mathématiques

Bernard
Gostiaux

Exercices de mathématiques spéciales

Topologie, analyse

Tome 2

puf

Exercices de mathématiques spéciales

Tome 2

Topologie, analyse

COLLECTION DIRIGÉE PAR PAUL DEHEUVELS

EXERCICES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

MP, MP*

nouveaux programmes

TOME 2

Topologie, analyse

BERNARD GOSTIAUX

PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

ISBN 2 13 048728 9
ISSN 0246-3822

Dépôt légal — 1re édition : 1997, septembre

108, boulevard Saint-Germain, 75006 Paris

Avant-Propos

L'étude d'exercices de mathématiques ne doit pas être considérée comme un « gavage mémoriel » de résultats même si cet aspect intervient, mais comme l'occasion de développer un esprit d'analyse du problème posé, des outils dont on dispose pour trouver la méthode permettant de résoudre la question posée.

Je me suis efforcé, en préambule, d'analyser ainsi un certain nombre d'exercices et je souhaite que vous puissiez appliquer pleinement cette façon de faire.

Les nouveaux programmes permettent de disposer d'outils très efficaces pour étudier les fonctions définies par les intégrales impropres. Les derniers exercices du chapitre 9 sont donc rédigés en utilisant *les Théorèmes de convergence dominée et de convergence monotone*, ce qui, lorsqu'ils s'appliquent, donne des résultats facilement.

Bien sûr, comme on ne peut pas banir par simple décret les intégrales semi-convergentes, les raisonnements à l'aide des limites uniformes d'intégrales sur des segments « croissants » de réunion l'intervalle d'intégration sont toujours d'actualité, et c'est pourquoi j'en ai gardé aussi.

Une partie importante du programme est consacrée aux espaces fonctionnels, ainsi qu'aux séries entières et aux séries de Fourier, c'est pourquoi j'ai préféré mettre les exercices sur les espaces hermitiens ou préhilbertiens dans ce tome d'exercices d'analyse.

TABLE DES MATIÈRES

Tome 1. Algèbre

Tome 2. Topologie, Analyse

Tome 3. Géométrie, géométrie différentielle

1. Soit E un espace vectoriel normé et (P) la propriété : $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \in]0, 1[$, $\forall (x, y) \in E^2, (\|x\| = \|y\| = 1 \text{ et } \|x - y\| \geqslant \varepsilon) \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1 - \delta$.

Donner un exemple d'espace vectoriel normé où (P) est vraie.

On suppose E complet et vérifiant (P). Soit L une forme linéaire continue sur E. Montrer qu'il existe x de norme 1 tel que $|||L||| = L(x)$.

Donner un contre-exemple où $|||L|||$ n'est pas atteinte.

Comment y « voir » un peu plus clair dans cette condition apparemment abstraite ? En pensant géométrie. Si vous avez x et y de norme 1, avec 0, c'est un triangle isocèle, ou deux points sur le cercle unité dans un plan euclidien, et si la corde est de longueur $\geqslant \varepsilon$, la hauteur issue de 0 est de longueur $\leqslant 1 - \delta$: c'est de la petite géométrie cela.

Puis, dans E complet, avoir x tel que $L(x) = |||L|||$, c'est obtenir x comme limite d'une suite de Cauchy construite à partir des x_n unitaires tels que $|L(x_n)|$ converge vers $|||L|||$.

Enfin, un contre-exemple sera à chercher dans $\mathbb{R}[X]$, prototype des E.V.N. jamais complets. Si vous ne trouvez pas, allez en 6.6.

---

2. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, telle qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, de degré impair, vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant |P(x)|.$$

Que dire de f ?

Secouons les ingrédients. La fonction f est C^∞, on peut penser série entière, mais la classe C^∞ ne suffit pas, il faut s'assurer que dans un développement de Taylor-Lagrange, le reste tend vers zéro, ..., tiens mais les dérivées sont uniformément (en n) majorées par P, polynôme, donc localement borné...

Et le degré impair, que fait-il là si ce n'est pour assurer l'existence d'un zéro x_0 de P, donc d'un zéro commun à toutes les $f^{(n)}$: si f est analytique, elle est nulle ! Voir 7.10.

---

3. Soit f : $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que $f(0) = 0$ et f'' est bornée.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$.

Les $\dfrac{k}{n^2}$, compris entre 0 et $\dfrac{1}{n}$, s'accumulant sur l'origine, le comportement de la fonction en 0 est primordial.

Comme f est deux fois dérivable, je serai tenté d'écrire Taylor Young à l'ordre 2 en 0 pour f et de voir... (en 8.1.).

---

4. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux et bornée, et α un réel fixé. Déterminer la limite de :

$$u_n = n\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp\left(-\frac{n^2(x-\alpha)^2}{4}\right)\mathrm{d}x.$$

La fonction $t \leadsto \exp\left(-\dfrac{n^2(t-\alpha)^2}{4}\right)$ est paire en $t-\alpha$, et présente une « bosse » en α car si $|t-\alpha| \geqslant a > 0$, lorsque n tend vers l'infini, la décroissance vers 0 des valeurs de l'exponentielle est rapide.

Tout se « concentre » en α, où f se comporte comme $f(\alpha+0)$ ou $f(\alpha-0)$. Ceci m'incite à introduire :

$$v_n = n\int_{-\infty}^{\alpha} f(\alpha-0)\exp\left(-\frac{n^2(x-\alpha)^2}{4}\right)\mathrm{d}x + n\int_{\alpha}^{+\infty} f(\alpha+0)\,...,$$

(que je sais calculer, avec $n(x-\alpha) = t$), puis à évaluer $u_n - v_n$. Voir en 7.11.

---

5. Calculer l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-x}{\ln x}\mathrm{d}x$.

Le $\ln x$ m'embête. Taupinalement, je pose $x = e^t$ et I conduit à $\int_{-\infty}^{0} \frac{1-e^t}{t} e^t \mathrm{d}t$, on applique Taylor-Lagrange à la fonction $t \leadsto \frac{1-e^t}{t}$, d'où un calcul taupinal donnant I sous forme d'une série.

Ayons une approche moins statique, plus variationnelle, en intégrant une fonction « proche », pour voir, (c'est du poker en somme mais le bluff ne suffit pas : il faudra justifier).

Le $\ln x$ m'embête, mais la dérivée, en y, de $e^{y \ln x}$ est $\ln x$, et pour y proche de 0, et x fixé, $e^{y \ln x}$ est proche de 1.

Alors si je calculais $\varphi(y) = \int_0^1 \frac{e^{y \ln x} - x}{\ln x} \mathrm{d}x$, ... Si vous n'y parvenez pas, voyez en 9.9 tout l'intérêt de cette méthode où, pour étudier un problème, on le modifie pour voir ce qu'engendre la modification.

---

6. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel q vérifiant $|q| < 1$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1-qx)f(qx).$$

Montrer que f se développe en série entière de rayon de convergence infinie.

Si on itère la relation, comme $|q| < 1$, $f(x)$ va être un produit infini.

Comment passer de là à une série entière, on ne sait même pas si f est dérivable, donc pas de Taylor... Mais f intervient linéairement dans la relation, f est en fait connu dès que $f(0)$ est donné, on a un espace de solutions de dimension 1... et si parmi elles il y avait une série entière ? Cette démarche est proche de celle utilisée pour résoudre des équations différentielles linéaires, avec des séries entières. Voyez le détail en 10.2.

---

7. Soit C une partie bornée génératrice de E espace euclidien. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs. Pour u dans $\mathcal{S}$ on pose :

$$\mathrm{P}_u = \{x \in \mathrm{E}\ ;\ \langle u(x), x\rangle \leqslant 1\}.$$

Soit $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{S} ;\ \mathrm{C} \subset \mathrm{P}_u\}$.

a) Montrer que $\mathcal{A}$ est compact.

b) Montrer que $\det u$ atteint son maximum sur $\mathcal{A}$ en un point unique.

On est en dimension finie, donc avoir $\mathcal{A}$ compact, c'est avoir $\mathcal{A}$ fermé borné, et fermé s'obtient le plus souvent par des images réciproques de fermés par des applications continues. Essayons de traduire la symétrie comme cela...

Pour l'unicité d'un point de $\mathscr{A}$ où $\det u$ est maximum, si c'est atteint en deux points u et v, pourquoi ne pas considérer le milieu $w = \dfrac{u+v}{2}$ s'il est encore dans $\mathscr{A}$, et écrire $\det w \leqslant \det u$ ... Voyez en 6.8.

---

8. Soit une suite réelle décroissante convergeant vers 0, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) Montrer que, ($\sum a_n \cos nx$ converge) $\Leftrightarrow$ ($\sum a_n$ converge).

b) Montrer que, ($\sum a_n \sin nx$ converge uniformément) $\Leftrightarrow$ (na_n tend vers 0).

Les a_n étant positifs, le a) ne pose pas de problème.

Pour le b), il est bon de se rappeler qu'une convergence est uniforme si et seulement si le critère de Cauchy est vérifié uniformément, ce qui permettra peut-être, avec l'inégalité due à la convexité :

$\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi} x$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, de passer des $a_n \sin nx$ à des na_n en choisissant bien x.

Enfin, quand rien ne marche, pensez à une transformation d'Abel pour débloquer la situation. Voir en 11.2.

---

9. Soit f continue, 2π périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et γ dans $[0, 2\pi]$, tel que $\dfrac{\gamma}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

Montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x + k\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f$.

Une approche possible, quand on veut un résultat valable pour tout élément f d'un ensemble $\mathscr{E}$, (ici les fonctions continues 2π périodiques), est de se demander pour quelles fonctions il suffirait d'avoir le résultat.

Les deux membres de l'égalité dépendent linéairement de f, semblent stables par limite uniforme. Ne pourrait-on pas approcher f par des polynômes trigonométriques en appelant Stone Weierstrass à la rescousse ? Ou bien passer par les fonctions continues, 2π périodiques, C^1 par morceaux ? Allez voir en 11.3.

---

10. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^3$ et $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de droites de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\Omega \backslash (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n)$ est connexe.

On peut justifier la connexité par arcs, et même essayer de joindre deux points a et b de $\Omega \backslash (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n) = \mathscr{A}$ par une ligne polygonale restant dans $\mathscr{A}$, car l'aspect ouvert de Ω va nous donner une sphère, des disques dans les plans, et les droites des segments à éviter : on pourra construire une ligne polygonale esquivant ces segments. Voyez en 6.9. la justification.

---

11. Montrer que l'ensemble Ω des matrices carrées d'ordre n, réelles, de polynôme minimal de degré n, est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Le tout est de caractériser l'appartenance d'une matrice M à Ω par une condition donnant des images réciproques d'ouverts.

Comme le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique, (Cayley Hamilton), il est de degré n si et seulement si I, M, M^2, ..., M^{n-1} est famille libre, ce qui, dans une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, en prenant la matrice des composantes, se traduit par... Pour plus de renseignements, allez en 6.13. chercher le mineur qui vous manque.

---

12. Donner un équivalent en $+\infty$ de $f(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}\,dt$.

Si on y regarde d'un peu près, on a un produit de deux fonctions de classe C^∞, $x \leadsto e^{-x^2}$ et $x \leadsto \int_0^x e^{t^2}\,dt$, ou, comme $e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}}$, un quotient de deux fonctions qui tendent vers $+\infty$, de dérivées ayant e^{x^2} en commun, peut être qu'avec la règle de l'Hospital généralisée... Allez-y, en 7.23, pas à l'hôpital.

---

13. Soit $a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ et $u_n = d(a_n, \mathbb{Z})$. Que peut-on dire de la suite des $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Les a_n tendent vers $+\infty$, et il faut les placer par rapport aux entiers ? Dur dur ! Avez-vous pensé au conjugué $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$? Avec $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ on a les deux zéros du trinôme $X^2 - X - 1$, à coefficients entiers et on a une valeur de $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ à l'aide des coefficients, entiers de ce polynôme. Avec un peu de chance, on va le calculer u_n ! Voir en 8.10.

---

14. On considère une suite (a_n) de réels telle que :

$\lim\limits_{n \to +\infty} a_n \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$. Comportement de a_n en $+\infty$.

On est sur $\mathbb{R}$, corps ordonné donc les carrés sont positifs, (faux sur $\mathbb{C}$), et la suite des $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2$ est croissante, donc a deux comportements : elle est soit bornée, donc convergente, soit divergente vers $+\infty$. C'est une base de départ que j'exploite en 8.19.

---

15. Soit φ une application de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi''^2$ convergent. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'^2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi''^2\right)^{1/2},$$

et que cette majoration est la meilleure possible.

Il y a la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'^2$ à obtenir, ceci sans doute en intégrant par parties $\varphi\varphi''$, ce qui reporte le problème sur $\varphi\varphi''$, mais (identité, espace l^2), on sait que :

$$|2\varphi(x)\varphi''(x)| \leqslant |\varphi(x)|^2 + |\varphi''(x)|^2.$$

Il y a un travail de passage à la limite à partir d'une intégration par parties sur un segment.

De plus, ceci reliera $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varphi''$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'^2$, d'où du Cauchy-Schwarz pour terminer, (et une idée de ce que doit être le terme « tout intégré » de l'intégration par parties). Allez voir si nécessaire en 7.12.

---

16. Soit X métrique compact et L_k l'ensemble des applications k.lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que si une suite d'éléments de L_k converge simplement, la convergence est uniforme.

La traduction de f k.lipschitzienne fait intervenir deux valeurs x et y de la variable : cela passe à la limite pour la convergence simple.

Avec des f_n qui convergent vers f, simplement, toutes les fonctions étant k.lipschitziennes, de la convergence en x fixé, on va déduire une convergence « localement uniforme », c'est-à-dire une boule ouverte $\mathscr{B}_0(x, \alpha_x)$ et un entier n_x tel que $n \geqslant n_x$ et y dans $\mathscr{B}_0(x, \alpha_x)$ donnera $|f_n(y) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

Après, ce n'est plus qu'une question de recouvrement fini, traitée en 9.7.

---

17. Soient f et g deux fonctions de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, g étant 1.périodique. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t)g(nt)\mathrm{d}t = \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t\right).$$

Peut-on étendre le résultat à des fonctions réglées ?

« Diviser pour régner », ah que voilà une idée qu'elle est bonne ! Pourquoi ne pas traiter le cas de f et g réglées, g étant 1.périodique, et profiter de la linéarité de l'intégrale pour commencer par f constante, d'où le résultat pour f en escalier, et étendre ensuite par une interversion de limites bien justifiée.

C'est ce que j'ai fait en 9.10.

---

18. On pose $u_n(x) = (-1)^n \sin(\sin(...(\sin x)...))$. Montrer que la série des u_n converge simplement, mais pas normalement.

Le premier $\sin x$ est dans $[-1, 1]$, et si on est dans $[-1, 0]$, (resp. $[0, 1]$) on y restera toujours en faisant agir encore et encore la fonction sinus, donc on est en série alternée, et quitte à changer x en $-x$, on suppose $\sin x \geqslant 0$. Alors ($\sin x \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$), on doit pouvoir conclure.

Pour la non convergence normale, je serais assez tenté de rechercher un équivalent de $|u_n(x)|$, en cherchant, (c'est à connaître) α tel que :

$$\lim_{n \to +\infty} |u_{n+1}(x)|^{\alpha} - |u_n(x)|^{\alpha} \text{ existe et est non nulle.}$$

Du Césaro conduira, sauf erreur a du $|u_n(x)|$ en $\dfrac{3}{\sqrt{n}}$: à vous de jouer en 9.17.

---

19. On considère la série harmonique dans laquelle on supprime tous les termes dont le numérateur contient au moins une fois un chiffre fixé non nul a, dans son écriture décimale. Nature de la série.

Les termes ne sont pas tous de même signe et je ne me sens pas capable de déterminer le rang des termes enlevés : comme on ne peut pas modifier l'ordre des termes d'une série semi-convergente, je vais chercher à justifier l'absolue convergence en sommant par paquets associés au nombre de chiffres de n. Voir la suite en 8.5.

---

20. Étude de la suite définie par la donnée de u_0 et u_1 strictement positifs, et de la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = \ln(1 + u_{n+1}) + \ln(1 + u_n).$$

Là il y a du « culturel » dans l'air. Un procédé d'étude des suites récurrentes doubles, (ou triples...) consiste, en justifiant tout ce qui intervient, à considérer les suites des $a_n = \inf\{u_p \,;\, p \geqslant n\}$ et des $b_n = \sup\{u_p \,;\, p \geqslant n\}$, suites vérifiant les inégalités :

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n,$$

puis à parvenir à justifier que les limites a et b de ces suites, (monotones bornées) sont égales !

À vous de jouer et de conclure. Si vous n'y parvenez pas, voyez en 8.6.

---

21. Soit une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et k un entier non nul. Montrer qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A(A^*A)^k = B$.

La matrice A*A est hermitienne, positive, diagonalisable dans le groupe unitaire, si tout était diagonal, ce serait plus facile.

C'est là qu'il est bon de savoir que B peut s'écrire $B = UH$ avec U unitaire et H hermitienne positive.

En diagonalisant H en $H = V^*DV$ avec V unitaire et D diagonale positive, on cherchera A telle que :

$A(A^*A)^k = B = UV^*DV = WDV$, avec $W = UV^*$ et V matrices unitaires.

On les flanque de l'autre côté, on introduit $A' = W^{-1}AV^{-1}$ donc aussi $A' = W^*AV^*$, et peut-être que cela s'arrange ? Voir 11.13.

---

22. Soit une fonction f indéfiniment dérivable de l'intervalle borné $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

(i) f admet une infinité de zéros sur un segment $[c, d] \subset]a, b[$;

(ii) $\sup\limits_{x \in]a, b[} \left|f^{(n)}(x)\right| = 0(n!)$.

Montrer que f est identiquement nulle.

A partir d'un point d'accumulation, x_0, de l'ensemble des zéros de f dans le compact $[c, d]$, on peut construire une suite strictement monotone de zéros de f, convergeant vers x_0, et par Rolle, en itérant, on aura des suites de zéros de chaque $f^{(n)}$, convergeant vers x_0, d'où la non vacuité de $\Omega = \{x \in]a, b[, \forall n,\ f^{(n)}(x) = 0\}$.

Si Ω avait la gentillesse d'être fermé, ouvert, (le (ii) peut servir) dans un intervalle, (donc dans un connexe...). Cela fonctionne très bien en 10.15.

---

23. Soit une suite complexe, de terme général a_n, telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ existe, $l > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série des $\frac{a_n}{n!}z^n$. On note f la fonction somme. On suppose que $\frac{\ln(|f(z)|)}{|z|}$ a une limite l' lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$. Montrer que $l = l'$.

Vu la fin de l'énoncé, on doit avoir un rayon de convergence infini. De plus, avec $\varepsilon > 0$ donné et $|a_n| \leqslant (l+\varepsilon)^n$ pour $n \geqslant$ un certain n_0, on doit pouvoir majorer $\ln(|f(z)|)$ pour déduire une inégalité entre l et l'.

Quant à passer de $\frac{\ln|f(z)|}{|z|} \leqslant l' + \varepsilon$, pour $|z|$ assez grand, à un résultat sur $\sqrt[n]{|a_n|}$, pensez aux formules intégrales de Cauchy qui donnent les a_n à l'aide de la fonction.

Le reste n'est que question de mise en forme, faite en 10.20.

---

24. Soit K = $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E = $\mathscr{M}_n(\mathrm{K})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. Soit $r \leqslant n$.

a) Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à r est fermé dans E.

b) Montrer que l'ensemble des matrices de rang r est dense dans l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à r. Traduire ce résultat pour $r = n$.

Le a) est facile : avoir A de $\mathscr{M}_n(\mathrm{K})$ de rang $\leqslant r$ c'est avoir tous les mineurs d'ordre $s > r$ nuls, et on obtient des polynômes par rapport aux α_{ij}, coefficients de A, qui doivent être nuls.

Le b) se traitera en mettant A, de rang $< r$, sous une forme matrice bloc $\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec A' carrée régulière d'ordre s = rang de A, et en adjoignant alors $r - s$ éléments diagonaux, non nuls, sous A', qui tendront vers 0, cela doit être possible.

Allez en 6.28 voir comment, en mettant les données sous une forme convenable, on se tire d'affaire.

---

25. Soit f une application convexe dans $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$0 \leqslant \frac{1}{2} f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) - \int_1^n f \leqslant \frac{1}{8}(f'(n) - f'(1)).$$

On doit comparer une somme et une intégrale : il peut être judicieux de découper l'intégrale en la somme des n intégrales sur les segments $[k, k+1]$, puis encadrer ces intégrales.

Pour cela, on peut encadrer la fonction convexe par la corde et la tangente, éventuellement intégrer par parties pour faire intervenir la dérivée, croissante... Il y a de nombreuses possibilités. Voir 7.22.

---

26. Soit E métrique compact et f : E $\mapsto$E telle que :

$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2, x \neq y$, on ait $\mathrm{d}(f(x), f(y)) < \mathrm{d}(x, y)$.

Montrer que f admet un point fixe, unique.

On cherche a, (unique ?), tel que $f(a) = a$, ou encore $\mathrm{d}(f(a), a) = 0$. Avec E compact, ne serait-ce pas une borne inférieure atteinte pour $x \rightsquigarrow \mathrm{d}(f(x), x)$?

Allez vérifier la rigueur de votre justification en 6.14.

---

27. Soit E un espace vectoriel normé complet, Ω un ouvert borné non vide de E. On suppose que pour tout (x, y) de Ω^2, il existe une boule ouverte B contenue dans Ω et contenant $\{x, y\}$. Montrer que Ω est une boule ouverte.

Une boule, ouverte ou non, a un centre et un rayon. Ce rayon ne peut être que... Voyons nos hypothèses. Il y a dans Ω des boules ouvertes, donc on peut penser au sup des rayons des boules ouvertes contenues dans Ω, borne supérieure r qui est limite d'une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d'où des centres $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Et si cette suite était de Cauchy...

Il vous reste bien des vérifications ! Aidez-vous si besoin de 6.15.

---

28. Soit A un automorphisme continu d'un Banach E et f une application k.lipschitzienne de E dans E. Montrer que, si $k < \dfrac{1}{|||\mathrm{A}^{-1}|||}$, l'application $\mathrm{A} + f$ est un homéomorphisme de E sur lui-même.

L'aspect bijectif de $\varphi = \mathrm{A} + f$ sera obtenu si on justifie que, pour y dans E, l'équation $\mathrm{A}(x) + f(x) = y$ a une solution unique, ou encore A étant un automorphisme, qu'il existe un et un seul x tel que $x = \mathrm{A}^{-1}(y) - \mathrm{A}^{-1} \circ f(x)$, mais c'est avoir un point fixe pour $\theta : x \rightsquigarrow \mathrm{A}^{-1}(y) - \mathrm{A}^{-1} \circ f(x)$.

Et un point fixe dans un Banach, on est en domaine connu, non ? Allez en 6.22 pour achever la résolution.

---

29. Soit f une application de classe C^1 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$u_n = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Déterminer la limite de la suite des nu_n.

On ne compare bien que des choses de même nature... Alors, une intégrale, une somme : coupons l'intégrale en somme. Avec $x_k = a + k \cdot \dfrac{b-a}{n}$ et F primitive de f, on parvient à :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} (F(x_{k+1}) - F(x_k) - (x_{k+1} - x_k)F'(x_k)),$$

et ma foi, allez voir en 7.17 comment Taylor-Lagrange d'ordre 2 pour F peut intervenir !

---

30. Étude de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin n}{n - \sqrt{n}\sin n}$.

Le dénominateur devient positif pour n assez grand, mais on ne maîtrise pas le signe des sin n. Alors, en mettant en évidence « l'équivalent » $\dfrac{\sin n}{n}$, et en écrivant :

$$u_n = \frac{\sin n}{n} + \left(\frac{\sin n}{n - \sqrt{n}\sin n} - \frac{\sin n}{n}\right) = \frac{\sin n}{n} + w_n,$$

on est conduit à étudier la série des w_n, pour conclure en 8.11.

---

31. Soit une fonction g, 2π périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, paire, nulle sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, valant $\cos x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Déterminer son développement en série de Fourier.

Soit a réel, déterminer, s'il en existe, une solution 2π périodique de l'équation différentielle $y'' + ay = g$.

Comme g est continue, C^1 par morceaux, la première partie n'offre aucune difficulté.

Pour la deuxième, on cherche y deux fois dérivable, avec $y'' = g - ay$, continue et C^1 par morceaux : il doit être possible de chercher y sous forme de somme d'une série de Fourier, de terme général $x \rightsquigarrow u_n(x) = c_n(y)e^{inx}$. Le problème est de justifier la dérivation terme à terme, 2 fois, donc d'avoir une convergence uniforme de la série des $u''_n(x)$. Ceci fait on identifie terme à terme, comme pour les séries entières. Allez vérifier mes calculs en 11.8.

---

32. Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer que

$$\left(\text{trace }(A^*A) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2\right) \Leftrightarrow (A^*A = AA^*).$$

L'exercice fait intervenir valeurs propres, trace : voilà des notions stables par changement de base. On est sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, donc on pense trigonalisation de A, mais si $P^{-1}AP = T$ est triangulaire, qu'en est-il de $P^{-1}(A^*A)P$? Rien de remarquable sauf si P est unitaire car on récupérera au milieu du $PP^* = I_n$ ... Aussi, en 11.9, ai-je commencé par justifier que A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans le groupe unitaire.

---

33. Développement asymptotique en $+\infty$ de :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Après l'étude du domaine de définition voyons comment développer en $\frac{1}{x}$: en faisant apparaître $\frac{1}{x}$ dans :

$$\frac{1}{x+t} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{t}{x}} = \frac{1}{x}\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{t^k}{x^k} + \frac{(-1)^{n+1}\left(\frac{t}{x}\right)^{n+1}}{1+\frac{t}{x}}\right),$$

et en sachant qu'on a alors une identité.

Il reste, en 9.18, à justifier la convergence des intégrales intervenant, (merci e^{-t}), et à voir si on a le développement voulu...

---

34. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme :

$$\|u\| = \sup\{|u_n| \,;\, n \in \mathbb{N}\}.$$

a) Montrer que E est complet.

b) Existe-t-il dans E un sous-ensemble dénombrable partout dense ?

Le a) n'offre pas de difficulté. Quant au b), prendre une partie dénombrable de E, c'est prendre une suite de suites, (ici bornées), et, ... mais c'est de la suite diagonale cela, on va construire une suite bornée dont le $p^{\text{ième}}$ terme sera « distant » du $p^{\text{ième}}$ terme de la $p^{\text{ième}}$ suite de la partie. Voir en 6.31 pour plus de détails.

---

35. Quelle est l'adhérence, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, des matrices diagonalisables.

Il faut déjà avoir une idée du résultat, et pour cela voir ce qui caractérise une matrice carrée A non diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: c'est d'avoir des valeurs propres multiples, avec, pour l'une d'entre elles au moins, λ, une dimension de sous-espace propre insuffisante.

On est sur $\mathbb{C}$... A est trigonalisable, et si sur la diagonale, là où il y a $\lambda, \lambda, \ldots, \lambda$, α fois, on ajoutait des petits chouïas distincts, ... on obtiendrait A' triangulaire « proche » de la forme triangulaire de A... et diagonalisable cela doit marcher. Il ne reste qu'un peu de rigueur dans la mise en forme, faite en 6.35.

---

36. Existe-t-il, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, des normes telles que, pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout P de $GL_n(\mathbb{R})$, $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$.

Déterminer toutes les semi-normes N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout P de $GL_n(\mathbb{R})$, on ait $N(P^{-1}AP) = N(A)$.

En fait, si on secoue l'hypothèse $\forall A \ldots$, $\forall P \ldots$, $P^{-1}(AP) \ldots$ on peut se dire que :

$\|P^{-1}(PA)P\| = \|PA\|$, or $P^{-1}PAP = AP$, donc on transforme en l'égalité des normes de PA et de AP, ... $\forall A, \ldots, \forall P \in GL_n(\mathbb{R})$ donc aussi $\forall Q \in \overline{GL_n(\mathbb{R})} \ldots$, en fait AB et BA ont même norme mais là, ça ne va plus car un produit AB peut être nul sans que BA le soit.

Pour une semi-norme, on passera aussi à $N(AB) = N(BA)$ pour tout couple (A, B) de matrices, mais alors, comme la différence entre une norme est une semi-norme est l'existence d'éléments X de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $N(X) = 0$, il faut peut-être s'inquiéter de la structure de l'ensemble de ces éléments.

Aller en 6.36 si l'exercice vous résiste.

---

37. Soit E un espace vectoriel normé réel, et A une partie non vide de E. Montrer que l'équivalence entre :

1°) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $\exists (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in A^n$, $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{B}(a_i, \varepsilon)$;

2°) de toute suite d'éléments de A, on peut extraire une suite de Cauchy.

Analysons la situation. Si on a le 1°), ce quantificateur $\forall \varepsilon$ réel donne bien sûr du : « $\forall \varepsilon_n$, ε_n tendant vers 0 » ; si A est dans un nombre fini de boules, l'une contient une suite extraite d'une suite de A, ..., en somme, on extrait en cascade, (indexée par $\mathbb{N}$), des suites : il y a de la suite diagonale là-dessous...

Et pour 2°) $\Rightarrow$ 1°) : par l'absurde, si on n'a pas 1°), on peut construire une suite avec des points distants les uns des autres d'une quantité fixe... ça n'est pas du Cauchy !

La solution est en 6.39.

---

38. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, K une partie non vide, compacte et convexe de E. Soit A une partie de L(E) dont tous les éléments permutent entre eux, et telle que K soit stable par tout élément de A.

Pour a dans A et n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \frac{1}{n}(\mathrm{id} + a + \ldots + a^{n-1})$.

a) Montrer qu'il existe x dans K tel que, pour tout a de A et tout n de $\mathbb{N}^*$, on ait $x \in a_n(K)$.

b) Montrer que $a(x) = x$, pour tout a de A.

Le a) se formule en $\bigcap_{a \in A}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} a_n(K)\right)$ non vide, or, si c'était vide, avec du compact, ne passerait-on pas à une intersection finie déjà vide...

C'est une piste possible, les $a_n(K)$ images continues de compacts étant... compactes contenues dans E séparé, donc fermées...

La forme des a_n fait penser aux isobarycentres, si x est dans K, $a_n(x)$ est dans K convexe ; or K est compact, tout ceci se met en place dans un raisonnement en deux temps : pour a fixé, montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} a_n(K)$ est non vide, puis faire varier a. Il y a encore bien du travail, effectué en 6.40.

---

39. Soit, pour tout entier naturel n, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$.

Convergence et calcul de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{I}_n$.

On peut évidemment se demander comment calculer I_n, mais on peut aussi se dire que I_n apparaît comme un coefficient de Fourier d'une fonction impaire, si on ramène le calcul de l'intégrale à $[0, \pi]$. Aussi peut-on essayer de retrouver cette fonction impaire et chercher à utiliser les résultats sur les séries de Fourier... Voir en 11.15.

---

40. Soit, pour tout x réel, $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{1+x}}$.

Étudier l'ensemble de définition, continuité, dérivabilité, limites de F en $+\infty$, en 0, et équivalent de F en 0.

La fonction intégrée est positive, et sur $]0, 1[$, ou sur $]1, +\infty[$, dépend de façon monotone de x. Mais cela va permettre de trouver une fonction majorante, indépendante de t dans un segment, intégrable.

De plus, en coupant l'intégrale en 1, on va ramener les limites par rapport à un n qui tend vers $+\infty$, ou un $\frac{1}{n}$ qui tend vers 0, et le Théorème de convergence monotone nous donnera des résultats. Allons-y en ... 9.29.

CHAPITRE VI

Topologie

On peut, grossièrement, classer les propriétés topologiques en quatre grandes catégories : la compacité, la connexité, les propriétés métriques, et celles des espaces vectoriels normés, ce classement n'étant en rien exclusif.

La compacité : l'idée choc est de construire un recouvrement de K compact, par des ouverts $w(x)$, $x \in \mathrm{K}$, *auxquels sont associés d'autres éléments*, des entiers $n(x)$ par exemple, ou des réels $r(x) > 0$, ou des choses de nature différente...

Puis on extrait un recouvrement fini associé à des x dans une *partie finie B de K*, ce qui permettra, suivant le cas, de considérer l'entier $n_0 = \sup\{n(x)\ ;\ (x \in \mathrm{B})\}$, ou le réel $r_0 = \inf\{r(x), x \in \mathrm{B}\}$ qui étant l'un des $r(x)$ sera > 0.

En somme, ceci permet d'échapper à un $n_0 = +\infty$, ou $r_0 = 0$. C'est un procédé pour passer du cas « infini » au cas fini. Voir exercices 6.2, 6.3.

Nous verrons dans les métriques l'aspect séquentiel.

La connexité : comme Ø et E sont les seules parties de E connexe, a être à la fois ouverte et fermée, pour justifier qu'une propriété $\mathscr{P}(x)$ est vérifiée pour tout x de E connexe, il suffit de vérifier que l'ensemble Ω des x de E tels que $\mathscr{P}(x)$ soit vraie est ouvert, fermé non vide. C'est l'outil de base de la connexité.

Les espaces métriques : ils permettront une traduction plus commode des propriétés topologiques, mais surtout, chaque point ayant une base dénombrable de voisinage, *on aura une traduction séquentielle*, (à l'aide des suites) des propriétés, c'est-à-dire, qu'à un passage à la limite près, on se ramène dans le cadre sécurisant du « cas fini », de la récurrence...

En particulier E métrique est compact si et seulement si de toute suite on peut extraire une suite convergente.

Cette caractérisation peut être le point de départ d'un raisonnement de type ***suite diagonale***. De quoi s'agit-il. Et bien, si le mécanisme d'extraction d'une suite est lui-même itéré, en notant $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de départ, $(u_{\varphi_0(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{\varphi_0 \circ \varphi_1(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, ..., $(u_{\varphi_0 \circ \varphi_1 \dots \circ \varphi_k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ les itérées successives, souvent, en considérant $a_n = u_{\varphi_0 \circ \varphi_1 \dots \circ \varphi_n(n)}$, on peut conclure, (voir 6.25, 6.39).

Les espaces métriques, et en particulier les espaces vectoriels normés, sont le cadre d'introduction des ***espaces complets***, d'où les **suites de Cauchy**, critère de Cauchy, **Théorème du point fixe**, des **fermés emboîtés**...

Les espaces vectoriels normés, en plus de leur structure métrique, vont faire jouer un rôle fondamental aux applications linéaires continues, avec $u \in \mathrm{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ si et seulement si u est bornée sur la sphère unité fermée de E.

On introduit la **norme d'application linéaire continue** :

$|||u||| = \sup\left\{\dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|}\ ;\ x \neq 0, x \in \mathrm{E}\right\}$, dont les deux propriétés de base sont les inégalités $\|u(x)\| \leqslant |||u|||\ \|x\|$ et $|||u \circ v||| \leqslant |||u|||\ |||v|||$, qui interviendront chaque fois qu'il s'agira de majorer.

Quelques rappels propres aux E.V.N. :

- $\mathscr{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, normé par $|||\ \ |||$, est complet si F l'est ;
- équivalence des normes en dimension finie ;
- continuité uniforme de +, de $\|\ \ \|$, mais uniquement continuité du produit par un scalaire ;
- E, e.v.n., est de dimension finie si et seulement si sa sphère unité est compacte ;
- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, normé, n'est jamais complet ; (6.26) ;
- les compacts de $\mathbb{R}^n$, e.v.n., sont les fermés bornés, et les complets sont les fermés ;
- un sous-espace de dimension finie est fermé dans un E.V.N. ;
- le **Théorème de Banach** : si E et F sont des Banach et si $u \in \mathrm{L}_c(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ en étant bijective, u^{-1} aussi est continue, voir exercice 6.22.

Dans le cadre des espaces **préhilbertiens réels ou complexes**, la structure topologique s'enrichira, avec, lorsqu'elles existent, les bases orthonormées, les familles totales, les projections orthogonales, (voir 6.25).

Il en sera de même dans le cadre réel, en liaison avec la structure d'ordre sur $\mathbb{R}$, d'où la monotonie des applications, des suites, et les liens entre monotonie et convergence.

À propos de $\mathbb{R}$, ne pas oublier que ses sous-groupes additifs sont soit partout denses, soit du type $\alpha\mathbb{Z}$, (voir 6.18 et 6.19).

Des propriétés générales qui doivent être présentes à l'esprit :

– O ouvert $\Leftrightarrow$ O voisinage de chacun de ses points ;

– f continue $\Leftrightarrow$ l'image réciproque de tout ouvert (resp. de tout fermé) est un ouvert, (resp. un fermé), c'est la manière la plus efficace de justifier la nature ouverte ou fermée d'une partie ;

– f continue de K compact dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes, (théorème existentiel) ;

– f continue de K compact dans E, K et E métriques, l'est uniformément ;

– la connexité par arcs implique la connexité, la réciproque, fausse en général devient vraie sur les ouverts des espaces vectoriels normés ;

– le **Théorème de Baire** a pour conséquence le fait qu'un espace complet n'est jamais réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide ; (voir 6.10) ;

– si l'existence d'un élément particulier dans E complet peut s'obtenir par le **Théorème du point fixe**, c'est souvent aussi la limite d'une **suite de Cauchy** convenablement construite, (voir 6.15) ;

– en dimension infinie, il y a en général non équivalence des normes, ce qui fait que la même suite peut avoir des limites différentes pour des normes différentes, (voir 6.24) ;

– dans la topologie produit, le projeté d'un ouvert est ouvert, (voir 6.30).

Énoncés

6.1. Soit f un morphisme additif de l'espace vectoriel normé réel, E, dans lui-même, borné sur la boule unité fermée de E. Montrer que f est linéaire.

6.2. Soit X un espace métrique compact et L_c l'ensemble des applications c.lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que la convergence simple d'une suite d'éléments de L_c implique la convergence uniforme.

6.3. Soit une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, décroissante, de fonctions en escalier positives ou nulles, avec f_1 à support compact. On suppose que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = 0 .$$

6.4. Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On désigne par $f_1, f_2, \dots, f_n$, n fonctions de A, à valeurs complexes, telles que le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ de A soit égal à :

$$(-1)^n(X^n + f_1(A)X^{n-1} + \dots + f_{n-1}(A)X + f_n(A)) .$$

a) Montrer que pour tout i compris entre 1 et n, et tout couple (A, B) de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$, on a $f_i(AB) = f_i(BA)$.

b) Soit Φ une fonction polynomiale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant l'égalité $\Phi(AB) = \Phi(BA)$, pour tout couple de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$. Montrer que Φ est un polynôme en $f_1, \dots, f_n$.

6.5. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé, f une forme linéaire non nulle sur E et $H = \operatorname{Ker} f$. Montrer que H dense dans E équivaut à f non continue.

6.6. Soit E un espace vectoriel normé et (P) la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0 , \exists \delta \in]0, 1[, \forall (x, y) \in E^2 ,$$

$$(\|x\| = \|y\| = 1 \text{ et } \|x - y\| \geqslant \varepsilon) \Rightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1 - \delta .$$

Donner un exemple d'espace vectoriel normé où (P) est vraie.

On suppose E complet et vérifiant (P). Soit L une forme linéaire continue sur E. Montrer qu'il existe x de norme 1 tel que $|||L||| = L(x)$.

Donner un contre-exemple où $|||L|||$ n'est pas atteinte.

6.7. Soit un espace vectoriel normé E de dimension finie n, F un sous-espace de E et u une forme linéaire définie sur F, de norme :

$$|||u|||_F = \sup\{|u(x)| \; ; \; x \in F, \|x\| \leqslant 1\}.$$

Montrer qu'il existe une forme linéaire $\tilde{u}$ définie sur E, prolongeant u, de même norme que u.

6.8. Soit C une partie bornée, génératrice, de E espace euclidien. Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs. Pour u dans $\mathscr{S}$ on pose :

$$P_u = \{x \in E \; ; \; \langle u(x) \,|\, x\rangle \leqslant 1\}.$$

Soit $\mathscr{A} = \{u \in \mathscr{S} \; ; \; C \subset P_u\}$.

a) Montrer que $\mathscr{A}$ est compact.

b) Montrer que det u atteint son maximum sur $\mathscr{A}$ en un point unique.

6.9. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{R}^3$ et $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de droites de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\Omega \setminus (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n)$ est connexe.

6.10. Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$, et $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications continues de F dans $\mathbb{R}$.

On suppose cette suite simplement bornée sur F, c'est-à-dire que, pour chaque x de F, la suite $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Montrer que, pour toute boule ouverte B de F, il existe une boule ouverte B' de F contenue dans B sur laquelle la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est uniformément bornée, B' non vide évidemment, ainsi que B.

6.11. Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\exp(A)$ est un polynôme en A, mais que la fonction exponentielle n'est pas polynomiale sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

6.12. Montrer que $[0, 1]$ n'est pas réunion d'une suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fermés non vides deux à deux disjoints.

6.13. Montrer que l'ensemble Ω des matrices carrées d'ordre n, réelles, de polynôme minimal de degré n, est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

6.14. Soit E métrique compact et $f : E \mapsto E$ telle que $\forall (x, y) \in E^2$, $x \neq y$, on ait $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

Montrer que f admet un point fixe, unique.

6.15. Soit E un espace vectoriel normé complet, Ω un ouvert borné non vide de E. On suppose que, pour tout (x, y) de Ω^2, il existe une boule B contenue dans Ω et contenant x et y. Montrer que Ω est une boule ouverte.

6.16. Soit E un Banach et $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille libre de E.

a) Montrer que $F_n = \mathrm{Vect}(a_1, \ldots, a_n)$ est un fermé dans E.

b) Montrer qu'il existe une suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres strictement positifs tels que pour tout $n \geqslant 2$,

$$\mu_{n+1}\|a_{n+1}\| \leqslant \frac{1}{3}\mathrm{d}(\mu_n a_n, F_{n-1}).$$

Existence de $x = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k a_k$. Existe-t-il n tel que x soit dans F_n ?

6.17. Quel est l'intérieur de $\mathscr{D}$, ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?

6.18. Montrer qu'un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ est soit du type $\alpha\mathbb{Z}$, soit partout dense.

6.19. Quels sont les sous-groupes ouverts de $\mathbb{R}$, pour l'addition.

6.20. Soit f continue périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de l'ensemble T de ses périodes.

Que dire de f continue périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ayant 1 et π pour périodes.

6.21. Soient f et g continues non constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, périodiques de plus petites périodes respectives α et β. Condition nécessaire et suffisante pour que $f+g$ soit périodique.

6.22. Soit A un automorphisme continu d'un Banach E et f une application k.lipschitzienne de E dans E. Montrer que, si $k < \dfrac{1}{|||A^{-1}|||}$, l'application $A+f$ est un homéomorphisme de E sur lui-même.

6.23. Soit K un compact de E espace vectoriel normé, et f une application continue de K dans K telle que :

$$\forall (x, y) \in K^2, \ \| f(x) - f(y) \| \geqslant \| x - y \| .$$

Montrer que f est un homéomorphisme.

6.24. Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Q pour cette norme.

6.25. Soit H un espace de Hilbert réel. On suppose qu'il existe dans H une suite orthonormée $(e_i)_{i \geqslant 1}$ telle que l'espace $\mathrm{Vect}\{ e_i, \ i \geqslant 1 \}$ soit partout dense dans H.

Soit $(x_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'éléments de H, telle que, pour tout n, $\|x_n\| \leqslant 1$.

Montrer qu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \geqslant 1}$ et x^* dans H tels que :

$$\forall y \in H, \ \lim_{n \to +\infty} \langle x_{\varphi(n)}, y \rangle = \langle x^*, y \rangle .$$

Montrer que $\|x^*\| \leqslant 1$.

Que peut-on dire si $\|x^*\| = 1$.

6.26. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. On pose, pour f dans $\mathbb{R}[X]$,

$$N(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left| f^{(k)}(0) \right|}{k!} .$$

a) Montrer que N est une norme sur E.

b) On pose $f_p(X) = \sum_{k=1}^{p} \frac{X^k}{k^2}$. Montrer que la suite (f_p) est de Cauchy dans (E, N). Converge-t-elle ?

c) La dérivation est-elle continue ?

d) On pose, pour f dans E, $\psi_n(f) = f^{(n)}(0)$; ψ_n est-elle continue ? Calculer $|||\psi_n|||$.

e) On dit que f précède g, (noté $f \leqslant g$), lorsque, pour tout n, on a $f^{(n)}(0) \leqslant g^{(n)}(0)$. On considère pour g et h fixés dans E :

$$G = \{ f \in E, f \leqslant g \} \text{ et } H = \{ f \in E, h \leqslant f \} .$$

Montrer que G et H sont des fermés de E, d'intersection compacte.

6.27. Soit E un espace vectoriel normé, A une partie fermée non vide de E, f une application continue de A dans $\mathbb{R}$ telle que $\operatorname*{Inf}_{A} f = 1$ et $\operatorname*{Sup}_{A} f = 2$.

Soit $g : \ E \mapsto \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $g(x) = \inf\left\{ \dfrac{f(a)\|x-a\|}{d(x, A)} \ ; a \in A \right\}$ si $x \notin A$. L'application g est-elle continue ? Calculer sa borne inférieure et sa borne supérieure.

6.28. Soit $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $E = \mathscr{M}_n(K)$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n. Soit $r \leqslant n$.

a) Montrer que l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à r est fermé dans E.

b) Montrer que l'ensemble des matrices de rang r est dense dans l'ensemble des matrices de rang inférieur ou égal à r. Traduire ce résultat pour $r = n$.

6.29. a) Soit E un espace métrique, (F_n) une suite décroissante de parties compactes non vides. Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.

b) Soit X une partie compacte de E, (f_n) une suite décroissante de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ continues, tendant simplement vers la fonction nulle. Montrer que la suite $(\|f_n\|_\infty)$ admet une limite α, puis que $\alpha = 0$.

c) Soit (f_n) une suite monotone de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ tendant simplement vers une fonction continue. Montrer que la convergence est uniforme.

6.30. Sur $E = \mathbb{R}^n$, un endomorphisme u est dit cyclique si et seulement si il existe un vecteur x de E tel que la famille $\{x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\}$ soit libre.

Montrer que l'ensemble des endomorphismes cycliques est un ouvert de $\mathscr{L}(E)$.

6.31. Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme :

$$\|u\| = \sup\{|u_n| \ ; n \in \mathbb{N}\}.$$

a) Montrer que E est complet.

b) Existe-t-il dans E un sous-ensemble dénombrable partout dense.

6.32. Montrer que l'ensemble des polynômes de degré n, à coefficients complexes, ayant n zéros distincts, est un ouvert de $\mathbb{C}_n[X]$.

6.33. Soit A une algèbre de Banach complexe, d'élément neutre noté u, (pour unité). Pour x dans A – $\{0\}$, on pose :

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \,;\, \lambda u - x \text{ non inversible}\}.$$

a) Montrer que $\sigma(x)$ est un compact de $\mathbb{C}$.

b) Montrer que $\sigma(x)$ est non vide, (on pourra utiliser le fait que f : $x \rightsquigarrow x^{-1}$ est différentiable sur l'ensemble des éléments inversibles de A, et que $df(x)(h) = -x^{-1}hx^{-1}$).

c) On suppose que tout élément non nul de A est inversible. Que dire de A.

6.34. Démontrer que I_n et $-I_n$ sont des points isolés de l'ensemble $\mathcal{S}$ des symétries, partie de l'espace vectoriel normé $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

6.35. Quelle est l'adhérence, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, des matrices diagonalisables.

6.36. Existe-t-il, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, des normes telles que, pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout P de $GL_n(\mathbb{R})$, $\|P^{-1}AP\| = \|A\|$.

Déterminer toutes les semi-normes N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et tout P de $GL_n(\mathbb{R})$, on ait $N(P^{-1}AP) = N(A)$.

6.37. Démontrer que I_n et 0 sont des points isolés de l'ensemble $\mathcal{P}$ des matrices des projections de $E = \mathbb{R}^n$, une base étant fixée.

6.38. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, espace des polynômes à coefficients réels, normé par $\|P\|_\infty = \sup\{|\text{coefficients de P}|\}$.

a) Est-il complet ?

b) La dérivation d : $P = \sum_{n=0}^{d^\circ P} a_n X_n \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{d^\circ P} n a_n x^{n-1}$, est-elle continue ?

c) Construire sur E une norme rendant d continue.

6.39. Soit E un espace vectoriel réel normé, et A une partie non vide de E. Montrer l'équivalence entre :

1°) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in A^n,\ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathscr{B}(a_i\,;\,\varepsilon)$;

2°) de toute suite d'éléments de A on peut extraire une suite de Cauchy.

6.40. Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, K une partie non vide, compacte et convexe de E. Soit A une partie de L(E) dont tous les éléments permutent entre eux, et telle que K soit stable par tout élément de A.

Pour a dans A et n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \dfrac{1}{n}(\mathrm{Id} + a + \ldots + a^{n-1})$.

a) Montrer qu'il existe x dans K tel que, pour tout a de A et tout n de $\mathbb{N}^*$, on ait $x \in a_n(K)$.

b) Montrer que $a(x) = x$, pour tout a de A.

6.41. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et A l'algèbre $\mathscr{C}^0(K, \mathbb{R})$, algèbre pour les lois usuelles, normée par la norme de la convergence uniforme.

Montrer qu'un automorphisme unitaire de A est une isométrie.

Solutions

6.1. Par récurrence, à partir de :

$f(2x) = f(x+x) = f(x)+f(x) = 2f(x)$, on obtient,

$\forall (p, x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{E}, \; f(px) = pf(x)$.

Comme $f(x-y) = f(x)-f(y)$, avec $f(0) = 0$, (morphisme additif), on a, $\forall (p, x) \in \mathbb{N} \times \mathrm{E}, \; f(px+(-p)x) = 0$, d'où

$f((-p)x) = -f(px) = -pf(x)$ et finalement :

$\forall (p, x) \in \mathbb{Z} \times \mathrm{E}, \; f(px) = p \cdot f(x)$

Enfin, avec $r = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $q \in \mathbb{N}^*$, et $y = rx$, on aura $qy = px$ d'où $f(qy) = qf(y) = f(px) = pf(x)$ et $f(y) = f(rx) = \dfrac{p}{q} f(x) = rf(x)$, d'où la « linéarité sur le corps $\mathbb{Q}$ ».

