a|^n$ sur $[a-\alpha, a+\alpha]$ ce qui permet d'en déduire que :

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in I-\{a\}}} \frac{g(x)}{(x-a)^n} = 0 \text{ puisque } g(a)=0.$$

7.48. On obtient bien ainsi la *formule de Taylor Young* dont l'application essentielle **est la recherche des développements limités.**

Pour mémoire, voici les développements limités usuels, obtenus au voisinage de $x=0$, par application de la formule de Taylor Young.

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})\\
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\\
\operatorname{ch} x &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\\
\operatorname{sh} x &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+2})\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!}\\
&\quad +\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n+o(x^n)
\end{aligned}$$

(en fait ici on a une identité : le $o(x^n)$ vaut $\dfrac{(-x)^{n+1}}{1+x}$)

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^n+o(x^n),$$

avec, là encore, un $o(x^n)$ connu car égal à $\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$;

$$\text{Log}\,(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\text{Log}\,(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\text{Arg th}\, x = \frac{1}{2}\,\text{Log}\,\frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\text{Arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\text{Arcsin}\, x = x + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1.3.5.\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\text{Argsh}\, x = x - \frac{x^3}{2\cdot 3} + \ldots + (-1)^n\frac{1.3.5.\ldots(2n-1)}{2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

J'espère qu'ils sont justes !

C'est par cette liste que je termine ce chapitre où il y aurait encore bien des choses à dire, sur les fonctions convexes par exemple. Mais le chapitre VIII sur l'intégrale m'attend et là il y a du travail.

EXERCICES

1. Soit $f \in C^{n+1}([a,b],\mathbb{R})$ telle que, $\forall k \in [0,n]$, $f^{(k)}(a) = 0$ et $f^{(n+1)} \leqslant f$. Montrer que, $\forall k \in [0,n]$, $\forall x \in [a,b]$,

$$f^{(k)}(x) \leqslant \frac{(x-a)^{n+1-k}}{(n+1-k)!}\ \text{sup.}\ \{f(t), t \in [a,b]\}.$$

2. Soit $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Déterminer

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

En déduire quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, de classe C^2, vérifiant $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y)+f(x-y) = 2f(x)f(y)$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$, strictement positive sur $]0,1[$ et telle que $f(0) = f(1) = 0$.

Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{|f''(t)|}{f(t)} \geqslant 4$.

4. Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,+\infty[,\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $x \geqslant a$ on a $|f(x)| \leqslant M_0$ et $|f''(x)| \leqslant M_2$. Montrer que $|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$ pour tout $x \geqslant a$.

Montrer que si $g \in \mathcal{C}^2([a,+\infty[,\mathbb{R})$, avec g'' bornée et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$ on a aussi $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0$.

5. Les suites (a_n), (b_n) et (c_n) sont réelles, avec $a_n > 0$ et $c_n > 0$. Soit la suite (P_n) de polynômes, définie par $P_{-1} = 0, P_0 = 1$ et $P_{n+1} = (a_n X + b_n)P_n - c_n P_{n-1}$.

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, P_n possède n racines réelles distinctes. Si on les indexe en croissant : $(x_{n,j})_{1\leqslant j\leqslant n}$, montrer que $x_{n,1} < x_{n-1,1} < x_{n,2} < x_{n-1,2} < \dots < x_{n,n-1} < x_{n-1,n-1} < x_{n,n}$.

6. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.

Trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt$.

7. Chercher $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} \int_1^x e^{t^2} \frac{\cos t}{t} dt$.

8. Equivalent, en $+\infty$, de $f(x) = e^{-2x^2} \displaystyle\int_0^x e^{2t^2} dt$.

9. Déterminer $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\inf\,(f(x), f(y)) \leqslant \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leqslant \sup\,(f(x), f(y)).$$

10. Soit $E = \{f;\ f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R});\ \forall x \in [0,1],\ f''(x) \leqslant 1\}$.

Montrer que $\forall f \in (E),\ f(0) - 2f(\frac{1}{2}) + f(1) \leqslant \frac{1}{4}$.

11. Soit $f \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} f(x)$ existe, et que $f''(x) \geqslant -\dfrac{k}{x^2}$ sur $]0,\alpha[$ avec $\alpha > 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to0^+} xf'(x) = 0$.

12. Soit $f \in \mathcal{C}^5(\mathbb{R},\mathbb{R})$, impaire avec $f'(0) = 0$ et $||f^{(5)}||_\infty$ qui existe. Montrer que $|f(x) - \frac{x}{3}f'(x)| \leqslant \lambda ||f^{(5)}||_\infty |x|^5$.
Quel est le meilleur λ possible.
Soit $f \in \mathcal{C}^5(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $f'(a) = f'(b) = f'(\frac{a+b}{2}) = 0$ et $||f^{(5)}||_\infty$ qui existe. Montrer que $|f(b) - f(a)| \leqslant \frac{||f^{(5)}||_\infty}{2880}(b-a)^5$.

13. Soit $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ continue, ouverte, surjective. Montrer que $f(0) \in \{0,1\}$. Montrer que $Z = f^{-1}(1)$ est fermé non vide de cardinal fini.

14. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, ayant une dérivée seconde sur $]a,b[$.
Montrer que $\forall x \in]a,b[,\ \exists \xi \in \,]a,b[$ tel que

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(\xi).$$

15. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour $k \neq 0$, $\exists \theta(h) \in]0,1[$ tel que $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta(h)h)$. Montrer que θ admet en général, un développement limité de tout ordre en 0; le donner à l'ordre 2.

16. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^2(x) \leqslant 1$ et $f'^2(x) + (f''(x))^2 \leqslant 1$. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^2(x) + f'^2(x) \leqslant 1$.

17. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,a],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $f(a)f'(a) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,a[$ tel que $f'(c) = 0$.

18. Soit θ une application de $]0,+\infty[$ dans $]0,1[$ telle que $\sin x = x - \frac{x^3}{6}\cos(x\theta(x))$. Etudier $\lim\limits_{x \to 0} \theta(x)$.

19. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ avec $f(0) = 0$.
Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 \int_0^{1/n} f(x)e^x dx$.

20. Soit f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ dérivable, telle que, $\forall x \in [a,b]$, $f^2(x) + f'^2(x) > 0$. Montrer que f n'a pas une infinité de zéros sur $[a,b]$. Montrer que ce résultat est faux si $f^2 + f'^2$ s'annule.

21. Soit f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a)=f(b)=0$. Soit $c\notin[a,b]$. Montrer qu'il existe une tangente au graphe de f, (dans $\mathbb{R}^2$) passant par $(c,0)$.

SOLUTIONS

1. Comme f est continue de $[a,b]$ compact, dans $\mathbb{R}$, elle est bornée et $M=\sup\{f(t),t\in[a,b]\}$ existe.

Soit $k\in[0,n]$, la fonction $g=f^{(k)}$ est de classe C^{n-k+1} sur $[a,b]$, par Taylor Lagrange, il existe $c_k(x)\in]a,x[$, (pour $x>a$), tel que :

$$g(x)=g(a)+(x-a)g'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^{n-k}}{(n-k)!}g^{(n-k)}(a)$$
$$+\frac{(x-a)^{n-k+1}}{(n-k+1)!}g^{(n-k+1)}(c_k(x)).$$

Or $g(a)=f^{(k)}(a)=0,\ldots,g^{(n-k)}(a)=f^{(n)}(a)=0$ et $g^{(n-k+1)}(c_k(x))=f^{(n+1)}(c_k(x))\leqslant f(c_k(x))\leqslant M$, on a finalement $f^{(k)}(x)\leqslant\dfrac{(x-a)^{n-k+1}}{(n+1-k)!}\sup\{f(t),t\in[a,b]\}$.

2. Par application de Taylor Lagrange à l'ordre 2 entre $x+h$ et x d'une part, puis entre $x-h$ et x, on a ξ entre x et $x+h$, et η entre $x-h$ et x tels que

$$f(x+h)-f(x)+f(x-h)-f(x)=hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(\xi)+(-h)f'(x)$$
$$+\frac{h^2}{2}f''(\eta)$$
$$=\frac{h^2}{2}(f''(\xi)+f''(\eta))$$

d'où, par continuité de f'', $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=f''(x)$.

Soit $f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

Si $y=0$, on a $2f(x)(1-f(0))=0$. On en déduit $f(0)=1$ si $f\neq0$. Or $f=0$ est solution. On écarte cette solution particulière, donc $\exists x$ tel que $f(x)\neq0$ d'où $f(0)=1$.

Avec $x=0$, y quelconque on a $f(y)+f(-y)=2f(y)$ d'où $f(-y)=f(y)$: la fonction f est paire.

Puis pour x quelconque et $h\neq0$ on a

$$\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}=2f(x)\frac{(f(h)-1)}{h^2}.$$

Comme on peut appliquer ceci en x tel que $f(x) \neq 0$, c'est que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h)-1}{h^2} = l$ existe, et on aura $f''(x) = 2l\,f(x)$ pour tout x de **R**.
Si $l = 0$, on doit avoir $f'' = 0$ d'où $f(x)$ du type $ax+b$, fonction paire avec $f(0) = 1$, il reste $f = 1$, (qui et bien solution).
Si $l \neq 0$, $l > 0$ conduit, en posant $\omega^2 = 2l$, et compte tenu que f est paire valant 1 en 0, à $f(x) = \operatorname{ch}\omega x$; or $\operatorname{ch}(\omega x + \omega y) + \operatorname{ch}(\omega x - \omega y) = 2\operatorname{ch}\omega x \operatorname{ch}\omega y$: c'est bon. Si $l < 0$, avec $\omega^2 = -2l$, l'équation différentielle $f'' = -\omega^2 f$ conduit à $f(x) = \cos\omega x$, (fonction paire valant 1 en 0, qui est effectivement solution.
Les solutions sont donc les fonctions constantes égales à 0 ou 1 et les fonctions du type $\operatorname{ch}\omega x$ ou $\cos\omega x$.

3. La fonction f, continue sur $[0,1]$ compact est bornée et atteint ses bornes, (f à valeurs réelles). Comme $f(0) = f(1) = 0$ et $f(t) > 0$ sur $]0,1[$, il existe $c \in]0,1[$ tel que $f(c) = ||f||_\infty$, donc pour $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$,
$$I = \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{|f''(t)|dt}{f(t)} \geqslant \frac{1}{f(c)} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} |f''(t)|dt.$$
Par accroissements finis sur $[0,c]$ et $[c,1]$, il existe α et β avec $0 < \alpha < c < \beta < 1$, tels que
$$f(c) - f(0) = cf'(\alpha) \text{ et } f(1) - f(c) = (1-c)f'(\beta).$$
Choisissons ε dans $]0, \frac{1}{2}[$ tel que $0 < \varepsilon < \alpha$ et $\beta < 1 - \varepsilon < 1$: on aura
$$I \geqslant \frac{1}{f(c)} \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} |f''(t)|dt \geqslant \frac{1}{f(c)} \int_\alpha^\beta |f''(t)|dt \geqslant \frac{1}{f(c)} \left| \int_\alpha^\beta f''(t)dt \right|,$$
soit
$$I \geqslant \frac{1}{f(c)} \left|f'(\beta) - f'(\alpha)\right| = \frac{1}{f(c)} \left| \frac{f(c)}{c-1} - \frac{f(c)}{c} \right| = \frac{1}{|c(c-1)|},$$
(vu le choix de α et β, puisque $f(0) = f(1) = 0$).
Mais sur $[0,1]$, la fonction $x \rightsquigarrow x(1-x)$ est à valeurs positives, maximum pour $x = \frac{1}{2}$, valant alors $\frac{1}{4}$: l'inverse a pour minimum 4, donc $\dfrac{1}{c(1-c)} \geqslant 4$ et on a bien trouvé $\varepsilon > 0$ tel que $\displaystyle\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} \frac{|f''(t)|}{f(t)}\,dt \geqslant 4.$

4. Soient x et y dans $[a, +\infty[$, par Taylor Lagrange à l'ordre 2 entre x et y, il existe c entre x et y tel que $f(y) = f(x) + (y-x)f'(x) + \dfrac{(y-x)^2}{2} f''(c)$, d'où, (avec $x \neq y$)
$$\left|f'(x)\right| = \left| \frac{f(y)-f(x)}{y-x} - \frac{y-x}{2} f''(c) \right| \leqslant \frac{2M_0}{|y-x|} + \frac{|y-x|}{2} M_2.$$

Pour $y \in]x, +\infty[$, $t = y - x \in]0, +\infty[$.
Soit la fonction $\theta :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$\theta(t) = \frac{2M_0}{t} + \frac{t\,M_2}{2}, \text{ on aura } |f'(x)| \leqslant \inf\{\theta(t), t > 0\}.$$

1) Si $M_0 = 0$, l'inf est 0, mais alors $f = 0$, l'inégalité est vérifiée.
Sinon, $\theta'(t) = -\dfrac{2M_0}{t^2} + \dfrac{M_2}{2}$ s'annule si $t^2 = 4\dfrac{M_0}{M_2}$, si $M_2 \neq 0$, donc pour $t = 2\sqrt{\dfrac{M_0}{M_2}}$ et on vérifie que θ a pour minimum $2\sqrt{M_0 M_2}$ d'où $|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}$.
2) Si $M_2 = 0$, $f'' = 0 \Rightarrow f(x)$ du type $\alpha x + \beta$ avec f bornée $\Rightarrow \alpha = 0$ et $f'(x) = 0$ dans ce cas : on a encore $|f'(x)| = 0 \leqslant 0$.
3) Si g est telle que g'' bornée, soit $M_2 = \sup\{|g''(x)|, x \geqslant a\}$.
Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0, x \geqslant \alpha \Rightarrow |g(x)| \leqslant \varepsilon$.
On applique ce qui précède à g sur $[\alpha, +\infty[$, on a donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall x \geqslant \alpha$, $|g'(x)| \leqslant 2\sqrt{M_2}\sqrt{\varepsilon}$, ce qui est la traduction de $\lim\limits_{x \to +\infty} |g'(x)| = 0$.

5. On procède par récurrence en vérifiant d'abord que P_n est un polynôme de degré n, de coefficient directeur $a_0 a_1 \ldots a_{n-1} > 0$.
On a $P_1(X) = a_0 X + b_0$ admet un zéro réel $x_{1,1} = -\dfrac{b_0}{a_0}$.
Puis $P_2(X) = (a_1 X + b_1)(a_0 X + b_0) - c_1$ est de degré 2, de coefficient directeur $a_0 a_1 > 0$, et $P_2(x_{1,1}) = -c_1 < 0$.
Comme $\lim\limits_{x \to \pm\infty} P_2(x) = +\infty$, par le théorème des valeurs intermédiaires P_2 s'annule en $x_{2,1} < x_{1,1}$ et en $x_{2,2} > x_{1,1}$.
On suppose le résultat vrai jusqu'à l'ordre n. En particulier les zéros de P_{n-1} et de P_n sont tels que :

$$x_{n,1} < x_{n-1,1} < x_{n,2} < \ldots < x_{n,n-1} < x_{n-1,n-1} < x_{n,n}.$$

Alors $P_{n+1}(X) = (a_n X + b_n)P_n(X) - c_n P_{n-1}(X)$ est tel que $P_{n+1}(x_{n,j}) = -c_n P_{n-1}(x_{n,j})$.
Les n scalaires $(x_{n,j})_{j=1,\ldots,n}$ étant entre les $n-1$ zéros simples de P_{n-1}, polynôme de degré $n-1$, P_{n-1} change de signe en chacun de ses zéros donc, c_n étant positif, les $P_{n+1}(x_{n,j})$ changent de signe avec j, on a déjà $n-1$ zéros de P_{n+1}, séparés par les $x_{n,j}$.
Comme $P_{n+1}(x_{n,1}) = -c_n P_{n-1}(x_{n,1})$, avec $x_{n,1} < x_{n-1,1}$ ($x_{n-1,1}$ plus petit zéro de P_{n-1}), et que P_{n-1} tend vers $+\infty$ en $-\infty$, on a $P_{n-1}(x_{n,1}) > 0$ d'où $P_{n+1}(x_{n,1}) < 0$, or $\lim\limits_{x \to -\infty} P_{n+1}(x) = +\infty$: P_{n+1} admet un zéro, $x_{n+1,1} < x_{n,1}$.

On justifie de même l'existence d'un zéro $x_{n+1,n+1} > x_{n,n}$, d'où le résultat par récurrence.

6. On intègre au voisinage de $0, f$, dont on peut prendre un développement limité à l'ordre 1, (Taylor Young). On a : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ 0 \leqslant t \leqslant \alpha \Rightarrow$ $|f(t) - tf'(0)| \leqslant \varepsilon t$, puis $\exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ \frac{1}{n} \leqslant \alpha \Rightarrow$
$|f(t) - tf'(0)| \leqslant \varepsilon t$ sur $[0, \frac{1}{n}]$.
On a

$$\left|\int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt - f'(0)\int_0^{\frac{1}{n}} tdt\right| \leqslant \varepsilon \int_0^{\frac{1}{n}} tdt$$

soit

$$\left|\int_0^{1/n} f(t)dt - \frac{f'(0)}{2n^2}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2n^2},$$

d'où, $\forall n \geqslant n_0$

$$\left|n^2\int_0^{1/n} f(t)dt - \frac{f'(0)}{2}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} f(t)dt = \frac{f'(0)}{2}$.

7. Soit $f(x) = \int_1^x e^{t^2}\,\frac{\cos t}{t}\,dt$ et $g(x) = e^{x^2}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, $g'(x) = 2xe^{x^2} > 0$ sur $[1, +\infty[$. Comme $f'(x) = e^{x^2}\frac{\cos x}{x}$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{2x^2} = 0$ donc, (règle de l'Hospital généralisée) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ soit $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x^2}\int_1^x e^{t^2}\frac{\cos t}{t}dt = 0$.

8. Avec $h(x) = \int_0^x e^{2t^2}dt$ et $k(x) = e^{2x^2}$ on a h et k dérivables, $\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty$ et $\frac{h'(x)}{k'(x)} = \frac{1}{4x}$ tend vers 0 si x tend $+\infty$, donc $f(x) = \frac{h(x)}{k(x)}$ tend vers 0 : c'est un infiniment petit. (L'Hospital généralisée).

On cherche à modifier $k(x)$ en $l(x)$ dans le but d'avoir $\frac{h'(x)}{l'(x)}$ qui tend vers une limite non nulle. Pour cela il faut se « débarrasser » du $4x$ en facteur dans $k'(x)$ d'où l'idée de prendre $l(x) = \frac{1}{4x}e^{2x^2}$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} l(x) = +\infty$, $l'(x) = \left(1-\dfrac{1}{4x^2}\right)e^{2x^2} > 0$ si $x > \dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h'(x)}{l'(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{4x^2}} = 1$. Par application de la règle de l'Hospital généralisée à h et l sur $[1,+\infty[$ on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{l(x)} = 1$, donc $h(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{2x^2}}{4x}$ d'où $f(x) = e^{-2x^2}\displaystyle\int_0^x e^{2t^2}dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4x}$.

9. La fonction f est continue à droite et à gauche en chaque y de $\mathbf{R}$. En effet, la non continuité à droite en y impliquerait :

$$\exists\varepsilon > 0,\ \forall n\ \exists x_n,\ y < x_n < y + \frac{1}{n+1},\ |f(x_n) - f(y)| > \varepsilon.$$

Parmi les 2 ensembles $\{n;\ f(x_n) - f(y)\} > 0$ et $\{n, f(x_n) - f(y) < 0\}$ l'un au moins est de cardinal infini : par exemple il existe une suite extraite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $f(x_{\varphi(n)}) - f(y) > 0$. On a alors

$f(y) \leqslant \dfrac{f(x_{\varphi(n)}) - f(y)}{x_{\varphi(n)} - y} \leqslant f(x_{\varphi(n)})$ avec $f(x_{\varphi(n)}) - f(y) \geqslant \varepsilon$ d'où

également : $\dfrac{\varepsilon}{x_{\varphi(n)} - y} \leqslant \dfrac{f(x_{\varphi(n)}) - f(y)}{x_{\varphi(n)} - y} \leqslant f(x_{\varphi(n)})$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\varepsilon}{x_{\varphi(n)} - y} = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = +\infty$.

Mais on a $x_{\varphi(n)} - y < \dfrac{1}{\varphi(n)+1}$ d'où $\varphi(n) \leqslant \varphi(n) + 1 \leqslant \dfrac{1}{x_{\varphi(n)} - y}$.=

On a donc :

$f(x_{\varphi(n)}) \geqslant \left(f(x_{\varphi(n)}) - f(y)\right)\dfrac{1}{x_{\varphi(n)} - y} \geqslant \varphi(n)\left(f(x_{\varphi(n)}) - f(y)\right)$,

soit $f(y) \geqslant f(x_{\varphi(n)})\left(1 - \dfrac{1}{\varphi(n)}\right)$: le minorant tend vers $+\infty$, on aurait $f(y) = +\infty$: curieux !

On a bien f continue. Mais alors f est dérivable car, $\forall h \neq 0$,
$\inf\left(f(x), f(x+h)\right) \leqslant \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \leqslant \sup\left(f(x), f(x+h)\right)$ avec
$\lim\limits_{h\to 0} \inf\left(f(x), f(x+h)\right) = f(x) = \lim\limits_{h\to 0} \sup\left(f(x), f(x+h)\right)$ par continuité de f, d'où $f'(x) = f(x)$: pour f solution on doit avoir $f(x) = \lambda e^x$.
Il reste à vérifier que c'est vrai (on n'a pas procédé par équivalence).
Or si $x < y$, et $\lambda > 0$ on aura $\inf(\lambda e^x, \lambda e^y) = \lambda e^x$, le sup est λe^y et par accroissements finis il existe $\xi \in]x, y[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = \lambda e^{\xi}$, on a bien $\lambda e^x < \lambda e^{\xi} < \lambda e^y$.

Si $\lambda < 0$ les inégalités restent vérifiées avec $\inf = \lambda e^y$ et $\sup = \lambda e^x$.

10. On applique la formule de Taylor Lagrange entre 1 et $\frac{1}{2}$ puis entre 0 et $\frac{1}{2}$. Il existe c et d tels que $0 < c < \frac{1}{2} < d < 1$ et

$$f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{8}f''(d), \text{et}$$
$$f(0) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}f'(0) + \frac{1}{8}f''(c).$$

(Si on regarde la justification de cette formule, (Théorème 7.44), on s'aperçoit que la fonction

$$F(x) = f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}A$$

peut-être définie « entre a et b » avec $b < a$, et on lui applique le théorème de Rolle « entre a et b » : rien n'impose $b > a$).

On ajoute : $f(1) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0) = \frac{1}{4}\left(\frac{f''(c) + f''(d)}{2}\right)$, et comme $f''(c) + f''(d) \leqslant 2$, il vient bien $f(1) - 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0) \leqslant \frac{1}{4}$.

11. Soit $\beta > 1$, fixé, alors $\frac{\alpha}{\beta} < \alpha$, on peut prendre x tel que $0 < x < \frac{\alpha}{\beta} < \alpha$ et appliquer Taylor Lagrange à l'ordre 2 entre x et βx. On a ξ entre x et βx tel que

$$f(\beta x) - f(x) = (\beta x - x)f'(x) + \frac{(\beta x - x)^2}{2!} f''(\xi)$$

d'où encore

$$xf'(x) = \frac{f(\beta x) - f(x)}{\beta - 1} - \frac{\beta - 1}{2}x^2 f''(\xi).$$

Comme $\lim\limits_{x \to 0+} f(x)$ existe, $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{f(\beta x) - f(x)}{\beta - 1} = 0$ et il reste à prouver que $\lim\limits_{x \to 0+} x^2 f''(\xi) = 0$ pour conclure.

Or $x^2 f''(\xi) = \frac{x^2}{\xi^2}(\xi^2 f''(\xi))$ avec $\xi^2 f''(\xi) \geqslant -k$, donc on a $-x^2 f''(\xi) \leqslant k\frac{x^2}{\xi^2}$.

Soit $\varepsilon > 0$, on va rendre $xf'(x) \leqslant \varepsilon$ pour x voisin de 0, puis on rendra $xf'(x) \geqslant -\varepsilon$.

Pour l'instant $xf'(x) \leqslant \dfrac{f(\beta x)-f(x)}{\beta-1} + \dfrac{\beta-1}{2}k\dfrac{x^2}{\xi^2}$.

Si $k<0$, *a fortiori* $xf'(x) \leqslant \dfrac{f(\beta x)-f(x)}{\beta-1}$ qui tend vers 0, à $\varepsilon>0$ on peut associer un $\eta>0$ tel que $0<x<\eta \Rightarrow xf'(x)\leqslant\varepsilon$, ($\eta$ est fonction de ε, et de β fixé >1).

Si $k\geqslant 0$, comme $x<\xi<\beta x$ on a $\dfrac{x^2}{\xi^2}\leqslant 1$, donc

$xf'(x) \leqslant \dfrac{f(\beta x)-f(x)}{\beta-1} + \dfrac{k(\beta-1)}{2}$.

On fixe alors $\beta>1$ tel que $\dfrac{k(\beta-1)}{2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, ($\Leftrightarrow \beta < 1+\dfrac{\varepsilon}{k}$), puis, comme $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(\beta x)-f(x)}{\beta-1} = 0$, on trouve là encore $\eta>0$ tel que $0<x<\eta\Rightarrow xf'(x)\leqslant\varepsilon$.

Pour rendre $xf'(x)\geqslant -\varepsilon$, on prend $\gamma\in]0,1[$ cette fois, on applique Taylor Lagrange entre x et γx (avec $0<\gamma x<x<\alpha$) d'où cette fois :

$$f(\gamma x)-f(x) = (\gamma-1)xf'(x) + (\gamma-1)^2\frac{x^2}{2}f''(\xi)$$

d'où l'on tire $xf'(x) = \dfrac{f(x)-f(\gamma x)}{1-\gamma} + (1-\gamma)\dfrac{x^2}{2}f''(\xi)$

avec $f''(\xi)\geqslant\dfrac{-k}{\xi^2}$ donc $(1-\gamma)\dfrac{x^2}{2}f''(\xi)\geqslant -\dfrac{(1-\gamma)}{2}k\dfrac{x^2}{\xi^2}$

d'où $xf'(x)\geqslant\dfrac{f(x)-f(\gamma x)}{1-\gamma} - \dfrac{(1-\gamma)}{2}k\dfrac{x^2}{\xi^2}$.

Si $k<0$, on a *a fortiori* $xf'(x)\geqslant\dfrac{f(x)-f(\gamma x)}{1-\gamma}$ quantité qui tend vers 0 si x tend vers 0^+, là encore $\exists\eta'>0$, tel que $0<x<\eta'\Rightarrow xf'(x)\geqslant-\varepsilon$;

et si $k\geqslant 0$, comme $\dfrac{x}{\xi}\leqslant\dfrac{1}{\gamma}$, (on a $\gamma x<\xi<x$), on a

$\dfrac{-k(1-\gamma)}{2}\dfrac{x^2}{\xi^2}\geqslant -\dfrac{k(1-\gamma)}{2\gamma 2}$.

On prend donc $\gamma\in]0,1[$ tel que $\dfrac{-k(1-\gamma)}{2\gamma^2}\geqslant -\dfrac{\varepsilon}{2}$, (possible car $\lim\limits_{\gamma\to 1^-}\dfrac{-k(1-\gamma)}{\gamma^2} = 0$). On a alors : $xf'(x)\geqslant\dfrac{f(x)-f(\gamma x)}{1-\gamma} - \dfrac{\varepsilon}{2}$ et le minorant tend vers $\dfrac{-\varepsilon}{2}$ donc devient $\geqslant -\varepsilon$: $\exists\eta'>0,\ \forall x\in]0,\eta'[,\ xf'(x)\geqslant-\varepsilon$.

On a finalement : $\forall\varepsilon>0,\ \exists\eta f''=\inf(\bar{\eta},\eta'),\ 0<x<\eta''\Rightarrow$
$-\varepsilon\leqslant xf(x)\leqslant\varepsilon$: c'est bien $\lim\limits_{x\to 0^+} xf'(x) = 0$.

12. Soit φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - \frac{x}{3}f'(x)$. On a $\varphi \in C^4(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et comme f est impaire, $f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = 0$, et $f'(0) = 0$. On a $\varphi'(x) = \frac{2}{3}f'(x) - \frac{x}{3}f''(x) \Rightarrow \varphi'(0) = 0$; $\varphi''(x) = \frac{1}{3}f''(x) - \frac{x}{3}f^{(3)}(x)$ donc $\varphi''(0) = 0$; $\varphi^{(3)}(x) = -\frac{x}{3}f^{(4)}(x) \Rightarrow \varphi^{(3)}(0) = 0$.

Enfin $\varphi^{(4)}(x) = -\frac{1}{3}f^{(4)}(x) - \frac{x}{3}f^{(5)}(x)$.

Or $|f^{(4)}(x)| = |f^{(4)}(x) - f^{(4)}(0)| = |xf^{(5)}(\xi)|$ avec ξ entre x et 0 donc $|f^{(4)}(x)| \leqslant ||f^{(5)}||_\infty |x|$ d'où $|\varphi^{(4)}(x)| \leqslant \frac{2}{3}|x|\ ||f^{(5)}||_\infty$. En intégrant entre 0 et t, on a $|\varphi^{(3)}(t) - \varphi^{(3)}(0)| \leqslant \frac{t^2}{3}||f^{(5)}||_\infty$ soit $|\varphi^{(3)}(t)| \leqslant \frac{t^2}{3}||f^5||_\infty$; que l'on intègre encore et encore, d'où, comme $\varphi^{(2)}(0) = \varphi'(0) = \varphi(0) = 0$, il vient $|\varphi^{(2)}(x)| \leqslant \frac{|x|^3}{9}||f^5||_\infty$ puis $|\varphi'(x)| \leqslant \frac{x^4}{36}||f^{(5)}||_\infty$ et finalement $|\varphi(x)| \leqslant \frac{||f||_\infty |x^5|}{180}$. Le scalaire $\lambda = \frac{1}{180}$ est le meilleur possible : si on prend $f(x) = \frac{||f||_\infty x^5}{120}$, $(5! = 120)$

on a
$$f^{(5)}(x) = ||f||_\infty, \text{ et } f(x) - \frac{x}{3}f'(x) = \frac{||f||_\infty}{120}(1 - \frac{5}{3})x^5 = -\frac{||f||_\infty x^5}{180},$$

on a bien $|f(x) - \frac{x}{3}f'(x)| = |\varphi(x)| = \frac{||f||_\infty |x^5|}{180}$ dans ce cas.

Pour la 2[e] inégalité, soit $h(x) = f(x + \frac{a+b}{2})$ et $g(x) = h(x) - h(-x)$. Cette fonction g est impaire, de classe c^5 ;

$$g'(x) = h'(x) + h'(-x) = f'(x + \frac{a+b}{2}) + f'(-x + \frac{a+b}{2})$$

donc $g'(0) = 2f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$.

Enfin $g^{(5)} = h^{(5)}(x) + h^{(5)}(-x)$ donc $||g^{(5)}||_\infty \leqslant 2||f^{(5)}||_\infty$. Si on applique la première inégalité, il vient,

$|g(x) - \frac{x}{3}g'(x)| \leqslant \frac{2||f^{(5)}||_\infty}{180}|x^5|$, soit encore

$|h(x) - h(-x) - \frac{x}{3}(h'(x) + h'(-x))| \leqslant \frac{|x^5|}{90}||f^{(5)}||_\infty$.

Ceci pour $x = \dfrac{b-a}{2}$, donne $h(\dfrac{b-a}{2}) = f(\dfrac{b-a}{2} + \dfrac{a+b}{2}) = f(b)$ et $h(-\dfrac{b-a}{2}) = f(\dfrac{a-b}{2} + \dfrac{a+b}{2}) = f(a)$ d'où :

$$\left|f(b) - f(a) - \frac{b-a}{6}\left(f'(b) + f'(a)\right)\right| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2^5 \cdot 90}||f^{(5)}||_\infty,$$

soit comme $f'(a) = f'(b) = 0$:

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \frac{(b-a)^5}{2880}||f^{(5)}||_\infty.$$

13. D'abord justifions que les maxima locaux valent 1 et les minima locaux valent 0.
Supposons qu'en a f atteigne un maximum local avec $f(a) < 1$.
Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in]a-\alpha, a+\alpha[\cap [0,1] = I$, $f(x) \leqslant f(a)$.
Mais I est un intervalle ouvert de $[0,1]$, donc f étant continue $f(I)$ est un intervalle, (car connexe) et f étant ouverte, $f(I)$ est un ouvert de $[0,1]$, or il est du type $(\quad, f(a)]$ avec $f(a) < 1$: ce n'est pas un intervalle ouvert de $[0,1]$. C'est absurde, d'où $f(a) = 1$, (et de même un minimum local vaut 0).
Si alors $f(0) = u \in]0,1[$, ce n'est ni un maximum local ni un minimum local, donc $\forall \alpha > 0$, $\exists x_1, x_2$ dans $]0,\alpha[$ tels que $f(x_1) < u = f(0) < f(x_2)$. En particulier, ($f$ continue en 0 et $f(0) \in]0,1[$) ceci est vrai pour α assez petit pour que $f([0,\alpha]) \subset]0,1[$.
Puis, il existe x_3 entre x_1 et x_2 tel que $f(x_3) = u$, (théorème des valeurs intermédiaires).
Supposons $0 < x_1 < x_3 < x_2$: sur $[0, x_3]$ f prend la valeur $f(x_1) < f(0) = f(x_3)$, donc f admet un minimum absolu, (continue sur un compact) donc relatif, atteint, et comme $f([0,\alpha]) \subset]0,1[$, ce minimum local n'est pas 0.
L'hypothèse $0 < x_2 < x_3 < x_1$ conduit à l'existence, sur $[0, x_3]$, de valeurs $(f(x_2)) > f(0) = f(x_3)$, donc a un maximum local de f qui n'est pas 1.
On aboutit à une absurdité donc $f(0) \in \{0, 1\}$.

Puis $Z = f^{-1}(1)$ est fermé, (f est continue), non vide, (f est surjective) fini. Sinon il existerait un point d'accumulation a dans Z, donc une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strictement monotone d'éléments de Z, qui convergerait vers a.
Sur le segment d'extrémités x_n et x_{n+1}, f, continue, admet un minimum, qui est un minima local, donc qui vaut 0, et qui est atteint en y_n. D'où une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points qui converge vers a, avec $f(y_n) = 0$. Par continuité, on aurait $f(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = 1$ et $f(a) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(y_n) = 0$. Absurde.
Donc Z est fini.

14. Soit la fonction φ définie sur $]a,b]$ par $\varphi(t) = \dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$: elle est de classe C^1 sur $]a,b]$.
Si $x \in]a,b[$, il existe $\xi_1 \in]x,b[$ tel que $\varphi(x) - \varphi(b) = (x-b)\varphi'(\xi_1)$, (accroissements finis), soit

$$\varphi(x) - \varphi(b) = (x-b)\left[\frac{f(a) - f(\xi_1) - (a-\xi_1)f'(\xi_1)}{(\xi_1 - a)^2}\right.$$

Or la formule de Taylor Lagrange pour f entre a et ξ_1, à l'ordre 2 s'applique, donc il existe $\xi \in]a, \xi_1[$ tel que

$$f(a) - f(\xi_1) = (a - \xi_1)f'(\xi_1) + \frac{(a-\xi_1)^2}{2} f''(\xi)$$

d'où $\quad \varphi(x) - \varphi(b) = (x-b)\dfrac{f''(\xi)}{2}$, soit encore

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = (x-b)\frac{f''(\xi)}{2} \text{ donc}$$

$$f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\xi).$$

15. On veut prouver l'existence de réels $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tels que, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\theta(h) = \left(\sum_{n=0}^{p} \alpha_n h^n\right) + o(h^p).$$

Posons $k = h\theta(h)$, les α_n, pour $0 \leqslant n \leqslant p$, sont tels que $k = \alpha_0 h + \alpha_1 h^2 + \ldots + \alpha_p h^{p+1} + o(h^{p+1})$.

Comme f est de classe C^∞, $f'(x+k)$ admet un développement limité de tout ordre en k, donc par composition des développements limités on en obtient un, en h, dans $f'(x+k)$. On a :

$$f'(x+k) = \sum_{i=0}^{p+1} \frac{f^{(i+1)}(x)}{i!}$$

$$\left(\alpha_0 h + \alpha_1 h^2 + \ldots + \alpha_p h^{p+1} + o(h^{p+1})\right)^i + o(h^{p+1})$$

donc, pour connaître $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$, dans l'expression $f(x+h) = f(x) + hf'(x+k)$ on va considérer le développement limité à l'ordre $p+2$ en h, le 1° membre étant $\displaystyle\sum_{j=0}^{p+2} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j + o(h^{p+2})$.

Terme constant : $f(x) = f(x)$;

en h : $f'(x) = f'(x)$;

en h^2 : $\dfrac{f''(x)}{2!} = \alpha_0 \dfrac{f''(x)}{1!}$ donc $\alpha_0 = \dfrac{1}{2}$ si $f''(x) \neq 0$;

en h^3 : $\dfrac{f^{(3)}(x)}{6} = \alpha_0^2 \dfrac{f^{(3)}(x)}{2} + \alpha_1 f''(x)$ d'où α_1 si $f''(x) \neq 0$ et α_0 connu;

en h^4 : $\dfrac{f^{(4)}(x)}{4!} = \alpha_0^3 \dfrac{f^{(4)}(x)}{3!} + \dfrac{2\alpha_0\alpha_1 f^{(3)}(x)}{2} + \alpha_2 f''(x)$.

On s'aperçoit que le système en $\alpha_0, \ldots, \alpha_p$ est triangulaire avec $f''(x)$ comme coefficient diagonal : si $f''(x) \neq 0$ on détermine tous les α_i de proche en proche.

Si $f''(x) = 0$ mais $f^{(3)}(x) \neq 0$, le terme en h^3 conduit à $\dfrac{1}{6} = \dfrac{\alpha_0^2}{2}$ d'où $\alpha_0^2 = \dfrac{1}{3}$ et $\alpha_0 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, (ne pas oublier que $\theta(h) \in]0,1[\Rightarrow$ la limite éventuelle de θ si h tend vers O est positive.)
Le système devient alors triangulaire avec un coefficient non nul sur la diagonale car $f^3(x) \neq 0$ et α_0 aussi, d'où les α_i.
On peut donc trouver les α_i dès qu'il existe une dérivée non nulle en 0.
D'où le «en général» de l'énoncé.

16. *Par l'absurde.* Si en x_0, $g(x_0) = f^2(x_0) + f'^2(x_0) > 1$, par continuité il existe I intervalle ouvert contenant x_0 sur lequel $g(x) = f^2(x) + f'^2(x) > 1$. Soit Ω l'ouvert des x tels que $g(x) > 1$, et J la composante connexe de x_0 dans Ω. Sur $J, f'(x)$ reste $\neq 0$ (sinon $f^2(x) > 1$, contredit $f^2 \leqslant 1$); de même $f(x) + f''(x) \neq 0$ sinon $f''(x) = -f(x)$ donc $f^2(x) + f'^2(x) = \left(f''(x)\right)^2 + f'^2(x)$ serait > 1).
Or $g'(x) = 2f(x)f'(x) + 2f'(x)f''(x) = 2f'(x)(f(x) + f''(x))$ donc sur J, g' ne s'annulant pas, garde un signe constant, (continuité). Supposons par exemple $g' > 0$ sur J.
Si J a une borne supérieure, b. Alors, si $x_0 < x < b$ on aura $1 < g(x_0) \leqslant g(x)$ et par continuité de g, $g(b) = \lim\limits_{x \to b^-} g(x)$ est $\geqslant g(x_0)$ donc > 1 d'où $b \in J$: c'est exclu car J est un intervalle ouvert.
Donc, avec g croissante on obtient $[x_0, +\infty[\subset J$.
(L'hypothèse g décroissante conduirait à $]-\infty, x_0] \subset J$.)
Donc sur $[x_0, +\infty[$, $f^2(x) + f'^2(x) \geqslant A = f^2(x_0) + f'^2(x_0)$ soit $f'^2(x) \geqslant A - f^2(x)$, avec $f^2(x) \leqslant 1$ et $A > 1$, ceci donne $f'^2(x) \geqslant A - 1$, et, comme f' ne s'annule pas sur J (déjà justifié) on a

soit $\qquad f'(x) \geqslant \sqrt{A-1}$ sur $[x_0, +\infty[$

soit $\qquad f'(x) \leqslant -\sqrt{A-1}$ sur $[x_0, +\infty[$;

ce qui conduit à $f(x) \geqslant f(x_0) + \sqrt{A-1}(x - x_0)$ ou à $f(x) \leqslant f(x_0) - \sqrt{A-1}(x - x_0)$ sur $[x_0, +\infty[$. Dans le 1$^{\text{er}}$ cas $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, dans le 2$^{\text{e}}$ cas la limite est $-\infty$, dans les deux cas cela contredit $f^2(x) \leqslant 1$ sur $\mathbb{R}$.
L'hypothèse g décroissante conduit à une absurdité en travaillant sur $]-\infty, x_0]$, finalement c'est que x_0 n'existe pas, donc que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^2(x) + f'^2(x) \leqslant 1$.

17. Par le théorème des accroissements finis sur $[0, a]$, il existe

$$\alpha \in]0, a[\text{ tel que } f(a) - f(0) = af'(\alpha) \doteq f(a).$$

Comme $a > 0, f(a)$ et $f'(\alpha)$ sont de même signe, ($f(a) \neq 0$ car $f(a)f'(a) < 0$), alors que $f(a)$ et $f'(a)$ sont de signe contraire. Finalement

$f'(\alpha)$ et $f'(a)$ sont de signe contraire, avec f' continue : d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in]\alpha, a[\subset]0, a[$ tel que $f'(c) = 0$.

18. Comme $\lim\limits_{x\to 0} x\theta(x) = 0$, on peut écrire

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6}\left(1 - \frac{x^2\theta^2(x)}{2}(1+\varepsilon_1(x))\right)$$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

C'est encore $\quad \sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{12}\,\theta^2(x)(1+\varepsilon_1(x))$,

or on a $\quad \sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}(1+\varepsilon_2(x))$

avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$, d'où, pour $x \neq 0$, l'égalité

$\dfrac{1}{12}\theta^2(x)(1+\varepsilon_1(x)) = \dfrac{1}{120}(1+\varepsilon_2(x))$. On a donc $\lim\limits_{x\to 0} \theta^2(x) = \dfrac{1}{10}$

et comme θ est à valeurs positives, $\lim\limits_{x\to 0} \theta(x) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

19. C'est une variante de l'exercice n° 6. Excusez-moi.

On a $f(x) = xf'(0) + o(x)$ donc, avec $u_n = n^2 \displaystyle\int_0^n f(x)e^x\,dx$,

$u_n = f'(0)n^2 \displaystyle\int_0^{1/n} xe^x\,dx + n^2 \int_0^{1/n} x\varepsilon(x)e^x\,dx$, avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists x_0 > 0$, $|x| < x_0 \Rightarrow |\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon$, donc

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \frac{1}{n} \leqslant x_0 \Rightarrow \left| n^2 \int_0^{1/n} x\varepsilon(x)e^x\,dx \right| \leqslant n^2 \int_0^{1/n} x\varepsilon e\,dx$$

ou encore $\left| n^2 \displaystyle\int_0^{1/n} x\varepsilon(x)e^x\,dx \right| \leqslant \dfrac{e\varepsilon}{2}$.

Par ailleurs $\displaystyle\int_0^{1/n} xe^x\,dx = e^{\xi_n} \int_0^{1/n} x\,dx = \frac{e^{\xi_n}}{2n^2}$ avec $\xi_n \in]0, \dfrac{1}{n}[$,

(formule de la moyenne) donc u_n est somme d'un terme qui tend vers $\dfrac{f'(0)}{2}$

et d'un qui tend vers 0 : on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{f'(0)}{2}$.

20. Soit $A = \{x \in [a,b], f(x) = 0\}$. Si $\mathrm{card}(A)$ est infini, comme $[a,b]$ est compact, A admet un point d'accumulation α.

Donc il existe une suite d'éléments tous distincts, x_n, dans A, tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha$. (On impose aussi $x_n \neq \alpha$.)

Comme f est dérivable, $f'(\alpha) = \lim\limits_{\substack{x\to\alpha \\ x\neq\alpha}} \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$ existe, donc ce sera en particulier $f'(\alpha) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n) - f(\alpha)}{x_n - \alpha}$.

Or $f(x_n) = 0$, et f étant continue car dérivable, $f(\alpha) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ est nul aussi d'où $f'(\alpha) = 0$: contredit $f^2(\alpha) + f'^2(\alpha) > 0$.

Donc $\mathrm{card}(A)$ est fini.

Un contre exemple est fourni par $f : x \rightsquigarrow x^2 \sin \dfrac{1}{x}$, qui sur $]0,1]$ s'annule pour les $x_k = \dfrac{1}{k\pi}, k \in \mathbb{N}^*$. Cette fonction est de classe C^∞ sur $]0;1]$, prolongeable par continuité en 0, par $f(0) = 0$, et $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} x \sin \dfrac{1}{x} = 0$ existe.

On a $f^2(0) + f'^2(0) = 0$.

21. On cherche $\xi \in]a,b[$ tel que la tangente d'équation $Y - f(\xi) = f'(\xi)(X - \xi)$ passe par $(c, 0)$, donc tel que $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi - c}$. Soit $g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}; x \rightsquigarrow \dfrac{f(x)}{x - c}$.

Elle est continue sur $[a,b], (c \notin [a,b])$ dérivable sur $]a,b[$, nulle en a et b. Le théorème de Rolle s'applique, donc il existe $\xi \in]a,b[$ tel que $g'(\xi) = 0 = \dfrac{f'(\xi)}{\xi - c} - \dfrac{f(\xi)}{(\xi - c)^2}$, d'où $f'(\xi) = \dfrac{f(\xi)}{\xi - c}$: c'est bien le résultat voulu.

CHAPITRE 8

Intégrale de Riemann

J'ai longtemps hésité avant de me décider à écrire ce chapitre. En effet, en ce qui concerne l'analyse fonctionnelle, on considère l'intégrale comme une forme linéaire agissant sur des fonctions, et, de ce point de vue, l'intégrale des fonctions réglées, (dont nous parlerons au chapitre 12) est suffisante.

Bien plus, la théorie de la mesure, semble ne donner droit de cité qu'à la belle intégrale de Lebesgue. Mais... (car il y a un mais) c'est oublier que bien souvent..., même avec cette intégrale de Lebesgue... on revient dans les calculs effectifs à l'intégrale de Riemann. De plus, comme cette dernière s'expose dans le cadre des fonctions de variable réelle, à valeurs réelles, elle fait jouer tout son rôle à la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Alors, me disant qu'on ne peut pas avoir la rose sans les épines, (ou, si une éventuelle allusion politique vous gêne, les mûres et leur confiture sans les épines) après avoir bien tergiversé, je me lance.

Dans tout ce chapitre, on considère un segment $I = [a, b]$ de $\mathbb{R}$ et l'espace vectoriel E des fonctions bornées de I dans $\mathbb{R}$.

1. Sommes de Darboux

DÉFINITION 8.1. — *On appelle subdivision de l'intervalle $[a, b]$ toute partie finie de $[a, b]$, contenant a et b.*

On notera $\mathcal{D}(I)$ l'ensemble des subdivisions de I et, si d est une subdivision de $[a, b]$, ses éléments en nombre fini sont ordonnés : on les indexera en croissant, d'où la notation $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ pour une subdivision d.

L'avantage de considérer les subdivisions comme des parties de $[a, b]$, c'est de pouvoir employer les mécanismes ensemblistes et de considérer par exemple la réunion, $d \cup d'$, de deux subdivisions ; ou leur intersection $d \cap d'$; de pouvoir ordonner (partiellement) les subdivisions en disant que d_1 est moins fine que d_2 si on a $d_1 \subset d_2$, (ce que l'on notera $d_1 \leqslant d_2$), et on dira encore dans ce cas que d_2 est plus fine que d_1.

On peut remarquer que $\{a, b\}$ est la subdivision moins fine que toutes les autres, et que, si d_1 et d_2 sont deux subdivisions, $d_1 \cap d_2$ est borne inférieure de $\{d_1, d_2\}$, alors que $d_1 \cup d_2$ est borne supérieure de cet ensemble.

DÉFINITION 8.2. — *Soit une subdivision $d : x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a, b]$. On appelle pas de la subdivision, le réel* $p(d) = \sup\{x_{i+1} - x_i, i = 0, 1, \ldots, n-1\}$.

Il est donc clair que $(d_1 \leqslant d_2) \Rightarrow (p(d_1) \geqslant p(d_2))$: c'est la subdivision la plus fine qui a le plus petit pas.

Soit f bornée sur $[a, b]$, et $d : x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$. Pour chaque $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ les réels $M_i(f) = \sup\{f(x);\ x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}\}$ et $m_i(f) = \inf\{f(x);\ x_i \leqslant x \leqslant x_{i+1}\}$ existent, ainsi que les sommes notées

8.3. $$S_f(d) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)M_i(f) \text{ et } s_f(d) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)m_i(f)$$

appelées respectivement *sommes supérieures et inférieures de Darboux*, ou plus familièrement *grandes et petites sommes de Darboux*.

THÉORÈME 8.4. — *Pour toutes subdivisions d_1 et d_2 de $[a, b]$ et toute fonction f de E, si $d_1 \leqslant d_2$ on a $s_f(d_1) \leqslant s_f(d_2) \leqslant S_f(d_2) \leqslant S_f(d_1)$.*

L'inégalité $s_f(d_2) \leqslant S_f(d_2)$ est évidente car $m_i(f) \leqslant M_i(f)$. Pour le reste, on procède par récurrence sur $p = \operatorname{card} d_2 - \operatorname{card} d_1$.

Si $p = 1$, d_2 est obtenue à partir de d_1 en ajoutant un seul point, noté c, et, si $d_1 = \{x_i, 0 \leqslant i \leqslant n\}$, il existe un et un seul $i \leqslant n-1$ tel que $x_i < c < x_{i+1}$.

En notant $m'_i(f)$ et $m''_i(f)$ les bornes inférieures de f sur $[x_i, c]$ et sur $[c, x_{i+1}]$, (et aussi $M'_i(f)$ et $M''_i(f)$ les bornes supérieures) on a alors $S_f(d_1) - S_f(d_2) = (x_{i+1} - x_i)M_i(f) - (x_{i+1} - c)M''_i(f) - (c - x_i)M'_i(f)$ puisque les autres termes des sommes de Darboux s'annulent deux à deux.

Mais $x_{i+1} - x_i = x_{i+1} - c + c - x_i$. On a donc encore

$$\begin{aligned} S_f(d_1) - S_f(d_2) = {} & (x_{i+1} - c)(M_i(f) - M''_i(f)) \\ & + (c - x_i)(M_i(f) - M'_i(f)) \end{aligned}$$

avec $M_i''(f) \leqslant M_i(f)$ et $M_i'(f) \leqslant M_i(f)$, (bornes supérieures portant sur « moins » d'éléments) on a finalement $S_f(d_1) - S_f(d_2) \geqslant 0$.

De même $s_f(d_1) - s_f(d_2) = (x_{i+1} - c)(m_i(f) - m_i''(f)) +$
$(c - x_i)(m_i(f) - m_i'(f))$ mais avec $m_i''(f) \geqslant m_i(f)$ et $m_i'(f) \geqslant m_i(f)$ cette fois, d'où $s_f(d_1) - s_f(d_2) \leqslant 0$.

Si $p > 1$, on passe de d_1 à d_2 en ajoutant successivement p fois un terme, la transitivité des inégalités donne le résultat. ■

COROLLAIRE 8.5. — *Si d_1 et d_2 sont deux subdivisions quelconques de $[a, b]$ et si $f \in E$ on a $s_f(d_1) \leqslant S_f(d_2)$.*

Car $d_1 \leqslant d = d_1 \cup d_2$ et $d_2 \leqslant d$ aussi, d'où
$s_f(d_1) \leqslant s_f(d) \leqslant S_f(d) \leqslant S_f(d_2)$. ■

THÉORÈME 8.6. — *Soit d une subdivision de $[a, b]$ et f dans E. On a :*

1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+$, $s_{\lambda f}(d) = \lambda s_f(d)$ *et* $S_{\lambda f}(d) = \lambda S_f(d)$;

2) $s_{-f}(d) = -S_f(d)$ *et* $S_{-f}(d) = -s_f(d)$;

3) si f est à valeurs positives, $s_f(d) \geqslant 0$;

4) si f est constante, égale à k, sur $[a, b]$ $S_f(d) = s_f(d) = k(b - a)$;

5) si $g \in E$, $s_f(d) + s_g(d) \leqslant s_{f+g}(d) \leqslant S_{f+g}(d) \leqslant S_f(d) + S_g(d)$.

Ces résultats sont évidents et proviennent des propriétés de corps ordonné de $\mathbb{R}$.

Vérifions le 5° : sur $[x_i, x_{i+1}]$ on a $m_i(f) + m_i(g)$ qui minore $f(x) + g(x)$, donc $m_i(f + g)$, borne inférieure des $f(x) + g(x)$ est bien $\geqslant m_i(f) + m_i(g)$. Après multiplication par $x_{i+1} - x_i, > 0$, et sommation, on a $s_{f+g}(d) \geqslant s_f(d) + s_g(d)$. ■

Ces relations serviront à mettre en évidence l'aspect forme linéaire positive de l'intégrale.

Voici un résultat utile pour les majorations.

THÉORÈME 8.7. — *Soit $f \in E$, d et d' deux subdivisions de $[a, b]$.*

On a $S_f(d) \leqslant S_f(d') + \text{card}(d')p(d)||f||_\infty$ *et*
$s_f(d) \geqslant s_f(d') - \text{card}\,(d')p(d)||f||_\infty$.

Notons $(x_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ et $(x'_j)_{0 \leqslant j \leqslant n'}$ les suites ordonnées finies de ces subdivisions et m_i, M_i; m'_j, M'_j les bornes inférieures et supérieures de f sur $[x_i; x_{i+1}]$ d'une part et sur $[x'_j, x'_{j+1}]$ d'autre part.

Les termes de $S_f(d) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)M_i$ sont de deux sortes.

1) Ceux pour lesquels $]x_i, x_{i+1}[$ contient des x'_j. Il y en a card (d') au plus, et on a alors $(x_{i+1} - x_i)M_i \leqslant p(d)||f||_\infty$.

2) Ceux pour lesquels $]x_i, x_{i+1}[$ ne contient aucun x'_j. Mais alors $[x_i, x_{i+1}]$ est contenu dans un $[x'_j, x'_{j+1}]$, (associé à l'indice j du plus grand des $x'_k < x_i$), et $M_i \leqslant M'_j$ d'où $(x_{i+1} - x_i)M_i \leqslant (x_{i+1} - x_i)M'_j$.

On note I_1 l'ensemble des indices du premier type, I_2 celui des indices du 2^e^ type, et on note $j(i)$ l'indice tel que $[x_i, x_{i+1}] \subset [x'_j, x'_{j+1}]$.

$$\begin{aligned} S_f(d) &= \sum_{i\in I_2}(x_{i+1} - x_i)M_i + \sum_{i\in I_1}(x_{i+1} - x_i)M_i \\ &\leqslant \sum_{i\in I_2}(x_{i+1} - x_i)M'_{j(i)} + \operatorname{card}(d')p(d)||f||_\infty. \end{aligned}$$

Or dans la somme indexée par I_2, on peut associer ensemble les i donnant le même $j = j(i)$. Les segments $[x_i, x_{i+1}]$ seront tous distincts, dans $[x'_j, x'_{j+1}]$, la somme des longueurs sera majorée par $(x'_{j+1} - x'_j)$ et finalement on a, si J est l'ensemble des $j(i)$ pour i dans I_2 :

$$\sum_{i\in I_2}(x_{i+1} - x_i)M'_{j(i)} \leqslant \sum_{j\in J}(x'_{j+1} - x'_j)M'_j \leqslant S_f(d')$$

d'où $$S_f(d) \leqslant S_f(d') + (\operatorname{card} d')p(d)||f||_\infty.$$

On justifie de manière analogue l'autre inégalité, ou bien on remarque que

$$\begin{aligned} s_f(d) = -S_{-f}(d) &\geqslant -\big(S_{-f}(d') + (\operatorname{card} d')p(d)||| - f||_\infty\big) \\ &\geqslant -S_{-f}(d') - (\operatorname{card} d')p(d)||f||_\infty \text{ avec } S_{-f}(d') = -s_f(d') \end{aligned}$$

c'est bien

$$s_f(d) \geqslant s_f(d') - (\operatorname{card} d')p(d)||f||_\infty.$$ ■

COROLLAIRE 8.8. — *Soit $f \in E$ de bornes inférieures et supérieures m et M sur $[a, b]$ et d et d' deux subdivisions de $[a, b]$. On a*

$$S_f(d) \leqslant S_f(d') + \operatorname{card}(d')p(d)(M - m)$$

et

$$s_f(d) \geqslant s_f(d') - \operatorname{card}(d')p(d)(M - m).$$

Car, si g est définie par $g(x) = f(x) - m$, elle est à valeurs positives sur $[a,b]$ et $||g||_\infty = M - m$. Le théorème 8.7 appliqué à g donne $S_g(d) \leqslant S_g(d') + \text{card}(d')p(d)(M-m)$, or on peut vérifier que $S_g(d) = S_f(d) - S_{\overline{m}}(d)$, avec $\overline{m}$ fonction constante valant m, mais alors $S_{\overline{m}}(d) = m(b-a)$, (théorème 8.6).

On a $S_g(d) = S_f(d) - m(b-a)$, mais aussi $S_g(d') = S_f(d') - m(b-a)$.

En remplaçant par ces valeurs et en éliminant $-m(b-a)$ on a bien l'inégalité voulue pour les grandes sommes de Darboux. Il en est de même pour les petites sommes de Darboux. ■

2. Intégrale supérieure, intégrale inférieure

Il en est de l'intégrale comme du cassoulet : c'est quelque chose qui se prépare longtemps, par petites touches aussi ne définirons-nous pas encore l'intégrale dans ce paragraphe, mais deux intégrales !

Soit f bornée sur $[a,b]$, m et M les bornes inférieures et supérieures de f. Soit d et d' deux subdivisions de $[a,b]$ on a vu que :

8.9. $m(b-a) \leqslant s_f(d) \leqslant S_f(d') \leqslant M(b-a)$, donc l'ensemble des sommes inférieures est majoré : il admet une borne supérieure,

8.10. notée $\displaystyle\int_{*[a,b]} f$ ou $\displaystyle\int_* f$, et appelée *intégrale inférieure* de f sur $[a,b]$,

et l'ensemble des sommes supérieures, (de Darboux), est minoré donc

8.11. admet une borne inférieure, notée $\displaystyle\int_{[a,b]}^* f$, ou $\displaystyle\int^* f$, et appelée *intégrale supérieure* de f sur $[a,b]$.

De plus, il résulte de 8.9, que $s_f(d) \leqslant \displaystyle\int_{[a,b]}^* f$ et aussi que

$\displaystyle\int_{*[a,b]} f \leqslant S_f(d)$, et ce pour toute subdivision, d'où *a fortiori*

8.12. $\displaystyle\int_{*[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]}^* f.$

Le plus souvent ces deux intégrales diffèrent : par exemple, si f est la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ restreinte à $[0,1]$, on a

$$\int_{*[0,1]} f = 0 \text{ et } \int_{[0,1]}^{*} f = 1.$$

On devine que seront appelées intégrables les fonctions pour lesquelles les deux intégrales coïncideront, mais avant d'en arriver là, on peut déjà établir des propriétés évidentes sur ces intégrales, en employant la notation ne mentionnant pas le segment $[a,b]$, fixé ici.

THÉORÈME 8.13. — *Soient f et g dans E, on a :*

1) $\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \ \int^* \lambda f = \lambda \int^* f$ *et* $\int_* \lambda f = \lambda \int_* f$ *;*

2) $\int^* -f = -\int_* f$ *et* $\int_* -f = -\int^* f$ *;*

3) $\int_* f + \int_* g \leqslant \int_* (f+g) \leqslant \int^* (f+g) \leqslant \int^* f + \int^* g$ *;*

4) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \int_* (f+\lambda) = \left(\int_* f\right) + \lambda(b-a)$

et $\int^* (f+\lambda) = \left(\int^* f\right) + \lambda(b-a)$ *;*

5) $(f \geqslant 0) \Rightarrow \left(\int_* f \geqslant 0\right)$ *;*

6) si f est constante, (égale à λ), $\int_* f = \int^* f = \lambda(b-a)$.

Le 1) vient de ce que le produit pour $\lambda > 0$ conserve les inégalités, et le 2) de ce que le produit par un nombre négatif les renverse. Dans le 3) si d et d' sont deux subdivisions de $[a,b]$ on a
$s_f(d) + s_f(d') \leqslant s_f(d \cup d') + s_g(d \cup d') \leqslant s_{f+g}(d \cup d')$,
(théorème 8.4 pour la première inégalité, et 8.6 (5) pour la deuxième.
Puis $s_{f+g}(d \cup d') \leqslant \int_* (f+g)$, donc, pour d' fixée, l'inégalité
$s_f(d) \leqslant \int_*(f+g) - s_g(d')$, valable pour tout d, implique
$\int_* f \leqslant \int_* (f+g) - s_g(d')$, d'où à son tour $s_g(d') \leqslant \int_*(f+g) - \int_* f$,
valable pour tout d', et pour la borne supérieure des $s_g(d')$, l'inégalité

$$\int_* g \leqslant \int_* (f+g) - \int_* f \text{ d'où } \int_* f + \int_* g \leqslant \int_* (f+g).$$

On procède de même pour les inégalités supérieures.

Le 4) vient de ce que sur un segment $[x_i, x_{i+1}]$ les bornes inférieures et supérieures de $g = f+\lambda$ sont $m_i(g) = \lambda+m_i(f)$ et $M_i(g) = \lambda+m_i(f)$, (l'addition préserve les inégalités), d'où $s_f(d) + (b-a)\lambda = s_g(d)$ et $S_f(d) + \lambda(b-a) = S_g(d)$. Il ne reste plus qu'à passer aux bornes pour conclure.

Le 5 et le 6 sont évidents.

THÉORÈME 8.14. — *(de Darboux). Si $f \in E$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall d \in \mathcal{D}(I)$ si $p(d) \leqslant \alpha$, on a : $\int^* f \leqslant S_f(d) \leqslant \varepsilon + \int^* f$ et $-\varepsilon + \int_* f \leqslant s_f(d) \leqslant \int_* f$.*

Je vous rappelle, (mais y a-t-il un lecteur de ce livre?) que $\mathcal{D}(I)$ est l'ensemble des subdivisions de $I = [a,b]$ et $p(d)$ le pas de la subdivision d. Quand il n'y a pas d'ambiguïté sur le segment d'intégration, la notation $\int_{*[a,b]}$ est simplifiée en $\int_*$.

La définition d'une borne inférieure nous permet de dire qu'il existe une subdivision d_0 associée à un $\varepsilon' > 0$ donné, telle que

$$\int^* f \leqslant S_f(d_0) \leqslant \int^* f + \varepsilon',$$

puisque $\varepsilon' + \int^* f$ n'est plus minorant des grandes sommes de Darboux. Mais ici on veut plus, on veut « coincer » toutes les subdivisions de pas assez petit. On sent que le corollaire 8.8 va servir.

Prenons donc $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et d_0 telle que $\int^* f \leqslant S_f(d_0) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} + \int^* f$. Pour toute subdivision d, on aura, avec m et M bornes de f, $S_f(d) \leqslant S_f(d_0) + p(d)\operatorname{card}(d_0)(M-m)$ donc, si $M - m > 0$, on imposera $p(d) \leqslant \alpha = \dfrac{\varepsilon}{2\operatorname{card}(d_0)(M-m)}$ alors que si $M - m = 0$, on n'imposera rien, (ou $\alpha = 1515$ pourquoi pas), d'où un $\alpha > 0$ tel que $p(d) \leqslant \alpha \Rightarrow \int^* f \leqslant S_f(d) \leqslant \varepsilon + \int^* f$.

Le même corollaire s'applique pour l'intégrale inférieure. ■

THÉORÈME 8.15. — *Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{D}(I)$ telle que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists d \in \mathcal{A}$ avec $p(d) \leqslant \varepsilon$.*
Alors $\sup\{s_f(d);\ d \in \mathcal{A}\} = \int_* f$ *et* $\inf\{S_f(d);\ d \in A\} = \int^* f$.

Justifions le résultat pour l'intégrale supérieure. Comme $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}(I)$ il est clair que $\int^* f = \inf\{S_f(d);\ d \in \mathcal{D}(I)\} \leqslant \inf\{S_f(d);\ d \in \mathcal{A}\}$.

Puis, soit $\varepsilon > 0$, d'après le théorème 8.14 il existe $\alpha > 0$ tel que pour $p(d) \leqslant \alpha$ on ait $S_f(d) \leqslant \varepsilon + \int^* f$, or $\exists d_0 \in \mathcal{A}$ avec $p(d_0) \leqslant \alpha$, d'où : $\inf\{S_f(d);\ d \in \mathcal{A}\{\leqslant S_f(d_0) \leqslant \varepsilon + \int^* f$ et finalement on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \int^* f \leqslant \inf\{S_f(d),\ d \in \mathcal{A}\} \leqslant \varepsilon + \int^* f,$$

d'où le résultat, si ε tend vers 0. ■

COROLLAIRE 8.16. — *Soit $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de subdivisions de $[a,b]$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} p(d_n) = 0$. On a $\int^* f = \lim\limits_{n\to+\infty} S_f(d_n)$ et $\int_* f = \lim\limits_{n\to+\infty} s_f(d_n)$.*

En effet, $\forall n$, $\int^* f \leqslant S_f(d_n)$, et d'après le théorème de Darboux (Théorème 8.14), $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que $p(d) \leqslant \alpha \Rightarrow S_f(d) \leqslant \varepsilon + \int^* f$, et à cet α on associe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $p(d_n) \leqslant \alpha$ d'où $\int^* f \leqslant S_f(d_n) \leqslant \varepsilon + \int^* f$: c'est bien $\lim\limits_{n\to+\infty} S_f(d_n) = \int^* f$. ■

Il n'aura pas échappé à votre sagacité que ce corollaire en est un du théorème 8.14 et non du théorème 8.15, mais tant pis.

Ce corollaire, appliqué aux subdivisions de $[a,b]$ en n parties égales, donnera naissance à la formule de la moyenne, (voir 8.46). On peut noter que l'on suit un démarche analogue à celle de la topologie qui fait passer des voisinages, aux bases de voisinages puis aux suites quand c'est possible, (espace métriques).

Ici on passe de toutes les sommes de Darboux, à celles associées aux parties $\mathcal{A}$ du théorème 8.15, puis aux suites de subdivisions de pas tendant vers 0.

COROLLAIRE 8.17. — *Pour tout point c de $[a,b]$, et $f \in E$, on a $\int^*_{[a,c]} f + \int^*_{[c,b]} f = \int^*_{[a,b]} f$ et $\int_{*[a,c]} f + \int_{*[c,b]} f = \int_{*[a,b]} f$.*

C'est *la relation de Chasles.*

Soit $\mathcal{A} = \{\text{subdivisions } d \geqslant d_0 = \{a, c, b\}\}$, ou encore des subdivisions d contenant c, ou passant par c.

Le théorème 8.15 s'applique à $\mathcal{A}$, donc $\int_{[a,b]}^{*} f = \inf\limits_{d \in \mathcal{A}} S_f(d)$. Mais si $d \in \mathcal{A}$, le point c figure dans la suite $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ des points de d, et si i_0 est tel que $c = x_{i_0}$ on a, avec des notations évidentes :

$$S_f(d) = \sum_{i=0}^{i_0-1} (x_{i+1} - x_i) M_i(f) + \sum_{i=i_0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) M_i(f).$$

En introduisant alors $d_1 : x_0 = a < x_1 < \ldots < x_{i_0} = c$, subdivision de $[a, c]$, et $d_2 : x_{i_0} = c < x_{i_0+1} < \ldots < x_n = b$, subdivision de $[c, b]$, on a $S_f(d) = S_f(d_1) + S_f(d_2)$. Or, on a

$$\int_{[a,c]}^{*} f \leqslant S_f(d_1) \text{ et } \int_{[c,b]}^{*} \leqslant S_f(d_2) \text{ d'où, } \forall d \in \mathcal{A},$$

$$\int_{[a,c]}^{*} f + \int_{[c,b]}^{*} f \leqslant S_f(d), \text{ et en passant à la borne inférieure}$$

$$\int_{[a,c]}^{*} f + \int_{[c,b]}^{*} f \leqslant \int_{[a,b]}^{*} f.$$

Puis, si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe δ_1 subdivision de $[a, c]$ et δ_2 de $[c, b]$ telles que $S_f(\delta_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_{[a,c]}^{*} f$ et $S_f(\delta_2) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int_{[c,b]}^{*} f$, d'où en accolant δ_1 et δ_2, on obtient une subdivision d de $[a, b]$ telle que $S_f(\delta_1) + S_f(\delta_2) = S_f(d)$ et $S_f(d) \leqslant \varepsilon + \int_{[a,c]}^{*} f + \int_{[c,b]}^{*} f$, d'où *a fortiori* $\int_{[a,b]}^{*} f \leqslant \varepsilon + \int_{[a,c]}^{*} f + \int_{[c,b]}^{*} f$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\int_{[a,b]}^{*} f \leqslant \int_{[a,c]}^{*} f + \int_{[c,b]}^{*} f$ d'où l'égalité.

La fonction f étant quelconque, ce résultat appliqué à $-f$ donne l'égalité pour les intégrales inférieures (c'est le 2 du théorème 8.13 qui doit bien servir quelque part).

Nous voici parvenu au seuil de la découverte de l'intégrale.

3. Intégrale de Darboux

DÉFINITION 8.18. — *Une fonction f bornée de $I = [a,b]$ dans $\mathbb{R}$ est dite Darboux intégrable sur I si les intégrales supérieures et inférieures de f sont égales.*

8.19. On note $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ cette valeur commune $\displaystyle\int_{[a,b]}^{*} f = \int_{*[a,b]} f$, ou encore $\displaystyle\int f$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le segment.

De même on dira plus brièvement que f est intégrable, alors qu'on devrait toujours préciser « Darboux » intégrable, ou... « Lebesgue » intégrale ou... « toute autre intégrale » intégrable.

Disons tout de suite que de telles fonctions existent. D'abord si $b = a$, toute fonction bornée (sic) sur $[a,a]$ est d'intégrale nulle sur $[a,a]$. Puis toute fonction constante sur $[a,b]$ est intégrable d'intégrale $k(b-a)$, si $f(x) = k$ sur $[a,b]$) c'est le 6) du théorème 8.15. Il est à souhaiter qu'il y ait autre chose dans l'ensemble des fonctions intégrables, sinon on s'est donné beaucoup de mal pour rien.

THÉORÈME 8.20. — *Soit f bornée de I dans $\mathbb{R}$. Il y a équivalence entre :*

1) f est Darboux intégrable sur I,
2) $\forall\varepsilon > 0,\ \exists(d,d') \in (\mathcal{D}(I))^2,\ S_f(d) - s_f(d') \leqslant \varepsilon;$
3) $\forall\varepsilon > 0,\ \exists d \in \mathcal{D}(I),\ S_f(d) - s_f(d) \leqslant \varepsilon;$
4) $\forall\varepsilon > 0,\ \exists\alpha > 0,\ \forall d \in \mathcal{D}(I),\ (p(d) \leqslant \alpha) \Rightarrow (S_f(d) - s_f(d) \leqslant \varepsilon).$
Le 4) signifie que $S_f(d) - s_f(d)$ tend vers 0 si le pas de d tend vers 0 :

8.21. c'est *le critère d'intégrabilité, ou encore le Théorème de Darboux.*

1) $\Rightarrow$ 2) car $\forall\varepsilon > 0, \exists d$ et d', subdivisions telles que

$$0 \leqslant S_f(d) - \int^{*} f \leqslant \varepsilon/2 \text{ et } 0 \leqslant \int_{*} f - s_f(d') \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où en ajoutant $0 \leqslant S_f(d) - s_f(d') + \int_* f - \int^* f \leqslant \varepsilon$ et comme f est Darboux intégrable, $\displaystyle\int_* f = \int^* f$, il reste $0 \leqslant S_f(d) - s_f(d') \leqslant \varepsilon$.

2) $\Rightarrow$ 3) car avec $d'' = d \cup d'$, on a $S_f(d'') \leqslant S_f(d)$ et $s_f(d') \leqslant s_f(d'')$ donc : $0 \leqslant S_f(d'') - s_f(d'') \leqslant S_f(d) - s_f(d') \leqslant \varepsilon$.

3) $\Rightarrow$ 1) puisque, $\forall \varepsilon > 0$, avec d telle que $S_f(d) - s_f(d) \leqslant \varepsilon$, comme $\int^* f \leqslant S_f(d)$ et $s_f(d) \leqslant \int_* f$, on a $0 \leqslant \int^* f - \int_* f \leqslant S_f(d) - s_f(d) \leqslant \varepsilon$, et ce pour tout $\varepsilon > 0$ donc $\int^* f = \int_* f$: la fonction f est Darboux intégrable.

Les trois premières propriétés sont équivalentes.

Il est évident que 4) $\Rightarrow$ 3), (donc $\Rightarrow$ 1). Puis 1) $\Rightarrow$ 4) car d'après le théorème 8.14, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall d \in \mathcal{D}(I)$, $p(d) \leqslant \alpha$ on ait

$$\int^* f \leqslant S_f(d) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int^* f \text{ et } -\frac{\varepsilon}{2} + \int_* f \leqslant s_f(d) \leqslant \int_* f$$

d'où l'on déduit la majoration :

$$S_f(d) - s_f(d) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \int^* f - \left(-\frac{\varepsilon}{2} + \int_* f\right) = \varepsilon \text{ puisque } \int^* f = \int_* f. \blacksquare$$

COROLLAIRE 8.22. — *Les fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ sont Darboux intégrables.*

Ouf! on n'a pas fait tout cela pour rien.

En effet, f continue de $[a, b]$ compact dans $\mathbb{R}$ est bornée et uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $|x - x'| \leqslant \alpha$, (et x et x' dans $[a, b]$) $\Rightarrow$ $|f(x) - f(x')| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{b - a}$.

Si n est tel que $\dfrac{b-a}{n} \leqslant \alpha$, en subdivisant $[a, b]$ en n parties égales, sur $[x_i, x_{i+1}]$, (avec $x_i = a + i \cdot \dfrac{b-a}{n}$), f ne varie pas de plus de $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ donc

$$M_i(f) - m_i(f) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ d'où } S_f(d) - s_f(d) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon.$$

Le théorème 8.20, (3 $\Rightarrow$ 1) donne f Darboux intégrable.

COROLLAIRE 8.23. — *Les fonctions monotones de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ sont Darboux intégrables.*

Traitons le cas de f croissante, (le passage de f à $-f$ donnant celui de f décroissante).

Avec une subdivision de $[a, b]$ en n parties égales de longueur $\dfrac{b-a}{n}$, sur $[x_i, x_{i+1}]$ on a $M_i(f) = f(x_{i+1})$ et $m_i(f) = f(x_i)$ donc :

$$\begin{aligned} S_f(d) - s_f(d) &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(f(x_{i+1}) - f(x_i)) \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f(x_{i+1}) - f(x_i)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)), \end{aligned}$$

puisque $x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n}$.

Il n'est pas difficile de trouver alors n assez grand pour avoir $\dfrac{(b-a)(f(b) - f(a)}{n} \leqslant \varepsilon$ d'où l'intégrabilité de f. ■

Maintenant que nous sommes rassurés sur la non vacuité de l'ensemble des fonctions Darboux intégrables, venons en à l'étude des propriétés de l'intégrale.

THÉORÈME 8.24. — *L'ensemble F des fonctions Darboux intégrables sur $[a, b] = I$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E des applications bornées sur I et l'intégrale : $f \rightsquigarrow \displaystyle\int_I f$ est une forme linéaire positive.*

En effet F est non vide car il contient les fonctions constantes, continues, ou monotones. Puis si f et g sont dans F on a

$$\begin{aligned} \int f + \int g &= \int_* f + \int_* g \\ &\leqslant \int_* (f+g) \leqslant \int^* (f+g) \leqslant \int^* f + \int^* g = \int f + \int g \end{aligned}$$

(voir le 3 du théorème 8.13), d'où $\displaystyle\int_* (f+g) = \int^* (f+g)$ donc $f+g$ intégrable, mais aussi $\displaystyle\int (f+g) = \int f + \int g$.

Mais ce même théorème 8.13 donne, pour $\lambda \geqslant 0$, et f intégrable : $\displaystyle\int_* \lambda f = \lambda \int_* f = \lambda \int^* f = \int^* \lambda f$, donc λf intégrable, alors qu'avec $\lambda < 0$ on aura $\displaystyle\int_* \lambda f = \int_* -(-\lambda) f = -\int^* (-\lambda) f = -(-\lambda) \int^* f =$

$\lambda \int^* f$ et aussi, (f intégrable), $\lambda \int^* f = \lambda \int_* f = -(-\lambda) \int_* f = -\int_* (-\lambda) f = \int^* -(-\lambda) f = \int^* \lambda f$ d'où, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf intégrable, avec l'égalité $\int \lambda f = \lambda \int f$, donc le caractère linéaire de l'intégrale, application de F dans $\mathbb{R}$.

Enfin, si $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$, et si f est intégrable, on a $\int f = \int_* f \geqslant 0$ d'après le 5 du théorème 8.13 : cette forme linéaire est positive. ■

REMARQUE 8.25. — *Si f et g sont intégrables sur I et si, $\forall x \in I$, $f(x) \leqslant g(x)$ on a $\int f \leqslant \int g$,* car alors $g - f$ est intégrable, positive, donc $\int (g-f) = \int g - \int f \geqslant 0$. ■

THÉORÈME 8.26. — *Soit f bornée de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et $c \in]a,b[$. On a f intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si f est intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$. De plus $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$.* (Relation de Chasles)

D'après le corollaire 8.17, on a

$$\int^*_{[a,b]} f = \int^*_{[a,c]} f + \int^*_{[c,b]} f \text{ et } \int_{*[a,b]} f = \int_{*[a,c]} f + \int_{*[c,b]} f,$$

donc le nombre positif $A = \int^*_{[a,b]} f - \int_{*[a,b]} f$ est la somme des deux nombres positifs

$$B = \int^*_{[a,c]} f - \int_{*[a,c]} f \text{ et } C = \int^*_{[c,b]} f - \int_{*[c,b]} f,$$

et, avec $A = B + C$ on a alors $(A = 0) \Leftrightarrow (B = C = 0)$ d'où f intégrable sur $[a,b]$, (*i.e.* $A = 0$) $\Leftrightarrow$ $(B = C = 0)$ soit f intégrable sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$.

Comme dans ce cas $\int^* = \int$ on a bien $\int_{[a,b]} f = \int_{[a,c]} f + \int_{[c,b]} f$. ■

THÉORÈME 8.27. — *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions bornées de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui converge uniformément vers* f. *Alors* f *est bornée sur* $[a,b]$ *et,*
$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0,\ \forall n\geqslant n_0,\ \displaystyle\int^* f\leqslant\int^* f_n+\varepsilon(b-a)$ *et*
$\displaystyle\left(\int_* f_n\right)-\varepsilon(b-a)\leqslant\int_* f.$

La convergence uniforme d'une suite de fonctions sera surtout étudiée au chapitre XII sur les espaces fonctionnels. Disons simplement ici que,

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0,\ \forall n\geqslant n_0,\ \forall x\in[a,b],\ |f(x)-f_n(x)|\leqslant\varepsilon.$$

En particulier $|f(x)|\leqslant\varepsilon+|fn_0(x)|$ avec f_{n_0} bornée, donc f est bornée.

Puis on a $-\varepsilon\leqslant f(x)-f_n(x)\leqslant\varepsilon$, ($\forall n\geqslant n_0$ et $\forall x\in[a,b]$), soit encore $f_n(x)-\varepsilon\leqslant f(x)\leqslant f_n(x)+\varepsilon$.

Mais, pour une subdivision quelconque $x_0=a<x_1<\ldots<x_p=b$, on aura, pour les bornes des fonctions sur $[x_i,x_{i+1}]$:

$$M_i(f)\leqslant M_i(f_n)+\varepsilon \text{ et } -\varepsilon+m_i(f_n)\leqslant m_i(f)$$

d'où, en multipliant par $(x_{i+1}-x_i)>0$, et en sommant :

$$S_f(d)\leqslant S_{f_n}(d)+\varepsilon(b-a) \text{ et } -\varepsilon(b-a)+s_{f_n}(d)\leqslant s_f(d),$$

enfin, en passant aux bornes, inférieures pour les $S_f(d)$ et supérieures pour les $s_f(d)$, on a finalement,
$\forall n\geqslant n_0,\ \displaystyle\int^* f\leqslant\varepsilon(b-a)+\int^* f_n$ et $\displaystyle-\varepsilon(b-a)+\int_* f_n\leqslant\int_* f.$ ■

COROLLAIRE 8.28. — *Si les* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont Darboux intégrables sur* $[a,b]$ *et convergent uniformément vers* f, *la fonction* f *est Darboux intégrable sur* $[a,b]$ *et* $\displaystyle\int f=\lim_{n\to+\infty}\int f_n$.

Car d'après le théorème 8.27, on a déjà f bornée, puis, avec les mêmes notations $\displaystyle 0\leqslant\int^* f-\int_* f\leqslant\int^* f_n-\int_* f_n+2\varepsilon(b-a)=2\varepsilon(b-a)$ puisque, f_n étant intégrable, $\displaystyle\int^* f_n=\int_* f_n$. Comme ε est quelconque on a $\displaystyle\int^* f=\int_* f$, donc f est intégrable.

Puis, toujours avec $\varepsilon > 0$ donné et n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in [a,b]$, on ait $-\varepsilon \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant \varepsilon$, l'intégrale étant une forme linéaire positive on a : $-\varepsilon(b-a) \leqslant \displaystyle\int f - \int f_n \leqslant \varepsilon(b-a)$, (remarque 8.25).

Donc $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0, \left|\displaystyle\int f - \int f_n\right| \leqslant \varepsilon(b-a)$: c'est bien la traduction de $\displaystyle\int f = \lim_{n\to+\infty} \int f_n$. ■

COROLLAIRE 8.29. — *Sur l'espace vectoriel F des applications intégrables de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ normé par la norme de la convergence uniforme, l'intégrale est une forme linéaire continue, (positive, ne l'oublions pas).*

Puisque nous venons de voir que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$ implique $\displaystyle\int f = \lim_{n\to+\infty} \int f_n$, on a bien $f \rightsquigarrow \displaystyle\int f$ continue, vu la caractérisation de la continuité dans les espaces métriques, (corollaire 4.31). ■

On verra au paragraphe suivant une justification en termes de continuité d'application linéaire, voir 8.32.

4. Propriétés de l'intégrale de Darboux

Il n'y a pas qu'une structure d'algèbre sur l'ensemble des applications bornées de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ On a aussi un produit défini sur cet ensemble, et il est légitime de savoir ce que donne un produit de deux fonctions intégrables.

THÉORÈME 8.30. — *Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$, le produit fg est aussi intégrable sur $[a,b]$.* (Mais il n'y a aucun rapport entre l'intégrale du produit et le produit des intégrales).

Comme on travaille sur des inégalités qui ne se multiplient entre elles que si les nombres sont positifs, on suppose d'abord f et g intégrables à valeurs positives.

Comme f et g sont bornées, $h = fg$ l'est aussi.

Soit $d : x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$.

On a $m_i(f)m_i(g) \leqslant f(x)g(x) \leqslant M_i(f)M_i(g)$, pour x dans $[x_i, x_{i+1}]$, donc $m_i(f)m_i(g) \leqslant m_i(fg) \leqslant M_i(fg) \leqslant M_i(f)M_i(g)$, d'où en multipliant par $x_{i+1} - x_i$ positif, et en sommant :

$$S_{fg}(d) - s_{fg}(d) \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)(M_i(f)M_i(g) - m_i(f)m_i(g)),$$

majorant dans lequel on s'efforce de faire apparaître des choses connues, en écrivant :

$$\begin{aligned} M_i(f)M_i(g) - m_i(f)m_i(g) & \\ &= (M_i(f) - m_i(f))\, M_i(g) + m_i(f)\,(M_i(g) - m_i(g)) \\ &\leqslant \|g\|_\infty\,(M_i(f) - m_i(f)) + \|f\|_\infty\,(M_i(g) - m_i(g)) . \end{aligned}$$

Il vient donc :

$$S_{fg}(d) - s_{fg}(d) \leqslant \|g\|_\infty \left(S_f(d) - s_f(d)\right) + \|f\|_\infty \left(S_g(d) - s_g(d)\right) .$$

Comme f et g sont intégrables, le majorant tend vers 0 si $p(d)$ tend vers 0, ce qui prouve l'intégrabilité de fg. (Théorème 8.20).

Pour f et g quelconques mais de bornes inférieures respectives m_f et m_g, les fonctions $f - m_f$ et $g - m_g$ sont intégrables à valeurs positives donc $fg - m_f g - m_g f + m_f m_g$ est intégrables d'où fg intégrable vu la structure vectorielle sur l'ensemble des fonctions intégrables. ■

THÉORÈME 8.31. — *Soit f intégrable sur $[a, b]$, les fonctions $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = -\inf(f, 0)$ le sont, donc $|f| = f^+ + f^-$ est aussi intégrable sur $[a, b]$ et on a* $\left|\int f\right| \leqslant \int |f|$.

Comme f est bornée sur $[a, b]$, f^+ et f^- le sont, et sont à valeurs positives.

Pour $[x_i, x_{i+1}]$ segment d'une subdivision d de $[a, b]$, comme $f^+ \geqslant f$, on a déjà $m_i(f^+) \geqslant m_i(f)$; puis, si $M_i(f) > 0$, on a $M_i(f^+) = M_i(f)$ donc dans ce cas $M_i(f^+) - m_i(f^+) = M_i(f) - m_i(f^+) \leqslant M_i(f) - m_i(f)$; et si $M_i(f) \leqslant 0$, sur $[x_i, x_{i+1}]$ la fonction f^+ est nulle, dans ce cas $M_i(f^+) = m_i(f^+) = 0$ d'où $M_i(f^+) - m_i(f^+) = 0 \leqslant M_i(f) - m_i(f)$.

On a le même majorant dans les deux cas d'où $S_{f^+}(d) - s_{f^+}(d) \leqslant S_f(d) - s_f(d)$: grâce au théorème de Darboux on conclut à l'intégrabilité de f^+, (Théorème 8.20).

On procède de même pour f^-, ou bien on remarque que $f^- = (-f)^+$ et on applique la première partie à $-f$, intégrable.

Il est facile de vérifier que, $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ et $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.

On a donc d'une part $|f|$ intégrable, puis

$$\left|\int f\right| = \left|\int (f^+ - f^-)\right| = \left|\int f^+ - \int f^-\right| \leqslant \left|\int f^+\right| + \left|\int f^-\right|.$$

Mais les deux nombres réels $\int f^+$ et $\int f^-$ sont positifs, (les fonctions sont à valeurs positives : voir le théorème 8.24, ils sont égaux à leurs valeurs absolues d'où :

$$\left|\int f\right| \leqslant \int f^+ + \int f^- = \int (f^+ + f^-) = \int |f|. \qquad \blacksquare$$

Cette inégalité, liée à l'aspect forme linéaire positive de l'intégrale, (qu'on ne saurait trop souligner) est le point de départ des calculs de majorations de l'intégrale. On a en particulier :

8.32. $\forall f$ intégrable sur $[a,b]$, $\left|\int f\right| \leqslant (b-a)||f||_\infty$ ce qui prouve que la forme linéaire $f \rightsquigarrow \int f$ est continue sur l'ensemble des fonctions intégrables, normé par la norme de la convergence uniforme, car $(b-a)$ Lipschitzienne. La norme d'application linéaire est alors $(b-a)$.