Pour utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on va *justifier* la continuité de f, (car ne sachant pas qu'elle est linéaire, et pour cause, l'aspect borné sur la boule unité ne donne pas directement cette continuité).

Soient x et y distincts dans E, et r rationnel tel que, $\varepsilon > 0$ étant donné, on ait $\|x-y\| \leqslant r \leqslant \|x-y\| + \varepsilon$, alors $\dfrac{1}{r}(x-y)$ est dans la boule unité fermée sur laquelle f est bornée par $k \geqslant 0$. On a donc :

$\left\| f\left(\dfrac{1}{r}(x-y)\right)\right\| \leqslant k$, d'où, comme $\dfrac{1}{r}$ est rationnel positif, on tire :

$\| f(x-y)\| \leqslant rk \leqslant k\|x-y\| + k\varepsilon$, et ε étant quelconque, on a finalement, (f morphisme additif), quels que soient x et y :

$\| f(x)-f(y)\| \leqslant k\|x-y\|$,

(inégalité évidente si $x = y$), d'où la continuité de f qui est k.lipschitzienne.

Mais alors, avec une suite $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels qui converge vers λ réel, et x dans E, on aura :

$$f(\lambda x) = f(\lim_{n \to +\infty} r_n x) = \lim_{n \to +\infty} f(r_n x), \; (f \text{ continue})$$
$$= \lim_{n \to +\infty} r_n f(x) = \lambda f(x) \text{ d'où } f \text{ linéaire.}$$

6.2. La convergence simple des f_n vers f, donne f c.lipschitzienne car $| f(x)-f(y)| = \lim\limits_{n \to +\infty} |f_n(x)-f_n(y)| \leqslant cd(x, y)$.

Soit alors $\varepsilon > 0$, à chaque x de X on associe n_x dans $\mathbb{N}$, tel que :

$$\forall n \geqslant n_x,\ |f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\ ;$$

comme alors $f - f_n$ est $2c$.lipschitzienne, si $d(x, y) < \dfrac{\varepsilon}{4c}$, on aura :

$$\begin{aligned}|(f-f_n)(y)| &\leqslant |(f-f_n)(y) - (f-f_n)(x)| + |(f-f_n)(x)| \\ &\leqslant 2cd(x, y) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

En fait, à chaque x de X on associe n_x entier, et la boule ouverte $\mathscr{B}_0\left(x, \dfrac{\varepsilon}{4c}\right)$ tels que :

$$\forall y \in \mathscr{B}_0\left(x, \frac{\varepsilon}{4c}\right),\ \forall n \geqslant n_x,\ |f(y) - f_n(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Du recouvrement de X compact : $\mathrm{X} = \bigcup\limits_{x \in \mathrm{X}} \mathscr{B}_0\left(x, \dfrac{\varepsilon}{4c}\right)$, on extrait un recouvrement fini, associé aux éléments x_1, x_2, ..., x_p. Soit $n_0 = \sup\{n_{x_i}\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant p\}$. Pour tout $n \geqslant n_0$, $\forall y \in \mathrm{X}$, comme il existe $i \leqslant p$ tel que $y \in \mathscr{B}_0\left(x_i, \dfrac{\varepsilon}{4c}\right)$ et que $n \geqslant n_0 \geqslant n_{x_i}$, on a bien :

$|f(y) - f_n(y)| \leqslant \varepsilon$: il y a convergence uniforme des f_n vers f.

6.3. Justifions d'abord l'existence de chaque intégrale.

Comme f_1 est à support compact, il existe un segment $[a, b]$ tel que, $\forall x \notin [a, b]$, $f_1(x) = 0$. La décroissance de la suite des f_n, qui sont à valeurs positives, donne alors :

$\forall x \notin [a, b]$, $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_1(x) = 0$ donc $f_n(x) = 0$ et les intégrales impropres sont en fait des intégrales sur $[a, b]$.

L'idée va être ensuite de traiter séparément les points de continuité et de discontinuité, (en « quantité dénombrable ») des f_n en englobant les points de discontinuité dans des ouverts de longueur εu_n, avec $\sum u_n$ qui converge, et en utilisant l'aspect localement constant d'une fonction en escalier en un point de continuité.

Soit $\mathcal{A}_n$ = { points de discontinuité de f_n } et $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathcal{A}_n$: cet ensemble dénombrable est indexé en une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, (ou $(a_n)_{0 \leqslant n \leqslant k}$ s'il est fini).

On introduit $\|f_1\|_\infty = \sup \{|f_1(x)| \,;\, x \in [a, b]\}$, qui existe car f_1, en escalier est bornée.

Soit $\varepsilon > 0$ *fixé.*

Soit $x \in [a, b]$.

Si $x \in \mathcal{A}$, avec n dans $\mathbb{N}$ tel que $x = a_n$, on considère l'ouvert $\omega(x) = \left]a_n - \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right[\cap [a, b]$, ouvert de $[a, b]$ contenant x, de longueur inférieure à $\dfrac{\varepsilon}{2^n}$.

Si $x \notin \mathcal{A}$, chaque f_n est continue en x. Or la convergence simple des f_n vers 0 permet d'associer $n(x)$ dans $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n(x)$, $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \varepsilon$, ce qui revient en fait à $0 \leqslant f_{n(x)}(x) \leqslant \varepsilon$, vu la décroissance de la suite des f_n.

Comme $x \notin \mathcal{A}$, $\exists \alpha(x) > 0$ tel que sur :

$$\omega(x) =]x - \alpha(x), x + \alpha(x)[\cap [a, b],$$

la fonction $f_{n(x)}$ soit constante, et alors :

$$\forall t \in \omega(x), \forall n \geqslant n(x), 0 \leqslant f_n(t) \leqslant f_{n(x)}(t) = f_{n(x)}(x) \leqslant \varepsilon.$$

Compacité = machine à extraire : du recouvrement ouvert $[a, b] = \bigcup_{x \in [a, b]} \omega(x)$, on extrait un recouvrement fini associé à des x *dans une partie finie, B,* de $[a, b]$, elle-même fractionnée en $B_1 = B \cap \mathcal{A}$ et $B_2 = B \backslash B_1$. Notons $O_1 = \bigcup_{x \in B_1} \omega(x)$ et $O_2 = \bigcup_{x \in B_2} \omega(x)$: on a deux réunions finies d'intervalles, et $[a, b] = O_1 \cup O_2$. Comme les fonctions intégrées sont positives, et que O_1 et O_2 peuvent « se chevaucher », on a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \int_a^b f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_{O_1} f_n + \int_{O_2} f_n.$$

On a, (ici aussi les intervalles de réunion O_1 peuvent se chevaucher) : $\displaystyle\int_{O_1} f_n \leqslant \sum_{x \in B_1} \int_{\omega(x)} f_n(t)\mathrm{d}t$, avec : $0 \leqslant f_n(t) \leqslant f_1(t) \leqslant \|f_1\|_\infty$; x qui est un a_k, $k \in \mathbb{N}$, et alors $\omega(x)$, intervalle de longueur majoré par $\dfrac{\varepsilon}{2^k}$, donc

$\int_{O_1} f_n$ est majoré par la somme d'un nombre fini de termes du type $\frac{\varepsilon}{2^k}\|f_1\|_\infty$, donc *a fortiori* par $2\varepsilon\|f_1\|_\infty$, et ceci uniformément en n.

Puis O_2 étant une réunion d'un nombre fini des $\omega(x)$ pour $x \notin \mathscr{A}$, $n_0 = \sup\{n(x)\,;\, x \in B_2\}$ existe et on a alors : $\forall t \in O_2, \forall n \geqslant n_0$, comme il existe x de B_2 tel que $t \in \omega(x)$ et qu'alors $n \geqslant n_0 \geqslant n(x)$, il vient :

$$0 \leqslant f_n(t) \leqslant \varepsilon, \text{ d'où sur } O_2 \subset [a, b], \forall n \geqslant n_0, \int_{O_2} f_n(t)\mathrm{d}t \leqslant (b-a)\varepsilon.$$

En réunissant les deux majorants, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, 0 \leqslant \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon(2\|f_1\|_\infty + b - a)$$

ce qui traduit $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = 0$.

6.4. Le a) équivaut à justifier l'égalité $\chi_{AB} = \chi_{BA}$. Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, (ou $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ou même $\mathscr{M}_n(\mathbb{Q})$), on peut en donner une justification topologique en traitant le cas de A inversible d'abord, et en utilisant la densité de $GL_n(K)$ dans $\mathscr{M}_n(K)$, ($K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour A inversible, on a :

$$\begin{aligned}\chi_{AB}(X) &= \det(AB - XI_n) = \det(A^{-1}(AB - XI_n)A)\\ &= \det(BA - XI_n) = \chi_{BA}(X).\end{aligned}$$

Puis $GL_n(K)$ est dense dans $\mathscr{M}_n(K)$, car si $\det A = 0$, c'est que $x = 0$ est zéro du polynôme $\chi_A(x) = \det(A - xI_n)$, mais les zéros de χ_A étant en nombre fini, il existe $\alpha > 0$, (α dans $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$), tel que $\forall x \in K$, $0 < |x| < \alpha \Rightarrow \chi_A(x) \neq 0$, donc la matrice $A - xI_n$ est alors inversible, or $\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ x \neq 0}} (A - xI_n) = A$.

Enfin, pour B fixé dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, (retour à l'exercice), l'application $A \rightsquigarrow f_i(AB)$ est polynomiale par rapport aux α_{ij}, termes généraux de A, donc continue : l'égalité $f_i(AB) = f_i(BA)$ valable pour A dans $GL_n(\mathbb{C})$ « passe à la limite » en A, et elle est valable pour tout couple (A, B) de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$.

On peut aussi établir le résultat algébriquement sur un corps K quelconque, en utilisant l'égalité entre matrices blocs :

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -XI_n & -B \\ 0 & AB-XI_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} BA-XI_n & -B \\ 0 & -XI_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & I_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -XI_n & -B \\ -XA & -XI_n \end{pmatrix},$$

et en prenant les déterminants, que l'on simplifie par $(-X)^n$.

Il faut aussi noter que les $f_i(A)$ sont des fonctions polynomiales par rapport aux coefficients de A, donc continues en A.

b) Le a) est là pour remplacer les matrices par des formes plus commodes, et si possible diagonales.

L'énoncé n'est pas clair : ϕ polynomiale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$ signifie fonction polynomiale des coefficients de A.

D'abord, si P est dans $GL_n(\mathbb{C})$, on a :

$$\phi(P^{-1}AP) = \phi((P^{-1}A)P) = \phi(P \cdot P^{-1}A) = \phi(A),$$

donc l'expression de ϕ est stable par passage à une matrice semblable.

Ensuite si A est semblable à $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$, avec les λ_j distincts, le polynôme caractéristique :

$$\chi_A(X) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n} (X-\lambda_i)$$

$$= (-1)^n(X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} + ... + (-1)^n \sigma_n),$$

les σ_i étant les fonctions symétriques des racines, donc dans ce cas $\sigma_i(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \sigma_i(A) = (-1)^i f_i(A)$.

Considérons alors l'application ψ, définie de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ par $\psi(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \phi(\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n))$.

Elle est polynomiale par rapport aux λ_i, puisque $A \rightsquigarrow \phi(A)$ est polynomiale par rapport aux coefficients de la matrice A.

De plus, si P est la matrice associée à une permutation σ des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, on aura :

$$P^{-1} \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)P = \text{diag}(\lambda_{\sigma(1)}, ..., \lambda_{\sigma(n)}),$$

donc, vu l'invariance de ϕ par passage à une matrice semblable, on a l'égalité :

$$\psi(\lambda_{\sigma(1)}, ..., \lambda_{\sigma(n)}) = \psi(\lambda_1, ..., \lambda_n),$$

valable pour toute permutation σ de $\{1, 2, ..., n\}$.

Mais alors, on sait, (ou on devrait le savoir, au besoin consulter un cours sur les polynômes à plusieurs variables), on sait disais-je, que ψ est un polynôme par rapport aux fonctions symétriques $\sigma_1(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$; $\sigma_2, ..., \sigma_n$, avec $\sigma_j(\lambda_1, ..., \lambda_n) =$ la somme des produits des λ_k pris j par j. On a donc un polynôme Q de n variables, tel que, $\forall(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, $\psi(\lambda_1, ..., \lambda_n) = Q(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$.

Mais alors, pour toute matrice A ayant n valeurs propres, $\lambda_1, ..., \lambda_n$, distinctes, (notons $\mathscr{D}$ l'ensemble de ces matrices) on aura :

$$\begin{aligned}\phi(A) &= \phi(\mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)) = \psi(\lambda_1, ..., \lambda_n)\\ &= Q(-f_1(A), f_2(A), ..., (-1)^j f_j(A), ..., (-1)^n f_n(A))\\ &= R(f_1(A), f_2(A), ..., f_n(A)),\end{aligned}$$

où la fonction R, définie par cette égalité, est polynomiale en $f_1, f_2, ..., f_n$.

Le résultat est établi sur la partie $\mathscr{D}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, or cette partie est partout dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, car si A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ admet des valeurs propres multiples, $\lambda_1, ..., \lambda_k$ de multiplicités $\alpha_1, ..., \alpha_k$, avec P régulière telle que $P^{-1}AP = T$ soit triangulaire, avec sur la diagonale $\lambda_1, ..., \lambda_1$; $\lambda_2, ..., \lambda_2$; ... ; $\lambda_k ... \lambda_k$; en introduisant, pour q dans $\mathbb{N}$, assez grand, (tel que $\frac{1}{q} < \frac{1}{2} \inf \{|\lambda_i - \lambda_j| \; ; \; i \neq j\}$ en fait), la matrice triangulaire :

$$T_q = T + \mathrm{diag}\left(\frac{1}{q+1}, ..., \frac{1}{q+\alpha_1} ; \frac{1}{q+1}, ..., \frac{1}{q+\alpha_2} ; ... ; \frac{1}{q+1}, ..., \frac{1}{q+\alpha_k}\right),$$

on a $\lim\limits_{q \to +\infty} PT_qP^{-1} = A$, et PT_qP^{-1} est dans $\mathscr{D}$.

Enfin, l'égalité $\phi(A) = R(f_1(A), f_2(A), ..., f_n(A))$, où les deux membres sont fonctions polynomiales, donc continues, des coefficients de A, étant valable pour tout A de $\mathscr{D}$, partie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ partout dense, donne, par passage à la limite, l'égalité pour tout A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

6.5. Le « dense dans E » signifie partout dense en fait.

Soit H l'hyperplan Ker f, son adhérence $\overline{H}$ est encore sous-espace vectoriel de E, car $H \subset \overline{H} \Rightarrow \overline{H} \neq \emptyset$, puis si x et y sont dans $\overline{H}$, si λ et μ sont deux réels, avec deux suites x_n et y_n d'éléments de H qui convergent vers x et y respectivement, les vecteurs $\lambda x_n + \mu y_n$ de H convergent vers $\lambda x + \mu u$ qui est donc dans $\overline{\mathrm{H}}$, (continuité de l'addition et du produit par un scalaire).

Comme $\mathrm{H} \subset \overline{\mathrm{H}} \subset \mathrm{E}$, avec H hyperplan, et $\overline{\mathrm{H}}$ sous-espace vectoriel, on a soit $\mathrm{H} = \overline{\mathrm{H}}$, (ou encore H fermé), soit H partout dense.

Justifier l'exercice, ($\overline{\mathrm{H}} = \mathrm{E} \Leftrightarrow f$ non continue), revient donc à justifier l'énoncé H fermé $\Leftrightarrow f$ continue.

Or f continue $\Rightarrow \mathrm{H} = f^{-1}(\{\mathrm{O_E}\})$ est fermé, (image réciproque d'un fermé).

Si H est fermé, alors f est continue, sinon, f étant linéaire, la non continuité équivaudrait à la non continuité en 0, donc on aurait :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in \mathrm{E}, \|x\| < \alpha \text{ avec } |f(x)| \geqslant \varepsilon,$$

avec $\alpha = \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, on construirait une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E qui converge vers 0, avec $|f(x_n)| \geqslant \varepsilon$.

En introduisant une droite vectorielle $\mathbb{R}a$ supplémentaire de H et en décomposant x_n en $y_n + t_n a$, avec $y_n \in \mathrm{H}$, $t_n \in \mathbb{R}$, on a $f(x_n) = t_n f(a)$, avec $f(a) \neq 0$, $(a \notin \mathrm{H})$, d'où $|t_n| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{|f(a)|}$, mais alors l'élément $z_n = \dfrac{y_n}{t_n} = \dfrac{x_n}{t_n} - a$ est dans H, $(y_n \in \mathrm{H})$, tend vers a, ($x_n \to 0$ et $|t_n|$ minoré par un nombre > 0), ce qui contredit H fermé puisque $a \notin \mathrm{H}$. Par l'absurde on a bien justifié (H fermé) $\Rightarrow$ (f continue).

6.6. Un peu de géométrie n'a jamais fait de mal. Dans E affine, le triangle de sommets 0, x et y est isocèle, et le milieu $\dfrac{x+y}{2}$, pied de la médiane, est aussi pied de la hauteur si E est préhilbertien réel, d'où 0, x et y dans un plan euclidien. Mais alors, par Pythagore, on a :

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 = \|x\|^2 - \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = 1 - \frac{1}{4}\|x-y\|^2 \leqslant 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

si $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$; on a donc $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| \leqslant \left(1 - \dfrac{\varepsilon^2}{4}\right)^{1/2} < 1$: on peut trouver δ dans $]0, 1[$ tel que $\left\|\dfrac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1 - \delta$, si E est préhilbertien réel.

Si E est complet et L, forme linéaire continue, $|||L||| = \sup \{|L(x)|, \|x\| = 1\}$ existe, donc $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in E, \|x_n\| = 1$ et $|||L||| - \frac{1}{n+1} \leqslant |L(x_n)| \leqslant |||L|||$.

Quitte à changer x_n en $-x_n$, on peut imposer $L(x_n) \geqslant 0$, et on dispose donc d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d'éléments de la sphère unité, telle que $\lim_{n \to +\infty} L(x_n) = |||L|||$.

L'hypothèse E complet permettra, à partir d'une suite de Cauchy, (peut-être celle des x_n, ou extraite...), d'avoir un élément limite, et de passer à la limite.

Si la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy, alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \forall n_0, \exists p \geqslant n_0, \exists q \geqslant n_0, \|x_p - x_q\| \geqslant \varepsilon.$$

Mais avec le δ associé à ε par la propriété (P), comme x_p et x_q sont unitaires, on a alors $\left\|\frac{x_p + x_q}{2}\right\| \leqslant 1 - \delta$. De plus $L(x_p) \geqslant 0$ et $L(x_q) \geqslant 0$ excluent $x_p = -x_q$ sauf... si $L(x_p) = L(x_q) = 0$. Comme $L(x_p) \geqslant |||L||| - \frac{1}{p+1}$, ceci sera exclu, pour p assez grand, si $L \neq 0$.

On remarque que pour $L = 0$, $|||L||| = 0$ est atteinte partout sur la sphère unité, on écarte ce cas et alors pour p et q assez grands, $\frac{x_p + x_q}{2}$ est non nul, donc $z_{n_0} = \frac{x_p + x_q}{\|x_p + x_q\|}$ est unitaire, (p et q associés à n_0), d'où, si n_0 est choisi assez grand pour avoir aussi $|||L||| - \frac{1}{n_0 + 1} > 0$, les inégalités :

$$L(z_{n_0}) = \frac{1}{\|x_p + x_q\|} (L(x_p) + L(x_q)) \geqslant \frac{1}{\|x_p + x_q\|} \left(2|||L||| - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right)$$
$$\geqslant \frac{1}{2(1-\delta)} \left(2|||L||| - \frac{2}{n_0 + 1}\right),$$

car p et q sont supérieurs à n_0 et $\|x_p + x_q\| \leqslant 2(1-\delta)$, ne l'oublions pas.

Donc, pour n_0 assez grand, on aurait z_{n_0} unitaire avec :

$$L(z_0) \geqslant \frac{|||L|||}{(1-\delta)} - \frac{1}{(n_0+1)(1-\delta)},$$ ce qui, si n_0 tend vers $+\infty$, conduira à $|||L||| \geqslant \frac{|||L|||}{1-\delta}$: c'est gênant.

Donc la suite des $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans E complet, elle converge et sa limite x est sur la sphère unité, (fermée), de plus la continuité de L et la double inégalité $|||L||| - \dfrac{1}{n+1} \leqslant L(x_n) \leqslant |||L|||$, donnent, à la limite, $L(x) = |||L|||$, avec $\|x\| = 1$.

Un contre-exemple, avec L continue puisque l'on parle de $|||L|||$, ne peut se trouver qu'avec E non complet, et, pour avoir la propriété P, préhilbertien par exemple.

Prenons $E = \mathbb{R}[X]$, normé par $\|Q\|^2 = \sum_{n=0}^{d^\circ Q} a_n^2$, si le polynôme Q est $\sum_{n=0}^{d^\circ Q} a_n X^n$.

On définit L par $L(Q) = \sum_{n=0}^{d^\circ Q} \dfrac{a_n}{n+1}$. Par Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{d^\circ Q}$, euclidien canonique, on a :

$$|L(Q)|^2 \leqslant \left(\sum_{n=0}^{d^\circ Q} \frac{1}{n+1} |a_n| \right)^2 \leqslant \sum_{n=0}^{d^\circ Q} \frac{1}{(n+1)^2} \cdot \sum_{n=0}^{d^\circ Q} |a_n|^2$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \|Q\|^2 = \frac{\pi^2}{6} \|Q\|^2,$$

d'où $|||L||| \leqslant \dfrac{\pi}{\sqrt{6}}$, et égalité en fait, car avec :

$Q_n = 1 + \dfrac{X}{2} + \ldots + \dfrac{X^{n-1}}{n}$, on a $L(Q_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{(k+1)^2}$ qui tend vers $\dfrac{\pi^2}{6}$ alors que $\|Q_n\| = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{(k+1)^2} \right)^{1/2}$ tend vers $\dfrac{\pi}{\sqrt{6}}$.

Enfin, si $|||L|||$ était atteinte en P unitaire, avec $P = \sum_{n=0}^{d^\circ P} a_n X^n$ et en prenant des carrés, on aurait

$$|||\mathrm{L}|||^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = (\mathrm{L}(\mathrm{P}))^2 = \left(\sum_{n=0}^{d^\circ\mathrm{P}} a_n \cdot \frac{1}{n+1}\right)^2$$

$$\leqslant \left(\sum_{n=0}^{d^\circ\mathrm{P}} (a_n)^2\right)\left(\sum_{n=0}^{d^\circ\mathrm{P}} \frac{1}{(n+1)^2}\right) = 1 \cdot \sum_{n=0}^{d^\circ\mathrm{P}} \frac{1}{(n+1)^2},$$

ce qui est absurde, le reste d'ordre $d^\circ\mathrm{P}$ de la série des $1/(k+1)^2$ n'étant pas nul.

6.7. Si on sait justifier le résultat lorsque $\dim \mathrm{F} = n-1$, par une récurrence facile on passera au cas général.

On suppose donc que F est un hyperplan de E, et soit a un vecteur tel que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathbb{R}a$.

Tout y de E se décompose de manière unique en $y = x + ta$, avec x dans F, t réel, et $\tilde{u}$ sera une forme prolongeant u si et seulement si on se donne $\tilde{u}(a) = \alpha$ dans $\mathbb{R}$ et si on pose $\tilde{u}(y) = u(x) + t\alpha$.

Il faut donc justifier que l'on peut choisir α tel que :

$$|||\tilde{u}|||_{\mathrm{E}} = \sup\left\{\frac{|u(x)+t\alpha|}{\|x+ta\|}\ ;\ (x, t) \in \mathrm{F}\times\mathbb{R}\backslash\{0, 0\}\right\},$$

et $|||u|||_{\mathrm{F}} = \sup\left\{\frac{|u(x)|}{\|x\|}\ ;\ x \in \mathrm{F}\backslash\{0\}\right\}$ soient égaux, et on comprend bien que pour cela, il faut et il suffit que les $t \neq 0$ ne conduisent pas à des quotients supérieurs à $|||u|||_{\mathrm{F}}$.

Si $|||u|||_{\mathrm{F}} = 0$, en posant $\alpha = 0$, on obtient $|||\tilde{u}||| = 0$, c'est gagné, et sinon, on remplace u par $\dfrac{u}{|||u|||_{\mathrm{F}}}$, ce qui revient à supposer $|||u|||_{\mathrm{F}} = 1$, ce qui simplifiera l'écriture.

Soient x et x' dans F, on a :

$u(x) + u(x') \leqslant |u(x) + u(x')| = |u(x+x')| \leqslant \|x+x'\|$ avec,

$\|x+x'\| = \|x+a+(x'-a)\| \leqslant \|x+a\| + \|x'-a\|$ d'où l'inégalité :

$u(x') - \|x'-a\| \leqslant \|x+a\| - u(x)$, d'où l'on déduit :

$$m = \sup_{z\in\mathrm{F}} \{u(z) - \|z-a\|\} \leqslant \mathrm{M} = \inf_{z\in\mathrm{F}} \{\|z+a\| - u(z)\}.$$

Si on choisit α dans $[m, \mathrm{M}]$, on a alors, pour tout z de F :

$-\|z-a\| + u(z) \leqslant \alpha \leqslant \|z+a\| - u(z)$, et :

$-\|z+a\| - u(z) \leqslant \alpha \leqslant \|z-a\| + u(z)$, obtenue en changeant z en $-z$, d'où l'on déduit l'encadrement :

$$(\mathrm{I}) \quad \begin{cases} -\|z+a\| \leqslant u(z) + \alpha \leqslant \|z+a\| \\ -\|z-a\| \leqslant u(z) - \alpha \leqslant \|z-a\|, \end{cases}$$

valable, pour tout z de F, pour un tel choix de α.

Soit alors $y = x + ta$ dans E, avec $t \neq 0$ et x dans F. On factorise $|t|$, d'où, avec $y' = \frac{y}{|t|}, x' = \frac{x}{|t|}$ et $\varepsilon = \frac{t}{|t|}$, (dans $\{-1, 1\}$), l'égalité :

$$\frac{|u(y)|}{\|y\|} = \frac{|u(y')|}{\|y'\|} = \frac{|u(x') + \varepsilon a|}{\|x' + \varepsilon a\|},$$

valeur dans $[-1, 1]$, que $\varepsilon = 1$ ou $\varepsilon = -1$, vu l'encadrement (I).

Pour un tel choix de α, on a bien $|||\tilde{u}|||_{\mathrm{E}} = |||u|||_{\mathrm{F}}$.

6.8. Une base orthonormée de E étant fixée, on identifie les opérateurs de E et leurs matrices dans cette base, donc $\mathscr{A}$ est une partie de $\mathbb{R}^{n^2}$, si $n = \dim \mathrm{E}$; elle sera compacte si et seulement si elle est bornée et fermée.

On a u symétrique si et seulement si $u - u^* = 0$, or $g : u \leadsto u - u^*$ est continue, (linéaire en dimension finie par exemple).

Puis u est positif si et seulement si, pour chaque x de E, $\langle u(x)|x\rangle \geqslant 0$.

Or les applications $\varphi_x : u \leadsto \langle u(x)|x\rangle$ sont continues de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{R}$, (linéaire en u, ou polynomiale par rapport aux u_{ij} coefficients de u).

Enfin, l'inclusion $\mathrm{C} \subset \mathrm{P}_u$ équivaut à chaque inégalité $\langle u(x)|x\rangle \leqslant 1$, pour tout x de C.

Mais alors on a :

$$\mathscr{A} = g^{-1}(\{0\}) \cap \Big(\bigcap_{x \in \mathrm{E}} \varphi_x^{-1}([0, +\infty[)\Big) \cap \Big(\bigcap_{x \in \mathrm{C}} \varphi_x^{-1}(]-\infty, 1])\Big),$$

donc $\mathscr{A}$ est fermé comme intersection de fermés.

C'est une partie bornée. En effet, si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est la base orthonormée de départ, et si $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base contenue dans C, partie génératrice, on a des coefficients $(p_{rs})_{1 \leqslant r, s \leqslant n}$ tels que $e_j = \sum_{k=1}^{n} p_{kj}\varepsilon_k$. Puis u ayant pour matrice la matrice U des u_{ij} dans la base orthonormée $\mathscr{B}$, on a $u_{ij} = \langle u(e_j), e_i\rangle$, ou encore :

$$u_{ij} = \langle u\left(\sum_{k=1}^{n} p_{kj}\varepsilon_k\right), \sum_{l=1}^{n} p_{li}\varepsilon_l\rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} p_{kj}p_{li}\langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_l\rangle.$$

Mais l'application $\varphi : (x, y) \rightsquigarrow \langle u(x), y\rangle = {}^t\mathrm{XUY}$, si X et Y sont les matrices colonnes des composantes de x et y dans la base $\mathscr{B}$, est bilinéaire symétrique, de forme quadratique associée $q : x \rightsquigarrow {}^t\mathrm{XUX}$, positive puisque u est positif.

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz appliquée à φ, on a donc, pour tout couple (x, y) de vecteurs :

$(\varphi(x, y))^2 \leqslant q(x)q(y)$, ou encore :

$(\langle u(x), y\rangle)^2 \leqslant \langle u(x), x\rangle \cdot \langle u(y), y\rangle$.

Cette inégalité, pour les couples $(\varepsilon_k, \varepsilon_l)$ de vecteurs de la base $\mathscr{C}$, conduit à :

$$(\langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_l\rangle)^2 \leqslant \langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_k\rangle \cdot \langle u(\varepsilon_l), \varepsilon_l\rangle .$$

Or, u étant dans $\mathscr{A}$, on a $\mathrm{C} \subset \mathrm{P}_u$, donc $\langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_k\rangle \leqslant 1$ et aussi $\langle u(\varepsilon_l), \varepsilon_l\rangle \leqslant 1$, et comme il s'agit de nombres positifs, on a $|\langle u(\varepsilon_k), \varepsilon_l\rangle| \leqslant 1$.

Mais alors, en revenant aux u_{ij}, on aura :

$$|u_{ij}| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} |p_{kj}||p_{li}|,$$

et comme les coefficients $p_{r,s}$ ne dépendent que du choix des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, et pas de u, en notant $\|\mathrm{P}\|_\infty = \sup\{|p_{rs}| \,;\, 1 \leqslant r, s \leqslant n\}$, on aura :

$|u_{ij}| \leqslant n^2(\|\mathrm{P}\|_\infty)^2$, ceci pour tout i, j, d'où $\|\mathrm{U}\|_\infty \leqslant n^2(\|\mathrm{P}\|_\infty)^2$, pour toute matrice U, associée à u de $\mathscr{A}$, dans la base $\mathscr{B}$ de départ. La partie $\mathscr{A}$ est bornée, d'où la compacité de $\mathscr{A}$.

b) L'application déterminant est continue, car polynomiale, de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$: elle atteint son maximum sur le compact $\mathscr{A}$.

D'autre part ce maximum est strictement positif, car, avec m qui majore les $\|x\|$, pour tout x de C, l'opérateur $u = \dfrac{1}{m^2}\,\mathrm{id}_\mathrm{E}$ est symétrique positif et $C \subset P_u$ car pour tout x de C, $\langle u(x), x\rangle = \frac{1}{m^2}\|x\|^2 \leqslant 1$, donc $\frac{1}{m^2}\,\mathrm{id}_E \in \mathscr{A}$, avec $\det\left(\frac{1}{m^2}\,\mathrm{id}_E\right) = \left(\frac{1}{m^2}\right)^n > 0$.

Supposons donc le maximum, (> 0), de det, atteint en u et v distincts, opérateurs définis positifs : on sait qu'il existe p matrice régulière telle que :

$${}^t pup = I_n \text{ et } {}^t pvp = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n).$$

De plus, l'égalité $\det u = \det v$, implique, après multiplication par $(\det p)^2$, l'égalité $1 = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Soit $w = \frac{u+v}{2}$: c'est un opérateur symétrique, positif, et pour tout x de C,

$$\langle w(x)|x\rangle = \frac{1}{2}\langle u(x)|x\rangle + \frac{1}{2}\langle v(x)|x\rangle$$
$$\leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, \text{ donc } C \subset P_w, \text{ d'où } w \in \mathscr{A}.$$

On a $\det w \leqslant \det u = \det v$, soit encore en multipliant par $(\det p)^2$, et comme ${}^t pwp = \mathrm{diag}\left(..., \frac{1+\lambda_i}{2}, ...\right)$:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1+\lambda_i}{2}\right) \leqslant \prod_{i=1}^{n}\lambda_i .$$

Mais les λ_i étant positifs, on a $2\sqrt{\lambda_i} \leqslant 1 + \lambda_i$, (car c'est $0 \leqslant (1-\sqrt{\lambda_i})^2$), inégalité stricte si $\lambda_i \neq 1$. Mais alors on aura :

$$1 = \left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{1/2} = \prod_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i} \leqslant \prod_{i=1}^{n}\frac{1+\lambda_i}{2} \leqslant \prod_{i=1}^{n}\lambda_i = 1 \quad :$$

il y a partout des égalités, donc $\lambda_i = 1$, pour tout i, et ${}^t pup = {}^t pvp$, d'où l'égalité $u = v$.

6.9. Posons $\mathscr{D} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ et $\Omega' = \Omega \setminus \mathscr{D}$, on va justifier que Ω' est connexe par arcs donc connexe, en utilisant le fait que Ω ouvert connexe est connexe par arcs, et même en précisant la nature des arcs.

Premier point. Si Ω est un ouvert connexe (non vide), et a et b dans Ω, il existe une ligne polygonale $\mathscr{P}$, entre a et b.

On fixe a et on considère l'ensemble $\mathscr{A}$ des x de Ω tels qu'il existe une ligne polygonale entre a et x.

$\mathscr{A}$ est non vide : $\exists r > 0$ tel que $\mathscr{B}_0(a, r) \subset \Omega$, et tout point de cette boule est joint au centre a par le segment $\mathscr{P} = [a, x] \subset \Omega$, donc $\mathscr{B}_0(a, r) \subset \mathscr{A}$.

$\mathscr{A}$ est ouvert : si $c \in \mathscr{A}$, on a d'une part une ligne polygonale $\mathscr{P}$ entre a et c, et un réel $r' > 0$ tel que $\mathscr{B}_0(c, r') \subset \Omega$, d'où, pour tout x de $\mathscr{B}_0(c, r')$, une ligne $\mathscr{P}' = \mathscr{P} \cup [c, x]$, polygonale, entre a et x, dans Ω, d'où $\mathscr{B}_0(c, r') \subset \mathscr{A}$: cette partie est voisinage de chacun de ses points.

Enfin $\mathscr{A}$ est fermé : fermé dans Ω, car si d de Ω est adhérent à $\mathscr{A}$, avec $r'' > 0$ tel que $\mathscr{B}_0(d, r'') \subset \Omega$, on a en particulier $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}_0(d, r'') \neq \emptyset$. Soit y dans l'intersection, et $\mathscr{P}$ une ligne polygonale entre a et y, alors $\mathscr{P}' = \mathscr{P} \cup [y, d]$ est ligne polygonale entre a et d, dans Ω, donc $d \in \mathscr{A}$. Mais alors $\mathscr{A}$, ouvert et fermé non vide de Ω connexe est égal à Ω, et on a bien une ligne polygonale de Ω entre a et b.

<u>*Deuxième point*</u>

Soit $a_0 = a, a_1, \ldots, a_n = b$ les sommets d'une ligne polygonale $\mathscr{P}$ contenue dans Ω. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que en prenant a'_i dans $\mathscr{B}_0(a_i, \varepsilon)$, pour $i = 0, \ldots, n$, la ligne polygonale $\mathscr{P}'$ soit encore dans Ω.

En fait $\mathscr{P}$, union finie de segments, donc de compacts, est un compact de $\mathbb{R}^3$, contenu dans Ω, donc disjoint du fermé $F = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, et la distance δ du compact $\mathscr{P}$ et du fermé F étant atteinte, (se justifie en remplaçant F par une partie bornée fermée de F, donc compacte), elle est strictement positive puisque $F \cap \mathscr{P} = \emptyset$.

Soit ε avec $0 < \varepsilon < \delta$, $\forall x \in \mathscr{P}$, $\mathscr{B}_0(x, \varepsilon) \subset \Omega$ car l'existence de y dans $\mathscr{B}_0(x, \varepsilon) \cap F$ entraînerait $\delta = d(\Omega, F) \leqslant d(x, y) < \varepsilon < \delta$.

Soient alors $\mathscr{P}'$ la ligne polygonale réunion des $[a'_i, a'_{i+1}]$, avec a'_i choisi dans $\mathscr{B}_0(a_i, \varepsilon)$, on a $\mathscr{P}' \subset \Omega$, car avec t réel compris entre 0 et 1, le point $y = ta'_i + (1-t)a'_{i+1}$ est tel qu'avec $x = ta_i + (1-t)a_{i+1}$ on ait $x \in \mathscr{P}$ et $x - y = t(a_i - a'_i) + (1-t)(a_{i+1} - a'_{i+1})$
donc $\|x - y\| \leqslant t\|a_i - a'_i\| + (1-t)\|a_{i+1} - a'_{i+1}\|$.

On a $\|a_i - a'_i\| < \varepsilon$ et $\|a_{i+1} - a'_{i+1}\| < \varepsilon$, on multiplie ces inégalités par t et $1-t$, positifs, non tous deux nuls, donc une inégalité reste stricte, et en sommant on a :

$$\|x - y\| < t\varepsilon + (1-t)\varepsilon = \varepsilon,$$

d'où $y \in \mathscr{B}_0(x, \varepsilon) \subset \Omega$.

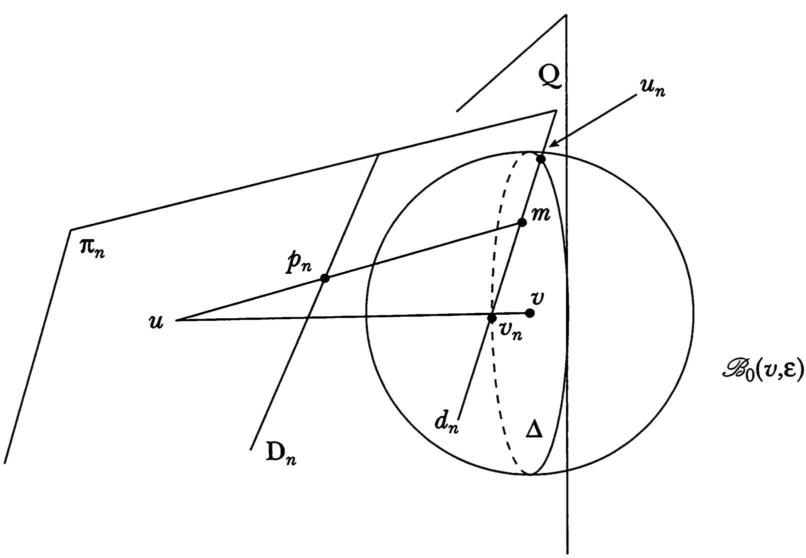
Remarque : on obtient, avec $\bigcup_{x \in \mathscr{P}} \mathscr{B}_0(x, \varepsilon)$, un voisinage tubulaire de $\mathscr{P}$.

Troisième point. Soient a et b dans $\Omega' = \Omega \backslash \mathscr{D}$, avec $\mathscr{D} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$, et $\mathscr{P} = \bigcup_{i=0}^{q-1} [a_i, a_{i+1}]$ une ligne polygonale dans Ω, entre $a = a_0$ et $b = a_q$. On va construire une nouvelle ligne polygonale entre a et b qui « esquivera » d'éventuels points de $\mathscr{D}$.

Pour cela, on fixe d'abord $\varepsilon > 0$ comme au deuxième point, en lui imposant en outre d'être $< \frac{1}{2} \|a_i a_{i+1}\|$, pour tout $i = 0, ..., q-1$, donc les boules $\mathscr{B}_0(a_i, \varepsilon)$ sont disjointes.

Puis, toutes les normes étant équivalentes sur $\mathbb{R}^3$, on considère la norme euclidienne, (ce qui permettra de mieux reconnaître les objets géométriques introduits). Soit alors $u \notin \mathscr{D}$, v dans $\mathbb{R}^3$, et la boule ouverte $\mathscr{B}_0(v, \varepsilon)$, avec $\|u - v\| > \varepsilon$, il existe w dans $\mathscr{B}_0(v, \varepsilon)$ tel que le segment $[u, w]$ ne rencontre pas $\mathscr{D}$.

En effet, soit Q le plan perpendiculaire à la droite aff (u, v) en v et Δ le disque, (ouvert de Q), $\Delta = \mathscr{B}_0(v, \varepsilon) \cap Q$.



Si m de Δ est tel que le segment $[u, m]$ rencontre $\mathscr{D}$, il existe n dans $\mathbb{N}$ et $p_n \in [u, m] \cap D_n$.

Comme $u \notin \mathscr{D}$, le sous-espace affine aff (u, D_n) est un plan π_n, distinct de Q car $u \notin Q$, ce plan π_n contient m, et coupe Q suivant une droite d_n, et tout point m' de Q, non sur d_n, est tel que aff $(u, m') \cap D_n = \emptyset$. Mais $d_n \cap \bar{\Delta}$ est un segment contenant m, (n'oublions pas que m est dans le disque Δ, ouvert de Q).

On considère alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $K_n = d_n \cap \Delta$, on a soit $K_n = \emptyset$, soit K_n du type $]u_n, v_n[$, avec $u_n \neq v_n$, et si $m \in \Delta \backslash (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n)$, on aura aff $(u, m) \cap D_n = \emptyset$, $\forall n$ de $\mathbb{N}$, *a fortiori* le segment $[u, m]$ évitera les D_n.

Il nous reste à justifier la non vacuité de $\Delta \backslash (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n)$. Seuls interviennent les $]u_n, v_n[$ non vides, or dans le plan affine Q, ils correspondent à des droites d_n, ayant un angle polaire $\theta_n \in [0, \pi[$, avec une direction fixe d du plan.

Si $\theta \in [0, \pi[- \{\theta_n, n \in \mathbb{N}$ tel que $K_n \neq \emptyset\}$, (il y en a de tels θ), et si on considère un « diamètre » $]\alpha, \beta[$ de Δ, (disque ouvert), d'angle polaire θ, on a $K_n \cap]\alpha, \beta[$ vide ou réduit à un point, (non parallélisme des $]u_n, v_n[$ et de $]\alpha, \beta[$), donc card $(]\alpha, \beta[\backslash (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n))$ est infini, (continu − dénombrable = continu) : on peut choisir plein plein plein de points m de Δ tels que $[u, m] \cap D_n = \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>*Concluons*</u>. On applique le résultat précédent au point $a_0 = a$, et à $\mathscr{B}_0(a_1, \varepsilon)$: il existe $a'_1 \in \mathscr{B}_0(a_1, \varepsilon)$ tel que $[a_0, a'_1] \cap \mathscr{D} = \emptyset$. On pose $a'_0 = a_0$.

Puis, avec a'_1 et $\mathscr{B}_0(a_2, \varepsilon)$, on trouve a'_2 dans $\mathscr{B}_0(a_2, \varepsilon)$ tel que $[a'_1, a'_2] \cap \mathscr{D} = \emptyset$. On poursuit et on arrive avec a'_{q-1} et $\mathscr{B}_0(a_q, \varepsilon)$, à un choix de a'_q dans $\mathscr{B}_0(a_q, \varepsilon)$ tel que $[a'_{q-1}, a'_q] \cap \mathscr{D} = \emptyset$.

Si $a'_q = b$, c'est terminé, sinon on dispose de $a'_q \notin \mathscr{D}$ et de $b \notin \mathscr{D}$.

Soit $c = \dfrac{a'_q + b}{2}$ le milieu de $[a'_q, b]$ et $\eta = \dfrac{1}{3} \|a'_q - b\|$. On considère la boule ouverte $\mathscr{B}_0(c, \eta)$, le plan Q, médiateur de $[a'_q, b]$ en fait, le disque ouvert dans Q, $\Delta = Q \cap \mathscr{B}_0(c, \eta)$, et on reprend le raisonnement précédent avec la famille dénombrable des plans

$\pi_n = \text{aff}\,(a'_q, D_n)$ d'une part, et $\pi'_n = \text{aff}\,(b, D_n)$ d'autre part. On détermine encore une famille dénombrable d'intervalles du disque Δ à éviter, pour choisir m dans Δ tel que cette fois, $[a'_q, m] \cap \mathscr{D} = \emptyset$ et $[b, m] \cap \mathscr{D} = \emptyset$. Un tel choix est possible, (on choisit $\theta \in [0, \pi[\setminus$ {ensemble dénombrable}, puis un point sur un « diamètre » privé d'un ensemble dénombrable de points).

On obtient ainsi une ligne polygonale dans $\Omega \setminus \mathscr{D}$, entre a et b, puisqu'à chaque étape les $[a'_i, a'_{i+1}]$ sont dans Ω, (vu au deuxième point), qu'ils évitent $\mathscr{D}$, et qu'à la fin les deux segments éventuels sont dans $\mathscr{B}_0(b, \varepsilon) \subset \Omega$ et qu'ils évitent $\mathscr{D}$.

6.10. Un fermé F de $\mathbb{R}^n$ donc un complet, une suite de fonctions donc du dénombrable : cela sent Baire à plein nez. Allons-y, en supposant $F \neq \emptyset$, sinon le jeu est sans intérêt.

Soit p fixé dans $\mathbb{N}$. Pour k dans $\mathbb{N}$, l'ensemble :

$$U_{p,k} = \{x \in F \,;\, |f_k(x)| \leqslant p\},$$

est un fermé ($x \rightsquigarrow |f_k(x)|$ continue) de F, et : $U_p = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_{p,k}$, intersection de fermés, est aussi fermé. Puis, pour chaque x de F, la suite $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ étant bornée, il existe $p(x)$ dans $\mathbb{N}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $|f_k(x)| \leqslant p(x)$, donc $x \in U_{p(x)}$ et $F = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} U_p$.

Mais alors, F, complet, étant réunion dénombrable de fermés, l'un au moins est d'intérieur, (dans F), non vide : il existe une boule ouverte B', non vide, de F, contenue dans un U_p, ce qui signifie que :

$\forall x \in B', \forall k \in \mathbb{N}, |f_k(x)| \leqslant p$: la suite des f_k est uniformément bornée sur B'.

Pour répondre parfaitement à l'énoncé, avec B, boule ouverte de F donc, du type, avec $a \in F$ et $r > 0$: $B = \{x \,;\, x \in F \,;\, d(a, x) < r\}$, on remplace F par $F \cap \mathscr{B}_f\left(a, \dfrac{r}{2}\right) \subset B$, par exemple, la boule fermée étant prise dans $\mathbb{R}^n$. C'est un fermé non vide, car contenant a, et ce qui précède donne une boule ouverte de F, B', contenue dans B.

6.11. L'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \approx \mathbb{R}^{2n^2}$ est vectoriel normé en dimension finie, donc toutes les normes sont équivalentes et il est complet.

Pour la norme d'application linéaire continue, on a $\left|\left|\left|\dfrac{A^m}{m!}\right|\right|\right| \leqslant \dfrac{|||A|||^m}{m!}$, d'où une convergence absolue, donc une convergence, de la série des $\dfrac{A^m}{m!}$, de somme e^A. De plus $e^A = \lim\limits_{k \to +\infty} \sum\limits_{m=0}^{k} \dfrac{A^m}{m!}$.

Si on note $S_k(A)$ ces sommes partielles, par Cayley-Hamilton, on sait que $A^n \in \text{Vect}\,(I, A, ..., A^{n-1}) = F_A$, donc par une récurrence immédiate, $\forall k \geqslant n$, $A^k \in F_A$, d'où les $S_k(A)$ dans F_A, sous-espace de dimension finie de E, donc fermé, mais alors $e^A \in F_A$; on a bien e^A polynôme en A.

Si la fonction exponentielle était polynomiale sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il existerait Q dans $\mathbb{C}[X]$ tel que, pour tout A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on ait $e^A = Q(A)$.

Mais si $d°Q \geqslant 1$, avec λ zéro de Q dans $\mathbb{C}$, (il y en a) on aurait $Q(\lambda I_n) = Q(\lambda)I_n = 0 = e^{\lambda I_n}$, matrice inversible d'inverse $e^{-\lambda I_n}$: c'est exclu.

Puis $d°Q = 0$, soit Q constant, donnerait e^A constant en A or $e^{(\lambda I_n)} = (e^\lambda)I_n$ n'est pas constant si λ varie.

6.12. Famille dénombrable de fermés... c'est Baire. On examinera le cas fini à la fin.

Supposons que [0, 1], fermé de $\mathbb{R}$, donc complet, soit réunion dénombrable stricte de fermés non vides et 2 à 2 disjoints.

D'abord on a $F_{n_0} \cup \left(\bigcup\limits_{n \neq n_0} F_n \right) = [0, 1]$, avec les F_n non vides, cette partition montre que $F_{n_0} \neq [0, 1]$. Mais [0, 1] est connexe, donc F_{n_0}, différent de $\emptyset$ et de [0, 1], étant fermé, n'est pas ouvert, et sa frontière est alors non vide car $\overset{\circ}{F}_{n_0} \underset{\neq}{\subset} F_{n_0}$.

Considérons $F = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (F_n \setminus \overset{\circ}{F}_n)$, cette réunion, non vide, des frontières notées $\text{Fr}\,(F_n)$.

Comme les F_n forment une partition de [0, 1], pour chaque x de [0, 1], il existe un seul n tel que $x \in F_n$, et dire que x est dans F revient alors à dire que x n'est pas dans $\overset{\circ}{F}_n$, donc que $x \notin \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_n$.