THÉORÈME 8.33. – *Soit f intégrable sur $[a,b]$ et g obtenue en modifiant f sur un ensemble fini $A = \{\alpha_j, j = 1, \dots q\}$ d'éléments de $[a,b]$. Alors g est intégrable sur $[a,b]$ et $\int g = \int f$.*

On va justifier l'égalité de $\int^* f$ et de $\int^* g$, qui existe car g est bornée, comme f. On aura donc aussi l'égalité des intégrales inférieures de f et g, (par passage aux intégrales supérieures de $-f$ et $-g$, théorème 8.13) d'où en cas d'intégrabilité de f, l'intégrabilité de g et l'égalité des intégrales.

D'après le théorème 8.14, on sait que :
$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $\forall$ subdivision d telle que $p(d) < \alpha$ on a

$$\int^* f \leqslant S_f(d) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \int^* f \quad \text{et}$$

$$\int^* g \leqslant S_g(d) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} + \int^* g.$$

Soit $d : a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$ une subdivision de pas inférieur à α.

Chaque α_j de A appartient au plus à deux segments du type $[x_i, x_{i+1}]$. Pour de tels segment on a :

$$|M_i(f) - M_i(g)| \leqslant ||f||_\infty + ||g||_\infty,$$

alors que pour les segments ne contenant aucun α_j, $M_i(f) = M_i(g)$. Il en résulte que $\left|S_f(d) - S_g(d)\right| \leqslant 2q\,(||f||_\infty + |||g||_\infty)\,p(d)$, avec $q = \operatorname{card}(A)$, et ce majorant sera inférieur à $\dfrac{\varepsilon}{3}$ dès que

$$p(d) \leqslant \alpha' = \frac{\varepsilon}{6q(||f||_\infty + ||g||_\infty)}.$$

Mais alors, pour toute subdivision d telle que $p(d) \leqslant inf\,(\alpha, \alpha')$ on aura

$$\left|\int^* f - \int^* g\right| \leqslant \left|\int^* f - S_f(d)\right| + \left|S_f(d) - S_g(d)\right| + \left|S_g(d) - \int^* g\right| \leqslant \varepsilon$$

et comme ε est quelconque, $\displaystyle\int^* f = \int^* g$ ■

Ces ensembles de cardinal fini sur lesquels on peut modifier f sont la première approche des ensembles de mesure nulle, que nous essayerons de mieux connaître au paragraphe suivant. Mais avant, d'autres résultats liés à la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, (et oui, encore...) nous attendent : les formules de la moyenne.

Mais avant, comme un cheveu sur la soupe, citons l'inégalité de Cauchy Schwarz, justifiée en algèbre dans le chapitre 11 sur les formes quadratiques.

THÉORÈME 8.34. — *(Inégalité de Cauchy Schwarz) Soient f et g intégrables sur $[a, b]$ on a* $\displaystyle\left(\int fg\right)^2 \leqslant \int f^2 \int g^2.$

Car, sur F espace vectoriel des applications intégrables sur $[a, b]$ on a une forme quadratique positive $\Phi : f \rightsquigarrow \displaystyle\int f^2$, de forme polaire

$\varphi : (f,g) \rightsquigarrow \int fg$, voir Algèbre, Théorème 11.57.

Venons en aux diverses formules de la moyenne.

Première formule de la moyenne

8.35. *Version 1*. *Soit f intégrable sur $[a,b]$, de bornes inférieure et supérieure m et M sur $[a,b]$, il existe $\mu \in [m,M]$ tel que $\displaystyle\int_{[a,b]} f = \mu(b-a)$.*

Puisque $m \leqslant f(x) \leqslant M$ et que l'intégrale est une forme linéaire positive on a $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int f \leqslant M(b-a)$, donc $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int f \in [m,M]$. En notant $\mu = \displaystyle\frac{1}{b-a}\int f$, on a le résultat. ■

8.36. *Une notation* : comme le segment d'intégration va intervenir de plus en plus, on notera désormais $\displaystyle\int_a^b f$ au lieu de $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ ou de $\displaystyle\int f$, d'autant plus qu'on n'utilisera plus les notations $\displaystyle\int_*$ ou $\displaystyle\int^*$.

8.37 *Version 2*. *Soit f continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, il existe c dans $[a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f = (b-a)f(c)$.*

D'abord, f continue sur $[a,b]$ est intégrable (Corollaire 8.22) puis la valeur μ comprise entre les bornes m et M, (version 1) est atteinte (théorème des valeurs intermédiaires, corollaire 7.7).

Il va résulter de cette version, un théorème important pour le calcul des intégrales, celui qui va assurer l'existence des primitives des fonctions continues.

THÉORÈME 8.38. — *Soit une fonction f continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. La fonction F définie sur $[a,b]$ par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$ est dérivable, de dérivée f.*

D'abord F est définie car f continue est intégrable sur $[a,b]$, donc aussi sur chaque $[a,x]$ avec $x \in [a,b]$, (Théorème 8.26). La relation de Chasles, avec $a \leqslant x < x' \leqslant b$ donne alors $\displaystyle\int_a^{x'} f = \int_a^x f + \int_x^{x'} f$ soit

$F(x') - F(x) = \int_x^{x'} f$, d'où, par application de la formule de la moyenne (8.37), l'existence de x'' dans $[x, x']$ tel que $F(x') - F(x) = (x' - x)f(x'')$.

Soit alors $x_0 \in [a, b[$, $h > 0$ tel que $x_0 + h \leqslant b$, on aura avec $x = x_0$, $x' = x_0 + h$, un x'' entre x_0 et $x_0 + h$ tel que $F(x_0 + h) - F(x_0) = hf(x'')$ d'où $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$, (continuité de f) donc $F'_d(x_0)$ existe et vaut $f(x_0)$ sur $[a, b[$.

Puis, si $x_0 \in]a, b]$, et si $h < 0$ est tel que $a \leqslant x_0 + h$, il existe x''' dans $]x_0 + h, x_0[$ tel que $F(x_0) - F(x_0 + h) = (-h)f(x''')$ (formule précédente avec $x = x_0 + h$ et $x' = x_0$) d'où $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$, donc $F'_g(x_0) = f(x_0)$ sur $]a, b]$ et le résultat en découle.

DÉFINITION 8.39. — *La fonction F, telle que $F'(x) = f(x)$ sur $[a, b]$, est une primitive de f sur $[a, b]$* (une car toute fonction obtenue en ajoutant une constante à F en est une autre) et nous venons de voir que :

THÉORÈME 8.40. — *Toute fonction continue sur $[a, b]$, à valeurs réelles, admet des primitives sur $[a, b]$. Si G est une primitive de f continue sur $[a, b]$, on a $\int_a^b f = G(b) - G(a)$.*

En effet, avec $F(x) = \int_a^x f$, on a $(F - G)' = 0$ sur $[a, b]$, donc la fonction $F - G$ est constante sur $[a, b]$, (voir théorème 7.30), mais alors $(F - G)(b) - (F - G)(a) = 0$, d'où $G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f$ car $F(a) = \int_a^a f = 0$. ■

L'utilisation des primitives des fonctions continues est un moyen très important de calcul des intégrales.

Une notation : on notera encore

8.41. $$\int_a^b f(x)dx \text{ ou } \int_a^b f(t)dt \text{ l'intégrale } \int_a^b f = \int_{[a,b]} f.$$

Voici une autre version de la première formule de la moyenne.

8.42. Version 3. *Soient f et g intégrables sur $[a, b]$, g étant de signe constant. Il existe μ entre les bornes de f tel que $\int_a^b fg = \mu \int_a^b g$, et si f est continue, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$.*

On a déjà fg intégrable sur $[a, b]$, (Théorème 8.30), puis si m et M sont les bornes (inférieure et supérieure) de f sur $[a, b]$, et si on suppose par exemple $g \leqslant 0$ sur $[a, b]$, on aura : $Mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant mg(x)$ sur $[a, b]$, donc $M \int_a^b g \leqslant \int_a^b fg \leqslant m \int_a^b g$, avec $\int_a^b g \leqslant 0$.

Si $\int_a^b g = 0$, il en résulte que $\int_a^b fg = 0$ et pour tout nombre μ de $[m, M]$ on aura lors $\int_a^b fg = 0 = \mu \cdot 0 = \mu \int_a^b g$; alors que si $\int_a^b g < 0$, on a $m \leqslant \dfrac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leqslant M$ d'où l'existence de $\mu \in [m, M]$ tel que $\dfrac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} = \mu$, soit $\int_a^b fg = \mu \int_a^b g$.

Dans le cas particulier de f continue, la valeur μ est atteinte. ■

Il existe une deuxième formule de la moyenne, plus subtile à obtenir, et qui va nécessiter l'introduction *des sommes de Riemann* et c'est heureux parce que, franchement, intituler un chapitre intégrale de Riemann, et ne parler que d'intégrale de Darboux, c'est de l'escroquerie ou de la publicité mensongère.

DÉFINITION 8.43. — *Soit f définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles, une subdivision d : $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ et $\Lambda = (\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ une famille de scalaires tels que $\lambda_i \in [x_i, x_{i+1}]$. On appelle somme de Riemann toute somme du type $\sigma_f(d, \Lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\lambda_i)$.*

THÉORÈME 8.44. — (de Riemann) *Soit f bornée sur $[a, b]$. On a f Darboux intégrable d'intégrale I si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $p(d) \leqslant \alpha \Rightarrow |I - \mathfrak{S}_f(d, \Lambda)| \leqslant \varepsilon$, et ce pour toute famille Λ associée à la subdivision d de pas inférieur à α.*

En langage simplifié, on pourrait dire que les sommes de Darboux ont une limite quand le pas de d tend vers 0 si et seulement si les sommes de Riemann en ont une, (et c'est la même). Je n'emploie pas cette terminologie commode parce que je n'ai pas défini de topologie sur les subdivisions.

Si f est Darboux intégrable, d'intégrale I, on sait que :
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall$ subdivision $d, p(d) \leqslant \alpha \Rightarrow S_f(d) - s_f(d) \leqslant \varepsilon$ (Théorème 8.20). De plus I est borne supérieure des $S_f(d)$ et borne inférieure des $S_f(d)$, donc on a $s_f(d) \leqslant I \leqslant S_f(d)$.

Mais, comme pour λ_i dans $[x_i, x_{i+1}]$, (segment d'une subdivision d), on a $m_i(f) \leqslant f(\lambda_i) \leqslant M_i(f)$, en multipliant par $(x_{i+1} - x_i) > 0$, et en sommant, il vient $s_f(d) \leqslant \mathfrak{S}_f(d, \Lambda) \leqslant S_f(d)$ d'où, pour toute subdivision d avec $p(d) \leqslant \alpha$ et pour toute famille Λ associée,
$|I - \mathfrak{S}_f(d, \Lambda)| \leqslant S_f(d) - s_f(d) \leqslant \varepsilon$.

Réciproquement, on suppose que, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que, pour toute subdivision d avec $p(d) \leqslant \alpha$, et toute famille Λ associée, on ait $|I - \mathfrak{S}_f(d, \Lambda)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$.

Soit d une subdivision de pas $\leqslant \alpha$, $d : x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$.

Sur $[x_i, x_{i+1}]$ on choisit λ_i tel que $M_i(f) - \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)} \leqslant f(\lambda_i) \leqslant M_i(f)$, alors (on multiplie par $x_{i+1} - x_i$ et on somme), avec $\Lambda = (\lambda_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$,

$$S_f(d) - \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \mathfrak{S}_f(d, \Lambda) \leqslant S_f(d)$$

d'où $|I - S_f(d)| \leqslant |I - \mathfrak{S}_f(d, \Lambda)| + |\mathfrak{S}_f(d, \Lambda) - S_f(d)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$; puis on choisit λ'_i tel que $m_i(f) \leqslant f(\lambda'_i) \leqslant m_i(f) + \dfrac{\varepsilon}{4(b-a)}$, ce qui, avec $\Lambda' = (\lambda'_i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$, conduit à : $s_f(d) \leqslant \mathfrak{S}_f(d, \Lambda') \leqslant s_f(d) + \dfrac{\varepsilon}{4}$

d'où : $$|I - s_f(d)| \leqslant |I - \mathfrak{S}_f(d, \Lambda')| + |\mathfrak{S}_f(d, \Lambda') - s_f(d)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2};$$

mais alors $S_f(d) - s_f(d) = |S_f(d) - s_f(d)| \leqslant |S_f(d) - I| + |I - s_f(d)| \leqslant \varepsilon$ et ce pour toute subdivision de pas inférieur à α. On a donc f Darboux intégrable, puis si J est l'intégrale de f, en appliquant la première partie on rendra $|J - \mathfrak{S}_f(d, \Lambda)| \leqslant \varepsilon$ dès que $p(d)$ sera assez petit, d'où $|I - J| \leqslant 2\varepsilon$, et ce pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $I = J$. ■

***8.45** On parlera désormais de Riemann intégrable ou de Darboux intégrable.*

COROLLAIRE 8.46. — *Soit f Darboux, (ou Riemann) intégrable sur $[a,b]$, on a* $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(a+i\frac{b-a}{n}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f.$

Cette formule est encore dite de la *valeur moyenne*.

Cela vient de ce, qu'avec la subdivision des $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0,1,\dots,n$, et $\lambda_i = i\frac{b-a}{n}$ pour $i = 0,\dots,n-1$, les sommes de Riemann $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a+i\frac{b-a}{n}) = \mathfrak{S}_f(d,\Lambda)$ ont pour limite $\int_a^b f$ si n tend vers l'infini, car le pas de d, égal à $\frac{b-a}{n}$, tend alors vers 0. ■

Venons en à la deuxième formule de la moyenne.

THÉORÈME 8.47. — *Soit f positive décroissante de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, g Riemann intégrable sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que* $\int_a^b fg = f(a)\int_a^c g.$

D'abord f, monotone, est Darboux intégrable, dans fg est Darboux intégrable sur $[a,b]$, (Corollaire 8.23 et Théorème 8.30).

Soit G la fonction définie sur $[a,b]$ par $G(x) = \int_a^x g$. On a, pour $x < x'$, $G(x') - G(x) = \int_{[x,x']} g$, (relation de Chasles, théorème 8.26), d'où $|G(x') - G(x)| \leqslant \int_{[x,x']} ||g||_\infty = |x - x'|\,||g||_\infty$ ce qui prouve la continuité de G. Mais sur $[a,b]$ compact, G est alors bornée, soit m et M ses bornes inférieures et supérieures, on va prouver que $\int_a^b fg \in [mf(a), Mf(a)]$, ($f$ positive), donc l'intégrale sera du type $f(a)\mu$ avec $\mu \in [m,M]$, soit encore μ valeur atteinte par G en un point c, d'où
$\int_a^b fg = f(a)G(c) = f(a)\int_a^c g.$

Soit $d : x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$, m_i et M_i les bornes de g sur $[x_i, x_{i+1}]$. Si on choisit des λ_i dans les $[x, x_{i+1}]$ et des k_i dans $[m,M_i]$, on a

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\left(f(\lambda_i)g(\lambda_i)-f(\lambda_i)k_i\right)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)|f(\lambda_i)|\,|g(\lambda_i)-k_i|,$$

or f est positive décroissante donc : $0 \leqslant f(\lambda_i) \leqslant f(a)$, et $|g(\lambda_i)-k_i| \leqslant M_i - m_i$, d'où

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\left(f(\lambda_i)g(\lambda_i)-f(\lambda_i)k_i\right)\right| \leqslant f(a)\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)(M_i-m_i) \leqslant f(a)(S_g(d)-s_g(d)),$$

le majorant tend vers 0 si $p(d)$ tend vers 0, donc le premier membre tend aussi vers 0.

Or c'est $\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(\lambda_i)g(\lambda_i) - \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)f(\lambda_i)k_i$ et, (astuce !), on choisit k_i dans $[m_i, M_i]$, tel que

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} g = (x_{i+1}-x_i)k_i,$$

(première formule de la moyenne 8.35), soit encore $(x_{i+1}-x_i)k_i = G(x_{i+1}) - G(x_i)$.

On a donc $\lim\limits_{p(d)\to 0}\left(\mathfrak{S}_{fg}(d,\Lambda) - \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\lambda_i)(G(x_{i+1})-G(x_i))\right) = 0,$

et comme $\lim\limits_{p(d)\to 0}\mathfrak{S}_{fg}(d,\Lambda) = \int_a^b fg$, on a finalement

$$\lim_{p(d)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\lambda_i)(G(x_{i+1})-G(x_i)) = \int_a^b fg.$$

Si on réordonne la somme par rapport aux $G(x_i)$, on a

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\lambda_i)(G(x_{i+1}) - G(x_i)) = -f(\lambda_0)G(a) + \left[\sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)(f(\lambda_{i-1}) - f(\lambda_i))\right] + G(x_n)f(\lambda_{n-1}).$$

Or, f étant positive décroissante, on a $f(\lambda_{n-1}) \geqslant 0$, $f(\lambda_{i-1}) - f(\lambda_i) \geqslant 0$, puis $G(a) = \int_a^a g = 0$ et $m \leqslant G(x_i) \leqslant M$, donc la somme $\sum_{i=0}^{n-1} f(\lambda_i)(G(x_{i+1}) - G(x_i))$ est comprise entre

$$m\left(\sum_{i=1}^{n-1}(f(\lambda_{i-1}) - f(\lambda_i)) + f(\lambda_{n-1})\right)$$

et $M\left(\sum_{i=1}^{n-1}(f(\lambda_{i+1}) - f(\lambda_i)) + f(\lambda_{n-1})\right)$ soit entre $mf(\lambda_0)$ et $Mf(\lambda_0)$, et en imposant $\lambda_0 = a$, c'est donc entre $m\,f(a)$ et $M\,f(a)$.

La limite de cette somme est donc comprise entre ces nombres, et finalement $\int_a^b fg \in [m\,f(a), Mf(a)]$ ce qui permet de conclure. ■

Cette deuxième formule de la moyenne est bien utile dans l'étude des intégrales impropres comme nous le verrons au chapitre suivant, (critère d'Abel, voir 9.17).

Je ne saurai clore ce paragraphe où la relation d'ordre prend toute son importance, sans établir le petit résultat suivant :

THÉORÈME 8.48. — *Soit f continue positive non nulle sur $[a, b]$, on a* $\int_a^b f > 0$.

Car f étant non nulle, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > 0$, d'où « localement » f reste à valeurs $\geqslant \dfrac{f(c)}{2}$, (on traduit la continuité en c

avec $\varepsilon = \dfrac{f(c)}{2}$), donc il existe u, v avec $u < v$ et $c \in [u, v] \subset [a, b]$, tels que : $\forall x \in [u, v]$, $f(x) \geqslant \dfrac{f(c)}{2}$.

Si d est la subdivision $a = x_0 \leqslant u < v \leqslant b$, la petite somme de Darboux $s_f(d)$ est supérieure à $(v-u)\dfrac{f(c)}{2}$, (f à valeurs positives), donc $I \geqslant s_f(d) \geqslant (v-u)\dfrac{f(c)}{2} > 0$.

Il existe un résultat plus précis : si f, intégrable sur $[a, b]$ est à valeurs toujours > 0, alors $\displaystyle\int_a^b f > 0$. (Voir exercice n° 1).

5. Critères complémentaires d'intégrabilité

On a vu, (Théorème 8.33) qu'on peut modifier une fonction intégrable sur une partie finie de $[a, b]$ sans modifier le caractère intégrable et la valeur de l'intégrale. Dans ce paragraphe on va essayer de mieux connaître les parties sur lesquelles on peut ainsi modifier une fonction, et pour cela, il y a du vocabulaire à introduire.

DÉFINITION 8.49. — *Soit $A \subset \mathbb{R}$ et f une application bornée de A dans $\mathbb{R}$. Soit $A' \subset A$, on appelle oscillation de f sur A' le diamètre de $f(A')$, noté* $\omega(f, A')$.

En prenant la formulation des espaces métriques, on a donc
$\omega(f, A') = \sup\{|f(x) - f(y)|;\ (x, y) \in A'^2\}$,
mais compte tenu de la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, il est facile de vérifier que

8.50. $$\omega(f, A') = \sup\{f(x);\ x \in A'\} - \inf f(y);\ y \in A'\},$$

ces nombres existant puisque f est bornée.

En effet $\forall (x, y) \in A'^2$ on a, avec m et M bornes (inférieure et supérieure) de f sur A' : $m \leqslant f(x) \leqslant M$ et $m \leqslant f(y) \leqslant M$ d'où $m - M \leqslant f(x) - f(y) \leqslant M - m$, d'où $|f(x) - f(y)| \leqslant M - m$ et $\omega(f, A') \leqslant M - m$; puis si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe x_0 et y_0 tels que $M - \varepsilon \leqslant f(x_0) \leqslant M$ et $m \leqslant f(y_0) \leqslant m + \varepsilon$, d'où $M - m - 2\varepsilon \leqslant f(x_0) - f(y_0) \leqslant M - m$; mais alors, si $M - m > 0$, on choisit ε assez petit pour que $M - m - 2\varepsilon > 0$ et on a $M - m - 2\varepsilon \leqslant |f(x_0) - f(y_0)|$ d'où $\omega(f, A') \geqslant M - m - 2\varepsilon$, ceci étant vrai pour tout ε assez petit donnera $\omega(f, A') \geqslant M - m$ d'où l'étalité $\omega(f, A') = M - m$, qui devient évidente si $M = m$ car alors f est constante. ■

DÉFINITION 8.51. — *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et f une application bornée de A dans $\mathbb{R}$. On appelle oscillation de f en x le scalaire*
$\omega_x(f) = \inf \{\omega(f, I \cap A);\ \forall I$ *intervalle ouvert contenant* $x\}$.

Cette borne inférieure existe puisque les $\omega(f, I \cap A)$ sont positifs. Parmi les I figurent tous les intervalles $J_\alpha =]x - \alpha, x + \alpha[$, $\alpha > 0$, donc en notant $\omega'_x(f) = \inf \{\omega(f, J_\alpha \cap A);\ \alpha > 0\}$, on a de manière évidente $\omega_x(f) \leqslant \omega'_x(f)$; puis pour tout I intervalle ouvert contenant x, $\exists \alpha > 0,\ x \in J_\alpha \subset I$, d'où

$$\omega(f, J_\alpha \cap A) \leqslant \omega(f, I \cap A);\ \textit{a fortiori}\ \omega'_x(f) \leqslant \omega(f, I \cap A)$$

et cette inégalité valable pour tout I conduit à $\omega'_x(f) \leqslant \omega_x(f)$, donc :

THÉORÈME 8.52. — *L'oscillation de f en x est encore égale à :*
$\omega_x(f) = \inf \{\omega(f,]x - \alpha, x + \alpha[\cap A);\ \alpha > 0\}$.

THÉORÈME 8.53. — *On a f continue en x_0 si et seulement si* $\omega_{x_0}(f) = 0$.

On part de f application de A dans $\mathbb{R}$ et de x_0 dans A.

Si f est continue en x_0, soit $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que $x \in A$ et $|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Donc $\forall (x, y) \in (A \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[)^2$, $|f(x) - f(y))| \leqslant \varepsilon$ donc $\omega(f, A \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[) \leqslant \varepsilon$ d'où $\omega_{x_0}(f) \leqslant \varepsilon$ et ce pour tout $\varepsilon > 0$: on a $\omega_{x_0}(f) = 0$.

Si $\omega_{x_0}(f) = 0$, soit $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$ tel que $\omega(f, A \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[) < \varepsilon$ donc *a fortiori*, $\forall x \in A \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$: on a f continue en x_0 ■

REMARQUE 8.54. — D'une certaine façon, l'oscillation de f en x_0 généralise la notion de discontinuité de première étape. En effet, si f admet en x_0 une discontinuité de première espèce, comme pour $h \in]0, \alpha \subset$ et $h' \in]0, \alpha[$ tels que $x_0 + h \in A$ et $x_0 - h' \in A$ on a
$|f(x_0 + h) - f(x_0 - h')| \leqslant \omega(f,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap A)$,
en passant à la limite pour h et h' tendant vers 0 on aura
$|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)| \leqslant \omega(f,]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\cap A)$, donc *a fortiori*

8.55. $$|f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)| \leqslant \omega_{x_0}(f).$$

Mais l'inégalité peut être stricte, (imaginez que $f(x_0)$ prenne une valeur colossale, cela interviendra dans $\omega_{x_0}(f)$, pas dans les limites à droite et à gauche.

Enfin l'oscillation de f borné existe toujours, même si f n'a pas en x_0 de discontinuité de première espèce.

THÉORÈME 8.56. — *Soit f bornée de A dans $\mathbb{R}$ et α un réel strictement positif. L'ensemble $G_\alpha = \{x \in A;\ \omega_x(f) \geqslant \alpha\}$ est un fermé de A.*

Car si $x_0 \notin G_\alpha$, on a $\omega_x(f) < \alpha$, donc si $\varepsilon = \dfrac{\alpha - \omega_{x_0}(f)}{2}$ il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que

$$\omega_{x_0}(f) \leqslant \omega(f, I \cap A) \leqslant \omega_{x_0}(f) + \varepsilon = \frac{\alpha + \omega_{x_0}(f)}{2} < \alpha.$$

Mais alors, pour tout x de $I \cap A$, I est un intervalle ouvert contenant x, donc $\omega_x(f) \leqslant \omega(f, I \cap A) < \alpha$: on a $I \cap A \subset (A - G_\alpha)$ qui est donc ouvert comme voisinage de chacun de ses points. ■

Quel est le lien avec l'intégrale de Darboux ? Nous y venons, patience.

THÉORÈME, 8.57. — *Soit f bornée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. La fonction qui à x associe l'oscillation de f en x est bornée, et si ω est sa borne supérieure, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists d : y_0 = a < y_1 < \ldots < y_n = b$, subdivision de $[a, b]$ telle que $\forall i = 0, 1, \ldots, n-1$, on ait $\omega(f, [y_i, y_{i+1}]) < \omega + \varepsilon$.*

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant x, pour f bornée sur A on a $\omega_x(f) \leqslant \omega(f, \mathbb{R} \cap A) = \omega(f, A)$, donc la fonction $x \rightsquigarrow \omega_x(f)$ est bornée.

Notation. Comme on ne garde qu'une fonction f, on simplifie les notations en posant ω_x pour $\omega_x(f)$, et $\omega(A')$ pour $\omega(f, A')$, avec A' partie de A.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé, pour $x \in [a, b]$, $\omega_x \leqslant \omega < \omega + \varepsilon$, donc vu la définition de ω_x, $\exists \alpha_x > 0$, $\omega(]x - \alpha_x, x + \alpha_x[\cap [a, b]) < \omega + \varepsilon$, donc *a fortiori* avec $0 < h_x < \alpha_x$, on aura $\omega([x - h_x, x + h_x] \cap [a, b]) < \omega + \varepsilon$, (si la partie « diminue » le diamètre diminue, et les ω (arthur) sont des diamètres, ne l'oublions pas).

Le côté compact de $[a, b]$ va servir.

On a $[a, b] \subset \displaystyle\bigcup_{x \in [a,b]}]x - h_x, x + h_x[$, donc on extrait un recouvrement fini de $[a, b]$ associé aux points $x_1, \ldots, x_p$. On considère l'ensemble formé des éléments a, b, des $x_i + h_{x_i}$ et des $x_i - h_{x_i}$ qui sont dans $[a, b]$. On réordonne ces éléments en une subdivision $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = b$ de $[a, b]$.

Soit $[y_j, y_{j+1}]$, (pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$) un segment de la subdivision. Il existe un indice $i \leqslant p$ tel que le milieu $\dfrac{y_j + y_{j+1}}{2} = t_j$ soit dans $]x_i - h_{x_i}, x_i + h_{x_i}[$ puisque $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{p}]x_i - h_{x_i}, x_i + h_{x_i}[$.

Mais alors, si $x_i - h_{x_i} \in [a, b]$, c'est un $y_{j'}$ de la subdivision, avec $y_{j'} < t_j$. Comme les éléments sont ordonnés dans la subdivision, c'est que $y_{j'} \leqslant y_j$, (il n'y a pas de y_k dans $]y_j, y_{j+1}[$) d'où $x_i - h_{x_i} \leqslant y_j$ dans ce cas; et si $x_i - h_{x_i} < a$, *a fortiori* $x_i - h_{x_i} \leqslant y_j$; on justifierait de même que $x_i + h_{x_i} \geqslant y_{j+1}$, donc $[y_j, y_{j+1}] \subset [x_i - h_{x_i}, x_i + h_{x_i}]$ et en passant aux oscillations de f, il vient bien
$\omega([y_j, y_{j+1}]) \leqslant \omega([x_i - h_{x_i}, x_i + h_{x_i}] \cap [a, b]) < \omega + \varepsilon$.

THÉORÈME 8.58. — *Soit f bornée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. Elle est Darboux integrable sur $[a, b]$ si et seulement si, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \alpha > 0$, il existe une famille finie d'intervalles ouverts $]c_i, d_i[$, $i = 1, \ldots, q$, tels que $\sum_{i=1}^{q}(d_i - c_i) \leqslant \varepsilon$ et*

$$G_\alpha = \{x \in [a, b];\ \omega_x(f) \geqslant \alpha\} \subset \bigcup_{i=1}^{q}]c_i, d_i[.$$

Intuitivement, on englobe les oscillations trop grandes dans une réunion finie d'intervalles de somme de longueur arbitrairement petite.

Soit f Darboux intégrable sur $[a, b]$, $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ donnés. Il existe une subdivision $d : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ telle que $0 \leqslant S_f(d) - s_f(d) = \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)\,(M_i(f) - m_i(f)) \leqslant \dfrac{\varepsilon\alpha}{2}$, (Théorème 8.20), le $\dfrac{\varepsilon\alpha}{2}$ étant là pour que tout s'arrange à la fin.

Mais $M_i(f) - m_i(f)$ est l'oscillation de f sur $[x_i, x_{i+1}]$, (voir 8.50), notée $\omega([x_i, x_{i+1}])$.

On note $I_\alpha = \{i;\ 0 \leqslant i \leqslant n-1;\ \omega([x_i, x_{i+1}]) \geqslant \alpha\}$.

Si $i \notin I_\alpha$, l'oscillation de f sur $[x_i, x_{i+1}]$ est $\omega([x_i, x_{i+1}]) < \alpha$.
Mais alors, si $x \in]x_i, x_{i+1}[$, x est intérieur à $[x_i, x_{i+1}]$
donc $\omega_x(f) \leqslant \omega(f,]x_i, x_{i+1}[\cap [a, b]) \leqslant \omega([x_i, x_{i+1}]) < \alpha$,
donc $]x_i, x_{i+1}[\cap G_\alpha = \varnothing$, avec $G_\alpha = \{x \in [a, b]\,;\ \omega_x(f) \geqslant \alpha\}$,

d'où $G_\alpha \subset \left(\bigcup_{i \in I_\alpha}]x_i, x_{i+1}[\right) \cup \{x_i, 0 \leqslant i \leqslant n\}$.

On a alors, si $i \in I_\alpha, \alpha \leqslant \omega([x_i, x_{i+1}]) = M_i(f) - m_i(f)$ donc $\sum_{i \in I_\alpha} \alpha(x_{i+1} - x_i) \leqslant \sum_{i \in I_\alpha} (x_{i+1} - x_i)(M_i(f) - m_i(f)) \leqslant S_f(d) - s_f(d)$

$\leqslant \dfrac{\varepsilon\alpha}{2}$ d'où $\sum_{i \in I_\alpha} (x_{i+1} - x_i) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, (tiens, α a disparu).

Pour tout i de $\{0, \dots, n\}$ on pose $u_i = x_i - \dfrac{\varepsilon}{4(n+1)}$ et

$v_i = x_i + \dfrac{\varepsilon}{4(n+1)}$, on aura $\sum_{i=0}^{n} (v_i - u_i) = (n+1) \cdot \dfrac{2\varepsilon}{4(n+1)} = \dfrac{\varepsilon}{2}$,

et finalement $G_\alpha \subset \left(\bigcup_{i \in I_\alpha}]x_i, x_{i+1}[\right) \cup \left(\bigcup_{i=0}^{n}]u_i, v_i[\right)$, la somme des longueurs de ces intervalles étant majorée par ε. On a le critère.

Réciproquement Soit f bornée sur $[a, b]$ vérifiant le critère. Soit $\alpha > 0$ et $\varepsilon' > 0$, il existe une famille finie de q intervalles $]c_i, d_i[$ tels que $G_\alpha \subset \bigcup_{i=1}^{q}]c_i, d_i[$ et $\sum_{i=1}^{q} (d_i - c_i) \leqslant \varepsilon'$.

On peut supposer les $[c_i, d_i]$ disjoints, car si par exemple $[c_i, d_i] \cap [c_{i'}, d_{i'}] \neq \varnothing$, $[c_i, d_i] \cup [c_{i'}, d_{i'}]$ est un intervalle (union de connexes d'intersection non vide), c'est $[u, v]$ avec $u = \inf(c_i, c_{i'})$ et $v = \sup(d_i, d_{i'})$, et si on remplace $]c_i, d_i[$ et $]c_{i'}, d_{i'}, [$ par $]u, v[$ les conditions restent vérifiées car $]c_i, d_i[\cup]c_{i'}, d_{i'}[\subset]u, v[$ et $(v - u) \leqslant (d_i - c_i) + (d_{i'} - c_{i'})$. (Attention la condition d'intersection porte sur les segments).

On suppose alors l'indexation telle que $c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < \dots < c_q < d_q$.

Si $a < c_1$, on pose $I_0 = [a, c_1]$;
puis $I_1 = [d_1, c_2], \dots, I_{q-1} = [d_{q-1}, c_q]$, et si $d_q < b$, $I_q = [d_q, b]$.
(Si $c_1 \leqslant a$, I_0 n'existe pas, si $d_q \geqslant b$, I_q n'existe pas).

Comme $G_\alpha \subset \bigcup_{i=1}^{q}]c_i, d_i[$ on a $G_\alpha \cap I_k = \varnothing$, donc pour tout x de $I_k, \omega_x < \alpha$, la borne supérieure des ω_x sur I_k est donc inférieure ou égale à α, et le théorème 8.57 appliqué au segment I_k, et à « ε » $= \alpha$, (attention, le « ε » du théorème 8.57), il existe donc une subdivision $\delta_k : y_0^{(k)} < y_1^{(k)} < \dots < y_{n(k)}^{(k)}$ de I_k telle que $\omega([y_j^{(k)}, y_{j+1}^{(k)}]) \leqslant \alpha + \alpha$, pour $j = 0, 1, \dots, n(k) - 1$.

Vous suivez toujours? Alors on continue. (De toute façon aujourd'hui il pleut, et malgré la somptuosité des ors et des rouges des feuillages d'automne que je vois par la fenêtre, je n'ai pas envie de sortir.)

Soit d la subdivision de $[a,b]$ formée de a, b et des points $y_j^{(k)}$, pour $k = 0$, (ou pas 0), $1, 2, \dots, q-1, q$, (ou pas q); et avec k fixé, pour $j = 0, 1, \dots, n(k)$, ceci pour chaque k.

On met tout dans un sac, et on réordonne en $d : z_0 = a < z_1 < \dots < z_p = b$.

Soit $[z_s, z_{s+1}]$ un tel segment, si on se rappelle que les δ_k étaient des subdivisions de $[a, c_1]$ ou de $[d_i, c_{i+1}], \dots$, chaque $[z_s, z_{s+1}]$ est soit un $[y_j^{(k)}, y_{j+1}^{(k)}]$, soit un $[c_i, d_i]$.

On peut donc, (accrochez-vous bien), regrouper les termes de $S_f(d) - s_f(d)$ en les $(d_i - c_i)\omega([c_i, d_i])$ et les

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n(k)-1} \left(y_{j+1}^{(k)} - y_j^{(k)}\right) \omega\left(\left[y_j^{(k)}, y_{j+1}^{(k)}\right]\right) &\leqslant 2\alpha \sum_{j=0}^{n(k)-1} \left(y_j^{(k+1)} - y_j^{(k)}\right)\\ &\leqslant 2\alpha \text{ longueur } (I_k).\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}S_f(d) - s_f(d) \leqslant \sum_{k=0(\text{ou } 1)}^{k=q-1(\text{ou } q)} (2\alpha) \text{ longueur } (I_k)\\ + \sum_{i=1}^{q} (d_i - c_i)\omega([c_i, d_i]).\end{aligned}$$

Les I_k étant disjoints, et l'oscillation de f sur $[c_i, d_i]$ majorée par celle de f sur $[a,b]$, notée $\omega([a,b])$, on a finalement

$$\begin{aligned}S_f(d) - s_f(d) &\leqslant (2\alpha)(b-a) + \omega([a,b]) \sum_{i=1}^{q} (d_i - c_i)\\ &\leqslant (2\alpha)(b-a) + \omega([a,b])\varepsilon'.\end{aligned}$$

(Si vous ne savez plus qui est ε', allez voir le début de la réciproque.).

Mais alors, $\eta > 0$ étant donné, si au départ on prend $\alpha \leqslant \dfrac{\eta}{4(b-a)}$ et $\varepsilon' \leqslant \dfrac{\eta}{2\,\omega([a,b])}$, on conclut à l'existence de d subdivision de $[a,b]$ telle que $S_f(d) - s_f(d) \leqslant \eta$, donc à l'intégrabilité de f. ■

J'ai bien cru ne pas le terminer celui-là, d'autant que l'un de mes fils écoute une musique de sauvage en ce moment, ce qui ne facilite pas la concentration.

DÉFINITION 8.59. — *Une partie A de $\mathbb{R}$ est appelée groupe intégrable si, $\forall \varepsilon > 0$ il existe une famille finie d'intervalles ouverts $]c_j, d_j[$, $(1 \leqslant j \leqslant q)$ telle que $A \subset \bigcup_{j=1}^{q}]c_j, d_j[$ et $\sum_{j=1}^{q}(d_j - c_j) \leqslant \varepsilon$.*

Le théorème 8.58 se formule donc en disant que f est Darboux intégrable si et seulement si, $\forall \alpha > 0, G_\alpha = \{x, \omega_x(f) \geqslant \alpha\}$ est un groupe intégrable.

Soit alors une famille dénombrable $(]c_n, d_n[)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts. Si la série de terme général positif $d_n - c_n$ est convergente, sa somme $\sum_{n=0}^{\infty}(d_n - c_n)$ sera appelée la longueur de cette famille.

DÉFINITION 8.60. — *Une partie A de $\mathbb{R}$ est dite de mesure nulle, (au sens de Darboux) si, $\forall \varepsilon > 0$, il existe une famille dénombrable d'intervalles ouverts, de longueur $\leqslant \varepsilon$, telle que A soit contenu dans la réunion de ces intervalles.*

Un groupe intégrable est donc de mesure nulle, mais la réciproque est fausse car dans groupe intégrable on impose le caractère fini à la famille des intervalles.

Avant de voir d'un peu plus près des ensembles de mesure nulle, justifions le

THÉORÈME 8.61. — *(Critère d'intégrabilité) Une fonction f bornée de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est Darboux intégrable si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle, (ou sens de Darboux).*

Soit f Darboux intégrable sur $[a, b]$ et $\mathcal{D} = \{\text{points de discontinuité}\}$, c'est encore l'ensemble des x tels que $\omega_x(f) > 0$, (Théorème 8.53), donc $\mathcal{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} G_{(1/n)}$, avec $G_{1/n} = \{x;\ \omega_x(f) \geqslant \frac{1}{n}\}$.

Comme f est intégrable, chaque $G_{1/n}$ est un groupe intégrable, donc $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe une famille $\mathcal{F}_n$, finie, d'intervalles ouverts, dont la réunion contient $G_{1/n}$, et de longueur $\leqslant \dfrac{\varepsilon}{2^n}$.

Mais alors $\mathcal{D}$ est contenu dans la réunion des intervalles ouverts de la famille dénombrable $\mathcal{F} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{F}_n$, de longueur $\leqslant \varepsilon$ car pour toute somme d'un nombre fini de longueurs d'intervalles de $\mathcal{F}$, on majore par une somme d'un nombre fini des $\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$, or $\sum_{n=1}^{q} \frac{\varepsilon}{2^k}$ est majorée par $\varepsilon\left(\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{q+1}}}{1-\frac{1}{2}}\right) < \varepsilon$: $\mathcal{D}$ est bien de mesure nulle, (voir la définition 8.60).

Réciproquement, si $\mathcal{D}$ est de mesure nulle, soit $\varepsilon > 0$, il existe une famille dénombrable $(]c_n, d_n[)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts, tels que $\sum_{n=0}^{\infty}(d_n - c_n) \leqslant \varepsilon$ et $\mathcal{D} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]c_n, d_n[$. Comme $\forall \alpha > 0$ on a $G_\alpha \subset \mathcal{D}$, et que G_α est un fermé de $[a, b]$ compact, (voir le théorème 8.56), G_α est compact, et du recouvrement de G_α par les ouverts $]c_n, d_n[$, on extrait une famille finie d'intervalles ouverts $]c_n, d_n[$, dont la réunion contient G_α, et dont la somme des longueurs est inférieure à ε : le théorème 8.58 s'applique et donne f Darboux intégrable. ■

Dernier point : que sont ces ensembles de mesure nulle au sens de Darboux? Nous allons vérifier que les *ensembles dénombrables sont de mesure nulle*, et voir qu'il y a *des ensembles de mesure nulle non dénombrables*.

Il en résultera que les fonctions réglées, (étudiées au chapitre 12) seront Darboux intégrables, car leur ensemble de points de discontinuité est dénombrable, donc de mesure nulle, mais qu'il y a des fonctions Darboux intégrables, non réglées, et nous en donnerons un exemple au chapitre 12, voir 12.48.

THÉORÈME 8.62. — *Les ensembles dénombrables sont de mesure nulle, (au sens de Darboux).*

Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partie dénombrable stricte de $\mathbb{R}$. On a $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[$, (avec $\varepsilon > 0$), et la famille dénombrable des intervalles $]a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}[$ est de longueur $\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \varepsilon$. ■

Les ensembles finis sont *a fortiori* de mesure nulle.

THÉORÈME 8.63. — *Il existe des ensembles de mesure nulle, (au sens de Darboux), non dénombrables.*

L'ensemble de Cantor va être un tel ensemble.

Soit $A = [0,1]$, on coupe en 3 et on garde les tiers du milieu :

$$A_1 = \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[.$$

On recoupe chaque tiers en 3 et on garde le tiers médian : d'où

$$A_2 = \left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[\cup \left]\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right[\cup \left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[.$$

Plus généralement on pose

$$A_n = \bigcup_{i=0}^{3^{n-1}-1} \left]\frac{3i+1}{3^n}, \frac{3i+2}{3^n}\right[, \text{ et on considère } B = [0,1] - \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n\right).$$

On a un fermé de $[0,1]$, les A_n étant ouverts et leur réunion aussi.

C'est un ensemble de mesure nulle, (et même c'est un groupe intégrable).∎

En effet, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\bigcup_{n=1}^{p} A_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$, d'où, pour les complémentaires, $B \subset [0,1] - \bigcup_{n=1}^{p} A_n = C_p$, et on va justifier par récurrence sur p, que C_p est réunion de 2^p segments disjoints de longueur $\frac{1}{3^p}$.

Pour $p = 1, C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ est réunion de 2 segments de longueur $\frac{1}{3}$ chacun; puis $C_2 = (B - A_1) - A_2 = C_1 - A_2$: dans chacun des 2 segments précédents on ne garde que les 2 tiers extrêmes, d'où C_2 réunion de $2 \times 2 = 4$ segments de longueur $\frac{1}{3^2}$.