On a $F = [0, 1] \backslash (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_n)$ est un fermé de $[0, 1]$ avec $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Fr}(F_n)$, ces $\operatorname{Fr}(F_n)$ étant des fermés de $[0, 1]$ contenus dans F, sont en fait des fermés de F. Mais F, fermé est complet, donc, (Théorème de Baire), il existe un indice n_0 tel que $\operatorname{Fr}(F_{n_0})$ soit d'intérieur, (dans F), non vide. Il existe donc un ouvert Ω de $[0, 1]$ tel que :

$$(\Omega \cap F) \subset \operatorname{Fr}(F_{n_0}) \subset F_{n_0}, \text{ avec } \Omega \cap F \text{ non vide.}$$

De plus, $(\Omega \cap F) = \Omega \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \operatorname{Fr}(F_n)) = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\Omega \cap \operatorname{Fr}(F_n))) \subset F_{n_0}$ donc, $\forall n \neq n_0$, on a, puisque $\Omega \cap \operatorname{Fr}(F_n) \subset F_n$,

$(\Omega \cap \operatorname{Fr}(F_n)) \subset F_{n_0} \cap F_n = \emptyset$ et finalement c'est $\Omega \cap F = \Omega \cap \operatorname{Fr}(F_{n_0})$ qui est non vide, avec, $\forall n \neq n_0$, $\Omega \cap \operatorname{Fr}(F_n) = \emptyset$.

Soit alors I une composante connexe de Ω, ouvert de $[0, 1]$, localement connexe, I est un ouvert de $[0, 1]$, non vide, et c'est un intervalle, et Ω étant réunion de ses composantes connexes, on en choisit une telle que $I \cap \operatorname{Fr}(F_{n_0})$ soit non vide.

Pour tout $n \neq n_0$, comme $[0, 1] = ([0, 1] \backslash F_n) \cup (\operatorname{Fr}(F_n)) \cup \overset{\circ}{F}_n$, et que $I \cap \operatorname{Fr}(F_n) \subset \Omega \cap \operatorname{Fr}(F_n)$ est vide, on a :

$I = (I \cap ([0, 1] \backslash F_n)) \cup (I \cap \overset{\circ}{F}_n)$, est réunion de deux ouverts disjoints, avec I connexe : l'un est vide et l'autre égal à I, mais $I = I \cap \overset{\circ}{F}_n \Leftrightarrow I \subset \overset{\circ}{F}_n$, ce qui est exclu car alors $I \cap \operatorname{Fr}(F_{n_0})$ serait vide, (les F_n sont disjoints), et $I \subset \overset{\circ}{F}_n \subset F_n$, pour $n \neq n_0 \Rightarrow I \cap F_{n_0} = \emptyset$, exclu par choix de I.

C'est donc que $I \subset ([0, 1] \backslash F_n)$, et ce pour tout $n \neq n_0$, donc $I \subset \bigcap_{n \neq n_0} ([0, 1] \backslash F_n) = [0, 1] \Big\backslash \Big(\bigcup_{n \neq n_0} F_n \Big) = F_{n_0}$: on a finalement I, intervalle ouvert de $[0, 1]$, contenu dans F_{n_0}, donc $I \subset \overset{\circ}{F}_{n_0}$, ce qui contredit $I \cap \operatorname{Fr}(F_{n_0})$ non vide.

On a bien $[0, 1]$ non réunion dénombrable stricte de fermés non vides disjoints.

En ce qui concerne le cas d'une réunion finie, de n fermés. Pour $n = 1$, c'est possible, mais pour $n > 1$ c'est exclu, sinon

$[0, 1] = F_1 \cup \left(\bigcup_{k=2}^{n} F_k \right)$, avec $\bigcup_{k=2}^{n} F_k$ fermé, et on aurait une partition de $[0, 1]$ connexe en deux fermés : c'est exclu.

6.13. Le polynôme minimal d'une matrice M divisant son polynôme caractéristique, (Cayley Hamilton), il est de degré n au plus, et il sera de degré n si et seulement si la famille $\{I, M, M^2, ..., M^{n-1}\}$ est libre dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$.

En prenant les composantes des $M^j, j = 0, ..., n-1$ dans une base de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient une matrice $\mathscr{M}(M)$, de n^2 lignes et n colonnes, et M est dans Ω si et seulement si $\mathscr{M}(M)$ est de rang n, donc si et seulement si un des déterminants mineur d'ordre n est non nul.

Il y a $C^n_{n^2}$ tels mineurs, notés $d_i(M)$, pour $1 \leqslant i \leqslant C^n_{n^2}$, (obtenus en prenant n lignes parmi les n^2 lignes de $\mathscr{M}(M)$), et $M \in \Omega \Leftrightarrow \exists i, d_i(M) \neq 0$,

donc $\Omega = \bigcup_{i=1}^{C^n_{n^2}} d_i^{-1}(\mathbb{R}^*)$.

Il suffit de remarquer que $M \rightsquigarrow d_i(M)$ est continue, car polynomiale par rapport aux termes généraux de M, pour conclure à Ω ouvert comme réunion d'ouverts.

6.14. C'est une question existentielle, ($\exists a$ tel que $f(a) = a$), avec E compact : il y a sans doute une borne de fonction continue à valeurs réelles atteinte !

Soit la fonction $x \rightsquigarrow \theta(x) = d(f(x), x)$ de E dans $\mathbb{R}$. Elle est continue, (composée de $x \rightsquigarrow (f(x), x)$, continue car ses composantes, f et id_E le sont, suivie de l'application distance), de E compact dans $\mathbb{R}$, donc elle est bornée et atteint ses bornes : en particulier il existe a dans E tel que $d(f(a), a) = \inf \{\theta(x) ; x \in E\} = \theta(a)$.

Si $f(a) \neq a$, on aura :

$d(f(f(a)), f(a)) = \theta(f(a)) < d(f(a), a) = \theta(a)$, et la borne inférieure ne sera pas $\theta(a)$: c'est exclu, donc $f(a) = a$.

Si b est point fixe, avec $b \neq a$, on aura :

$d(f(b), f(a)) < d(a, b)$ mais aussi $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$ car $f(a) = a$ et $f(b) = b$: c'est exclu. Donc il y a un seul point fixe.

6.15. Soit A = {rayons des boules ouvertes contenues dans Ω}. Si Ω contient x, (Ω non vide), il existe une boule ouverte contenant x et x, contenue dans Ω, son rayon r est > 0, appartient à A qui est non vide. De plus A est majoré sinon Ω ne serait pas bornée. Soit $r = \sup(A)$, on a $r > 0$ et on va justifier que Ω est une boule ouverte de rayon r.

Pour cela il nous faut son centre qui, dans E complet sera sans doute limite d'une suite de Cauchy !

Comme $r = \sup(A)$, il existe des boules ouvertes $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de centres c_n, de rayons r_n, avec $B_n \subset \Omega$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = r$: il suffit de dire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $r - \dfrac{1}{n+1}$ ne majore plus A pour avoir une boule ouverte B_n, de rayon $r_n \in \left]r - \dfrac{1}{n+1}, r\right]$, contenue dans Ω.

La suite des centres $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors de Cauchy. Sinon :
$\exists \varepsilon > 0$, $\forall N$, $\exists p \geqslant N, \exists q \geqslant N$, $d(c_p, c_q) > \varepsilon$.

On peut formuler avec : $\exists \varepsilon < r$, car si la négation de « suite de Cauchy », se fait avec un $\varepsilon > r$, pour n'importe quel $\varepsilon' > 0$, avec $\varepsilon' < r$, on aura *a fortiori*

$$\forall N, \exists p \geqslant N, \exists q \geqslant N, d(c_p, c_q) > \varepsilon > r > \varepsilon'.$$

Pour cet $\varepsilon > 0$, supposé $< r$, on traduit la convergence des r_n vers r, avec $\dfrac{\varepsilon}{6}$, (un peu de patience) :

$$\exists N_0, \forall n \geqslant N_0, |r_n - r| < \frac{\varepsilon}{6}, \text{ d'où } a\ fortiori,$$

$$\forall p \geqslant N_0, \forall q \geqslant N_0, |r_p - r_q| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour ce N_0, $\exists p_0 \geqslant N_0, \exists q_0 \geqslant N_0$ tels que $d(c_{p_0}, c_{q_0}) > \varepsilon$.

Soit alors $x = c_{p_0} + \left(r - \dfrac{\varepsilon}{3}\right) \dfrac{c_{p_0} - c_{q_0}}{\|c_{p_0} - c_{q_0}\|}$, on a $\|x - c_{p_0}\| = r - \dfrac{\varepsilon}{3}$, et comme $p_0 \geqslant N_0$, on a $r - \dfrac{\varepsilon}{6} < r_{p_0} \leqslant r$, d'où :

$$\|x - c_{p_0}\| = r - \frac{\varepsilon}{3} < r - \frac{\varepsilon}{6} < r_{p_0} \leqslant r \Rightarrow x \in \mathscr{B}_0(c_{p_0}, r_{p_0}) \subset \Omega.$$

De même, $y = c_{q_0} + \left(r - \frac{\varepsilon}{3}\right) \frac{c_{q_0} - c_{p_0}}{\|c_{q_0} - c_{p_0}\|}$ est tel que :

$$\|y - c_{q_0}\| = r - \frac{\varepsilon}{3} < r - \frac{\varepsilon}{6} < r_{q_0} \leqslant r \Rightarrow y \in \mathscr{B}_0(c_{q_0}, r_{q_0}) \subset \Omega .$$

$$\text{Enfin } \|x - y\| = (c_{p_0} - c_{q_0}) + \frac{r - \frac{\varepsilon}{3}}{\|c_{q_0} - c_{p_0}\|} (c_{p_0} - c_{q_0} - c_{q_0} + c_{p_0})$$

$$= (c_{p_0} - c_{q_0}) \left(1 + 2\left(r - \frac{\varepsilon}{3}\right) \frac{1}{\|c_{p_0} - c_{q_0}\|}\right)$$

$$\text{d'où } \|x - y\| = \|c_{p_0} - c_{q_0}\| + 2\left(r - \frac{\varepsilon}{3}\right) > \varepsilon + 2r - \frac{2\varepsilon}{3} = 2r + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mais alors, x et y sont dans Ω, à une distance de $2r + \frac{\varepsilon}{3}$ l'un de l'autre. Or il existe une boule ouverte $\mathscr{B}$, contenue dans Ω, qui les contient : si ρ est le rayon de cette boule, par inégalité triangulaire on a $2r + \frac{\varepsilon}{3} \leqslant 2\rho$ d'où ρ dans A avec $\rho > r = \sup A$: c'est absurde.

La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des centres est de Cauchy dans E complet, donc elle converge, et si c est sa limite, on va prouver que $\Omega = \mathscr{B}_0(c, r)$.

Soit $x \in \mathscr{B}_0(c, r)$, $d = \|x - c\| < r$, donc $\varepsilon = r - d$ est > 0, et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = c$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = r$, à cet $\varepsilon > 0$ on associe N tel que $\forall n \geqslant N$, $\|c_n - c\| < \frac{\varepsilon}{2}$ et $|r_n - r| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Mais alors
$$\|c_n - x\| \leqslant \|c_n - c\| + \|c - x\|$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + r - \varepsilon = r - \frac{\varepsilon}{2} < r_n,$$

donc $x \in \mathscr{B}_0(c_n, r_n) \subset \Omega$ par hypothèse, d'où $x \in \Omega$ et $\mathscr{B}_0(c, r) \subset \Omega$.

Soit pour finir y dans Ω, si $\|c - y\| \geqslant r$, comme Ω est ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $\mathscr{B}_0(y, 2\rho) \subset \Omega$. On peut imposer $\rho < r$.

Soit $y' = y + \rho \frac{y - c}{\|y - c\|}$, on a $\|y - y'\| = \rho$ donc $y' \in \mathscr{B}_0(y, 2\rho) \subset \Omega$, (on s'éloigne, en y', de c).

$$\text{Puis } \|c-y'\| = \left\|(c-y)+\rho\,\frac{c-y}{\|c-y\|}\right\| = \|c-y\|\left(1+\frac{\rho}{\|c-y\|}\right)$$
$$= \|c-y\|+\rho \geqslant r+\rho.$$

Dans l'alignement de c et de y', on va choisir un x, « loin » de y'.

Soit $x = c+\left(r-\frac{\rho}{2}\right)\frac{c-y'}{\|c-y'\|}$, on a $x \in \mathscr{B}_0(c, r) \subset \Omega$. Mais, comme x et y' sont dans Ω, par hypothèse il existe une boule ouverte B_1 qui les contient, et qui est contenue dans Ω.

$$\text{Or } x-y' = c-y'+\left(r-\frac{\rho}{2}\right)\frac{c-y'}{\|c-y'\|}$$
$$= (c-y')\left(1+\frac{r-\rho/2}{\|c-y'\|}\right), \text{ donc :}$$
$$\|x-y'\| = \|c-y'\|+r-\frac{\rho}{2} \geqslant r+\rho+r-\frac{\rho}{2} = 2r+\frac{\rho}{2},$$

donc le rayon de B_1 est supérieur à $r+\rho/4$, ce qui est difficilement compatible avec $r = \sup(A)$ puisque ce rayon est dans A.

Donc, pour tout y de Ω on a $\|c-y\| < r$, d'où $\Omega \subset \mathscr{B}_0(c, r)$ et l'égalité.

6.16. a) Pour la norme sur F_n induite par celle de E, F_n, espace vectoriel normé de dimension finie, n, est complet, mais alors F_n, complet dans E est fermé de E. En fait le résultat est vrai même si E est non complet : si $x \in \overline{F_n}$, il existe une suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F_n convergeant vers x, cette suite est bornée, et si, $\forall p$, $\|u_p\| \leqslant r$, les u_p sont dans $K = F_n \cap \mathscr{B}_f(0, r)$, fermé borné de F_n, donc compact et dans ce compact, la suite des u_p admet une suite extraite qui converge vers un x' de ce compact, mais aussi, comme toute suite extraite d'une suite convergente, vers x. Donc $x = x'$ est dans $K \subset F_n$.

b) Les conditions sur les μ_n n'interviennent que si $n-1 \geqslant 1$ soit $n \geqslant 2$. On choisit donc μ_0, μ_1 et $\mu_2 > 0$, puis $\mu_2 a_2$ n'étant pas dans F_1, fermé, $d(\mu_2 a_2, F_1) > 0$, (la nullité donnerait $\mu_2 a_2 \in \overline{F_1} = F_1$), on peut poser :

$$\mu_3 = \frac{1}{3\|a_3\|}\,d(\mu_2 a_2, F_1)\ ;$$

et plus généralement, avec $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_n$ trouvés, > 0, comme $\mu_n a_n \notin F_{n-1}$, (famille des a_k libre et $\mu_n > 0$), on a : $d(\mu_n a_n, F_{n-1}) > 0$ et on peut poser $\mu_{n+1} = \dfrac{1}{3\|a_{n+1}\|}\, d(\mu_n a_n, F_{n-1})$.

Soit alors une suite (μ_n) vérifiant les conditions.

On a $\|\mu_{n+1} a_{n+1}\| = \mu_{n+1}\|a_{n+1}\| \leqslant \dfrac{1}{3}\, d(\mu_n a_n, F_{n-1})$, or la distance est « positivement homogène » et $\mu_n F_{n-1} = F_{n-1}$, donc :

$\|\mu_{n+1} a_{n+1}\| \leqslant \dfrac{\mu_n}{3}\, d(a_n, F_{n-1}) \leqslant \dfrac{\mu_n}{3}\, \|a_n - 0\|$ puisque 0 est dans F_{n-1}, soit finalement, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\|\mu_{n+1} a_{n+1}\| \leqslant \frac{1}{3}\, \|\mu_n a_n\| \leqslant \frac{1}{3^n}\, \|\mu_1 a_1\| :$$

la série des $\mu_n a_n$ est absolument convergente dans E complet, donc convergente, et $x = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu_k a_k$ existe.

Supposons alors qu'il existe n tel que $x \in F_n$. On peut écrire $x = \sum_{k=1}^{n} \mu_k a_k + \mu_{n+1} a_{n+1} + \mu_{n+2} a_{n+2} + \sum_{k=n+3}^{+\infty} \mu_k a_k$, avec $x' = \sum_{k=1}^{n} \mu_k a_k$ dans F_n, et $y' = \sum_{k=n+3}^{+\infty} \mu_k a_k$ de norme majorée, compte tenu de ce qui précède, par :

$$\|y'\| \leqslant \|\mu_{n+3} a_{n+3}\| \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^p} + \ldots\right) = \frac{3}{2}\, \|\mu_{n+3} a_{n+3}\|$$

$$\leqslant \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}\, \|\mu_{n+2} a_{n+2}\| = \frac{1}{2}\, \|\mu_{n+2} a_{n+2}\|.$$

Mais alors on aura $\|\mu_{n+2} a_{n+2} + y'\| \leqslant \|\mu_{n+2} a_{n+2}\| + \dfrac{1}{2}\, \|\mu_{n+2} a_{n+2}\|$

$\leqslant \dfrac{3}{2}\, \|\mu_{n+2} a_{n+2}\|$, et aussi :

$\|\mu_{n+2} a_{n+2} + y'\| = \|\mu_{n+1} a_{n+1} - (x - x')\|$, avec $x - x' \in F_n$.

$\geqslant d(\mu_{n+1} a_{n+1}, F_n) \geqslant 3\mu_{n+2}\|a_{n+2}\|$, d'où l'inégalité :

$3\mu_{n+2}\|a_{n+2}\| \leqslant \frac{3}{2}\,\mu_{n+2}\|a_{n+2}\|$, difficilement compatible avec $\mu_{n+2} > 0$ et $a_{n+2} \neq 0$. C'est donc qu'il n'existe pas d'indice n tel que $x \in \mathrm{F}_n$.

6.17. Soit $\mathrm{E} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\mathscr{D} = \{\text{matrices diagonalisables}\}$. Une matrice diagonalisable peut être à racines toutes simples ou non. Soit donc A diagonalisable, mais ayant une valeur propre λ_1, multiple d'ordre q. Il existe P régulière telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \Delta = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_1\,;\,\lambda_{q+1}, \ldots, \lambda_n)$, avec, $\forall j \geqslant q+1, \lambda_j \neq \lambda_1$.

Pour $z \neq 0$ dans $\mathbb{C}$, la matrice

$$\Delta(z) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_1 & z & 0 & & & \\ & \ddots & z & & 0 & \\ 0 & & \lambda_1 & & & \\ \hline & & & \lambda_{q+1} & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & \lambda_n \end{array}\right)$$

est non diagonalisable, car λ_1 est valeur propre d'ordre q, et $\Delta(z) - \lambda_1\mathrm{I}_n$ est de rang $q - 1 + n - q = n - 1 \neq n - q$.

Donc les matrices $\mathrm{P}\Delta(z)\mathrm{P}^{-1}$ sont dans $\mathrm{E}\backslash\mathscr{D}$, et comme $\lim\limits_{z \to 0} \mathrm{P}\Delta(z)\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{A}$, on a $\mathrm{A} \in \overline{\mathrm{E}\backslash\mathscr{D}} = \mathrm{E}\backslash\mathring{\mathscr{D}}$, *d'où* A *non intérieure à* $\mathscr{D}$, (avec $\mathrm{A} \in \mathscr{D}$).

Réciproquement soit $\mathrm{A} \in (\mathscr{D}\backslash\mathring{\mathscr{D}}) \subset (\mathrm{E}\backslash\mathring{\mathscr{D}}) = \overline{\mathrm{E}\backslash\mathscr{D}}$: il existe une suite $(\mathrm{A}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de matrices de $\mathrm{E}\backslash\mathscr{D}$, qui converge vers A.

Comme A_k est non diagonalisable, A_k admet au moins une valeur propre multiple, notée λ_k, et si $\chi_{\mathrm{A}_k}(z)$ est le polynôme caractéristique de A_k, on a $|\chi_{\mathrm{A}_k}(\lambda_k)|^2 + |\chi'_{\mathrm{A}_k}(\lambda_k)|^2 = 0$.

Comme les A_k convergent vers A, ces matrices sont bornées, donc leurs valeurs propres sont bornées, (Théorème d'Hadamard : les valeurs propres de $M = (m_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ sont dans la réunion des disques centrés en m_{ii}, de rayon $\Lambda_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |m_{ij}|$, pour $i = 1, ..., n$).

Les λ_k étant dans un fermé borné de $\mathbb{C}$, donc un compact, il existe une suite extraite $(\lambda_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente vers λ, on a aussi $\lim\limits_{k \to +\infty} A_{\varphi(k)} = A$, (suite extraite d'une suite convergente), et comme l'expression :

$$\left|\chi_{A_{\varphi(k)}}(\lambda_{\varphi(k)})\right|^2 + \left|\chi'_{A_{\varphi(k)}}(\lambda_{\varphi(k)})\right|^2 = 0,$$

est une expression polynomiale par rapport à $\lambda_{\varphi(k)}$ et aux coefficients de $A_{\varphi(k)}$ et leurs conjugués, tout ceci passe à la limite et donne $|\chi_A(\lambda)|^2 + |\chi'_A(\lambda)|^2 = 0$: la matrice A admet λ pour valeur propre double au moins.

Donc $\mathscr{D} - \overset{\circ}{\mathscr{D}}$ est l'ensemble des matrices diagonalisables ayant au moins une valeur propre multiple, donc $\overset{\circ}{\mathscr{D}}$ est l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres simples.

6.18. Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Si $H = \{0\}$, il est égal à $0 \cdot \mathbb{Z}$. Sinon, il y a des éléments non nuls, h, dans H, et quitte à changer h en $-h$, on peut dire que $H^+ = \{x \,;\, x \in H, x > 0\}$ est non vide. Cet ensemble est non vide, minoré par 0, dans $\mathbb{R}$, donc il admet une borne inférieure α.

Si $\alpha > 0$, on va montrer que $H = \alpha\mathbb{Z}$. En effet, $\frac{3\alpha}{2}$ ne minore plus H^+, donc il existe $\alpha' \in H^+ \cap \left[\alpha, \frac{3\alpha}{2}\right[$. Si $\alpha' = \alpha$, on obtient $\alpha \in H^+ \subset H$. Sinon, on a $\alpha < \alpha' < \frac{3\alpha}{2}$, et α' ne minorant pas H^+, il existe $\alpha'' \in H^+ \cap [\alpha, \alpha'[$, mais alors α'' et α' sont dans H, donc $\alpha' - \alpha'' \in H$ avec $0 < \alpha' - \alpha'' < \frac{\alpha}{2}$ ce qui contredit la définition de α. Finalement $\alpha \in H$ donc $\alpha\mathbb{Z} \subset H$.

Soit $h \in H$, $\exists! p \in \mathbb{Z}$ tel que $p\alpha \leqslant h < p\alpha + \alpha$, et comme $p\alpha \in H$, on aura $0 \leqslant h - p\alpha < \alpha$: l'hypothèse $0 < h - p\alpha$ impliquerait $h - p\alpha$ dans

H^+, avec $h - p\alpha < \alpha$, borne inférieure de H^+ : c'est exclu, donc $h = p\alpha \in \alpha\mathbb{Z}$, d'où $H \subset \alpha\mathbb{Z}$, et dans ce cas $H = \alpha\mathbb{Z}$.

Si $\alpha = \operatorname{Inf} H^+ = 0$, il existe une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H^+ qui converge vers 0, mais alors, si on se donne x réel quelconque, pour n fixé, comme $h_n > 0, \exists ! p_n \in \mathbb{Z}$ tel que $p_n h_n \leqslant x < p_n h_n + h_n$, donc $x_n = p_n h_n \in H$, avec $|x - x_n| \leqslant h_n$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ et $x \in \overline{H}$: le sous-groupe H est alors partout dense.

6.19. Soit G un sous-groupe additif ouvert de $\mathbb{R}$. Pour l'équivalence $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow x - y \in G$, on sait que la classe de y est l'ensemble des $x = y + g$, $g \in G$, que l'on note $y + G$.

C'est l'image de G par la translation $t_y : z \leadsto z + y$, continue, donc aussi bicontinue puisque $(t_y)^{-1}$ est aussi une translation, t_{-y}. Donc t_y est ouverte.

Mais alors, $y + G$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, et vu la partition :

$\mathbb{R} = G \cup$ ($\cup$ autres classes, distinctes de G, qui sont des ouverts),

G devient complémentaire d'un ouvert donc... fermé.

Mais on a vu, (6.18), que soit $G = \alpha\mathbb{Z}$, ce qui n'est pas ouvert, soit $\overline{G} = \mathbb{R}$, ce qui, avec G fermé conduit à $G = \mathbb{R}$: le seul sous-groupe ouvert de $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$ lui-même.

6.20. Soit T l'ensemble des réels t tels que, pour tout x de $\mathbb{R}$ on ait $f(x+t) = f(x)$. Il contient 0, donc il est non vide, et si t_1 et t_2 sont deux périodes de f, on a

$$\begin{aligned} f(x + t_1 - t_2) &= f((x + t_1 - t_2) + t_2), (t_2 \in T) \\ &= f(x + t_1) = f(x), \end{aligned}$$

ceci pour tout x, donc $t_1 - t_2 \in T$, qui est sous-groupe de $\mathbb{R}$. De plus si $t \in \overline{T}$, et si $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de périodes de f qui converge vers t, par continuité de f en $x + t$, on a :

$$f(x+t) = \lim_{n \to +\infty} f(x + t_n) = f(x),$$

donc $t \in T$: le groupe des périodes, T, de f continue est fermé, donc c'est $\mathbb{R}$ ou un groupe du type $a\mathbb{Z}$, (voir exercice 6.18).

Si f continue, admet 1 et π pour périodes, T, qui contient 1 et π n'est pas du type $a\mathbb{Z}$, sinon, il existe p et q dans $\mathbb{Z}^*$ tels que $1 = ap$ et $\pi = aq$ d'où $\pi = \dfrac{q}{p}$ rationnel. Donc $T = \mathbb{R}$ et f est constante.

6.21. Les fonctions f et g étant continues périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ont un groupe de périodes fermé, différent de $\mathbb{R}$, (f et g non constantes) donc du type $a\mathbb{Z}$, et, avec $a > 0$, a est plus petite période. On appelle ici α et β les plus petites périodes respectives de f et g : ce sont des nombres strictement positifs.

Si $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, en écrivant $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{p}{q}$, on peut choisir p et q dans $\mathbb{N} - \{0\}$, et l'égalité $q\alpha = p\beta$ montre que f admet $\gamma = q\alpha$ pour période, g admet $p\beta = \gamma$ pour période donc $f+g$ admet γ non nul pour période : elle est périodique.

Si $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$, montrons par l'absurde, que $f+g$ n'est pas périodique, c'est-à-dire que $\mathrm{T} = \{0\}$, (T ensemble des périodes de $f+g$).

En effet supposons qu'il existe un élément non nul dans le groupe T, on peut le supposer > 0 : soit γ un tel élément.

Si $\frac{\alpha}{\gamma} \in \mathbb{Q}$, en écrivant $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{r}{s}$, ($r$ et s entiers non nuls), avec $\sigma = s\alpha = r\gamma$ on aurait σ période de f, (multiple de α), et de $f+g$, (multiple de γ), donc σ est aussi période de g d'où σ multiple de β : en écrivant $\sigma = t\beta$, ($t \in \mathbb{N}^*$), l'égalité $s\alpha = t\beta = \sigma$ donne $\frac{\alpha}{\beta}$ dans $\mathbb{Q}$ ce qui est exclu.

Donc $\frac{\alpha}{\gamma} \notin \mathbb{Q}$. Mais on justifierait de même que $\frac{\beta}{\gamma} \notin \mathbb{Q}$.

On a alors, pour tout x réel :

$(f+g)(x+\gamma) = (f+g)(x)$, d'où l'égalité :

$f(x+\gamma) - f(x) = g(x) - g(x+\gamma)$. On note $h(x)$ cette expression, et h admet α pour période, (vu l'expression $f(x+\gamma) - f(x)$), mais aussi β, donc le groupe des périodes de h contient α et β, avec $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$: ce groupe fermé n'est pas du type $a\mathbb{Z}$, (sinon $\alpha = pa$ et $\beta = qa \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}$ dans $\mathbb{Q}$), donc c'est $\mathbb{R}$, mais alors h est constante, notons c cette constante.

L'égalité $f(x+\gamma) - f(x) = c$, donne, par une récurrence immédiate, l'égalité $f(x+n\gamma) = f(x) + nc$, et, pour x fixé, si $c \neq 0$, $\lim_{n \to +\infty} |f(x+n\gamma)| = +\infty$: c'est incompatible avec le fait que f, continue périodique est bornée sur $\mathbb{R}$.

Donc $c = 0$, mais alors $f(x+\gamma) = f(x)$, pour tout x donc γ est période de f ; mais aussi de g, d'où γ du type $p\alpha$ et $q\beta$ avec p et q entiers, et $p\alpha = q\beta \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}$ dans $\mathbb{Q}$, ce qui est exclu. Finalement la fonction $f+g$ n'admet pas de période non nulle, et on obtient $f+g$ périodique si et seulement si $\frac{\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$.

6.22. Rappelons d'abord que si u est linéaire bijective d'un Banach dans un autre, u^{-1} est également continue, ce qui justifie ici l'utilisation de la norme d'application linéaire continue, $|||A^{-1}|||$, c'est le Théorème de Banach, que cet énoncé suppose connu.

Comme f est k.lipschitzienne, elle est uniformément continue, donc $A+f$ est continue. Est-elle bijective ? Soit $y \in E$, on veut résoudre l'équation en x :

$$A(x) + f(x) = y,$$

et pour utiliser l'aspect linéaire, bijectif de A, on met l'équation sous la forme équivalente :

$$x = A^{-1}(y) - A^{-1} \circ f(x),$$

forme qui incite à trouver x comme point fixe de l'application $\theta : E \mapsto E$, définie par $\theta(x) = A^{-1}(y) - A^{-1} \circ f(x)$.

On a E complet, et :

$$\begin{aligned}\|\theta(x) - \theta(x')\| &= \|A^{-1}(f(x') - f(x))\| \\ &\leqslant |||A^{-1}|||\,\|f(x') - f(x)\| \\ &\leqslant (k|||A^{-1}|||)\|x - x'\|.\end{aligned}$$

Comme $k|||A^{-1}||| < 1$, l'application θ est contractante donc admet un et un seul point fixe : pour y donné dans E, il existe un et un seul antécédent x tel que $(A+f)(x) = y$.

L'application $A+f$ est bijective de E sur E, continue il reste à justifier la continuité de sa réciproque.

Si on a $A(x) + f(x) = y$ et $A(x') + f(x') = y'$., c'est que :

$$\begin{aligned}x - x' &= (A^{-1}(y) - A^{-1}(f(x))) - (A^{-1}(y') - A^{-1}(f(x'))) \\ &= A^{-1}(y - y') - A^{-1}(f(x) - f(x')) \text{ d'où :}\end{aligned}$$

$$\|x - x'\| \leqslant |||A^{-1}|||\,\|y - y'\| + k|||A^{-1}|||\,\|x - x'\|,$$

ce qui donne :

$$(1 - k|||A^{-1}|||)\|x - x'\| \leqslant |||A^{-1}|||\,\|y - y'\|.$$

En posant $\varphi = A+f$, on a $x = \varphi^{-1}(y), x' = \varphi^{-1}(y')$ et l'inégalité précédente s'écrit encore :

$$\|\varphi^{-1}(y) - \varphi^{-1}(y')\| \leqslant \frac{|||A^{-1}|||}{1 - k|||A^{-1}|||} \|y - y'\|,$$

d'où φ^{-1} lipschitzienne donc uniformément continue.

6.23. L'hypothèse donne déjà f injective. Si elle est surjective, on aura f bijective de K compact sur K, séparé, avec f continue, donc f^{-1} sera continue car, pour tout fermé F de K compact, on a F compact, et $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$, image continue d'un compact dans un séparé est un compact, donc un fermé.

Il reste donc à justifier que $f(K) = K$.

Soit donc a dans K, la suite des $f^n(a) = a_n$, (avec $f^n = f \circ f \circ ... \circ f$, n fois), est dans K, métrique compact, donc admet une suite extraite convergente, notée $(a_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, avec φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. En particulier $\lim\limits_{n \to +\infty} \|f^{\varphi(n+1)}(a) - f^{\varphi(n)}(a)\| = 0$.

Or $f^{\varphi(n+1)}(a) = f^{\varphi(n)}(f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(a))$, et, par applications itérées de l'inégalité de départ, on a :

$$\|f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(a) - a\| \leqslant \|f^{\varphi(n+1)}(a) - f^{\varphi(n)}(a)\|,$$

et, en posant $x_n = f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(a)$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} \|x_n - a\| = 0$.

Comme les $\varphi(n+1) - \varphi(n)$ sont $\geqslant 1$, les x_n sont dans $f(K)$, fermé car image continue d'un compact dans un séparé, d'où a, limite des x_n, dans $\overline{f(K)} = f(K)$: on a bien $K \subset f(K)$, et le côté surjectif de f.

6.24. On se donne le polynôme $Q = \sum\limits_{k=0}^{q} a_k X^k$, avec q, degré de Q si Q est non nul, et sinon, q entier laissé à votre choix.

En posant $e_i = X^i$ pour $i \leqslant q$ et $e_i = X^i - Q$ si $i > q$ la famille des $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degrés échelonnés, donc c'est une base de $E = \mathbb{R}[X]$, et, en posant pour $P = \sum_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i e_i$, (les α_i étant presque tous nuls), $\|P\| = \sup\{2^{-i}|\alpha_i| \ ; \ i \in \mathbb{N}\}$, ce sup existe, (famille finie de nombres positifs), et il est immédiat de vérifier que c'est une norme.

De plus comme pour tout $n > q$ on a $X^n - Q = e_n$, on a $\|X^n - Q\| = 2^{-n} \cdot 1$, donc $\lim_{n \to +\infty} \|X^n - Q\| = 0$.

Pour cette norme, la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers Q, et on peut choisir Q au départ quelconque, donc la même suite peut avoir des limites différentes pour des normes non équivalentes.

6.25. Notons $\mathscr{P}(y)$ la propriété :

$$\lim_{n \to +\infty} \langle x_{\varphi(n)}, y \rangle = \langle x^*, y \rangle,$$

et F le sous-espace vectoriel Vect $\{e_i, i \geqslant 1\}$.

Si on a une suite extraite et x^* tels que $\mathscr{P}(e_i)$ soit vérifiée pour tout i, par linéarité en y du produit scalaire $y \leadsto \langle u, y \rangle$, et combinaison linéaire de limites, on aura $\mathscr{P}(z)$ vérifiée pour tout z de F. On peut passer à H par densité. Soit y dans H, et $\varepsilon > 0$ fixé. Il existe z de F tel que $\|y - z\| \leqslant \varepsilon$, d'où, par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}
|\langle x^*, y\rangle - \langle x_{\varphi(n)}, y\rangle| &\leqslant |\langle x^*, y\rangle - \langle x^*, z\rangle| + |\langle x^*, z\rangle - \langle x_{\varphi(n)}, z\rangle| \\
&\qquad + |\langle x_{\varphi(n)}, z\rangle - \langle x_{\varphi(n)}, y\rangle| \\
&\leqslant |\langle x^*, y - z\rangle| + |\langle x^*, z\rangle - \langle x_{\varphi(n)}, z\rangle| + |\langle x_{\varphi(n)}, z - y\rangle| \\
&\leqslant (\|x^*\| + \|x_{\varphi(n)}\|)\|y - z\| + |\langle x^*, z\rangle - \langle x_{\varphi(n)}, z\rangle| \\
&\leqslant (\|x^*\| + 1)\varepsilon + |\langle x^*, z\rangle - \langle x_{\varphi(n)}, z\rangle|,
\end{aligned}$$

et, comme $\mathscr{P}(z)$ est vérifiée pour z dans F, il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que, $\forall n \geqslant n_0$, $|\langle x^*, z\rangle - \langle x_{\varphi(n)}, z\rangle| \leqslant \varepsilon$, d'où, $\forall n \geqslant n_0$,

$$|\langle x^*, y\rangle - \langle x_{\varphi(n)}, y\rangle| \leqslant (2 + \|x^*\|)\varepsilon,$$

ce qui traduit bien $\lim_{n \to +\infty} \langle x_{\varphi(n)}, y\rangle = \langle x^*, y\rangle$.

On est donc ramené à trouver x^*, et la suite extraite de façon que $\mathscr{P}(e_i)$ soit vérifiée pour tout i.

Dans le Hilbert H, $F_j = \text{Vect}\,(e_1, \ldots, e_j)$, $(j \in \mathbb{N}^*)$, est sous-espace non isotrope de dimension finie, donc $H = F_j \oplus F_j^{\perp}$, et la projection orthogonale de x de H, sur F_j, étant : $p(x) = \sum_{i=1}^{j} \langle x, e_i \rangle e_i$, on a

$$\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2$$
$$= \sum_{i=1}^{j} (\langle x, e_i \rangle)^2 + \|x - p(x)\|^2.$$

De plus, pour tout $y \in F_j$, on a :

$$x - y = x - p(x) + p(x) - y, \text{ avec } x - p(x) \in F_j^{\perp} \text{ et } p(x) - y \in F_j,$$

d'où $\|x - y\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - y\|^2$, soit $\|x - y\| \geqslant \|x - p(x)\|$.

Soit x quelconque dans H.

Comme $\bar{F} = H$, $\forall \varepsilon > 0, \exists y_0 \in F, \|x - y_0\| \leqslant \varepsilon$. Puis, il existe j_0 tel que $y_0 \in F_{j_0}$, donc, $\forall j \geqslant j_0, y_0 \in F_j$, et, avec $p(x)$ projeté de x sur F_j, on aura, $\forall j \geqslant j_0$:

$$0 \leqslant \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{j} (\langle x, e_i \rangle)^2 = \|x - p(x)\|^2 \leqslant \|x - y_0\|^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

d'où $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\langle x, e_i \rangle)^2$, (égalité de Bessel).

Après ces généralités, passons à l'exercice.

Mais alors, $\forall n$, on aura $\sum_{i=1}^{+\infty} (\langle x_n, e_i \rangle)^2 = \|x_n\|^2 \leqslant 1$. Pour $i = 1$, et pour tout n on a : $|\langle x_n, e_1 \rangle| \leqslant 1$: la suite des $\langle x_n, e_1 \rangle$, dans le compact $[-1, 1]$, admet une suite extraite $(\langle x_{\varphi_1(n)}, e_1 \rangle)$ convergente vers $x_1{}^*$.

A son tour, la suite des $\langle x_{\varphi_1(n)}, e_2 \rangle$ est à valeur dans $[-1, 1]$ compact, donc admet une suite extraite des $\langle x_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}, e_2 \rangle$ qui converge vers $x_2{}^*$.

On itère, en extrayant pour chaque entier non nul i, une suite $\langle x_{\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_i(n)}, e_i \rangle$ qui converge vers $x_i{}^*$.

Mais en fait, pour $1 \leqslant j < i$, on peut écrire :

$$\varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \ldots \circ \varphi_i(n) = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_j(\varphi_{j+1} \circ \ldots \circ \varphi_i(n)),$$

et, comme $\lim_{n \to +\infty} \varphi_{j+1} \circ \ldots \circ \varphi_i(n) = +\infty$, on aura, par construction de φ_j, $\lim_{n \to +\infty} \langle x_{\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_j(\varphi_{j+1} \circ \ldots \circ \varphi_i(n))}, e_j \rangle = x_j^*$.

De plus, $\sum_{j=1}^{i} (\langle x_{\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_i(n)}, e_j \rangle)^2 \leqslant \|x_{\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_i(n)}\|^2 \leqslant 1$, donc en passant à la limite en n, on aura $\sum_{j=1}^{i} (x_j^*)^2 \leqslant 1$.

Posons $y_j = \sum_{i=1}^{j} x_j^* e_j$, comme la série des $(x_j^*)^2$ converge, (la suite croissante des sommes partielles est majorée), la série des $x_j^* e_j$ est « absolument convergente » dans H complet, donc convergente, vers un élément x^* de H avec $\|x^*\|^2 = \sum_{j=1}^{+\infty} (x_j^*)^2 \leqslant 1$.

Si on pose alors $x_{\varphi(n)} = x_{\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n(n)}$, (procédé de la suite diagonale), pour i entier fixé, pour $n \geqslant i$, on aura $\langle x_{\varphi(n)}, e_i \rangle = \langle x_{\varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_i(\varphi_{i+1} \circ \ldots \circ \varphi_n(n))}, e_i \rangle$ qui tend vers $x_i^* = \langle x^*, e_i \rangle$, d'où $\mathscr{P}(e_i)$ vérifiée, et finalement le résultat cherché, à ceci près qu'il faut justifier qu'une autre solution, obtenue autrement, conduit à $\|x^*\| \leqslant 1$. Or, avec $y = x^*$, on aura :

$$\|x^*\|^2 = \langle x^*, x^* \rangle = \lim_{n \to +\infty} \langle x_{\varphi(n)}, x^* \rangle, \text{ avec :}$$

$$\langle x_{\varphi(n)}, x^* \rangle \leqslant |\langle x_{\varphi(n)}, x^* \rangle| \leqslant \|x_{\varphi(n)}\| \|x^*\| \leqslant \|x^*\|$$

d'où $\|x^*\|^2 \leqslant \|x^*\| \Rightarrow \|x^*\| \leqslant 1$.

Si de plus $\|x^*\| = 1$, les inégalités précédentes deviennent :

$\langle x_{\varphi(n)}, x^* \rangle \leqslant |\langle x_{\varphi(n)}, x^* \rangle| \leqslant \|x_{\varphi(n)}\| \|x^*\| = \|x_{\varphi(n)}\| \leqslant 1$, et, le minorant tendant vers $\|x^*\|^2 = 1$, c'est qu'en fait on a $\lim_{n \to +\infty} \|x_{\varphi(n)}\| = 1$, et alors :

$\|x_{\varphi(n)} - x^*\|^2 = \|x_{\varphi(n)}\|^2 - 2\langle x_{\varphi(n)}, x^* \rangle + \|x^*\|^2$ tend vers 0, et x^* est alors limite des $x_{\varphi(n)}$.

6.26. a) Si f est un polynôme, il existe un entier $p(f)$ tel que pour tout $k > p(f), f^{(k)}$ soit identiquement nulle, donc la somme définissant $N(f)$ est finie en fait, et les propriétés de la valeur absolue donnent celles de norme pour f, d'autant que si $f = \sum_{k=0}^{p(f)} a_k X^k$, on a $f^k(0) = k!a_k$, donc $N(f) = \sum_{k=0}^{p(f)} |a_k|$: si $N(f) = 0$ on a bien $f = 0$.

b) Puisque la norme est la somme des valeurs absolues des coefficients, pour $q > p$, on a $N(f_q - f_p) = \sum_{k=p+1}^{q} \frac{1}{k^2}$, et, la suite des sommes partielles de la série convergente des $\frac{1}{k^2}$ étant de Cauchy dans $\mathbb{R}$, on justifie facilement que la suite des f_p est de Cauchy dans E, pour N. Cet espace n'est jamais complet, (un peu de culture, par Baire et Toutatis, ne fait pas de mal !), car si la suite convergeait vers un élément f de E, avec $p(f)$ tel que les coefficients de degré $k > p(f)$, de f, soient nuls, on aurait, pour tout $q > p(f)$, $N(f_q - f) \geqslant \frac{1}{2^{p(f)+1}}$, constant par rapport à q, ce qui contredit $\lim_{q \to +\infty} N(f_q - f) = 0$.

c) Si d est la dérivation, on a $d(X^n) = n(X^{n-1})$, avec $N(x^n) = 1$ et $N(d(X^n)) = n$: la dérivation, application linéaire, n'étant pas bornée sur la sphère unité n'est pas continue.

d) On a $|\psi_n(f)| = |f^{(n)}(0)| \leqslant n! \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leqslant n!N(f)$, donc ψ_n, linéaire, est $n!$ Lipschitzienne, donc continue, avec $|||\psi_n||| \leqslant n!$, (norme d'application linéaire continue). De plus, pour le monôme $f_n = X^n$, on a $f_n^{(n)}(0) = n!$, et comme $N(f_n) = 1$, $|||\psi_n||| = \sup \{|\psi_n(f)| ; N(f) = 1\}$ est atteint en f_n et vaut $n!$

e) Pour g fixé,

$$f \in G \Leftrightarrow \forall n, f^{(n)}(0) \leqslant g^{(n)}(0)$$
$$\Leftrightarrow \forall n, \psi_n(f) \leqslant \psi_n(g),$$

donc $G = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \psi_n^{-1}(]-\infty, g^{(n)}(0)])$ est fermé comme intersection des fermés, images réciproques par ψ_n continue, des $]-\infty, g^{(n)}(0)]$, fermés de $\mathbb{R}$.

De même $H = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \psi_n^{-1}([h^{(n)}(0), +\infty[)$ est fermé de E aussi.

Enfin, si, pour $n > n_0$, tous les coefficients de g et h sont nuls, on aura $h^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) = 0$, et si $f \in G \cap H$, on aura :
$0 = h^{(n)}(0) \leqslant f^{(n)}(0) \leqslant g^{(n)}(0) = 0$, d'où $f^{(n)}(0) = 0$, et $f \in \text{Vect}\,(1, X, X^2, ..., X^{n_0})$, sous-espace vectoriel de dimension finie, dans lequel $H \cap G$ devient fermé borné, puisque, si $f(X) = \sum_{k=0}^{n_0} a_k X^k$,

on a $N(f) = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} \leqslant A$ avec $A = \sum_{k=0}^{n_0} \frac{\sup(|g^{(k)}(0)|, |h^{(k)}(0)|)}{k!}$.
Un fermé borné en dimension finie, c'est un compact.

6.27. En tant qu'application de E dans E, g, égale à f sur A, avec f continue de A dans E, est continue de $\mathring{A}$ dans E.

Sur l'ouvert $\Omega = E \backslash A$, d'abord $d(x, A) > 0$ si $x \in \Omega$ car $d(x, A) = 0$ impliquerait l'existence d'une suite d'éléments de A qui convergerait vers x, d'où $x \in \overline{A} = A$: exclu.

Puis, à partir de l'inégalité triangulaire, on vérifie facilement que $|d(x, A) - d(x', A)| \leqslant d(x, x')$, donc l'application $x \rightsquigarrow d(x, A)$ est continue de Ω dans $\mathbb{R}$, sans s'annuler, la fonction $x \rightsquigarrow \frac{1}{d(x, A)}$ est continue de Ω dans $\mathbb{R}$.

Comme $g(x) = \frac{1}{d(x, A)} \inf \{f(a)\|x - a\| \ ; a \in A\}$, voyons si $\varphi : x \rightsquigarrow \varphi(x) = \inf \{f(a)\|x - a\| \ ; a \in A\}$ est continue sur Ω.

Or, si x et x_0 sont dans Ω tels que $\|x - x_0\| \leqslant \varepsilon$, pour tout a de A on aura :

$$\big|\|x - a\| - \|x_0 - a\|\big| \leqslant \|x - x_0\| \leqslant \varepsilon \text{ d'où :}$$

$\|x_0 - a\| - \varepsilon \leqslant \|x - a\| \leqslant \|x_0 - a\| + \varepsilon$, ce qui se multiplie par $f(a)$, nombre compris entre 1 et 2, donc positif :

$$f(a)\|x_0 - a\| - \varepsilon f(a) \leqslant f(a)\|x - a\| \leqslant \|x_0 - a\| f(a) + \varepsilon f(a)\text{, d'où :}$$

$-2\varepsilon + f(a)\|x_0 - a\| \leqslant f(a)\|x - a\| \leqslant 2\varepsilon + f(a)\|x_0 - a\|$, et en passant de « gauche à droite » aux bornes inférieures lorsque a varie dans A :

$$-2\varepsilon + \varphi(x_0) \leqslant \varphi(x) \leqslant 2\varepsilon + \varphi(x_0),$$

soit $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqslant 2\varepsilon$. On a la continuité de φ sur Ω, d'où celle de g, produit de deux fonctions continues.

Il reste à examiner la continuité de g en un point x_0 *de la frontière de* A. On a $x_0 \in \mathrm{A}$. Or, $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0$ tel que $\forall x \in \mathrm{A} \cap \mathscr{B}_0(x_0, r), |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$, d'où $|g(x) - g(x_0)| \leqslant \varepsilon$ pour ces x de $\mathrm{A} \cap \mathscr{B}_0(x_0, r)$, (en lesquels f et g coïncident).

On va justifier que, pour des a et des x assez proches de x_0, les valeurs prises par le produit $f(a)\|x - a\|$ seront plus petites que les $f(a')\|x - a'\|$, pour $a' \notin \mathscr{B}_0(x_0, r)$, ce qui permettra de prendre la borne inférieure définissant $g(x)$, dans une zone où $f(a)$ sera proche de $f(x_0)$.

On impose donc $\|x - x_0\| \leqslant \dfrac{r}{6}$.

Si $\|a' - x_0\| \geqslant r$, on a $\|x - a'\| \geqslant \big|\|a' - x_0\| - \|x_0 - x\|\big| \geqslant r - \dfrac{r}{6}$, et comme $f(a') \geqslant 1$, on aura $f(a')\|a' - x\| \geqslant 5\,\dfrac{r}{6}$.

Par contre, toujours pour x fixé tel que $\|x - x_0\| \leqslant \dfrac{r}{6}$, si de plus $\|a - x_0\| \leqslant \dfrac{r}{6}$, comme $f(a) \leqslant 2$ et $\|a - x\| \leqslant \dfrac{r}{3}$, on aura $f(a)\|a - x\| \leqslant 2\,\dfrac{r}{3} = \dfrac{4r}{6} < \dfrac{5r}{6}$.

Il en résulte, que pour un $x \notin \mathrm{A}$, tel que $\|x - x_0\| \leqslant \dfrac{r}{6}$, on aura :

$$\varphi(x) = \inf\{f(a)\|x - a\|\ ;\ a \in \mathrm{A}\} = \inf\{f(a)\|x - a\|\ ;\ a \in \mathrm{A} \cap \mathscr{B}_0(x_0, r)\},$$

et, pour ces a là, par définition de r, on a :

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(a) \leqslant f(x_0) + \varepsilon\text{, d'où :}$$

① : $\quad \|x - a\|(f(x_0) - \varepsilon) \leqslant f(a)\|x - a\| \leqslant (f(x_0) + \varepsilon)\|x - a\|$,

et on voudrait bien passer aux bornes inférieures.

Or, les a' de A tels que $\|x_0 - a'\| \geqslant r$, sont tels que :

$$\|x - a'\| \geqslant \left|\|a' - x_0\| - \|x_0 - x\|\right| \geqslant r - \|x_0 - x\| \geqslant r - \frac{r}{6} \text{ par choix de } x,$$

donc $d(x, \mathrm{A}) = \inf\{\|x - a\| \,;\, a \in \mathrm{A} \cap \mathscr{B}_0(x_0, r)\}$ car parmi ces a figure x_0, avec $\|x - x_0\| \leqslant \frac{r}{6}$.

Il en résulte, dans ①, en passant aux bornes inférieures, que, (et parce que $f(x_0) - \varepsilon$ sera positif si $\varepsilon < 1$, ce que je précise) :

$$d(x, \mathrm{A})(f(x_0) - \varepsilon) \leqslant f(a)\|x - a\|, \text{ (pour } a \in \mathrm{A} \cap \mathscr{B}_0(x_0, r)\text{), donc}$$
$$\leqslant \inf\{f(a)\|x - a\| \,;\, a \in \mathrm{A} \cap \mathscr{B}_0(x_0, r)\},$$

puisque le minorant ne dépend plus de a, d'où :

$$d(x, \mathrm{A})(f(x_0) - \varepsilon) \leqslant \varphi(x) \leqslant (f(x_0) + \varepsilon)\|x - a\|,$$

ceci pour tout a de $\mathrm{A} \cap \mathscr{B}_0(x_0, r)$. Un dernier passage à l'inf donne :

$$d(x, \mathrm{A})(f(x_0) - \varepsilon) \leqslant \varphi(x) \leqslant d(x, \mathrm{A})(f(x_0) + \varepsilon),$$

et en divisant par $d(x, \mathrm{A})$, on obtient :

$$\forall x \in (\mathrm{E} \backslash \mathrm{A}) \cap \mathscr{B}_0\left(x_0, \frac{r}{6}\right),$$

$$f(x_0) - \varepsilon = g(x_0) - \varepsilon \leqslant g(x) \leqslant g(x_0) + \varepsilon = f(x_0) + \varepsilon.$$

Comme pour les x de $\mathrm{A} \cap \mathscr{B}_0\left(x_0, \frac{r}{6}\right) \subset \mathrm{A} \cap \mathscr{B}_0(x_0, r)$ on a $|g(x_0) - g(x)| \leqslant \varepsilon$, on a finalement justifié la continuité de g sur la frontière de A.

Les bornes de g, continue de E dans $\mathbb{R}$, sont faciles à obtenir car, sur A, g coïncide avec f, donc admet 2 pour borne supérieure sur A, et 1 pour borne inférieure.

Puis, si $x \in \mathrm{E} - \mathrm{A}$, on a $\|x - a\| \leqslant f(a)\|x - a\| \leqslant 2\|x - a\|$, ceci pour tout a de A, d'où, en passant aux bornes inférieures par rapport à a variant dans A :

$$d(x, \mathrm{A}) \leqslant \varphi(x) = \inf\{f(a)\|x - a\| \,;\, a \in \mathrm{A}\} \leqslant 2d(x, \mathrm{A}),$$

et, en divisant par $d(x, \mathrm{A}) > 0$:

$$1 \leqslant g(x) \leqslant 2,$$

ceci pour tout x de E\A. Finalement, les bornes de g sont celles de f, 1 et 2.

6.28. La topologie sur E n'est pas précisée, mais sur E, espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. On note $\mathscr{A}_r$ l'ensemble des matrices de rang r au plus.

a) Une matrice est de rang $\leqslant r$, si et seulement si tous ses mineurs d'ordre $s > r$ sont nuls. Si $r = n$, l'ensemble $\mathscr{A}_r$ est E entier : il est fermé.

Si $r < n$, chaque application $\theta_{i_1, \ldots, i_k ; j_1 \ldots j_k}$, $k > r$, qui à la matrice M associe le déterminant d'ordre k, extrait à partir des lignes $i_1, i_2, \ldots, i_k$ et des colonnes $j_1, j_2, \ldots, j_k$, (distinctes), est polynomiale par rapport aux coefficients de M, donc continue, et $(\theta_{i_1, \ldots, i_k ; j_1, \ldots, j_k})^{-1}(\{0\})$ est un fermé de E, (image réciproque d'un fermé par une application continue).

Comme $\mathscr{A}_r$ est l'intersection de tous ces fermés, obtenus pour k variant de $r+1$ à n, $i_1, \ldots, i_k$ et $j_1 \ldots j_k$ étant des k-uplets d'éléments distincts compris entre 1 et n, on a bien $\mathscr{A}_r$ fermé de E.

b) Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et M un élément de $\mathscr{A}_r$, de rang $p \leqslant r$. Soit H un supplémentaire de Ker u, u endomorphisme de matrice M par rapport à $\mathscr{B}$. On sait que u induit un isomorphisme $\tilde{u}$ de H sur Im u. Soit G un supplémentaire de Im u, $\mathscr{C}'$ une base de Im u, $\mathscr{D}'$ une base de G, $\mathscr{C}$ une base de H et $\mathscr{D}$ une base de Ker u. La matrice de u par rapport aux bases $\mathscr{C} \cup \mathscr{D}$ dans E au départ, et $\mathscr{C}' \cup \mathscr{D}'$ dans E à l'arrivée, est matrice bloc :

$M' = \begin{pmatrix} M_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec M_p régulière d'ordre p, donc il existe P et Q matrices régulières d'ordre n, telles que $M = Q \begin{pmatrix} M_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

(En prenant $\mathscr{C} = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p\}$ et $\mathscr{C}' = \{\tilde{u}(\varepsilon_1), \ldots, \tilde{u}(\varepsilon_p)\}$, on peut même imposer $M_p = I_p$, et ce résultat : « M de rang p est équivalente à une matrice bloc $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ » est à connaître.)

En posant $A_p(k) = \operatorname{diag}\Big(\underbrace{\frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}}_{r-p \text{ fois}}, 0, \ldots, 0\Big)$, et

$M(k) = Q \begin{pmatrix} M_p & 0 \\ 0 & A_p(k) \end{pmatrix} P^{-1}$, on a des matrices $M(k)$ de rang r, de limite M si k tend vers $+\infty$, donc l'ensemble des matrices de rang r est partout dense dans celui des matrices de rang r au plus.

Si $r = n$, on retrouve le résultat connu de $GL_n(K)$ partout dense dans $\mathscr{M}_n(K)$, $(K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

6.29. Si ce n'est pas Dini, c'est sa sœur !

a) Si l'intersection des F_n est vide, comme ce sont des compacts de E, donc des fermés, inclus dans F_0, ce sont des fermés de F_0, compact, d'intersection vide, donc il existe une famille finie de ces fermés d'intersection vide.

Si N est le plus grand indice de cette famille finie, la décroissance montre que cette intersection, vide, est F_N, non vide : il y a un os !

b) Comme pour tout x de X on a $0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$, (décroissance de la suite et convergence simple vers 0), on en déduit que $0 \leqslant \| f_{n+1}\|_\infty \leqslant \| f_n\|_\infty$, les normes infinies existant par continuité des f_n sur X compact.

La suite décroissante, minorée, des réels $\| f_n\|_\infty$ est donc convergente. Soit α sa limite.

Soit $\varepsilon > 0$, et $F_n = f_n^{-1}([\alpha, \alpha+\varepsilon]) \cap X$. Les F_n, fermés de X compact, sont compacts. De plus, si $x \in F_{n+1}$, on a $\alpha \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant \alpha+\varepsilon$, d'où, (décroissance de la suite f_n) : $\alpha \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.

Si n_0 est alors associé à $\varepsilon > 0$, de façon que $n \geqslant n_0$ implique $\alpha \leqslant \| f_n\|_\infty \leqslant \alpha+\varepsilon$, on aura, pour $n \geqslant n_0$, l'inégalité $f_n(x) \leqslant \alpha+\varepsilon$, d'où, pour tout x de F_{n+1}, l'encadrement $\alpha \leqslant f_n(x) \leqslant \alpha+\varepsilon$, et l'appartenance de x à $K \cap f_n^{-1}([\alpha, \alpha+\varepsilon]) = F_n$.

Donc, pour $n \geqslant n_0$, les (F_n) forment une suite décroissante de compacts non vides, $(\| f_n\|_\infty \leqslant \alpha+\varepsilon)$, d'après le a) on aura $\bigcap_{n \geqslant n_0} F_n \neq \emptyset$. Soit t dans cette intersection pour tout $n \geqslant n_0$, $f_n(t) \geqslant \alpha$. Si $\alpha > 0$, on ne peut pas avoir $\lim_{n \to +\infty} f_n(t) = 0$. Donc $\alpha = 0$: il y a convergence uniforme des f_n vers 0.

c) C'est une formalité. Si les f_n, (suite monotone), convergent simplement vers f, la suite des fonctions continues, $g_n = f - f_n$, est monotone, et converge simplement vers 0. Quitte à remplacer les g_n par les

$-g_n$, on a donc une suite décroissante de fonctions continues qui converge simplement vers 0 : la convergence est uniforme, d'où la convergence uniforme des f_n vers f.

6.30. Soit $\mathscr{U}$ l'ensemble des endomorphismes cycliques sur E. On considère l'application θ de $E \times \mathscr{L}(E)$ dans $\mathbb{R}$, qui au couple (x, u) associe le déterminant de la matrice M carrée d'ordre n dont les n vecteurs colonnes sont $x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)$.

Si on note x_i la $i^{\text{ième}}$ composante de x, et u_{ij} le terme général de la matrice associée à u dans la base canonique de E, les règles de calcul matriciel montrent que le terme général de la $k^{\text{ième}}$ colonne, $u^{k-1}(x)$, de M, est un polynôme par rapport aux x_i et aux u_{ij}.

Comme à son tour le déterminant de M est un polynôme par rapport aux coefficients de M, on a $\theta(x, u)$ qui est une expression polynomiale par rapport aux x_i et aux u_{ij}, donc θ est une application continue de $E \times \mathscr{L}(E)$ dans $\mathbb{R}$, et : $\Omega = \{(x, u) \,;\, x \in E, u \in \mathscr{L}(E), \theta(x, u) \neq 0\}$, est un ouvert de $E \times \mathscr{L}(E)$, comme image réciproque de $\mathbb{R}^*$, ouvert, par θ continue.

Dans la topologie produit de $E \times \mathscr{L}(E)$, soit p la projection sur $\mathscr{L}(E)$, on sait que le projeté d'un ouvert est un ouvert : si Ω, ouvert, est la réunion des ouverts élémentaires $\omega_i \times \omega'_i$, pour $i \in I$ ensemble d'indices, et ω_i ouvert de $\mathbb{R}^n = E$, ω'_i ouvert de $\mathscr{L}(E)$, on a :

$$p(\Omega) = p\Big(\bigcup_{i \in I} \omega_i \times \omega'_i\Big) = \bigcup_{i \in I} p(\omega_i \times \omega'_i) = \bigcup_{i \in I} \omega'_i ,$$

ouvert de $\mathscr{L}(E)$. Donc ici, le projeté de Ω est ouvert et c'est l'ensemble des $u \in \mathscr{L}(E)$ tel qu'il existe x dans E tel que $(x, u) \in \Omega$, donc c'est bien l'ensemble cherché $\mathscr{U}$ des endomorphismes cycliques, qui est ouvert.

6.31. a) Il est facile de vérifier que E est complet. Soit $(u^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de E, on notera $u_n^{(p)}$ le terme général de la suite bornée $u^{(p)}$. On a :

① $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists p_0, \forall p \geqslant p_0, \forall q \geqslant p_0, \left\|u^{(p)} - u^{(q)}\right\| \leqslant \varepsilon,$

et, en explicitant ce qu'est la norme de la suite bornée $u^{(p)} - u^{(q)}$, on a :

② $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists p_0, \forall p \geqslant p_0, \forall q \geqslant p_0, \forall n \in \mathbb{N}, \left|u_n^{(p)} - u_n^{(q)}\right| \leqslant \varepsilon.$

Pour n fixé, que signifie ② : que la suite des réels $(u_n^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, dans $\mathbb{R}$ complet, elle converge, et on peut noter a_n sa limite, lorsque p tend vers $+\infty$.

On reprend ②, avec ε donné, q fixé $\geqslant p_0$, n fixé, et on fait tendre p vers $+\infty$, à la limite on a $\left|a_n - u_n^{(q)}\right| \leqslant \varepsilon$, donc on obtient, avec cette définition des a_n :

③ $\quad \forall \varepsilon > 0, \exists p_0, \forall q \geqslant p_0, \forall n \in \mathbb{N}, \left|a_n - u_n^{(q)}\right| \leqslant \varepsilon$.

Mais alors, en notant a la suite de terme général a_n, il résulte de ③, que la suite $a - u^{(q)}$, (avec q fixé, $q \geqslant p_0$) est bornée, donc a est bornée aussi, et ③ se lit alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p_0, \forall q \geqslant p_0, \left\|a - u^{(q)}\right\| \leqslant \varepsilon,$$

c'est que la suite des $(u^{(q)})_{q \in \mathbb{N}}$, converge, pour la norme de E, vers la suite a, élément de E. On a bien convergence de la suite de Cauchy vers un élément de E : l'espace est complet.

b) Si on a une partie dénombrable $\mathscr{A}$ de E, on peut indexer ses éléments par $\mathbb{N}$, et considérer la suite des $(a^{(p)})_{p \in \mathbb{N}}$, associée à une telle indexation.

On va, par le procédé de la suite diagonale, construire une suite bornée qui ne pourra pas être dans l'adhérence de $\mathscr{A}$, ce qui justifiera la non existence dans E d'une partie dénombrable partout dense.

Pour cela on définit la suite v par :

$$v_p = 2 \text{ si } \left|a_p^{(p)}\right| \leqslant 1, \text{ donc } \left|v_p - a_p^{(p)}\right| \geqslant 1, \text{ et}$$

$$v_p = 0 \text{ si } \left|a_p^{(p)}\right| > 1, \text{ et là encore } \left|v_p - a_p^{(p)}\right| \geqslant 1.$$

La suite v des v_p est évidemment bornée, et elle n'est pas adhérente à $\mathscr{A}$ car, pour tout élément $a^{(p)}$ de $\mathscr{A}$, on a :

$$\left\|v - a^{(p)}\right\| \geqslant \left|v_p - a_p^{(p)}\right| \geqslant 1,$$

donc la boule ouverte de centre v de rayon 1 est disjointe de $\mathscr{A}$: on a $\overline{\mathscr{A}} \neq E$.

6.32. Soit $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polynôme de degré n (donc $a_n \neq 0$). Si sur $\mathbb{C}$, tous ses zéros sont distincts, cela équivaut à dire que P et P' sont premiers entre eux.

Or P et P' non premiers entre eux équivaut à l'existence d'un p.g.c.d, Δ, de degré $\geqslant 1$, donc aussi à l'existence de P_1 et Q_1, de degrés $\leqslant n-1$ et $\leqslant n-2$ respectivement, tels que $P = \Delta P_1$ et $P' = \Delta Q_1$, ce qui implique la relation : $Q_1 P - P_1 P' = 0$, avec Q_1 et P_1 non nuls, bien sûr.

Réciproquement, si on a Q_1 de degré $n-2$ au plus, et P_1 de degré $n-1$ au plus, tels que $Q_1 P - P_1 P' = 0$, on a P et P' non premiers entre eux, sinon P diviserait P_1, avec $d°P = n$ et $d°P_1 = n-1$: c'est exclu, (on a P_1 et Q_1 non nuls, ce qui est contenu, dans le fait qu'on précise leur degré).

Donc P et P' non premiers entre eux équivaut à l'existence de $Q_1 = \sum_{k=0}^{n-2} u_k X^k$ et de $P_1 = \sum_{r=0}^{n-1} v_r X^r$, non nuls, et tels que :

$$\sum_{k=0}^{n-2} u_k (X^k P) - \sum_{r=0}^{n-1} v_r (X^r P') = 0 .$$

Mais les polynômes $X^k P$ sont de degré $n+n-2$ au plus, et les polynômes $X^r P'$ aussi, ($r \leqslant n-1 \Rightarrow n-1+n-1$ au plus), et, dans l'espace vectoriel $\mathbb{C}_{2n-2}[X]$, de dimension $2n-1$, l'existence des $n-1+n = 2n-1$ scalaires u_k et v_r, non tous nuls, tels que :

$$\sum_{k=0}^{n-2} u_k (X^k P) - \sum_{r=0}^{n-1} v_r (X^r P') = 0 ,$$

équivaut à la dépendance des $2n-1$ polynômes $X^k P$, pour $0 \leqslant k \leqslant n-2$ et $X^r P'$, pour $0 \leqslant r \leqslant n-1$.

Et à son tour, cette dépendance équivaut à la nullité du déterminant des composantes de ces polynômes dans la base canonique $1, X, \dots, X^{2n-2}$ de $\mathbb{C}_{2n-2}[X]$.

Or les coefficients de ces colonnes sont du type :

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots$

$0, a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 0, \dots$

$0, 0, a_0, a_1, \dots$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, na_n, 0, 0, \dots,$

$0, a_1, 2a_2, \dots, (n-1)a_{n-1}, na_n, 0, \dots$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

c'est dire que finalement, ce déterminant est un polynôme $R(a_0, a_1, ..., a_n)$, dont la nullité traduit le fait que P et P' sont non premiers entre eux.

Mais alors, $P(X) = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n$ n'a que des zéros simples sur $\mathbb{C}$, si et seulement si $R(a_0, ..., a_n) \neq 0$. Comme R est un polynôme, l'ensemble des $(a_0, ..., a_n)$ tels que $R(a_0, ..., a_n) \neq 0$ est un ouvert de $\mathbb{C}^{n+1}$, (image réciproque, par R continue, de $\mathbb{R}^*$).

Nous avons ainsi justifié que l'ensemble des polynômes de degré n au plus, n'ayant que des racines simples, est un ouvert de $\mathbb{C}_n[X]$; quand à ceux de degré vraiment n, l'application qui au polynôme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, associe son coefficient directeur est continue, (linéaire en dimension finie par exemple), donc l'ensemble des polynômes de degré effectivement n, est un ouvert de $\mathbb{C}_n[X]$. L'intersection de ces deux ouverts donne l'ouvert des polynômes de degré effectivement n, n'ayant que des racines simples.

Vous pouvez comparer à l'exercice 12.13, où la solution passe par le calcul différentiel.

6.33. Une algèbre est un ensemble muni d'une structure d'espace vectoriel, et d'une structure d'anneau. De plus A algèbre de Banach est un espace vectoriel normé complet, et pour le produit on a $\|xy\| \leqslant \|x\| \|y\|$.

a) D'abord, U = {éléments inversibles de A est un ouvert}. En effet, si a est inversible, on veut prouver que pour $\|h\|$ assez petit, $a + h$ est inversible. Or c'est $a(u + a^{-1}h)$ inversible et, si $\|a^{-1}h\| < 1$, la série des $(-a^{-1}h)^n$ converge absolument dans A, complet, donc elle converge. Si on note s sa somme, l'identité :

$$[u - a^{-1}h + (a^{-1}h)^2 + ... + (-1)^{n-1}(a^{-1}h)^{n-1}](u + a^{-1}h)$$
$$= u + (-1)^n (a^{-1}h)^n,$$

jointe à la convergence de $(a^{-1}h)^n$ vers 0, (terme général d'une série convergente), et à la continuité du produit, de A^2 dans A, (bilinéaire, « 1 lipschitzien »), donne, à la limite :

$$s(u + a^{-1}h) = u.$$

On aurait de même $(u+a^{-1}h)s = u$, donc $u+a^{-1}h$ est inversible, d'inverse s.

Mais, comme $\|a^{-1}h\| \leqslant \|a^{-1}\|\|h\|$, on peut finalement dire que, si $\|h\| < \dfrac{1}{\|a^{-1}\|}$, $a+h$ est inversible, d'inverse :

$$(u+a^{-1}h)^{-1}a^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (a^{-1}h)^n a^{-1}.$$

Mais alors, comme pour z dans $\mathbb{C}$, l'application $\theta : z \rightsquigarrow zu - x$ est continue, $(\|\theta(z)-\theta(z')\| = |z-z'|\|u\| : \theta$ est $\|u\|$ lipschitzienne), $\theta^{-1}(\mathrm{U}) = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ zu - x \text{ inversible}\}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$. Comme $\sigma(x) = \mathbb{C} - \theta^{-1}(\mathrm{U})$, c'est un fermé de $\mathbb{C}$.

De plus, si $z \neq 0$ est tel que $\left\|\dfrac{x}{z}\right\| < 1$, (soit $|z| > \|x\|$), $u - \dfrac{x}{z}$ est inversible d'inverse $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{z}\right)^n$, mais alors $z\left(u-\dfrac{x}{z}\right) = zu - x$ est aussi inversible, donc $z \notin \sigma(x)$. Il en résulte que $\sigma(x)$ est contenu dans le disque fermé de centre O, de rayon $\|x\|$: on a $\sigma(x)$ partie fermée bornée de $\mathbb{C}$, donc compacte.

b) On nous dit que f: $x \rightsquigarrow x^{-1}$, est différentiable, avec $\mathrm{d}f(x)(h) = -x^{-1}hx^{-1}$, (voir en 12.10 une justification de ce résultat). Il en résulte que, sur le cercle de centre O de rayon r dans $\mathbb{C}$, si on suppose le spectre $\sigma(x)$ vide, on pourra considérer la fonction de deux variables réelles r et t :

$$\varphi(r, t) = (re^{it}u - x)^{-1}.$$

Elle est dérivable en r, et en t, comme composée de $(r, t) \rightsquigarrow re^{it}u - x$, dérivable, et de f, différentiable. De plus $\varphi'_r(r, t) = \mathrm{d}f(\varphi(r, t))(e^{it}u)$, car $e^{it}u$ est la dérivée par rapport à r, de $r \rightsquigarrow re^{it}u - x$. On a donc :

$$\begin{aligned}\varphi'_r(r, t) &= -(re^{it}u - x)^{-1}(e^{it}u)(re^{it}u - x)^{-1}\\ &= -e^{it}(re^{it}u - x)^{-2},\end{aligned}$$

puisque e^{it} est un scalaire, et que u est neutre pour le produit.

De même, on a :

$$\begin{aligned}\varphi'_t(r,t) &= \mathrm{d}f(\varphi(r,t))(ire^{it}u)\\ &= -ire^{it}(re^{it}u-x)^{-2} = ir\varphi'_r(r,t).\end{aligned}$$

On calcule alors, toujours avec l'hypothèse $\sigma(x) = \varnothing$, $\phi(r) = \int_0^{2\pi} \varphi(r,t)\mathrm{d}t$.

C'est une fonction dérivable en r, par les théorèmes de cours, valables en fait pour les fonctions à valeurs dans un Banach, et :

$$\begin{aligned}\phi'(r) &= \int_0^{2\pi} \varphi'_r(r,t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{ir}\varphi'_t(r,t)\mathrm{d}t,\\ &= \frac{1}{ir}[\varphi(r,t)]_0^{2\pi},\\ &= \frac{1}{ir}((ru-x)^{-1}-(ru-x)^{-1}),\end{aligned}$$

vu la 2π périodicité de $t \rightsquigarrow e^{it}$.

Donc $\phi(r)$ est constante. Or $\phi(0) = \int_0^{2\pi} \varphi(0,t)\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}(-x)^{-1}\mathrm{d}t$ soit $\phi(0) = -2\pi x^{-1}$, alors que :

$$\phi(r) = \int_0^{2\pi}\left(re^{it}\left(u-\frac{x}{re^{it}}\right)\right)^{-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{r}\int_0^{2\pi} e^{-it}\left(u-\frac{x}{re^{it}}\right)^{-1}\mathrm{d}t.$$

On a, pour $r > \|x\|$,

$$\begin{aligned}\left\|\left(u-\frac{x}{re^{it}}\right)^{-1}\right\| &= \left\|\sum_{n=0}^{+\infty}\left(x\frac{e^{-it}}{r}\right)^n\right\|\\ &\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{\|x\|}{r}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{\|x\|}{r}},\end{aligned}$$

d'où $\|\phi(r)\| \leqslant \frac{1}{r}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{1-\frac{\|x\|}{r}}$, ce qui tend vers 0 si r tend vers $+\infty$: dur à avaler pour une fonction constante non nulle !

Ceci repose sur $\sigma(x)$ vide, hypothèse qui a permis de définir φ : cette hypothèse est fausse.

c) Soit x non nul dans A, si x n'est pas proportionnel à u, pour tout z non nul de $\mathbb{C}$, $zu-x \neq 0$, donc $zu-x$ est inversible : $z \notin \sigma(x)$.

De plus x est inversible, (car non nul), donc $0 \notin \sigma(x)$, mais alors on aurait $\sigma(x)$ vide, ce qui contredit le b).

Donc x est du type λu, ceci pour tout x non nul de A. C'est vrai aussi pour $x = 0$, donc dans ce cas l'algèbre est la droite complexe des λu, $\lambda \in \mathbb{C}$.

6.34. L'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, des matrices carrées d'ordre n, est isomorphe à $\mathbb{R}^{n^2}$, donc toutes les normes sont équivalentes. On considère l'ensemble des matrices associées aux symétries sur $E = \mathbb{R}^n$, une base de E étant fixée.

Ce sont donc les matrices A telles que $A^2 = I_n$, elles annulent donc $X^2 - 1$, polynôme scindé à racines simples 1 et -1, donc elles sont diagonalisables.

On veut montrer que I_n est isolé dans l'ensemble $\mathscr{S}$ de ces matrices, donc on cherche $\alpha > 0$ tel que la boule ouverte de centre I_n, de rayon α, dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, ne rencontre $\mathscr{S}$ qu'en I_n.

Or si $A = I_n + B$ est une symétrie, on a : $A^2 = I_n + 2B + B^2 = I_n$, donc B vérifie la relation $2B + B^2 = 0$: c'est une matrice qui annule le polynôme $2X + X^2 = 0$, elle n'a que -2 et 0 pour valeurs propres possibles, et elle est diagonalisable.

Prenons comme norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la norme d'application linéaire continue associée à une norme fixée de $\mathbb{R}^n$.

Si -2 est valeur propre de B, et si $\vec{V}$ est un vecteur propre unitaire associé, on aura $|||B||| \geqslant \|B(\vec{V})\| = \|-2\vec{V}\| = 2$.

Supposons alors que $|||A - I_n||| = |||B||| < 1$, avec $A = I_n + B$ dans $\mathscr{S}$, la matrice B est diagonalisable avec 0 pour seule valeur propre et donc $B = 0$, d'où $A = I_n$. On a justifié que $\mathscr{B}_0(I_n, 1) \cap \mathscr{S} = \{I_n\}$, donc I_n est isolé dans $\mathscr{S}$. On procéderait de même pour $-I_n$.

Vous pouvez voir en 12.14, une justification liée au calcul différentiel et au Théorème du difféomorphisme local.

6.35. Soit D l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on va montrer que dans cet espace vectoriel normé, $\overline{D} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit A une matrice carrée complexe d'ordre n. Si toutes ses valeurs propres sont distinctes, elle est diagonalisable, donc dans D.

Sinon, soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes, de multiplicités respectives $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Il existe P, matrice régulière carrée d'ordre n, telle que $P^{-1}AP = T$ soit triangulaire, avec, sur la diagonale :

$\lambda_1, \dots, \lambda_1 : \alpha_1$ fois ;

$\lambda_2, \dots, \lambda_2 : \alpha_2$ fois ;

- - - - - - - - - - - - - -

$\lambda_k, \dots, \lambda_k : \alpha_k$ fois.

Pour q entier, on introduit la matrice T_q obtenue en ne modifiant que la diagonale de T, qui devient :

$$\lambda_1 + \frac{1}{q+1}, \lambda_1 + \frac{1}{q+2}, \dots, \lambda_1 + \frac{1}{q+\alpha_1} ; \lambda_2 + \frac{1}{q+1}, \dots, \lambda_2 + \frac{1}{q+\alpha_2} ; \dots ;$$
$$\lambda_k + \frac{1}{q+1}, \dots, \lambda_k + \frac{1}{q+\alpha_k}.$$

On a $\lim_{q \to +\infty} T_q = T$; de plus, pour q assez grand, on a $\lambda_j + \frac{1}{q+s} \neq \lambda_i + \frac{1}{q+t}$, avec $s \leqslant \alpha_j$ et $t \leqslant \alpha_i$ car $\lambda_j \neq \lambda_i$ si $i \neq j$ et s et t étant majorés par n, $\lim_{q \to +\infty} \frac{1}{q+s} = 0$ ainsi que $\lim_{q \to +\infty} \frac{1}{q+t}$.

Mais alors, la matrice T_q, pour q assez grand, ayant ses valeurs propres distinctes, est diagonalisable, il en est de même de la matrice PT_qP^{-1} qui est donc dans D.

Comme l'application $M \rightsquigarrow PMP^{-1}$, P étant fixé, est continue, (linéaire en dimension finie par exemple), on a finalement $\lim_{q \to +\infty} (PT_qP^{-1}) = PTP^{-1} = A$: la matrice A, limite d'une suite de matrices de D, est bien dans l'adhérence de D.

6.36. Si une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie la propriété, en l'appliquant avec PA, et P de $GL_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\|P^{-1}(PA)P\| = \|PA\|,$$

or $P^{-1}(PA)P = AP$, d'où finalement $\|AP\| = \|PA\|$, et ceci pour tout couple (A, P) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times GL_n(\mathbb{R})$.

Or $GL_n(\mathbb{R})$ est partout dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, car si A est non régulière, c'est que 0 est valeur propre de A, donc si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont les autres valeurs propres non nulles, dans $\mathbb{C}$, de A, et si $r > 0$ est tel que $r < |\lambda_j|$, pour $j = 1, \ldots, k$, les valeurs propres de $A - rI_n$ sont $-r$ et les $\lambda_j - r$, nombres tous différents de 0, donc $A - rI_n \in GL_n(\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{r \to 0}(A - rI_n) = A$.

Mais alors, l'application $P \rightsquigarrow \|AP\| - \|PA\|$ étant continue, nulle sur $GL_n(\mathbb{R})$, elle devient nulle sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et finalement, pour une norme vérifiant la propriété on aurait $\|AB\| = \|BA\|$ pour tout couple (A, B) de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

Or, si $n \geqslant 2$, avec deux matrices de la base canonique, E_{ij} et E_{jj}, avec $i \neq j$, on a :

$$E_{ij}E_{jj} = E_{ij} \quad \text{et} \quad E_{jj}E_{ij} = 0,$$

on devrait donc avoir $\|E_{ij}\| = \|0\| = 0$: c'est gênant pour une norme.

Par contre, si $n = 1$, la norme est proportionnelle à la valeur absolue, car $\|x\| = \|x \cdot 1\| = |x|\,\|1\|$, en posant $a = \|1\|$ on a donc $\|x\| = a|x|$, d'où si p est inversible :

$$\|p^{-1}xp\| = |p^{-1}xp|\,\|1\| = |x|\,\|1\| = \|x\|.$$

Finalement, si $n \geqslant 2$, aucune norme ne vérifie la propriété, et si $n = 1$, toutes la vérifient.

Passons aux semi-normes.

Une semi-norme vérifie l'inégalité triangulaire, comme une norme, donc on a aussi, pour une semi-norme N :

$$|N(X) - N(Y)| \leqslant N(X - Y),$$

puisque c'est équivalent à la double inégalité :

$$-N(X - Y) \leqslant N(X) - N(Y) \leqslant N(X - Y),$$

ce qui équivaut à :

$$N(Y) \leqslant N(X) + N(X - Y) = N(X) + N(Y - X), \text{ et à :}$$

$$N(X) \leqslant N(X - Y) + N(Y),$$

et là, on a les inégalités triangulaires.

Puis, en écrivant $X = \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} x_{ij}E_{i,j}$, on a :

$$N(X) \leqslant \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |x_{ij}| N(E_{i,j})$$
$$\leqslant \sup \{N(E_{i,j}), 1 \leqslant i,j \leqslant n\} \cdot \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |x_{ij}|.$$

En notant $\|X\|_1 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |x_{ij}|$ et $k = \sup \{N(E_{ij}), 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$, on a finalement, en remplaçant X par $X - Y$ dans la majoration précédente :

$$|N(X) - N(Y)| \leqslant k\|X - Y\|_1,$$

donc N est k.Lipschitzienne de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, normé par $\| \ \|_1$, dans $\mathbb{R}$. Si donc on a $N(P^{-1}AP) = N(A)$, comme pour une norme, on en déduit d'abord que $N(AP) = N(PA)$ pour tout couple (P, A) de $GL_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, puis par continuité de N que $N(AB) = N(BA)$ pour tout couple (A, B) de $(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.

Mais alors, avec $n \geqslant 2$, on a encore $N(E_{ij}E_{jj}) = N(E_{jj}E_{ij})$, donc pour $i \neq j$, $N(E_{ij}) = N(0) = 0$.

Considérons l'ensemble $\mathscr{H}$ des X de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $N(X) = 0$. Les matrices E_{ij}, pour $i \neq j$ sont dans $\mathscr{H}$;
si $X \in \mathscr{H}$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda X) = |\lambda| N(X) = |\lambda| 0 = 0$, donc $\lambda X \in \mathscr{H}$;
puis si X et Y sont dans $\mathscr{H}$, on a :

$$0 \leqslant N(X + Y) \leqslant N(X) + N(Y) = 0,$$

donc $X + Y \in \mathscr{H}$.

Il en résulte que $\mathscr{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui contient déjà les matrices E_{ij}, pour $i \neq j$.

Considérons alors la matrice $E_{ii} + E_{ij} - E_{ji} - E_{jj}$, pour $i \neq j$. C'est la matrice d'une application linéaire f qui, dans la base canonique $e_1, ..., e_n$ de $\mathbb{R}^n$ est telle que :

$$\forall k \notin \{i, j\}, f(e_k) = 0 \ ;$$
$$f(e_i) = e_i - e_j \text{ et } f(e_j) = e_i - e_j \ ;$$

mais alors $f(e_i - e_j) = 0$ et $f(e_i + e_j) = 2(e_i - e_j)$, donc, dans la base $\{e_k, k \neq i, j\} \cup \{e_i - e_j, e_i + e_j\}$, si on pose $\varepsilon_i = e_i - e_j$ et $\varepsilon_j = e_i + e_j$, on a :

$$f(\varepsilon_i) = 0, f(\varepsilon_j) = 2\varepsilon_i, f(e_k) = 0, \forall k \neq i, \forall k \neq j$$: la matrice de f est devenue $M' = 2E_{ij}$.

On a donc $N(M') = 0$, or M' est semblable à la matrice $E_{ii} + E_{ij} - E_{ji} - E_{jj}$, qui est donc de semi-norme nulle.

Mais alors $E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} - E_{ji}$ est dans le sous-espace vectoriel $\mathscr{H}$, ainsi que les E_{ij} et E_{ji}, finalement $\mathscr{H}$ contient les E_{ij}, $i \neq j$, et les $E_{11} - E_{jj}$, $j \geqslant 2$, cela fait déjà $n^2 - n + n - 1$ matrices indépendantes, on a un hyperplan dans $\mathscr{H}$.

Alors, soit $\mathscr{H} = E$, et $N = 0$, après tout, pourquoi pas ; soit $\mathscr{H}$ est l'hyperplan engendré par les E_{ij} et les $E_{11} - E_{jj}$. On peut remarquer que ces matrices sont de trace nulle, or la trace est une forme linéaire, de noyau un hyperplan : ce noyau c'est $\mathscr{H}$.

Mais alors $E_{11} \notin \mathscr{H}$, et pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on aura $A - (\text{trace } A)E_{11}$ de trace nulle, d'où :

$$\begin{aligned} N(A) &= N(A - (\text{trace } A)E_{11} + (\text{trace } A)E_{11}) \\ &\leqslant N(A - (\text{trace } A)E_{11}) + N((\text{trace } A)E_{11}) = |\text{trace } (A)| N(E_{11}), \end{aligned}$$

puis, avec :

$$\begin{aligned} (\text{trace } A)E_{11} &= A + ((\text{trace } A)E_{11} - A), \text{ on a :} \\ |\text{trace } (A)| N(E_{11}) &= N((\text{trace } A)E_{11}) \\ &\leqslant N(A) + N((\text{trace } A)E_{11} - A) = N(A), \end{aligned}$$

car $(\text{trace } A)E_{11} - A$ est de trace nulle, donc dans $\mathscr{H}$.

Finalement N est du type $N(A) = |\text{trace } A| N(E_{11})$: donc N est positivement proportionnelle à la valeur absolue de la trace.

6.37. Cela rappelle curieusement l'exercice 6.34, et l'on pourrait procéder comme dans cet exercice, mais je vais en donner une autre justification.

Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{n^2}$, toutes les normes sont équivalentes : je prends celle d'application linéaire continue associée à une norme fixée sur $\mathbb{R}^n$.

Si P est matrice d'une projection, on a $P^2 = P$, donc P qui annule le polynôme scindé à racines simples $X^2 - X = 0$, est diagonalisable, avec 0 et 1 pour seules valeurs propres.

Si $P \neq I_n$, 0 est vraiment valeur propre de P, donc $I_n - P$ admet 1 pour valeur propre, et pour $\vec{v}$ vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$, propre pour $I_n - P$ pour la valeur propre 1, on a :

$$\begin{aligned}|||\mathrm{I}_n - \mathrm{P}||| &= \sup\left\{\left\|(\mathrm{I}_n - \mathrm{P})(\vec{w})\right\| \; ; \; \left\|\vec{w}\right\| = 1\right\}, \\ &\geqslant \left\|(\mathrm{I}_n - \mathrm{P})(\vec{v})\right\| = \left\|\vec{v}\right\| = 1.\end{aligned}$$

Il n'existe donc pas de projecteur autre que I_n vérifiant $|||\mathrm{I}_n - \mathrm{P}||| < 1$: on a $\mathscr{B}_0(\mathrm{I}_n, 1) \cap \mathscr{P} = \{\mathrm{I}_n\}$ d'où I_n point isolé de $\mathscr{P}$.

On procéderait de même pour $\mathrm{P} \neq 0$: alors $0 - \mathrm{P}$ admet -1 pour valeur propre et $|||0 - \mathrm{P}||| \geqslant 1$, d'où 0 point isolé de $\mathscr{P}$.

J'espère que vous voyez une généralisation aux opérateurs annulant un polynôme scindé à plusieurs racines simples et qui, eux, n'ont qu'une valeur propre.

6.38. Il n'est pas interdit, (conséquence de Baire), de savoir qu'un espace vectoriel normé de dimension dénombrable stricte n'est jamais complet. En fait, on va exhiber une suite de Cauchy non convergente.

Si on pose $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = 1 + \dfrac{\mathrm{X}}{1!} + \ldots + \dfrac{\mathrm{X}^n}{n!}$, pour tout n de $\mathbb{N}$ et tout p de $\mathbb{N}^*$ on a :

$$\left\|\mathrm{P}_{n+p} - \mathrm{P}_n\right\|_\infty = \left\|\frac{\mathrm{X}^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots + \frac{\mathrm{X}^{n+p}}{(n+p)!}\right\|_\infty = \frac{1}{(n+1)!}, \text{ donc :}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, \frac{1}{(n+1)!} \leqslant \varepsilon, \text{ d'où } \textit{a fortiori} :$$

$$\forall n \geqslant n_0, \forall p \in \mathbb{N}, \left\|\mathrm{P}_{n+p} - \mathrm{P}_n\right\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

La suite des P_n est de Cauchy dans E. Elle ne converge pas dans E, car si Q est un polynôme, avec q tel que Q n'ait aucun terme en X^n, pour $n > q$, (q est le degré de Q si $\mathrm{Q} \neq 0$, un entier quelconque si $\mathrm{Q} = 0$), on a, pour tout $n > q$, $\mathrm{P}_n - \mathrm{Q}$ qui présente un terme en X^{q+1}, de coefficient $\dfrac{1}{(q+1)!}$, donc $\left\|\mathrm{P}_n - \mathrm{Q}\right\| \geqslant \dfrac{1}{(q+1)!}$.

Comme q est constant, il est impossible que la suite des P_n converge vers Q ; ceci quelque soit Q de E. Donc E n'est pas complet.

b) Les polynômes $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n$ sont dans la boule unité fermée de E, or $d(\mathrm{P}_n)$ est le polynôme $n\mathrm{X}^{n-1}$ de norme n : l'application linéaire d, de E dans E, étant non bornée sur la boule unité fermée de E, n'est pas continue.

c) En posant, avec $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$:

$$N(P) = \sup\{k!|a_k| \ ; \ 0 \leqslant k \leqslant p\},$$

il est facile de vérifier que N est une norme sur E, (car $0! = 1$), et avec $d(P) = \sum_{k=1}^{p} k a_k X^{k-1}$, on aura :

$$\begin{aligned} N(d(P)) &= \sup\{(k-1)!k|a_k| \ ; \ k = 1, ..., p\} \\ &= \sup\{k!|a_k| \ ; \ 1 \leqslant k \leqslant p\} \leqslant \sup\{k!|a_k| \ ; \ 0 \leqslant k \leqslant p\}, \end{aligned}$$

donc $N(d(P)) \leqslant N(P)$: on a d qui est 1.lipschitzienne pour cette norme, donc uniformément continue.

6.39. Justifions 1°) ⇒ 2°). Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A, et par ailleurs une suite de réels positifs convergeant vers 0, les $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ par exemple.

Pour $k = 0$, comme A est contenu dans un nombre *fini* de boules de rayon $\varepsilon_0 = 1$, il existe une de ces parties, B_0, telle que le cardinal de $\{n \ ; \ u_n \in B_0\}$ soit infini, d'où en indexant ces indices en croissant, une suite extraite $u \circ \varphi_0$ telle que $\forall (p, q), d(u_{\varphi_0(p)}, u_{\varphi_0(q)}) \leqslant 2\varepsilon_0$.

Pour $k = 1$, comme A est contenu dans un nombre *fini* de boules de rayon $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, l'une de ces boules, B_1, est telle que card $\{n \ ; \ u_{\varphi_0(n)} \in B_1\}$ soit infini : en indexant ces indices on construit ainsi une suite extraite de u_{φ_0}, notée $u_{\varphi_0 \circ \varphi_1}$, telle que :

$$\forall p, \forall q, d(u_{\varphi_0 \circ \varphi_1(p)}, u_{\varphi_0 \circ \varphi_1(q)}) \leqslant 2\varepsilon_1.$$

On continue et par ce procédé, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists$ suite extraite $u_{\varphi_0 \circ \varphi_1 \circ ... \circ \varphi_n}$, telle que, pour tout p et q de $\mathbb{N}$ on ait :

$$d(u_{\varphi_0 \circ ... \circ \varphi_n(p)}, u_{\varphi_0 \circ ... \circ \varphi_n(q)}) \leqslant 2\varepsilon_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Posons $v_n = u_{\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_n(n)}$: la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est extraite de u car $v_{n+1} = u_{\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1}(n+1))}$, et comme φ_{n+1} est injective, on a $\varphi_{n+1}(n+1) \geqslant n+1 > n$: le terme v_n est un u_p pour un $p < \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1}(n+1))$: les indices croissent.

Puis :

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leqslant \varepsilon$, mais alors, $\forall n \geqslant n_0$, $\forall m \geqslant n_0$, comme on a :

$\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_n(n) = \varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_{n_0}(\varphi_{n_0+1} \circ \ldots \circ \varphi_n(n))$, c'est du type $\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_{n_0}(p)$; il en est de même de $\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_m(m)$ qui est du type $\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_{n_0}(q)$, d'où :

$$d(v_n, v_m) = d(u_{\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_{n_0}(p)}, u_{\varphi_0 \circ \ldots \circ \varphi_{n_0}(q)}) \leqslant \frac{1}{2^{n_0-1}} \leqslant \varepsilon .$$

On a bien extrait une suite de Cauchy de la suite u.

Réciproquement 2°) $\Rightarrow$ 1°) sinon, il existerait ε_0 tel que A ne soit recouvert par aucune famille finie de boules de rayon $\varepsilon_0 > 0$.

Soit $a_0 \in A$, en particulier $A \not\subset \mathscr{B}(a_0, \varepsilon)$: il existe a_1 dans A avec $d(a_0, a_1) > \varepsilon_0$;

puis $A \not\subset \bigcup_{i=0}^{1} \mathscr{B}(a_i, \varepsilon_0)$ donc il existe a_2 avec $d(a_0, a_1) > \varepsilon_0$, $d(a_0, a_2) > \varepsilon_0$ et $d(a_1, a_2) > \varepsilon_0$.

Si on suppose ainsi trouvés $a_0, \ldots, a_n$ dans A tous à la distance ε_0 au moins les uns des autres, (vrai si $n = 0, 1, 2$), comme $A \not\subset \bigcup_{i=0}^{n} \mathscr{B}(a_i, \varepsilon_0)$, il existe a_{n+1} distant de plus de ε_0 de chaque a_i, pour $i \leqslant n$.

Le procédé est récurrent, et on construit ainsi une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A, tous distants de ε_0 au moins les uns des autres : cette suite n'admet pas de suite de Cauchy extraite, (en formulant avec $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{2}$ on arrive à une contradiction). Ceci est absurde d'après le 2°), donc on ne peut pas supposer le 1° non vérifié, d'où 2°) $\Rightarrow$ 1°) et l'équivalence cherchée.

6.40. a) L'application a, linéaire en dimension finie est continue, il en est de même de chaque application a_n, et, K étant compact, $a_n(\mathrm{K})$, image continue d'un compact dans un séparé est un compact de E, donc un fermé.

On doit justifier que $\bigcap_{a \in \mathrm{A}} \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} a_n(\mathrm{K}) \right)$ est non vide : on va procéder en deux temps, en pensant à des fermés dans un compact...

D'abord, si $t \in \mathrm{K}$, $a(t)$, $a^2(t)$, ..., $a^{n-1}(t)$ sont dans K, stable par a, donc l'isobarycentre de t, $a(t)$, ..., $a^{n-1}(t)$ est dans K, convexe : on a $a_n(\mathrm{K}) \subset \mathrm{K}$.

Les $(a_n(\mathrm{K}))_{n \in \mathbb{N}^*}$, sont alors des fermés de K, compact, s'ils étaient d'intersection vide, il existerait un nombre fini de ces fermés d'intersection déjà vide. S'ils sont associés aux entiers n_j, $1 \leqslant j \leqslant p$, on aurait :

$$\bigcap_{j=1}^{p} a_{n_j}(\mathrm{K}) = \emptyset .$$

Or, les a_{n_j} commutent entre eux, donc en prenant t fixé dans K, (non vide), on a, si $p \geqslant 2$:

$$y = a_{n_1} \circ \ldots \circ a_{n_p}(t) = a_{n_j}\left(\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^{p} a_{n_r} \right)(t),$$

avec $\left(\prod_{\substack{r=1 \\ r \neq j}}^{p} a_{n_r} \right)(t) \in \mathrm{K}$, (K stable par a...), d'où y dans chaque $a_{n_j}(\mathrm{K})$, et *a fortiori* $y \in \bigcap_{j=1}^{p} a_{n_j}(\mathrm{K})$, ce qui contredit l'hypothèse. Si $p = 1$, on a un seul $a_{n_j}(\mathrm{K})$ vide : c'est faux car $\mathrm{K} \neq \emptyset$.

Finalement, $\mathrm{F}_a = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n(\mathrm{K}))$ est non vide, et c'est un compact, convexe, chaque $a_n(\mathrm{K})$ l'étant comme image continue d'un compact, et image linéaire d'un convexe. Si a varie, on a des fermés non vides dans K compact, les F_a.

Montrons maintenant que $\bigcap_{a \in \mathrm{A}} \mathrm{F}_a \neq \emptyset$: sinon, il existerait une intersection d'un nombre fini des F_a, déjà vide, et comme aucun F_a n'est vide, on peut prendre une intersection finie vide, associée au plus petit nombre possible, p, d'éléments de A tels que les F_a soient disjoints, $(p \geqslant 2)$.

On a donc $a(1), ..., a(p)$ dans A, avec :

$$\bigcap_{r=1}^{p} F_{a(r)} = \varnothing \quad \text{et} \quad \bigcap_{r=1}^{p-1} F_{a(r)} \neq \varnothing .$$

Soit a quelconque dans A, et $y \in \bigcap_{r=1}^{p-1} F_{a(r)}$, pour chaque r variant de 1 à $p-1$ on a :

$y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (a(r))_n(K)$, donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, y \in (a(r))_n(K)$,

$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists y_n \in K, y = (a(r))_n(y_n)$.

Mais alors $a(y) = a(a(r))_n(y_n) = (a(r))_n a(y_n)$, puisque a et $a(r)$, éléments de A, commutent : il suffit d'écrire ce qu'est $(a(r))_n$.

Comme $a(y_n) \in K$, finalement $a(y) \in (a(r))_n(K)$. C'est vrai pour tout n de K*, donc $a(y) \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} (a(r))_n(K) = F_{a(r)}$. Mais en itérant, $a^2(y), a^3(y)...$, sont dans $F_{a(r)}$, convexe, et finalement, par isobarycentre, on conclut à :

$\forall q \in \mathbb{N}^*, a_q(y) \in F_{a(r)}$.