Enfin on passe de C_{p-1} à $C_p = C_{p-1} - A_p$ en divisant chacun des 2^{p-1} segments disjoints qui forment C_{p-1} en 3 et en ne gardant que les 2 tiers extrêmes de chacun de ces segments, d'où C_p est réunion de $2 \times 2^{p-1} = 2^p$ segments disjoints de longueur $\frac{1}{3^p}$ chacun.

Soit alors $\varepsilon > 0$, $\exists n_0, \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n_0} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. On considère les 2^{n_0} segments qui constituent C_{n_0}, et si $[a_i, b_i]$ est un tel segment on pose $c_i = a_i - \dfrac{1}{2 \cdot 3^{n_0}}, d_i = b_i + \dfrac{1}{2 \cdot 3^{n_0}}$, on a $[a_i, b_i] \subset]c_i, d_i[$ et B est contenu dans les 2^{n_0} intervalles ouverts $]c_i, d_i[$ ainsi construits, dont la somme des longueurs est majorée par

$$2^{n_0} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^{n_0}} + 2^{n_0} \cdot \frac{1}{3^{n_0}} = 2 \cdot \frac{2^{n_0}}{3^{n_0}} < \varepsilon,$$

on a bien B groupe intégrable, (définition 8.59), donc de mesure nulle.

Enfin B est équipotent à $\mathbb{R}$

En reprenant le fait que $B \subset C_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, avec les notations précédentes, on va associer à chaque x de B, un réel de $[0, 1]$.

Si $x \in B$, $x \in C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ donc x est soit dans le premier, soit dans le dernier tiers de $[0, 1]$. Dans le 1$^{\text{er}}$ cas on pose $a_1 = 0$, dans le 2$^{\text{e}}$ cas, $a_1 = 1$.

A la 2$^{\text{e}}$ étape, x est dans le 1$^{\text{er}}$ ou le 3$^{\text{e}}$ tiers obtenu en fractionnant en 3 le tiers de la 1$^{\text{re}}$ étape qui le contenait. Si c'est le 1$^{\text{e}}$, on pose $a_2 = 0$, si c'est le dernier on pose $a_2 = 1$.

A la $n^{ième}$ étape, x est dans un intervalle de longueur $\dfrac{1}{3^{n-1}}$. On fractionne ce segment en 3 et x est soit dans le 1$^{\text{er}}$ tiers, on posera alors $a_n = 0$, soit dans le 3$^{\text{e}}$, et on posera $a_n = 1$.

On définit ainsi des $a_n \in \{0, 1\}$, de manière unique, pour x donné, et on pose $\theta(x) = 0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \ldots$, écriture en base 2 d'un réel, en fait $\theta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$.

L'application θ est injective, car si $\theta(x) = \theta(x')$, à chaque étape x est dans le même segment de longueur $\dfrac{1}{3^n}$, segments emboîtés de longueur qui tend vers 0, mais alors cette intersection est réduite à un singleton d'où $x = x'$, (Théorème 5.51).

Enfin θ est une surjection de B sur $[0, 1]$. D'abord $\theta(x) \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$,

puis, soit $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i}{2^i}$, $(u_i \in \{0, 1\})$ un réel de $[0, 1]$, (avec la convention, si les u_i sont tous égaux à 1 pour $i \geqslant i_0$, et si $u_{i_0-1} = 0$, on pose $u_{i_0} = 1$ et $u_i = 0$, $\forall i > i_0$; donc 1 est le seul réel avec les u_i tous égaux à 1).

On note $[\alpha_1, \beta_1] =$ le 1^{er}, (resp. le 3^{e}) tiers de $[0,1]$ si $u_1 = 0$, (resp 1) ;

puis $[\alpha_2, \beta_2] =$ le 1^{er}, (resp le 3^{e}) tiers de $[\alpha_1, \beta_1]$ si $u_2 = 0$, (resp 1) ; et on continue ainsi avec

$[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] =$ le 1^{er}, (resp. le 3^{e}) tiers de $[\alpha_n, \beta_n]$ si $u_{n+1} = 0$, (resp. 1).

Les $[\alpha_n, \beta_n]$ sont des segments emboîtés de longueur qui tend vers 0, donc $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} [\alpha_n, \beta_n]$ est un singleton $\{x\}$, (5.51), et par construction x n'est dans aucun A_n, $(n \in \mathbb{N}^*)$ donc $x \in B$ et vu la définition de θ, on aura $\theta(x) = y$, d'où finalement θ bijection de B sur $[0,1]$: *l'ensemble de Cantor est bien de mesure nulle (au sens de Darboux) de cardinal non dénombrable.*

Ceci termine ce chapitre sur l'intégrale de Riemann, où il a été surtout question de Darboux. L'étude de l'intégrale de Lebesgue permettra de reprendre ces notions en mettant l'accent sur les parties mesurables, puis de mesure nulle, mais elle se formule dans un cadre plus général où l'importance de l'ordre sur $\mathbb{R}$ disparaît. Mais c'est une autre histoire et je laisse à d'autres le soin de l'exposer.

EXERCICES

1. Soit f intégrable sur $[a,b], > 0$ sur $[a,b]$, telle que $\displaystyle\int_a^b f = 0$.

Construire des segments emboîtés $[a_n, b_n]$ tels que $f(x) \leqslant \dfrac{1}{n}$ sur $[a_n, b_n]$.

En déduire que l'hypothèse $\displaystyle\int_a^b f = 0$ est absurde, (d'où $\displaystyle\int_a^b f > 0$).

2. Trouver les applications f continues de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tout $x, y \geqslant 0$:

$$f(x)f(y) = \int_{|x-y|}^{x+y} f(t)dt.$$

3. On considère la suite rélle des $u_n = \int_0^1 t^n \sin \pi t \, dt$. Donner une relation de récurrence permettant de calculer u_n. Nature de la série des u_n, calcul de la somme en cas de convergence.

4. On pose $a_n = \int_0^1 (1-t+t^2)^n dt$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$, et que la série des $(-1)^n a_n$ converge. Trouver une relation du type $a_n = f(n)a_{n-1} + g(n)$, où f et g sont des fonctions rationnelles. Montrer que $a_n \sim \dfrac{2}{n}$.

5. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existe et $x \rightsquigarrow \int_x^{x+1} (f'')^2$ est bornée. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

6. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+^*)$ ayant un maximum unique sur $[a,b]$, et $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Trouver $\lim_{n \to +\infty} u_n$ avec $u_n = \dfrac{\int_a^b \varphi^n f}{\int_a^b \varphi^n}$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, on ait $\int_a^b t^k f(t)dt = 0$. Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros sur $]a,b[$.

8. Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k^2+n^2}}$, montrer que $l = \lim_{n \to +\infty} u_n$ existe et donner un équivalent de $u_n - l$.

9. Soit $f : [0,1] \rightsquigarrow \mathbb{R}$, de classe C^1. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx + \dfrac{\alpha}{n} + \dfrac{\varepsilon(n)}{n}$ avec $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon(n) = 0$.

10. Soit $I_n = \int_0^1 \dfrac{t^n}{\sqrt{1+t^n}} dt$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} I_n$, puis $\lim_{n \to +\infty} (nI_n)$.

11. Calculer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{Arcsin} \frac{2x}{1+x^2} dx.$

12. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Etudier la suite des u_n avec
$\displaystyle u_n = n \int_1^{1+\frac{1}{n}} f(x^n) dx.$

13. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ intégrable sur tout compact et telle que
$\displaystyle\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. Déterminer $\displaystyle\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{1}{2\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} f(x) e^{ix} dx.$

14. Soit $E_{\alpha,\beta} = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = \alpha, f^{(1)} = \beta\}$ et
$\displaystyle I(f) = \int_0^1 f'^2(t) dt$. Déterminer $\operatorname{Inf}\{I(f), f \in E_{\alpha,\beta}\}$.

15. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $E = \{u \in \mathcal{C}^0([0,1],[0,1]),\ u(0)=0, u(1)=1\}$.
Calculer $\sup \left\{ \displaystyle\int_0^1 |f(u(t))| dt;\ u \in E \right\}$.

16. Soit U_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n, à coefficients réels.
Montrer que $\inf \left\{ \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{P^2(t) dt}{\sqrt{1-t^2}};\ P \in U_n \right\}$ est atteint pour P proportionnel au polynôme P_n défini par $P_n(\cos\theta) = \cos n\theta$, (polynômes de Tchebichef).

17. Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continue, et $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ convexe.
Montrer que : $\displaystyle\varphi\left(\int_0^1 f(t) dt\right) \leqslant \int_0^1 (\varphi_0 f)(t) dt.$

18. Soit u et v les racines de l'équation $x^2 - x + \dfrac{1}{10} = 0$. Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}_5[X]$ on a

$$\int_0^1 P(t) dt = \frac{1}{18}\left[5\ P(u) + 8\ P\left(\frac{1}{2}\right) + 5\ P(v)\right].$$

19. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],[a,b])$ où $a < 0 < b$, telle que $\displaystyle\int_0^1 f = 0$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2 \leqslant -ab$.

20. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R});\ f(0) = 0, f(1) = 1\}$.

Calculer $\inf \{\displaystyle\int_0^1 |f - f'|;\ f \in E\}$.

21. Soit f continue, à valeurs positives, sur $[0,1]$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 (f(x))^n dx\right)^{\frac{1}{n}}$.

22. Soit f continue strictement positive sur $[0,1]$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 (fx))^{1/n} dx\right)^n$.

23. On pose $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t+\ldots+t^n}$. Etudier la suite des a_n.
Equivalent de $a_n - l$ si l est la limite de la suite.

24. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Donner un développement limité d'ordre 2 de $a_n = \displaystyle\int_0^1 x^n f(x)dx$.

SOLUTIONS

1. Soit $\varepsilon_1 = b - a$, avec $I = 0 = \displaystyle\int_a^b f$, $\exists \alpha_1 > 0$ tel que $p(d) \leqslant \alpha_1$ implique $0 \leqslant S_f(d) - I \leqslant S_f(d) - s_f(d) \leqslant \varepsilon_1$, d'où $0 \leqslant S_f(d) \leqslant b - a$.
Si d est la subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, et si sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$ le maximum $M_i(f)$ est > 1, on aurait $S_f(d) > \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1} - x_i) =$ $b - a$: absurde, donc sur l'un des $[x_i, x_{i+1}]$ on a $M_i(f) \leqslant 1$. En notant $[a_1, b_1]$ ce segment, on a $[a_1, b_1] \subset [a,b]$, avec $f(x) \leqslant 1$ sur $[a_1, b_1]$.

De plus, $\displaystyle\int_a^b f = 0 = \int_a^{a_1} f + \int_{a_1}^{b_1} f + \int_{b_1}^{b} f$ est somme de nombres positifs donc nuls : on a $\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} f = 0$.

Mais alors avec $\varepsilon_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$, $\exists \alpha_2$ tel qu'avec d subdivision de $[a_1, b_1]$ cette fois, vérifiant $p(d) \leqslant \alpha_2$, on ait $0 \leqslant S_f(d) \leqslant \dfrac{b_1 - a_1}{2}$.

Là encore un segment de la subdivision est tel que le maximum de f est $\leqslant \dfrac{1}{2}$, (si tous les maxima sont $> \dfrac{1}{2}, S_f(d) > (b_1 - a_1)\cdot \dfrac{1}{2}$), d'où $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$ avec $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ sur $[a_2, b_2]$ et $\displaystyle\int_{a_2}^{b_2} f = 0$. On peut continuer et construire ainsi des segments emboîtés $[a_n, b_n]$, avec $f(x) \leqslant \dfrac{1}{n}$ sur $[a_n, b_n]$ et $\displaystyle\int_{a_n}^{b_n} f = 0$.

De plus on peut imposer $\alpha_1 \leqslant 1$, $\alpha_2 \leqslant \dfrac{1}{2}, \dots, \alpha_k \leqslant \dfrac{1}{k}$ ce qui donnera $b_k - a_k \leqslant \dfrac{1}{k}$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, le théorème des fermés emboîtés dans un complet s'applique et $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{x_0\}$.

Comme $x_0 \in [a_n, b_n]$, $f(x_0) \leqslant \dfrac{1}{n}$ et ce, $\forall n \in \mathbb{N}$, d'où $f(x_0) = 0$ c'est exclu.

On a donc $\displaystyle\int_a^b f > 0$.

2. S'il n'y avait pas la valeur absolue, on pourrait dériver (en x ou y) le second membre, d'où l'idée de faire sauter cette valeur absolue, ce qui conduit à définir f sur $\mathbb{R}$.

On a d'abord, $(x = y = 0)$ $(f(0))^2 = 0$ donc $f(0) = 0$.
On définit g, impaire sur $\mathbb{R}$, à partir de $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$, en posant $g(x) = f(x)$ si $x \geqslant 0$ et $g(x) = -f(-x)$ si $x < 0$.
Comme f est continue, avec $f(0) = 0$, on a g continue.

Si f est solution du problème, g vérifie $\boxed{2}$: $\displaystyle g(x)g(y) = \int_{x-y}^{x+y} g(t)dt$ pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$.

En effet, si $x \geqslant y \geqslant 0$, $\boxed{2}$ s'écrit $\displaystyle f(x)f(y) = \int_{|x-y|}^{x+y} g(t)dt$, c'est vérifié ; si $y \geqslant x \geqslant 0$, $\boxed{2}$ devient :

$$f(x)f(y) = \int_{-|x-y|}^{x+y} g = \int_{-|x-y|}^{|x-y|} g + \int_{|x-y|}^{x+y} f = \int_{|x-y|}^{x+y} f$$

puisque la première intégrale est nulle, g étant impaire. Mais alors, l'égalité est vérifiée.
Puis, si $y \leqslant 0 \leqslant x$, on doit vérifier que

$$-f(-y)f(x) = \int_{x-y}^{x+y} g(t)dt, \text{ soit comme } -y \geqslant 0,$$

$$-f(-y)f(x) = \int_{x+(-y)}^{x-(-y)} g(t)dt = -\int_{x-(-y)}^{x+(-y)} g(t)dt.$$

Si $-y \leqslant x$, $x-(-y) = |x-(-y)|$ et la relation s'écrit
$f(x)f(-y) = \displaystyle\int_{|x-(-y)|}^{x+(-y)} f(t)dt$: elle est vérifiée; alors que $-y > x$ donne
$x-(-y) = -|x-(-y)|$, mais comme $\displaystyle\int_{-|x-(-y)|}^{|x-(-y)|} g$ est nulle par imparité
de g, on est encore conduit à $f(x)f(-y) = \int_{|x-(-y)|}^{x+(-y)} f$, ce qui est vrai.

Enfin, si $x \leqslant 0 \leqslant y$, on doit établir $-f(-x)f(y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} g$

soit $-f(-x)f(y) = \displaystyle\int_{x-y}^{-x+y} g + \int_{-x+y}^{x+y} g = \int_{-x+y}^{x+y} g$, (toujours g impaire)
et on est ramené au cas précédent en inversant x et y. On traiterait de même le cas de x et $y \leqslant 0$.

Réciproquement, soit g impaire, nulle en 0, continue, vérifiant

$\boxed{2}$: $g(x)g(y) = \displaystyle\int_{x-y}^{x+y} g(t)dt$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, pour x et y positifs,

si $x \geqslant y$, $\boxed{2}$ s'écrit $g(x)g(y) = \displaystyle\int_{|x-y|}^{x+y} g$, alors que $x \leqslant y$ et g

impaire conduit à $\displaystyle\int_{x-y}^{-x+y} g = 0$ d'où

$$g(x)g(y) = \int_{x-y}^{-x+y} g + \int_{-x+y}^{x+y} g = \int_{-x+y}^{x+y} g = \int_{|x-y|}^{x+y} g.$$

Donc la restriction de g à $[0, +\infty[$ est solution du problème initial.
Or, soit g une solution continue sur $\mathbb{R}$ de $\boxed{2}$, on a

$$g(x)g(-y) = \int_{x+y}^{x-y} g = -\int_{x-y}^{x+y} g = -g(x)g(y)$$

d'où $g(x)(g(y)+g(-y))=0$.
Alors soit $g\equiv 0$, soit g impaire, (avec x tel que $g(x)\neq 0$, on a $\forall y\in\mathbb{R}$, $g(y)=-g(-y)$) ; et si g impaire $g(0)=0$.

Il reste donc à résoudre $\boxed{2}$. Si on écarte la solution nulle, il existe a tel que $g(a)\neq 0$, l'identité $g(x)g(a)=\displaystyle\int_{x-a}^{x+a} g$ prouve la dérivabilité de g, et $g'(x)=\dfrac{1}{g(a)}(g(x+a)-g(x-a))$; mais alors g' est encore dérivable, et $g''(x)=\dfrac{1}{g(a)},(g'(x+a)-g'(x-a))$ est continue.

Repartant de l'identité $g(x)g(y)=\displaystyle\int_{x-y}^{x+y} g$, on dérive 2 fois en x, mais aussi 2 fois en y, d'où $g''(x)g(y)=g'(x+y)-g'(x-y)=g(x)g''(y)$; avec a tel que $g(a)\neq 0$ on est conduit à $g''-\lambda g=0$, (avec $\lambda=\dfrac{g''(a)}{g(a)}$), d'où, si $\lambda=0$, $g(x)=ax+b$;
si $\lambda>0$, avec $\lambda=\omega^2$, $g(x)=\alpha\operatorname{ch}\omega x+\beta\operatorname{sh}\omega x$;
si $\lambda<0$, avec $\lambda=-\omega^2$, $g(x)=\alpha\cos\omega x+\beta\sin\omega x$.
Mais on a dérivé, d'où une vérification à faire, simplifiée car on cherche g impaire, nulle en 0, et on est conduit à :

$$g(x)=2x,\ \text{ ou } g(x)=\frac{4}{\omega}\operatorname{sh}\omega x \text{ ou } \frac{4}{\omega}\sin\omega x.$$

3. Une intégration par parties, ($u=t^n$, $dv=\sin\pi t dt$ d'où $du=nt^{n-1}dt$, $v=-\dfrac{1}{\pi}\cos\pi t$) conduit à

$$u_n=\frac{1}{\pi}+\frac{n}{\pi}\int_0^1 t^{n-1}\cos(\pi t)dt$$
$$=\frac{1}{\pi}+\frac{n}{\pi}\left([t^{n-1}\frac{\sin\pi t}{\pi}]_0^1-\frac{n-1}{\pi}\int_0^1 t^{n-2}\sin\pi t dt\right),$$

soit $u_n=\dfrac{1}{\pi}-\dfrac{n(n-1)}{\pi^2}u_{n-2}$, (si $n\geqslant 2$) par une deuxième intégration par parties.

Puis, $0\leqslant\sin\pi t\leqslant 1$ sur $[0,1]\Rightarrow 0\leqslant u_n\leqslant\displaystyle\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}$ donc u_n tend vers 0, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_{n+2}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\pi}-\frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2}u_n\right)=0$ et $u_n\sim\dfrac{\pi}{n^2}$: la série des u_n converge.

On a $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} t^k\right) \sin \pi t\, dt = \int_0^1 \frac{(1-t^{n+1})}{1-t} \sin \pi t dt$

(avec $\lim_{t\to 1^-} \frac{1-t^{n+1}}{1-t} = n+1$ en fait). Comme $\sin \pi 1 = 0$, on a $\lim_{t\to 1^-} \frac{\sin \pi t}{t-1} = \lim_{t\to 1^-} = \frac{\sin \pi t - \sin \pi}{t-1} = -\pi$, donc la fonction g, $t \rightsquigarrow \frac{\sin \pi t}{1-t}$, prolongeable par continuité en $t=1$, est bornée sur le compact $[0,1]$. On a alors

$$U_n = \int_0^1 g(t)dt - \int_0^1 t^{n+1} g(t)dt \text{ avec}$$
$$\left|\int_0^1 t^{n+1} g(t)dt\right| \leqslant \int_0^1 t^{n+1} ||g||_\infty dt = \frac{||g||_\infty}{n+2}$$

d'où $\lim_{n\to+\infty} U_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \int_0^1 \frac{\sin \pi t}{1-t} dt$, (ce qui donne directement la convergence de la série des u_k).

4. Soit $u(t) = 1 - t + t^2$, $u'(t) = 2t - 1$ s'annule en $t = \frac{1}{2}$, donc u décroit sur $[0, \frac{1}{2}]$ et croît sur $[\frac{1}{2}, 1]$, avec $u(0) = u(1) = 1$ et $u(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Comme $\frac{3}{4} \leqslant u(t) \leqslant 1$, on a $u^{n+1}(t) \leqslant u^n(t)$, donc $a_{n+1} \leqslant a_n$.

Soit $\varepsilon > 0$, sur $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, (on suppose $\varepsilon < \frac{1}{2}$), u, continue est bornée et atteint ses bornes, donc $b = \sup\{u(t), \varepsilon \leqslant t \leqslant 1-\varepsilon\}$ est un $u(c)$ avec $c \neq 0$ et $\neq 1$ d'où $0 < u(c) < 1$; (en fait $c = \varepsilon$ ou $1-\varepsilon$).
Mais alors

$$0 \leqslant a_n \leqslant \int_0^\varepsilon dt + \int_\varepsilon^{1-\varepsilon} b^n dt + \int_{1-\varepsilon}^1 dt, \text{ soit}$$
$$0 \leqslant a_n \leqslant 2\varepsilon + (1-2\varepsilon) b^n,$$

comme $b \in [0,1[$, le majorant tend vers 2ε si n tend vers l'infini, il devient inférieur à 3ε si n assez grand d'où $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Comme a_n tend vers 0 en décroissant, la série alternée des $(-1)^n a_n$ converge.

On peut chercher une relation en changeant de variable pour retrouver la symétrie par rapport à $\frac{1}{2}$, (parabole).

Soit $s = \frac{1}{2} - t$, $a_n = \int_{\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \left[1 - (\frac{1}{2} - s) + \frac{1}{4} - s + s^2\right]^n (-ds)$, ou encore $a_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{1/2} \left(\frac{3}{4} + s^2\right)^n ds = 2\int_0^{1/2} \left(\frac{3}{4} + s^2\right)^n ds$, qui s'intègre par parties :

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\left(\left[s(\frac{3}{4} + s^2)^n\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{1/2} 2n\left(\frac{3}{4} + s^2\right)^{n-1} s^2 ds\right) \\
&= 1 - 4n\int_0^{1/2} \left(s^2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4} + s^2\right)^{n-1} ds \\
&= 1 - 2n\left(a_n - \frac{3}{4}a_{n-1}\right),
\end{aligned}$$

d'où $a_n(1 + 2n) = 1 + \frac{3n}{2}a_{n-1}$ donc $a_n = \frac{3n}{2(1 + 2n)}a_{n-1} + \frac{1}{1 + 2n}$.

On repart de $a_n = 2\int_0^{1/2} \left(\frac{3}{4} + s^2\right)^n ds$, on pose $t = \frac{3}{4} + s^2$, d'où, avec $s \geqslant 0$, $s = \sqrt{t - \frac{3}{4}}$, $ds = \frac{dt}{2\sqrt{t - \frac{3}{4}}}$ et $a_n = 2\int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{t^n}{2\sqrt{t - \frac{3}{4}}}dt$, (intégrale impropre convergente en $\frac{3}{4}$).

Soit $\alpha \in]\frac{3}{4}, 1[$, on a $a_n = \int_{\frac{3}{4}}^{\alpha} \frac{t^n dt}{\sqrt{t - \frac{3}{4}}} + \int_{\alpha}^1 \frac{t^n}{\sqrt{t - \frac{3}{4}}}dt$.

Puis $\int_{\frac{3}{4}}^{\alpha} \frac{t^n dt}{\sqrt{t - \frac{3}{4}}} \leqslant \alpha^n \int_{\frac{3}{4}}^1 \frac{dt}{\sqrt{t - \frac{3}{4}}}$ et par la première formule de la moyenne, il existe c_n entre α et 1 tel que

$$\int_{\alpha}^1 \frac{t^n}{\sqrt{t - \frac{3}{4}}}dt = \frac{1}{\sqrt{c_n - \frac{3}{4}}}\int_{\alpha}^1 t^n dt = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{(n+1)\sqrt{c_n - \frac{3}{4}}}.$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha^n \displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{dt}{\sqrt{t-\frac{3}{4}}} = 0$, et, si α est assez proche de 1 pour que $\sqrt{c_n - \frac{3}{4}}$ soit proche de $\sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$, on aura

$$n\left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{(n+1)\sqrt{c_n-\frac{3}{4}}}\right) \text{ proche de } 2,$$

d'où finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 2$ et $a_n \sim \dfrac{2}{n}$.

5. Soit la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2, avec reste intégral entre x et $x+h$, $(h>0)$ on a

$$f(x+h) - f(x) - hf'(x) = \int_x^{x+h} (x+h-t)f''(t)dt,$$

d'où, en majorant $|x+h-t|$ par h si $t \in [x, x+h]$,
$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \displaystyle\int_x^{x+h} h|f''(t)|dt = h\int_x^{x+h} 1\cdot|f''(t)|dt.$
Faire intervenir le carré de f'', c'est... Cauchy Schwarz :

$$|f(x+h)-f(x)-hf'(x)| \leqslant h\left(\int_x^{x+h} 1^2\right)^{1/2}\left(\int_x^{x+h} (f''(g))^2 dt\right)^{1/2}$$

et, si on impose $h \leqslant 1$, on aura $\displaystyle\int_x^{x+h} (f'')^2 \leqslant \int_x^{x+1} (f'')^2$ quantité bornée par hypothèse.
On a donc une constante M telle que, $\forall h \in [0,1]$
$|f(x+h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant h\sqrt{h}M.$
En divisant par h, et en utilisant l'inégalité triangulaire on en déduit, pour tout h de $]0,1]$:

$$|f'(x)| \leqslant \sqrt{h}M + \frac{|f(x+h)-f(x)|}{h}.$$

Mais alors, soit $\varepsilon > 0$, on fixe $h \in]0,1]$ tel que $\sqrt{h}M \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, puis, pour ce h fixé, comme $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$ existe, on aura $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{h}|f(x+h)-f(x)| = 0,$

donc il existe $x_0 > 0$ tel que pour tout $x \geqslant x_0$, $\dfrac{1}{h}|f(x+h)-f(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ et finalement, à $\varepsilon > 0$; on associe x_0 tel que $x \geqslant x_0$ implique $|f'(x)| \leqslant \varepsilon$: on a $\lim\limits_{x \to +\infty} |f'(x)| = 0$.

6. Comme φ est continue strictement positive, il en est de même de φ^n donc $\displaystyle\int_a^b \varphi^n > 0$: u_n existe.

Soit c le point de $[a,b]$ où φ atteint son unique maximum, M.
Pour $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0$, $|x-c| \leqslant \alpha$ et $x \in [a,b] \Rightarrow |f(x)-f(c)| \leqslant \varepsilon$, ($f$ est continue).
On note $[u,v] = [a,b] \cap [c-\alpha, c+\alpha]$. Sur le compact $[a,b]-]u,v[$, φ continue est bornée, soit M' la borne supérieure, on a $0 < M' < M$, (M maximum sur $[a,b]$ est atteint en c uniquement).
Soit $\eta = \dfrac{M-M'}{2}$, par continuité de φ en c, il existe $\beta > 0$, (auquel on impose la condition $\beta < \alpha$) tel que sur $[a,b] \cap [c-\beta, c+\beta] = [u_1, v_1]$ on ait $|\varphi(x) - \varphi(c)| \leqslant \dfrac{M-M'}{2}$ d'où $\varphi(x) \geqslant \varphi(c) - \dfrac{M-M'}{2} = \dfrac{M+M'}{2}$.
On a alors :

$$u_n - f(c) = \frac{\displaystyle\int_a^b \varphi^n(t)(f(t)-f(c))dt}{\displaystyle\int_a^b \varphi^n(t)dt}$$

$$= \frac{\int_{[u,v]} \varphi^n(f-f(c)) + \int_{[a,b]-[u,v]} \varphi^n(f-f(c))}{\int_a^b \varphi^n}.$$

Puis $\left| \dfrac{\displaystyle\int_{[u,v]} \varphi^n(f-f(c))}{\displaystyle\int_a^b \varphi^n} \right| \leqslant \dfrac{\displaystyle\int_u^v \varphi^n \varepsilon}{\displaystyle\int_a^b \varphi^n} \leqslant \varepsilon$;

et $\left| \dfrac{\displaystyle\int_{[a,b]-[u,v]} \varphi^n(f-f(c))}{\int_a^b \varphi^n} \right| \leqslant \dfrac{2||f||_\infty {M'}^n(b-a)}{\int_{u_1}^{v_1} \varphi^n}$

$$\leqslant \frac{2||f||_\infty(b-a)}{(v_1-u_1)} \left(\frac{M'}{\left(\dfrac{M+M'}{2}\right)} \right)^n.$$

Comme $\dfrac{2M'}{M+M'} < 1$, le majorant tend vers 0 si n tend vers l'infini, finalement à $\varepsilon > 0$ on associe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$ $|u_n - f(c)| \leqslant 2\varepsilon$: on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = f(c)$, c point de $[a,b]$ où φ atteint son unique maximum.

7. Supposons que f admette exactement r zéros où elle change de signe, sur $]a,b[$, notés $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$, avec $r \leqslant n$.

Le polynôme $\prod\limits_{i=1}^{r}(x-\alpha_i) = P(x)$ change de signe en même temps que f, donc le produit fP est nul en $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, de signe constant sur $[a,b]$, et comme $P \in \mathrm{Vect}\,(1, x, x^2, \dots, x^n)$, on a $\displaystyle\int_a^b fP = 0$, d'où ($f$ continue) $f \equiv 0$ en fait, ($fP \equiv 0$ et les zéros de P isolés).
Donc si $f \not\equiv 0$, elle admet au moins $n+1$ zéros avec changement de signe sur $]a,b[$. Dans tous les cas f admet au moins $n+1$ zéros sur $]a,b[$.

8. On a $u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k^2}{n^2}}}$ tend vers $l = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ (formule de la moyenne) donc $l = \left[\mathrm{Log}\,(x+\sqrt{1+x^2})\right]_0^1 = \mathrm{Log}\,(1+\sqrt{2})$.

En notant F une primitive de $f : x \rightsquigarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, on a $l = \displaystyle\int_0^1 f = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f = \sum_{k=1}^{n}\left(F(\frac{k}{n}) - F(\frac{k-1}{n}\right)$ et on applique Taylor Lagrange à l'ordre 2, à F, entre $\dfrac{k-1}{n}$ et $\dfrac{k}{n}$: il existe λ_k entre $\dfrac{k-1}{n}$ et $\dfrac{k}{n}$ tel que $F(\dfrac{k-1}{n}) - F(\dfrac{k}{n}) = -\dfrac{1}{n}F'(\dfrac{k}{n}) + \dfrac{1}{2n^2}F''(\lambda_k)$ d'où

$$\begin{aligned} l &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) - \frac{1}{2n^2}f'(\lambda_k)\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{k^2}{n^2}}} - \frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f'(\lambda_k). \end{aligned}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f'(\lambda_k) = \int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1$ on a finalement $l - u_n \sim \dfrac{1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{2n} = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}n}$ si n tend vers l'infini.

9. On généralise l'exercice précédent. Soit F une primitive de f sur $[0,1]$, elle est de classe C^2 et $\displaystyle\int_0^1 f = \sum_{k=1}^{n}\left(F(\frac{k}{n}) - F(\frac{k-1}{n})\right)$.

Puis $F(\frac{k-1}{n}) - F(\frac{k}{n}) = -\frac{1}{n}F'(\frac{k}{n}) + \frac{1}{2n^2}F''(\lambda_k)$ avec λ_k entre $\frac{k-1}{n}$ et $\frac{k}{n}$ d'où

$$-\int_0^1 f = \sum_{k=1}^{n} -\frac{1}{n}f(\frac{k}{n}) + \frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f'(\lambda_k).$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f'(\lambda_k) = \int_0^1 f'(x)dx = f(1) - f(0)$, on a finalement $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) - \int_0^1 f = \frac{1}{n}\left(\frac{f(1)-f(0)}{2}\right) + \frac{\varepsilon(n)}{n}$ d'où l'existence de $\alpha = \dfrac{f(1)-f(0)}{2}$, (et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\varepsilon(n) = 0$).

10. S'il y a une logique dans ce texte, on doit s'attendre à trouver $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$, (ou pas de limite) sinon la deuxième question est ridicule.

On a $0 \leqslant \dfrac{t^n}{\sqrt{1+t^n}} \leqslant t^n \Rightarrow 0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$: je vous le disais, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Puis $nI_n = \displaystyle\int_0^1 t\cdot\frac{nt^{n-1}}{\sqrt{1+t^n}}dt$ s'intègre par parties : $u = t$, $(du = dt)$ et $dv = nt^{n-1}(1+t^n)^{-1/2}dt \Rightarrow v = 2(1+t^n)^{\frac{1}{2}}$ donc

$nI_n = \left[2t\sqrt{1+t^n}\right]_0^1 - 2\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^n}dt = 2\sqrt{2} - 2\int_0^1 \sqrt{1+t^n}dt.$

Comme pour $t \in [0,1[$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+t^n} = 1$, limite uniforme sur $[0,a]$, pour $a < 1$, on écrit

$$\begin{aligned} nI_n - 2\sqrt{2} &= -2\int_0^1 \left(\sqrt{1+t^n} - 1\right)dt - 2\int_0^1 dt \\ &= -2\int_0^1 \frac{t^n}{1+\sqrt{1+t^n}}dt - 2 \end{aligned}$$

donc $|n\, I_n - 2\sqrt{2} + 2| \leqslant 2\displaystyle\int_0^1 t^n dt = \frac{2}{n+1}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n = 2\sqrt{2} - 2$.

11. La fonction $x \rightsquigarrow f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ donc si $x \in [0,1]$, $f(x)$ croît de 0 à 1, puis si x croît de 1 à $\sqrt{3}$, $f(x)$ décroît de 1 à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. On va poser $x = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$ mais en coupant l'intégrale en 1. Avec $x = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$ on a $\dfrac{2x}{1+x^2} = \sin t$ et $dx = \dfrac{1}{2}(1+tg^2\dfrac{t}{2})dt$, donc, comme $t = 2\operatorname{Arctg} x$, $I = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Arcsin}(\sin t)\cdot(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{t}{2})dt + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \operatorname{Arcsin}(\sin t)\cdot(1+\operatorname{tg}^2\dfrac{t}{2})\,dt$, mais, sur $[0,\dfrac{\pi}{2}]$, $\operatorname{Arcsin}(\sin t) = t$, alors que sur $[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3}]$ $\operatorname{Arcsin}(\sin t) = \pi - t$, d'où

$$I = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{t}{\cos^2\frac{t}{2}}dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\pi - t}{\cos^2\frac{t}{2}}dt\right).$$

On détermine une primitive de $\dfrac{t}{\cos^2\frac{t}{2}}$ par une intégration par parties.

Soit $F = \displaystyle\int \frac{t}{\cos^2\frac{t}{2}}dt$. On pose $u = t$, $dv = \dfrac{dt}{\cos^2\frac{t}{2}}$ d'où $du = dt$, $v = 2\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$ donc $F(t) = 2t\operatorname{tg}\dfrac{t}{2} - \displaystyle\int 2\frac{\sin\frac{t}{2}}{\cos\frac{t}{2}}dt$ soit $F(t) = 2t\operatorname{tg}\dfrac{t}{2} + 4\operatorname{Log}|\cos\dfrac{t}{2}|$.

Donc

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\left(F(\frac{\pi}{2}) - F(0) - F(\frac{2\pi}{3}) + F(\frac{\pi}{2}) + \pi\left[2\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2\left(\pi + 4\operatorname{Log}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 0 - \left(2\cdot\frac{2\pi}{3}\sqrt{3} + 4\operatorname{Log}\frac{1}{2}\right)\right. \\ &\quad\left. + 2\pi(\sqrt{3}-1)\right) \end{aligned}$$

soit $I = \dfrac{\pi\sqrt{3}}{3}$ tous calculs faits, mais sans aucune garantie.

12. Avec $x^n = t$, soit $x = t^{1/n}$, (t et $x > 0$) on a $dx = \dfrac{t^{\frac{1}{n}-1}}{n}dt$ donc $u_n = n\displaystyle\int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} f(t)\frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{n}dt$ soit $u_n = \displaystyle\int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} \frac{f(t)}{t}t^{1/n}dt$. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} t^{1/n} = 1$ on subodore que u_n tendra vers $\displaystyle\int_1^e \frac{f(t)}{t}dt$ donc on forme $v_n = u_n - \displaystyle\int_1^e \frac{f(t)}{t}dt$. On a

$$v_n = \int_1^{(1+\frac{1}{n})^n} \frac{f(t)}{t}(t^{1/n}-1)dt - \int_{(1+\frac{1}{n})^n}^{e} \frac{f(t)}{t}dt.$$

Sur $[1, e]$ la fonction $g :\rightsquigarrow \dfrac{f(t)}{t}$ est bornée, donc le module du 2^{e} terme est majoré par $(e - (1+\dfrac{1}{n})^n)||g||_\infty$, quantité qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Puis $t \rightsquigarrow t^{1/n} - 1$ est croissante sur $\left[1, \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]$ de 0 à $\dfrac{1}{n}$ donc le module du premier terme est majoré par

$$\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right)||g||_\infty\frac{1}{n} \leqslant \frac{(e-1)||g||_\infty}{n}:$$

finalement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_1^e \frac{f(t)}{t}dt.$
(On a utilisé la croissance de la suite des $(1+\dfrac{1}{n})^n$).

13. On a, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists A, |x| \geqslant A \Rightarrow |f(x)| \leqslant \varepsilon$, d'où, comme $|e^{ix}| = 1$, si $\lambda > A$, en posant

$$u(\lambda) = \frac{1}{2\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)e^{ix}dx = \frac{1}{2\lambda}\int_{-A}^{A} f(x)e^{ix}dx + \frac{1}{2\lambda}\int_{[-\lambda,\lambda]-[-A,A]} f(x)e^{ix}dx,$$

on a $\left|\dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int_{-A}^{A} f(x)e^{ix}dx\right| \leqslant \dfrac{1}{2\lambda}\left|\displaystyle\int_{-A}^{A} f(x)e^{ix}dx\right|$, majorant qui tend vers 0 si λ tend vers $+\infty$,

et $$\left|\frac{1}{2\lambda}\int_{[-\lambda,\lambda]-[-A,A]} f(x)e^{ix}dx\right| \leqslant \frac{1}{2\lambda}2(\lambda - A)\varepsilon \leqslant \varepsilon,$$

d'où, pour λ assez grand, $|u(\lambda)| \leqslant 2\varepsilon$: on a $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} u(\lambda) = 0$.

14. La présence d'un carré fait penser Cauchy Schwarz.

On a $\left(\int_0^1 f'\right)^2 = (f(1) - f(0))^2 = (\beta - \alpha)^2 \leqslant \int_0^1 f'^2 \int_0^1 1$, d'où $I(f) \geqslant (\beta - \alpha)^2$, pour tout $f \in E_{\alpha,\beta}$, l'inf des $I(f)$ est $\geqslant (\beta - \alpha)^2$. Or la fonction $t \rightsquigarrow g(t) = (\beta - \alpha)t + \alpha$ est telle que $g(0) = \alpha, g(1) = \beta$, elle est de classe C^1, donc $g \in E_{\alpha,\beta}$ et $\operatorname{Inf}\{I(f);\ f \in E_{\alpha,\beta}\} \leqslant I(g)$.

$I(g) = \int_0^1 (\beta - \alpha)^2 = (\beta - \alpha)^2$, l'inf est $(\beta - \alpha)^2$, il est atteint.

15. La fonction f est continue sur le compact $[0, 1]$, donc bornée et atteint ses bornes : il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que $|f(x_0)| = ||f||_\infty$.

De plus, $\forall t \in [0, 1]$, $|(f \circ u)(t)| \leqslant ||f||_\infty$ d'où $\int_0^1 |f(u(t))|dt \leqslant ||f||_\infty$.

Il en résulte que l'ensemble des $\int_0^1 |f \circ u|$ admet une borne supérieure, inférieure à $||f||_\infty$. En fait c'est $||f||_\infty$.

Pour le justifier, on construit des fonctions u_n valant x_0 sur presque tout $[0, 1]$: soit u_n, affine par morceaux, joignant les points $(0, 0)$; $\left(\frac{1}{n}, x_0\right)$; $\left(1 - \frac{1}{n}, x_0\right)$; $(1, 1)$; avec $n \geqslant 2$. On a $u_n(0) = 0, u_n(1) = 1$, $u_n(t) \in [0, 1]$, u_n continue et $u_n(t) = x_0$ sur $\left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ d'où

$$\int_0^1 |f \circ u_n| \geqslant \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} |f(u_n(t))|\, dt = \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} ||f||_\infty = \left(1 - \frac{2}{n}\right) ||f||_\infty$$

d'où $\left(1 - \frac{2}{n}\right) ||f||_\infty \leqslant \sup\left\{\int_0^1 |f \circ u|;\ u \in E\right\} \leqslant ||f||_\infty$ et comme c'est vrai pour tout n, on a bien $||f||_\infty$ pour borne supérieure.

16.

$$\begin{aligned} P_n(\cos\theta) &= \mathcal{R}e\,(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k i^k \sin^k\theta \cos^{n-k}\theta\right), \\ &= C_n^0 \cos^n\theta - C_n^2 \cos^{n-2}\theta(1 - \cos^2\theta) \\ &\quad + C_n^4 \cos^{n-4}\theta(1 - \cos^2\theta)^2 + \dots \end{aligned}$$

est un polynôme en $\cos\theta$, de degré n, de coefficient directeur $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = 2^{n-1}$.

Les $P_k, (0 \leqslant k \leqslant n)$ étant de degrés échelonnés, forment une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré n ou plus.

Donc $P \in U_n$ s'écrit $P = \dfrac{P_n}{2^{n-1}} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k P_k$.

Posons $\lambda_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$, et $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$.

L'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est convergente en -1 et 1 (fonction intégrée $O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\right)$ ou $O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$) et en fait, le changement de variable $\theta = \operatorname{Arccos} t$, $(\theta \in [0, \pi])$ donne

$$\int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_{\pi}^{0} \frac{\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k(\cos\theta)\right)^2 (-\sin\theta)d\theta}{\sin\theta}$$
$$= \int_0^{\pi} \sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n} \lambda_k \lambda_l (\cos k\theta \cos l\theta)d\theta.$$

Or $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 k\theta = \int_0^{\pi} \frac{\cos 2k\theta + 1}{2} d\theta = \frac{\pi}{2}$ si $k \neq 0; = \pi$ si $k = 0$, et $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos k\theta \cos l\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\cos{(k+l)\theta} + \cos{(k-l)\theta}\right) d\theta = 0$ pour $k \neq l$, d'où $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{\pi}{2}\left(2\lambda_0^2 + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2\right)$ est minimum pour P dans U_n, (*i.e.* tel que $\lambda_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$) si et seulement si les λ_k sont nuls pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$, d'où le résultat.

17. D'abord, φ, connexe, est continue, donc $\varphi \circ f$ sera continue sur $[0,1]$, donc intégrable.
En effet, soit $x_1 < x_2 < x_3$, $\exists! t \in]0,1[$, $x_2 = tx_1 + (1-t)x_3$ doù
$\boxed{1}$ $\varphi(x_2) \leqslant t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_3)$ par convexité de φ.
Mais alors $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) \leqslant (1-t)(\varphi(x_3) - \varphi(x_1))$. On divise par $x_2 - x_1 = (1-t)(x_3 - x_1)$, d'où

$$\frac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{\varphi(x_3) - \varphi(x_1)}{x_3 - x_1}.$$

Il en résulte que la fonction $x \rightsquigarrow \dfrac{\varphi(x) - \varphi(x_1)}{x - x_1}$ est croissante sur $]x_1, +\infty[$.