Ceci est vrai pour $r = 1, 2, ..., p-1$, d'où :

$$\forall y \in \bigcap_{r=1}^{p-1} F_{a(r)}, \forall q \in \mathbb{N}^*, a_q(y) \in \bigcap_{r=1}^{p-1} F_{a(r)} ;$$

d'où l'on déduit, avec $K' = \bigcap_{r=1}^{p-1} F_{a(r)}$:

$$\bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} a_q(K') \subset K' .$$

Mais K' est un compact, convexe, non vide, (hypothèse sur p), donc la première partie s'applique et donne $\bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} a_q(K')$ non vide, puisque K' est stable par tout élément a de A, et :

$$\bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} a_q(K') \subset F_a \cap \left(\bigcap_{r=1}^{p-1} F_{a(r)}\right),$$

car les $a_n(K)$ sont dans K, donc les F_a sont dans K, d'où K' dans K ; mais alors, $\forall q \in \mathbb{N}^*$, on a $a_q(K') \subset a_q(K)$ d'où $\bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} a_q(K') \subset \bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} a_q(K) = F_a$; et on a justifié

$$\bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} a_q(\mathrm{K}') \subset \mathrm{K}' = \bigcap_{r=1}^{p-1} \mathrm{F}_{a(r)} .$$

On fait cela pour $a = a(p)$ et cela donne :

$$\bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} a(p)_q(\mathrm{K}') \subset \mathrm{F}_{a(p)} \cap \left(\bigcap_{r=1}^{p-1} \mathrm{F}_{a(r)} \right) = \emptyset ,$$

avec $\bigcap_{q \in \mathbb{N}^*} a(p)_q(\mathrm{K}')$ non vide : c'est dramatique. On ne pouvait donc pas supposer au départ $\bigcap_{a \in \mathrm{A}} \mathrm{F}_a = \emptyset$.

On a ainsi justifié l'existence d'un élément x dans chaque $a_n(\mathrm{K})$, le même x pour tout $(a, n) \in \mathrm{A} \times \mathbb{N}^*$.

b) En particulier, x étant dans chaque $a_n(\mathrm{K})$, si a est fixé dans A, il existe y_n dans K tel que :

$$x = a_n(y_n) = \frac{1}{n} (y_n + a(y_n) + \ldots + a^{n-1}(y_n)) ,$$

d'où :

$$(\mathrm{id} - a)(x) = \frac{1}{n} (y_n - a^n(y_n)) .$$

Mais $a^n(y_n)$ et y_n sont dans K, compact de E, espace vectoriel normé, donc partie de diamètre fini d, et on a :

$$\|(\mathrm{id} - a)(x)\| \leqslant \frac{d}{n} ,$$

ceci, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, donc, en faisant tendre n vers $+\infty$, on conclut à $(\mathrm{id} - a)(x) = 0$, soit $a(x) = x$, et ceci pour tout a de A.

6.41. On note $\mathbb{1}$ l'élément unité, (pour le produit), de l'algèbre A, c'est-à-dire la fonction constante égale à 1.

L'automorphisme φ d'espace vectoriel A, vérifie en outre : $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ et $\varphi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, (d'où le mot unitaire).

Analysons les données : *f continue sur K compact*, cela déclenche deux réflexes : la continuité uniforme, et bornée et atteint ses bornes ; le deuxième point semble plus en rapport avec la norme de la convergence uniforme. Disons donc que, pour f dans A, il existe x_0 dans K tel que $\|f\|_\infty = |f(x_0)|$.

Continuons l'analyse : *l'aspect unitaire de l'automorphisme* fait jouer un certain rôle à l'élément neutre, $\mathbb{1}$, auquel il faut relier les éléments inversibles de l'anneau.

Or, une fonction f, continue de K dans $\mathbb{R}$, est inversible dans A si et seulement si elle ne s'annule pas, puisqu'alors la fonction $\frac{1}{f}$ est continue.

Par ailleurs, pour f inversible, comme on a :

$$\varphi\left(f\cdot\frac{1}{f}\right) = \varphi(\mathbb{1}) = \mathbb{1} = \varphi(f)\varphi\left(\frac{1}{f}\right),$$

en particulier, pour tout x de K, $\varphi(f)(x) \neq 0$, donc $\varphi(f)$ aussi est inversible, d'inverse $\frac{1}{\varphi(f)} = \varphi\left(\frac{1}{f}\right)$ d'ailleurs.

Et si f est non inversible ? Alors $\varphi(f)$ ne l'est pas, sinon avec l'automorphisme φ^{-1} lui aussi unitaire, on aurait $\varphi^{-1}(\varphi(f)) = f$ inversible.

Il est temps de synthétiser et de se dire que :

pour $f \in \mathrm{A}$, on prend x_0 tel que $\|f\|_\infty = |f(x_0)|$, et on considère la fonction $g = f - f(x_0)\mathbb{1}$, qui s'annule en x_0, donc n'est pas inversible.

Il en résulte que $\varphi(g) = \varphi(f) - f(x_0)\mathbb{1}$, (aspect linéaire et unitaire de φ), n'est pas inversible, donc s'annule : il existe x_1 dans K tel que $\varphi(f)(x_1) = f(x_0)$. Mais alors :

$$\|\varphi(f)\|_\infty \geqslant |\varphi(f)(x_1)| = |f(x_0)| = \|f\|_\infty.$$

On a obtenu : pour φ automorphisme unitaire, et pour f dans A, on a : $\|\varphi(f)\|_\infty \geqslant \|f\|_\infty$.

En appliquant ce résultat à l'automorphisme φ^{-1}, et à la fonction $\varphi(f)$, il vient :

$\|\varphi^{-1}(\varphi(f))\|_\infty \geqslant \|\varphi(f)\|_\infty$, soit $\|f\|_\infty \geqslant \|\varphi(f)\|_\infty$, d'où φ isométrie de A.

Chapitre VII

Analyse réelle et intégrales

Ne pas oublier que le corps des réels est le seul corps ordonné valué complet. C'est dire l'importance de la relation d'ordre sur les réels, et de l'aspect suites de Cauchy, convergence par critère de Cauchy.

S'y ajoute bien sûr la connaissance de la topologie de $\mathbb{R}$, avec

K compact de $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ K fermé borné ;

K complet de $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ K fermé ;

K connexe de $\mathbb{R} \Leftrightarrow$ K intervalle de $\mathbb{R}$.

Voyons en quoi la structure d'ordre intervient.

Par exemple, par l'étude du signe du trinôme, qui ne sert pas qu'à justifier Cauchy Schwarz, (voir 7.6).

Ou bien, pour établir des inégalités du type $u(a) \leqslant v(a)$, en justifiant $u(x) \leqslant v(x)$ pour x dans un intervalle contenant a, et ce en étudiant les variations de la fonction $v - u$, (7.5).

Dans les questions liées à la convexité, (7.2).

Dans tout raisonnement où l'on procède par des encadrements pour obtenir des limites, (voir 7.3 ; 7.4), ce qui intervient en particulier dans les recherches d'équivalents.

Dans la formule de **Taylor Lagrange**, ($\exists c$...), conséquence des accroissements finis, donc de **Rolle**, donc du **Théorème des valeurs intermédiaires** : f continue sur un intervalle ne peut pas changer de signe sans s'annuler.

Penser en particulier qu'un polynôme réel de degré impair s'annule.

Penser aussi qu'une fonction f, n fois dérivable, ayant $n+1$ zéros au moins, donnera n intervalles pour appliquer Rolle d'où n zéros de f', $n-1$ de f'', ..., et finalement 1 pour $f^{(n)}$, (voir 7.1).

Ne pas oublier enfin, les **formules de la moyenne** pour les intégrales sur un segment, qui toutes font intervenir des inégalités sur $\mathbb{R}$ pour être justifiées ; mais surtout le fait que l'intégrale, agissant sur les fonctions considérées comme variables, est une *forme linéaire positive*, donc préserve les inégalités entre fonctions.

Toujours penser que sur un compact métrique, la continuité est uniforme, (pour f à valeurs dans F métrique), et de plus si f est à valeurs réelles, les bornes sont atteintes. L'exercice 7.13 est un bon exemple de cette situation.

Ne pas oublier :

- les formules, (même de trigonométrie, voir 7.18) ;
- le bon vieux Taylor Young, et Liebnitz, (7.19) ;
- les équivalents, cela s'intègre très bien, (7.21) ;
- la convexité, avec la place de la courbe par rapport à la corde, et par rapport à la tangente, ainsi que la croissance de la dérivée, voilà une valeur sûre, (7.22) ;
- la règle de l'Hospital généralisée sert souvent pour les équivalents, (justifiez en bien les hypothèses), (7.23) ;
- on obtient $\mathbb{R}$, à partir de $\mathbb{N}$, en symétrisant ce demi-groupe, (d'où $\mathbb{Z}$), en prenant le corps des fractions $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Z}$, et en complétant $\mathbb{Q}$: ce chemin se retrouve dans des exercices classiques de détermination de fonctions continues, voir 7.29 ;
- la linéarité, (voir la bilinéarité) dans les intégrales, cela sert à simplifier les calculs entre autre, (7.32).

Énoncés

7.1. Soit f de classe C^2 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que pour tout x de $[a, b]$, il existe c_x dans $]a, b[$ tel que $f(x) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x)$.

Généraliser.

Soit f de classe C^3 de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$, nulle en -1, 0 et 1. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{12} \sup\{|f''(x)| \,;\, -1 \leqslant x \leqslant 1\}$.

7.2. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n nombres réels > 0. Montrer que $\dfrac{x_1}{x_2} + \ldots + \dfrac{x_{n-1}}{x_n} + \dfrac{x_n}{x_1} \geqslant n$.

7.3. Soit f croissante de $[x_0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$, telle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$.

Étudier pour $c > 0$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(cx)}{f(x)}$, puis $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln f(x)}{\ln x}$.

7.4. Soit une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en 0, telle que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = a$, montrer que f est dérivable en 0, calculer $f'(0)$.

7.5. Soit $f \in \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$, telle que $f(0) = 0$ et, $\forall t \in [0, 1]$, $0 < f'(t) \leqslant 1$. Prouver que :

$$\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \geqslant \int_0^1 f^3(t)\,\mathrm{d}t.$$

7.6. Soit $K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n - \{(0, 0, \ldots, 0)\} \,;\, 0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n\}$. Montrer que :

$$\operatorname*{Sup}_{x \in K} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}} = \sqrt{n}, \quad \text{et} \quad \operatorname*{Sup}_{x \in K} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = 1.$$

7.7. Soit une constante $k > 0$. Trouver les $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ continues telles que $\displaystyle\int_x^{kx} f(t)\mathrm{d}t$ soit constant par rapport à x.

7.8. Montrer que la fonction sinus, restreinte à un intervalle $]a, b[$, n'est pas une fraction rationnelle.

7.9. Soit φ une application de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans E euclidien, T périodique, φ' ne s'annulant pas. Montrer que l'application $u = \dfrac{\varphi'}{\|\varphi'\|}$, de $\mathbb{R}$ dans E, a son image qui rencontre tous les hyperplans vectoriels de E.

7.10. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle qu'il existe un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, de degré impair, vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant |P(x)|.$$

Que dire de f ?

7.11. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue par morceaux et bornée, et α un réel fixé. Déterminer la limite de :

$$u_n = n \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp\left(-\frac{n^2(x-\alpha)^2}{4}\right)\mathrm{d}x.$$

7.12. Soit φ une application de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi''^2$ convergent. Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'^2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi''^2\right)^{1/2},$$

et que cette majoration est la meilleure possible.

7.13. Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue, et $a > 0$. On pose $F(x) = \displaystyle\sup_{t \in [x, x+a]} f(t)$. La fonction F est-elle continue ?

7.14. Soit f continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans le cercle unité S^1 de $\mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une fonction continue g de I dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout t de I on ait $f(t) = e^{ig(t)}$.

7.15. Soient f et g deux homéomorphismes de $[0, 1]$ dans lui-même dont 0 et 1 sont les seuls points fixes. Montrer qu'il existe un homéomorphisme h de $[0, 1]$ dans lui-même tel que $f \circ h = h \circ g$.

7.16. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3}\,\mathrm{d}x$.

7.17. Soit f une application de classe C^1 de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On pose :

$$u_n = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\cdot\frac{b-a}{n}\right).$$

Déterminer la limite de la suite des nu_n.

7.18. Soient 13 réels distincts. Montrer qu'il en existe deux parmi eux vérifiant :

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < 2-\sqrt{3}.$$

7.19. Soit une suite de complexes $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, et on suppose que pour tout x réel, $f(x)$ est réel positif ou nul. On note Q le polynôme tel que $f(x) = e^{-inx}\mathrm{Q}(e^{ix})$. Montrer que les zéros de Q qui sont des complexes de module 1 ont, dans Q, une multiplicité paire.

7.20. Soient a, b, c, trois réels distincts. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que :

$$\forall x \in [0, 1],\ 1 + x^a \leqslant (1 + x^b)^c.$$

7.21. Trouver la limite, si x tend vers 0 de la fonction :

$$f : x \leadsto \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

7.22. Soit f une application convexe dans $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$0 \leqslant \frac{1}{2}f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n) - \int_1^n f \leqslant \frac{1}{8}\left(f'(n) - f'(1)\right).$$

7.23. Donner un équivalent, en $+\infty$, de $f(x) = e^{-x^2}\cdot\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$.

7.24. Soit $\mathrm{I} = [\alpha, \beta]$, a, u, b, q des applications continues de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que $b \geqslant 0, q \geqslant 0$ et que :

$$\forall t \in \mathrm{I}, u(t) \leqslant a(t) + q(t) \int_{\alpha}^{t} u(s) b(s) \mathrm{d}s .$$

Montrer que :

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad u(t) \leqslant a(t) + q(t) \int_{\alpha}^{t} a(s) b(s) \exp\left(\int_{s}^{t} q(\sigma) b(\sigma) \mathrm{d}\sigma\right) \mathrm{d}s .$$

7.25. Montrer que toute application croissante de [0, 1] dans [0, 1] admet un point fixe.

7.26. Soit $b \in \,]0, 1[$ et n entier naturel. On pose :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{b^2 + 1 - 2b\cos x} \mathrm{d}x .$$

a) Calculer $\mathrm{I}_{n+2} + \mathrm{I}_n - \left(b + \frac{1}{b}\right) \mathrm{I}_{n+1}$.

b) Calculer I_n.

7.27. Pour f et g continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$, et p et $q > 0$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, prouver que :

$$\left|\int_a^b f(t) g(t) \mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q} .$$

7.28. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 + (\tan x)^{\alpha}} = \mathrm{I}(\alpha)$.

7.29. Trouver les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, on ait :

$$f(x+y) f(x-y) = (f(x))^2 (f(y))^2 .$$

7.30. Soit f continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. On note $\mathrm{M}(x)$ la borne supérieure des $|f(t)|$ pour t dans $[0, x]$.

On suppose qu'il existe $\mathrm{A} \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \geqslant 0, \quad |f(x)| \leqslant \mathrm{A} + \frac{\mathrm{M}(x)}{2} .$$

Montrer que f est bornée.

7.31. Soient a et b réels strictement supérieurs à 1. Calcul de $I = \int_0^{\pi} \ln \dfrac{a - \cos x}{b - \cos x}\, dx$.

7.32. Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

a) Montrer que $\int_{-1}^{1} P^2(x)dx = -i \int_0^{\pi} P^2(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$.

b) En déduire que $\sum_{0 \leqslant k, l \leqslant n} \dfrac{a_k a_l}{k+l+1} \leqslant \pi \sum_{k=0}^{n} a_k^2$.

7.33. Soit $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$, pour n entier on pose :

$$P_n(X) = \frac{X^n(p - qX)^n}{n!}.$$

1°) Montrer que, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\dfrac{p}{q}\right)$ sont dans $\mathbb{N}$.

2°) Soit $f \in \mathscr{C}^{\circ}\left(\left[0, \dfrac{p}{q}\right], \mathbb{R}\right)$. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{p/q} P_n f = 0$.

3°) En déduire, par un choix convenable de f, que π est irrationnel.

Solutions

7.1. Soit d'abord x dans $]a, b[$, fixé, et A tel que la fonction φ définie sur $[a, b]$ par $\varphi(t) = f(t) - \frac{(t-a)(t-b)}{2} A$ soit nulle en x, (A existe car on divise par $\frac{(x-a)(x-b)}{2}$, non nul).

La fonction φ est de classe C^2, nulle en a, x et b, donc par deux applications du Théorème de Rolle, on a φ' nulle en x_1 et x_2 avec $a < x_1 < x < x_2 < b$, d'où φ'' nulle en $c_x \in]x_1, x_2[$. Comme $\varphi''(t) = f''(t) - A$, on a $A = f''(c_x)$, et en écrivant $\varphi(x) = 0$ on obtient le résultat. Si $x = a$ ou b, tout c de $]a, b[$ convient.

<u>*Généralisation*</u>. Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, de classe $C^p, p \geqslant 2$, tel qu'il existe $\alpha_1 = a < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p = b$, avec $f(\alpha_j) = 0$ pour tout j entre 1 et p. Alors, pour tout x de $[a, b]$, il existe c_x dans $]a, b[$ tel que
$$f(x) = \left(\prod_{j=1}^{p} (x - \alpha_j)\right) \frac{f^{(p)}(c_x)}{p!}.$$

Si x est l'un des α_j, n'importe quel c_x de $]a, b[$ convient. Sinon, avec A tel que la fonction φ définie sur $[a, b]$ par $\varphi(t) = f(t) - \frac{A}{p!} \prod_{j=1}^{p} (t - \alpha_j)$ soit nulle en x, (division possible pour calculer A), on dispose de $p + 1$ points distincts, zéros de φ qui est de classe C^p, d'où p segments consécutifs pour appliquer Rolle, donc p zéros distincts de φ', donc $p - 1$ zéros distincts de φ'', (toujours Rolle) et finalement un zéro, c_x dans $]a, b[$ de $\varphi^{(p)}$, avec $\varphi^{(p)}(t) = f^{(p)}(t) - A$, donc $f^{(p)}(c_x) = A$.

<u>*Application*</u>. Avec trois zéros de f, de classe C^3, tout x de $[a, b]$ est tel que $f(x) = \frac{1}{3!} (x+1)(x)(x-1) f^{(3)}(c_x)$, pour un c_x convenable, d'où une majoration :

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{6} |x(1 - x^2)| \|f^{(3)}\|_\infty,$$ que l'on intègre, d'où :

$$\int_{-1}^{1} |f(x)| \mathrm{d}x \leqslant \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{6} \int_{-1}^{1} |x(1-x^2)| \mathrm{d}x = \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{3} \int_{0}^{1} (1-x^2)x \, \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{3} \left[- \frac{(1-x^2)^2}{4} \right]_0^1 = \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{12}.$$

7.2. Les n nombres positifs $\frac{x_1}{x_2}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{x_n}{x_1}$ sont de produit constant égal à 1. Si on met l'inégalité à justifier sous la forme $1 \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}}$, (en posant $x_{n+1} = x_1$), cela fait penser à du barycentre, à coefficients positifs... donc incite à penser à la fonction logarithme qui est concave.

Si $y_1, \ldots, y_n$ sont des réels positifs, par concavité de la fonction logarithme, on a :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln y_k = \ln \left(\prod_{k=1}^{n} y_k \right)^{1/n} \leqslant \ln \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} y_k \right),$$

(se justifie par récurrence, par associativité du barycentre), donc avec $y_k = \frac{x_k}{x_{k+1}}$ et $\prod_{k=1}^{n} y_k = 1$, on obtient $0 \leqslant \ln \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}}$, puis par monotonie de la fonction exponentielle :

$$1 \leqslant \frac{1}{n} \left(\frac{x_1}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \right).$$

7.3. Pour n fixé, si on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(2^n x)}{f(x)} = 1$, (vrai pour $n = 1$), comme $\frac{f(2^{n+1} x)}{f(x)} = \frac{f(2 \cdot 2^n x)}{f(2^n x)} \cdot \frac{f(2^n x)}{f(x)}$, compte tenu de l'hypothèse on a $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(2^{n+1} x)}{f(x)} = 1$.

Ceci est donc vrai pour tout n de $\mathbb{N}$, (si $n = 0$, le rapport est constant égal à 1).

Pour n entier négatif, en posant $u = 2^n x$, on a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(2^n x)}{f(x)} = \lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{f(u)}{f(2^{-n}u)} = 1$, puisque $-n$ est dans $\mathbb{N}$,

donc finalement $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(2^n x)}{x} = 1$ est vérifié pour chaque n de $\mathbb{Z}$.

Soit alors $c > 0$ fixé, comme $n \rightsquigarrow 2^n$ est croissante strictement de $\mathbb{Z}$ dans $]0, +\infty[$, avec $\lim\limits_{n \to -\infty} 2^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$, il existe un, (et un seul), n tel que :

$2^n \leqslant c < 2^{n+1}$, d'où, en multipliant par x supposé > 0, (non gênant pour traduire une limite quand x tend vers $+\infty$), par croissance de f, et comme $f(x) > 0$, on a :

$$\frac{f(2^n x)}{f(x)} \leqslant \frac{f(cx)}{f(x)} \leqslant \frac{f(2^{n+1}x)}{f(x)},$$

donc, par encadrement : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(cx)}{f(x)} = 1$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$: $\exists\, x_1 \geqslant x_0$, $\forall x \geqslant x_1$,

$\left|\dfrac{f(2x)}{f(x)} - 1\right| \leqslant \varepsilon$, soit encore, puisque $f(2x)$ sera supérieur à $f(x)$ si on suppose $x \geqslant 0$, en imposant $x_1 > 0$, on peut dire que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_1 > 0, \forall x \geqslant x_1, 1 \leqslant \frac{f(2x)}{f(x)} \leqslant 1 + \varepsilon.$$

Posons $1 + \varepsilon = 2^\alpha$, on a $\varepsilon > 0 \Leftrightarrow \alpha > 0$ et, $\forall x \geqslant x_1$: $1 \leqslant \dfrac{f(2x)}{f(x)} \leqslant 2^\alpha$.

Si on pose $\mathrm{K} = \dfrac{f(x_1)}{x_1^\alpha}$, on a $f(2x_1) \leqslant f(x_1) \cdot 2^\alpha = \mathrm{K} x_1^\alpha 2^\alpha$, puis $f(2^2 x_1) \leqslant 2^\alpha \cdot f(2x_1) \leqslant 2^\alpha \cdot \mathrm{K} x_1^\alpha 2^\alpha = \mathrm{K} x_1^\alpha 2^{2\alpha}$, et par récurrence, on justifie que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$f(2^n x_1) \leqslant \mathrm{K} x_1^\alpha 2^{n\alpha}.$$

Soit alors $x > x_1$, $\exists ! p \in \mathbb{N}$ tel que : $2^p x_1 \leqslant x < 2^{p+1} x_1$, (n'oublions pas l'hypothèse $x_1 > 0$), donc par croissance de f, on a :

$$f(x_1) \leqslant f(2^p x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(2^{p+1} x_1) \leqslant \mathrm{K} x_1^\alpha 2^{(p+1)\alpha},$$

d'où l'on tire, puisque $\alpha > 0$:

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{K} 2^\alpha 2^{p\alpha} x_1^\alpha \leqslant \mathrm{K} \cdot 2^\alpha x^\alpha$$

donc, pour $x > 1$ et $x > x_1$, on aura *a fortiori* :

$$\frac{\ln(f(x_1))}{\ln x} \leqslant \frac{\ln(f(x))}{\ln x} \leqslant \frac{\ln(\mathrm{K}2^{\alpha})}{\ln x} + \alpha,$$

le minorant tend vers 0 si x tend vers $+\infty$, le majorant vers α, et comme $\alpha > 0$ équivaut à $\varepsilon > 0$, on peut finalement dire que :

$$\forall \alpha > 0, \exists x_2 \geqslant \sup(0, x_1, 1), \forall x \geqslant x_2 :$$

$$-\alpha \leqslant \frac{\ln(f(x))}{\ln(x)} \leqslant 2\alpha,$$

ce qui justifie que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(f(x))}{\ln(x)} = 0$.

7.4. Si on traduit la limite donnée, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, 0 < |x| \leqslant \alpha \Rightarrow a - \varepsilon \leqslant \frac{f(2x) - f(x)}{x} \leqslant a + \varepsilon.$$

On sent bien qu'il faut alors considérer $x, \dfrac{x}{2}, \ldots, \dfrac{x}{2^n}$, et sommer..., donc se débarrasser du x en dénominateur, ce qui conduit à supposer d'abord *que l'on a* : $0 < x < \alpha$.

Alors $\dfrac{x}{2}, \dfrac{x}{4}, \ldots, \dfrac{x}{2^n}$ sont dans $]0, \alpha[$ et on aura :

$$(a - \varepsilon)\, \frac{x}{2} \leqslant f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) \leqslant (a + \varepsilon)\, \frac{x}{2}$$

$$(a - \varepsilon)\, \frac{x}{2^2} \leqslant f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{2^2}\right) \leqslant (a + \varepsilon)\, \frac{x}{2^2}$$

et, plus généralement :

$$(a - \varepsilon)\, \frac{x}{2^n} \leqslant f\left(\frac{x}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) \leqslant (a + \varepsilon)\, \frac{x}{2^n},$$ d'où l'on tire :

$$x(a - \varepsilon)\, \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{2}} \leqslant f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) \leqslant x(a + \varepsilon)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

Dans cet encadrement, pour x fixé, si n tend vers $+\infty$, il vient, (f continue en 0) :

$$x(a - \varepsilon) \leqslant f(x) - f(0) \leqslant x(a + \varepsilon),$$

donc on a justifié que, pour tout x de $]0, \alpha[$, on a :

$$a-\varepsilon \leqslant \frac{f(x)-f(0)}{x} \leqslant a+\varepsilon .$$

Pour $x \in]-\alpha, 0[$, on parvient au même résultat, car la multiplication par $x<0$, au départ, puis la division par x à la fin, renversent deux fois les inégalités. Finalement, on a justifié que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = a$.

On a donc f dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = a$.

7.5. On étudie en fait les variations de la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = \left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2 - \int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t$. Il s'agit d'une fonction dérivable, de dérivée :

$$g'(x) = f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f^2(x)\right].$$

Comme f est strictement croissante, $(f'(t)>0)$, avec $f(0) = 0$, on a $g'(0) = 0$ et $g'(x)$ du signe de $h(x) = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f^2(x)$ pour x dans $]0, 1]$. Mais à son tour h est dérivable et : $h'(x) = 2f(x)(1-f'(x))$: vu les hypothèses h' est à valeurs positives, h est croissante or $h(0) = 0$, donc h est positive, d'où g' positive, g croissante, et comme $g(0) = 0$, on a bien $g(1) \geqslant 0$, soit $\left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)^2 \geqslant \int_0^1 f^3(t)\mathrm{d}t$.

7.6. Comme le n.uplet nul est écarté, les quotients considérés sont définis sur K. Comment considérer $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ et $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} 1 \cdot x_i$? Peut-être, comme dans la justification de l'inégalité de Cauchy Schwarz, en considérant le polynôme en t, du second degré $\mathrm{P}(t) = \sum\limits_{i=1}^{n}(1+tx_i)^2 = t^2\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + 2t\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + n$, qui est positif pour tout t, donc qui admet un discriminant réduit négatif, on a : $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant 0$, donc, $\forall x \in \mathrm{K}$, $\dfrac{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2} \leqslant n$, l'égalité étant obtenue pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$. Comme $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant 0$, on a bien :

$$\sup_{x \in K} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}} = \sqrt{n}.$$

Le simple développement $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$, avec des $x_i \geqslant 0$, prouve par ailleurs que, $\forall x \in K$, on a : $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$, avec égalité pour les n.uplets du type $(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$, d'où :

$$\sup_{x \in K} \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = 1.$$

7.7. Pour f continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, et $x \geqslant 0$, la fonction g définie par $g(x) = \int_x^{kx} f(t)\mathrm{d}t$ a un sens, elle est de classe C^1, avec $g'(x) = kf(kx) - f(x)$, donc g sera constante si et seulement si f vérifie l'équation fonctionnelle : $\forall x \in \mathbb{R}^+, kf(kx) = f(x)$.

On est incité à « itérer » cette relation.

Si on suppose que $k^n f(k^n x) = f(x)$, (vrai si $n = 1$), on aura $kf(k \cdot k^n x) = f(k^n x)$, d'où en multipliant par k^n, l'égalité :

$$k^{n+1} f(k^{n+1} x) = k^n f(k^n x) = f(x),$$

valable $\forall n \in \mathbb{N}$, (c'est évident si $n = 0$) et $\forall x \in [0, +\infty[$.

Mais cette identité, avec $0 \leqslant k < 1$, donnera par passage à la limite, f étant continue en 0, $f(x) = 0$, qui effectivement est solution.

Pour $k > 1$, il faudrait avoir k^{-n} pour tendre vers 0. En prenant $z = k^{-n}x$ dans l'égalité $k^n f(k^n z) = f(z)$, il vient $k^n f(x) = f(k^{-n}x)$, soit encore, pour $k \neq 0$, l'identité $f(x) = k^{-n} f(k^{-n} x)$, valable pour tout x positif et tout n entier, d'où, pour $k > 1$, si n tend vers $+\infty$, $f(x) = 0$.

Enfin, si $k = 1$, comme pour f quelconque $\int_x^x f(t)\mathrm{d}t = 0$, est constant en x, la réponse au problème posé est : pour $k = 1$, toute fonction continue f convient ; pour $k > 0$, $k \neq 1$, seule la fonction nulle est solution.

7.8. Si on suppose qu'avec $a < b$, on a sur $]a, b[$ l'égalité $\sin x = \frac{P(x)}{Q(x)}$, P et Q polynômes premiers entre eux, en dérivant deux fois on aura : $-\sin x = \left(\frac{P'Q - PQ'}{Q^2}\right)' = \frac{P''Q - PQ''}{Q^2} - \frac{2Q'P'Q - 2PQ'^2}{Q^3}$,

d'où en égalant les deux valeurs du sinus, et en réduisant au même dénominateur, l'égalité :

$$-PQ^2 = P''Q^2 - PQQ'' - 2P'Q'Q + 2PQ'^2.$$

On a PQ^2 de degré $d°P + 2d°Q$, le second membre doit donc être un polynôme non nul de même degré, or il est de degré inférieur ou égal à $d°P + 2d°Q - 2$, ou c'est le polynôme nul si P et Q sont constants : dans tous les cas l'égalité est impossible.

7.9. L'espace E étant euclidien, ses hyperplans sont exactement les orthogonaux des vecteurs non nuls de E.

Si $H = \{a\}^{\perp}$, avec a dans $E\backslash\{0\}$, on veut en fait prouver l'existence de x réel tel que $\langle \varphi'(x) | a \rangle = 0$, (la simplification par $\frac{1}{\|\varphi'(x)\|}$ ne changeant rien. Or $\langle \varphi'(x) | a \rangle$ est la dérivée de $x \rightsquigarrow \langle \varphi(x) | a \rangle = \theta(x)$, fonction T périodique : c'est fini. On a $\theta(T) - \theta(0) = 0 = T\theta'(x)$ avec x entre 0 et T d'où un $\frac{\varphi'(x)}{\|\varphi'(x)\|}$ dans $H \cap u(\mathbb{R})$. Ce sont ces bons vieux accroissements finis qui nous sortent de là.

7.10. En quoi un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair diffère-t-il d'un autre ? En ce qu'il s'annule.

Soit donc x_0 tel que $P(x_0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $\left| f^{(n)}(x_0) \right| \leqslant |P(x_0)| = 0$ donc $f^{(n)}(x_0) = 0$.

Mais alors, par Taylor Lagrange d'ordre n entre x et x_0, on a :

$$f(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \text{ avec } \xi \text{ entre } x \text{ et } x_0 .$$

Si donc $x \in [a, b] = \mathrm{K}$, compact contenant x_0, sur lequel $\|\mathrm{P}\|_\infty$ existe, on aura

$$|f(x)| \leqslant \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \|\mathrm{P}\|_\infty \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|\mathrm{P}\|_\infty ,$$

et ce pour tout n, mais le majorant étant le terme général d'une série convergente, il tend vers 0 si n tend vers l'infini, donc f est nulle sur chaque $[a, b]$ contenant x_0, d'où f nulle en fait.

7.11. D'abord l'intégrale impropre converge car $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $\lim\limits_{|x| \to +\infty} x^2 \exp\left(\dfrac{-n^2(x-\alpha)^2}{4}\right) = 0$, pour $n > 0$.

Puis, la fonction $t \leadsto \exp\left(-\dfrac{n^2}{4} t^2\right)$, décroissant « très rapidement » si $|t|$ tend vers l'infini, le « poids » de l'exponentielle se concentre en α, où $f(x)$ se comporte comme $f(\alpha+0)$ ou $f(\alpha-0)$.

Si on tient compte de cela, on introduit :

$$w_n = n \int_\alpha^{+\infty} (f(x) - f(\alpha+0)) \exp\left(-\frac{n^2}{4}(x-\alpha)^2\right) \mathrm{d}x. \text{ On a :}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0, \alpha < x < \alpha + \beta \Rightarrow |f(x) - f(\alpha+0)| \leqslant \varepsilon ,$$

d'où :

$$|w_n| \leqslant n\varepsilon \int_\alpha^{\alpha+\beta} \exp\left(-\frac{n^2}{4}(x-\alpha)^2\right) \mathrm{d}x$$

$$+ 2\|f\|_\infty n \int_{\alpha+\beta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{4}(x-\alpha)^2\right) \mathrm{d}x.$$

En posant $n(x-\alpha) = t$, on obtient :

$$|w_n| \leqslant \varepsilon \int_0^{n\beta} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) \mathrm{d}t + 2\|f\|_\infty \int_{n\beta}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) \mathrm{d}t .$$

La convergence de l'intégrale impropre $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) \mathrm{d}t$, donne alors :

à $\varepsilon > 0$, on associe $X_0 > 0$ tel que $\int_{X_0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) dt < \varepsilon$, mais alors, β étant associé à ε précédemment, il existe n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0, n\beta \geqslant X_0$, d'où, $\forall n \geqslant n_0$:

$|w_n| \leqslant \varepsilon(I + 2\|f\|_\infty)$, il en résulte que la suite des w_n converge vers 0.

Comme

$$w_n = n\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) \exp\left(-\frac{n^2}{4}(x-\alpha)^2\right) dx$$

$$- nf(\alpha+0)\int_{\alpha}^{+\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{4}(x-\alpha)^2\right) dx$$

et que la deuxième intégrale se calcule, en posant $n(x-\alpha) = t$, en : $f(\alpha+0)\int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{4}\right) dt = \sqrt{\pi}\, f(\alpha+0)$, on a finalement :

$$\lim_{n \to +\infty} n\int_{\alpha}^{+\infty} f(x) \exp\left(-\frac{n^2}{4}(x-\alpha)^2\right) dx = \sqrt{\pi}\, f(\alpha+0).$$

Le même calcul à partir de :

$w'_n = n\int_{-\infty}^{\alpha} (f(x) - f(\alpha-0)) \exp\left(-\frac{n^2}{4}(x-\alpha)^2\right) dx$, conduit à :

$\lim_{n \to +\infty} n\int_{-\infty}^{\alpha} f(x) \exp\left(-\frac{n^2}{4}(x-\alpha)^2\right) dx = \sqrt{\pi}\, f(\alpha-0)$, et finalement la suite des u_n converge vers $\sqrt{\pi}\,(f(\alpha+0) + f(\alpha-0))$.

7.12. On doit justifier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'^2$. D'abord, l'inégalité $2|\varphi(x)\varphi''(x)| \leqslant \varphi^2(x) + \varphi''^2(x)$, (c'est $(|\varphi''(x)| - |\varphi(x)|)^2 \geqslant 0$), donne la convergence absolue de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varphi''$.

On considère, pour $A < B$, l'intégrale :

$$\int_A^B \varphi(t)\varphi''(t) dt = \varphi(B)\varphi'(B) - \varphi(A)\varphi'(A) - \int_A^B (\varphi'(t))^2 dt.$$

Si $\int_A^{+\infty} \varphi'^2$ diverge, (vers $+\infty$ puisque $\varphi'^2 \geqslant 0$), on aurait donc $\lim_{B \to +\infty} \varphi(B)\varphi'(B) = +\infty$, et comme $(\varphi^2)' = 2\varphi\varphi'$, la fonction φ^2 devenant croissante, de dérivée tendant vers $+\infty$, on aurait $\lim_{x \to +\infty} \varphi^2(x) = +\infty$, (si pour $x \geqslant x_0$ on a $(\varphi^2)' \geqslant 1$, par accroissements finis entre x et $y > x$, on aurait $\varphi^2(y) \geqslant \varphi^2(x) + (y - x)$), ce qui est incompatible avec la convergence de $\int^{+\infty} \varphi^2$.

On a donc de $\int^{+\infty} \varphi'^2$, et aussi existence de $l = \lim_{B \to +\infty} \varphi(B)\varphi'(B)$.

Mais alors $l = 0$, sinon avec $l > 0$, ε tel que $l - \varepsilon > 0$, et x_0 tel que $x \geqslant x_0 \Rightarrow \varphi(x)\varphi'(x) \geqslant l - \varepsilon$, on aurait, pour $x \geqslant x_0$:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi\varphi' = \frac{1}{2}\left(\varphi^2(x) - \varphi^2(x_0)\right) \geqslant (l - \varepsilon)(x - x_0),$$

et la majoration $\varphi^2(x) \geqslant \varphi^2(x_0) + 2(l - \varepsilon)(x - x_0)$ est incompatible avec la convergence de $\int^{+\infty} \varphi^2$;

de même $l < 0$ et $\varepsilon > 0$ tel que $l + \varepsilon < 0$ conduit à un x_0 tel que $\varphi(x)\varphi'(x) \leqslant l + \varepsilon$ pour $x \geqslant x_0$ d'où :

$$\int_{x_0}^{x} \varphi\varphi' = \frac{1}{2}\left(\varphi^2(x) - \varphi^2(x_0)\right) \leqslant (l + \varepsilon)(x - x_0),$$ et là c'est pire car le majorant tendant vers $-\infty$ si x tend vers $+\infty$, $\varphi^2(x)$ devrait en faire autant.

On a donc $\lim_{B \to +\infty} \varphi(B)\varphi'(B) = 0$.

Pour B fixé et A tendant vers $-\infty$, on justifie de même la convergence de $\int_{-\infty} \varphi'$ et la nullité de $\lim_{A \to -\infty} \varphi(A)\varphi'(A)$, (ou bien on applique le 1[er] point à ψ définie par $\psi(x) = \varphi(-x)$), d'où finalement la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'^2$ et l'égalité $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varphi'' = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'^2$.

Mais alors, l'inégalité de Cauchy Schwarz donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'^2 = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi\varphi''\right| \leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi''^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

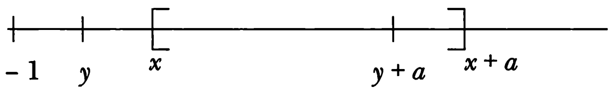
et l'égalité étant obtenue pour $\varphi \equiv 0$, c'est la meilleure majoration possible.

7.13. Soit x fixé, on impose $|x-y| \leqslant 1$, alors tous les t entre y et $y+a$ sont entre $x-1$ et $x+a+1$, et sur le compact $K = [x-1, x+a+1]$ la fonction f est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $\forall (s,t) \in K^2, |s-t| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(s)-f(t)| \leqslant \varepsilon$, et on peut imposer $\alpha < 1$.

On va comparer $F(y)$ et $F(x)$, en remarquant que $F(y) = \sup\{f(t)\ ;\ t \in [y, y+a]\}$ est atteinte en un t_0 de $[y, y+a]$, et cette comparaison, on la fait pour un y tel que $|x-y| \leqslant \alpha$.

Supposons $y < x$:

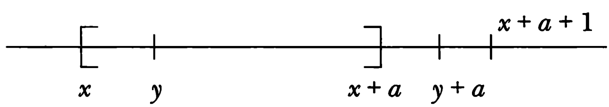


Si $t_0 \in [y, x]$, on a $|x-t_0| \leqslant \alpha$ donc $|f(t_0)-f(x)| \leqslant \varepsilon$ d'où $F(y) = f(t_0) \leqslant f(x) + \varepsilon \leqslant F(x) + \varepsilon$.

Si $t_0 \in [x, y+a]$, $f(t_0) \leqslant \sup\{\ f(t)\ ;\ t \in [x, x+a]\}$, soit :

$$F(y) \leqslant F(x) < F(x) + \varepsilon.$$

Si on suppose $x \leqslant y$:



Si $t_0 \in [y, x+a]$, on a encore $F(y) = f(t_0) \leqslant F(x) \leqslant F(x) + \varepsilon$, alors que si $t_0 \in [x+a, y+a]$, on a $|t_0-(x+a)| \leqslant |(y+a)-(x+a)| \leqslant \alpha$ donc $|f(t_0)-f(x+a)| \leqslant \varepsilon$ d'où :

$$F(y) = f(t_0) \leqslant f(x+a) + \varepsilon \leqslant F(x) + \varepsilon.$$

Dans tous les cas, l'hypothèse $|x-y| \leqslant \alpha$ implique $F(y) \leqslant F(x) + \varepsilon$. Mais on peut aussi dire que $F(x)$ est atteinte en $t_1 \in [x, x+a]$, et le même raisonnement conduit à l'inégalité $F(x) \leqslant F(y) + \varepsilon$, et finalement, $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que pour tout y vérifiant $|x-y| \leqslant \alpha$, on ait : $F(x) - \varepsilon \leqslant F(y) \leqslant F(x) + \varepsilon$, d'où la continuité de F.

7.14. Posons $f(t) = u(t) + iv(t)$, avec u et v fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ telles que $u^2 + v^2 = 1$, pour chaque t de I, il existe un et un seul $\theta(t)$, *modulo* 2π, tel que $\cos\theta(t) = u(t)$ *et* $\sin\theta(t) = v(t)$.

Soit t_0 de I tel que $\theta(t_0) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, modulo 2π. On a donc un entier p_0 tel que $\theta(t_0) - 2p_0\pi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; (en fait on peut poser $\theta(t_0) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en retranchant ce $2p_0\pi$).

On a donc $u(t_0) > 0$, et $u(t)$ reste localement > 0 par continuité : $\exists \alpha(t_0) > 0$ tel que sur le voisinage $V(t_0)$ de t_0 défini par $V(t_0) = I \cap]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$, on ait :

$$\theta(t) = \operatorname{Arcsin} v(t), \text{ modulo } 2\pi,$$

donc la fonction $\varphi_{t_0} : t \rightsquigarrow \operatorname{Arcsin}(v(t)) + 2p_0\pi$, sera continue sur $V(t_0)$, telle que $\varphi_{t_0}(t_0) = \theta(t_0)$, et on aura $e^{i\varphi_{t_0}(t)} = f(t)$ sur $V(t_0)$.

On aurait de même, si $\theta(t_0) \in]0, \pi[$, une détermination continue du type $\theta(t) = \operatorname{Arccos} u(t) + 2p\pi$; valable localement ; si $\theta(t_0) \in \left]\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right[$, une solution en $\theta(t) = \pi - \operatorname{Arcsin} v(t) + 2p\pi$ convient ; enfin pour $\theta(t_0) \in]-\pi, 0[$, $\theta(t) = -\operatorname{Arccos} u(t) + 2p\pi$ convient.

Dans tous les cas on obtient donc :

$\forall t \in I, \exists V(t)$, voisinage de t dans I, (intervalle si on veut) et une fonction continue θ de $V(t)$ dans $\mathbb{R}$, telle que $e^{i\theta(t)} = f(t)$.

Il nous reste à passer de la détermination locale à une détermination globale sur I.

Pour cela soit t_0 fixé dans l'intérieur de I, et considérons :

$$I_1 = \{b \,;\, b \in I, b > t_0, \exists \theta \in \mathscr{C}^\circ([t_0, b], \mathbb{R}) \text{ telle que } e^{i\theta(t)} = f(t)\},$$

on va prouver que $I_1 = I \cap [t_0, +\infty[$.

D'abord, l'existence d'un relèvement local en t_0 nous donne I_1 non vide.

Il est facile de justifier que I_1 est un intervalle, (si on a b_1 et b_2 dans I_1, avec $b_1 < b_2$, $\forall b \in [b_1, b_2]$, le relèvement continu de f sur $[t_0, b_2]$ se restreint à $[t_0, b]$).

Soit alors $m_1 = \sup I_1$ et $m = \sup I$, (bornes finies ou non, peu importe).

Si $m_1 < m$, $m_1 \in \mathrm{I}$, on a donc un relèvement local θ_1 en m_1 : $\exists \alpha_1 > 0$ tel que pour tout t de $]m_1 - \alpha_1, m_1 + \alpha_1[\, \cap \mathrm{I}$, $e^{i\theta_1(t)} = f(t)$, avec θ_1 continue.

Puis, il existe b dans $\mathrm{I}_1 \cap\,]m_1 - \alpha, m_1]$, (définition d'une borne supérieure), donc il existe une fonction θ, continue de $[t_0, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $e^{i\theta(t)} = f(t)$.

On a $e^{i\theta_1(b)} = e^{i\theta(b)}$, donc $\exists p \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_1(b) - 2p\pi = \theta(b)$, et sur $[t_0, b] \cap\,]m_1 - \alpha_1, m_1 + \alpha_1[\, \cap \mathrm{I}$, intervalle donc connexe, la fonction continue :

$$t \leadsto \varphi(t) = \theta(t) - \theta_1(t) + 2p\pi,$$

à valeurs dans $\mathbb{Z}$ discret est constante. Elle est nulle en b, elle est donc identiquement nulle.

Mais alors la fonction θ_2 définie par :

$$\theta_2(t) = \theta(t) + 2p\pi \text{ sur } [t_0, b], \text{ et par :}$$

$$\theta_2(t) = \theta_1(t) \text{ sur }]m_1 - \alpha_1, m_1 + \alpha_1[\, \cap \mathrm{I},$$

existe ; elle est continue et on a $e^{i\theta(t)} = f(t)$ sur cette fois $[t_0, m_1 + \alpha_1[\, \cap \mathrm{I}$: si $m_1 < m$ on peut trouver b_1 dans I_1 avec $b_1 > m_1 = \sup \mathrm{I}_1$: c'est absurde.

Finalement I_1 et I ont même borne supérieure, m, et dans le cas où $m \in \mathrm{I}$, l'existence d'un relèvement local en m, montre, par le même raisonnement, que m est dans I_1.

On procède de même avec :

$$\mathrm{I}_2 = \{a \,;\, a \in \mathrm{I}, a < t_0, \exists \theta \in \mathscr{C}^\circ([a, t_0], \mathbb{R}) \text{ telle que } e^{i\theta(t)} = f(t)\},$$

d'où finalement existence de $\theta_1 : [t_0, +\infty[\, \cap \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$

et de $\theta_2 : ,]-\infty, t_0] \cap \mathrm{I} \mapsto \mathbb{R}$,

continues, avec $e^{i\theta_1(t)} = f(t)$ et $e^{i\theta_2(t)} = f(t)$.

Comme il existe p dans $\mathbb{Z}$ tel que $\theta_1(t_0) = \theta_2(t_0) + 2p\pi$, en posant $\theta(t) = \theta_1(t)$ pour $t \geqslant t_0$ et $\theta(t) = \theta_2(t) + 2p\pi$ pour $t \leqslant t_0$, on a trouvé une fonction continue sur I cette fois, (raccord continu en t_0), à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $e^{i\theta(t)} = f(t)$.

7.15. Soit f bijective bicontinue de $[0, 1]$ dans lui-même, avec $f(0) = 0, f(1) = 1$ et, pour tout x de $]0, 1[$, $f(x) \neq x$. On a alors f strictement croissante, et sur $]0, 1[$, la fonction continue $x \rightsquigarrow f(x) - x$ est de signe constant.

Si elle est positive, pour a fixé dans $]0, 1[$, on peut définir, pour tout n de $\mathbb{Z}$, a_n par la relation $a_0 = a$ et $a_{n+1} = f(a_n)$ ou $a_n = f^{-1}(a_{n+1})$, forme équivalente puisque f est un homéomorphisme.

De plus $a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n > 0$ dans ce cas, donc la suite des $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, majorée par 1, elle converge et sa limite vérifie l'égalité $l = f(l)$, (f continue sur [0, 1]), c'est 0 ou 1, avec $l \geqslant a > 0$, il n'y a pas le choix, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 1$.

Mais de même, si n tend vers $-\infty$ en décroissant, les a_n décroissent, et tendent vers 0.

On obtient donc le recouvrement, (en partition en fait) : $[0, 1] = \{0\} \cup (\bigcup\limits_{p \in \mathbb{Z}}]f^p(a), f^{p+1}(a)]) \cup \{1\}$, ou également :

$$[0, 1] = \{0\} \cup (\bigcup_{p \in \mathbb{Z}} [f^p(a), f^{p+1}(a)[) \cup \{1\},$$

peu importe de quel côté on ferme l'intervalle.

Si on avait supposé la fonction $x \rightsquigarrow f(x) - x$ négative sur $]0, 1[$, la suite des $a_n = f^n(a)$ eut été décroissante, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to -\infty} a_n = +\infty$, et un découpage analogue, les bornes $f^p(a)$ et $f^{p+1}(a)$ changeant de place.

Ce qu'on a fait pour f se fait pour g, d'où une partition du même type faisant intervenir les intervalles de bornes consécutives du type $g^p(b)$, avec b fixé dans $]0, 1[$.

Il est temps de passer à l'exercice et de s'apercevoir qu'avoir $f \circ h(x) = h \circ g(x)$ pour tout x de [0, 1], équivaut à avoir :

① $f \circ h \circ g^{-1}(x) = h(x)$, ou $h(g^{-1}(x)) = f^{-1}(h(x))$, puisque f et g sont bijectives, et de se dire que, si les $h(x)$ sont connus pour x *entre* $g^p(b)$ et $g^{p+1}(b)$, comme $g^{-1}(x)$ variera entre $g^{p-1}(b)$ et $g^p(b)$, en posant $g^{-1}(x) = x'$, l'égalité $h(x') = f^{-1}(h(x))$ permet en fait de calculer h entre $g^{p-1}(b)$ et $g^p(b)$, d'où une définition possible de h, à partir de sa restriction entre deux points consécutifs de la suite des $g^p(b)$.

Il ne reste plus qu'une question de mise en forme. Traitons-la en supposant, par exemple, la suite des $f^n(a)$ croissante, celle des $g^n(b)$ décroissante.

On écrit alors :

$$② : [0, 1] = \{0\} \cup \left(\bigcup_{p \in \mathbb{Z}}]f^p(a), f^{p+1}(a)]\right) \cup \{1\}, \text{ avec :}$$

$$\lim_{n \to +\infty} f^n(a) = 1 \text{ et } \lim_{n \to -\infty} f^n(a) = 0 \text{ ; et aussi :}$$

$$③ : [0, 1] = \{0\} \cup \left(\bigcup_{p \in \mathbb{Z}} [g^{p+1}(b), g^p(b)[\right) \cup \{1\}, \text{ avec :}$$

$$\lim_{n \to +\infty} g^n(b) = 0 \text{ et } \lim_{n \to -\infty} g^n(b) = 1.$$

On se donne une application bijective, bi-continue θ, de $[g(b), b[$ sur $]a, f(a)]$, par exemple la restriction à $[g(b), b[$ de la fonction affine joignant les points $(g(b), f(a))$ et (b, a). En particulier, $\lim\limits_{x \to b^-} \theta(x) = a$, pour un tel choix.

Puis, pour tout $x \in]0, 1[$, il existe un seul n de $\mathbb{Z}$ tel que $x \in [g^{n+1}(b), g^n(b)[$, donc $g^{-n}(x)$ sera entre $g(b)$ et b, car g^{-n} est strictement croissante comme g et l'inégalité $g^{n+1}(b) \leqslant x < g^n(b)$ implique :

$$g^{-n}(g^{n+1}(b)) = g(b) \leqslant g^{-n}(x) < g^{-n}(g^n(b)) = b.$$

Mais alors $\theta(g^{-n}(x)) \in]a, f(a)]$, et, f^n étant elle aussi strictement croissante, on aura :

$$f^n \circ \theta \circ g^{-n}(x) \text{ dans }]f^n(a), f^{n+1}(a)].$$

Pour l'instant, en posant, pour $x \in [g^{n+1}(b), g^n(b)[$:

$$h(x) = f^n \circ \theta \circ g^{-n}(x),$$

on envoie bijectivement et continûment $[g^{n+1}(b), g^n(b)[$ sur $]f^n(a), f^{n+1}(a)]$, (et $h|_{[g(b), b[} = \theta$).

Vu les recouvrements ② et ③ de [0, 1], il est facile de voir que l'on envoie bijectivement par h,]0, 1[sur]0, 1[. Il reste à trouver $h(0), h(1)$, et à justifier la continuité de h, ainsi que l'identité $f \circ h = h \circ g$.

Continuité : le problème se pose en chaque $g^n(b)$.

Si x tend vers $g^n(b)$ par valeurs inférieures, il est dans $[g^{n+1}(b), g^n(b)[$, donc $\lim\limits_{x \to g^n(b)^-} g^{-n}(x) = b^-$, vu le choix de θ, on a alors $\lim\limits_{x \to g^n(b)^-} \theta(g^{-n}(x)) = a$, et :

$$\lim_{x \to g^n(b)^-} f^n \circ \theta \circ g^{-n}(x) = f^n(a) = \lim_{x \to g^n(b)^-} h(x).$$

Puis si x tend vers $g^n(b)$ par valeurs supérieures, x varie dans $[g^n(b), g^{n-1}(b)[$, et $h(x)$ se calcule à partir de $f^{n-1} \circ \theta \circ g^{n-1}$. On a :

$\lim\limits_{x \to g^n(b)^+} g^{n-1}(x) = g(b)$, donc $\lim\limits_{x \to g^n(b)^+} \theta \circ g^{n-1}(x) = f(a)$, et :

$\lim\limits_{x \to g^n(b)^+} f^{n-1} \circ \theta \circ g^{n-1}(x) = f^n(a) = \lim\limits_{x \to g^n(b)^+} h(x)$: la fonction h est continue de $]0, 1[$ sur $]0, 1[$.

Il reste à la définir en 0, et en 1. Comme les $(g^n(b))_{n \in \mathbb{Z}}$ convergent vers 0 si n tend vers $+\infty$, et qu'alors $h(g^n(b)) = f^n(a)$ tend vers 1, on va poser $h(0) = 1$, et (en faisant tendre cette fois n vers $-\infty$) $h(1) = 0$: h devient continue sur $[0, 1]$. En effet : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0$, $0 \leqslant 1 - f^n(a) < \varepsilon$, mais alors, pour tout x de $]0, g^{n_0}(b)[$, le n tel que $x \in [g^{n+1}(b), g^n(b)[$ est $\geqslant n_0$, donc $h(x)$ étant dans $]f^n(a), f^{n+1}(a)]$, on aura $h(x) \geqslant f^{n_0}(a) > 1 - \varepsilon$ d'où $h(]0, g^{(n_0)}(b)[) \subset]1 - \varepsilon, 1]$: on a bien $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = 1 = h(0)$, d'où h continue en 0. On justifierai de même la continuité en 1. Comme h est alors bijective continue de $[0, 1]$ sur lui-même, sa réciproque est continue.

Enfin on a $f \circ h = h \circ g$ car, si $x = 0$, $h(0) = 1$ et $f \circ h(0) = f(1) = 1$, alors que $h(g(0)) = h(0) = 1$; d'où $f \circ h(0) = h \circ g(0)$. Il en est de même en 1, et, pour un x quelconque de $]0, 1[$, avec n, (unique) tel que : $x \in [g^{n+1}(b), g^n(b)[$ on a :

$$h(x) = f^n \circ \theta \circ g^{-n}(x),$$

d'où
$$f \circ h(x) = f^{n+1} \circ \theta \circ g^{-n}(x) = f^{n+1} \circ \theta \circ g^{-n-1}(g(x)),$$

et comme $g(x) \in [g^{n+2}(b), g^{n+1}(b)[$, par stricte croissance de g, cette expression est en fait $h(g(x))$, d'où l'égalité voulue $f \circ h(x) = h \circ g(x)$.

7.16. La fonction $x \rightsquigarrow f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{x^3}$ se prolonge en 0 par continuité, (et $f(0) = 1$), et elle est $O\left(\dfrac{1}{x^3}\right)$ en $+\infty$, donc l'intégrale impropre $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\sin^3 x}{x^3}\,dx$ existe.

Une intégration par parties, $\left(u = \sin^3 x,\ dv = \dfrac{dx}{x^3}\right.$ d'où $du = 3\sin^2 x \cos x\,dx$ et $\left.v = -\dfrac{1}{2x^2}\right)$ donne :

$$I = \left[\frac{-\sin^3 x}{2x^2}\right]_0^{+\infty} + \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x\cos x}{x^2}\,dx = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x\cos x\,dx}{x^2}.$$

On peut encore intégrer par parties : $u = \sin^2 x \cos x$ et $dv = \dfrac{dx}{x^2}$ d'où $du = (2\sin x\cos^2 x - \sin^3 x)dx$, $v = -\dfrac{1}{x}$, et :

$$I = \left[-\frac{3\sin^2 x\cos x}{2x}\right]_0^{+\infty} + \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} (2\sin x - 3\sin^3 x)\,\frac{dx}{x}$$

$$= 3\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{9}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x}\,dx.$$

Or, $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$, (voir exercice 9.14), et :

$\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$, donc on a :

$$I = 3J - \frac{9}{2}\int_0^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\,\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{4}\cdot 3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}\right)dx$$

$$= 3J - \frac{27}{8}J + \frac{9}{8}J = \frac{6}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}.$$

7.17. On introduit, pour k variant de 0 à n, les points $x_k = a + k\,\dfrac{b-a}{n}$, d'où $x_0 = a$ et $x_n = b$, et un découpage de l'intégrale en $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t$.

On a donc :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)f(x_k),$$

ce qui fait diantrement penser à du Taylor Lagrange, pour une fonction dont f serait la dérivée. Soit donc F une primitive de f, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=0}^{n-1}(\mathrm{F}(x_{k+1})-\mathrm{F}(x_k)) - \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1}-x_k)f(x_k) \\ &= \mathrm{F}(x_1)-\mathrm{F}(x_0) + \\ &\quad \sum_{k=1}^{n-1}(\mathrm{F}(x_{k+1})-\mathrm{F}(x_k)-(x_{k+1}-x_k)\mathrm{F}'(x_k)) - \frac{(b-a)}{n}f(b), \end{aligned}$$

car n'oublions pas que $x_{k+1}-x_k = \dfrac{b-a}{n}$.

Si on applique la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 2 à F, entre x_{k+1} et x_k, on peut dire qu'il existe ξ_k entre x_k et x_{k+1}, tel que $u_n = \mathrm{F}(x_1)-\mathrm{F}(x_0) + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(x_{k+1}-x_k)^2}{2}f'(\xi_k) - \frac{(b-a)}{n}f(b)$, d'où, avec $n = (b-a)\cdot\dfrac{1}{\frac{b-a}{n}} = (b-a)\cdot\dfrac{1}{x_1-x_0} = \dfrac{b-a}{x_{k+1}-x_k}$, l'expression :

$$nu_n = (b-a)\,\frac{\mathrm{F}(x_1)-\mathrm{F}(x_0)}{x_1-x_0} +$$

$$+\frac{(b-a)}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\,f'(\xi_k) - (b-a)f(b),$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_1-x_0) = 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{F}(x_1)-\mathrm{F}(x_0)}{x_1-x_0} = \mathrm{F}'(x_0) = f(x_0) = f(a),$$ mais aussi

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f'(\xi_k) = \int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b) - f(a),$$ (sommes de Riemann, à un terme manquant près, terme qui tend vers 0).

Finalement,

$$\begin{aligned}\lim_{n \to +\infty} nu_n &= (b-a)f(a) + \frac{(b-a)}{2}(f(b) - f(a)) - (b-a)f(b) \\ &= -\frac{b-a}{2}(f(b) - f(a)).\end{aligned}$$

7.18. L'expression $\dfrac{x-y}{1+xy}$ rappelant un $\dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} = \tan(a-b)$, on se donne les treize réels, indexés en croissant, sous la forme $x_k = \tan \alpha_k$, $(1 \leqslant k \leqslant 13)$, avec les α_k entre $-\pi/2$ et $\pi/2$. On a treize nombres distincts, d'où quatorze intervalles déterminés dans $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, dont douze du type $I_k = [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, pour $1 \leqslant k \leqslant 12$.

Si ces I_k consécutifs étaient tous de longueur $\geqslant \dfrac{\pi}{12}$, leur réunion serait le segment $[\alpha_1, \alpha_{13}]$, de longueur $\geqslant \pi$, avec $[\alpha_1, \alpha_{13}] \subset \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ d'où $\alpha_{13} - \alpha_1 < \pi$: c'est absurde.

Il existe donc un indice $k \leqslant 12$, tel que $0 < \alpha_{k+1} - \alpha_k < \dfrac{\pi}{12}$, (> 0 car les α_k sont distincts, comme les x_k).

La stricte croissance de la fonction tangente donne alors :

$$0 < \tan(\alpha_{k+1} - \alpha_k) = \frac{\tan \alpha_{k+1} - \tan \alpha_k}{1 + \tan \alpha_{k+1} \tan \alpha_k} < \tan \frac{\pi}{12},$$

et comme $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, on a :

$$\tan \frac{\pi}{12} = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2} = 2 - \sqrt{3},$$

et on obtient finalement la double inégalité :

$$0 < \frac{x_{k+1} - x_k}{1 + x_{k+1}x_k} < 2 - \sqrt{3}$$

vérifiée par deux des x_j.

7.19. On a $f(x) = e^{-inx} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{i(n+k)x}$, les exposants $n + k$ variant de 0 à $2n$, en posant $Q(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k t^{n+k}$ on a bien un polynôme Q de degré $2n$ tel que $f(x) = e^{-inx}Q(e^{ix})$.

Supposons alors que Q admette un zéro, z_0, nombre complexe de module 1 et de multiplicité impaire, $2k + 1$.

En posant $z_0 = e^{ix_0}$, au aurait $f(x_0) = e^{-inx_0}Q(z_0) = 0$, mais en fait x_0 est zéro multiple, d'ordre $2k + 1$ aussi, de f.

En effet, par le Théorème de Liebnitz, on a :

$$f(x) = e^{-inx}Q(e^{ix}),$$

$$\text{d'où : } f^{(j)}(x) = \sum_{r=0}^{j} C_j^r(-in)^r e^{-inx} \frac{d^{j-r}}{dx^{j-r}} Q(e^{ix}).$$

$$\text{Or } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Q(e^{ix})) = ie^{ix}Q'(e^{ix})\,;$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(Q(e^{ix})) = (ie^{ix})^2Q''(e^{ix}) + \text{proportionnel à } Q'(e^{ix})$$

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}(Q(e^{ix})) = (ie^{ix})^3Q^{(3)}(e^{ix}) + \text{« coplanaire » à } (Q''(e^{ix}), Q'(e^{ix}))$$

et ainsi de suite, ce qui prouve que si z_0 est zéro d'ordre $2k + 1$ de Q, toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $2k$ de la fonction $x \rightsquigarrow Q(e^{ix})$ seront nulles, ainsi que les dérivées de f jusqu'à l'ordre $2k$.

Mais alors, un développement de Taylor Young de f, fonction de valeurs réelles, à variable réelle, en x_0 annulant $f, f', f'', \ldots, f^{(2k)}$, conduit à :

$$f(x) = \frac{(x - x_0)^{2k+1}}{(2k+1)!}\left(f^{(2k+1)}(x_0) + o(1)\right),$$

et ceci, pour $f^{(2k+1)}(x_0) \neq 0$, conduirait à une fonction f s'annulant en changeant de signe en x_0, ce qui est du plus fâcheux effet, pour une fonction à valeurs positives.

C'est que $f^{(2k+1)}(x_0) = 0$, ce qui, Liebnitz oblige, conduit à $\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}} Q(e^{ix_0}) = 0$, mais ce qui à son tour conduit à $Q^{(2k+1)}(z_0) = 0$, avec $z_0 = e^{ix_0}$ et cela est exclu si z_0 est d'ordre impair, $2k+1$. Cette dernière hypothèse est donc fausse, et tout zéro de Q, de module 1, est donc zéro d'ordre pair.

7.20. *A priori*, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^a = e^{a \ln x}$, est supposée exister, ainsi que $\lim\limits_{x \to 0^+} x^b$, ce qui suppose $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$.

En $x = 1$, on doit avoir $2 \leqslant (1+1)^c$, soit $c \geqslant 1$.

Peut-on avoir $a = 0$? Dans ce cas $e^{0 \ln x} = 1$, (avec par convention aussi $0^0 = 1$ en passant à la limite : ce n'est pas très satisfaisant). Comme les nombres sont distincts, on a $b > 0$, et si x tend vers 0^+, $\lim\limits_{x \to 0^+} (1+x^b)^c = 1$, n'est pas supérieur à $1 + 0^0 = 2$: cela tombe bien. On doit avoir $a > 0$.

Si $b > 0$, en 0, on a $f(x) = (1+x^b)^c - (1+x^a)$ qui se développe en $cx^b - x^a + o(x^b)$.

Si $a < b$, on a $f(x) = -x^a(1 - cx^{b-a} + o(x^{b-a}))$, avec $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{(b-a)\ln x} = 0$, donc $f(x)$ est localement strictement négative : c'est exclu. On doit avoir $b \leqslant a$.

Si $b = 0$, on doit avoir, (avec $0^0 = 1$ par convention !) $1 + x^a \leqslant 2^c$, avec x^a variant de 0 à 1 et $c \geqslant 1$, c'est vérifié.

La condition cherchée est donc $c \geqslant 1$ et $a > b \geqslant 0$, ($a > b$ car on suppose les nombres distincts), avec, en toute rigueur un problème en 0 pour définir 0^0). J'aimerai mieux ne garder que $c \geqslant 1$ et $a > b$ comme condition nécessaire.

Comme pour $x \in [0,1]$, avec $a > b$ on obtient $x^a \leqslant x^b$, on a $1 + x^a \leqslant 1 + x^b \leqslant (1 + x^b)^c$ puisque $1 + x^b \geqslant 1$ et $c \geqslant 1$: la condition est suffisante.

7.21. Que voilà un exercice facile ! Si t tend vers 0, $\dfrac{\sin t}{t^2}$ est équivalent à $\dfrac{1}{t}$, dont l'intégrale, entre x et $3x$, vaut $\left[\ln|t|\right]_x^{3x} = \ln 3$, donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ln 3$.

Si vous ne savez pas que les équivalents s'intègrent, vous pouvez écrire : $\dfrac{\sin t}{t^2} = \dfrac{1}{t^2}\left(t - \dfrac{t^3}{6} + o(t^4)\right) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{6} + o(t^2)$ ou encore $\dfrac{\sin t}{t^2} = \dfrac{1}{t} - \dfrac{t}{6}\,(1 + \varepsilon(t))$, avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

On aura $f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \left(\frac{1}{t} - \frac{t}{6}\,(1 + \varepsilon(t))\right)\mathrm{d}t = \ln 3 - \frac{1}{6}\int_x^{3x} t(1 + \varepsilon(t))\,\mathrm{d}t$ et la fonction $|1 + \varepsilon(t)|$ étant inférieure à 2 par exemple pour $|t| \leqslant \alpha$, (donc pour $|x| \leqslant \dfrac{\alpha}{3}$ et t entre x et $3x$), on aura $\left|\displaystyle\int_x^{3x} t(1 + \varepsilon(t))\,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\left(\dfrac{9x^2 - x^2}{2}\right)$: est-ce que cela ne tend pas vers 0 ?

7.22. On doit comparer une somme et une intégrale : le plus simple est de couper l'intégrale en morceaux, et d'évaluer $\mathrm{I}_k = \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$, que l'on intègre par parties en faisant intervenir le milieu, $\dfrac{k + k + 1}{2}$.

On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}_k &= \left[\left(t - \left(k + \frac{1}{2}\right)\right) f(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} \left(t - k - \frac{1}{2}\right) f'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\,(f(k+1) + f(k)) - \mathrm{J}_k.
\end{aligned}$$

Comme f est convexe, f' est croissante, donc sur $\left[k, k+\frac{1}{2}\right]$, on a :

$t-k-\frac{1}{2} \leqslant 0$ et $f'(k) \leqslant f'(t) \leqslant f'(k+1)$, d'où :

$$f'(k+1) \int_k^{k+\frac{1}{2}} \left(t-k-\frac{1}{2}\right) \mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+\frac{1}{2}} \left(t-k-\frac{1}{2}\right) f'(t) \mathrm{d}t$$

$$\leqslant f'(k) \int_k^{k+\frac{1}{2}} \left(t-k-\frac{1}{2}\right) \mathrm{d}t,$$

soit : $-\dfrac{f'(k+1)}{8} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+\frac{1}{2}} \left(t-k-\frac{1}{2}\right) f'(t) \mathrm{d}t \leqslant -\dfrac{f'(k)}{8}$.

Sur l'autre moitié, on a $t-k-\frac{1}{2} \geqslant 0$, d'où cette fois l'encadrement :

$$\frac{1}{8} f'(k) \leqslant \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} \left(t-k-\frac{1}{2}\right) f'(t) \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{8} f'(k+1),$$

d'où en ajoutant :

$$\frac{1}{8}\,(f'(k)-f'(k+1)) \leqslant \int_k^{k+1} \left(t-k-\frac{1}{2}\right) f'(t) \leqslant \frac{1}{8}\,(f'(k+1)-f'(k)).$$

Avec $u_n = \frac{1}{2} f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) + \frac{1}{2} f(n) - \int_1^n f$

$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\,(f(k)+f(k+1)) - \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{I}_k$, on a :

$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}\,(f(k)+f(k+1)) - \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\,(f(k)+f(k+1)) - \mathrm{J}_k\right)$

$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{J}_k$, d'où l'encadrement de u_n :

$\frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n-1} (f'(k)-f'(k+1)) \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{n-1} (f'(k+1)-f'(k))$, ce qui donne déjà $u_n \leqslant \frac{1}{8}\,(f'(n)-f'(1))$.

L'autre inégalité vient de l'inégalité :

$$f(t) \leqslant (f(k+1)-f(k))t + (k+1)f(k) - kf(k+1),$$

qui traduit la place du graphe de f, convexe, par rapport à sa corde, entre les points d'abscisse k et $k+1$.

En intégrant entre k et $k+1$, on obtient :

$$\mathrm{I}_k = \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{f(k+1)-f(k)}{2}\left((k+1)^2-k^2\right)+(k+1)f(k)-kf(k+1)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\left(f(k+1)+f(k)\right), \text{ et en sommant, on a :}$$

$$\int_1^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant \frac{f(1)}{2}+f(2)+\ldots+f(n-1)+\frac{f(n)}{2}, \text{ d'où } u_n \geqslant 0.$$

7.23. On pose $g(x) = \int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t$, on a une fonction de classe C^∞, qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$, de dérivée $g'(x) = e^{x^2}$.

On la divise par $h(x) = e^{x^2}$, elle aussi fonction de classe C^∞, de dérivée $h'(x) = 2xe^{x^2}$.

La règle de l'Hospital généralisée s'applique lorsque, ayant g et h définies de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, dérivables, avec $h'(x) > 0$, et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$, alors si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g'(x)}{h'(x)} = l$, on a aussi $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{h(x)} = l$.

Ici, $\frac{g'(x)}{h'(x)} = \frac{1}{2x}$ tend vers 0, donc $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ tend vers 0, ce qui ne donne pas l'équivalent, mais $2xf(x) = \frac{2xg(x)}{h(x)}$ est telle que

$$\begin{aligned}(2xg(x))' &= 2g(x)+2xg'(x)\\ &= 2g(x)+2xe^{x^2},\end{aligned}$$

d'où $\frac{(2xg(x))'}{h'(x)} = \frac{g(x)}{xe^{x^2}}+1 = \frac{1}{x}f(x)+1,$

avec $f(x)$ qui tend vers 0 en $+\infty$. Ce rapport tend vers 1, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} 2x \cdot \frac{g(x)}{h(x)} = 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} 2xf(x)$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2x}$.

7.24. Si on multiplie l'inégalité vérifiée, par $b(t) \geqslant 0$, on a :

$$u(t)b(t) \leqslant a(t)b(t)+q(t)b(t)\int_\alpha^t u(s)b(s)\mathrm{d}s,$$

inégalité vérifiée pour tout t de I. Posons $F(t) = \int_\alpha^t u(s)b(s)\mathrm{d}s$, F est dérivable de dérivée $F'(t) = u(t)b(t)$, et on a donc :

$F'(t) - q(t)b(t)F(t) \leqslant a(t)b(t)$, soit encore :

$$\left(F(t)\exp\left(-\int_\alpha^t q(\sigma)b(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\right)'$$
$$= [F'(t) - q(t)b(t)F(t)]\exp\left(-\int_\alpha^t q(\sigma)b(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)$$
$$\leqslant a(t)b(t)\exp\left(-\int_\alpha^t q(\sigma)b(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right).$$

On intègre cette inégalité entre α et t, avec $t \geqslant \alpha$, en remarquant que $F(\alpha) = 0$, d'où :

$$F(t)\exp\left(-\int_\alpha^t q(\sigma)b(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right) \leqslant \int_\alpha^t a(s)b(s)\exp\left(-\int_\alpha^s q(\sigma)b(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s.$$

L'inégalité de départ s'écrivant $u(t) \leqslant a(t) + q(t)F(t)$, en utilisant le majorant :

$$F(t) \leqslant \underbrace{\exp\left(\int_\alpha^t q(\sigma)b(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)} \cdot \int_\alpha^t a(s)b(s)\exp\left(-\int_\alpha^s q(\sigma)b(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s$$

constante en s, qui rentre dans l'intégrale, d'où :

$$F(t) \leqslant \int_\alpha^t a(s)b(s)\exp\left(\int_\alpha^t q(\sigma)b(\sigma)\mathrm{d}\sigma - \int_\alpha^s q(\sigma)b(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \int_\alpha^t a(s)b(s)\exp\left(\int_s^t q(\sigma)b(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s,$$

on obtient bien :

$$u(t) \leqslant a(t) + q(t)\int_\alpha^t a(s)b(s)\exp\left(\int_s^t q(\sigma)b(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}s.$$

7.25. Si $f(0) = 0$ ou si $f(1) = 1$, on a un point fixe de f, on suppose donc $m = f(0)$ et $M = f(1)$ tels que $0 < m \leqslant M < 1$. Soit $E = \{x \in [0,1]\ ;\ \forall t \in [0, x[, f(t) > t\}$. Si $x \in]0, m]$, si $t \in [0, x[$, $f(t) \geqslant f(0) = m > t$, donc $]0, m] \subset E \subset [0, 1]$: l'ensemble E non vide et majoré admet une borne supérieure x_0 et on va justifier que $f(x_0) = x_0$.

Si $f(x_0) < x_0$, f étant croissante, pour t dans $[f(x_0), x_0]$, on aura $f(t) \leqslant f(x_0) \leqslant t$, donc pour $x \in \,]f(x_0), x_0[$ on trouvera des $t \in \,]0, x[$, avec $f(t) \leqslant t$, d'où $x \notin \mathrm{E}$. Mais $]f(x_0), x_0[\cap \mathrm{E} = \emptyset$ et $x_0 = \sup(\mathrm{E})$ sont deux conditions incompatibles : c'est que $f(x_0) \geqslant x_0$.

Si $f(x_0) > x_0$, pour $t \in [x_0, f(x_0)[$, on a :

$t < f(x_0)$ et aussi $x_0 \leqslant t$ d'où $f(x_0) \leqslant f(t)$, d'où $t < f(t)$. Or si $t \in [0, x_0[$, il existe x de E tel que $t < x \leqslant x_0$, (x_0 borne supérieure de E), mais alors $t < f(t)$ par définition de E.

Finalement, pour tout $t < f(x_0)$, on a $t < f(t)$, d'où $f(x_0)$ dans E avec $f(x_0) > x_0$, x_0 borne supérieure de E : c'est exclu, d'où $f(x_0) \leqslant x_0$.

Il me semble qu'il ne reste que $f(x_0) = x_0$ comme possibilité.

7.26. Pour un x fixé, $b^2 - 2b\cos x + 1$ est un trinôme en b de discriminant réduit $\delta' = \cos^2 x - 1 = -\sin^2 x < 0$ sauf si $x = 0$ ou π, et alors $b^2 - 2b\cos x + 1 > 0$. Pour $x = 0$, le trinôme vaut $(b-1)^2 > 0$ car $b \in \,]0, 1[$. Si $x = \pi$, il vaut $(b+1)^2$. Dans tous les cas on a $b^2 - 2b\cos x + 1 > 0$ sur $[0, \pi]$, donc I_n est une intégrale définie.

Par linéarité de l'intégrale, $\mathrm{I}_{n+2} + \mathrm{I}_n - \left(b + \frac{1}{b}\right)\mathrm{I}_{n+1}$ est l'intégrale, sur $[0, \pi]$ de la fonction u_n définie par :

$$u_n(x) = \frac{1}{(b^2 + 1 - 2b\cos x)b}\,[b(\cos(n+2)x + \cos nx) - (b^2+1)\cos(n+1)x],$$

avec $\cos(n+2)x + \cos nx = 2\cos(n+1)x\,\cos x$, d'où :

$$u_n(x) = \frac{1}{(b^2 + 1 - 2b\cos x)b} \cdot \cos((n+1)x)\,(2b\cos x - b^2 - 1)$$

$$= -\frac{1}{b}\cos(n+1)x,$$ fonction d'intégrale nulle entre 0 et π,

d'où $\mathrm{I}_{n+2} - \left(b + \frac{1}{b}\right)\mathrm{I}_{n+1} + \mathrm{I}_n = 0$.

b) Les I_n vérifient une relation de récurrence linéaire, qui conduit à l'équation caractéristique :

$$r^2 - \left(b + \frac{1}{b}\right) r + 1 = 0,$$

de discriminant $\left(b + \frac{1}{b}\right)^2 - 4 = \left(b - \frac{1}{b}\right)^2$, de zéros b et $\frac{1}{b}$ distincts puisque $b \in]0, 1[$.

On a donc $I_n = \alpha b^n + \beta b^{-n}$, α et β étant calculés à partir de I_0 et I_1.

On a : $I_0 = \int_0^{\pi} \frac{dx}{b^2 + 1 - 2b\cos x}$, avec $t = \tan\frac{x}{2}$ d'où $2dt = (1 + t^2)dx$ on obtient :

$$I_0 = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)(b^2 + 1) - 2b(1 - t^2)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2(b + 1)^2 + (b - 1)^2}$$

$$= \frac{2}{(b + 1)^2} \cdot \frac{b + 1}{b - 1}\left[\operatorname{Arctan} \frac{b + 1}{b - 1}\, t\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{b^2 - 1}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{1 - b^2}.$$

Puis

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\cos x dx}{b^2 + 1 - 2b\cos x} = \frac{1}{2b}\int_0^{\pi} \frac{2b\cos x - (b^2 + 1) + (b^2 + 1)}{b^2 + 1 - 2b\cos x}\, dx,$$ (l'art de faire apparaître ce que l'on connaît, quel délice),

$$= -\frac{\pi}{2b} + \frac{(b^2 + 1)}{2b} I_0 = \frac{\pi}{2b}\left(\frac{b^2 + 1}{1 - b^2} - 1\right) = \frac{\pi b}{1 - b^2}.$$

On doit résoudre le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{1 - b^2} \\[2ex] \alpha b + \beta b^{-1} = \dfrac{\pi b}{1 - b^2}, \end{cases} \quad \begin{array}{|c|c} -b^{-1} & -b \\[4ex] 1 & 1, \end{array}$$

d'où $\alpha\left(b - \frac{1}{b}\right) = \frac{\pi}{1 - b^2}\left(-\frac{1}{b} + b\right)$ soit $\alpha = \frac{\pi}{1 - b^2}$ et $\beta = 0$, donc $I_n = \frac{\pi b^n}{1 - b^2}$.

7.27. La condition $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ fait penser à de la convexité, (barycentre à coefficients positifs...), et pour passer d'un produit à une somme, il y a du logarithme.

La fonction exponentielle, (de variable réelle) est convexe, donc : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2$ avec $\alpha+\beta = 1$ on a :

$$e^{\alpha x+\beta y} \leqslant \alpha e^x + \beta e^y,$$

d'où l'on déduit, pour $u > 0, v > 0, p$ et $q > 0$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$, en prenant $u = e^{x/p}$ et $v = e^{y/q}$, c'est-à-dire $x = p\ln u$ et $y = q\ln v$, l'inégalité :

$$uv \leqslant \frac{1}{p}\,u^p + \frac{1}{q}\,v^q.$$

Soit alors $\mathrm{I} = \left(\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}$ et $\mathrm{J} = \left(\int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}$.

Si I, ou J, est nul, comme f est continue ainsi que g, c'est que f, (ou g), est nulle, donc le produit fg est nul et l'inégalité est vérifiée.

On suppose I et J strictement positifs, on pose $u = \frac{|f(t)|}{\mathrm{I}}$, $v = \frac{|g(t)|}{\mathrm{J}}$, on a donc l'inégalité :

$$0 \leqslant \frac{|f(t)g(t)|}{\mathrm{IJ}} \leqslant \frac{1}{p\mathrm{I}^p}\,|f(t)|^p + \frac{1}{q\mathrm{J}^q}\,|g(t)|^q,$$

que l'on s'empresse d'intégrer, ce qui conduit à :

$$0 \leqslant \frac{1}{\mathrm{IJ}}\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \frac{1}{\mathrm{IJ}}\int_a^b |fg| \leqslant \frac{1}{p\mathrm{I}^p}\int_a^b |f(t)|^p\mathrm{d}t + \frac{1}{q\mathrm{J}^q}\int_a^b |g(t)|^q\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{\mathrm{I}^p}{p\mathrm{I}^p} + \frac{\mathrm{J}^q}{q\mathrm{J}^q} = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1,$$

d'où l'inégalité cherchée :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \mathrm{IJ} = \left(\int_a^b |f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1/q}.$$

7.28. Il s'agit d'une intégrale impropre *a priori*. En posant $t = \tan x$ d'où $(1+t^2)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, on obtient : $\mathrm{I}(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^\alpha)}$, ce qui est une intégrale convergente quelque soit α en fait.

Avec $t = \frac{1}{s}$, donc $\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}s}{s^2}$, on a aussi :

$$\mathrm{I}(\alpha) = \int_{+\infty}^{0} -\frac{\mathrm{d}s}{s^2\left(1+\frac{1}{s^2}\right)\left(1+\frac{1}{s^\alpha}\right)} = \int_0^{+\infty} \frac{s^\alpha}{(1+s^2)(1+s^\alpha)},$$

d'où en sommant :

$$2\mathrm{I}(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{(1+s^\alpha)\mathrm{d}s}{(1+s^2)(1+s^\alpha)} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}s}{1+s^2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{I}(\alpha) = \frac{\pi}{4} :$$

valeur indépendante de α.

7.29. Avec $x = y = 0$, on obtient $(f(0))^2 = (f(0))^4$, d'où $f(0) \in \{0, 1, -1\}$.

On remarque que si f est solution, $-f$ est aussi solution, donc on se borne à examiner le cas de $f(0) = 0$ et $f(0) = 1$.

Si f n'est pas identiquement nulle, avec a tel que $f(a) \neq 0$, en prenant $x = a$ et $y = 0$, on obtient :

$$(f(a))^2 = (f(a))^2(f(0))^2, \text{ d'où } (f(0))^2 = 1.$$

On a donc, soit $f(0) = 0$ et alors f est nulle ; soit $f(0) = 1$ si f n'est pas nulle. On suppose désormais $f(0) = 1$.

Avec $y = x$, on obtient $f(2x)f(0) = (f(x))^4 = f(2x)$; ce qui donne aussi l'égalité : $f(x) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4$.

Mais alors, si pour x non nul on a $f(x) = 0$, on aura aussi $f\left(\frac{x}{2}\right) = 0$, d'où par récurrence $f\left(\frac{x}{2^n}\right) = 0$, et par continuité de f, $f(0) = 0$, exclu car $f(0) = 1$.

Donc une telle solution ne s'annule pas. En repartant alors de $f(2x) = (f(x))^4$, on obtient, avec $2x$ et x :

$$f(3x)f(x) = (f(2x))^2(f(x))^2 = (f(x))^8(f(x))^2 \text{ d'où}$$

$$f(3x) = (f(x))^9, \text{ (on peut simplifier par } f(x) \neq 0\text{)}.$$

Si on suppose $f(kx) = (f(x))^{k^2}$ vrai pour tout $k \leqslant n$, (vrai si $n = 2$), avec nx et x on aura :

$$f((n+1)x)f((n-1)x) = (f(nx))^2(f(x))^2, \text{ d'où :}$$

$$\begin{aligned} f((n+1)x) &= (f(x))^{2n^2+2-(n-1)^2} \\ &= (f(x))^{n^2+2n+1} = (f(x))^{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

Il est temps de poser $f(1) = a$, et de dire qu'alors, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a, (par récurrence), $f(n) = a^{(n^2)}$.

Avec $x = 0, y = n$, et $f(0) = 1$, on a :

$f(n)f(-n) = (f(n))^2$, d'où $f(-n) = f(n) = a^{(-n)^2}$, (toujours $f(n) \neq 0$: on simplifie), donc $f(n) = a^{(n^2)}$ est vrai sur $\mathbb{Z}$.

Repartant de $f(nx) = (f(x))^{n^2}$, pour $x = \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*$, ceci donne :

$f(1) = a = \left(f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)^{n^2}$, donc $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = a^{1/n^2}$, et avec $r = \dfrac{p}{n}$ nombre rationnel, d'abord positif, on aura :

$$f\left(p \cdot \frac{1}{q}\right) = \left(f\left(\frac{1}{q}\right)\right)^{p^2} = \left(a^{\frac{1}{q^2}}\right)^{p^2} = a^{\left(\frac{p^2}{q^2}\right)}.$$

Comme pour r rationnel positif, $x = 0$ et $y = r$ donne encore $f(-r) = f(r)$, on obtient finalement $f(r) = a^{(r^2)}$ pour tout rationnel.

Enfin tout réel x étant limite d'une suite de rationnels, par continuité de f et de $x \rightsquigarrow a^{(x^2)} = e^{x^2 \ln a}$, on aura $f(x) = a^{(x^2)}$ sur $\mathbb{R}$.

Les solutions sont donc la fonction nulle et les fonctions du type $x \rightsquigarrow a^{(x^2)}$ ou $x \rightsquigarrow -a^{(x^2)}$ avec $a > 0$.

7.30. Si f est non bornée, chaque n de $\mathbb{N}$ n'étant pas majorant de $|f|$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathrm{I}_n = \{x \in \mathbb{R}^+ \,;\, |f(x)| \geqslant n\}, \text{ est non vide.}$$

Comme I_n, non vide, est minoré par 0, sa borne inférieure x_n existe, et $|f(x_n)| \geqslant n$, car I_n est fermé comme image réciproque de $[n, +\infty[$ par $|f|$, fonction continue, donc $x_n \in \mathrm{I}_n$.

De plus, pour n vérifiant $n > |f(0)|$, on aura $x_n > 0$, (car $|f(x_n)| \geqslant n$), et pour tout x de $[0, x_n[$ on aura $|f(x)| < n$, par définition de x_n, borne inférieure de I_n : par continuité de $|f|$ à gauche en x_n, on aura $|f(x_n)| \leqslant n$, donc $|f(x_n)| = n$.

Mais alors $\mathrm{M}(x_n) = n = |f(x_n)|$, et l'inégalité vérifiée s'écrit :

$$n = \mathrm{M}(x_n) \leqslant \mathrm{A} + \frac{\mathrm{M}(x_n)}{2} = \mathrm{A} + \frac{n}{2},$$

soit encore :

$$n \leqslant 2\mathrm{A},$$

et ceci pour tout n : c'est absurde.

7.31. Comme $a > 1$ et $b > 1$, pour tout x on a :

$$\frac{a - \cos x}{b - \cos x} > 0,$$

donc la fonction à intégrer est définie continue sur $[0, \pi]$: l'intégrale existe.

On introduit :

$$\mathrm{I}(a) = \int_0^{\pi} \ln(a - \cos x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(a, x)\mathrm{d}x.$$

La fonction f est continue par rapport au couple (a, x) et la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial a}$ est continue aussi sur $]1, +\infty[\times[0, \pi]$: la fonction I est donc dérivable et :

$$\mathrm{I}'(a) = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a - \cos x}.$$

En posant $t = \tan\dfrac{x}{2}$, on a $\dfrac{2\mathrm{d}t}{1 + t^2} = \mathrm{d}x$, d'où :

$$\mathrm{I}'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1 + t^2}{a(1 + t^2) - (1 - t^2)} \frac{2\mathrm{d}t}{1 + t^2} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(a + 1)t^2 + a - 1}$$

$$= \frac{2}{a + 1}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \dfrac{a - 1}{a + 1}} = \frac{2}{a + 1}\sqrt{\frac{a + 1}{a - 1}}\left[\operatorname{Arctan}\left(t\sqrt{\frac{a + 1}{a - 1}}\right)\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Comme l'intégrale cherchée est $I = I(a) - I(b)$, on peut se contenter d'une primitive de la fonction $a \rightsquigarrow I'(a)$, sans préciser la constante d'intégration. On a :

$$I(a) = \int \frac{\pi da}{\sqrt{(a-1)(a+1)}}.$$

On pose $t = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$, d'où $a = \frac{1+t^2}{1-t^2} = -1 + \frac{2}{1-t^2}$, donc $da = \frac{4tdt}{(1-t^2)^2}$; puis $(a-1)(a+1) = \frac{2t^2}{(1-t^2)} \cdot \frac{2}{(1-t^2)}$, et comme $t \in]0, 1[$, il vient $\sqrt{(a-1)(a+1)} = \frac{2t}{1-t^2}$, d'où :

$$I(a) = \int \frac{\pi(1-t^2)}{2t} \cdot \frac{4tdt}{(1-t^2)^2} = 2\pi \int \frac{dt}{1-t^2} = 2\pi \operatorname{argth} t + C,$$

d'où, en remplaçant t par sa valeur :

$I(a) = 2\pi \operatorname{argth} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} + C$, et finalement, l'intégrale cherchée :

$$I = \int_0^\pi \ln \frac{a - \cos x}{b - \cos x} dx = 2\pi \left(\operatorname{argth} \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} - \operatorname{argth} \sqrt{\frac{b-1}{b+1}} \right).$$

7.32. Si on pose $\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$ et :

$$\psi(P, Q) = -i \int_0^\pi P(e^{i\theta})Q(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta,$$

on définit deux applications de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ respectivement, qui dépendent linéairement, (et symétriquement) de P et Q.

Si elles coïncident sur les monômes, ($P(x) = x^k$ et $Q(x) = x^l$), elles coïncideront pour tout P et Q de $\mathbb{R}[X]$, et avec $P = Q$, on aura l'égalité voulue.

On a :

$$I = \int_{-1}^{1} x^{k+l}dx = \frac{1}{(k+l+1)} (1 - (-1)^{k+l+1}), \text{ et :}$$

$$J = -i \int_0^\pi e^{i(k+l)\theta} e^{i\theta} d\theta = -i \int_0^\pi e^{i(k+l+1)\theta} d\theta$$

$$= \frac{-i}{i(k+l+1)} [e^{i(k+l+1)\theta}]_0^\pi = \frac{-1}{k+l+1} ((-1)^{k+l+1} - 1) :$$

il y a bien égalité.

b) On a alors :

$$\sum_{0 \leqslant k, l \leqslant n} \frac{a_k a_l}{k+l+1} = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{n} a_l x^l\right) dx = \int_0^1 P^2(x) dx$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1} P^2(x) dx = \left| -i \int_0^{\pi} (P(e^{i\theta}))^2 e^{i\theta} d\theta \right|$$

$$\leqslant \int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Or P étant à coefficients réels, on a $|P(e^{i\theta})|^2 = P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta})$, expression stable par le changement de θ en $-\theta$, donc :

$$\int_0^{\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{\pi} P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta}) d\theta = -\int_0^{-\pi} P(e^{-i\theta})P(e^{i\theta}) d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{0} P(e^{i\theta})P(e^{-i\theta}) d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{0 \leqslant k, l \leqslant n} a_k a_l e^{i(k-l)\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{0 \leqslant k, l \leqslant n} a_k a_l \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)\theta} d\theta,$$

et ces intégrales sont nulles pour $k \neq l$, valent 2π si $k = l$. On obtient finalement l'inégalité voulue :

$$\sum_{0 \leqslant k, l \leqslant n} \frac{a_k a_l}{k+l+1} \leqslant \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \sum_{k=0}^{n} (a_k)^2.$$

7.33. 1°) Par la formule de Liebnitz, pour k entier non nul, on a, pour un produit uv de deux fonctions k fois dérivables :

$$(uv)^{(k)} = \sum_{r=0}^{k} C_k^r u^{(r)} v^{(k-r)}.$$

On applique ceci pour $u = X^n$ et $v = (p - qX)^n$.

Calcul en 0.

Si $k < n$, 0 étant zéro d'ordre n de P_n, on a $P_n^{(k)}(0) = 0$.

Si $k > 2n$, comme P_n est un polynôme de degré $2n$, la dérivée $k^{\text{ième}}$ est identiquement nulle.

Soit alors k avec $n \leqslant k \leqslant 2n$.

Avec $u(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n$, la seule dérivée d'ordre r de u, non nulle en 0, est celle d'ordre n, et $u^{(n)}(\mathrm{X}) = n!$ donc $u^{(n)}(0) = n!$

Il reste donc, v étant dérivée $k-n$ fois, donc devenant de degré $2n-k$:

$$\mathrm{P}_n^{(k)}(0) = \frac{1}{n!}\,\mathrm{C}_k^n n!(-q)^{k-n} n(n-1)\ldots(2n-k+1)(p-q0)^{2n-k},$$

ce qui est bien un entier.

Calcul en $\dfrac{p}{q}$.

Comme $\dfrac{p}{q}$ est aussi zéro d'ordre n de P_n, pour $k<n$, on a $\mathrm{P}_n^{(k)}\left(\dfrac{p}{q}\right) = 0$, ainsi que pour $k>2n$, $\mathrm{P}_n^{(k)}$ étant alors le polynôme nul.

Pour $n \leqslant k \leqslant 2n$, avec $v(\mathrm{X}) = (p-q\mathrm{X})^n$, dans la formule de Leibnitz, seule la dérivée d'ordre n de v est non nulle en $\dfrac{p}{q}$, (elle vaut alors $n!(-q)^n$), d'où :

$$\mathrm{P}_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{n!}\,\mathrm{C}_k^n n!(-q)^n n(n-1)\ldots(2n-k+1)\left(\frac{p}{q}\right)^{2n-k},$$

puisque u est alors dérivée $k-n$ fois, ce qui donne un polynôme de degré $n-(k-n) = 2n-k$.

On a bien $\mathrm{P}_n^{(k)}\left(\dfrac{p}{q}\right)$ entier, puisque $2n-k \leqslant n$: le q^{2n-k} disparaît.

2°) Sur $\left[0,\dfrac{p}{q}\right]$, compact, $\|f\|_\infty$ existe, (f continue), de plus $|x^n| \leqslant \left(\dfrac{p}{q}\right)^n$, et comme $p-qx$ décroît de p à 0, $|p-qx|^n \leqslant p^n$, d'où :

$$\left|\int_0^{p/q} \mathrm{P}_n(x) f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \|f\|_\infty \left(\frac{p}{q}\right)\cdot\frac{1}{n!}\left(\frac{p^2}{q}\right)^n,$$

le majorant est le terme général de la série de somme $\|f\|_\infty \left(\dfrac{p}{q}\right) e^{\frac{p^2}{q}}$, il tend vers 0.

3°) Supposons π rationnel, écrit $\frac{p}{q}$. On considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{p/q} \frac{x^n(p-qx)^n}{n!} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{p/q} P_n(x)f(x)\mathrm{d}x,$$

et on va choisir f, de façon à faire des intégrations par parties avec les primitives de f prenant en 0 et $\pi = \frac{p}{q}$ des valeurs entières : $f(x) = \sin x$ convient très bien.

On a :

$$I_n = [-P_n(x)\cos x]_0^{\pi = \frac{p}{q}} + \int_0^{p/q = \pi} P'_n \cos x\mathrm{d}x = \text{entier} + \int_0^{p/q} P'_n(x)\cos x\mathrm{d}x$$

On poursuit les intégrations par parties, et, à chaque étape, $P_n^{(k)}(0)$, $P_n^{(k)}\left(\frac{p}{q}\right)$, $\cos 0$, $\cos \frac{p}{q}$, $\sin 0$, $\sin \frac{p}{q}$ sont des entiers.

Après $2n$ intégrations par parties, on obtient :

$$I_n = \text{un entier} + \int_0^{p/q} P_n^{(2n)}(x)\sin\left(x + 2n\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x,$$

or $P_n^{(2n)}(x) = \text{constante} = P_n^{(2n)}(0) \in \mathbb{N}$, et :

$$\int_0^{\pi = \frac{p}{q}} \sin\left(x + 2n\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}x = (-1)^n \int_0^{\pi} \sin x\mathrm{d}x = 2(-1)^n,$$

finalement $I_n \in \mathbb{N}$.

De plus, sur $\left]0, \pi = \frac{p}{q}\right[$, la fonction intégrée, $P_n(x)\sin x$, est continue strictement positive, donc $I_n > 0$: on a $I_n \geqslant 1$. (Le même calcul avec $\cos x$ donnerait J_n entier, mais on pourrait avoir J_n nul.)

Mais le 2° donne $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$, avec $I_n \geqslant 1$: c'est absurde. Donc π est bien irrationnel.

Chapitre VIII

Suites et séries numériques

Idées générales

Le corps $\mathbb{R}$ étant le seul corps ordonné valué complet, la relation d'ordre joue un rôle très important dans l'étude des suites et des séries de terme général u_n réel.

C'est pourquoi, pour les suites, une bonne démarche consistera à examiner une éventuelle monotonie, que la suite soit du type « $u_n = f(n)$ », ou « $u_{n+1} = f(u_n)$ », ou définie par une intégrale, (ne pas oublier l'aspect forme linéaire positive de l'intégrale agissant sur les fonctions de variable réelle, à valeurs réelles).

L'étude des suites en « $u_{n+1} = f(u_n)$ » peut se faire par récurrence, ou par étude des variations de la fonction $x \rightsquigarrow x - f(x)$.

Ne pas oublier quand même le **Théorème du point fixe**, ni l'éventualité de points répulsifs.

La **formule de la moyenne**, cela existe, (8.2).

Taylor Lagrange ou **Young** aussi, (8.1).

Ne pas oublier le recours à la série de terme général $w_n = u_{n+1} - u_n$.

Quant aux séries numériques, ou de terme général dans un Banach E, on commencera par une étude de la convergence absolue éventuelle, (sur E, e.v.n. non complet cette démarche est à proscrire car la convergence absolue n'implique pas la convergence).

Avant d'appliquer un critère précis, (d'Alembert...), commencer par évaluer l'ordre de grandeur de $|u_n|$ en le remplaçant par un équivalent.

Ne pas oublier le côté « condition suffisante » des critères de convergence, et n'allez jamais dire « puisque la série converge on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ... », même si vous en avez fortement envie.

Pour la *semi-convergence*, bien sûr il y a les séries alternées, (soyez précis avec le critère), mais n'oubliez pas qu'avec $u_n \approx v_n$, en écrivant

$u_n = v_n + (u_n - v_n)$ on peut parfois conclure très facilement ; mais ne pas se contenter d'un illicite $u_n \approx v_n$ lorsqu'il ne s'agit pas de séries à termes de signe constant. Cette technique, (ajouter et retrancher l'équivalent) s'emploie aussi pour les séries quelconques, (8.11).

Quand u_n est du type $f(n)$ avec f positive décroissante, ou même f de signe quelconque, penser au lien avec les intégrales impropres.

Des outils importants : la sommation par paquets, (8.5),
la **transformation d'Abel**,
les développements limités.

En ce qui concerne la recherche d'équivalents du terme général u_n d'une suite qui tend vers 0, penser à chercher α tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha}) = l \neq 0$. Par Césaro on aura $\dfrac{u_n^{\alpha} - u_0^{\alpha}}{n}$ tend vers l d'où $u_n^{\alpha} \approx nl$ donc $u_n \approx (nl)^{1/\alpha}$.