Or $\boxed{1}$ s'écrit encore $t(\varphi(x_3)-\varphi(x_1)) \leqslant \varphi(x_3)-\varphi(x_2)$, relation que l'on divise par $t(x_3-x_1)=x_3-x_2$, (quantité positive) d'où

$$\frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_1)}{x_3-x_1} \leqslant \frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_2)}{x_3-x_2}$$

d'où *a fortiori*

$$\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1} \leqslant \frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_2)}{x_3-x_2}.$$

Pour x_2 fixé, si x_3 tend vers x_2^+, $\dfrac{\varphi(x_3)-\varphi(x_2)}{x_3-x_2}$ décroît, est minoré, donc $\lim\limits_{x_3\to x_2^+} \dfrac{\varphi(x_3)-\varphi(x_2)}{x_3-x_2}$ existe : φ est dérivable à droite en x_2, d'où la continuité à droite.

Mais de même on justifierait que $x \rightsquigarrow \dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_2)}{x-x_2}$ est croissante sur $]-\infty, x_2[$, majorée, d'où φ dérivable à gauche en x_2 donc continue à gauche.

Venons-en à l'exercice.

On a $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, donc, ($\varphi$ continue),

$$\varphi\left(\int_0^1 f(t)dt\right) = \lim_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})\right)$$

$$\leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(f(\frac{k}{n})\right)$$

par action de φ connexe sur un isobarycentre, d'où, comme $\varphi\circ f$ intégrable

$$\leqslant \int_0^1 (\varphi\circ f)(t)dt.$$

18. Par linéarité de l'intégrale, on vérifie la relation pour $P(t)=1, t, t^2, t^3, t^4, t^5$. On a $u+v=1$ et $uv=\dfrac{1}{10}$.

$P(t)=1$: $\displaystyle\int_0^1 P = 1$; $\dfrac{1}{18}\Big(5(P(u)+P(v))+8P(\frac{1}{2})\Big) = \dfrac{1}{18}(5+5+8)=1.$

$P(t)=t$, $\displaystyle\int_0^1 P = \frac{1}{2}$; relation : $\dfrac{1}{18}(5(u+v)+8\cdot\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{18}(5+4)=\dfrac{1}{2}.$

$P(t)=t^2$, $\displaystyle\int_0^1 P = \frac{1}{3}$; relation : $\dfrac{1}{18}\left(5(u^2+v^2)+\dfrac{8}{4}\right).$

Or $u^2+v^2 = u - \frac{1}{10} + v - \frac{1}{10} = (u+v) - \frac{2}{10} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} = u^2+v^2$.
On aura besoin de u^3+v^3, u^4+v^4 et u^5+v^5.
Comme $u^3 = u(u^2) = u(u-\frac{1}{10}) = u^2 - \frac{u}{10}$ on a $u^3+v^3 = u^2+v^2 - \frac{u+v}{10}$
soit $u^3+v^3 = \frac{4}{5} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}$.
Puis $u^4 = u^3 - \frac{u^2}{10}, (v^4 = v^3 - \frac{v^2}{10}) \Rightarrow u^4+v^4 = u^3+v^3 - \frac{1}{10}(u^2+v^2)$
d'où $u^4+v^4 = \frac{7}{10} - \frac{1}{10}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{31}{50}$; enfin $u^5+v^5 = u^4+v^4 - \frac{1}{10}(u^3+v^3)$
soit $u^5+v^5 = \frac{31}{50} - \frac{7}{100} = \frac{11}{20}$.
Pour $P(t) = t^2$, $\frac{1}{3} = \frac{1}{18}\left(5\cdot\frac{4}{5} + \frac{8}{4}\right) = \frac{6}{18}$.
Pour $P(t) = t^3$ on doit vérifier $\frac{1}{4} = \frac{1}{18}\left(5(\frac{7}{10}) + 1\right) = \frac{1}{18}(\frac{9}{2})$: vrai ;
pour $P(t) = t^4$, c'est l'égalité $\frac{1}{5} = \frac{1}{18}\left(5(\frac{31}{50}) + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{18}(\frac{36}{10}) = \frac{2}{10}$: vérifiée ;
enfin, pour $P(t) = t^5$, on a $\frac{1}{6} = \frac{1}{18}\left(5(\frac{11}{20}) + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{18}(\frac{11}{4} + \frac{1}{4}) = \frac{3}{18}$.
De tels exercices reposent !

19. Quand je vois un carré, tel le taureau sur le rouge, je fonce sur Cauchy Schwarz... et bien non, pas ici.
Comme $a \leqslant f(t) \leqslant b$, on a $(f(t)-b)(f(t)-a) \leqslant 0$ sur $[0,1]$, d'où $\int_0^1 \left(f^2(t)) - (a+b)f(t) + ab\right) dt \leqslant 0$ et comme $\int_0^1 f = 0$, il reste $\int_0^1 f^2 \leqslant -ab$.

20. Si on pose $g(t) = e^{-t}f(t)$, pour f de classe C^1,
on a $g'(t) = e^{-t}\left(f'(t) - f(t)\right)$, d'où $|f-f'| = e^t|g'(t)|$.
On introduit $F = \{g \in C^1([0,1],\mathbb{R});\ g(0) = 0, g(1) = \frac{1}{e}\}$ et on a $f \in E \Leftrightarrow g$ définie par $g(t) = e^{-t}f(t)$ est dans F.
Mais alors, pour toute fonction f de E, on a

$$\int_0^1 |f-f'| = \int_0^1 e^t|g'(t)|dt \geqslant \int_0^1 |g'(t)|dt \geqslant \int_0^1 g'(t)dt = g(1)-g(0)$$

soit finalement $\frac{1}{e} \leqslant \int_0^1 |f-f'|$: on a $\frac{1}{e} \leqslant \inf\{\int_0^1 |f-f'|;\ f \in E\}$.

Soit g_n définie par $g_n(t) = \frac{1}{e}$ sur $[\frac{1}{n}, 1]$ et $\frac{1}{e} - \frac{n^2}{e}(t - \frac{1}{n})^2$ sur $[0, \frac{1}{n}]$. On a $g_n(0) = 0, g_n(1) = \frac{1}{e}, g_n$ de classe C^1, et avec f_n définie par $f_n(t) = e^t g_n(t)$ on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f_n - f_n'| = \int_0^1 e^t |g_n'(t)| dt = \int_0^{\frac{1}{n}} -\frac{2n^2}{e}\left(t - \frac{1}{n}\right) e^t dt \\
= -\frac{2n^2}{e}\int_0^{1/n} te^t dt + \frac{2n}{e}\int_0^{1/n} e^t dt \\
= \frac{-2n^2}{e}\left[te^t - e^t\right]_0^{\frac{1}{n}} + \frac{2n}{e}(e^{\frac{1}{n}} - 1) \\
= -\frac{2n^2}{e}\left(\frac{1}{n}e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n}} + 1\right) + \frac{2n}{e}\left(\frac{1}{n} + \mathrm{o}(\frac{1}{n})\right) \\
= \frac{1}{e} + \mathrm{o}(1), \text{ (par développement limité).}
\end{aligned}$$

L'inf est donc $\frac{1}{e}$.

21. C'est un classique. La fonction f continue sur $[0, 1]$ compact atteint sa borne supérieure, qui vaut $||f||_\infty$ ici puisque f est à valeurs positives.

Si $||f||_\infty = 0$, $f = 0$, $u_n = \left(\int_0^1 f^n\right)^{1/n} = 0$ tend vers 0.

Sinon, soit $\varepsilon > 0$ tel que $||f||_\infty - \varepsilon \geqslant 0$, si $||f||_\infty$ est atteinte en x_0, il existe, (continuité de f en x_0) un segment $[u, v]$ avec $x_0 \in [u, v] \subset [0, 1]$, tel que $v - u > 0$ et $f(x) \geqslant ||f||_\infty - \varepsilon = f(x_0) - \varepsilon$ sur $[u, v]$.

On a alors $\int_0^1 f^n \geqslant \int_u^v f^n$ car f est à valeurs positives,

donc $\int_0^1 f^n \geqslant \int_u^v (||f||_\infty - \varepsilon)^n = (v - u)\,(||f||_\infty - \varepsilon)^n$

d'où $\left(\int_0^1 f^n\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant (v - u)^{\frac{1}{n}}\,(||f||_\infty - \varepsilon)$.

Par ailleurs, $\left(\int_0^1 f^n\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\int_0^1 (||f||_\infty)^n\right)^{\frac{1}{n}} = ||f||_\infty$

et de l'encadrement

$$(||f||_\infty - \varepsilon)\,(v - u)^{1/n} \leqslant \left(\int_0^1 f^n\right)^{1/n} \leqslant ||f||_\infty$$

valable pour tout n, on déduit, pour n assez grand

$$||f||_\infty - 2\varepsilon \leqslant \left(\int_0^1 f^n\right)^{1/n} \leqslant ||f||_\infty$$

et ε étant quelconque, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\int_0^1 f^n\right)^{1/n} = ||f||_\infty$.

22. Les énoncés se suivent et se ressemblent... presque.
Sur $[0,1]$ compact, la fonction continue $x \rightsquigarrow \text{Log}\,(f(x))$ est bornée et atteint ses bornes, notées a et b, donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(f(x))^{1/n} = e^{\frac{1}{n}\text{Log}\,f(x)}$ avec $\frac{1}{n}\text{Log}\,f(x) \in \left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$. Les suites $\left(\frac{a}{n}\right)$ et $\left(\frac{b}{n}\right)$ étant bornées, il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\frac{1}{n}\text{Log}\,f(x)\right) \leqslant r.$$

On calcule $e^{\frac{1}{n}\text{Log}\,f(x)}$ en appliquant Taylor Lagrange à l'ordre 2 : il existe $\theta(x,n) \in]0,1[$ tel que

$$e^{\frac{1}{n}\text{Log}\,f(x)} = 1 + \frac{1}{n}\text{Log}\,f(x) + \frac{1}{2n^2}\left(\text{Log}^2 f(x)\right) e^{\theta(x,n)\cdot\frac{1}{n}\text{Log}\,f(x)},$$

avec $e^{\theta(x,n)\frac{1}{n}\text{Log}\,f(x)} \leqslant e^r$ en fait.

Donc $\left|\int_0^1 (f(x))^{1/n}\,dx - \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{n}\text{Log}\,f(x)\right) dx\right|$

$$\leqslant \frac{e^r}{2n^2}\int_0^1 \left(\text{Log}^2 f(x)\right) dx.$$

Comme $\int_0^1 \text{Log}^2 f(x)dx$ est une constante par rapport à n, on a

$$\int_0^1 (f(x))^{1/n}\,dx = 1 + \frac{1}{n}\int_0^1 \text{Log}\,(f(x))\,dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\begin{aligned}\text{Mais }\ \text{Log}\left(\int_0^1 (f(x))^{1/n}\,dx\right)^n &= n\text{Log}\left(\int_0^1 (f(x))^{1/n}\,dx\right)\\ &= n\text{Log}\left(1 + \frac{1}{n}\int_0^1 \text{Log}\,f(x)dx\right.\\ &\quad \left.+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\ &= \int_0^1 \text{Log}\,(f(x))\,dx + O\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

et donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_0^1 (f(x))^{1/n}\,dx\right)^n = e^{\int_0^1 \mathrm{Log}\,(f(x))dx}$.

23. Il est clair que la suite des a_n est décroissante, minorée par 0 donc convergente.

Pour $t \neq 1, 1+t+\ldots+t^n = \dfrac{1-t^{n+1}}{1-t}$, expression qui tend vers $n+1$ si t tend vers 1, (donc qui reste valable par continuité).

Mais alors $a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t}{1-t^{n+1}}dt$, or si $t<1$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1-t}{1-t^{n+1}} = 1-t$, on forme donc $a_n - \displaystyle\int_0^1 (1-t)dt = a_n - \frac{1}{2}$. On a :

$$\begin{aligned}
a_n - \frac{1}{2} &= \int_0^1 (1-t)\left(\frac{1}{1-t^{n+1}} - 1\right)dt\\
&= \int_0^1 \frac{1-t}{1-t^{n+1}}(t^{n+1})dt = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t+\ldots t^n}dt.
\end{aligned}$$

D'où $0 \leqslant a_n - \dfrac{1}{2} \leqslant \displaystyle\int_0^1 t^{n+1}dt = \frac{1}{n+2}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$.

Pour

$$\begin{aligned}
t\in[0,1[,\ \frac{1}{1+t+\ldots+t^n} &= (1-t)\cdot\frac{1}{1-t^{n+1}}\\
&= (1-t)\left(\sum_{i=0}^{p} t^{i(n+1)} + \frac{t^{(p+1)(n+1)}}{1-t^{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

Donc :

$$a_n = \sum_{i=0}^{p}\int_0^1 (1-t)t^{i(n+1)} + \int_0^1 \frac{(1-t)t^{(p+1)(n+1)}}{1-t^{n+1}}dt.$$

On a

$$\begin{aligned}
v_{p,n} = \int_0^1 \frac{(1-t)t^{(p+1)(n+1)}}{1-t^{n+1}}dt &= \int_0^1 \frac{t^{(p+1)(n+1)}dt}{1+t+\ldots+t^n}\\
&\leqslant \int_0^1 t^{(p+1)(n+1)}dt,
\end{aligned}$$

soit $0 \leqslant v_{p,n} \leqslant \dfrac{1}{(p+1)(n+1)+1}$ donc $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} v_{p,n} = 0$.

Quant à

$$\begin{aligned}
u_{p,n} &= \sum_{i=0}^{p} \int_0^1 \left(t^{i(n+1)} - t^{i(n+1)+1}\right) dt \\
&= \sum_{i=0}^{p} \left(\frac{1}{i(n+1)+1} - \frac{1}{i(n+1)+2}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{[i(n+1)+1][i(n+1)+2]} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{(i(n+1)+1)(i(n+1)+2)},
\end{aligned}$$

d'où, comme $a_n = u_{p,n} + v_{p,n}$ pour tout p, que $v_{p,n}$ tend vers 0 et que la série des $\dfrac{1}{(i(n+1)+1)(i(n+1)+2)}$ converge, (n fixé) on a

$$a_n = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i(n+1)+1)(i(n+1)+2)}.$$

Avec $a_n = \dfrac{1}{2} + b_n$, on a $b_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i + \frac{1}{n+1})(i + \frac{2}{n+1})}$.

Mais sur $[0, +\infty[$ la série de fonctions des $\dfrac{1}{(i+x)(i+2x)} = w_i(x)$ converge normalement, $\left(||w_i||_\infty = \dfrac{1}{i^2}\right)$, la somme est continue en x donc

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i + \frac{1}{n+1})(i + \frac{2}{n+1})} \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

et finalement $a_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\pi^2}{6n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

24. On intègre par parties :

$$a_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} f(x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx$$

$$= \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} f'(x) dx.$$

Il faut évaluer $\int_0^1 x^{n+1} f'(x)dx$. Or si $x \leqslant a < 1$, le x^{n+1} tend très vite vers 0, alors que si x est proche de 1, $f'(x)$ est proche de $f'(1)$, (continuité) : on forme $\int_0^1 x^{n+1} \left(f'(x) - f'(1)\right) dx$.

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists a \in]0,1[$ tel que $x \in]a,1[\Rightarrow |f'(x) - f'(1)| \leqslant \varepsilon$ d'où

$$\left|\int_0^1 x^{n+1} \left(f'(x) - f'(1)\right) dx\right| \leqslant \int_0^a x^{n+1} 2||f'||_\infty + \varepsilon \int_a^1 x^{n+1} dx$$
$$\leqslant 2||f'||_\infty \frac{a^{n+2}}{n+2} + \frac{\varepsilon(1 - a^{n+2})}{n+2}$$

d'où $(n+2)\left|\int_0^1 x^{n+1} f'(x)dx - \frac{f'(1)}{n+2}\right| \leqslant 2||f'||_\infty a^{n+2} + \varepsilon$.

Comme $0 < a < 1$, $\exists n_0$ tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow 2||f'||_\infty a^{n+2} \leqslant \varepsilon$, donc

$$\forall n \geqslant n_0, \left|(n+2)\int_0^1 x^{n+1} f'(x)dx - f'(1)\right| \leqslant 2\varepsilon,$$

soit $\left|\int_0^1 x^{n+1} f'(x)dx - \frac{f'(1)}{n+2}\right| \leqslant \frac{2\varepsilon}{n+2}$.

Mais alors $\quad a_n = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^{n+1} f'(x)dx$ implique

$$a_n = \frac{f(1)}{n+1} - \frac{1}{n+1}\frac{f'(1)}{n+2} + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où
$$a_n = \frac{f(1)}{n} - \frac{1}{n^2}\left(f'(1) + f(1)\right) + \circ\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

(Attention à développer $\frac{1}{n+1}$).

CHAPITRE 9

Extension des intégrales simples

Au chapitre VIII, on a étudié les fonctions intégrables sur un segment $[a,b]$. La sagesse voudrait qu'on se contente de cela car, « qui augmente son savoir augmente sa peine », mais... on voudrait considérer le cas de fonctions définies sur d'autres intervalles, bornées ou non.

1. Intégrale des fonctions sur un intervalle non borné

Soit L un intervalle du type $L = [a,+\infty[$, ou $]-\infty, a]$, ou $\mathbb{R}$, et f une fonction définie sur L, à valeurs réelles, on veut donner un sens à l'intégrale de f sur L.

DÉFINITION 9.1. — *On dit que f, définie de $[a,+\infty[= L$ dans $\mathbb{R}$ est intégrable sur L si et seulement si, $\forall x \in L$, f est intégrable sur $[a,x]$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_a^x f(t)dt = I$ existe.*

La valeur de cette limite est l'intégrale de f sur L, encore notée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$. On dit encore que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente.

De même, f définie sur $]-\infty, a]$ sera intégrable sur cet intervalle si et seulement si, $\forall x \leqslant a$, f est intégrable sur $[x,a]$ et si $\lim\limits_{x\to-\infty} \displaystyle\int_x^a f$ existe. On aura $\displaystyle\int_{-\infty}^a f = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f$.

Enfin, pour f définie sur $]-\infty,\infty[$, elle sera dite intégrable sur $\mathbb{R}$, d'intégrale I si et seulement si $\forall (X,Y) \in \mathbb{R}^2, X \leqslant Y$, on a f intégrable sur $[X,Y]$ et si $I = \lim\limits_{\substack{X\to-\infty \\ Y\to+\infty}} \displaystyle\int_X^Y f$ existe.

Nous allons préciser l'étude dans le cas de $L = [a, +\infty[$, les aménagements pour les deux autres cas se faisant aisément.

9.2. *Un exemple*. *L'intégrale impropre, (car c'est encore la terminologie employée)* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$.

Car pour tout $x \geqslant 1$, $t \rightsquigarrow \dfrac{1}{t^\alpha}$ est continue sur $[1, x]$, donc intégrable, et $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right)$ pour $\alpha \neq 1$, alors que $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} = \operatorname{Log} x$, (pour $\alpha = 1$); et on voit bien que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha}$ existe si et seulement si $\alpha > 1$.

Cet exemple des intégrales *dites de Riemann* sera fondamental pour l'étude des critères de convergence.

THÉORÈME 9.3. — *L'ensemble E des fonctions intégrables sur $[a, +\infty[$ est un espace vectoriel réel et l'application μ de E dans $\mathbb{R}$ qui à f associe $\mu(f) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est une forme linéaire positive sur E.*

En effet E est sous-espace vectoriel de l'espace F des applications de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, car $f \equiv 0$ est dans E, qui est non vide; puis si f et g sont dans E, α et β dans $\mathbb{R}$, pour tout x de $[a, +\infty[$ la fonction $\alpha f + \beta g$ est intégrable sur $[a, x]$, (Théorème 8.24), puis on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_a^x (\alpha f + \beta g) = \alpha \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f + \beta \lim_{x\to+\infty} \int_a^x g$ puisque ces limites existent. Donc $\alpha f + \beta g \in E$ et de plus $\mu(\alpha f + \beta g) = \alpha\mu(f) + \beta\mu(g)$ d'où la linéarité de μ.

Enfin, si pour tout x de $[a, +\infty[$ on a $f(x) \geqslant 0$, pour tout y de $[a, +\infty[$ on aura $\displaystyle\int_a^y f(x)dx \geqslant 0$, d'où en passant à la limite $\mu(f) \geqslant 0$ et le côté forme linéaire positive de l'intégrale. ∎

Nous allons, en utilisant les propriétés de corps ordonné sur $\mathbb{R}$, établir des critères de comparaison, puis des critères de convergence pour les fonctions à valeurs positives. L'utilisation de l'aspect complet de $\mathbb{R}$ permettra d'obtenir des résultats dans le cas général. Cette démarche sera employée lors de l'étude des séries, (chapitre 11, tome 3).

THÉORÈME 9.4. — *Soit f une fonction définie sur $[a,+\infty[$, à valeurs positives, intégrable sur $[a,x]$ pour tout x de $[a,+\infty[$. Alors $\int_a^{+\infty} f$ existe si et seulement si la fonction $x \rightsquigarrow \int_a^x f$ est majorée.*

Comme f est à valeurs positives, en posant $F(x) = \int_a^x f$, pour $x < x'$ on a $F(x') - F(x) = \int_x^{x'} f$, (relation de Chasles) donc c'est positif, et F est croissante. Mais alors F croissante admet une limite en $+\infty$ si et seulement si $\{F(x);\ x \geqslant a\}$ est majoré et ont sait que :
$\lim\limits_{x\to+\infty} F = \sup\{F(x);\ x \geqslant a\}$). ■

On va déduire de ce théorème des critères de comparaison.

9.5. Critère 1. *Soit f et g définies sur $[a,+\infty[$, à valeurs réelles positives, intégrables sur $[a,x]$ pour tout $x \geqslant a$. Si on a $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ sur $[a,+\infty[$ alors si $\int_a^{+\infty} g$ converge, $\int_a^{+\infty} f$ converge aussi et la divergence de $\int_a^{+\infty} f$ implique celle de $\int_a^{+\infty} g$.*

Car pour tout $x \geqslant a$, $F(x) = \int_a^x f \leqslant G(x) = \int_a^x g$, donc la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique G bornée d'où F bornée d'où la convergence de $\int_a^{+\infty} f$. (Le deuxième résultat s'en déduit par contraposition). ■

9.6. Critère 2. *Soit f et g définies sur $[a,+\infty[$, à valeurs positives, intégrables sur $[a,x]$ pour tout $x \geqslant a$. Si on a deux constantes α et $\beta, > 0$, telles que, $\forall t \geqslant a$, $\alpha f(t) \leqslant g(t) \leqslant \beta f(t)$ les deux intégrales impropres $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ sont de même nature.*

Car la convergence de l'intégrale de f, implique la convergence de l'intégrale de βf, (β constante : c'est évident), d'où celle de g, (critère 1) qui à son tour donne la convergence de $\int_a^{+\infty} \alpha f$ (critère 1) avec $\alpha \neq 0$, donc $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f$ existe. ■

9.7. Critère 3. *Soit f et g définies sur $[a, +\infty[$, à valeurs positives, intégrables sur $[a, x]$ pour tout $x \geqslant a$, g ne s'annulant pas. Si $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda$ existe, avec $\lambda > 0$, les intégrales $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ sont de même nature.*

En effet, avec $\varepsilon \in]0, \lambda[$, il existe A, que l'on prend $\geqslant a$, tel que, pour $x \geqslant A$, $\lambda - \varepsilon \leqslant \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant \lambda + \varepsilon$, soit, comme $g(x) > 0$,
$(\lambda - \varepsilon)g(x) \leqslant f(x) \leqslant (\lambda + \varepsilon)g(x)$ et on applique le critère 2, ce qui donne la même nature pour les intégrales de f et g sur $[A, +\infty[$. Comme la relation de Chasles donne, $\forall x \geqslant A \geqslant a$, $\int_a^x = \int_a^A + \int_A^x$, l'existence de $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x$ équivaut à celle de $\lim_{x \to +\infty} \int_A^x$.

Tiens, j'en fais un lemme.

LEMME 9.8. — *Soit f définie sur $[a, +\infty[$ intégrable sur tout $[a, x]$ pour $x \geqslant a$. La nature de $\int_a^{+\infty} f$ est la même que celle de $\int_A^{+\infty} f$, pour tout $A \geqslant a$.*

Comme le comportement des intégrales de Riemann est connu, on peut en déduire un critère de convergence.

THÉORÈME 9.9. — *Soit f une fonction définie sur $[a, +\infty[$, intégrable sur tout $[a, x] \subset [a, +\infty[$, à valeurs positives. S'il existe α tel que $\lim_{t \to +\infty} t^\alpha (f(t) = \lambda > 0$ existe, si $\alpha > 1$ l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f$ converge, si $\alpha \leqslant 1$ elle diverge.*

En effet, dans ce cas la nature de $\int_a^{+\infty} g$ avec g définie par $g(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ est connue, et $\lim_{t \to +\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lambda > 0$: on applique le critère 3. ■

Dans ce théorème 9.9., la fonction f se comporte, en $+\infty$, comme $\dfrac{\lambda}{t^\alpha}$, mais il peut se faire que f ne soit pas comparable à une puissance de t. On a quand même un résultat.

COROLLAIRE 9.10. — *Soit* $f : [a, +\infty[\mapsto [0, +\infty[$, *intégrable sur tout* $[a, x]$, $(x \geqslant a)$. *S'il existe* $\alpha > 1$ *tel que* $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = 0$ *alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *converge; et s'il existe* $\alpha \leqslant 1$ *tel que* $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha f(t) = +\infty$ *l'intégrale de* f *diverge.*

Avec $\varepsilon > 0$ fixé, dans le 1^{er} cas, il existe $A \geqslant a$ tel que $t \geqslant A$ donne $t^\alpha f(t) \leqslant \varepsilon$ soit $f(t) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{t^\alpha}$, avec $\alpha > 1$ donc le critère 9.5 s'applique; il en est de même dans le 2^{e} cas car pour $B > 0$ fixé, $(\exists A \geqslant a)$, $(t \geqslant A) \Rightarrow \left(f(t) \geqslant \dfrac{B}{t^\alpha}\right)$, avec $\alpha \leqslant 1$ d'où divergence de $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{B}{t^\alpha} dt$ et *a fortiori* divergence de $\displaystyle\int^{+\infty} f$. ■

Avant de passer au cas des fonctions de signe quelconque on peut préciser un peu plus ce qui se passe pour des fonctions à valeurs positives équivalentes.

THÉORÈME 9.11. — *Soient* f *et* g *définies sur* $[a, +\infty[$, *à valeurs positives, équivalentes en* $+\infty$. *Les intégrales improres* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *et* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ *sont de même nature, et, en cas de convergence,* $\displaystyle\int_x^{+\infty} f$ *et* $\displaystyle\int_x^{+\infty} g$ *sont des infiniment petits équivalents; en cas de divergence* $\displaystyle\int_a^x f$ *et* $\displaystyle\int_a^x g$ *sont des infiniment grands équivalents.*

Les fonctions f et g sont toujours supposées intégrables sur chaque $[a, x]$, pour tout $x \geqslant a$.

Comme f et g sont équivalentes en $+\infty$, on peut écrire $f(t) = g(t)(1 + \varepsilon(t))$ avec $\lim\limits_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = 0$, donc :

$$(\exists\, A), (t \geqslant A) \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \leqslant 1 + \varepsilon(t) \leqslant \frac{3}{2}\right),$$

d'où en multipliant par $g(t) \geqslant 0$, $\dfrac{1}{2} g(t) \leqslant f(t) \leqslant \dfrac{3}{2} g(t)$ pour $t \geqslant A$, le critère 9.6. donne bien des intégrales de même nature.

Plus précisément, soit $\eta > 0$, $(\exists B), (t \geqslant B) \Rightarrow (|\varepsilon(t)| \leqslant \eta)$ d'où $(1-\eta)g(t) \leqslant f(t) \leqslant (1+\eta)g(t)$.

Supposons les intégrales convergentes : pour $x \geqslant B$, et $x' \geqslant x$ on aura donc

$$(1-\eta)\int_x^{x'} g \leqslant \int_x^{x'} f \leqslant (1+\eta)\int_x^{x'} g$$

d'où en passant à la limite quand x' tend vers l'infini :

9.12. $$(1-\eta)\int_x^{+\infty} g \leqslant \int_x^{+\infty} f \leqslant (1+\eta)\int_x^{+\infty} g,$$

et écrire : $(\forall \eta > 0), (\exists B), (x \geqslant B) \Rightarrow$ (9.12) c'est traduire l'équivalence des infiniments petits $\int_x^{+\infty} f$ et $\int_x^{+\infty} g$.

Si on suppose les intégrales divergents, pour $x \geqslant B$, on aura

$$(1-\eta)\int_B^{x} g \leqslant \int_B^{X} f \leqslant (1+\eta)\int_B^{x} g,$$

soit encore

$$(1-\eta)\left[\int_a^x g - \int_a^B g\right] \leqslant \int_a^x f - \int_a^B f \leqslant (1+\eta)\left[\int_a^x g - \int_a^B g\right],$$

d'où

$$(1-\eta)\left[\int_a^x g - \int_a^B g\right] + \int_a^B f \leqslant \int_a^x f$$
$$\leqslant (1+\eta)\left(\int_a^x g - \int_a^B g\right) + \int_a^B f.$$

Mais les intégrales divergent et les fonctions sont à valeurs positives, c'est que $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_a^x g = +\infty$, (fonction croissante de x, sans limite). On suppose B assez grand pour avoir $\int_a^x g > 0$ pour tout $x \geqslant B$, on divise la double inégalité par $\int_a^x g$, et on constate que le minorant tend vers $1-\eta$, le majorant vers $1+\eta$, si x tend vers $+\infty$, donc il existe $C \geqslant B$

tel que $x \geqslant C \Rightarrow 1 - 2\eta \leqslant \dfrac{\displaystyle\int_a^x f}{\displaystyle\int_a^x g} \leqslant 1 + 2\eta$: on a bien équivalence des infiniments grands. ■

On retrouvera tout le plan de cette étude dans le cadre des séries à termes positifs, (voir chapitre 11).

Venons-en à l'étude de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *avec une fonction* f *de signe quelconque, supposée intégrable sur tout* $[a, x]$, $x \geqslant a$.

L'existence de la limite, quand x tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_a^x f$, va se traduire par le critère de Cauchy, puisque l'on travaille dans $\mathbb{R}$ complet. On a donc, en appliquant le critère de Cauchy, (voir 4.100), le théorème suivant.

THÉORÈME 9.13. — *Soit* f *une fonction de* $[a, +\infty]$ *dans* $\mathbb{R}$*, intégrable sur tout* $[a, x] \subset [a, +\infty[$*. L'intégrale impropre* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ *converge si et seulement si* $\forall \varepsilon > 0,\ \exists A, (\geqslant a),\ \forall X \geqslant A,\ \forall X' \geqslant A,\ \left|\displaystyle\int_X^{X'} f(t)dt\right| \leqslant \varepsilon$.

On peut imposer $X' \geqslant X \geqslant A$.

Comme, pour $X' \geqslant X$, $\left|\displaystyle\int_X^{X'} f\right| \leqslant \displaystyle\int_X^{X'} |f|$, si on obtient l'inégalité $\displaystyle\int_X^{X'} |f| \leqslant \varepsilon$ pour X et X' assez grands, $(X' \geqslant X)$ on pourra conclure à la convergence de l'intégrale. ■

Ceci conduit à définir la convergence absolue.

DÉFINITION 9.14. — *Soit* f *définie de* $[a, +\infty[$ *dans* $\mathbb{R}$*, intégrable sur tout* $[a, x]$ *de* $[a, +\infty[$*. L'intégrale de* f *sur* $[a, +\infty[$ *est dite absolument convergente si* $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ *converge.*

Si c'est le cas, on aura $\forall\varepsilon > 0,\ \exists A,\ X' \geqslant X \geqslant A \Rightarrow$ $\left|\int_X^{X'} |f|\right| = \int_X^{X'} |f| \leqslant \varepsilon$, d'où *a fortiori* $\left|\int_X^{X'} f\right| \leqslant \int_X^{X'} |f| \leqslant \varepsilon$ et par application du critère de Cauchy, la convergence de $\int_a^{+\infty} f$.

On a donc :

THÉORÈME 9.15. — *Soit f définie sur $[a, +\infty[$, à valeurs réelles, intégrable sur tout $[a, x]$ de $[a, +\infty[$. Si f est l'intégrale absolument convergente, elle est d'intégrale convergente sur $[a, +\infty[$.* ∎

L'application du critère en $t^\alpha|f(t)|$, (de Riemann), lorsqu'il permet de conclure à la convergence absolue, donne donc la convergence, mais il en est de même de tout critère de comparaison portant sur $|f(t)|$ et concluant à la convergence absolue.

Simplement, si l'intégrale de $|f|$ diverge, il se peut quand même que l'intégrale de f converge, car le théorème 9.15 n'est pas une équivalence. Nous allons en donner un exemple. (C'est très mal rédigé. Passe encore pour « nous allons en voir un exemple » car alors lecteur et auteur participent, sinon c'est « Je vais en donner un exemple » qu'il faudrait...). Mais avant, une définition et un résultat donnant la convergence, (non absolue).

DÉFINITION 9.16. — *Soit f définie sur $[a, +\infty[$, à valeurs réelles, intégrable sur tout $[a, x]$ de $[a, +\infty[$. On dit que $\int_a^{+\infty} f$ est semi convergente si elle converge, mais non absolument.*

THÉORÈME 9.17. — *(Critère d'Abel). Soient f et g de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, f tendant vers 0 en décroissant, g intégrable sur tout $[a, x]$ de $[a, +\infty[$. S'il existe $M > 0$ et $A \geqslant a$ tels que $X'' \geqslant X' \geqslant A$ implique $\left|\int_{X'}^{X'} g\right| \leqslant M$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} fg$ converge.*

Des remarques : f décroissante est intégrable sur tout segment de $[a, +\infty[$. Puis, par Chasles, l'existence de $\int_a^x g$ pour tout $x \geqslant a$ implique celle de $\int_{X'}^{X''} g$ pour $X'' \geqslant X' \geqslant a$. Justifions le critère d'Abel, en essayant d'appliquer le critère de Cauchy. Pour $X \geqslant X'$, puisque f est positive décroissante on peut appliquer la deuxième formule de la moyenne (Théorème 8.47), donc $\exists X'' \in [X', X]$ tel que

$$\int_{X'}^{X} f(t)g(t)dt = f(X') \int_{X'}^{X''} g(t)dt, \text{ donc, } (f \geqslant 0)$$
$$\left| \int_{X'}^{X} f(t)g(t)dt \right| \leqslant f(X') \left| \int_{X'}^{X''} g(t)dt \right|,$$

mais comme $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists B$ tel que $X' \geqslant B \Rightarrow 0 \leqslant f(X') \leqslant \dfrac{\varepsilon}{M}$; si on prend $X \geqslant X' \geqslant \sup(A, B)$ on aura donc $\left| \displaystyle\int_{X'}^{X} f(t)g(t)dt \right| \leqslant \varepsilon$ d'où la convergence de $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} fg$, d'après le théorème 9.13.

EXEMPLE 9.18. — $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos t}{t}$, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$, $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha}$, $\alpha > 0, \ldots$ sont des intégrales impropres convergentes puisque $t \rightsquigarrow \dfrac{1}{t^\alpha}$ (pour $\alpha > 0$) tend vers 0 en décroissant, et que $\left| \displaystyle\int_{X'}^{X''} (\cos \text{ ou } \sin) \right|$ est majoré par 2. Si $\alpha \leqslant 1$, ces intégrales ne sont pas absolument convergentes. Justifions le pour $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{|\sin t| dt}{t}$ par exemple.

Si cette intégrale converge, *a fortiori* $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$ existera, or c'est $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt.$

Soit $u_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$, on a $u_k = \displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{t + k\pi} dt$ donc

$$u_k \geqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin t}{t + k\pi} dt \geqslant \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(1 + k)\pi} dt = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{(k + 1)\pi}.$$

Mais alors la série des $v_k = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4(k + 1)}$ convergerait, ce qui est faux (voir chapitre 11).

Tout ce qui précède s'étend facilement au cas des intégrales du type $\int_{-\infty}^{a} f$, avec f définie sur $]-\infty, a]$. D'ailleurs le changement de variable $s=-t$ transforme $\int_{-\infty}^{a} f(s)ds$ en $\int_{-a}^{+\infty} f(-t)dt$.

Quand aux *intégrales des fonctions définies sur* $\mathbb{R}$, la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ signifie que pour un (ou tout) $a \in \mathbb{R}$ fixe, $\int_{a}^{+\infty} f$ d'une part, et $\int_{-\infty}^{a}$ d'autre part, convergent, ou que $\lim\limits_{\substack{X \to -\infty \\ Y \to +\infty}} \int_{X}^{Y} f$ existe. Il faut donc (un peu de bon sens que diable) traiter séparément chaque extrémité et ce n'est qu'en cas de convergence justifiée, que l'on peut calculer en « liant X et Y » par une relation permettant de faciliter le calcul (par exemple $X=-Y\ldots$).

Exemple 9.19. — $I = \int_{\mathbf{R}} te^{-t^2}dt$ converge car $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 \cdot te^{-t^2} = 0$ et $\lim\limits_{t \to -\infty} t^2 \cdot |te^{-t^2}| = 0$ aussi ; puis $I = \lim\limits_{X \to +\infty} \int_{-X}^{X} te^{-t^2}dt = 0$ (intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique par rapport à 0).

Mais bien que $\lim\limits_{X \to +\infty} \int_{-X}^{X} \sin t\, dt = 0$, il ne viendrait à l'esprit d'aucun parmi vous, (y-a-t-il des « aucun parmi vous » ?) de dire que $\int_{\mathbf{R}} \sin t\, dt$ converge.

2. Intégrale d'une fonction non bornée sur un intervalle borné

Soit f définie de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$, intégrable sur chaque $[a, x] \subset [a, b[$, ce qui équivaut, par la relation de Chasles à dire que f est intégrable sur tout $[u, v] \subset [a, b[$.

9.20. *On dira que l'intégrale impropre* $\int_a^b f$ *converge si et seulement si* $I = \lim\limits_{x \to b^-} \int_a^x f$ *existe*, et cette limite est alors la valeur de l'intégrale impropre.

Le plan d'étude est le même que celui des intégrales sur $[a, +\infty[$ et les justifications analogues, aussi je me contenterai de citer les résultats.

9.21. ***Un exemple.*** *L'intégrale impropre* $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$, *(pour* $\alpha > 0$*) est convergente si et seulement si* $\alpha < 1$.

D'abord si $\alpha \leqslant 0$, $t \rightsquigarrow f(t) = \frac{1}{(b-t)^\alpha} = (b-t)^{-\alpha}$ définit une fonction continue sur le segment $[a, b]$, on n'a plus une intégrale impropre.

Puis, pour $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, on a $\int_a^x \frac{dt}{(b-t)^\alpha} = \left[\frac{1}{(\alpha - 1)(b-t)^{\alpha-1}}\right]_a^x$ et la limite de $\frac{1}{(\alpha-1)(b-x)^{\alpha-1}}$ lorsque x tend vers b^- existera, (et sera nulle), si et seulement si $\alpha < 1$.

Pour $\alpha = 1$, $\int_a^x \frac{dt}{b-t} = [-\mathrm{Log}\,(b-t)]_a^x = \mathrm{Log}(b-a) - \mathrm{Log}\,(b-x)$ tend vers $+\infty$ si x tend vers b^-, donc l'intégrale diverge.

9.22. ***Critères de comparaison pour les fonctions positives***

Soient f *et* g *définies sur* $[a, b[$, *à valeurs positives, intégrables sur tout* $[a, x] \subset [a, b[$.

1) Si $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ sur $[a, b[$, alors $\left(\int_a^b g \text{ converge}\right) \Rightarrow \left(\int_a^b f \text{ converge}\right)$ et $\left(\int_a^b f \text{ diverge}\right) \Rightarrow \left(\int_a^b g \text{ diverge}\right)$.

2) S'il existe α et β, > 0, tels que $\alpha f(t) \leqslant g(t) \leqslant \beta f(t)$ sur $[a, b[$ les intégrales impropres $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ soit de même nature.

3) Si $g(t) > 0$ sur $[a, b[$ et si $\lim\limits_{t \to b^-} \frac{f(t)}{g(t)} = \lambda$ existe avec $\lambda > 0$, les intégrales impropres de f et de g sont de même nature.

La justification est évidente. Elle est basée sur le fait que les fonctions F et G, (avec $F(x) = \displaystyle\int_a^x f$ et $G(x) = \displaystyle\int_a^x g$) sont croissantes, d'où l'existence des limites équivalente au fait que ces fonctions soient bornées. Voir 9.5, 9.6 et 9.7.

On en déduit le critère de Riemann :

THÉORÈME 9.23. — *Soit f définie sur $[a, b[$, positive, intégrable sur tout $[a, x]$ de $[a, b[$. S'il existe α tel que $\lim\limits_{t \to b^-} (b-t)^\alpha f(t)$ existe et soit non nulle, alors si $\alpha < 1$, $\displaystyle\int_a^b f$ converge, mais si $\alpha \geqslant 1$ elle diverge.*

S'inspirer de 9.9 pour la justification. ■

Ce théorème concerne le cas de f comparable à une puissance de $(b-t)$. Mais il arrive que f soit négligeable, ou infiniment grande par rapport aux puissances de $(b-t)$. On a alors deux résultats :

REMARQUE 9.24. — S'il existe $\alpha < 1$ tel que $\lim\limits_{t \to b^-} (b-t)^\alpha f(t) = 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge, f étant supposée à valeurs positives.

S'il existe $\alpha \geqslant 1$ tel que $\lim\limits_{t \to b^-} (b-t)^\alpha f(t) = +\infty$ alors $\displaystyle\int_a^b f$, diverge, avec f à valeurs positives.

Car, pour $f \geqslant 0$, dans le 1^er^ cas on a $f(t) \leqslant \dfrac{\varepsilon}{(b-t)^\alpha}$ pour t « proche » de b, alors que dans le 2^e^ cas c'est $f(t) \geqslant \dfrac{A}{(b-t)^\alpha}$ que l'on obtient en traduisant la limite infinie. La place de α par rapport à 1 donne alors la conclusion. ■

REMARQUE 9.25. — *On intègre les équivalents positifs.* Avec f et g positives équivalentes lorsque t tend vers b^-, on justifierait encore que *en cas de convergence* de $\displaystyle\int_a^b f$ (et donc de $\displaystyle\int_a^b g$, qui est de même nature) *les « restes » $\displaystyle\int_x^b f$ et $\displaystyle\int_x^b g$ sont des infiniments petits (si $x \to b^-$) équivalents ; et en cas de divergence* des deux intégrales, $\displaystyle\int_a^x f$ et $\displaystyle\int_a^x g$ *sont des infiniments grands équivalents, (si $x \to b^-$)*, voir 9.11. ■

Pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$, de signe quelconque, on parlera encore de *convergence absolue* si $\int_a^b |f|$ converge, et de *semi-convergence* si $\int_a^b |f|$ diverge mais $\int_a^b f$ converge.

Grâce au critère de Cauchy appliqué à $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f$, on a encore *(convergence absolue)* $\Rightarrow$ *(convergence)*, mais la réciproque est fausse.

Enfin, on déduit de cette étude les résultats pour f définie sur $]a, b]$, ou sur $]a, b[$, ou $]a, +\infty[\ldots$ en n'oubliant pas, en cas d'intégrale impropre aux deux bornes de l'intervalle de justifier séparément la convergence en chaque borne, même si après, pour le calcul, on peut relier les valeurs tendant vers les bornes, (et considérer $\lim_{x\to 0^+} \int_x^{1/x} f$ pour traiter $\int_0^{+\infty} f$ par exemple).

Après ce paragraphe fastidieux, venons-en à des résultats un peu plus « piquants ».