Ceci s'applique, pour v_n qui tend vers l, à $u_n = v_n - l$, ou si v_n tend vers l'infini, à $u_n = \dfrac{1}{v_n}$.

Si u_n est la somme partielle d'une série divergente, (ou le reste d'une série convergente) de terme général positif a_n, se rappeler qu'avec $b_n \approx a_n$, on obtient $v_n \approx u_n$, avec v_n somme partielle, (ou reste d'ordre n) de la série des b_n.

Dans ce type de démarche, b_n devient souvent du genre $f(n)$ et les encadrements par les intégrales servent beaucoup.

<u>Quelques idées en vrac</u>.

Pour étudier des suites doubles réelles, on peut leur associer la suite des sup $(u_n, n \geqslant p)$ et des inf $(u_n, n \geqslant p)$, voir 8.6.

Ne pas oublier aussi le **Théorème d'interversion des limites**, d'emploi facilité sur $\mathbb{R}$, par l'utilisation de la relation d'ordre et de la monotonie des suites, (8.15, 8.16).

Penser aux liens entre suite et série, (voir 8.13), aux suites extraites, surtout dans des suites monotones, (8.14).

Parfois, un calcul direct avec les formules liées aux suites arithmétiques ou géométriques conviendra très bien, (8.18).

Stirling, $\left(n! \approx \left(\dfrac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\right)$, une valeur sûre qui peut encore servir, (8.20).

Quand on évalue une somme s_n de termes $u(n, k)$, k variant, et que l'on cherche la limite des s_n : on a de « plus en plus de termes, chacun fonction de n ; on peut être tenté de se ramener à une somme finie, si on peut majorer uniformément la somme des autres, (voir 8.25).

Quand on somme d'une façon, voir si on ne peut pas sommer autrement peut servir, (8.26) : c'est du Fubini en somme.

Dans la recherche d'un équivalent du terme général u_n *d'une suite monotone* qui converge vers 0, ou d'un équivalent de $u_n - l$ si elle converge vers l, (ou de $\frac{1}{u_n}$ si elle diverge), l'utilisation d'un équivalent du terme général $x_n = u_{n+1} - u_n$ de la série associée peut servir. On suppose donc x_n équivalent à y_n.

1°) *Si la série des* x_n *converge,* la suite des u_n converge.

Supposons d'abord qu'elle converge vers 0. Alors le reste de la série des x_n, qui vaut :

$$R_{n-1} = \sum_{p=n}^{+\infty} (u_{p+1} - u_p) = -u_n$$ est équivalent au reste $$S_{n-1} = \sum_{p=n}^{+\infty} y_p .$$

Si la suite des u_n converge vers $l \neq 0$, en posant $v_n = u_n - l$, on a $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n$, donc $R_n = -v_n$, et cette technique donne un équivalent de $u_n - l$.

2°) *Si la série des* x_n *diverge,* dans ce cas la suite des u_n diverge, vers $+\infty$ si elle est croissante, $-\infty$ si elle est décroissante, mais dans ce cas les sommes partielles des séries des x_n et des y_n sont des infiniments grands équivalents, d'où :

$$X_{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1} x_p = \sum_{p=0}^{n-1} (u_{p+1} - u_p) = u_n - u_0 ,$$

équivalent à $Y_{n-1} = \sum_{p=0}^{n-1} y_p .$

Bien sûr ceci n'a d'intérêt que si le calcul d'un équivalent pour le reste (ou la somme partielle), de la série des y_p est facile, ce qui est le cas par exemple des termes en $y_n = f(n)$ avec f positive, décroissante, d'où une comparaison avec des intégrales.

Voir en 8.28 un exercice de ce type.

Dans ce raisonnement on a utilisé le résultat, qui doit être connu, sur les **équivalents dans les séries** : pour une série à termes de signe constant, u_n, si $u_n \sim v_n$, les séries sont de même nature et :

en *cas de convergence*, les restes d'ordre n sont des infiniments petits équivalents ;

en *cas de divergence*, les sommes partielles d'ordre n sont des infiniments grands équivalents.

Pour ce qui concerne la *nature d'une série* pas d'équivalent pour les séries de terme général u_n de signe quelconque, mais... si $u_n \sim a_n$, avec a_n terme général d'une série plus facile à étudier, penser à écrire :

$u_n = a_n + (u_n - a_n)$, et à étudier les deux séries de termes généraux a_n et $b_n = u_n - a_n$, pour éventuellement conclure.

Énoncés

8.1. Soit f : $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que $f(0) = 0$ et f'' soit bornée. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

8.2. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{p=1}^{n} \ln\left(\frac{p}{n}\right)$, en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

8.3. Nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)}, n \geqslant 1 \text{, avec } \alpha, \beta$$

et γ réels.

8.4. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels tendant vers $+\infty$ et telle que $(a_{n+1} - a_n)$ tende vers 0. Montrer qu'il existe une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $(a_{\varphi(n)} - n)$ tende vers 0.

8.5. On considère la série harmonique dans laquelle on supprime tous les termes dont le numérateur contient au moins une fois un chiffre fixé non nul a, dans son écriture décimale. Nature de la série obtenue.

8.6. Étude de la suite définie par la donnée de u_0 et u_1, strictement positifs, et de la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = \ln(1 + u_{n+1}) + \ln(1 + u_n).$$

8.7. Soient a et b deux réels strictement positifs. Étudier les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et les égalités :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1} b_n}.$$

8.8. Soit (u_n) une suite réelle telle que, pour tout n, on ait $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$. Étude de cette suite. En donner un développement asymptotique avec deux termes.

8.9. Pour $n \geqslant 2$ et $x \in]0, 1[$ on pose :

$$f_n(x) = \frac{x^n + \dfrac{1}{x^n}}{x + \dfrac{1}{x}}.$$

Montrer que l'équation $f_n(x) = n$, admet une seule solution x_n dans $]0, 1[$. Étude de la suite $(x_n)_{n \geqslant 2}$.

On pourra justifier que $f_{n+1}(x_n) + f_{n-1}(x_n) > 2n$.

8.10. Soit $a_n = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ et $u_n = d(a_n, \mathbb{Z})$. Que peut-on dire de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

8.11. Étude de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin n}{n - \sqrt{n}\sin n}$.

8.12. Soit (u_n) une suite décroissante de limite nulle. On suppose qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers naturels (n_k) telle que, $\forall k \in \mathbb{N}, u_{n_k} \geqslant \dfrac{1}{n_k}$. Montrer que la série des u_n diverge.

8.13. Nature de la série de terme général :

$$u_n = \ln\left(\frac{(\ln(n+1))^2}{\ln n \cdot \ln(n+2)}\right).$$

8.14. Soit m un entier supérieur ou égal à 2. On considère la série :

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m-1} + \frac{x}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{2m-1} + \frac{x}{2m} + \dots$$

Montrer qu'il existe une unique valeur de x pour laquelle cette série converge. Calculer alors la somme.

8.15. Soit $(w_{n,s})_{(n,s) \in \mathbb{N}^2}$, une suite double à termes positifs vérifiant :

(1) pour chaque n fixé, la suite des $w_{n,s}$ converge vers l_n en croissant ;

(2) pour chaque s fixé, la série $\sum_n w_{n,s}$ est convergente, de somme T_s ;

(3) il existe M réel tel que, pour tout s, $T_s \leqslant M$.

Montrer que la série des l_n est convergente, (de somme L), que la suite des T_s est convergente, (de limite T) et que $L = T$.

8.16. On considère la suite u,définie par la donnée de $u_0 = x > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{1 + (u_0 + \ldots + u_n)^2}$.

Déterminer la limite des $\dfrac{2^n}{u_n}$. On pourra poser $\sin\theta_n = \dfrac{1}{u_n}$.

8.17. Soit une suite de nombres réels $b_n > 0$.

a) Existence, pour $n \geqslant 2$, de $a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 + k\,\dfrac{b_n}{n}\right)^{-n}$.

b) Montrer que $a_n \geqslant \dfrac{1}{e^{b_n} - 1}$ et que $a_n b_n \leqslant 2$.

c) On suppose la suite des b_n convergente vers $b > 0$. Montrer que la suite des a_n a une limite > 0.

8.18. Étude de la suite des u_n, $n \in \mathbb{N}^*$, définie par :

$$u_n = \frac{2^n}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \left(\cos\left(\frac{\pi j}{n}\right)\right)^n.$$

8.19. On considère une suite (a_n) de réels telle que $\lim_{n \to +\infty} a_n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$. Comportement de a_n en $+\infty$?

8.20. Existe-t-il une suite (u_n) telle que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n u_{n+1} = n$ et $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$?

8.21. Montrer que e est irrationnel.

8.22. Limite de la suite de terme général $u_n = n\displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}}(1+t^n)^{1/n}\mathrm{d}t$.

8.23. On pose $u_n = \dfrac{1}{3n+1}+\dfrac{1}{3n+4}+\ldots+\dfrac{1}{6n-2}$. Étudier la limite λ de cette suite et trouver un équivalent de $u_n-\lambda$.

8.24. Soit $\mathrm{P}_n(\mathrm{X}) = \dfrac{\mathrm{X}^n}{n!}+\dfrac{\mathrm{X}^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+\mathrm{X}+1$. Montrer que P_n admet au plus une racine réelle.

Soit a_{2k+1} le seul zéro réel de P_{2k+1}, trouver $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{2k+1}$.

8.25. Étudier la suite de terme général :

$$d_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n.$$

8.26. On note $d(j)$ le nombre de diviseurs de l'entier j. Que dire de la suite de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} d(j).$$

8.27. Soit une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n+\frac{1}{3}\,u_{3n} = l.$$

La suite est-elle bornée ?

8.28. Déterminer la limite l de la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{2k+1}.$$

Équivalent de u_n-l.

Solutions

8.1. Les valeurs $\frac{k}{n^2}$, majorées par $\frac{1}{n}$, s'accumulent sur 0, donc du Taylor Young s'impose. En fait, la seule existence de $f''(0)$ donne $f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2}f''(0) + o(h^2)$, d'où l'existence, pour tout n et tout $k \leqslant n$, d'un nombre $\varepsilon_{k,n}$ tel que

$f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{k}{n^2}f'(0) + \frac{k^2}{2n^4}(\varepsilon_{k,n} + f''(0))$ les $\varepsilon_{k,n}$ étant bornés car vérifiant $\lim\limits_{n \to +\infty}(\varepsilon_{k,n}) = 0$, (uniformément en $k \leqslant n$).

Soit M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k, 0 < k \leqslant n \Rightarrow |\varepsilon_{k,n} + f''(0)| \leqslant M$, on a :

$$S_n = \frac{f'(0)}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{2n^4}\sum_{k=1}^{n} k^2(\varepsilon_{k,n} + f''(0))$$

$$= f'(0)\,\frac{n(n+1)}{2n^2} + \frac{1}{2n^4}\,u_n$$

avec $|u_n| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} k^2(\varepsilon_{k,n} + f'(0))\right| \leqslant M\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{Mn(n+1)(2n+1)}{6}$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty}\frac{u_n}{2n^4} = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \frac{f'(0)}{2}$.

8.2. Pas de problème, c'est de la formule de la moyenne, pour $x \leadsto \ln x$, monotone sur $]0, 1]$, d'intégrale impropre qui converge en 0, $(\lim\limits_{x \to 0}\sqrt{x}\ln x = 0)$. Donc, (en justifiant au besoin l'emploi de la formule) on a :

$$\lim_{n \to +\infty}\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\ln\frac{p}{n} = \int_0^1 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_0^1 = -1.$$

Puis, avec $u_n = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \left(\prod\limits_{p=1}^{n}\frac{p}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$, on a $\ln u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{p=1}^{n}\ln\frac{p}{n}$ qui tend vers -1 donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{e}$.

8.3. Si $\gamma \in \mathbb{Z}_-$, u_n n'existe pas pour $n \geqslant |\gamma| + 1$. On écarte ce cas, mais alors si α ou $\beta \in \mathbb{Z}_-$, u_n devient nul pour n assez grand, et la série converge.

On suppose donc que ni α, ni β, ni γ ne sont entiers négatifs. On pose $\alpha - 1 = a$, $\beta - 1 = b$ et $\gamma - 1 = c$, d'où :

$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{\left(1+\frac{a}{k}\right)\left(1+\frac{b}{k}\right)}{\left(1+\frac{c}{k}\right)}$, et, comme on aimerait prendre des logarithmes, on commence par se placer dans une zone où $\left(1+\frac{a}{k}\right)$, $\left(1+\frac{b}{k}\right)$ et $\left(1+\frac{c}{k}\right)$ sont positifs, ce qui est possible puisque ces quantités tendent vers 1.

Il existe k_0 tel que $\forall k > k_0$, $1 + \frac{a}{k} > 0$, $1 + \frac{b}{k} > 0$ et $1 + \frac{c}{k} > 0$, d'où :

$$u_n = u_{k_0} \prod_{k=k_0+1}^{n} \left(1+\frac{a}{k}\right)\left(1+\frac{b}{k}\right)\left(1+\frac{c}{k}\right)^{-1} = u_{k_0} v_n,$$

pour $n > k_0$, avec les séries des u_n et des v_n de même nature. On a :

$$\mathrm{Log}\, v_n = \sum_{k=k_0+1}^{n} \left(\mathrm{Log}\left(1+\frac{a}{k}\right) + \mathrm{Log}\left(1+\frac{b}{k}\right) - \mathrm{Log}\left(1+\frac{c}{k}\right)\right),$$

ce qui s'évalue par développement limité. On a :

$$\begin{aligned} w_k &= \mathrm{Log}\left(1+\frac{a}{k}\right) + \mathrm{Log}\left(1+\frac{b}{k}\right) - \mathrm{Log}\left(1+\frac{c}{k}\right) \\ &= \frac{a+b-c}{k} - \frac{a^2+b^2-c^2}{2k^2} + \frac{\theta_k}{k^3}, \end{aligned}$$

la suite des θ_k étant bornée car en fait, avec $f(x) = \mathrm{Log}\,(1+x)$, on écrit $f(h) = f(0) + hf'(0) + \frac{h^2}{2} f''(0) + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(\theta h)$ pour $h = \frac{a}{k}, \frac{b}{k}$ ou $\frac{c}{k}$, borné par rapport à k, donc la dérivée troisième étant bornée sur un voisinage compact de 0, les θ_k sont bornés par rapport à k.

En sommant les w_k, et en utilisant le fait que $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \operatorname{Log} n$ tend vers la constante d'Euler, on obtient

$\operatorname{Log} v_n = (a + b - c) \operatorname{Log} n + \lambda + o(1)$, donc *si* $a + b - c \neq 0$ on a :

$v_n \underset{n \to +\infty}{\approx} \dfrac{e^{\lambda}}{n^{-a-b+c}}$, et la série converge si et seulement si $-a - b + c > 1$, soit pour $1 - \alpha - \beta + \gamma > 1$, ou $\gamma > \alpha + \beta$.

Si $a + b - c = 0$, soit $\alpha + \beta = \gamma + 1$, alors $w_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ donc $\operatorname{Log} v_n$ a une limite finie, l, et v_n tend vers $e^l \neq 0$: la série des v_n diverge. Comme la série des u_n est de même nature, il reste finalement convergence pour $\gamma > \alpha + \beta$.

8.4. Comme les a_n divergent vers $+\infty$, on peut, pour tout n, « dépasser n », et si c'est pour des valeurs d'indices k telles que $a_{k+1} - a_k$ soit « petit », en prenant les plus petits indices $\varphi(n)$ et $\varphi(n+1)$ tels que $a_{\varphi(n)}$ dépasse n et $a_{\varphi(n+1)}$ dépasse $n + 1$ on aura des indices distincts...

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n+1} - a_n = 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, |a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{3}$, puis il existe p dans $\mathbb{N}$ avec $p \leqslant a_{n_0} < p + 1$.

L'ensemble $A_1 = \{n \,;\, n \geqslant n_0, a_n \geqslant p + 1\}$ est non vide, (a_n tend vers $+\infty$), donc $n_1 = \inf A_1$ existe, (avec $n_1 > n_0$ en fait car $a_{n_0} < p + 1$). De plus :

$$a_{n_1 - 1} \leqslant p + 1 \leqslant a_{n_1}, \text{ et comme } |a_{n_1 - 1} - a_{n_1}| \leqslant \frac{1}{3}, \text{ on a :}$$

$$a_{n_1 - 1} \leqslant p + 1 \leqslant a_{n_1} \leqslant p + 1 + \frac{1}{3} = p + 2 - \frac{2}{3} < p + 2 - \frac{1}{3}.$$

Avec $A_2 = \{n \,;\, n \geqslant n_1, a_n \geqslant p + 2\}$, on aura A_2 non vide, de borne inférieure $n_2 \geqslant n_1$, et même, comme $|a_{n_1+1} - a_{n_1}| < \frac{1}{3}$, on a

$$a_{n_1+1} < a_{n_1} + \frac{1}{3} \leqslant p + 2 - \frac{1}{3}, \text{ donc } n_2 > n_1 + 1.$$

Plus généralement, pour tout k de $\mathbb{N}^*$, on introduira :

$A_k = \{n \,;\, n \geqslant n_{k-1}, a_n \geqslant p+k\}$, non vide, et $n_k = \inf A_k$, et comme on partait de n_{k-1} tel que $p+(k-1) \leqslant a_{n_{k-1}} \leqslant p+(k-1)+\frac{1}{3}$, et que la distance de deux a_n d'indices consécutifs est majorée par $\frac{1}{3}$, (strictement), on a :

$a_{n_{k-1}+1} < a_{n_{k-1}} + \frac{1}{3} \leqslant p+k-\frac{1}{3}$, donc $n_k > n_{k-1}+1$: en posant $\varphi(p+k) = n_k$ on a une suite strictement croissante d'entiers, telle que, vu le choix de n_k,

$$\left|a_{\varphi(p+k)} - (p+k)\right| \leqslant \left|a_{\varphi(p+k)} - a_{\varphi(p+k)-1}\right|,$$

majorant qui tend vers 0.

Mais on ne définit ainsi $\varphi(r)$ que pour $r > p$.

Or à chaque étape entre n_k et n_{k+1}, il reste un terme disponible, $(n_k > n_{k-1}+1)$, donc après $p+1$ étapes on aura assez d'entiers pour les indexer en $2(p+1)$ entiers d'indices croissants. Cette modification des premiers termes de la suite ne modifie pas la limite des $a_{\varphi(n)} - n$.

8.5. La série initiale a pour terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $n \geqslant 1$, elle est alternée convergente.

Comme il ne sera pas facile, (c'est le moins qu'on puisse dire) de préciser les n contenant le chiffre fixé a, dans leur écriture décimale, il ne sera pas facile de connaître les changements de signe : on s'attend à de la convergence absolue.

On considère donc la série des $(v_k)_{k \geqslant 1}$, obtenu en prenant les $\frac{1}{n}$, n croissant, $n \geqslant 1$, n ne contenant pas le chiffre a dans son écriture décimale, et comme les v_k sont positifs, on va sommer par tranches, en considérant les v_k associés aux n s'écrivant avec $p+1$ chiffres, (si p croît, les n augmentent), donc pour les n compris entre 10^p et $10^{p+1}-1$, (au sens large).

Le premier chiffre (non nul) est choisi dans $\{1, 2, \ldots, 9\} - \{a\}$, il y a donc 8 choix, les p autres sont choisis dans $\{0, 1, \ldots, 9\} - \{a\}$: il y a alors 9 choix possibles, d'où $8 \cdot 9^p$ entiers n convenant, et fournissant des $n \geqslant 10^p$, donc la somme S_p des v_k de cette tranche est majorée par

$8 \cdot 9^p \cdot \dfrac{1}{10^p} = 8 \cdot \left(\dfrac{9}{10}\right)^p$, terme général d'une série convergente, et finalement la série obtenue est absolument convergente.

8.6. On a, par récurrence, $u_n > 0$, (donc u_{n+1} existe), et ce pour tout n.

Si la suite converge, c'est vers α vérifiant l'égalité $\alpha = 2\ln(1+\alpha)$. Existe-t-il un tel α ?

Soit $x \rightsquigarrow g(x) = 2\ln(1+x) - x$, on a : $g'(x) = \dfrac{2}{1+x} - 1 = \dfrac{1-x}{1+x}$,

x	0		1		α	$+\infty$
g'		$+$	0	$-$		
g	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$-\infty$

vu les variations il existe un et un seul $\alpha > 1$, tel que $\alpha = 2\ln(1+\alpha)$.

Soit alors $a = \inf(u_0, u_1, \alpha)$ et $b = \sup(u_0, u_1, \alpha)$, montrons que, pour tout n, $a \leqslant u_n \leqslant b$. C'est vrai si $n = 0$ ou 1. Si c'est vrai jusqu'au rang $n+1$, on a, par monotonie de la fonction $x \rightsquigarrow \ln(1+x)$:

$$\ln(1+a) \leqslant \ln(1+u_n) \leqslant \ln(1+b)$$

$$\ln(1+a) \leqslant \ln(1+u_{n+1}) \leqslant \ln(1+b), \text{ donc :}$$

$$2\ln(1+a) \leqslant \ln(1+u_n) + \ln(1+u_{n+1}) \leqslant 2\ln(1+b).$$

Comme $a \leqslant \alpha \leqslant b$, on a alors $g(a) \geqslant 0$ et $g(b) \leqslant 0$, soit $2\ln(1+a) - a \geqslant 0$ et $2\ln(1+b) - b \leqslant 0$, d'où :

$$a \leqslant 2\ln(1+a) \leqslant u_{n+2} \leqslant 2\ln(1+b) \leqslant b.$$

Donc par récurrence, la suite des u_n est bornée par a et b.

On pose alors $\lambda_n = \inf\{u_p \, ; p \geqslant n\}$ et $\mu_n = \sup\{u_p \, ; p \geqslant n\}$. Pour $n+1$, $\{u_p \, ; p \geqslant n+1\} \subset \{u_p \, ; p \geqslant n\}$, d'où, pour les bornes, $\lambda_{n+1} \geqslant \lambda_n$ et $\mu_{n+1} \leqslant \mu_n$: les deux suites sont monotones majorées par a et b, donc elles convergent.

Soit λ et μ leurs limites.

On a, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \leqslant u_{n+p} \leqslant \mu_n$

$$\lambda_n \leqslant u_{n+1+p} \leqslant \mu_n, \text{ d'où, (croissance du logarithme)}$$

$$2\ln(1+\lambda_n) \leqslant \ln(1+u_{n+p}) + \ln(1+u_{n+p+1}) \leqslant 2\ln(1+\mu_n),$$

soit :

$$2\ln(1+\lambda_n) \leqslant u_{n+p+2} \leqslant 2\ln(1+\mu_n).$$

Soit alors $q \geqslant n+2$, $2\ln(1+\lambda_n)$ minore l'ensemble des u_k, $k \geqslant q$, donc $2\ln(1+\lambda_n) \leqslant \lambda_q$, pour tout $q \geqslant n+2$, et de même $\mu_q \leqslant 2\ln(1+\mu_n)$, pour tout $q \geqslant n+2$.

En fixant n, si q tend vers $+\infty$, on a :

$2\ln(1+\lambda_n) \leqslant \lambda \leqslant \mu \leqslant 2\ln(1+\mu)$, puis si n tend vers $+\infty$ cette fois,

$2\ln(1+\lambda) \leqslant \lambda$ d'où $g(\lambda) \leqslant 0$: on a $\lambda \geqslant \alpha$,

et $\mu \leqslant 2\ln(1+\mu)$ d'où $g(\mu) \leqslant 0$ et $\mu \leqslant \alpha$;

enfin, $\lambda_n \leqslant \mu_n$ donne $\lambda \leqslant \mu$ à la limite, d'où $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \mu \leqslant \alpha$ et *l'égalité* $\lambda = \mu = \alpha$ mais alors : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, \alpha - \varepsilon \leqslant \lambda_n \leqslant \mu_n \leqslant \alpha + \varepsilon$, et vu la définition de λ_n et de μ_n, on a aussi :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \alpha - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \alpha + \varepsilon,$$

d'où finalement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

8.7. On peut commencer par préciser, par récurrence, que les a_n et b_n existent et sont strictement positifs, ceci pour tout n.

On a $b_{n+1}^2 = a_{n+1} b_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n) b_n$ et :

$a_{n+1}^2 = \frac{1}{4} a_n^2 + \frac{1}{4} b_n^2 + \frac{1}{2} a_n b_n$, donc

① : $b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = \frac{1}{4}(b_n^2 - a_n^2)$, soit encore :

$$(b_{n+1} - a_{n+1})(b_{n+1} + a_{n+1}) = \frac{1}{4}(b_n - a_n)(b_n + a_n),$$

et comme on a des nombres > 0, $b_n - a_n$ est finalement du signe de $b_0 - a_0 = b - a$.

La relation ① donne également $b_n^2 - a_n^2 = \frac{1}{4^n}(b^2 - a^2)$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty}(b_n^2 - a_n^2) = 0$.

Puis, (recherche d'une monotonie), on considère $a_{n+1} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2}$, de signe constant, celui de $b - a$, (ou toujours nul si $b = a$, mais alors les deux suites sont constantes, égales à a) : la suite (a_n) est monotone. Il en est de même de la suite des b_n car : $b_{n+1}^2 - b_n^2 = b_n(a_{n+1} - b_n) = \dfrac{1}{2}\, b_n(a_n - b_n)$: de signe constant, celui de $a - b$, donc les deux suites sont de monotonie opposées.

Il est temps de conclure : si $a > b$, la suite (b_n) est croissante, celle des a_n décroissante, et $b_n - a_n < 0$: on a donc $b_0 < \ldots < b_n < a_n < \ldots < a_0$, d'où deux suites monotones bornées donc convergentes vers la même limite $l(a, b)$ puisque $b_n^2 - a_n^2$ tend vers 0.

8.8. Avant toute chose, une telle suite existe-t-elle, c'est-à-dire, pour un n donné peut-on résoudre l'équation $x^5 + nx - 1 = 0$, (ce qui permettra de prendre pour valeur de u_n, l'une des racines réelles de cette équation).

Si $f_n(x) = x^5 + nx - 1$, $f_n'(x) = 5x^4 + n$ est positif, strictement sur $\mathbb{R}^*$, donc f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'où l'existence et l'unicité de u_n. De plus, $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = n > 0$ si $n \in \mathbb{N}^*$, donc $u_0 = 1$, et $u_n \in \,]0, 1[$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Comme $$f_{n+1}(u_n) = u_n^5 + (n+1)u_n - 1,$$
$$= u_n^5 + nu_n - 1 + u_n = u_n > 0, \text{ on a :}$$

$0 < u_{n+1} < u_n$, ($f_{n+1}(x)$ est < 0 si $x < u_{n+1}$, et > 0 si $x > u_{n+1}$),

donc la suite (u_n) est décroissante minorée, donc convergente vers une limite $l \geqslant 0$.

L'égalité $nu_n = 1 - u_n^5 \in [0, 1]$, montre que $l = 0$, (sinon, $l > 0 \Rightarrow nu_n \underset{n \to +\infty}{\sim} nl$, donc ne reste pas borné).

On peut écrire $u_n = \dfrac{1}{n + u_n^4} = \dfrac{1}{n}\,\dfrac{1}{1 + n^{-1}u_n^4}$, d'où u_n équivalent à $\dfrac{1}{n}$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n}\, u_n^4 = 0$.

En poursuivant, on a

$$u_n = \frac{1}{n+\left(\dfrac{1}{n+u_n^4}\right)^4} = \frac{1}{n+\dfrac{1}{n^4}(1+n^{-1}u_n^4)^{-4}}$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\dfrac{1}{n^5}(1+o(1))} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n^5}+o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)$$

$= \dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^6}+o\left(\dfrac{1}{n^6}\right)$, d'où les deux premiers termes du développement asymptotique de u_n.

8.9. Étudions les variations de g_n, définie sur $]0, 1[$ par :

$$g_n(x) = f_n(x)-n = \frac{x^{2n}+1}{x^{n+1}+x^{n-1}}-n = \frac{x^{2n}-nx^{n+1}-nx^{n-1}+1}{x^{n+1}+x^{n-1}},$$

ou plutôt, comme cela va être horrible et qu'on cherche les zéros de g_n, fraction rationnelle dont le dénominateur reste positif, cherchons le signe du numérateur, h_n défini par $h_n(x) = x^{2n}-nx^{n+1}-nx^{n-1}+1$.

On a : $\quad h'_n(x) = 2nx^{2n-1}-n(n+1)x^n-n(n-1)x^{n-2}$

$$= nx^{n-2}(2x^{n+1}-(n+1)x^2-n+1),$$

du signe de $k_n(x) = 2x^{n+1}-(n+1)x^2-n+1$ sur $]0, 1[$.

On a : $\quad k'_n(x) = 2(n+1)x^n-2(n+1)x$

$= 2(n+1)x(x^{n-1}-1)$ avec x dans $]0, 1[$ d'où $k'_n<0$ sur $]0, 1[$, donc k_n décroissante avec $k_n(0) = -n+1$, (et $n \geqslant 2$) : on a k_n négatif sur $]0, 1[$, donc h'_n aussi ; finalement h_n décroît sur $]0, 1[$ strictement de $h_n(0) = 1$ à $h_n(1) = 2(1-n)<0$: il existe un seul x_n dans $]0, 1[$ tel que $h_n(x_n) = 0$, avec $h_n(x)>0$ sur $]0, x_n[$ et $h_n(x)<0$ sur $]x_n, 1[$, d'où une seule solution, x_n, à l'équation $f_n(x) = x_n$, sur $]0, 1[$.

On a $f_{n+1}(x)+f_{n-1}(x) = \dfrac{x^{n+1}+x^{-n-1}+x^{n-1}+x^{-n+1}}{x+x^{-1}}$

$$= \frac{(x^2+1)(x^{n-1}+x^{-n-1})}{(x^2+1)x^{-1}}$$

$$= x^n+x^{-n} = (x+x^{-1})\,f_n(x),$$

et comme $f_n(x_n) = n$, et que, sur]0, 1[, la fonction $g : x \rightsquigarrow x + \frac{1}{x}$ décroît de $+\infty$ à 2, on a $x_n + \frac{1}{x_n} > 2$, d'où $f_{n+1}(x_n) + f_{n-1}(x_n) > 2n$.

En fait f_n est monotone sur]0, 1[, car avec $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}+1}{x^{n+1}+x^{n-1}}$ on a :

$$\begin{aligned}
f_n'(x)(x^{n+1}+x^{n-1})^2 \\
&= 2n(x^{3n}+x^{3n-2}) - ((n+1)x^n + (n-1)x^{n-2})(x^{2n}+1) \\
&= (n-1)x^{3n} + (n+1)x^{3n-2} - (n+1)x^n - (n-1)x^{n-2} \\
&= (n-1)(x^{3n} - x^{n-2}) + (n+1)(x^{3n-2} - x^n),
\end{aligned}$$

or sur]0, 1[, pour $n \geqslant 1$, on a $x^{3n} < x^{n-2}$ et $x^{3n-2} < x^n$, d'où $f_n' < 0$ sur]0, 1[, (ce qui au passage permettait d'avoir l'existence et l'unicité de x_n : en croyant simplifier, j'ai allongé la solution).

Justifions par récurrence la croissance de la suite. On trouve $x_2 \approx 0{,}435$ et $x_3 \approx 0{,}518$ donc $x_3 > x_2$.

Supposons $x_k > x_{k-1}$ pour $k \leqslant n$, (et $k \geqslant 3$).

On a $f_{n+1}(x_n) > 2n - f_{n-1}(x_n)$, avec f_{n-1} décroissante

donc $f_{n-1}(x_n) < f_{n-1}(x_{n-1}) = n-1$, puisque $x_{n-1} < x_n$,

d'où $f_{n+1}(x_n) > 2n - (n-1) = n+1$.

Comme f_{n+1} décroît et que $f_{n+1}(x_{n+1}) = n+1$, c'est que :

$$x_n < x_{n+1}.$$

La suite $(x_n)_{n \geqslant 2}$ est donc croissante, majorée par 1, elle converge. Vérifions que la limite est 1.

Soit $a \in\,]0, 1[$, on veut prouver que pour n assez grand on a $x_n > a$, c'est-à-dire que $f_n(a)$ est $> n$, ou que $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{a + \frac{1}{a}} \cdot \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right)$ devient supérieur à 1, or cette quantité équivaut à $\frac{1}{a+\frac{1}{a}} \cdot \frac{1}{na^n}$ avec $\frac{1}{a} > 1$ donc sa limite est $+\infty$.

Elle devient supérieure à 1 pour n assez grand, donc $\forall a \in \,]0, 1[$, $\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, a \leqslant x_n < 1$: on a bien convergence des x_n vers 1.

Ce fut laborieux ! Mais vous savez ce que c'est, il y a des jours où les raccourcis que l'on prend allongent le chemin !

8.10. Le nombre $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ fait penser à un zéro d'un trinôme, dont l'autre racine serait $\alpha' = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$: on a $\alpha\alpha' = -1$ et $\alpha + \alpha' = 1$, cela ressemble aux zéros de $X^2 - X - 1$.

Justifions, par récurrence sur n, l'appartenance de $\alpha^n + \alpha'^n$ à $\mathbb{Z}$. C'est vrai pour $n = 0, 1, (\alpha + \alpha' = 1)$ et 2 car $\alpha^2 = \alpha + 1, \alpha'^2 = \alpha' + 1$ donc $\alpha^2 + \alpha'^2 = 2 + \alpha + \alpha' \in \mathbb{Z}$.

En fait $\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n$ et $\alpha'^{n+2} = \alpha'^{n+1} + \alpha'^n$, donc en notant $S_n = \alpha^n + \alpha'^n$, on a $S_{n+2} = S_{n+1} + S_n$, d'où par récurrence, l'appartenance de S_n à $\mathbb{Z}$. Mais alors $\alpha^n = S_n - \alpha'^n$ donc $d(\mathbb{Z}, \alpha^n) \leqslant |\alpha'|^n$, et même $d(\mathbb{Z}, \alpha^n) = d(\mathbb{Z}, \alpha'^n)$, la distance étant invariante par translation.

En fait, pour $n = 2$, on a $\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 < \dfrac{1}{2}$ car ceci équivaut à $6 - 2\sqrt{5} < 2$ soit $4 < 2\sqrt{5}$, ou $16 < 20$: c'est vrai, donc pour $n \geqslant 2$, $d(\mathbb{Z}, \alpha^n) = |\alpha'|^n = \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n = u_n$, donc la suite des u_n décroît et converge vers 0.

8.11. Existence : on a $u_n = \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - \sin n)}$ existe pour tout $n \geqslant 1$, ($\sin 1 \neq 1$ et $n \geqslant 2 \Rightarrow \sqrt{n} - \sin n > 0$).

Les u_n ne sont pas de signe constant, mais $u_n \sim \dfrac{\sin n}{n}$, alors on retranche et on ajoute l'équivalent, $v_n = \dfrac{\sin n}{n}$, pour voir, comme au poker.

$$\text{On a } u_n = \frac{\sin n}{n} + \frac{\sin n}{n}\left(\frac{1}{1-\dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}} - 1\right)$$
$$= v_n + w_n,$$

avec $w_n = \dfrac{\sin^2 n}{n(\sqrt{n} - \sin n)}$

On a $w_n = O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$: la série des w_n converge absolument, quant à $v_n = \dfrac{\sin n}{n}$, on a $\dfrac{1}{n}$ qui tend vers 0 en décroissant, et les sommes $S_{p,q} = \sum_{k=p}^{q} \sin k$, $(p < q)$ qui sont bornées par rapport à p et q, donc, par le critère d'Abel, la série des v_n converge, celle des u_n aussi.

8.12. Le critère de Cauchy n'est pas vérifié. En effet, soit $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, et n fixé dans $\mathbb{N}$. La suite $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ étant une suite strictement croissante d'entiers, elle diverge vers $+\infty$, donc $\exists k$ tel que $n_k \geqslant 2n$.

Soit $p = E\left(\dfrac{n_k}{2}\right) + 1$, on a $p \geqslant n$, et $\sum_{r=p}^{n_k} u_r \geqslant (n_k - p + 1)u_{n_k}$, car la suite des u_n est décroissante, et $p = E\left(\dfrac{n_k}{2}\right) + 1 \leqslant \dfrac{n_k}{2} + 1$, donc $n_k + 1 - p \geqslant \dfrac{n_k}{2}$. *A fortiori*, on a : $\sum_{r=p}^{n_k} u_r \geqslant \dfrac{1}{2}\, n_k u_{n_k} \geqslant \dfrac{1}{2}$, vu l'hypothèse faite sur les n_k.

On a finalement :

$$\exists \varepsilon = \frac{1}{2}, \forall n, \exists p \geqslant n, \exists q \geqslant p, \sum_{r=p}^{q} u_r \geqslant \frac{1}{2},$$

on a bien nié le critère de Cauchy, d'où la non convergence de la série.

8.13. On peut penser à un développement limité en se disant qu'on a affaire à un de ces exercices rendus obsolètes par l'emploi du calcul formel, mais... on a : $u_n = \ln\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right) - \ln\left(\dfrac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)}\right) = a_n - a_{n+1}$ si on pose $a_n = \ln\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)$, et dans ce cas la série des u_n converge si et seulement si la suite des a_n converge, ce qui est le cas car $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$ donc (a_n) converge vers 0. De plus, la somme de la série vaut alors $a_2 = \ln \dfrac{\ln 3}{\ln 2} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$.

8.14. Le terme général, u_n, pour $n \geqslant 1$, de la série vaut : $u_n = \dfrac{1}{n}$ si $n \not\equiv 0(m)$, et $u_{mk} = \dfrac{x}{mk}$. Si la série converge, et a pour somme S, en particulier on aura :

$$\mathrm{S} = \lim_{k \to +\infty} \mathrm{S}_{mk}.$$

$$\text{Or } \mathrm{S}_{mk} = \sum_{p=1}^{mk} \frac{1}{p} + \sum_{q=1}^{k} \frac{x-1}{mq}$$
$$= \ln(mk) + \mathrm{C} + \frac{x-1}{m}(\ln k + \mathrm{C}) + o(k),$$

avec C constante d'Euler, ou encore :

$$\mathrm{S}_{mk} = \mathrm{C}\left(1 + \frac{x-1}{m}\right) + \ln m + \left(1 + \frac{x-1}{m}\right)\ln k + o(k).$$

Cette expression admet une limite, lorsque k tend vers $+\infty$, si et seulement si : $1 + \dfrac{x-1}{m} = 0$, soit pour $x = 1 - m$.

Donc, pour $x \neq 1 - m$, la série diverge, et pour $x = 1 - m$, il reste à justifier que la série converge, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{S}_n$ existe, (et pas seulement la suite extraite des S_{km}).

Or, pour n dans $\mathbb{N}$, il existe un seul k tel que : $mk \leqslant n < mk + m$, et en utilisant le calcul précédent on obtient :

$$S_n = S_{mk} + \sum_{r = mk+1}^{n} \frac{1}{r},$$

$$= \ln m + \sum_{r = mk+1}^{n} \frac{1}{r} + o(n),$$ compte tenu de la valeur de x et du fait que k tend vers $+\infty$ si n tend vers $+\infty$.

La somme des $\frac{1}{r}$, est une somme d'au plus m termes, tous positifs majorés par $\frac{1}{mk}$ donc cette somme se majore par $\frac{1}{k}$ et finalement $|S_n - \ln(m)| \leqslant \frac{1}{k} + o(n)$ avec $\frac{1}{k}$ qui tend vers 0 si n tend vers $+\infty$: on a $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \ln(m)$, d'où la convergence de la série et sa somme.

8.15. Comme, pour $s < s'$ on a $w_{n,s} \leqslant w_{n,s'}$, d'après (1), et ceci pour tout n, on a $T_s \leqslant T_{s'}$, donc la suite des T_s est croissante majorée donc convergente. On note T sa limite.

Par ailleurs, pour tout s fixé, et pour N fixé aussi, on a :

$0 \leqslant \sum\limits_{n=0}^{N} w_{n,s} \leqslant \sum\limits_{n=0}^{\infty} w_{n,s} = T_s \leqslant M$, donc, pour N fixé, si s tend vers $+\infty$, on en déduit que :

$0 \leqslant \sum\limits_{n=0}^{N} l_n \leqslant T$, par somme d'un nombre fini de limites.

La série de terme positif l_n ayant la suite de ses sommes partielles majorée, converge, et sa somme L vérifie l'inégalité $L \leqslant T$.

Repartant de l'inégalité $0 \leqslant w_{n,s} \leqslant l_n$, que l'on peut maintenant sommer en n, on a $T_s \leqslant L$, donc en prenant la limite en s, il vient $T \leqslant L$, d'où l'égalité.

8.16. Les u_n sont définis, > 0, et même > 1 pour $n \geqslant 1$, on peut donc définir $\theta_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, tel que $\sin\theta_n = \frac{1}{u_n}$, pour $n \geqslant 1$.

Pour exploiter la relation $(u_{n+1})^2 - 1 = (u_0 + \ldots + u_n)^2$, on introduit $\cos\theta_{n+1} = (1 - \sin^2\theta_{n+1})^{1/2}$, (car $\cos\theta_{n+1} \geqslant 0$ puisque $\theta_{n+1} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$), soit :

$$\cos\theta_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{u_{n+1}^2}\right)^{1/2} = \frac{(u_{n+1}^2 - 1)^{1/2}}{u_{n+1}} = \frac{u_0 + u_1 + \ldots + u_n}{u_{n+1}}.$$

Mais alors :

$$\begin{aligned}\cos(\theta_{n+1} - \theta_n) &= \cos\theta_{n+1}\cos\theta_n + \sin\theta_{n+1}\sin\theta_n \\ &= \frac{(u_0 + \ldots + u_n)(u_0 + \ldots + u_{n-1})}{u_n u_{n+1}} + \frac{1}{u_n u_{n+1}} \\ &= \frac{(u_0 + \ldots + u_{n-1})^2 + u_n(u_0 + \ldots + u_{n-1}) + 1}{u_n u_{n+1}},\end{aligned}$$

avec $1 + (u_0 + \ldots + u_{n-1})^2 = u_n^2$; soit encore :

$$\cos(\theta_{n+1} - \theta_n) = \frac{u_n(u_0 + \ldots + u_n)}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_0 + \ldots + u_n}{u_{n+1}} = \cos\theta_{n+1} ;$$

puis :

$$\begin{aligned}\sin(\theta_{n+1} - \theta_n) &= \sin\theta_{n+1}\cos\theta_n - \sin\theta_n\cos\theta_{n+1} \\ &= \frac{1}{u_{n+1}} \cdot \frac{u_0 + \ldots + u_{n-1}}{u_n} - \frac{1}{u_n} \cdot \frac{u_0 + \ldots + u_n}{u_{n+1}} \\ &= -\frac{u_n}{u_n u_{n+1}} = -\frac{1}{u_{n+1}} = -\sin\theta_{n+1} ;\end{aligned}$$

d'où l'égalité :

$e^{i(\theta_{n+1} - \theta_n)} = \cos\theta_{n+1} - i\sin\theta_{n+1} = e^{-i\theta_{n+1}}$, d'où l'on tire :

$\theta_{n+1} - \theta_n = -\theta_{n+1}$, modulo 2π, avec :

$\theta_{n+1} - \theta_n$ dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $-\theta_{n+1}$ dans $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$: c'est que $\theta_{n+1} - \theta_n = -\theta_{n+1}$, ou encore que $\theta_{n+1} = \frac{1}{2}\theta_n$, et on comprend enfin la raison de ce changement de variable.

On a $\theta_n = \dfrac{\theta_1}{2^{n-1}}$ qui tend vers zéro, donc : $\dfrac{1}{u_n} = \sin\theta_n = \sin \dfrac{\theta_1}{2^{n-1}}$ est équivalent à $\dfrac{\theta_1}{2^{n-1}}$ et $\dfrac{2^n}{u_n}$ est équivalent à $2\theta_1$, avec $\theta_1 = \operatorname{Arcsin} \dfrac{1}{u_1} = \operatorname{Arcsin} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2^n}{u_n} = 2 \operatorname{Arcsin} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, expression valable aussi pour $x = 0$, et même pour tout x, puisque les calculs sur les u_n commencent pour $n = 1$ et $u_1 = \sqrt{1+u_0^2} \geqslant 1$.

8.17. a) Si on pose $u_{k,n} = \left(1 + \dfrac{kb_n}{n}\right)^{-n} = \dfrac{1}{\left(1 + k\,\dfrac{b_n}{n}\right)^n}$, pour n fixé, si k tend vers $+\infty$, $u_{k,n}$ est équivalent à $\left(\dfrac{n}{b_n}\right)^n \cdot \dfrac{1}{k^n}$: avec $n \geqslant 2$ on a le terme général d'une série convergente, donc $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \dfrac{kb_n}{n}\right)^{-n} = a_n$ existe.

b) On a $\left(1 + k\,\dfrac{b_n}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + k \frac{b_n}{n}\right)}$, et en utilisant l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$, valable pour $x > -1$, on a :

$$\left(1 + k\,\frac{b_n}{n}\right)^n \leqslant e^{nk \frac{b_n}{n}} = e^{kb_n}, \text{ d'où :}$$

$$u_{k,n} \geqslant \left(\frac{1}{e^{b_n}}\right)^k, \text{ et, en sommant pour } k \geqslant 1,$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} u_{k,n} \geqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e^{b_n}}\right)^k = \frac{1}{e^{b_n}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-b_n}}$$

soit $a_n \geqslant \dfrac{1}{e^{\frac{b_n}{n}} - 1}$.

L'inégalité $\ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$, (valable pour $x \geqslant 0$), ne conduit pas à $a_n b_n \leqslant 2$, (sauf erreur de ma part), mais, pour n fixé $u_{k,n} = f(k) = \dfrac{1}{\left(1 + k\,\dfrac{b_n}{n}\right)^n}$ est fonction positive décroissante de k, et l'inégalité :

$f(k) \leqslant f(x)$, pour $x \in [k-1, k]$, conduit, en intégrant, à :

$$u_{k,n} = f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1 + x\,\dfrac{b_n}{n}\right)^n}, \text{ et en sommant, à :}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} u_{k,n} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1 + \dfrac{b_n}{n}\,x\right)^n},$$

soit, comme on a supposé $n \geqslant 2$:

$$a_n \leqslant \frac{n}{b_n} \cdot \frac{1}{(n-1)} \cdot \left[\frac{-1}{\left(1 + \dfrac{b_n}{n}\,x\right)^{n-1}}\right]_0^{+\infty}$$

ou encore :

$$a_n \leqslant \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{b_n}, \text{ avec } \frac{n}{n-1} = \frac{n-1+1}{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1} \leqslant 2,$$

on a bien $a_n b_n \leqslant 2$, pour tout $n \geqslant 2$.

3°) Comme $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{kb_n}{n}\right)^n} = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\left(1 + k\,\dfrac{b_n}{n}\right)^n}$, et que l'on cherche $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} a_n$, on se retrouve à la tête d'un problème d'interversion de limite.

Posons $f(p, n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\left(1 + k\,\dfrac{b_n}{n}\right)^n}$.

<u>*Pour p fixé,*</u> si n tend vers $+\infty$, $\left(1+k\,\dfrac{b_n}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+k\frac{b_n}{n}\right)}$, avec les b_n bornés, tend vers e^{kb} car l'exposant est équivalent à $n\cdot k\,\dfrac{b}{n} = kb$, puisque les b_n tendent vers $b>0$;

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(p,n) = \varphi(p) = \sum\limits_{k=1}^{p} \dfrac{1}{e^{kb}} = \sum\limits_{k=1}^{p} \left(\dfrac{1}{e^b}\right)^k$.

<u>*Pour n fixé,*</u> $\lim\limits_{p\to+\infty} f(p,n) = \psi(n) = a_n$, et cette convergence est uniforme en n. Pour le justifier, nous allons justifier la convergence dominée, (en n), de la série des $u_{k,n} = \dfrac{1}{\left(1+k\,\dfrac{b_n}{n}\right)^n}$.

D'abord, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b>0$, et les b_n sont tous $\neq 0$, donc la suite des b_n est minorée par un $\beta>0$; traduire la limite avec $\varepsilon = \dfrac{b}{2}$, d'où n_0 tel que $n\geqslant n_0 \Rightarrow b_n \geqslant b-\dfrac{b}{2} = \dfrac{b}{2}$, puis prendre $\beta = \inf\left(b_2, b_3, \ldots, b_{n_0}, \dfrac{b}{2}\right)$.

On a donc $0\leqslant u_{k,n}\leqslant \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{k\beta}{n}\right)^n}$.

Puis, $x \rightsquigarrow g(x) = \left(1+\dfrac{k\beta}{x}\right)^{-x}$ est monotone,

car $g(x) = e^{-x\ln\left(1+\frac{k\beta}{x}\right)}$, donc $g'(x) = \left[-\ln\left(1+\dfrac{k\beta}{x}\right) - \dfrac{x\left(-\dfrac{k\beta}{x^2}\right)}{1+\dfrac{k\beta}{x}}\right] g(x)$

est du signe de $z(x) = \dfrac{k\beta}{x+k\beta} - \ln\left(1+\dfrac{k\beta}{x}\right)$.

$$\text{On a } z'(x) = -\frac{k\beta}{(x+k\beta)^2} - \frac{-\dfrac{k\beta}{x^2}}{1+\dfrac{k\beta}{x}} = \frac{k\beta}{x(x+k\beta)} - \frac{k\beta}{(x+k\beta)^2}$$

$$= \frac{(k\beta)^2}{x(x+k\beta)^2},$$ fonction positive pour $x>0$,

donc z est croissante, or $\lim_{x \to +\infty} z(x) = 0$, donc z est négative et g' aussi sur $]0, +\infty[$.

Mais alors g est décroissante, et $u_{k,n}$ est majoré par $g(2)$ pour $n \geqslant 2$, soit $0 \leqslant u_{k,n} \leqslant \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{k\beta}{2}\right)^2} \underset{k \to +\infty}{\sim} \dfrac{4}{\beta^2 k^2}$: on a bien convergence normale, (en n), de la série des $(u_{k,n})_{k \geqslant 1}$, et le Théorème d'interversion des limites s'applique, (on est à valeurs dans $\mathbb{R}$ complet), donc $\lim_{p \to +\infty} \varphi(p)$ et $\lim_{n \to +\infty} a_n$ existent en étant égales, d'où $\lim_{n \to +\infty} a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{e^b}\right)^k = \dfrac{1}{e^b} \cdot \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{e^b}}$

soit encore $\lim_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{1}{e^b - 1}$, valeur strictement positive.