3. A bas les préjugés

On est souvent tenté par l'illégalité. Les cerises ou les prunes dérobées dans le verger voisin ne sont-elles pas meilleures que toutes autres ? Il en est de même en mathématiques où l'on est tenté d'appliquer des résultats « inventés » qui facilitent les raisonnements. D'autant plus qu'une fâcheuse tendance s'est développée, celle qui consiste à se dire : « si c'est faux, le prof n'aura qu'à me le prouver.

Allons donc à la rencontre de certaines de ces idées préconçues.

9.26. *D'abord, si $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, cela n'implique pas l'existence d'une limite de f en $+\infty$. Même si f est positive ? Non, même pas !*

Prenons en effet une fonction en dents de scie.

Pour $n \geqslant 2$ on définit f, affine par morceaux, joignant les points $\left(n - \frac{1}{n^3}, 0\right)$; (n, n); $\left(n + \frac{1}{n^3}, 0\right)$; et on pose $f(t) = 0$ si $t \leqslant 2 - \frac{1}{8}$.

Ceci aura un sens si, pour $n \geqslant 2$, on a

$$n + \frac{1}{n^3} < (n+1) - \frac{1}{(n+1)^3}, \text{ soit } \frac{1}{n^3} + \frac{1}{(n+1)^3} < 1, \text{ or}$$

$$\frac{1}{n^3}+\frac{1}{(n+1)^3}<\frac{2}{n^3}\leqslant\frac{2}{8}=\frac{1}{4}<1.$$

La fonction f est à valeur positive, donc $\int_0^{+\infty} f$ converge si et seulement si la fonction croissante $F : x \rightsquigarrow F(x) = \int_0^x f$ est majorée.

Or $\forall x > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ x \leqslant n + \frac{1}{n^3}$ d'où

$$F(x) \leqslant F\left(n+\frac{1}{n^3}\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2}\cdot k \cdot \frac{2}{k^3} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{\pi^2}{6},$$

somme de la série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

On a donc convergence de l'intégrale bien que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ n'existe pas.

D'où vient alors ce désir de dire : « $\int^{+\infty} f$ converge donc f tend vers 0 » ?

De ce que l'on apprend les choses « à peu près » et que si un énoncé ressemble, cela doit être vrai !

Or, si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ *existe, et si* $l \neq 0$, *l'intégrale diverge, donc si* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ *et si* $\int^{+\infty} f$ *converge alors* $l = 0$, et c'est peut être ce résultat qui entraîne la confusion.

On a, si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \neq 0$, par exemple $l > 0$, alors, (limite avec $\varepsilon = \frac{l}{2}$), $\exists x_0, x \geqslant x_0 \Rightarrow f(x) \geqslant \frac{l}{2}$ mais alors $\forall X \geqslant x_0$, avec $X' = X+1$, $\int_X^{X+1} f(x)dx \geqslant \frac{l}{2}$ donc $\exists\ \frac{l}{2} > 0,\ \forall x_1,\ \exists X \geqslant \sup(x_0, x_1)$, $\exists X' = X + 1 \geqslant x_1$ tels que $\left|\int_X^{X'} f\right| = \int_X^{X'} f \geqslant \frac{l}{2}$: on nie l'existence de $\lim_{X\to+\infty} \int^X f$, d'où la divergence de l'intégrale.

9.27. *De même, la divergence de* $\int_a^b f$ *avec* f *définie sur* $[a, b[$ *n'implique pas que* $\lim_{x \to b^-} f = +\infty$*, même si* f *est à valeurs positives.*

Les « dents de scie », (il n'y a que cela de vrai pour les contre-exemples) vont encore servir.

Sur $]0, 1]$ on construit f nulle sauf sur les intervalles

$$\left]\frac{1}{2^p} - \frac{1}{p \cdot 2^p}, \frac{1}{2^p} + \frac{1}{p \cdot 2^p}\right[, \ (p \geqslant 3),$$

où f est affine par morceaux et joint les points :

$$\left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{p \cdot 2^p}, 0\right) ; \ \left(\frac{1}{2^p}, 2^p\right) \text{ et } \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{p \cdot 2^p}, 0\right).$$

C'est cohérent car $\dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3 \cdot 2^3} < 1$,

puis on a $\dfrac{1}{2^{p+1}} + \dfrac{1}{(p+1)2^{p+1}} < \dfrac{1}{2^p} - \dfrac{1}{p \cdot 2^p}$,

car ceci équivaut à $1 + \dfrac{1}{p+1} < 2 - \dfrac{2}{p}$,

soit à $\dfrac{2}{p} + \dfrac{1}{p+1} < 1$.

Or le premier membre est fonction décroissante de p, et pour $p = 3$ il vaut $\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{4} < 1$.

L'aire d'une « dent de scie » autour de $\dfrac{1}{2^p}$ vaut $u_p = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \dfrac{1}{p2^p} \cdot 2^p = \dfrac{1}{p}$, (aire d'un triangle), la série des u_p diverge donc $\int_0^1 f$ diverge et pourtant, arbitrairement proche de 0, il y a des $x_p = \dfrac{1}{2^p} - \dfrac{1}{p2^p}$ pour lesquels $f(x_p) = 0$, donc on n'a pas $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

Cet exemple va nous servir à détruire une autre idée préconçue.

9.28. *On n'a pas le droit d'appliquer la formule dite de la valeur moyenne à une intégrale impropre sur un intervalle borné :* c'est-à-dire qu'on peut avoir $\int_a^b f$ converge, f définie sur $[a,b[$, (ou $]a,b]$), sans que

$$\int_a^b f = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a+\frac{k}{n})$$

par exemple, dans le 1er cas, ou $k = 1, 2, \ldots, n$ dans le deuxième cas voir 8.46.

En fait on modifie un peu l'exemple en rétrécissant les bases des triangles.

Cette fois, on prend f nulle sur $]0,1]$, en dehors des intervalles

$$\left]\frac{1}{2^p} - \frac{1}{p\cdot 2^{2p}}, \frac{1}{2^p} + \frac{1}{p\cdot 2^{2p}}\right[,$$

et affine par morceaux joignant les points :

$$\left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{p\cdot 2^{2p}}, 0\right); \left(\frac{1}{2^p}, p\cdot 2^p\right); \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{p\cdot 2^{2p}}, 0\right).$$

L'aire d'une dent de scie est $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{1}{p\cdot 2^{2p}}\cdot p2^p = \frac{1}{2^p}$, c'est le terme général d'une série convergente donc $\int_0^1 f$ converge, et pourtant on n'a pas, je dis bien on n'a pas $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f$, car f étant à valeurs positives, on a : $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ et si $n = 2^p$ on a $\frac{1}{2^p} f\left(\frac{1}{2^p}\right) = \frac{1}{2^p} p\cdot 2^p = p$ qui tend vers l'infini si p tend vers l'infini ! Donc pas de formule de la moyenne dans les intégrales impropres.

Cependant, ...cependant... on a :

THÉORÈME 9.29. — *Soit f monotone de $]a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $I = \int_a^b f$ existe. Alors $I = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$.*

On suppose f décroissante par exemple.

Si de plus l'ensemble $\{f(x);\ x\ \in]a,b]\}$ est majoré, on vérifie que $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l = \sup\{f(x);\ x\ \in]a,b]\}$ existe, en prolongeant f par $f(a) = l$, on n'a plus une intégrale impropre. Par contre, si f n'est pas majorée, on a $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$. L'hypothèse f croissante impliquerait de même $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ en cas d'intégrale impropre.

On suppose donc f décroissante, et $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$. Il existe donc $c \in]a,b]$ tel que $f(x) \geqslant 0$ sur $]a,x]$, puis, (convergence de l'intégrale impropre) il existe d associé à $\varepsilon > 0$, avec $a < d \leqslant c \leqslant b$, tel que $a < X < X' \leqslant d \Rightarrow 0 \leqslant \displaystyle\int_X^{X'} f \leqslant \varepsilon$.

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$ et $S(n) = \displaystyle\int_a^b f - \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$.

Il existe $p \leqslant n$ tel que $a + p\dfrac{b-a}{n} \leqslant d < a + (p+1)\dfrac{b-a}{n}$. Dans $S(n)$ on coupe l'intégrale en d, et dans la somme, on coupe au rang p, en fractionnant en d l'intervalle qui le contient. On a donc $S(n) = T(n) + U(n)$ avec :

$$T(n) = \int_a^d f - \left(d - (a + p\frac{b-a}{n})\right) f\left(a + (p+1)\frac{b-a}{n}\right) - \sum_{k=1}^{p} \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

et

$$U(n) = \int_d^b f - \left(a + (p+1)\frac{b-a}{n} - d\right) f\left(a + (p+1)\frac{b-a}{n}\right) - \sum_{k=p+2}^{n} \frac{b-a}{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Comme f est intégrable sur le segment $[d,b]$, (d est fixé), on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U(n) = 0$ puisque $U(n)$ est la différence entre $\displaystyle\int_d^b f$ et une somme de Riemann pour une subdivision de pas $\dfrac{b-a}{n}$ tendant vers 0, (Théorème 8.44).

Donc au même $\varepsilon > 0$, (qui a servi pour fixer d) on associe n_0, $\forall n \geqslant n_0$, $|U(n)| \leqslant \varepsilon$.

Quand à $T(n)$, vu les hypothèses de décroissance de f, et de signe, on retranche à $\int_a^d f$ une quantité positive, mais $f(t) \geqslant f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ sur $\left[a + (k-1)\frac{b-a}{n},\ a + k\frac{b-a}{n}\right]$

donc $\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}} f - \left(\frac{b-a}{n}\right) f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \geqslant 0$ si $k \geqslant 1$, et on a

de même : $\int_{a+p\frac{b-a}{n}}^{d} f - \left[d - (a + p\frac{b-a}{n})\right] f(a + (p+1)\frac{b-a}{n}) \geqslant 0$,

d'où $0 \leqslant T(n) \leqslant \int_0^d f \leqslant \varepsilon$, vu le choix de d, (en faisant tendre X vers a et en prenant $X' = d$ dans $\int_X^{X'} f \leqslant \varepsilon$).

Finalement, il existe n_0, $\forall n \geqslant n_0$, $|S(n)| \leqslant 2\varepsilon$, c'est donc que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f;$$

avec les hypothèses du théorème.

REMARQUE 9.30. — *L'hypothèse f monotone sur $]a, c] \subset]a, b]$ suffit pour conclure.*

Par contre il n'est pas question de subdiviser un intervalle non borné en n parties égales donc l'extension du résultat aux intégrales du type $\int_a^{+\infty} f$ est sans objet.

Il me reste à parler de quelque chose : *la méthode de Laplace* pour la recherche d'équivalents. Il s'agit d'un résultat technique, que je place là car il concerne les intégrales impropres.

THÉORÈME 9.31. — *(Méthode de Laplace). Soient g et h continues de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, h de classe C^2, h' ne changeant de signe qu'en un seul point c de $]a, b[$ où h atteint un maximum. Si $g(c) \neq 0$ et $h''(c) < 0$, et si $\int_a^b |g(x)| e^{h(x)} dx$ existe alors*

$$\int_a^b g(x)e^{t\,h(x)}dx \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi}g(c)e^{t\,h(c)}\sqrt{\frac{2}{-t\,h''(c)}}.$$

Comme vous le voyez, c'est très intuitif!

Comme $h''(c) < 0$, h'' reste localement négative, (continuité) donc h' est localement décroissante, s'annule en c, elle est donc > 0 pour $x < c$; puis < 0 pour $x > c$: la fonction h est croissante pour $x < c$, décroissante ensuite, et lorsque t tend vers $+\infty$, ce maximum de h en c va être primordial.

Comme t va tendre vers $+\infty$, on peut imposer $t > 1$. On a alors :

$$e^{t\,h(x)} = e^{(t-1)h(x)}e^{h(x)} \leqslant e^{(t-1)h(c)}e^{h(x)}$$

car $h(x) \leqslant h(c)$ sur $]a,b[$: n'oublions pas que h' ne s'annule qu'en c. Donc :

$$\left|g(x)e^{t\,h(x)}\right| \leqslant e^{(t-1)h(c)}|g(x)|e^{h(x)}$$

et pour tout $t \geqslant 1$, l'intégrale impropre $F(t) = \displaystyle\int_a^b g(x)e^{t\,h(x)}dx$ est absolument convergente puisque $\displaystyle\int_a^b |g(x)|e^{h(x)}dx$ existe.

En c, on a $h(x) = h(c) + \dfrac{(x-c)^2}{2}h''(c) + o(x-c)^2$, puisque $h'(c) = 0$, soit encore, comme $h''(c) \neq 0$ et $g(c) \neq 0$,

$$\lim_{x\to c}\frac{h(x)-h(c)}{\dfrac{(x-c)^2}{2}h''(c)} = 1 = \lim_{x\to c}\frac{g(x)}{g(c)}.$$

Soit $\lambda \in]0,1[$, $\exists\delta > 0$, $|x-c| \leqslant \delta \Rightarrow 1-\lambda \leqslant \dfrac{g(x)}{g(c)} \leqslant 1+\lambda$

et $1-\lambda \leqslant \dfrac{h(x)-h(c)}{\dfrac{(x-c)^2h''(c)}{2}} \leqslant 1+\lambda.$

On a $g(c) \neq 0$, *supposons par exemple* $g(c) > 0$. Comme $h''(c) < 0$ on a encore, pour x dans $[c-\delta, c+\delta]$, les encadrements
$(1-\lambda)g(c) \leqslant g(x) \leqslant (1+\lambda)g(c)$ et

$$(1+\lambda)(x-c)^2\frac{h''(c)}{2} + h(c) \leqslant h(x) \leqslant (1-\lambda)(x-c)^2\frac{h''(c)}{2} + h(c).$$

On multiplie cette dernière double inégalité par $t > 0$, on passe aux exponentielles, (fonction croissante) et on multiplie ces inégalités entre nombres positifs ici, d'où :

9.32. $$(1-\lambda)g(c)e^{t\,h(c)}e^{(1+\lambda)t(x-c)^2\frac{h''(c)}{2}} \leqslant g(x)e^{t\,h(x)} \leqslant (1+\lambda)g(c)e^{t\,h(c)}e^{(1-\lambda)t(x-c)^2\frac{h''(c)}{2}}$$

valable sur $[c-\delta, c+\delta]$, (δ assez petit pour que $[c-\delta, c+\delta] \subset]a,b[$).

On intègre sur $[c, c+\delta]$, $(1-\lambda)g(c)e^{t\,h(c)}$ ne dépend pas de x, donc on calcule $\displaystyle\int_c^{c+\delta} e^{(1+\lambda)t(x-c)^2\frac{h''(c)}{2}}\,dx$ en posant

$$u = (x-c)\sqrt{-(1+\lambda)\frac{h''(c)}{2}t} \text{ d'où } dx = \frac{du}{\sqrt{-(1+\lambda)\dfrac{h''(c)}{2}t}}.$$

On a :

$$\frac{1-\lambda}{\sqrt{1+\lambda}}\frac{g(c)e^{t\,h(c)}}{\sqrt{-\dfrac{h''(c)}{2}t}}\int_0^{\delta\sqrt{-(1+\lambda)\frac{h''(c)}{2}t}} e^{-u^2}\,du \leqslant \int_c^{c+\delta} g(x)e^{t\,h(x)}\,dx.$$

Or $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_0^{\delta\sqrt{-(1+\lambda)\frac{h''(c)}{2}t}} e^{-u^2}\,du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, ceci pour un λ fixé ; c'est encore

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_0^{\delta\sqrt{-(1+\lambda)\frac{h''(c)}{2}t}} e^{-u^2}\,du}{\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}} = 1$$

donc, avec le même

$$\lambda \in]0,1[, \exists t_0, t \geqslant t_0 \Rightarrow \int_0^{\delta\sqrt{-(1+\lambda)\frac{h''(c)}{2}t}} e^{-u^2}\,du \geqslant (1-\lambda)\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

et on obtient l'inégalité, valable $\forall t \geqslant t_0$:

9.33. $$\frac{(1-\lambda)^2}{\sqrt{1+\lambda}} \frac{g(c)e^{t\,h(c)}}{\sqrt{-\frac{h''(c)}{2}t}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \leqslant \int_c^{c+\delta} g(x)e^{t\,h(x)}dx.$$

Puis dans l'intégrale majorante, on pose $v = (x-c)\sqrt{-(1-\lambda)\frac{h''(c)}{2}t}$, ce qui conduit au majorant

$$\frac{1+\lambda}{\sqrt{1-\lambda}} \frac{g(c)e^{t\,h(c)}}{\sqrt{-\frac{h''(c)}{2}t}} \int_o^{\delta\sqrt{-(1-\lambda)\frac{h''(c)}{2}t}} e^{-u^2}du,$$

majorant dans lequel l'intégrale tend vers

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

quand t tend vers $+\infty$, donc cette intégrale est rendue inférieure à $(1+\lambda)\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ pour t assez grand, et on obtient finalement, pour λ dans $]0,1[$, un $\delta > 0$ et un $t_1 > 0$ tels que $t \geqslant t_1 \Rightarrow$

9.34. $$\frac{(1-\lambda)^2}{\sqrt{1+\lambda}}\sqrt{\frac{\pi}{-2t\,h''(c)}}g(c)e^{t\,h(c)} \leqslant \int_c^{c+\delta} g(x)e^{t\,h(x)}dx \leqslant \frac{(1+\lambda)^2}{\sqrt{1-\lambda}}\sqrt{\frac{\pi}{-2t\,h''(c)}}g(c)e^{t\,h(c)}.$$

Passons à $[c+\delta, b[$

Comme h décroît sur $[c,b[$, on a $h(x) \leqslant h(c+\delta) < h(c)$.

Soit $\mu = h(c) - h(c+\delta)$, on a $h(x) - h(c) \leqslant h(c+\delta) - h(c) = -\mu$ soit $h(x) \leqslant h(c) - \mu$. Comme $t\,h(x) = (t-1)h(x) + h(x)$, on aura, toujours pour $t > 1, t\,h(x) \leqslant (t-1)(h(c)-\mu) + h(x)$ et $e^{t\,h(x)} \leqslant e^{h(x)}e^{(t-1)h(c)}e^{-(t-1)\mu}$ donc

$$|g(x)e^{t\,h(x)}| \leqslant |g(x)|e^{h(x)}e^{t\,h(c)}e^{-h(c)-(t-1)\mu},$$

d'où

9.35. $$\left|\int_{c+\delta}^{b} g(x)e^{t\,h(x)}dx\right| \leqslant \left(\int_{c+\delta}^{b} |g(x)|e^{h(x)}dx\right) \cdot e^{t\,h(c)}e^{-h(c)}e^{-(t-1)\mu}.$$

Comme pour $\mu > 0$, $e^{-(t-1)\mu}$ est infiniment petit par rapport à $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, cette majoration de $\left|\displaystyle\int_{c+\delta}^{b} g(x)e^{t\,h(x)}dx\right|$ en $O\left(e^{t\,h(c)}e^{-(t-1)\mu}\right)$ montre que cette intégrale est négligeable par rapport à $\displaystyle\int_{c}^{c+\delta} g(x)e^{t\,h(x)}$ qui elle s'encadre par des fonctions en $e^{t\,h(c)}\dfrac{1}{\sqrt{t}}\times$ constante.

Attention, on garde $e^{t\,h(c)}$ en facteur, on ne compare que le reste dans les deux majorants obtenus en 9.34 et 9.35.

Comme pour λ arbitrairement proche de 1, on a $\dfrac{(1-\lambda)^2}{\sqrt{1+\lambda}}$ et $\dfrac{(1+\lambda)^2}{\sqrt{1-\lambda}}$ proches de 1, on a finalement

$$\int_{c}^{b} g(x)e^{t\,h(x)}dx \underset{t\to+\infty}{\simeq} \sqrt{\frac{\pi}{-2t\,h''(c)}}\,g(c)e^{t\,h(c)}.$$

La même étude faite sur $]a, c-\delta]$ et $[c-\delta, c]$ conduit au même équivalent, et finalement

$$\int_{a}^{b} g(x)e^{t\,h(x)}dx \text{ est équivalent à } g(c)e^{t\,h(c)}\sqrt{\frac{2\pi}{-th''(c)}}$$

lorsque t tend vers $+\infty$. ■

REMARQUE 9.36. — Les bornes a et b peuvent fort bien être $-\infty$ et $+\infty$: elles n'ont fait que de la figuration dans ce calcul, puisque la présence de la fonction $|g(x)|e^{h(x)}$ d'intégrale impropre convergente sur $]a, b[$ a permis de les effacer.

Avec ce résultat très... technique, j'achève cette étude des intégrales impropres. Il resterait à parler des fonctions définies par des intégrales, mais je préfère le faire dans le cadre des fonctions réglées, après l'étude des espaces fonctionnels. A bientôt.

EXERCICES

1. Soit $y(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^5}}$. Montrer que $y(1)$ existe et étudier la série des $y(1) - y(1 - \dfrac{1}{n^\alpha})$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f'')^2$ convergent.
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'^2$ converge.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = l'$.
Existence et calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+1) - f(x-1))\, dx$.

4. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que f'' soit bornée, et que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)| dx$ existe pour tout t réel, et soit $o(t)$ au voisinage de 0. Que dire de f ?

5. Soit f continue, 1 périodique, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt$ converge, limite lorsque λ tend vers 0^+.

6. Soit $a \in]0,1[, x_0 > 1$, $f \in \mathcal{C}^0([x_0, +\infty[, \mathbb{R}^+)$ On suppose que, pour tout $x \geqslant x_0$, on a $2xf(x^2) \leqslant af(x)$.
Montrer que $\displaystyle\int_{x_0}^{+\infty} f(t) dt$ converge.

7. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f^2(x) dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'^2(x) dx$ convergent. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(x))^2\, dx$ converge et que $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2\right)^2 \leqslant 4 \displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f^2(x) dx \int_0^{+\infty} f'^2(x) dx$.
Quand a-t-on égalité ?

8. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\left(-t^2-\frac{1}{t^2}\right)}\,dt.$

9. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}dt,\ \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}dt,\ \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}dt.$

10. Nature, selon α, et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\frac{dx}{x-\alpha}.$

11. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x\,dx}{e^{-x}+e^{2x}|\sin x|}.$

12. Existence de $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{Log}(1+x\cos t)dt.$

13. Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+, M \in \mathbb{R}_+^*$ pour lesquels, pour tout x de $[x_0,+\infty[$ $\displaystyle\int_x^{x+1} x\left(f''\right)^2 \leqslant M$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$

14. Soit f uniformément continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge. Montrer que f a une limite nulle en $+\infty$.

15. Convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2|\sin t|)^{3/2}}.$

16. Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha}dt$, $(\alpha>0)$. Calcul pour $\alpha = 1, 2, 3$.

17. Soit f positive décroissante telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Montrer que $\displaystyle\lim_{h\to0^+} \sum_{n=0}^{\infty} hf(nh) = \int_0^{+\infty} f.$

18. Convergence et calcul de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\operatorname{Arctg}(x+a) - \operatorname{Arctg} x)dx.$

19. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que $\int_0^{+\infty} x^2 f'^2(x)dx$ converge ainsi que $\int_0^{+\infty} f^2$. Montrer que $\lim_{x \to +\infty} x f^2(x) = 0$.

20. Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(x + \frac{1}{x})dx$.

SOLUTIONS

1. Soit $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^5}}$, elle est définie continue sur $]-\infty, 1[$ équivalente à $\frac{1}{\sqrt{5}(1-t)^{1/2}}$ si t tend vers 1^-, donc y est définie sur $]-\infty, 1[$, mais aussi en 1, car l'intégrale impropre $y(1) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^5}}$ converge.

Pour $\alpha > 0$, soit $u_n = \int_{1-\frac{1}{n^\alpha}}^1 f(t)dt$ avec $f(t)$ équivalent à $\frac{1}{\sqrt{5}(1-t)^{1/2}}$,

on a $u_n \simeq \frac{1}{\sqrt{5}} \int_{1-\frac{1}{n^\alpha}}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[-2(1-t)^{1/2}\right]_{1-\frac{1}{n^\alpha}}^1$

soit $u_n \sim \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$: la série des u_n converge si et seulement si $\alpha > 2$.

Si $\alpha = 0$, $u_n = y(1) - y(0) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^5}}$ ne tend pas vers 0, et si $\alpha > 0$, comme $\lim_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n^\alpha} = -\infty$, u_n devient $\geqslant \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^5}}$ donc ne tend pas vers 0, et la série diverge. On a donc convergence si seulement si $\alpha > 2$.

2. Il y a des carrés : Cauchy. Il y a des dérivées : intégration par parties. On secoue... d'où :

$$\boxed{1} \quad \int_0^x f'^2(t)dt = f(x)f'(x) - f(0)f'(0) - \int_0^x f(t)f''(t)dt.$$

$$\text{Or} \quad \left(\int_0^x |f(t)f''(t)|dt\right)^2 \leqslant \int_0^x f^2 \int_0^x f''^2 \leqslant \int_0^{+\infty} f^2 \int_0^{+\infty} f''^2$$

d'où la convergence absolue de l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f f''$.

La relation $\boxed{1}$ donne alors : $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'^2$ diverge $\Leftrightarrow \displaystyle\lim_{x\to+\infty} f\,f' = +\infty$, en particulier $2f\,f'$, dérivée de f^2 devient > 0 pour $x \geqslant$ un x_0, donc f^2 devient croissante sur $[x_0, +\infty[$, mais la convergence de $\displaystyle\int^{+\infty} f^2$ implique alors $f^2 = 0$ sur $[x_0, +\infty[$, (sinon $f^2 \geqslant$ constante > 0), mais alors $2f\,f' = 0$ ne tend plus vers l'infini. C'est donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'^2$ converge.

3. Soit $\varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \geqslant A,\ l - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant l + \varepsilon$
et $\forall x \leqslant -A, l' - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant l' + \varepsilon$.
On prend $X \leqslant -A - 1$ et $Y \geqslant A + 1$, alors

$$\begin{aligned}\int_X^Y (f(x+1) - f(x-1))\,dx &= \int_{X+1}^{Y+1} f(t)dt - \int_{X-1}^{Y-1} f(t)dt\\ &= \int_{Y-1}^{Y+1} f(t)dt - \int_{X-1}^{X+1} f(t)dt\\ &= \int_{Y-1}^{Y+1} (f(t) - l + l)dt\\ &\quad - \int_{X-1}^{X+1} \left(f(t) - l' + l'\right) dt\end{aligned}$$

d'où $$\left|\int_X^Y (f(x+1) - f(x-1))\,dx - \left(2l - 2l'\right)\right| \leqslant \int_{Y-1}^{Y+1} \varepsilon + \int_{X-1}^{X+1} \varepsilon = 4\varepsilon :$$

on a $\displaystyle\lim_{\substack{X\to-\infty\\ Y\to+\infty}} \int_X^Y (f(x+1) - f(x-1))\,dx = 2(l - l')$: d'où la convergence de l'intégrale impropre et sa valeur.

4. Pour $t \neq 0, \exists\theta(t) \in]0, 1[$ tel que

$$f(x+t) - f(x) = tf'(x) + \frac{t^2}{2} f''(x + t\theta(t)),$$

d'où l'encadrement

$$tf'(x) - \frac{t^2}{2}||f''||_\infty \leqslant f(x+t) - f(x) \leqslant tf'(x) + \frac{t^2}{2}||f''||_\infty.$$

Posons $\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)| dx$, intégrale qui converge. On a pour $a < b$:

$$\int_a^b \left(tf'(x) - \frac{t^2}{2} ||f''||_\infty \right) dx$$
$$\leqslant \int_a^b (f(x+t) - f(x))\, dx \leqslant \int_a^b |f(x+t) - f(x)| dx$$

$$\text{soit} \quad t\,(f(b) - f(a)) - (b-a)||f''||_\infty \frac{t^2}{2}$$
$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+t) - f(x)| dx = \varphi(t)$$

d'où pour $t > 0$, $f(b) - f(a) \leqslant (b-a)||f''||_\infty \frac{t}{2} + \frac{\varphi(t)}{t}$.
Comme $\varphi(t) = o(t)$ si t tend vers 0, (par hypothèse), le majorant tend vers 0 si t vers 0^+, d'où $f(b) - f(a) \leqslant 0$, pour $a < b$.
Mais $-f$ est aussi de classe C^2, $(-f)''$ est bornée, et comme

$$| - f(x+t) - (-f)(x)| = |f(x+t) - f(x)|,$$

la dernière hypothèse est vérifiée par $-f$: on a donc $-f(b) - (-f(a)) \leqslant 0$ pour $a < b$ d'où en fait $f(b) = f(a)$ pour $a < b$, soit f constante.

5. Une fonction continue périodique est bornée sur $\mathbb{R}$, ($||f||_\infty$ est le sup des $|f(x)|$; $x \in [0,1]$), comme $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 e^{-\lambda t} ||f||_\infty = 0$ pour $\lambda > 0$, l'intégrale impropre converge.
En particulier

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t)dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n e^{-\lambda t} f(t)dt$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} e^{-\lambda t} f(t)dt$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^1 e^{-\lambda(t+k)} f(t)dt,$$

car f est 1 périodique. On a donc encore

$$F(\lambda) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\lambda k}\right)\int_0^1 e^{-\lambda t} f(t)dt$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1-e^{-\lambda n}}{1-e^{-\lambda}}\int_0^1 e^{-\lambda t} f(t)dt, \text{ soit, } (e^{-\lambda}<1)$$
$$F(\lambda) = \frac{1}{1-e^{-\lambda}}\int_0^1 e^{-\lambda s} f(s)ds.$$

Or, (Taylor Lagrange à l'ordre 2 entre 0 et $-\lambda s$, pour la fonction exponentielle), $\exists\theta\in]0,1[$, θ fonction de λ et de s, tel que

$$e^{-\lambda s} = 1-\lambda s+\frac{\lambda^2 s^2}{2}e^{-\theta\lambda s}$$

d'où

$$F(\lambda) = \frac{1}{\lambda+o(\lambda)}\left(\int_0^1 f(s)ds - \lambda\int_0^1 sf(s)ds + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^1 s^2 e^{-\theta\lambda s} f(s)ds\right)$$

avec $0 < e^{-\theta\lambda s} \leqslant 1$ puisque $-\theta\lambda s \leqslant 0$.

Si $\int_0^1 f(s)ds \neq 0$, $F(\lambda) \underset{\lambda\to 0+}{\simeq} \dfrac{\int_0^1 f(s)ds}{\lambda}$

donc $\lim\limits_{\lambda\to 0+} F(\lambda) = \pm\infty$ (+ ou −, signe de $\int_0^1 f$);

si $\int_0^1 f(s)ds = 0$, alors $\lim\limits_{\lambda\to 0^t} F(\lambda) = -\int_0^1 sf(s)ds$; et ce parce que

$$\left|\int_0^1 s^2 e^{-\theta\lambda s} f(s)ds\right| \leqslant \int_0^1 s^2 ||f||_\infty ds = \frac{||f||_\infty}{3}.$$

6. Sur $[x_0, x_0^2]$, ($x_0^2 > x_0$ car $x_0 > 1$) on a $2tf(t^2) \leqslant af(t)$ donc

$$\int_{x_0}^{x_0^2} 2tf(t^2)dt \leqslant a\int_{x_0}^{x_0^2} f(t)dt.$$

On calcule le 1$^{\text{er}}$ membre avec le changement de variable $t^2 = s$, d'où

$$0 \leqslant \int_{x_0^2}^{x_0^{(2^2)}} f(s)ds \leqslant a\int_{x_0}^{x_0^2} f(t)dt.$$

Par récurrence on prouve alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leqslant u_n = \int_{x_0^{(2^n)}}^{x_0^{(2^{n+1})}} f(s)ds \leqslant a^n \int_{x_0}^{x_0^2} f(t)dt,$$

car c'est vrai si $n = 1$, et si c'est vrai pour n, comme

$$\left[x_0^{(2^n)}, x_0^{(2^{n+1})}\right] \subset [x_0, +\infty[$$

sur lequel $2tf(t^2) \leqslant af(t)$, on a

$$\int_{x_0^{(2^n)}}^{x_0^{(2^{n+1})}} 2tf(t^2)dt \leqslant a \int_{x_0^{(2^n)}}^{x_0^{(2^{n+1})}} f(t)dt \leqslant a \cdot a^n \int_{x_0}^{x_0^2} f(t)dt.$$

Avec $t^2 = s$, le 1er membre vaut $\displaystyle\int_{x_0^{(2^{n+1})}}^{x_0^{(2^{n+2})}} f(s)ds$.

Comme $a \in]0, 1[$ la série des $a^n \left(\displaystyle\int_{x_0}^{x_0^2} f\right)$ converge, donc celle des $u_n = \displaystyle\int_{x_0^{(2^n)}}^{x_0^{(2^n+1)}} f$ converge aussi et la somme partielle $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \int_{x_0^2}^{x_0^{(2^{n+1})}} f$ admet une limite si n tend vers l'infini.

Comme f est à valeurs positives, $F : x \rightsquigarrow \displaystyle\int_{x_0^2}^{x} f$ est croissante, on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} x_0^{2^{n+1}} = +\infty, (x_0 > 1)$, l'existence de $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} F\left(x_0^{(2^{n+1})}\right)$ implique celle de $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x)$, d'où le résultat.

7. Pour $0 \leqslant x \leqslant y$ on a

$$\left(\int_x^y tf(t)f'(t)dt\right)^2 \leqslant \left(\int_x^y t^2 f^2(t)dt\right)\left(\int_x^y f'^2(t)dt\right)$$

par Cauchy Schwarz, donc, comme les intégrales des fonctions $t \rightsquigarrow t^2 f^2(t)$ et $t \rightsquigarrow f'^2(t)$ convergent, on peut rendre le majorant arbitrairement petit pour $y \geqslant x$ assez grand, d'où la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)dt$, (par critère de Cauchy).

Or $\displaystyle\int_0^x tf(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}xf^2(x) - \frac{1}{2}\int_0^x f^2(t)dt,$

(on intègre par parties avec $u = t$ et $dv = f(t)f'(t)dt$.

On a alors

$$xf^2(x) = \int_0^x f^2(t)dt + 2\int_0^x tf(t)f'(t)dt,$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xf^2(x)$ existe dans $\mathbb{R}\, U\{+\infty\}$, (car $x \rightsquigarrow \displaystyle\int_0^x f^2$ est croissante donc tend vers l_1 ou $+\infty$, alors que la $2^{\text{ième}}$ intégrale converge).

Mais $\lim\limits_{x\to+\infty} xf^2(x) = l$ avec $l = +\infty$ ou $l > 0$ implique avec $l' \in]0, l[$, l'existence de x_0 tel que $x \geqslant x_0 \Rightarrow xf^2(x) \geqslant l'$ d'où $x^2f^2(x) \geqslant l'x$ or $\displaystyle\int^{+\infty} x^2f^2(x)dx$ converge : c'est absurde.

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} xf^2(x) = 0$, mais alors

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f^2 = -2\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)dt :$$

on a bien convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2$.

Puis l'inégalité de Cauchy Schwarz :

$$\left(\int_0^x tf(t)f'(t)dt\right)^2 \leqslant \left(\int_0^x t^2f^2(t)dt\right)\left(\int_0^x f'^2(t)dt\right)$$

donne, à la limite, (tout converge)

$$\left(\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)dt\right)^2 \leqslant \left(\int_0^{+\infty} t^2f^2(t)dt\right)\left(\int_0^{+\infty} f'^2(t)dt\right)$$

et en multipliant par 4 on a bien, vu la valeur de $\displaystyle\left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^2$

$$\left(\int_0^{+\infty} f^2\right)^2 \leqslant 4\left(\int_0^{+\infty} t^2f^2(t)dt\right)\left(\int_0^{+\infty} f'^2\right).$$

S'il y a égalité, le trinôme

$$\lambda^2\int_0^{+\infty} t^2f^2(t)dt + 2\lambda\int_0^{+\infty} tf(t)f'(t)dt + \int_0^{+\infty} f'^2$$

admet une racine double λ_0, c'est encore qu'il existe λ_0 tel que

$$\int_0^{+\infty} \left(\lambda_0 t f(t) + f'(t)\right)^2 dt = 0$$

d'où, (fonctions continue) $\forall t \geqslant 0$, $\lambda_0 t f(t) + f'(t) = 0$, équation différentielle linéaire qui sur $]0, +\infty[$ admet un espace de solutions de dimension 1, données par $f(t) = \mu e^{-\lambda_0 \frac{t^2}{2}}$, avec $\lambda_0 > 0$, (pour que $\displaystyle\int^2 f^2$ converge).

Or on vérifie que pour tout $\alpha < 0$, (ici $\alpha = -\dfrac{\lambda_0}{2}$) la fonction $t \rightsquigarrow f(t) = \mu e^{\alpha t^2}$, ($\mu$ quelconque) est telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 f^2$ converge, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f'^2$ aussi et que l'égalité est vérifiée : faire une intégration par parties dans $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{2\alpha t^2} dt$ en posant $du = te^{2\alpha t^2} dt$.

8. En $+\infty$, $f(t) = e^{-t^2 - \frac{1}{t^2}} \simeq e^{-t^2}$ et $t^2 f(t)$ tend vers 0 donc l'intégrale converge, en 0, $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} f(t) = 0$, pas de problème.

Le passage de t en $\dfrac{1}{t}$ incite à couper en 1.

Dans $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2 - \frac{1}{t^2}} dt$, en posant $u = \dfrac{1}{t}$

on a $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2 - \frac{1}{t^2}} dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u^2} e^{-u^2 - \frac{1}{u^2}} du$

donc $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f = \int_1^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) e^{-t^2 - \frac{1}{t^2}} dt.$

Si on pose $v = t - \dfrac{1}{t}$, $dv = \left(1 + \dfrac{1}{t^2}\right) dt$, donc $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2 - v^2} dv$

soit $I = \dfrac{1}{e^2} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2e^2}$, en considérant $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ comme classiquement connu.

9. Soit $f(t) = \dfrac{\ln t}{1 - t}$. En 0, $\displaystyle\lim_{t \to 0^+} \sqrt{t} f(t) = 0$, l'intégrale impropre converge en 0; puis en 1, $\ln t = \ln(t - 1 + 1)$ donc $f(t) = \dfrac{\ln(1 - (1 - t))}{1 - t} \sim -\dfrac{1 - t}{1 - t}$ donc on prolonge f par continuité, avec $\displaystyle\lim_{t \to 1^-} f(t) = -1$, d'où la convergence de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1 - t} dt.$

Pour $t \in [0,1[$, $\dfrac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n + \dfrac{t^{n+1}}{1-t}$

donc, $\forall n \in \mathbb{N}, I = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 t^k \ln t dt + \int_0^1 t^n \cdot \dfrac{t \ln t}{1-t} dt,$

toutes les intégrales impropres intervenant étant convergentes.

La fonction $t \rightsquigarrow g(t) = \dfrac{t\ln t}{1-t}$ est continue sur $]0,1[$, prolongeable par continuité sur $[0,1]$ car $\lim_{t\to 0^+} g(t) = 0$ et $\lim_{t \to 1^-} g(t) = -1$, donc g est bornée et

$$\left| \int_0^1 g(t) t^n dt \right| \leqslant \int_0^1 ||g||_\infty t^n dt = \frac{||g||_\infty}{n+1}.$$

Donc la série des $u_k = \int_0^1 t^k \ln t dt$ converge et a pour somme I.

On a, (intégration par parties) $u_k = \left[\dfrac{t^{k+1}}{k+1} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{t^k}{k+1} dt$

d'où $u_k = -\dfrac{1}{(k+1)^2}$ et $I = \sum_{k=0}^{\infty} -\dfrac{1}{(k+1)^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{6}.$

La même démarche pour $J = \int_0^1 \dfrac{\ln t}{1-t^2} dt$ conduit à

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_0^1 t^{2k} \ln t dt \right) = \sum_{k=0}^{\infty} - \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

Or $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2k)^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\mu^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2},$

et comme $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2k)^2} = \dfrac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{24}$

on a $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{3\pi^2}{24}$ d'où $J = \int_0^1 \dfrac{\ln t}{1-t^2} dt = -\dfrac{\pi^2}{8}.$

Enfin $K = \int_0^1 \dfrac{\ln t}{1+t} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{24} - \dfrac{3\pi^2}{24} = -\dfrac{\pi^2}{12}.$

10. Si $\alpha \notin [0,1]$, $f(x) = \left(\dfrac{1-x}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x - \alpha}$ est définie continue sur $]0,1]$, $f(x) \sim -\dfrac{1}{\alpha\sqrt{x}}$ en 0^+ donc l'intégrale, impropre en 0, converge.

Si $\alpha = 0$, $f(x) \sim \dfrac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ en 0. *divergence* ;
si $\alpha = 1$, $f(x) \sim -\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en 0, $f(x) \sim \dfrac{-1}{\sqrt{1-x}}$ en 1 : *convergence* ; *enfin si* $\alpha \in]0,1[$, $f(x) \sim \sqrt{\dfrac{1-\alpha}{\alpha}} \cdot \dfrac{1}{x-\alpha}$ en α : divergence.

Finalement $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \frac{dx}{x-\alpha}$ est *convergente pour* $\alpha \notin [0,1[$.

Le changement de variable $t = \sqrt{\dfrac{1}{x} - 1}$, (soit $x = \dfrac{1}{1+t^2}$) conduit à
$I(\alpha) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)(1-\alpha-\alpha t^2)}$.
On décompose en éléments simples :

$$I(\alpha) = 2\int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{1+t^2} + \frac{1-\alpha}{1-\alpha-\alpha t^2}\right) dt$$

d'où

$$I(\alpha) = -\pi + 2\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2 + \dfrac{\alpha-1}{\alpha}} dt.$$

Si $\alpha < 0$, ou $\alpha > 1$, $\dfrac{\alpha-1}{\alpha} > 0$ donc

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= -\pi + 2\frac{\alpha-1}{\alpha}\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\alpha-1}{\alpha}}}\left[\operatorname{Arctg}\frac{t}{\sqrt{\dfrac{\alpha-1}{\alpha}}}\right]_0^{+\infty} \\ &= -\pi + 2\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\frac{\pi}{2} = \pi\left(\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - 1\right); \end{aligned}$$

alors que $\alpha = 1$ donne

$$I(1) = 2\int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)(-t^2)} = -2\left[\operatorname{Arctg} t\right]_0^{+\infty} = -\pi,$$

(formule valable pour $\alpha = 1$).

Donc $I(\alpha) = \pi\left(\sqrt{\dfrac{\alpha-1}{\alpha}} - 1\right)$, $\forall \alpha \in]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$.

11. La fonction $x \rightsquigarrow f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+e^{3x}|\sin x|}$ est définie continue sur $\mathbb{R}$: le seul problème est en $+\infty$. Comme f est à valeurs positives, la fonction $F : X \rightsquigarrow \displaystyle\int_0^X f$ est croissante donc I converge si et seulement si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\pi} f$ existe.

Or $F(n\pi) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ avec $u_k = \displaystyle\int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{e^{2x}dx}{1+e^{3x}|\sin x|}$

ou encore $u_k = e^{2k\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{e^{2t}dt}{1+e^{3k\pi}e^{3t}\sin t}$.

Pour prouver la convergence de l'intégrale, donc de la série des u_k, on peut essayer de majorer u_k ce qui conduit à minorer le sinus. Or, sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t$: on coupe l'intégrale en $\frac{\pi}{2}$, et dans $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ on pose $t = \pi - s$.
Il vient :

$$u_k = e^{2k\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{2t}dt}{1+e^{3k\pi}e^{3t}\sin t} + e^{2k\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{2\pi}e^{-2s}ds}{1+e^{3k\pi}e^{3\pi}e^{-3s}\sin s}.$$

On a $u_k = v_k + w_k$, v_k et w_k positifs, avec

$$v_k \leqslant e^{2k\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{2\frac{\pi}{2}}dt}{1+\frac{2}{\pi}e^{3k\pi}t} = e^{(2k+1)\pi}\frac{\pi}{2e^{3k\pi}}\left[\mathrm{Log}\,(1+\frac{2}{\pi}e^{3k\pi}t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

soit $v_k \leqslant O\left(\dfrac{k}{e^{k\pi}}\right)$: la série des v_k converge.
De même on a

$$\begin{aligned} w_k &\leqslant e^{2(k+1)\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+e^{3(k+1)\pi}e^{-\frac{3\pi}{2}}\frac{2}{\pi}s}ds \\ &\leqslant e^{2(k+1)\pi}\frac{\pi}{2e^{3(k+1)\pi}e^{-\frac{3\pi}{2}}}\left[\mathrm{Log}\,(1+\frac{2}{\pi}e^{3(k+\frac{1}{2})\pi}s)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

et là encore le majorant est de l'ordre de $\dfrac{k}{e^{k\pi}}$: la série des u_k converge et finalement l'intégrale impropre converge.

12. Si $x = 0$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{Log}\,(1)dt = 0$ existe.

Pour $x \neq 0$, mais avec $|x| < 1$, $\cos t = -\dfrac{1}{x}$ est impossible, donc la fonction $t \rightsquigarrow 1 + x\cos t$, continue, ne s'annule pas sur $[0, \pi]$, elle vaut $1 + x > 0$ en $t = 0$, elle reste supérieure à sa borne inférieure qui, étant atteinte est strictement positive, donc

$$f(x) = \int_0^{\pi} \mathrm{Log}\,(1 + x\cos t)dt \text{ existe sur }]-1, 1[.$$

Pour $x = -1$, $\displaystyle\int_0^{\pi} \mathrm{Log}\,(1 - \cos)dt$ est impropre en 0, mais convergente car $\displaystyle\lim_{t\to 0} \sqrt{t}\mathrm{Log}\,(1 - \cos t) = 0, (1 - \cos t \sim \frac{t^2}{2})$.
De même si $x = 1$ l'intégrale, impropre en π, converge.
Enfin pour $|x| > 1$, $1 + x\cos t$ prend des valeurs < 0 sur $]0, \pi[$, donc $f(x)$ n'existe pas.
Finalement $f(x)$ *existe sur* $[-1, 1]$.
Elle est paire, ($x \rightsquigarrow -x$ et $t \rightsquigarrow \pi - t$ donne $f(-x) = f(x)$).
Elle se calcule sur $]-1, 1[$ car $\varphi : (t, x) \rightsquigarrow \mathrm{Log}\,(1 + x\cos t)$ est continue sur $[-1, 1] \times [-a, a], 0 < a < 1$; $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ existe et est continue sur $[-1, 1] \times [-a, a]$, on peut dériver f et $f'(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos t}{1 + x\cos t}dt$, valable sur $[-a, a]$, $\forall a$ de $]0, 1[$, donc sur $]-1, 1[$. La changement de variable $u = \mathrm{tg}\,\dfrac{t}{2}$, conduit, pour $x \neq 0$ à $f'(x) = \dfrac{\pi}{x} - \dfrac{\pi}{x\sqrt{1 - x^2}}$, (après décomposition d'une fraction rationnelle). Comme $f(0) = 0$, on a

$$f(x) = \pi \int_0^x \frac{\sqrt{1 - t^2} - 1}{t\sqrt{1 - t^2}}dt = -\pi \int_0^x \frac{t\,dt}{(1 + \sqrt{1 - t^2})\sqrt{1 - t^2}}.$$

On pose $t = \sin u$... on intègre... on obtient $f(x) = \pi\mathrm{Log}\,\dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{2}$ sauf erreur.

13. Le $\left(f''\right)^2$ peut venir sous l'intégrale, par application de Cauchy Schwarz à quelque chose ayant f'' en facteur.
On peut penser à Taylor Lagrange à l'ordre 2 entre x et $x + h$, $(h > 0)$, avec reste intégral.

On a $\quad f(x + h) - f(x) - hf'(x) = \displaystyle\int_x^{x+h} (x + h - t)f''(t)dt,$

d'où $\quad |f(x + h) - f(x) - hf'(x)| \leqslant \displaystyle\int_x^{x+h} (x + h - t)|f''(t)|dt,$

car $0 \leqslant x+h-t \leqslant h$ sur $[x, x+h]$. On a donc

$$|f(x+h)-f(x)-hf'(x)| \leqslant h \cdot \left(\int_x^{x+h} 1 \cdot |f''(t)| dt\right)$$

$$\leqslant h\left(\int_x^{x+h} 1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_x^{x+h} (f'')^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Si on impose $0 < h < 1$, on aura

$$|f(x+h)-f(x)-hf'(x)| \leqslant h^{\frac{3}{2}}\sqrt{M} \text{ pour } x \geqslant x_0$$

d'où l'on déduit

$$|f'(x)| \leqslant \sqrt{h}\sqrt{M} + \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$, on fixe $h \in]0,1[$ tel que $\sqrt{h}\sqrt{M} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, on a alors,

$$\forall x \geqslant x_0, |f'(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|$$

et comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, il existera $x_1 \geqslant x_0$, tel que

$$x \geqslant x_1 \Rightarrow \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \text{ (h est fixé)}$$

d'où $\forall x \geqslant x_1,\ |f'(x)| \leqslant \varepsilon$: on a gagné !

14. La négation de $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ est :

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall A > 0,\ \exists u \geqslant A,\ |f(u)| \geqslant \varepsilon_0.$$

Comme f est uniformément continue, à cet ε_0, on associe $\alpha > 0$, tel que,

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, |x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Soit donc un $A > 0$, et $u > A$ tel que $|f(u)| \geqslant \varepsilon_0$, on aura

$$\left|\int_u^{u+\alpha} f(t)dt\right| = \left|\int_u^{u+\alpha} (f(u)+f(t)-f(u))\, dt\right|$$

$$= \left|\int_u^{u+\alpha} f(u)dt + \int_u^{u+\alpha} (f(t)-f(u))\, dt\right|$$

$$\geqslant \left||\alpha f(u)| - \left|\int_u^{u+\alpha} (f(t)-f(u))\, dt\right|\right|$$

$$\geqslant |\alpha f(u)| - \left|\int_u^{u+\alpha} (f(t)-f(u))\, dt\right|$$

avec $\left|\int_u^{u+\alpha} (f(t) - f(u))\, dt\right| \leqslant \int_u^{u+\alpha} |f(t) - f(u)| dt \leqslant \alpha\frac{\varepsilon_0}{2}$

et $|f(u)| \geqslant \varepsilon_0$, il vient, $\exists \frac{\alpha\varepsilon_0}{2} > 0, \forall A > 0, \exists u \geqslant A, \exists u' = u + \alpha > A$,

tel que $\left|\int_u^{u+\alpha} f(t)dt\right| \geqslant \alpha\frac{\varepsilon_0}{2}$: l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ divergerait (Cauchy nié).

C'est absurde. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

15. La fonction $f : t \rightsquigarrow \dfrac{1}{(1 + t^2|\sin t|)^{\frac{3}{2}}}$ est positive continue sur $[0, +\infty[$ donc par croissance de $X \rightsquigarrow F(X) = \displaystyle\int_0^X f(t)dt$, on aura convergence de l'intégrale si et seulement si $\lim\limits_{n \to +\infty} F(n\pi + \frac{\pi}{2})$ existe, soit encore si la série des

$$u_k = \int_{k\pi - \frac{\pi}{2}}^{k\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(1 + t^2|\sin t|)^{\frac{3}{2}}}$$

converge, $(k \geqslant 1)$.

Le changement de variable $t = k\pi + s$ conduit à

$$u_k = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{ds}{(1 + (k\pi + s)^2|\sin s|)^{\frac{3}{2}}},$$

avec un problème pour s proche de 0. Posons $\theta_k = \operatorname{Arcsin} \dfrac{1}{(k\pi)^\alpha}$, $(\alpha > 0$ sera fixé après).

Si $\theta_k \leqslant |s| \leqslant \frac{\pi}{2}$, $|\sin s| \geqslant \sin \theta_k = \dfrac{1}{(k\pi)^\alpha}$ donc

$$\frac{1}{(1 + (k\pi + s)^2|\sin s|)^{\frac{3}{2}}} \leqslant \frac{1}{\left(1 + (k\pi - \frac{\pi}{2})^2 \frac{1}{(k\pi)^\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}};$$

alors que pour $|s| \leqslant \theta_k$ on utilise le minorant

$$(1 + (k\pi + s)^2|\sin s| \geqslant 1 \text{ d'où } \frac{1}{(1 + (k\pi + s)^2|\sin s|)^{\frac{3}{2}}} \leqslant 1.$$

En intégrant ces majorants sur les intervalles adéquats, on a

$$u_k \leqslant \pi\frac{1}{(1 + (k\pi - \frac{\pi}{2})^2(k\pi)^{-\alpha})^{\frac{3}{2}}} + 2 \operatorname{Arcsin} \frac{1}{(k\pi)^\alpha}.$$

Si $\alpha > 1$, la série des $\operatorname{Arcsin} \dfrac{1}{(k\pi)^\alpha}$ converge, et l'autre terme est $O\left(\dfrac{1}{k^{(2-\alpha)\frac{3}{2}}}\right)$: il convergera si $(2-\alpha)\dfrac{3}{2} > 1$ soit si $2-\alpha > \dfrac{2}{3}$, ou $\alpha < \dfrac{4}{3}$. Comme on peut choisir $\alpha \in]1, \dfrac{4}{3}[$ il y a finalement convergence.

16. La fonction $t \rightsquigarrow f(t) = \dfrac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha}$ est prolongeable par continuité en 0, (avec $f(0) = 0$). Vers $+\infty$, elle devient positive, équivalente à $\dfrac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} = g(t)$, d'intégrale convergente si et seulement si $2\alpha - 1 > 1$, (avec $2\alpha - 1 = 1 + 2a$, $a > 0$ on a $g(t) = \dfrac{1}{t^{1+a}} \cdot \dfrac{\ln t}{t^a}$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln t}{t^a} = 0$ alors que $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{dt}{t^{1+a}}$ converge; et pour $2\alpha - 1 < 1$, on pose $2\alpha - 1 = 1 - 2a$, $g(t) = \dfrac{1}{t^{1-a}} t^a \ln t$ avec $\lim\limits_{t\to+\infty} t^a \ln t = +\infty$ et $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{dt}{t^{1-a}}$ qui diverge). Donc convergence si et seulement si $\alpha > 1$.

Pour $\alpha = 1$, pas de calcul, car $f(t)$ est équivalente à $\dfrac{\ln t}{t}$ qui admet $\dfrac{1}{2}(\ln t)^2$ pour primitive : il y a divergence en $+\infty$.
Si $\alpha = 2$, avec $u = \dfrac{1}{t}$,

$$I = \int_{+\infty}^{0} \frac{1(-\ln u)(-du)}{u\, u^2(1+\frac{1}{u^2})^2} \text{ soit } I = -\int_0^{+\infty} \frac{u^4 \ln u}{u^3\,(1+u^2)^2} du = -I,$$

donc $2I = 0$ et $I = 0$.
Si $\alpha = 3$, $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t\, dt}{(1+t^2)^3}$. On pose $u = t^2$, $du = 2t\, dt$ et $\ln t = \dfrac{1}{2}\ln u$ donc $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln u}{4(1+u)^3} du$; par parties c'est

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\varepsilon\to0} \left(\left[-\frac{\ln u}{8(1+u)^2} \right]_\varepsilon^\infty + \frac{1}{8} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{du}{u(1+u)^2} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon\to0^+} \left[\frac{\ln \varepsilon}{8(1+\varepsilon)^2} + \frac{1}{8} \int_\varepsilon^{+\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{(1+u)^2} - \frac{1}{1+u} \right) du \right] \\ &= \lim_{\varepsilon\to0^+} \frac{1}{8} \left(\frac{\ln \varepsilon}{(1+\varepsilon)^2} - \frac{1}{1+\varepsilon} + \ln \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

car $\lim\limits_{u \to +\infty} \ln \dfrac{u}{1+u} = 0.$

C'est $I = \lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \dfrac{1}{8} \left[(\ln \varepsilon) \left(\dfrac{1}{(1+\varepsilon)^2} - 1 \right) - \dfrac{1}{1+\varepsilon} + \ln(1+\varepsilon) \right] = -\dfrac{1}{8}$

car $\dfrac{1}{(1+\varepsilon)^2} - 1 = \dfrac{-2\varepsilon - \varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2} \simeq -2\varepsilon$. Donc $I = -\dfrac{1}{8}$.

17. Comme f décroît, pour $n \geqslant 1$, on a $f(n\,h) \leqslant f(t) \leqslant f((n-1)h)$ sur $[(n-1)h, n\,h]$, ce qui s'intègre et donne

$$h\,f(n\,h) \leqslant \int_{(n-1)h}^{n\,h} f \leqslant h\,f((n-1)h)$$

d'où l'on déduit l'encadrement

$$\int_{n\,h}^{n\,h+h} f \leqslant h\,f(n\,h) \leqslant \int_{(n-1)h}^{n\,h} f,$$

qui conduit en sommant à

$$\int_0^{(N+1)h} f \leqslant \sum_{n=0}^{N} h\,f(n\,h) \leqslant \int_0^{N\,h} f + h\,f(0) \leqslant h\,f(0) + \int_0^{+\infty} f.$$

La série de terme général positif $h\,f(n\,h)$ est donc convergente (suite des sommes partielles majorée) et on a, pour sa somme, $S(h)$, l'encadrement

$$\int_0^{+\infty} f \leqslant S(h) \leqslant \int_0^{+\infty} f + h\,f(0)$$

d'où $0 \leqslant S(h) - \displaystyle\int_0^{+\infty} f \leqslant h\,f(0)$, et la conclusion

$$\lim_{h \to 0+} \left(\sum_{n=0}^{\infty} h\,h(n\,h) \right) = \int_0^{+\infty} f.$$

18. On sait que $\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ sur $]0, +\infty[$ et $-\dfrac{\pi}{2}$ sur $]-\infty, 0[$, (dériver $f(x) = \operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} \dfrac{1}{x}$, on a $f' = 0$ sur $\mathbb{R}^*$ d'où f constante sur chaque composante connexe et calculer en 1 ou -1).

Donc vers $+\infty$, $g(x) = \text{Arctg}\,(x+a) - \text{Arctg}\,x = \text{Artg}\,\dfrac{1}{x} - \text{Artg}\,\dfrac{1}{x+a}$ admet un développement de tout ordre en $\dfrac{1}{x}$, avec

$$g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+a} + 0\left(\frac{1}{x^3}\right)$$
$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x}\frac{1}{(1+\frac{a}{x})} + 0\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{a}{x^2} + 0\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

donc l'intégrale converge absolument en $+\infty$. On procède de même en $-\infty$.
Pour le calcul :

$$I = \lim_{X\to+\infty}\left(\int_{-X}^{X} \text{Arctg}\,(x+a)dx - \int_{-X}^{X} \text{Arctg}\,x\,dx\right).$$

Le changement de variable $x + a = s$ dans la première intégrale conduit à

$$I = \lim_{X\to+\infty}\left(\int_{-X+a}^{X+a} \text{Arctg}\,s\,ds - \int_{-X}^{X} \text{Arctg}\,s\,ds\right)$$
$$= \lim_{X\to+\infty}\left(\int_{-X+a}^{-X} \text{Arctg}\,s\,ds + \int_{X}^{X+a} \text{Arctg}\,sds\right)$$

Or $\displaystyle\int_{-X+a}^{-X} \text{Arctg}\,s\,ds = \int_{X-a}^{X} \text{Arctg}\,u\,du$, $(u = -s)$, d'où

$$I = \lim_{X\to+\infty}\int_{X-a}^{X+a} \text{Arctg}\,s\,ds = \lim_{X\to+\infty}\int_{X-a}^{X+a} (\text{Arctg}\,s - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})ds.$$

Or $\forall\varepsilon > 0,\ \exists X_0 > 0,\ \forall s \geqslant X_0 - a,\ |\text{Artg}\,s - \dfrac{\pi}{2}| \leqslant \varepsilon,$

d'où $\displaystyle\left|\int_{X-a}^{X+a} \text{Arctg}\,s\,ds - 2a\frac{\pi}{2}\right| \leqslant \int_{X-a}^{X+a} \varepsilon ds = 2a\varepsilon$, pour $X \geqslant X_0$.
On a donc $I = a\pi$.

19. Les applications $x \rightsquigarrow xf(x)f'(x)$ et $x \rightsquigarrow x|f(x)f'(x)|$ sont continues pour $x \geqslant 0$, donc intégrable sur $[0, X]$, pour tout $X \geqslant 0$.
Par Cauchy Schwarz on a

$$\int_0^X x|f(x)f'(x)|dx \leqslant \left(\int_0^X x^2 f'^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^X f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \left(\int_0^{+\infty} x^2 f'^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{+\infty} f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

l'application croissante : $X \rightsquigarrow \int_0^X x|ff'|dx$ est majorée donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xff'dx$ est absolument convergente.
On intègre par parties sur $[0, X]$ avec $X \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^X xf(x)f'(x)dx &= \left[\frac{x}{2}f^2(x)\right]_0^X - \frac{1}{2}\int_0^X f^2(x)dx\\ &= \frac{X}{2}f^2(X) - \frac{1}{2}\int_0^X f^2.\end{aligned}$$

Comme $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_0^X xf(x)f'(x)dx$ existe, ainsi que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\int_0^X f^2(x)dx$, la limite λ de $Xf^2(X)$, lorsque X tend vers $+\infty$, existe, avec $\lambda \geqslant 0$.

Si $\lambda > 0$ on aurait $f^2(X) \simeq \dfrac{\lambda}{X}$ en $+\infty$, ce qui contredit $\displaystyle\int^{+\infty} f^2$ converge.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xf^2(x) = 0$.

20. Soit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin(x + \dfrac{1}{x})$ pour $x > 0$. En 0, on a $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}}$: il y a convergence absolue en 0 de l'intégrale.
En $+\infty$, on écrit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin x\cos\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin\dfrac{1}{x}\cos x$.
Comme $|\sin\dfrac{1}{x}\cos x| \leqslant \dfrac{1}{x}$, on a $|\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin\dfrac{1}{x}\cos x| \leqslant \dfrac{1}{x^{3/2}}$: il y a convergence absolue de l'intégrale de cette fonction.
Il reste à examiner le cas de $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos\dfrac{1}{x}\sin x$.

S'il n'y avait que $\dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin x$ on conclurait à la convergence (critère d'Abel, théorème 9.17) puisque $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ tend vers 0 en décroissant et que

$$\left|\int_X^{X'} \sin x\,dx\right| \leqslant 2.$$

D'où l'idée d'écrire $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\sin x(\cos\dfrac{1}{x} - 1)$.

On a convergence de $\displaystyle\int^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$, il reste à examiner la fonction $x \overset{h}{\rightsquigarrow} \dfrac{1}{\sqrt{x}}(\cos \dfrac{1}{x} - 1)\sin x = -\dfrac{2}{\sqrt{x}}\sin^2 \dfrac{1}{2x}\sin x$.

On a $|h(x)| \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{4x^2} = \dfrac{1}{2x^{5/2}}$: il y a convergence absolue de cette dernière intégrale en $+\infty$ et finalement convergence de l'intégrale considérée.

CHAPITRE 10

Suites à valeurs dans E, espace vectoriel normé

Nous avons rencontré les suites à valeurs dans un ensemble E dans le chapitre 1. L'importance de cette notion est apparue dans l'étude des espaces métriques (chapitre 4) et plus particulièrement dans le cadre des espaces métriques compacts et métriques complets.

Nous allons préciser ici quelques propriétés particulières au cas réel et au cas des suites récurrentes.

1. Rappels sur les suites réelles

DÉFINITION 10.1. — *Une suite u de terme général réel u_n est dite croissante (resp. décroissante) si et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} \leqslant u_n$).*

On parlera de croissance (ou de décroissance) stricte si les inégalités sont strictes, et de suite monotone (resp. strictement monotone) si la suite est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou décroissante).

THÉORÈME 10.2. — *Une suite croissante (resp. décroissante) est convergente si et seulement si elle est majorée (resp. minorée) et dans ce cas sa limite est la borne supérieure (resp. inférieure) de l'ensemble des valeurs prises.*

La justification est faite aux corollaires 5.57 et 5.58 du chapitre 5 de la construction des réels. Traitons rapidement le cas d'une suite croissante majorée. Supposons l'ensemble non vide des u_n majoré. Il admet alors une borne supérieure, l, (Théorème 5.53), donc $\forall \varepsilon > 0$, $l - \varepsilon$ n'est plus majorant : $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} \geqslant l - \varepsilon$, d'où par croissance, $\forall n \geqslant n_0$, $l - \varepsilon \leqslant u_{n_0} \leqslant u_n \leqslant l$: on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

Comme une suite convergente est bornée dans E métrique, (si $\varepsilon > 0$ est fixé, $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0$, $d(u_n, l) \leqslant \varepsilon$, donc les u_n sont dans la boule fermée de centre l, de rayon $\sup\{\varepsilon, d(u_k, l), k = 0, 1, \ldots, n_0 - 1\}$ on a bien la réciproque. ■

COROLLAIRE 10.3. — *Si une suite monotone admet une suite extraite convergente elle est elle-même convergente.*

Supposons la suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante, et telle qu'il existe une suite $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ extraite convergente. Soit $l = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{\varphi(n)}$, on a $u_{\varphi(n)} \leqslant l$, pour tout n de $\mathbb{N}$, mais alors $\forall k \in \mathbb{N}$, il existe n tel que $k \leqslant \varphi(n)$ d'où $u_k \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant l$. L'ensemble des u_k est majorée donc u converge, vers l puisque la suite extraite ne peut converger que vers la limite de la suite. ■

Ce théorème 10.2 sera d'un emploi fondamental dans l'étude des séries à termes positifs comme nous le verrons au chapitre suivant. Mais on l'utilise aussi dans l'étude des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction de variable réelle, à valeurs réelles.

Soit donc un intervalle I de $\mathbb{R}$, et f une application de I dans $\mathbb{R}$. On étudie, si elle existe, la suite définie par la donnée de u_0 dans I et de la relation de récurrence.

10.4. $u_{n+1} = f(u_n)$, pour $n \geqslant 0$.

Le « si elle existe » vient de ce qu'il faut s'assurer que les u_n calculés restent dans le domaine de définition de f.

On suppose la fonction f continue : une limite éventuelle l vérifie l'égalité $l = f(l)$. C'est un point fixe de f.

L'étude des variations de la fonction f, permet en général, de déterminer :

soit des intervalles J tels que $f(J) \subset J$;

soit des intervalles K et L d'adhérences disjointes et tels que $f(K) \subset L$ et $f(L) \subset K$.

Dans ce deuxième cas, si $u_0 \in K \cup L$, la suite diverge, car les suites extraites des u_{2p} et des u_{2p+1} sont l'une dans K l'autre dans L, une limite éventuelle devrait être dans $\overline{K} \cap \overline{L} = \emptyset$.

On suppose être dans le premier cas, on travaille donc sur J, intervalle tel que $f(J) \subset J$.

Monotonie. Comme $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$, pour $n \geqslant 1$, si f est croisante sur J, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, et l'étude du signe de $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0$ donne celui de $u_{n+1} - u_n$.

Si f est décroissante sur J, (toujours avec $f(J) \subset J$), $u_{n+1} - u_n$ change de signe avec n, la suite est dite *oscillante*.

Mais dans ce cas, $g = f \circ f$ est croissante sur J, on a $g(J) \subset J$, donc la suite extraite des $u_{2n} = v_n$ qui est encore définie par $v_0 = u_0$ et la relation de récurrence $v_n = g(v_{n-1})$ est monotone.

De même la suite extraite des $w_n = u_{2n+1}$ est monotone, (car définie par la donnée de $u_1 = w_0$ et de la relation $w_{n+1} = g(w_n)$.

Comme $w_1 - w_0 = u_3 - u_1 = f(u_2) - f(u_0)$, $w_1 - w_0$ est de signe opposé à celui de $u_2 - u_0 = v_1 - v_0$ donc les deux suites extraites sont dans ce cas de monotonies différentes.

Pour la convergence, dans le cas où la monotonie a été justifiée, (ou celle des suites extraites) il reste à justifier que ces suites sont bornées pour conclure à leur convergence vers un point fixe l de f dans $\overline{J}$, en vérifiant l'unicité de la limite dans le deuxième cas.

Des remarques pratiques

L'étude de la monotonie, donc du signe de $u_{n+1} - u_n$ peut se faire *par récurrence* car $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$ et on essaye de mettre en évidence la différence $u_n - u_{n-1}$; mais on a aussi $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ et la connaissance du signe de la fonction $x \rightsquigarrow f(x) - x$ permet de conclure.

Si on sait que les u_n restent strictement positifs, on peut étudier la place de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1, là encore soit par récurrence, (c'est $\dfrac{f(u_n)}{f(u_{n-1})}$), soit plus directement en examinant la fonction $x \rightsquigarrow \dfrac{f(x)}{x}$ et sa place par rapport à 1.

Enfin il ne faut pas oublier que ces suites peuvent relever du théorème du point fixe car $\mathbb{R}$ est complet. On a :

THÉORÈME 10.5. — *Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et f une application contractante de I dans I. Alors toute suite u définie par la donnée de u_0 dans I et de la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers le seul point fixe de f sur I.*

En effet, I fermé de $\mathbb{R}$ est complet, et on applique le théorème du point fixe, (Théorème 4.102).

Le cas le plus fréquent d'emploi de ce théorème est celui où la fonction f est dérivable sur I et où il existe une constante positive k telle que : $\forall x \in I,\ |f'(x)| \leqslant k < 1$, par accroissements finis f est alors contractante sur I.

Ne pas oublier enfin que si $f \circ f$, ou plus généralement $f^p = f \circ f \circ \ldots \circ f$, ($p$ fois) admet un seul point fixe sur I, c'est aussi le seul point fixe de f sur I, (voir remarque 4.105).

10.6. Je ne saurais pas achever ces remarques sur les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ sans dire un mot des *suites homographiques* c'est-à-dire des suites définies par la donnée de u_0 et d'une relation du type $u_{n+1} = \dfrac{a\,u_n + b}{c\,u_n + d}$ avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

La fonction $t \rightsquigarrow \dfrac{at+b}{ct+d}$ établit une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$, car résoudre l'équation en t, $y = \dfrac{at+b}{ct+d}$, avec $t \neq -\dfrac{d}{c}$, équivaut à résoudre $t(cy-a) = b-dy$, d'où, pour $y \neq \dfrac{a}{c}$ l'existence et l'unicité d'un antécédant, (que l'on peut vérifier être $\neq -\dfrac{d}{c}$ car $ad - bc \neq 0$).

La suite u_n existera donc si, pour tout n, $u_n = f^n(u_0) \neq -\dfrac{d}{c}$ soit $u_0 \neq (f^{-1})^n \left(-\dfrac{d}{c}\right)$. Sont donc exclues les valeurs définies par la suite $v_0 = -\dfrac{d}{c}$ et la relation de récurrence $v_{n+1} = f^{-1}(v_n)$.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ dans $\mathbb{R}$, en passant à la limite dans la relation $c\,u_n u_{n+1} + d\,u_{n+1} - a\,u_n - b = 0$, λ doit vérifier l'équation :

10.7. $$c\lambda^2 + (d-a)\lambda - b = 0.$$

Si $(d-a)^2 + 4bc < 0$, 10.7 n'a pas de racines réelles, la suite u diverge.

Si $(d-a)^2 + 4bc > 0$, 10.7 admet deux racines distinctes α et β. Si $u_0 = \alpha$, (resp. β) alors $\forall n,\ u_n = \alpha$, (resp. β). On écarte ces cas, donc, $\forall n$, $u_n \notin \{\alpha, \beta\}$.

On a alors

$$\frac{u_{n+1} - \beta}{u_{n+1} - \alpha} = \frac{\dfrac{au_n + b}{cu_n + d} - \dfrac{a\beta + b}{c\beta + d}}{\dfrac{au_n + b}{cu_n + d} - \dfrac{a\alpha + \beta}{c\alpha + d}} = \frac{c\alpha + d}{c\beta + d} \cdot \frac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}.$$

En posant $k = \dfrac{c\alpha + d}{c\beta + d}$ et $x_n = \dfrac{u_n - \beta}{u_n - \alpha}$, on a $k \neq 1$ car $\alpha \neq \beta$ et la suite des x_n est définie par la donnée de x_0 et de la relation $x_{n+1} = kx_n$ ce qui conduit à $x_n = k^n x_0$, (avec $x_0 \neq 0$ car $u_0 \neq \beta$).

Donc si $|k| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$, comme $u_n = \dfrac{\beta - \alpha x_n}{1 - x_n}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \beta$;

si $|k| > 1$, on aurait $y_n = \dfrac{u_n - \alpha}{u_n - \beta} = \left(\dfrac{1}{k}\right)^n \dfrac{u_0 - \alpha}{u_0 - \beta}$ qui tendrait vers 0 d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$;

si $k = -1$, les x_{2p} sont égaux à x_0, les x_{2p+1} à x_1 et l'aspect bijectif de $t \rightsquigarrow \dfrac{t - \beta}{t - \alpha}$ de $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ donne alors $u_{2p} = u_0$, $u_{2p+1} = u_1$ avec $u_0 \neq u_1$, (au départ $u_0 \notin \{\alpha, \beta\}$) : la suite diverge.

Si $(d-a)^2 + 4bc = 0$ l'équation $c\lambda^2 + (d-a)\lambda - b = 0$ admet une racine double $\alpha = \dfrac{a - d}{2c}$. Si $u_0 = \alpha$, la suite est constante donc convergente. On écarte ce cas.

Alors
$$\frac{1}{u_{n+1} - \alpha} = \frac{1}{\dfrac{au_n + b}{cu_n + d} - \dfrac{a\alpha + b}{c\alpha + d}} = \frac{(cu_n + d)(c\alpha + d)}{(da - bc)(u_n - \alpha)}$$
$$= \frac{(c(u_n - \alpha) + d + \alpha c)(c\alpha + d)}{(da - bc)(u_n - \alpha)}$$
$$= \frac{c(d + \alpha c)}{(da - bc)} + \frac{(d + \alpha c)^2}{(da - bc)(u_n - \alpha)}.$$

Or $d + \alpha c = d + \dfrac{a - d}{2c} c = \dfrac{a + d}{2}$ donc

$$\frac{(d + \alpha c)^2}{da - bc} = \frac{a^2 + 2ad + d^2}{4(da - bc)} = \frac{(d - a)^2 + 4ad}{4(da - bc)} = \frac{-4bc + 4ad}{4(da - bc)}$$

puisque $(d - a)^2 + 4bc = 0$, soit finalement

$$\frac{(d + \alpha c)^2}{da - bc} = 1, \text{ d'où } \frac{c(d + \alpha c)}{da - bc} = \frac{c}{d + \alpha c} = \frac{2c}{a + d}$$

et la relation

$$\frac{1}{u_{n+1} - \alpha} = \frac{2c}{a + d} + \frac{1}{u_n - \alpha}$$

qui conduit à

$$\frac{1}{u_n - \alpha} = \frac{2nc}{a+d} + \frac{1}{u_0 - \alpha},$$

comme $c \neq 0$ on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{|u_n - \alpha|} = +\infty$ d'où $\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

Le lecteur qui a, une fois dans sa vie, essayé de traiter autrement une suite homographique, a dû comprendre sa douleur.

Il faut dans certains cas se résoudre à faire preuve de culture. On peut étendre cette étude au cas complexe, (a, b, c, d dans $\mathbb{C}$), la discussion portant alors sur la nullité éventuelle de $(d-a)^2 + 4bc$.

2. Cas des suites du type $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$

Je me bornerai, dans ce paragraphe, à donner des indications pouvant servir à étudier de telles suites.

10.8. *D'abord on peut essayer d'adapter le théorème du point fixe.*

On suppose la fonction f définie sur $E \times E$ avec E espace complet, (E peut-être un fermé de $\mathbb{R}$), à valeurs dans E. On définit une suite par la donnée de u_0, u_1 dans E et de la relation

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n).$$

Si on pose $v_n = u_{n+1}$, on peut écrire $u_{n+2} = v_{n+1} = f(v_n, u_n)$. On introduit alors les couples $W_n = (u_n, v_n)$ définis par la donnée de $W_0 = (u_0, u_1) = (u_0, v_0)$ et les relations de récurrence :

$$\left[\begin{array}{l} u_{n+1} = v_n \\ v_{n+1} = f(v_n, u_n) \end{array}\right.$$

qui définissent W_{n+1} en fonction de W_n.

L'espace topologique $F = E \times E$ est complet pour l'une des trois distances équivalentes $d^{(\infty)}, d^{(1)}$ ou $d^{(2)}$, (Théorème 4.99). On introduit l'application $\varphi : F \mapsto F$ définie par

$$\varphi : (x, y) \rightsquigarrow (y, f(y, x)).$$

Si on suppose f continue, et si φ admet un seul point fixe, comme la suite des W_n vérifie la relation $W_{n+1} = \varphi(W_n)$, en cas de convergence de la suite, ce ne peut être que vers ce point fixe de φ.

L'application φ n'a aucune chance d'être contractante car

$$d^{(\infty)}\left(\varphi(x,y),\varphi(x',y')\right) = \sup\left(d(y,y'), d\left(f(y,x), f(y',x')\right)\right)$$

fait intervenir $d(y,y')$. Mais dans certains cas $\varphi\circ\varphi$ peut devenir contractante, (on a $\varphi^2(x,y) = (f(y,x), f(f(y,x),y))$, donc avoir un seul point fixe, dans ce cas les suite $(W_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(W_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ce point fixe, d'où la suite (W_n) aussi et finalement la convergence de la suite initiale.

10.9. *Deuxième étude possible : faire intervenir les limites supérieures et inférieures lorsque l'on est dans le cas réel*

Cette méthode est liée à la structure ordonnée sur $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 10.10. — *On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet λ pour limite supérieure si et seulement si, $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0\ u_n \leqslant \lambda + \varepsilon$ et* $\operatorname{card}\{n;\ u_n \geqslant \lambda - \varepsilon\}$ *est infini.*

10.11. On note $\lambda = \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ cette limite supérieure si elle existe.

On définit de même les limites inférieures.

DÉFINITION 10.12. — *On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet λ pour limite inférieure si et seulement si, $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0\ u_n \geqslant \lambda - \varepsilon$ et* $\operatorname{card}\{n;\ u_n \leqslant \lambda + \varepsilon\}$ *est infini.*

10.13. On notera $\lambda = \liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$.

10.14. *Soit alors une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si on prouve qu'elle admet une limite supérieure λ_1 et une limite inférieure λ_2 avec $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, alors $\lambda_1 = \lambda_2$ et la suite converge vers cette valeur commune.* En effet, si $\lambda_1 < \lambda_2$, soit $\varepsilon = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{3}$, on associe à ε un n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant \lambda_1 + \varepsilon$ et un n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1,\ u_n \geqslant \lambda_2 - \varepsilon$, d'où $\forall n \geqslant \sup(n_0, n_1)$:

$$u_n \leqslant \lambda_1 + \varepsilon < \lambda_2 - \varepsilon \leqslant u_n :$$

c'est absurde.

Posons $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$, on a bien $\forall n \geqslant \sup(n_0, n_1)$

$$\lambda - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \lambda + \varepsilon, \text{ donc } \lim_{n \to +\infty} u_n = \lambda.$$

Vous allez me dire, en quoi est-ce plus facile? Et bien en ce que l'existence d'une limite supérieure peut être obtenue par des raisonnements liés à la compacité par exemple. On a

THÉORÈME 10.15. — *La limite supérieure d'une suite majorée u est la borne supérieure de l'ensemble des points d'accumulations de $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ et des valeurs prises une infinité de fois, lorsque cette borne supérieure existe.*

Clarifions les choses. Soit $A = \{x;\ x \in \mathbb{R}, \operatorname{card}\{n;\ u_n = x\} \text{ infini}\}$ et $B = \{$ points d'accumulation de $\{u_n;\ n \in \mathbb{N}\}\}$; puis $C = A \cup B$. Pour u majorée, on a : ($\lambda = \limsup\limits_{n \to +\infty} u_n$ existe) $\Leftrightarrow$ (C, non vide, majoré et $\lambda = \sup\ C$). On aurait de même, pour une suite minorée, ($\lambda = \liminf\limits_{n \to +\infty} u_n$ existe) $\Leftrightarrow$ (C, non vide, est minoré et $\lambda = \inf\ C$). Traitons la limite supérieure.

Si $\lambda = \limsup\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n$ existe.

Soit $\varepsilon = 1$, $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant \lambda + 1$, et de plus, $I = \{n;\ u_n \geqslant \lambda - 1\}$ est de cardinal infini.

Considérons l'ensemble $\mathcal{U}$ des valeurs u_n pour $n \geqslant n_0$ et $n \in I$.

Si $\mathcal{U}$ est de cardinal infini, étant dans $[\lambda - 1, \lambda + 1]$ compact, il admet des points d'accumulation (Théorème 2.9), donc $B \neq \varnothing$; et si $\mathcal{U}$ est de cardinal fini, il existe une valeur prise une infinité de fois, donc A est non vide. Dans tous les cas, $C = A \cup B$ est non vide.

Puis $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_1$, $\forall n \geqslant n_1$, $u_n \leqslant \lambda + \varepsilon$. Le cardinal de l'ensemble de n tels que $u_n \geqslant \lambda + \varepsilon$ étant fini, il en résulte que les points d'accumulation et les valeurs prises une infinité de fois sont majorés par $\lambda + \varepsilon$, et ce pour tout ε, finalement λ majore C.

L'ensemble C, non vide et majoré par λ admet une borne supérieure $m \leqslant \lambda$. Supposons $m < \lambda$ et soit $\varepsilon = \dfrac{\lambda - m}{2}$. Là encore, l'existence de $\lambda = \limsup\limits_{n \to +\infty} u_n$ nous dit qu'il existe une infinité d'indices n tels que $\lambda - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \lambda + \varepsilon$, d'où un élément de $C = A \cup B$ supérieur à $\lambda - \varepsilon = \dfrac{\lambda + m}{2} > m$, absurde puisque m est la borne supérieure de C. On a donc justifié que C est non vide, majoré, et que la limite supérieure est la borne supérieure de C.

Réciproquement

Supposons $C = A \cup B$ non vide, et admettant une borne supérieure notée λ.

Soit $\varepsilon > 0$, si $\operatorname{card}\{n;\ u_n > \lambda + \varepsilon\}$ est infini, comme la suite est supposée majorée, on aurait un point d'accumulation, (ou une valeur prise une infinité de fois) supérieur à $\lambda + \varepsilon$: c'est exclu.

Donc $\exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant \lambda + \varepsilon.$

Puis, $\lambda - \dfrac{\varepsilon}{2}$ n'étant plus majorant de C, il existe $x \in C$ avec $x \geqslant \lambda - \dfrac{\varepsilon}{2}$. Si x est une valeur prise une infinité de fois, il existe une infinité d'indices n tels que $u_n = x \geqslant \lambda - \varepsilon$, et si x est un point d'accumulation, il existe une suite extraite qui converge vers x, donc une infinité de n tels que $u_n \in]x - \dfrac{\varepsilon}{2},\ x + \dfrac{\varepsilon}{2}[$.

Comme $x - \dfrac{\varepsilon}{2} \geqslant \lambda - \dfrac{\varepsilon}{2} - \dfrac{\varepsilon}{2}$ on a encore une infinité de n tels que $u_n \geqslant \lambda - \varepsilon$.

On a bien $\lambda = \limsup\limits_{n \to +\infty} u_n$ existe, et c'est la borne supérieure de C.

REMARQUE 10.16. — Si on suppose la suite u non bornée, on peut, par convention, dire que $+\infty$ est limite supérieure de la suite.

3. Suites récurrentes linéaires

On définit simultanément, p suites à valeurs dans un corps K, ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ mais tout corps peut convenir) par la donnée de leur premier terme et les relations suivantes.

On note $u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(3)}$ les suites, $u_n^{(k)}$ sera le terme d'indice n de la $k^{ième}$ suite, et on a

10.17.
$$\begin{cases} u_{n+1}^{(1)} = \alpha_{11} u_n^{(1)} + \alpha_{12} u_n^{(2)} + \ldots + \alpha_{1p} u_n^{(p)} \\ u_{n+1}^{(2)} = \alpha_{21} u_n^{(1)} + \alpha_{22} u_n^{(2)} + \ldots + \alpha_{2p} u_n^{(p)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{n+1}^{(p)} = \alpha_{p1} u_n^{(1)} + \alpha_{p2} u_n^{(2)} + \ldots + \alpha_{pp} u_n^{(p)}. \end{cases}$$

Il est clair qu'en notant A la matrice carrée d'ordre p des α_{ij} et U_n la matrice colonne d'ordre p des $u_n^{(i)}$, $i = 1, \ldots, p$, les relations de récurrence traduisent l'égalité matricielle suivante :

10.18. $U_{n+1} = AU_n$ qui conduit à $U_n = A^n U_0$, et, la matrice colonne U_0 étant donné, U_n sera connue dès que l'on aura calculé A^n.

L'étude de ces suites se ramène donc à celle des puissances d'une matrice, ce qui se traite en diagonalisant, ou en jordanisant ou en divisant X^n par un polynôme annulant A.

Nous allons donner, (pourquoi nous...) je vais donner des résultats concernant un autre type de suites définies par une récurrence scalaire linéaire d'ordre p.

On se donne p scalaires $a_0, a_1, \dots, a_{p-1}$ et on définit une suite u par la donnée de ses p premiers termes $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$ et de la relation de récurrence.

10.19.
$$u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_k u_{n+k} + \dots + a_0 u_n$$

valable pour tout n.

10.20. Il est facile de vérifier que les suites u *vérifiant 10.19 forment un sous-espace vectoriel* $\mathcal{E}$ de $K^{\mathbb{N}}$, espace vectoriel des suites à valeurs dans K.

En effet, si u et v sont dans $\mathcal{E}$, λ et μ dans K, la suite $w = \lambda u + \mu v$ de terme général $w_n = \lambda u_n + \mu v_n$ vérifie 10.19 puisqu'il suffit de multiplier par λ (resp μ) la relation vérifiée par les u_k, (resp les v_k) et d'ajouter pour obtenir la relation pour w. De plus la suite nulle est dans $\mathcal{E}$.

Pour $i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, on note $u^{(i)}$, la suite vérifiant la relation 10.19 et dont les p premiers termes sont nuls sauf celui d'indice i qui vaut 1.

10.21. *La famille des $u^{(i)}$ est une base de $\mathcal{E}$.*

On a une famille libre car si $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^{(k)} = 0$, le terme d'indice $i \leqslant p-1$ de cette combinaison est nul, or c'est λ_i, d'où chaque $\lambda_i = 0$.

Puis u de $\mathcal{E}$ déterminée par la donnée de $u_0, u_1, \dots, u_{p-1}$ est visiblement $u = \sum_{i=0}^{p-1} u_i u^{(i)}$. (Les notations sont bizarres, mais il faut s'y faire.)

Donc $\mathcal{E}$ est de dimension p

Pour calculer le terme général d'une suite u de $\mathcal{E}$, on va introduire p suites vérifiant une relation de récurrence linéaire.

A partir de la suite u de $\mathcal{E}$, on introduit les suites $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(p)}$ définies par les relations :

$$v_n^{(1)} = u_n$$

$$v_n^{(2)} = u_{n+1} = v_{n+1}^{(1)}$$

$$v_n^{(3)} = u_{n+2} = v_{n+1}^{(2)}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

et $$v_n^{(p)} = u_{n+p-1} = v_{n+1}^{(p-1)}$$

On aura alors :

$$v_{n+1}^{(p)} = u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \dots + a_k u_{n+k} + \dots + a_0 u_n$$

soit $$v_{n+1}^{(p)} = a_{p-1}v_n^{(p)} + \dots + a_k v_n^{(k+1)} + \dots + a_0 v_n^{(1)},$$

et les p suites introduites sont telles que

10.22. $$\begin{pmatrix} v_{n+1}^{(1)} \\ v_{n+1}^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_{n+1}^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \dots\dots 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots\dots 0 \\ & & \ddots \\ & & \quad\ddots \\ 0 & 0 & 0 \dots\dots 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \dots\dots a_{p-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_n^{(1)} \\ v_n^{(2)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ v_n^{(p)} \end{pmatrix}.$$

En notant V_n la matrice colonne des $v_n^{(k)}$, $k = 1, \dots, p$, et A la matrice carrée d'ordre p précédente, on a la relation $V_{n+1} = A\,V_n$ qui conduit à $V_n = A^n V_0$, et $u_n = v_n^{(1)}$ sera connu si on sait calculer A^n.

Or le polynôme caractéristique de A est

$$(-1)^p \left(\lambda^p - a_{p-1}\lambda^{p-1} - a_{p-2}\lambda^{p-2} \dots\dots - a_0\right),$$

calcul facile si on développe det $(A - \lambda I_p)$ par rapport à la dernière ligne, et que l'on peut voir en Algèbre en 10.45.

10.23. *L'équation* $\lambda^p - a_{p-1}\lambda^{p-1} - a_{p-2}\lambda^{p-2} \dots - a_0 = 0$ *est appelée l'équation caractéristique des suites* u *de* $\mathcal{E}$.

On suppose que cette équation a toutes ses racines dans le corps K, (ou bien que $K = \mathbb{C}$). Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les racines distinctes de multiplicités $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ de l'équation caractéristique.

La jordanisation de la matrice A permet de voir que le terme général de A^n sera une combinaison linéaire à coefficients constants par rapport à n, des termes $(\lambda_i)^n, n(\lambda_i)^n, n^2(\lambda_i)^n, \ldots, n^{\alpha_i-1}(\lambda_i)^n$ pour i variant de 1 à r, (voir Algèbre 10.68).

Il en résulte qu'on a finalement un expression du type

$$u_n = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{j=0}^{\alpha_i-1} \beta_{ij} n^j (\lambda_i)^n \right),$$

les β_{ij} étant des constantes par rapport à n.

Si on considère les suites de terme général $n^j(\lambda_i)^n$, pour $0 \leqslant j \leqslant \alpha_i - 1$ et ce pour $i = 1, \ldots, r$, on obtient $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r = p$ suites, qui engendrent donc un sous-espace vectoriel F de dimension p au plus de $K^{\mathbb{N}}$.

Comme chaque u de $\mathcal{E}$ est dans F, on obtient $\mathcal{E}$, espace de dimension p, contenu dans F de dimension p au plus : c'est que $\mathcal{E} = F$ et que la famille des p suites de terme général $n^j(\lambda_i)^n$ est une base de $\mathcal{E}$. On obtient ainsi le

THÉORÈME 10.24. — *Les suites u dont le terme général vérifie une relation de récurrence linéaire :*

$$u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \ldots + a_k u_{n+k} + \ldots + a_0 u_n,$$

forment un espace vectoriel de dimension p sur K.

Si l'équation (E) : $\lambda^p - a_{p-1}\lambda^{p-1} - \ldots - a_k\lambda^k - \ldots - a_0 = 0$ (appelée équation caractéristique) admet ses p racines distinctes ou non, dans le corps K, une base de cet espace vectoriel est formée des suites de termes généraux $n^j(\lambda_i)^n$, où *$\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les racines distinctes de (E), de multiplicités $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, et où pour $i \in \{1, \ldots, r\}$ on a $j \in \{0, 1, \ldots, \alpha_i - 1\}$.* ■

Ce résultat étant connu, en pratique on passe à l'équation caractéristique, d'où les racines, d'où la forme de u_n.

Les coefficients β_{ij}, (de $n^j(\lambda_i)^n$) sont obtenus en résolvant le système donnant $u_0, u_1, \ldots, u_{p-1}$, pour les valeurs $n = 0, 1, \ldots, p-1$

4. Césaro and co

La convergence au sens de Césaro est une notion valable dans le cadre des espaces vectoriels normés qui donne pas mal de résultats. Voyons ce dont il s'agit.

THÉORÈME 10.26. — *Soit une suite u de terme général u_n dans E espace vectoriel normé, (réel ou complexe). Si la suite u converge vers l dans E, la suite v de terme général $v_n = \dfrac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1}$ converge aussi vers l.*

Comme on ne compare bien que les choses de même nature, formons la différence $v_n - l$ en écrivant $l = \dfrac{l + l + \ldots + l}{n+1}$, (on somme $(n+1)$ fois l). On a :

$$v_n - l = \sum_{k=0}^{n} \frac{(u_k - l)}{n+1}.$$

Or, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ \|u_n - l\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit donc $n \geqslant n_0, \forall k$ tel que $n_0 \leqslant k \leqslant n$, on aura $\|u_k - l\| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ d'où

$$\|v_n - l\| \leqslant \frac{\left\| \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0 - 1} (u_k - l) \right\|}{n+1} + \frac{\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} \frac{\varepsilon}{2}}{n+1} \leqslant \frac{\left\| \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0 - 1} (u_k - l) \right\|}{n+1} + \frac{\varepsilon}{2}$$

puisqu'il y a $n - n_0 + 1$ fois le terme $\varepsilon/2$.

Comme le terme $\left\| \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0 - 1} (u_k - l) \right\|$ est constant par rapport à n, le majorant a pour limite $\varepsilon/2$ si n tend vers l'infini, il devient donc inférieur à ε pour n assez grand, finalement on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 (\geqslant n_0),\ \forall n \geqslant n_1,\ \|v_n - l\| \leqslant \varepsilon,$$

d'où le résultat. ■

DÉFINITION 10.27. — *On dit qu'une suite u de terme général u_n dans E, espace vectoriel normé converge au sens de Césaro, si la suite des $v_n = \dfrac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1}$ converge.*

Nous venons donc de voir que la convergence d'une suite vers une limite l implique sa convergence au sens de Césaro, vers l.

La réciproque est fausse. Si on prend par exemple $u_n = (-1)^n$, on obtient $v_{2p} = \dfrac{1}{2p+1}$ et $v_{2p+1} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. La suite u converge au sens de Césaro vers 0, mais la suite u ne converge pas.

Signalons une sorte de réciproque, le théorème de Hardy.

THÉORÈME 10.28. — *(de Hardy). Soit une suite u de terme général u_n dans E espace vectoriel normé, telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, on ait $||u_{n+1} - u_n|| \leqslant \dfrac{A}{n+1}$, ($A$ constante) et que la suite u converge au sens de Césaro, alors la suite u est convergente.*

Si l est la limite des $v_n = \dfrac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1}$, il s'agit de prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$. En fait on peut remplacer u_n par $u'_n = u_n - l$, alors $||u'_{n+1} - u'_n|| = ||u_{n+1} - u_n|| \leqslant \dfrac{A}{n+1}$, on a
$v'_n = \dfrac{u'_0 + u'_1 + \ldots + u'_n}{n+1} = v_n - l$ qui tend vers 0, et on va prouver que la suite des u'_n tend vers 0, d'où la convergence des u_n, vers l.

Pour faciliter le travail du typographe, supprimons les $'$. On part donc de $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, avec

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{n+1}, \text{ et telle que, } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ ||u_{n+1} - u_n|| \leqslant \frac{A}{n+1}.$$

Comme $(n+1)v_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, pour p et q dans $\mathbb{N}$ avec $p < q$ on a $(q+1)v_q - (p+1)v_p = u_{p+1} + \ldots + u_q$.

Dans $u_{p+1} + \ldots + u_q$ on va faire apparaître les différences $u_{i+1} - u_i$ pour utiliser l'hypothèse.

On a

$$\begin{aligned} u_{p+1} + u_{p+2} + \ldots + u_q &= -(u_{p+2} - u_{p+1}) + 2u_{p+2} + u_{p+3} + \ldots + u_q \\ &= -(u_{p+2} - u_{p+1}) + 2\left[-(u_{p+3} - u_{p+2})\right] + 3u_{p+3} + u_{p+4} + \ldots + u_q. \end{aligned}$$

On poursuit ce calcul qui conduit à :

$$(q+1)v_q - (p+1)v_p = \left(\sum_{i=1}^{q-p-1} -i(u_{p+i+1} - u_{p+i})\right) + (q-p)u_q,$$

ou encore à

$$(q-p)u_q = \sum_{k=p+1}^{q-1} (k-p)(u_{k+1}-u_k) + (q+1)v_q - (p+1)v_p$$

d'où

$$(q-p)||u_q|| \leqslant (q+1)||v_q|| + (p+1)||v_p|| + \sum_{k=p+1}^{q-1} \frac{(k-p)}{k+1}A.$$

Pour $p+1 \leqslant k \leqslant q-1$, on a $\dfrac{k-p}{k+1} \leqslant \dfrac{q-p}{p}$, puisque $k < q$ et $k+1 > p$, d'où $\displaystyle\sum_{k=p+1}^{q-1} \frac{k-p}{k+1}A \leqslant (q-p)^2\frac{A}{p}$, d'où, en divisant par $q-p$,

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, p < q \Rightarrow ||u_q|| \leqslant \frac{(q+1)||v_q|| + (p+1)||v_p||}{q-p} + \frac{(q-p)A}{p}.$$

Il va falloir maintenant, pour q assez grand, rendre le majorant de $||u_q||$ arbitrairement petit, et pour cela jouer sur p en le liant à q de façon à maîtriser le $\dfrac{q-p}{p} = \dfrac{q}{p} - 1$. On comprend que p va être « équivalent » à q de façon que $\dfrac{q}{p} - 1$ soit $O(\varepsilon)$, mais alors $\dfrac{p+1}{q-p}$ sera de l'ordre de $\dfrac{1}{\varepsilon}$, ainsi que $\dfrac{q+1}{q-p}$ qui lui est équivalent. Aussi, on traduit $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ avec ε^2 :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ ||v_n|| \leqslant \varepsilon^2.$$

On choisit $q > p > n_0$, d'où

$$\textbf{\textit{10.29.}}\quad ||u_q|| \leqslant \frac{q+p+2}{q-p}\varepsilon^2 + \left(\frac{q}{p} - 1\right)A.$$

On va choisir q assez grand pour pouvoir trouver $p \geqslant n_0$, tel que $\varepsilon \leqslant \dfrac{q}{p} - 1 \leqslant 2\varepsilon$, soit $1+\varepsilon \leqslant \dfrac{q}{p} \leqslant 1+2\varepsilon$, ou encore p tel que $\dfrac{q}{1+2\varepsilon} \leqslant p \leqslant \dfrac{q}{1+\varepsilon}$. Ceci sera possible si $\dfrac{q}{1+2\varepsilon} \geqslant n_0$, (ce qui se traduit par q assez grand) et si $\dfrac{q}{1+\varepsilon} - \dfrac{q}{1+2\varepsilon} \geqslant 2$, auquel cas il y aura un entier entre ces deux nombres.

Cette dernière condition s'écrit $q\dfrac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)} \geqslant 2$. On prend donc $q \geqslant \sup\left(\dfrac{2(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)}{\varepsilon}, n_0(1+2\varepsilon)\right)$, (en particulier on aura $q \geqslant n_0$), il existe alors $p \geqslant n_0$ tel que $\varepsilon \leqslant \dfrac{q}{p} - 1 \leqslant 2\varepsilon$ et 10.29. devient $||u_q|| \leqslant \dfrac{q+p+2}{q-p}\varepsilon^2 + 2A\varepsilon$. Il reste à nous débarrasser de ce terme $\dfrac{q+p+2}{q-p}$. Or $\varepsilon \leqslant \dfrac{q-p}{p} \leqslant 2\varepsilon$ donc $\dfrac{1}{q-p} \leqslant \dfrac{1}{p\varepsilon}$ d'où
$\dfrac{q+p+2}{q-p}\varepsilon^2 \leqslant \dfrac{q+p+2}{p}\varepsilon = \left(\dfrac{q}{p} + 1 + \dfrac{2}{p}\right)\varepsilon.$

On a $\dfrac{2}{p} \leqslant 2$, et $\dfrac{q}{p} \leqslant 2\varepsilon + \dfrac{p}{p} = 1 + 2\varepsilon$,
d'où $\dfrac{q+p+2}{q-p}\varepsilon^2 \leqslant (4+2\varepsilon)\varepsilon$
et finalement $||u_q|| \leqslant \varepsilon(2A + 4 + 2\varepsilon)$.

La forme du majorant montre bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, d'où le théorème de Hardy. ■

La convergence au sens de Césaro intervient, dans l'étude des séries de Fourier, pour donner le théorème de Féjer (voir chapitre 15).

10.30. *Une autre application de Césaro consiste à trouver, lorsqu'une suite réelle u admet une limite l, un équivalent de $l - u_n$, (u_n terme général de la suite).*

En effet, posons $v_n = l - u_n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Supposons que l'on puisse trouver un α réel tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(v_{n+1}^{\alpha} - v_n^{\alpha}\right) = \lambda \text{ avec } \lambda \neq 0.$$

Par Césaro (10.26), on aura

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(v_{k+1}^{\alpha} - v_k^{\alpha}\right)}{n} = \lambda$$

soit encore

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(v_n)^\alpha}{n}-\frac{v_0^\alpha}{n}\right)=\lambda \text{ d'où } \lim_{n\to+\infty}\frac{(v_n)}{n}^\alpha=\lambda.$$

On a donc $(v_n)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\simeq} n\lambda$ d'où $v_n \sim n^{\frac{1}{\alpha}}\lambda^{\frac{1}{\alpha}}$. ■

Remarque. Très souvent, l'emploi de développements limités donne ce réel α. Par exemple soit la suite u définie par la donné de u_0 réel et la relation de récurrence $u_{n+1}=\sin u_n$.

Pour tout $n\geqslant 1, u_n\in[-1,1]$.

Si $u_1\geqslant 0$, en fait pour tout $n\geqslant 1$, $u_n\in[0,1]$, on aura $u_{n+1}=\sin u_n\leqslant u_n$, d'où une suite décroissante, minorée par 0 donc convergente vers $l\in[0,1]$ tel que $l=\sin l$. Seul $l=0$ convient.

Si $u_1<0$, le changement de u_0 en $-u_0$, change u_1 en $-u_1$ et les u_n en $-u_n$ d'où encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

On cherche un équivalent de u_n, et pour cela, on cherche α réel tel que $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}^\alpha-u_n^\alpha)$ existe et soit non nulle.

On a

$$\begin{aligned}u_{n+1}^\alpha-u_n^\alpha=(\sin u_n)^\alpha-u_n^\alpha&=\left[u_n^\alpha(1-\frac{u_n^2}{6}+o(u_n^2))^\alpha-u_n^\alpha\right]\\&=u_n^\alpha(1-\frac{\alpha}{6}u_n^2-1+o(u_n)^2)\\&\sim-\frac{\alpha}{6}u_n^{2+\alpha}\text{ si }\alpha\neq 0.\end{aligned}$$

Si $\alpha=-2$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{n+1}^{-2}-u_n^{-2})=\frac{1}{3}$, à condition que les u_n soient non nuls, donc que $u_0\notin\mathbb{Z}\pi$. Dans ce cas, par Césaro on a :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{u_n^2}-\frac{1}{u_0^2}}{n}=\frac{1}{3}.$$

On a donc $u_n^2\sim\frac{3}{n}$ et $u_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}}$, (dans le cas $u_1>0$).

Si $u_0=k\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$, $\forall n\geqslant 1, u_n=0$, la recherche d'un équivalent n'a pas lieu d'être.

Cet exemple montre l'efficacité du procédé !

EXERCICES

1. Etudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et la récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n^2 + 1\right)$.

2. Etude de la suite $a_n = n!(1 - \frac{1}{2!} - \frac{2}{3!} - \ldots - \frac{n-1}{n!})$.

3. Une suite réelle est définie par $u_1 = a, u_2 = b$ et la récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2)$.

4. Etudier suivant $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(n+p)^\alpha}.$$

5. On donne la suite (a_k) où $a_k = a + (k-1)r, (a > 0, r > 0)$. Montrer l'existence de

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k a_{k+2}}{(a_{k+1})^2}.$$

6. On définit trois suites réelles $(a_n), (b_n), (c_n)$ par $a_0 = a$, $b_0 = b, c_0 = c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ donné et

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{3}{4}c_n,$$
$$b_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}c_n,$$
$$c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}b_n.$$

Déterminer les limites éventuelles de ces trois suites.

7. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \prod_{j=1}^{n} \left(1 + \frac{j}{n^2}\right)$.

8. Etudier la suite (u_n) définie par u_0, u_1, u_2 positifs et la relation de récurrence $u_{n+3} = \sqrt[3]{u_n u_{n+1} u_{n+2}}$

9. Soit $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x - 1, n \in \mathbb{N}^*$, et a_n l'unique racine positive de $f_n(x) = 0$. Etudier la suite $(a_n)_n \in \mathbb{N}$.

10. Soit $a \geqslant 0$, $b > 0$, déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \prod\limits_{j=1}^{n} (a + bj)^{1/n}$.

11. Soit $x_0 > 0$ et la suite réelle donnée par la récurrence
$x_{n+1} = \dfrac{x_n}{1 + n x_n^2}$.
Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ et donner un équivalent de x_n.

12. Trouver pour α réel, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin(k\alpha)}{k+n}$.

13. Etudier la suite définie par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n - \operatorname{Log}(1 + u_n)}{u_n^2}$.

14. Soit a, b, c, d des entiers naturels; une suite u_n est définie par la donnée de $u_0 = \dfrac{a}{b}, u_1 = \dfrac{c}{d}$ et, si $u_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ pour $k < n$, par
$u_n = \dfrac{p_{n-1} + p_{n-2}}{q_{n-1} + q_{n-2}}$.
Etudier la suite (u_n).

15. Soit la suite réelle x définie par la donnée de x_0 et de la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n^2}$. Donner, quand la suite est définie, un équivalent de x_n, puis un développement asymptotique à deux termes.

SOLUTIONS

1. Quel que soit u_0, on a $u_n \geqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n^2 - 2u_n + 1) = \frac{1}{2}(u_n - 1)^2 \geqslant 0$: la suite est croissante. Par continuité de la fonction $f : x \rightsquigarrow \frac{x^2+1}{2}$ une limite éventuelle u vérifié l'équation $u = \frac{1}{2}(u^2+1)$ soit $(u-1)^2 = 0$, donc $u = 1$ est seule limite possible.

On peut remarquer que si pour un $n_0 \geqslant 1$ on a $u_{n_0} \leqslant 1$, alors $u_{n_0}^2 + 1 \leqslant 2$ donc $u_{n_0+1} \leqslant 1$ et, par récurrence, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant 1$ dans ce cas la suite est croissante majorée donc convergente (vers 1).

Et si $u_{n_0} > 1$, par monotonie, $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0} > 1$, la seule limite possible 1 est éliminée donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \infty$.

Le comportement de la suite dépend donc de la place de $u_1 = \frac{1}{2}(u_0^2+1)$ par rapport à 1. Or $u_1 - 1 = \frac{1}{2}(u_0^2 - 1)$ sera négatif si et seulement si $|u_0| < 1$. D'où :

$$\begin{aligned}
|u_0| < 1 &: \text{ suite croissante convergente vers } 1;\\
|u_0| = 1 &: \text{ suite constante égale à } 1 \text{ si } n \geqslant 1;\\
|u_0| > 1 &: \text{ suite croissante divergente vers } +\infty.
\end{aligned}$$

2. Le terme $\frac{n-1}{n!}$ s'écrit $\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}$: il doit y avoir des simplifications en masse. On a $a_n = n!(1 - \sum\limits_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!})\right) = n!\frac{1}{n!} = 1$: la suite est constante, égale à 1.

3. On a une suite récurrente linéaire d'équation caractéristique $r^2 - r + 1 = 0$, de racines $e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{3}}$ distinctes, donc il existe α et β complexes conjugués tels que pour tout n,

$$u_n = \alpha e^{in\frac{\pi}{3}} + \overline{\alpha}e^{-i\frac{n\pi}{3}} \text{ d'où } u_n^2 = \alpha^2 e^{2i\pi\frac{n}{3}} + (\overline{\alpha})^2 e^{-2i\pi\frac{n}{3}} + 2|\alpha|^2.$$

Pour $\theta \neq 0(2\pi)$ on a $\sum\limits_{k=1}^{n} e^{ik\theta} = \frac{e^{i(n+1)\theta} - e^{i\theta}}{e^{i\theta} - 1}$, c'est majoré en module par $\frac{2}{|e^{i\theta} - 1|}$ donc, multipliée par $\frac{1}{n}$, cette somme tend vers 0 si n tend vers l'infini. Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}{n} = 2|\alpha|^2$ et il reste à calculer α sachant que :

$$\begin{matrix}\boxed{1}\\ \boxed{2}\end{matrix}\ \begin{cases} \alpha e^{+i\frac{\pi}{3}} + \overline{\alpha}e^{-i\frac{\pi}{3}} = a \\ \alpha e^{2i\frac{\pi}{3}} + \overline{\alpha}e^{-2i\frac{\pi}{3}} = b, \end{cases}$$

d'où l'on tire, $\left(-e^{-\frac{i\pi}{3}} \boxed{1} + \boxed{2}\right)$,

$$\alpha(-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = b - ae^{-i\frac{\pi}{3}} = i\alpha\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{3}}.\text{ On conjugue, d'où}$$

$$b - ae^{i\frac{\pi}{3}} = -i\overline{\alpha}\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

et par produit : $(b-ae^{-i\frac{\pi}{3}})(b-ae^{i\frac{\pi}{3}}) = 3\alpha\overline{\alpha} = 3|\alpha|^2$.
C'est encore

$$3|\alpha|^2 = \left|b - \frac{a}{2} - i\frac{a\sqrt{3}}{2}\right|^2 = \left(b-\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} = b^2 - ab + a^2$$

et, sauf erreur, la limite cherchée est $\frac{2}{3}(a^2+b^2-ab)$

4. Les $\frac{1}{(n+p)^\alpha}$ varient de $\frac{1}{(n+1)^\alpha}$ à $\frac{1}{(2n)^\alpha}$ avec $\alpha > 0$. On peut encadrer ces termes par des intégrales pour évaluer leur somme.

La fonction $x \rightsquigarrow \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $]0,+\infty[$ donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\frac{1}{(n+k+1)^\alpha} \leqslant \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{(n+k)^\alpha}$$

d'où l'on déduit l'encadrement : $n+k+1$

$$\int_{n+k}^{n+k+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{(n+k)^\alpha} \leqslant \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{dx}{x^\alpha},$$

(pour $k \geqslant 1$), et en sommant

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leqslant u_n \leqslant \int_{n}^{2n} \frac{dx}{x^\alpha}.$$

Si $\alpha = 1$, on a $\text{Log}\,\frac{2n+1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \text{Ln}2$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \text{Ln}2$.
Si $\alpha \neq 1$, (mais $\alpha > 0$), on a

$$\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(2n+1)^{\alpha-1}}\right) \leqslant u_n$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2^{\alpha-1}n^{\alpha-1}}\right)$$

soit encore $\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1-\alpha}-\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{1-\alpha}\right)$

$$\leqslant u_n \leqslant \left(1-\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Comme $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{1-\alpha}-\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{1-\alpha}=1-\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}+0\left(\dfrac{1}{n}\right)$, et que $\alpha\neq 1$ le minorant est équivalent à $\left(1-\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}\right)\dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$ comme le majorant, d'où un équivalent de u_n et :
si $\alpha>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$,
si $0<\alpha<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

5. En fait, dans le produit des $a_k a_{k+2}$, la plupart des a_p interviennent deux fois, donc se simplifient. En fait on a

$$p_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{a_k a_{k+2}}{(a_{k+1})^2}=\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{a}{(a+r)}\frac{(a+(n+1)r)}{(a+nr)}.$$

Comme $r>0$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=\dfrac{a}{a+r}$.

6. Si $X_n=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix}$ et $A=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0\end{pmatrix}$, on a l'égalité $X_n=A^nX_0$, avec $X_0=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$.

On doit calculer A_n, or, vu la forme des coefficients, en posant $J=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ on a $J^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ donc $A=\dfrac{3}{4}J+\dfrac{1}{4}J^2$.

On a $J^3=I_3$, le polynôme X^3-1 est scindé, donc J est diagonalisable et A polynôme en J aussi.

Le polynôme caractéristique de J est $-X^3+1$, les valeurs propres sont 1, j, j^2. La recherche des vecteurs propres conduit à la matrice régulière

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&j^2&j\\1&j&j^2\end{pmatrix} \text{ telle que } P^{-1}JP=\operatorname{diag}(1,j,j^2)$$

d'ou $P^{-1}J^2P = \operatorname{diag}(1, j^2, j)$ et $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(1, \dfrac{3j+j^2}{4}, \dfrac{3j^2+j}{4})$.

On a $\dfrac{3j+j^2}{4} = \dfrac{-2+i\sqrt{3}}{4}$ donc $\left|\dfrac{3j+j^2}{4}\right|^2 = \dfrac{4+3}{16} < 1$. Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(P^{-1}AP\right)^n = \operatorname{diag}(1,0,0)$, et que $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n =$ $P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tous calculs faits (et sauf erreur toujours possible). D'où les trois suites a_n, b_n et c_n qui convergent vers $\dfrac{1}{3}(a+b+c)$.

7. Il s'agit d'un produit, on passe aux logarithmes.

On a $v_n = \operatorname{Log} u_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \operatorname{Log}(1 + \dfrac{j}{n^2})$, avec les $\dfrac{j}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc proches de 0 : un développement limité s'impose.

Soit $f(x) = \operatorname{Log}(1+x) = x + \dfrac{x^2}{2} f''(\xi)$, avec ξ entre 0 et x, donc $f''(\xi)$ proche de $f''(0)$ donc borné.

On peut écrire $\operatorname{Log}(1 + \dfrac{j}{n^2}) = \dfrac{j}{n^2} + \dfrac{j^2}{n^4}\, a_{j,n}$, la famille des $a_{j,n}$ étant majorée en module par une constante A.

Alors $v_n = \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{j=1}^{n} j + \dfrac{1}{n^4}\sum\limits_{j=1}^{n} j^2 a_{jn}$.

On a $\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{j=1}^{n} j = \dfrac{n(n+1)}{2n^2}$ et $\dfrac{1}{n^4}\left|\sum\limits_{j=1}^{n} j^2 a_{j,n}\right| \leqslant \dfrac{A}{n^4} \cdot \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{1}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{e}$.

8. Si $u_0u_1u_2 = 0$, $\forall n \geqslant 3$, $u_n = 0$; si $u_0\,u_1\,u_2 > 0$, alors par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$; on peut poser $v_n = \operatorname{Log} u_n$ ce qui ramène à une récurrence linéaire $v_{n+3} = \dfrac{1}{3}(v_n + v_{n+1} + v_{n+2})$.

L'équation caractéristique, $3r^3 - r^2 - r - 1 = 0$, admet 1 pour racine évidente.

Elle s'écrit $(r-1)(3r^2+2r+1) = 0$ d'où les racines 1 et $\dfrac{-1 \pm \sqrt{2}}{3}$.

Si on pose $\dfrac{-1+i\sqrt{2}}{3} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}} + i\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{i\theta}$ avec $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, on obtient $v_n = a + \dfrac{b\cos n\theta}{(\sqrt{3})^n} + \dfrac{c\sin n\theta}{(\sqrt{3})^n}$

(forme réelle des solutions). On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$, avec (a,b,c) solution de

$$\begin{cases} \operatorname{Log} u_0 = a+b \\ \operatorname{Log} u_1 = a + \dfrac{b}{\sqrt{3}}\cos\theta + \dfrac{c}{\sqrt{3}}\sin\theta \\ \operatorname{Log} u_2 = a + \dfrac{b}{3}\cos 2\theta + \dfrac{c}{3}\sin 2\theta. \end{cases}$$

Comme $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, on a $\cos 2\theta = -\dfrac{1}{3}$ et $\sin 2\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ d'où le système :

$$\left|\begin{array}{l} \operatorname{Log} u_0 = a+b \\ \operatorname{Log} u_1 = a - \dfrac{b}{3} + \dfrac{\sqrt{2}}{3}c \\ \operatorname{Log} u_2 = a - \dfrac{b}{9} - \dfrac{2\sqrt{2}}{9}c \end{array}\right| \begin{array}{l} \dfrac{1}{6} \\ \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{2} \end{array}$$

d'où $a = \dfrac{1}{6}\operatorname{Log} u_0 u_1^2 u_2^3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = (u_0\, u_1^2\, u_2^3)^{1/6}$.

9. On a $f_1(x) = x-1$ d'où $a_1 = 1$. Puis $f_n'(x) = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1}$ est > 0 sur $[0,+\infty[$, donc f_n croît de -1 à $+\infty$, elle s'annule une seule fois en un $a_n > 0$; avec $f_n < 0$ sur $[0, a_n[$, puis > 0.
Comme $f_{n+1}(x) = x^{n+1} + f_n(x)$ on a $f_{n+1}(a_n) = (a_n)^{n+1} > 0$, c'est que $a_{n+1} < a_n$: la suite est strictement décroissante, minorée par 0, donc convergente. Comme $a_2 < a_1 = 1$, on a $\forall n \geqslant 2$, $a_n \leqslant a_2 < 1$.
Or pour $x \neq 1$, $f_n(x) = \dfrac{x^{n+1}-x}{x-1} - 1 = \dfrac{x^{n+1}-2x+1}{x-1}$
d'où l'égalité $(a_n)^{n+1} - 2a_n + 1 = 0$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n)^{n+1} = 0$, puisque $0 \leqslant a_n \leqslant a_2 < 1$, il reste $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{1}{2}$.

10. Soit $u_n = \dfrac{1}{n}\prod\limits_{j=1}^{n}(a+bj)^{1/n} = \prod\limits_{j=1}^{n}\left(\dfrac{a+bj}{n}\right)^{1/n}$. On sait que si la suite des x_n, (>0), est telle que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \lambda$ existe, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n)^{1/n} = \lambda$, (voir la comparaison des critères de Cauchy et de d'Alembert au chapitre 11 sur les séries). Avec ici $x_n = \prod\limits_{j=1}^{n}\dfrac{a+bj}{n}$, on a

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}(a+b(n+1) = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\frac{a+b(n-1)}{n+1}$$

tend vers $\frac{b}{e}$ donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{b}{e}$. (Voir 11.49).

11. La suite est à termes strictement positifs, et $1 + nx_n^2 > 1$ d'où $x_{n+1} < x_n$, donc la suite, décroissante minorée est convergente vers une limite $l \geqslant 0$. Comme on a $x_{n+1} + nx_{n+1}x_n^2 - x_n = 0$, la convergence vers une limite $l > 0$ est exclue, l'expression précédente tendrait sinon vers $+\infty$. Donc $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$.

Sur $\mathbb{R}$, on a $2x \leqslant 1 + x^2$, d'où $2x_2 = \frac{2x_1}{1 + x_1^2} \leqslant 1$. On justifie par récurrence l'inégalité $nx_n \leqslant 1$. Elle est vraie si $n = 2$. On la suppose vraie à l'ordre n. On a $1 - (n+1)x_{n+1} = 1 - \frac{(n+1)(x_n)}{1 + nx_n^2} = \frac{1 + nx_n^2 - nx_n - x_n}{1 + nx_n^2}$, soit $1 - (n+1)x_{n+1} = \frac{(1 - x_n)(1 - n\,x_n)}{1 + n\,x_n^2}$. L'hypothèse $1 - nx_n \geqslant 0$ implique $x_n \leqslant \frac{1}{n} \leqslant 1$ d'où $1 - x_n \geqslant 0$ aussi et finalement $1 - (n+1)x_{n+1} \geqslant 0$.

Puis la suite des nx_n est croissante car :

$$\frac{(n+1)x_{n+1}}{n\,x_n} = \frac{(n+1)x_n}{n\,x_n(1 + nx_n^2)} = \frac{n+1}{n + (n\,x_n)^2}$$

avec $(n\,x_n) \leqslant 1 \Rightarrow \frac{(n+1)x_{n+1}}{n\,x_n} \geqslant \frac{n+1}{n+1}$.

Cette suite des $n\,x_n$, croissante, majorée par 1 admet une limite a non nulle donc $x_n \simeq \frac{a}{n}$, (on a $n\,x_n \geqslant x_1 > 0 \Rightarrow a > 0$).

Enfin $\operatorname{Log} \frac{x_n}{x_{n+1}} = \operatorname{Log}\left(1 + \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right)\right)$, avec $\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 = n\,x_n^2$ équivalent à $n\frac{a^2}{n^2} = \frac{a^2}{n}$, donc $\operatorname{Log} \frac{x_n}{x_{n+1}} \sim \frac{a^2}{n}$. Il s'agit de termes généraux de séries divergentes, les sommes partielles sont équivalentes, donc $\operatorname{Log} x_0 - \operatorname{Log} x_n \sim a^2\left(1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n}\right)$, avec $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ équivalent à $\operatorname{Log} n$ on obtient $\operatorname{Log} x_n \sim -a^2 \operatorname{Log} n$. Comme x_n est équivalent à $\frac{a}{n}$ on obtient $-\operatorname{Log} n \sim -a^2 \operatorname{Log} n$ donc $a^2 = 1$ avec $a > 0$, il reste $a = 1$ d'où $x_n \sim \frac{1}{n}$.

12. Posons $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\alpha}{k+n}$. Dans le terme général $\frac{1}{k+n} \cdot \sin k\alpha$, on a un produit de deux termes de nature différente. Une transformation d'Abel peut servir. On pose $S_k = \sum_{p=0}^{k} \sin(p\alpha)$ donc, pour $k \geqslant 1$, on a

$\sin ka = S_k - S_{k-1}$ et

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{k+n} = \frac{S_{2n}}{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k \left(\frac{1}{k+n} - \frac{1}{k+n+1}\right).$$

Or $S_k = Im\left(\sum_{p=0}^{k} e^{ip\alpha}\right)$. C'est nul si $\alpha = 0(2\pi)$, et pour $\alpha \neq 0(2\pi)$,

on a $$S_k = Im\frac{e^{i(k+1)\alpha} - 1}{e^{i\alpha} - 1} = Im\, e^{i(\frac{k+1}{2} - \frac{1}{2})\alpha} \frac{2i\sin\frac{k+1}{2}\alpha}{2i\sin\frac{\alpha}{2}}$$

soit $$S_k = \frac{\sin\frac{k+1}{2}\alpha \sin\frac{k}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} \text{ d'où } |S_k| \leqslant \frac{1}{|\sin\frac{\alpha}{2}|}.$$

Pour $\alpha = 0(2\pi)$, on a donc $u_n = 0$, tend vers 0, et pour $\alpha \neq 0(2\pi)$

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{|\sin\frac{\alpha}{2}|}\left(\frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+n} - \frac{1}{k+n+1}\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{|\sin\frac{\alpha}{2}|}\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{(n+1)|\sin\frac{\alpha}{2}|},$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ dans tous les cas.

13. La suite sera définie si, pour tout n, on a $1 + u_n > 0$ et $u_n \neq 0$.
Or pour $x > 0$, on a $\text{Log}\,(1+x) < x$, d'où par récurrence, $u_n > 0$ pour tout n.
On étudie la fonction $f : x \rightsquigarrow f(x) = \dfrac{x - \text{Log}\,(1+x)}{x^2}$ de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
On a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \dfrac{1}{2}$; puis $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(1+x)x^2} + \dfrac{2\text{Log}\,(1+x)}{x^3}$ soit $f'(x) = \dfrac{1}{x^3}h(x)$ avec $h(x) = 2\text{Log}\,(1+x) - x - \dfrac{x}{1+x}$.
On a $h'(x) = \dfrac{2}{1+x} - 1 - \dfrac{1}{(1+x)^2} = \dfrac{-x^2}{(1+x)^2}$. La fonction h décroît, or $h(0) = 0$, donc $h < 0$ sur $]0, +\infty[$, d'où f décroît de $\dfrac{1}{2}$ à 0 et $f([0, +\infty[) \subset [0, \frac{1}{2}] \Rightarrow$ *a fortiori* $f([0, \frac{1}{2}]) \subset [0, \frac{1}{2}]$.

Sur $[0, \frac{1}{2}]$, f est contractante car on a :

$$\begin{aligned} f'' &= \frac{2}{x^3} + \frac{1}{(1+x)^2x^2} + \frac{2}{(1+x)x^3} - \frac{6\mathrm{Log}\,(1+x)}{x^4} + \frac{2}{(1+x)x^3} \\ &= \frac{1}{x^4}(2x + \frac{4x}{1+x} + \frac{x^2}{(1+x)^2} - 6\mathrm{Log}\,(1+x)) = \frac{u(x)}{x^4}. \end{aligned}$$

Puis $u'(x) = 2 + \frac{4}{(1+x)^2} + \frac{2x}{(1+x)^2} - \frac{2x^2}{(1+x)^3} - \frac{6}{1+x} = \frac{2x^3}{(1+x)^3}$.
La fonction u croît sur $[0, +\infty[$, or $u(0) = 0$, u est donc positive, f'' aussi, f' est croissante. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$. Par développement limite en 0, on a $f'(x) = \frac{1}{x^3}(2\mathrm{Log}\,(1+x) - x - \frac{x}{1+x})$ qui donne

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^3}\left(2(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) - x - x(1 - x + x^2) + o(x^3)\right) \\ &= \frac{1}{x^3}\left(-\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right) \end{aligned}$$

d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = -\frac{1}{3}$.
Sur $[0, \frac{1}{2}]$ complet, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{3}$, la fonction f est contractante donc la suite u converge vers le seul point fixé de f sur $[0, \frac{1}{2}]$.

14. On peut en fait définir deux suites d'entiers, (p_n) et (q_n) par $p_0 = a, p_1 = c$; $q_0 = b, q_1 = d$; et les relations $p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$ et $q_n = q_{n-1} + q_{n-2}$, on aura alors $u_n = \frac{p_n}{q_n}$.
L'équation caractéristique, (de la récurrence linéaire) est $r^2 - r - 1 = 0$ de racines $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ donc $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, (\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2$ tels que

$p_n = \alpha \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

et $q_n = \alpha' \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta' \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \frac{\alpha}{\alpha'}$.
Les systèmes

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha + \beta = a \\ \alpha(1+\sqrt{5}) + \beta(1-\sqrt{5}) = 2c \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{c} \alpha' + \beta' = b \\ \alpha'(1+\sqrt{5}) + \beta'(1-\sqrt{5}) = 2d \end{array} \right.$$

conduisent à $\alpha = \dfrac{2c + a(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{5}}$ et $\alpha' = \dfrac{2d + b(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{5}}$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{2c + a(\sqrt{5}-1)}{2d + b(\sqrt{5}-1)}$,

(car $2d + b(\sqrt{5}-1) = b\sqrt{5} + 2d - b$ est non nul puisque $\sqrt{5}$ est irrationnel et b non nul.

15. Si la suite x est définie, on a $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{x_n^2}$, donc elle est croissante, et divergente vers $+\infty$ car une limite réelle éventuelle, λ, devrait vérifier l'égalité $\lambda = \lambda + \dfrac{1}{\lambda^2}$ soit $\dfrac{1}{\lambda^2} = 0$.

La suite est définie si pour tout n, on a $x_n \neq 0$. La fonction f définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ est de classe c^∞ sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x^3} = \dfrac{x^3-2}{x^3}$.

On a le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-1	0		$2^{1/3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		‖	$-$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	m | > 0	↗ $+\infty$

Comme f ne s'annule que pour $x^3 = -1$ soit $x = -1$, le minimum $m = f(2^{1/3})$ est strictement positif.

Pour $x_0 > -1$, on a $x_1 > 0$ et, $\forall n \geqslant 1$, $x_n > 0$ en fait.

La fonction f est strictement monotone de $]-\infty, 0[$ sur $]-\infty, +\infty[$, soit g sa fonction réciproque, strictement croissante de $]-\infty, +\infty[$ sur $]-\infty, 0[$.

Si à partir d'un $x_0 < 0$, on suppose calculés $x_1, \ldots, x_n$, et si l'un des termes calculés est > 0, la suite devient définie.

Supposons donc $x_0 < 0$ ainsi que $x_1, \ldots, x_n$. On a $x_n = \overline{f}^n(x_0)$ avec $\overline{f}$ restriction de f à $]-\infty, 0[$, donc $x_0 = \left(\overline{f}^{-1}\right)^n(x_n) = g^n(x_n)$.

On ne pourra pas calculer x_{n+1} si $x_n = 0$ donc si $x_0 = g^n(0)$.

On suppose donc que $x_0 \notin \{g^n(0);\ n \in \mathbb{N}\}$: la suite x est définie et diverge en croissant vers $+\infty$.

$$\text{On a } (x_{n+1})^\alpha - x_n^\alpha = \left(x_n + \frac{1}{x_n^2}\right)^\alpha - x_n^\alpha = x_n^\alpha\left[\left(1 + \frac{1}{x_n^3}\right)^\alpha - 1\right]$$

$$\simeq \alpha x_n^{(\alpha-3)}, \text{ pour } \alpha \neq 0, \text{ puisque } \frac{1}{x_n} \text{ tend vers } 0.$$

Pour $\alpha = 3$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_{n+1})^3 - x_n^3 = 3$, par Césaro on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n^3 - x_0^3}{n} = 3 \text{ d'où } x_n \underset{n\to+\infty}{\simeq} (3n)^{1/3}.$$

On veut le terme suivant.

Soit $w_n = (x_{n+1})^3 - x_n^3 - 3 = x_n^3\left(\frac{3}{x_n^3} + \frac{3}{x_n^6} + o\left(\frac{1}{x_n^6}\right)\right) - 3$, (développement limite), ou encore $w_n = \frac{3}{(x_n)^3} + o\left(\frac{1}{x_n^3}\right)$.

Comme $x_n \simeq (3n)^{1/3}, w_n \simeq \frac{1}{n}$: la série des w_n diverge et sa somme partielle W_n est équivalente à $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ donc à $\operatorname{Log} n$. (voir le chapitre 11 sur les séries).

Or $W_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left((x_{k+1})^3 - (x_k)^3 - 3\right) = x_n^3 - 3n - x_0^3$

d'où $(x_n)^3 - 3n - x_0^3 \simeq \operatorname{Log} n$, le x_0^3 est négligeable et $x_n^3 = 3n + (\operatorname{Log} n)(1 + \varepsilon_n)$ avec $\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$, d'où

$$\begin{aligned} x_n &= (3n)^{1/3}\left(1 + \frac{\operatorname{Log} n}{3n}(1 + \varepsilon_n)\right)^{1/3} \\ &= (3n)^{1/3}\left(1 + \frac{\operatorname{Log} n}{9n} + o\left(\frac{\operatorname{Log} n}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

et on obtient le développement asymptotique

$$x_n = (3n)^{1/3} + \frac{\operatorname{Log} n}{3(3n)^{2/3}} + o\left(\frac{\operatorname{Log} n}{n^{2/3}}\right).$$

Lexique

Imprimé en France
Imprimerie des Presses Universitaires de France
73, avenue Ronsard, 41100 Vendôme
Août 1993 — N° 39 720

Après une étude de la topologie générale dégageant les notions de sous-espace topologique et d'espace produit, on aborde les espaces connexes et compacts.

Les propriétés métriques sont alors introduites, ce qui met en évidence l'importance des formulations séquentielles dans ces espaces, permet de parler d'espaces complets et de justifier des théorèmes tels que le Théorème du point fixe, le Théorème du prolongement d'une fonction uniformément continue ou le Théorème de Baire.

Ces notions sont appliquées dans le cadre des espaces vectoriels normés où l'on justifiera les Théorèmes de Riesz, de Banach, du graphe fermé et de Banach-Steinhauss.

La construction de **R,** « complété de **Q** », a mis l'accent sur la structure de corps ordonné valué complet. L'étude des propriétés des fonctions de variable réelle à valeurs réelles, ainsi que celles de l'intégrale de Riemann et des suites réelles s'appuient sur cette structure.

192 FF

22409457/8/93

Didier Thimonier