8.18. Et si on calculait, avec les exponentielles ? On a :

$$u_n = \frac{2^n}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \left(\frac{e^{i\pi j/n} + e^{-i\pi j/n}}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \sum_{k=0}^{n} C_n^k e^{i\pi jk/n} e^{-i\pi j(n-k)/n},$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j e^{\frac{i\pi}{n}(kj+kj)} (-1)^j,$$

car $e^{-i\pi j} = (-1)^j$, donc $(-1)^j(-1)^j = 1$ disparaît, (comme 2^n au départ) et :

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \sum_{j=0}^{n-1} \left(e^{2i\frac{k\pi}{n}}\right)^j.$$

On a la somme des termes d'une progression géométrique de raison $e^{2ik\pi/n}$. Si $k = 0$, ou $k = n$, la raison vaut 1 et la somme n, alors que si $0 < k < n$, la raison est différente de 1 et la somme est nulle, $\left(= \dfrac{e^{2ik\pi} - 1}{e^{2ik\pi/n} - 1} = 0\right)$.

Finalement, $u_n = \dfrac{1}{n}(C_n^0 n + C_n^n n) = 2$: la suite est constante.

8.19. En posant $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$, on définit une suite croissante, (les a_n sont réels) qui sera :

<u>*soit bornée*</u>, alors S_n converge vers $S > 0$, (les a_n ne sont pas tous nuls sinon les a_n $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ le seraient), donc a_n converge alors vers $\frac{1}{S}$ car $a_n S_n$ tend vers 1 ; mais la convergence de la suite des S_n suppose que a_k tend vers 0 : c'est exclu ;

<u>*soit non bornée*</u>, mais $\lim_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ et $a_n = \frac{1}{S_n} \cdot a_n S_n$ converge alors vers 0.

Finalement la suite des a_n converge vers 0, et la série des a_n^2 diverge.

8.20. En fait si une telle suite existe, u_1 est non nul, puis $u_2 = \frac{1}{u_1}$, $u_3 = \frac{2}{u_2} = 2u_1$; $u_4 = \frac{3}{u_3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{u_1}$: on sent une récurrence. Supposons

que $u_{2n} = \frac{1}{u_1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ...(2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ...(2n-2)}$

et $u_{2n+1} = u_1 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot ...2n}{1 \cdot 3 \cdot ...(2n-1)}$,

ce qui est vrai si $n = 2$, car $u_5 = \frac{4}{u_4} = u_1 \cdot \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3}$.

$$\text{Alors } u_{2n+2} = \frac{(2n+1)}{u_{2n+1}} = \frac{1}{u_1} \cdot (2n+1) \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot ...(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot ...2n}$$

$$= \frac{1}{u_1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot ...(2n-1)(2(n+1)-1)}{2 \cdot 4 \cdot ... \qquad (2(n+1)-2)},$$

$$\text{et } u_{2n+3} = \frac{(2n+2)}{u_{2n+2}} = u_1(2n+2) \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot ...2n}{1 \cdot 3 \cdot ...(2n+1)}$$

$$= u_1 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot ...(2(n+1))}{1 \cdot 3 \cdot ...(2(n+1)-1)} \text{ : c'est récurrent.}$$

On va arranger un peu cela en :

$$u_{2n} = \frac{1}{u_1} \frac{(2n)!2n}{(2^n n!)^2} \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = u_1 \cdot \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}.$$

On a alors :

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} = u_1^2 \cdot \frac{(2^n n!)^4}{2n((2n)!)^2} \text{ et :}$$

$$\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+3}} = \frac{1}{u_1^2} \frac{((2n+2)!)^2(2n+2)}{(2^{n+1}(n+1)!)^4} = \frac{1}{u_1^2} \frac{((2n)!)^2(2n+1)^2(2n+2)^3}{(2^n n!)^4 2^4 (n+1)^4}.$$

Un peu de Stirling pour faire le ménage : rappelons que :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \text{ si } n \text{ tend vers } +\infty, \text{ d'où :}$$

$$\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \sim u_1^2 \cdot \frac{2^{4n} n^{4n} e^{-4n} (2\pi n)^2}{2n 2^{4n} n^{4n} e^{-4n} 4\pi n} = u_1^2 \frac{\pi}{2},$$

alors que :

$$\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+3}} \sim \frac{1}{u_1^2} \frac{2^{4n} n^{4n} e^{-4n} \cdot (4\pi n) 2^5 n^5}{2^{4n} n^{4n} e^{-4n} 4\pi^2 n^2 2^4 n^4} = \frac{2}{\pi u_1^2},$$

on aura donc $\lim_{k \to +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = 1$, si, et seulement si $u_1^2 = \frac{2}{\pi}$ d'où deux choix de u_1, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ et $-\sqrt{\frac{2}{\pi}}$, qui conduisent à deux suites solutions.

8.21. On sait que $e = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. Si e est rationnel, en écrivant $e = \frac{p}{q}$, sous forme de fraction irréductible, avec p et q entiers positifs, on aura $p = qe$, d'où, pour tout n : $p = \sum_{k=0}^{n} \frac{q}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{q}{k!}$, et aussi :

$$n!p = \sum_{k=0}^{n} q \cdot \frac{n!}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} q \frac{n!}{k!}.$$

Pour $k \leqslant n$, $q \frac{n!}{k!}$ est un entier, donc $n!p - \sum_{k=0}^{n} q \frac{n!}{k!}$ est un entier strictement positif, la somme des $q \frac{n!}{k!}$, pour $k \geqslant n+1$ n'étant pas nulle.

Or, pour $k \geqslant n+1$, on a $\dfrac{n!}{k!} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)\dots k} \leqslant \dfrac{1}{n^{k-n}}$, donc

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} q \cdot \frac{n!}{k!} \leqslant \frac{q}{n} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{n^r} = \frac{q}{n} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{n}}$$

$$\leqslant \frac{q}{n-1},$$

majorant qui tend vers 0 si n tend vers $+\infty$. En choisissant n tel que $\dfrac{q}{n-1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour faire notre petit découpage, on obtient $0 < n!p - \sum\limits_{k=0}^{n} q \dfrac{n!}{k!}$ = un entier $\leqslant \dfrac{1}{2}$: dur, dur à assumer ! Donc e est irrationnel.

<u>*Autre méthode*</u>.

En posant $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$, la suite des u_n est strictement croissante, de limite e. En posant $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leqslant 0 \text{ pour } n \geqslant 1, (\text{et} < 0 \text{ si } n \geqslant 2).$$

La suite des v_n est décroissante, convergente vers e puisque $\dfrac{1}{n!}$ tend vers 0.

On a donc, pour tout $n \geqslant 2$,

$$u_1 < u_2 < \dots < u_n < e < v_n < \dots < v_2 = v_1,$$

d'où : $u_n < e < v_n$, pour tout $n \geqslant 1$.

Si e est rationnel, avec $e = \dfrac{p}{q}$, on aurait :

$q!u_q < p \cdot (q-1)! < q!u_q + 1$, avec $q!u_q$ entier : c'est absurde, l'entier $p(q-1)!$ ne pouvant être compris strictement entre deux entiers consécutifs.

8.22. En posant $t^n = u$, d'où $nt^{n-1}\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$, donc $n\mathrm{d}t = u^{\frac{1-n}{n}}\mathrm{d}u$, on aura :

$$u_n = \int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} (1+u)^{1/n} u^{\frac{1}{n}-1} \mathrm{d}u = \int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{1}{u} \left(u(1+u)\right)^{1/n} \mathrm{d}u,$$

et là, on y voit plus clair car $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, limite obtenue par valeurs inférieures car $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant e \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{n} \leqslant e^{1/n}$, ce qui équivaut à $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$, vrai par concavité de $x \rightsquigarrow \ln(1+x)$, et sur $[1, e]$, il est vraisemblable que $(u + u^2)^{1/n}$ converge uniformément vers 1. Comme on a, pour $1 \leqslant u \leqslant e$, par croissance des fonctions intervenant :

$1 \leqslant (u + u^2)^{1/n} \leqslant (e + e^2)^{1/n}$, on a :

$\left|(u + u^2)^{1/n} - 1\right| \leqslant (e + e^2)^{1/n} - 1$, majorant qui tend vers 0.

Soit $g_n : u \rightsquigarrow \frac{1}{u}(u + u^2)^{1/n}$, et $g :\ u \rightsquigarrow \frac{1}{u}$, on a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \|g_n - g\|_\infty = 0$, (norme infinie sur $[1, e]$).

Il en résulte que :

$$u_n - \int_1^e g(u)\mathrm{d}u = u_n - [\ln u]_1^e = u_n - 1$$

$$= \int_1^{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} (g_n(u) - g(u))\mathrm{d}u - \int_{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}^e g(u)\mathrm{d}u,$$

d'où :

$$|u_n - 1| \leqslant \int_1^e \|g_n - g\|_\infty \mathrm{d}u + \|g\|_\infty\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

$$\leqslant (e-1)\|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty\left(e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right),$$

majorant qui tend vers 0, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

8.23. En écrivant :

$$u_n = \frac{1}{3n}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{3n}} + \frac{1}{1 + \frac{4}{3n}} + \ldots + \frac{1}{1 + \frac{3n-2}{3n}}\right)$$

$$= \frac{1}{3n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1 + \frac{k + \frac{1}{3}}{n}},$$

on reconnaît une expression qui conduit à la formule de la moyenne dans les intégrales.

En posant $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$, fonction définie continue, de classe C^∞ en fait, sur [0, 1], on a :

$$u_n = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) :$$

c'est une somme de Riemann, de limite $\lambda = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \frac{\ln 2}{3}$.

Pour la recherche de l'équivalent, on doit comparer une intégrale et une somme : on coupe l'intégrale en somme pour obtenir :

$$v_n = \lambda - u_n = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{3}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right),$$

et comme $\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) = \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)\mathrm{d}t$, il vient :

$$v_n = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(f(t) - f\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)\right)\mathrm{d}t,$$

et le reste repose sur la formule de Taylor Lagrange à un ordre convenable.

Pour t entre $\dfrac{k}{n}$ et $\dfrac{k+1}{n}$, il existe c_k entre t et $\dfrac{k+\frac{1}{3}}{n}$ tel que :

$$f(t) - f\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) = \left(t - \frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)f'\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) + \frac{1}{2}\left(t - \frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)^2 f''(c_k),$$

avec c_k fonction de t et de k bien sûr, mais avec $|f''(c_k)| \leqslant \|f''\|_\infty$, norme prise sur [0, 1], segment sur lequel f'', continue, est bornée.

On a donc :

$$v_n = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(t-\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)\mathrm{d}t +$$

$$\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(t-\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)^2 f''(c_k)\mathrm{d}t.$$

La première somme vaut :

$$s_n = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left[\left(t-\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)^2\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f'\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right) = \frac{1}{18n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right),$$

donc $ns_n = \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)$, expression ayant pour limite $\frac{1}{18}\int_0^1 f'(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{18}(f(1)-f(0)) = -\frac{1}{36}$, (somme de Riemann pour f').

La deuxième somme se majore :

$$\begin{aligned}
|t_n| &\leqslant \frac{1}{6}\|f''\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left(t-\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)^2\mathrm{d}t,\\
&\leqslant \frac{1}{18}\|f''\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(t-\frac{k+\frac{1}{3}}{n}\right)^3\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}},\\
&\leqslant \frac{1}{18}\|f''\|_\infty \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{3n^3},\\
&\leqslant \frac{\|f''\|_\infty}{54n^2}.
\end{aligned}$$

On a donc $v_n = s_n + t_n$, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} ns_n = -\dfrac{1}{36}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} nt_n = 0$ car $|nt_n| \leqslant \dfrac{\|f''\|_\infty}{54n}$: l'équivalent cherché est donc $-\dfrac{1}{36n}$.

Exercice à rapprocher de 7.17.

8.24. On a $P_0(X) = 1$, fonction toujours > 0, et $P_1(X) = X + 1$, qui s'annule en $a_1 = -1$, en étant < 0 pour $x < a_1$ et > 0 pour $x > a_1$.

Supposons que l'on ait :

$$\mathcal{H}_k : \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, P_{2k}(x) > 0 \;; \\ \exists a_{2k+1} \text{ tel que, } \forall x < a_{2k+1}, P_{2k+1}(x) < 0 \;; \text{ avec} \\ \qquad \forall x > a_{2k+1}, P_{2k+1}(x) > 0, \text{ et } P_{2k+1}(a_{2k+1}) = 0. \end{cases}$$

L'hypothèse $\mathcal{H}_0$ est vraie.

En supposant $\mathcal{H}_k$, comme $P'_{2k+2} = P_{2k+1}$, la fonction P_{2k+2} décroît sur $]-\infty, a_{2k+1}[$ et croît ensuite.

Or $P_{2k+2}(a_{2k+1}) = \dfrac{(a_{2k+1})^{2k+2}}{(2k+2)!} + P_{2k+1}(a_{2k+1}) = \dfrac{(a_{2k+1})^{2k+2}}{(2k+2)!}$. Ce nombre est strictement positif car $a_{2k+1} \neq 0$, $(P_{2k+1}(0) = 1)$, donc, le minimum de la fonction P_{2k+2} est strictement positif, on a bien : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_{2k+2}(x) > 0$.

À son tour, $P'_{2k+3} = P_{2k+2}$, donc P_{2k+3} est strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$: ce polynôme s'annule une et une seule fois, en a_{2k+3}, et on a bien $P_{2k+3}(x) < 0$ si $x < a_{2k+3}$, puis $P_{2k+3}(x) > 0$.

On a justifié $\mathcal{H}_{k+1}$ vrai, d'où, par récurrence : les P_{2n} ne s'annulent pas, et les P_{2n+1} ont un seul zéro.

Soit alors a réel fixé, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} P_{2n+1}(a) = e^a > 0$, donc :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, P_{2n+1}(a) > 0.$$

Mais alors, pour ces n, on doit avoir $a_{2n+1} < a$, vu les variations de P_{2n+1}, donc on a :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, a_{2n+1} < a,$$

ne serait-ce pas la traduction de $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{2n+1} = -\infty$? Si fait !

8.25. Pour un indice k compris entre 1 et n, noté $k = n - q$, on aura $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{n-q}{n}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{q}{n}\right)^n = e^{-q}$.

L'expression d_n est donc une somme avec de plus en plus de termes, mais si on considère la somme d'un nombre fini de termes, pour $k = n, n-1, \ldots, n-p$, on pourra passer à la limite dans cette somme. Il y a donc un problème de majoration des autres termes, (et aussi un problème d'indexation en fait).

En notant $k = n - r$, r variant de 0 à $n - 1$, on a déjà :

$$d_n = \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{n-r}{n}\right)^n = \sum_{r=0}^{n-1} \left(1 - \frac{r}{n}\right)^n.$$

On fixe p, on suppose $n - 1 > p$, et on coupe la somme au rang p en posant :

$$d_n = \sum_{r=0}^{p} \left(1 - \frac{r}{n}\right)^n + \sum_{r=p+1}^{n-1} \left(\frac{n-r}{n}\right)^n.$$

Soit $x_{n,p} = \sum\limits_{r=p+1}^{n-1} \left(\frac{n-r}{n}\right)^n$, en reprenant $k = n - r$, c'est encore :

$$x_{n,p} = \sum_{k=1}^{n-p-1} \left(\frac{k}{n}\right)^n.$$

On a $x_{n,p} > 0$, et on va le majorer par une intégrale en remarquant que $x \rightsquigarrow x^n$ est croissante pour $x > 0$, donc on a :

$$\left(\frac{k}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} x^n \mathrm{d}x,$$

d'où $\frac{1}{n} \cdot x_{n,p} \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n-p}{n}} x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \left[\left(1 - \frac{p}{n}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$,

ce qui donne l'encadrement :

$$0 \leqslant x_{n,p} \leqslant \frac{n}{n+1} \left[\left(1 - \frac{p}{n}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right],$$

majorant qui tend vers e^{-p} si n tend vers $+\infty$.

Soit alors $\varepsilon > 0$, on choisit p tel que $e^{-p} < \varepsilon$, (possible car $\lim\limits_{p \to +\infty} e^{-p} = 0$), puis, pour p fixé, on choisit $n > 1 + p$, et aussi assez grand pour que le majorant de $x_{n,p}$ soit inférieur à $e^{-p} + \varepsilon$, (sa limite $+\varepsilon$), ce qui donnera un $n_0 > 0$ tel que, $\forall n \geqslant n_0,\ 0 < x_{n,p} < 2\varepsilon$.

Pour p fixé, pour chacun des $p+1$ termes du type $\left(1 - \frac{r}{n}\right)^n$, $(r \leqslant p)$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{r}{n}\right)^n = e^{-r}$, donc, (somme *finie* de limites) :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{r=0}^{p} \left(1 - \frac{r}{n}\right)^n = 1 + e^{-1} + \ldots + e^{-r} + \ldots + e^{-p} = s_p .$$

Cette expression vaut encore $s_p = \dfrac{1 - e^{-p-1}}{1 - e^{-1}} = \dfrac{e}{e-1} - \dfrac{e^{-p}}{e-1}$, et on peut écrire :

$$\begin{aligned} d_n - \frac{e}{e-1} &= d_n - s_p - \frac{1}{e^p(e-1)} \\ &= \left(\sum_{r=0}^{p} \left(1 - \frac{r}{n}\right)^n - s_p\right) + x_{n,p} - \frac{1}{e^p(e-1)}. \end{aligned}$$

Comme on a choisit p tel que $e^{-p} < \varepsilon$, on a aussi $\dfrac{1}{e^p(e-1)} < \dfrac{1}{e^p} < \varepsilon$, et comme, $\forall n \geqslant n_0,\ 0 < x_{n,p} < 2\varepsilon$, on a :

$$\left|d_n - \frac{e}{e-1}\right| \leqslant \left|\sum_{r=0}^{p} \left(1 - \frac{r}{n}\right)^n - s_p\right| + 2\varepsilon + \varepsilon .$$

Il existe alors n_1 tel que $n \geqslant n_1 \Rightarrow \left|\sum\limits_{r=0}^{p} \left(1 - \frac{r}{n}\right)^n - s_p\right| < \varepsilon$, d'où $\forall n \geqslant \sup\,(n_0, n_1),\ \left|d_n - \dfrac{e}{e-1}\right| \leqslant 4\varepsilon$: la suite des d_n converge vers $\dfrac{e}{e-1}$.

8.26. Les diviseurs de j, entier inférieur à n, sont eux même des entiers k compris entre 1 et n.

La somme des $d(j)$ représente le nombre de diviseurs de tous les entiers compris entre 1 et n. Au lieu de les sommer d'abord pour j fixé, comme dans l'énoncé, on peut se donner un entier k entre 1 et n, compter combien de fois cet entier est diviseur d'un entier inférieur à n, puis, si s_k est ce nombre, sommer les s_k : on aura $\sum_{j=1}^{n} d(j) = \sum_{k=1}^{n} s_k$.

Or k est diviseur d'un $j \leqslant n$ si et seulement si il existe p entier tel que $j = pk$, avec $pk \leqslant n$, soit $p \leqslant \frac{n}{k}$. Il y a donc $\mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right)$, (partie entière) entiers j de ce type, donc $s_k = \mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right)$.

On a $\frac{n}{k} - 1 < \mathrm{E}\left(\frac{n}{k}\right) \leqslant \frac{n}{k}$, d'où, en sommant :

$$n\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - n < \sum_{k=1}^{n} s_k = \sum_{j=1}^{n} d(j) \leqslant n\left(1 + \ldots + \frac{1}{n}\right),$$

et en divisant par n :

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - 1 < u_n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Comme majorant et minorant se comportent comme $\ln n$, on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

8.27. On a une hypothèse faisant intervenir $u_n + \frac{1}{3} u_{3n}$, ce qui est linéaire par rapport à la suite.

La conclusion, (suite bornée ou non), est linéaire aussi par rapport à la suite, alors... on va d'abord se ramener à une limite nulle en soustrayant à u une suite constante, $v_n = a$ pour tout n, tel que $a + \frac{1}{3} a = \frac{4}{3} a = l$, soit $a = \frac{3l}{4}$.

On considère donc la suite définie par $w_n = u_n - \frac{3l}{4}$, on a $w_n + \frac{1}{3} w_{3n}$ qui tend vers 0, et on va voir si w_n est forcément bornée. Eh bien non. Comme les indices interviennent de 3 en 3, on écrit n de façon unique sous la forme :

$$n = 3^{a_n} b_n \text{, avec } a_n \text{ et } b_n \text{ entiers, } b_n \text{ et 3 étant premiers entre eux.}$$

Alors on aura :

$$3n = 3^{a_n+1} b_n,$$

et si on posait $w_n = (-1)^{a_n} 3^{a_n} b_n$, on aurait $|w_n| = n$: la suite est non bornée, et :

$$w_n + \frac{1}{3} w_{3n} = (-1)^{a_n} 3^{a_n} b_n + (-1)^{a_n+1} 3^{a_n} b_n = 0,$$

donc $w_n + \frac{1}{3} w_{3n}$ tend bien vers 0.

Finalement, les suites vérifiant l'hypothèse ne sont pas forcément bornées.

8.28. En écrivant :

$$u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2+\frac{3}{n}} + \ldots + \frac{1}{2+\frac{2n-1}{n}}\right),$$ on peut appliquer la formule de la moyenne à la fonction f définie par : $x \rightsquigarrow f(x) = \frac{1}{2+x}$, x variant de 0 à 2 :

on a subdivisé le segment $[0, 2]$ en n parties d'amplitude $\frac{2}{n}$, et on prend pour valeur de f, entre $x_k = 2 + \frac{2k}{n}$ et $x_{k+1} = 2 + \frac{2k+2}{n}$, la valeur au milieu : $f\left(2 + \frac{2k+1}{n}\right)$.

On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{dx}{2+x} = \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln 2$.

Pour l'équivalent de $v_n = u_n - l$, on remarque que :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1} \\ &= \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{(2n+1)(4n+1+4n+3)-(4n+1)(4n+3)}{(2n+1)(4n+1)(4n+3)} \\
&= \frac{(2n+1)(8n+4)-(16n^2+16n+3)}{(2n+1)(4n+1)(4n+3)} \\
&= \frac{1}{(2n+1)(4n+1)(4n+3)} \approx \frac{1}{32n^3}.
\end{aligned}
$$

La suite des v_n, (et celle des u_n) est monotone, la série des $x_n = v_{n+1} - v_n$ est convergente, avec $x_n \approx \dfrac{1}{32n^3} = y_n$, donc le reste :

$$X_{n-1} = \sum_{k=n}^{+\infty} x_k = \sum_{k=n}^{+\infty} (v_{k+1} - v_k) = -v_n, \text{ (car } \lim_{p \to +\infty} v_p = 0\text{), est}$$

équivalent au reste de la série de terme général $\dfrac{1}{32n^3} = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{32x^3}$.

La fonction f est positive décroissante, donc :

$f(p+1) \leqslant \displaystyle\int_p^{p+1} \frac{dx}{x^3} \leqslant f(p)$, d'où l'encadrement :

$$\int_p^{p+1} \frac{dx}{x^3} \leqslant f(p) \leqslant \int_{p-1}^{p} \frac{dx}{x^3},$$

qui conduit à l'encadrement du reste d'ordre $n-1$:

$$\frac{1}{64n^2} = \int_n^{+\infty} \frac{dx}{32x^3} \leqslant \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{32p^3} \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dx}{32x^3} = \frac{1}{64(n-1)^2},$$

et finalement, v_n équivalent à $-\displaystyle\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{32p^3}$, donc à $-\dfrac{1}{64n^2}$.

Ce procédé est très efficace, et sans douleur !

Chapitre IX

Analyse fonctionnelle

Il s'agit d'étudier les suites ou séries de fonctions. En fait, sur un espace vectoriel normé, on passe facilement d'un problème à l'autre en associant à la suite des u_n la série des $u_{n+1} - u_n$.

Si la convergence simple s'obtient facilement, c'est la **convergence uniforme** qui donnera des résultats. Attention à la dérivation d'une limite : la convergence uniforme porte sur les dérivées, pas sur les fonctions.

Il est bon de savoir que, si on a trouvé la convergence simple sur un ouvert, bien souvent sur les compacts contenus dans cet ouvert on aura convergence uniforme, ou sur des fermés « éliminant » les points curieux, (voir 9. 1).

Ne pas oublier que pour une série, c'est la **convergence normale** que l'on justifie le plus souvent et que s'il s'agit de fonctions d'un intervalle dans $\mathbb{R}$, l'étude des variations permet de conclure facilement, surtout lorsque les fonctions sont monotones.

Cette convergence uniforme sert souvent à justifier des interversions de limites mais attention : cela ne suffit pas pour intervertir une limite de fonctions, (ou une somme de série) et une intégrale sur un intervalle non borné, I.

En fait, pour justifier que $\int_{\mathrm{I}} (\lim u_n) = \lim \int_{\mathrm{I}} u_n$, dans ce cas, on utilise un raisonnement basé sur la « ***convergence dominée*** » du Théorème de Lebesgue, c'est-à-dire la présence en facteur des u_n, (et de la limite u) d'une fonction indépendante de n, qui assure la convergence des intégrales impropres. Voir l'exercice 9.14 par exemple.

On peut aussi essayer de justifier le ***Théorème d'interversion des limites***.

Dans le cas particulier d'une intégrale de série, penser aux ***séries alternées*** ou aux ***progressions géométriques*** qui donnent un majorant, (ou un calcul) du reste, et permettent de conclure en justifiant directement que $\int_{\mathrm{I}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \right) - \sum_{n \leqslant \mathrm{N}} \int_{\mathrm{I}} u_n$ tend vers 0 si N tend vers l'infini, voir 9.4, 9.5, 9.23 par exemple.

Un autre problème souvent posé est la **recherche d'équivalents**, de la somme d'une série ou de la limite d'une suite lorsque la variable tend vers une des bornes du domaine de convergence.

Ne pas oublier qu'on les obtiendra souvent par des inégalités, pouvant elles-mêmes provenir de développements limités, ou d'encadrements de sommes du type $S_N = \sum_{n=0}^{N} f(n)$ par des intégrales, lorsque f est monotone, (pas seulement décroissante). Voir 9.1 par exemple.

Un mot des fonctions définies par des intégrales, lorsqu'il s'agit d'intégrales impropres sur un intervalle I. Une technique consiste à introduire des segments $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont les bornes inférieures et supérieures ont pour limites celles de I, d'étudier les fonctions f_n obtenues en intégrant sur I_n, par Théorèmes de cours, et à justifier le bon type de convergence (uniforme le plus souvent) pour conclure, (voir 9.5).

En ce qui concerne la convergence uniforme, elle est souvent obtenue par une convergence dominée de l'intégrale, mais si elle est non absolument convergente, il ne peut pas être question de convergence dominée. Pensez alors aux découpages de l'intégrale associés aux changements de signe de la fonction intégrée, et à la majoration du reste d'une série alternée ! Voir 9.15, où j'ai employé les deux méthodes.

Les problèmes portant sur les intégrales impropres et les interversions de séries reposent souvent sur l'identité $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + \ldots + u^n + \dfrac{u^{n+1}}{1-u}$, si $u \neq 0$, (voir 9.19), ou sur la connaissance d'un majorant du reste dans les séries alternées qui convergent selon leur critère.

Cette identité sert dans bien des situations, (9.21 par exemple).

La **transformation d'Abel** permet d'obtenir des convergences uniformes lorsque les sommes $S_{p,q}$ sont majorées uniformément par rapport au paramètre, (9.27).

En fait, pour l'étude des fonctions définies par des intégrales impropres, la méthode actuelle est de s'appuyer sur les **Théorèmes de convergence** dominée, lorsqu'ils s'appliquent : on y gagne en efficacité. Voir 9.28, 9.29, 9.30, 9.31.

Avec le **Théorème de convergence monotone**, ils constituent les outils efficaces pour l'étude des intégrales impropres absolument convergentes. Le recours aux intervalles I_n, « segments croissants » de réunion l'intervalle I d'intégration ne se justifie plus que pour les intégrales semi-convergentes. Voir en 9.29 un exemple d'emploi du Théorème de convergence monotone, ou en 9.31.

Mais il faut garder du bon sens : si la fonction définie par une intégrale se calcule facilement, il est inutile de recourir aux Théorèmes généraux ! Voir 9.32.

Énoncés

9.1. On pose $u_n(x) = \dfrac{1}{n + n^2 x}$. Étude de la série de fonctions de terme général u_n. Si f est la fonction somme, équivalents en 0^+ et en $+\infty$ de f.

9.2. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx)\mathrm{d}t$. Étude et calcul de f.

9.3. Étude de $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+tx)(1-t)}}$. Convergence, continuité, dérivabilité ? Calcul, développement en série entière.

9.4. Calculer $\mathrm{I}_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x$ pour $p \in \mathbb{N}^*$, sous forme d'une somme de série.

9.5. Étude de $f\colon\ x \leadsto f(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t$. Montrer que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2}.$$

9.6. Soit q réel, avec $|q| < 1$. Montrer que la suite de fonctions définies sur $\mathbb{C}$ par :

$$u_n(z) = \prod_{k=1}^{n} (1 - q^k z),$$

converge vers une limite continue en z.

9.7. Soit X métrique compact et L_k l'ensemble des applications k Lipschitziennes de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que si une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{R}}$ d'éléments de L_k converge simplement vers f, alors la convergence est uniforme.

9.8. Convergence et calcul, (sous forme de somme d'une série numérique) de

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} x(x - \ln(e^x - 1))\mathrm{d}x.$$

9.9. Calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)}{\ln x}\,dx$.

9.10. Soient f et g deux fonctions de $C°(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, g étant 1 périodique. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t)g(nt)\mathrm{d}t = \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t\right).$$

Peut-on étendre le résultat à des fonctions réglées ?

9.11. Soit f: $[0, 1] \mapsto \mathbb{R}$, continue, telle que pour tout entier k, $\displaystyle\int_0^1 t^k f(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est nulle.

9.12. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note T_n le polynôme défini par $T_n(\cos t) = \cos nt$, pour tout t de $\mathbb{R}$, et W_n le polynôme unitaire proportionnel à T_n. On note $\mathscr{U}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n.

1°) On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme de la convergence uniforme sur $[-1, 1]$.

a) Calculer $\alpha_n = \|W_n\|$.

b) Montrer qu'il existe une suite de points, $-1 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = 1$, en lesquels W_n prend alternativement les valeurs α_n et $-\alpha_n$.

c) Soit V un élément de $\mathscr{U}_n$. Montrer que $\|V\| \geqslant \alpha_n$.

2°) Soit $E = \mathscr{C}°([-1, 1], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire :

$\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$, et de la norme euclidienne associée, notée ν.

a) Montrer que les W_n forment une suite orthogonale.

b) Calculer $\langle W_n, W_n \rangle$.

c) Pour f dans E, minimiser $\nu(f - \alpha_0 W_0 - \alpha_1 W_1 - \ldots - \alpha_n W_n)$ suivant $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On note $c_0, c_1, \ldots, c_n$ les valeurs des α_i ainsi obtenues.

d) La série $\sum c_n W_n$ converge-t-elle pour ν ?

9.13. Déterminer un équivalent, lorsque a tend vers 0^+, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)(t^2+a^2)}$.

9.14. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-ty}\sin t\,dt$, pour $y > 0$. Montrer que la fonction g définie par $g(y) = \int_0^{+\infty} e^{-ty}\,\frac{\sin t}{t}\,dt$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Calculer $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$.

9.15. Soit γ dans $]0, 1[$. Pour x dans $[0, 1]$, on pose :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1-\gamma}}{n+1-\gamma} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+\gamma}}{n+\gamma}.$$

Continuité et dérivabilité de f. Expression de $f(1)$ à l'aide de $B(\gamma) = \int_0^1 t^{-\gamma}(1-t)^{\gamma-1}\,dt$.

9.16. Pour A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et p dans $\mathbb{N}^*$, on pose $f_p(A) = \left(I + \frac{A}{p}\right)^p$.

a) Montrer que la suite des $(f_p)_{p \in \mathbb{N}^*}$, converge uniformément sur tout compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Quelle est la limite.

b) Soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\lim_{p \to +\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{p}\right) \exp\left(\frac{B}{p}\right)\right)^p = \exp(A+B), \text{ et que :}$$

$$\lim_{p \to +\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{p}\right) \exp\left(\frac{B}{p}\right) \exp\left(-\frac{A}{p}\right) \exp\left(-\frac{B}{p}\right)\right)^{p^2} = \exp(AB - BA).$$

c) Soit $\mathscr{G}$ un sous-groupe fermé de $GL_n(\mathbb{R})$, on note :

$$\mathscr{A} = \{M \,;\, M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \,;\, \forall t \in \mathbb{R}, \exp(tM) \in \mathscr{G}\}.$$

Montrer que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Est-il stable pour une autre loi ?

9.17. On pose $u_n(x) = (-1)^n \overbrace{\sin(\sin(\ldots(\sin x)\ldots))}^{n \text{ fois}}$. Montrer que la série de fonction $\sum u_n$ converge simplement, mais pas normalement.

9.18. Développement asymptotique, en $+\infty$, de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\,dt}{x+t}$.

9.19. Trouver la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{n^3 x\, \varphi(x)}{(1+n^2x^2)^2}\, dx$, lorsque φ est C^1 et bornée.

9.20. Limite en 1^- de $(1-t) \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{1+t^n}$.

9.21. On pose $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, et on définit f par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2x}}{1+t^2}\, dt$.

a) Domaine de définition de f. Continuité, dérivabilité.

b) Étudier la limite de f en $+\infty$.

c) Établir que, $\forall x > 0$, $f(x) = 2Ke^x \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-t^2} dt$. En déduire la valeur de K.

9.22. Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1-e^{-x})dx = I$.

9.23. Soient a et b dans $\mathbb{R}$, avec $0 < a < b$. On pose :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(tx)dt.$$

Montrer que f est C^1. Calculer $f'(x)$, $f(0)$, puis $f(x)$.

9.24. Définition et continuité de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos tx}{t^2}\, e^{-t} dt$.

9.25. Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x(1-x)$. Soit K un compact de $]0, 1[$.

On pose $f_n = f \circ \ldots \circ f$, ($n$ fois). Étudier la convergence de la suite des f_n sur K.

En admettant le Théorème de Weierstrass, (toute fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite de polynômes), montrer que toute application continue définie sur $[a, b] \subset]0, 1[$, à valeurs réelles, est limite uniforme, sur $[a, b]$, d'une suite de fonctions polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

9.26. Soit $S_k(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^k a^n e^{-tn}$, pour k entier naturel et a réel. Domaine de convergence.

On pose $f(t) = \dfrac{1}{1 - ae^{-t}}$. Montrer que, pour tout k, il existe un polynôme P_k tel que $f^{(k)} = P_k \circ f$, et trouver la loi de formation des P_k. Déterminer P_3 et en déduire S_3.

9.27. Soient a et b dans $]0, 2\pi[$. Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikb} - e^{ika}}{k} = i \int_a^b \frac{e^{it}}{1 - e^{it}} \, dt.$$

En déduire une expression de $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{e^{ika}}{k}$ à l'aide de fonctions usuelles.

9.28. Convergence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\operatorname{Arc\,tan} x}{x}\right)^2 dx$. On pourra introduire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arc\,tan}(tx)}{x(x^2+1)} \, dx$.

9.29. Soit, pour tout x réel, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t + t^{1+x}}$. Étudier l'ensemble de définition. Continuité, dérivabilité de F. Limites de F en $+\infty$, en 0, et équivalent de F en 0.

9.30. Étudier le domaine de définition, la continuité et la dérivabilité de la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin xt}{e^t - 1} \, dt.$$

Calcul de F, sous forme d'une somme de série de fonctions.

9.31. Ensemble de définition de :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{xt}}{1 + 2t^2} \, dt,$$

continuité, dérivabilité de la fonction F. Limite de F en 0^-.

9.32. Étudier la fonction F définie par :

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} \, \mathrm{d}t,$$

montrer qu'elle est de classe C^{∞} sur son domaine de définition.

Solutions

9.1. Pour $x \geqslant a > 0$, on a $0 \leqslant u_n(x) \leqslant \dfrac{1}{an^2 + n}$, terme général d'une série convergente, d'où convergence normale donc uniforme de la série des u_n, donc continuité de la fonction somme, f, sur $]a, +\infty[$, et ce pour tout $a > 0$, d'où existence et continuité de f sur $]0, +\infty[$.

En fait, on justifie facilement la classe C^∞ de f, par convergence normale, donc uniforme, des séries des dérivées de tout ordre sur $[a, +\infty[$.

En écrivant $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2} \cdot \dfrac{1}{x + \frac{1}{n}}$, on a, $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{n^2\left(x + \frac{1}{n}\right)^{k+1}}$,

donc si $x \geqslant a > 0$, on a $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2} \cdot \dfrac{k!}{a^{k+1}}$, terme général d'une série, (en n), convergente d'où la convergence normale des séries des dérivées de tout ordre.

Pour $x = 0$, la série des $u_n(0) = \dfrac{1}{n}$, $n \geqslant 1$, diverge.

Pour $x < 0$, si $x = -\dfrac{1}{n}$, $u_n(x)$ n'est pas définie ; si $x \notin \left\{-\dfrac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$ la série converge, et elle le fait uniformément sur tout compact $K \subset \left(]-\infty, 0[\setminus \left\{-\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}\right)$.

En effet $F = \{0\} \cup \left\{-\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, si K est un compact de $\Omega =]-\infty, 0] \setminus F =]-\infty, 0[\setminus \left\{-\dfrac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}^*\right\}$ la distance d, de F à K est atteinte, donc est > 0 car $F \cap K = \emptyset$: $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in K, \left|x + \dfrac{1}{n}\right| \geqslant d > 0$, donc $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{dn^2}$. On a convergence normale, donc uniforme sur K, d'où continuité de la somme sur

$\overset{\circ}{\mathrm{K}}$. Ceci étant vrai pour tout compact K, finalement f est continue, (et même C^{∞}) de $\mathbb{R}^* \setminus \left\{-\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ dans $\mathbb{R}$.

Équivalent en $+\infty$.

Pour $x > 1$, en écrivant $u_n(x) = \dfrac{1}{n^2 x\left(1+\frac{1}{nx}\right)}$ et en utilisant la double inégalité $1 - \frac{1}{nx} < \dfrac{1}{1+\frac{1}{nx}} < 1$, après multiplication par $\frac{1}{n^2 x}$ et sommation, on a :

$$\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

donc, en utilisant la fonction zêta : $\zeta(p) = \sum_{n \geqslant 1}\frac{1}{n^p}$, définie pour $p > 1$, et la valeur $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, on a la double inégalité :

$\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x}\zeta(3) \leqslant xf(x) \leqslant \frac{\pi^2}{6}$ qui prouve que $\lim_{x \to +\infty} xf(x) = \frac{\pi^2}{6}$ et donne $f(x) \approx \frac{\pi^2}{6x}$ en $+\infty$.

Équivalent en 0^+.

Pour $x > 0$ fixé, $n \rightsquigarrow \dfrac{1}{n + n^2 x}$ est fonction positive décroissante de n, donc on peut encadrer u_n, et $f(x)$.

On a $u_{n+1} \leqslant \displaystyle\int_n^{n+1}\frac{dt}{t+xt^2} = \int_n^{n+1}\left(\frac{1}{t} - \frac{x}{1+xt}\right)dt \leqslant u_n$, d'où, pour $n \geqslant 2$, l'encadrement :

$$\int_n^{n+1}\frac{dt}{t+xt^2} \leqslant u_n \leqslant \int_{n-1}^{n}\frac{dt}{t+xt^2}, \text{ qui conduit à :}$$

$$\int_1^{N+1}\frac{dt}{t+xt^2} \leqslant \sum_{n=1}^{N}u_n(x) \leqslant \frac{1}{1+x} + \int_1^{N}\frac{dt}{t+xt^2}, \text{ soit :}$$

$$\ln \frac{N+1}{1+x(N+1)} - \ln \frac{1}{1+x} \leqslant \sum_{n=1}^{N} u_n(x) \leqslant \frac{1}{1+x} + \ln \frac{N}{1+xN} - \ln \frac{1}{1+x},$$

ce qui conduit, si N tend vers $+\infty$, à l'inégalité :

$$-\ln x + \ln(1+x) \leqslant f(x) \leqslant -\ln x + \frac{1}{1+x} + \ln(1+x),$$

d'où l'on déduit que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{-\ln x} = 1$, donc que $f(x) \underset{x \to 0^+}{\approx} (-\ln x)$.

9.2. La présence de la fonction $t \rightsquigarrow e^{-t^2}$, (à « décroissance rapide ») va tout simplifier.

D'abord, pour x quelconque fixé, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 e^{-t^2} |\cos tx| = 0$, donc l'intégrale impropre converge absolument, donc converge.

En posant, pour n dans $\mathbb{N}$, $f_n(x) = \int_0^n e^{-t^2} \cos(tx) \mathrm{d}t$, on a une fonction f_n continue, ($(t, x) \rightsquigarrow e^{-t^2} \cos tx$ continue sur $[0, n] \times [x_0 - 1, x_0 + 1]$ compact...), de plus la majoration $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \int_n^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$, uniforme en x, prouve la convergence uniforme des f_n vers f.

En fait, d'après les Théorèmes de dérivation et de convergence uniforme des dérivées, on a f de classe C^∞ car :

$f'_n(x) = \int_0^n e^{-t^2} t \cos\left(tx + \frac{\pi}{2}\right) \mathrm{d}t$, et plus généralement, pour tout p de $\mathbb{N}^*$, $f_n^{(p)}(x) = \int_0^n t^p e^{-t^2} \cos\left(tx + \frac{\pi}{2} p\right) \mathrm{d}t$ existent ;

puis, la convergence de chaque intégrale impropre $\int_0^{+\infty} t^p e^{-t^2} \mathrm{d}t$ donne la convergence uniforme de la suite des $f_n^{(p)}$ vers la fonction $x \rightsquigarrow \int_0^{+\infty} t^p e^{-t^2} \cos\left(tx + \frac{\pi}{2} p\right) \mathrm{d}t$, d'où par récurrence, f de classe C^∞.

L'emploi des Théorèmes de convergence dominée, avec les fonctions $t \rightsquigarrow t^p e^{-t^2}$ donne une conclusion immédiate, et rendent ce qui précède inutile.

En particulier $f'(x) = -\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\sin tx\mathrm{d}t$ existe. Cette intégrale se calcule par parties : $\mathrm{d}u = -te^{-t^2}\mathrm{d}t, v = \sin tx$ d'où $u = \frac{1}{2}e^{-t^2}$ et $\mathrm{d}v = x\cos tx\mathrm{d}t$, d'où, chaque terme ayant un sens :

$$f'(x) = \left[\frac{1}{2}e^{-t^2}\sin tx\right]_0^{+\infty} - \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos tx\mathrm{d}t = -\frac{x}{2}f(x).$$

La fonction f vérifie donc l'équation différentielle linéaire du premier ordre $f'(x) + \frac{x}{2}f(x) = 0$, dont les solutions forment un espace vectoriel de dimension 1, engendré par g définie par : $g(x) = e^{-\frac{x^2}{4}}$, donc f est du type λg, avec $f(0) = \lambda g(0) = \lambda$.

Or $f(0) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, car, sans entrer dans les détails, $(f(0))^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \int_0^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = \iint_{\mathrm{D}} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ avec :
$\mathrm{D} = \{(x, y)\ ;\ x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$, ce qui, en polaire, donne :

$$\Delta = \left\{(\rho, \theta) \in [0, +\infty[\times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\},$$

donc $(f(0))^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\right)\left(\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\right) = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-\rho^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$, et on a $f(0) > 0$.

Finalement, $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$.

9.3. L'expression $(1 + tx)(1 - t)$ doit être positive ou nulle sur $[0, 1]$, ce qui est le cas si $x = 0$. Pour $x \neq 0$, c'est un trinôme qui s'annule en 1 et $-\frac{1}{x}$.

Pour $x > 0$, il est positif sur $\left[-\frac{1}{x}, 1\right]$, segment contenant $[0, 1]$, et pour $x < 0$, il est positif pour t extérieur au segment d'extrémités positives $-\frac{1}{x}$ et 1, on doit donc avoir $-\frac{1}{x} \geqslant 1$ soit $x \geqslant -1$.

Pour $x = -1$, on doit intégrer la fonction $t \rightsquigarrow \frac{1}{1-t}$, intégrale divergente en 1 ;

pour $x > -1$, $f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1+tx)(1-t)}}$ converge, (impropre en 1, fonction intégrée équivalente alors à $\frac{1}{\sqrt{1+x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t}}$).

En fait, la présence de ce facteur $\frac{1}{\sqrt{1-t}}$ nous donne une convergence dominée pour f et pour les intégrales donnant les dérivées de f.

Pour $x \geqslant a > -1$, pour $t \in [0, 1]$, on a $\frac{1}{\sqrt{1+tx}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{1+ta}}$, d'où, pour t dans $]0, 1[$, la majoration de $\frac{1}{\sqrt{(1+tx)(1-t)}}$ par $\frac{1}{\sqrt{(1+ta)(1-t)}}$ fonction d'intégrale impropre convergente : on a f continue sur $]a, +\infty[$.

En fait f est de classe C^{∞}, car à partir de :

$$\varphi(t, x) = \frac{(1+tx)^{-1/2}}{\sqrt{1-t}}, \text{ on a :}$$

$$\frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}(t, x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \dots \left(-\frac{2p-1}{2}\right) \frac{t^p (1+tx)^{-\frac{1+2p}{2}}}{\sqrt{1-t}},$$

donc, pour $x \geqslant a > -1$ et $p \geqslant 1$:

$$\left|\frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}(t, x)\right| \leqslant \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2p-1)}{2^p} \cdot \frac{1}{(1+ta)^{\frac{2p+1}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t}}, \quad \text{majorant}$$

uniforme en x, qui assure la dérivabilité à tout ordre de f, pour $x > a$, ceci pour tout $a > -1$, donc pour $x > -1$.

Un calcul de f est possible, en posant $s = \frac{\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+tx}}$, d'où $(1+tx)s^2 = 1-t$, soit $t(1+xs^2) = 1-s^2$, donc $t = \dfrac{1-s^2}{1+xs^2}$ et $\mathrm{d}t = \dfrac{-2s(1+xs^2)-2xs(1-s^2)}{(1+xs^2)^2}\,\mathrm{d}s$

$$= \frac{-2s(1+x)\mathrm{d}s}{(1+xs^2)^2}.$$

On a $((1+xt)(1-t))^{1/2} = s(1+tx) = s\left(1+x\,\dfrac{1-s^2}{1+xs^2}\right)$

$$= \frac{(1+x)s}{1+xs^2}, \text{ donc :}$$

$$f(x) = \int_1^0 -\frac{2s(1+x)(1+xs^2)}{(1+xs^2)^2(1+x)s}\,\mathrm{d}s = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{1+xs^2}.$$

On a $f(0) = 2$, puis si $x>0$,

$$f(x) = \frac{2}{x}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{s^2+\frac{1}{x}} = \frac{2\sqrt{x}}{x}\,[\mathrm{Arc}\tan s\sqrt{x}]_0^1$$

soit $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x}}\,\mathrm{Arctan}\sqrt{x}$, pour $x>0$,

et pour $x<0$ on obtient $\dfrac{2}{x}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{s^2-\left(-\frac{1}{x}\right)} = -\frac{2}{x}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}s}{\left(-\frac{1}{x}\right)-s^2}$ soit :

$$f(x) = -\frac{2}{x}\sqrt{-x}\,\left[\mathrm{Arg\,th}\ s\sqrt{-x}\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{-x}}\mathrm{Arg\,th}\ \sqrt{-x}.$$

Les développements en série entière de $\mathrm{Arc}\tan u$, ou de $\mathrm{Arg\,th}\ u$, sur $]-1, 1[$, conduisent alors à l'expression

$$f(x) = 2\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^n}{n+1}, \text{ valable sur }]-1, 1[.$$

9.4. Pour $p = 0$, $\dfrac{1}{e^x-1} \approx \dfrac{1}{x}$ en 0 : l'intégrale diverge, alors que pour $p \geqslant 1$, on a un prolongement par continuité.

En $+\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^2\left|\frac{x^p}{e^x-1}\right| = 0$: l'intégrale converge.

On peut écrire $f(x) = \dfrac{x^p}{e^x - 1} = \dfrac{x^p e^{-x}}{1 - e^{-x}}$, et pour $x > 0$, comme $e^{-x} \in]0, 1[$, on a l'identité :

$\dfrac{1}{1 - e^{-x}} = \sum_{k=0}^{n} e^{-kx} + \dfrac{e^{-(n+1)x}}{1 - e^{-x}}$, ce qui conduit, chaque intégrale impropre intervenant étant convergente, à :

$$I_p = \sum_{k=0}^{n} \int_0^{+\infty} x^p e^{-(k+1)x} \mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{x^p e^{-(n+2)x}}{1 - e^{-x}} \mathrm{d}x.$$

Le « reste », $r_{n,p} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{e^x - 1} e^{-(n+1)x} \mathrm{d}x$ va tendre vers 0 si n tend vers $+\infty$.

En effet $g : x \rightsquigarrow \dfrac{x^p}{e^x - 1}$ est telle que $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ existe, ($= 1$ si $p = 1$, 0 sinon) et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$. Comme g est continue sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $\|g\|_\infty$ existe, (on traduit les limites et il reste un compact).

Mais alors, $|r_{n,p}| \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \|g\|_\infty e^{-(n+1)x} \mathrm{d}x = \frac{\|g\|_\infty}{n+1}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} r_{n,p} = 0$, (en fait g dépend de p, fixé).

Puis, des intégrations par parties itérées, avec x^p nul en 0 si $p > 0$ et $e^{-(k+1)x}$ nul en $+\infty$, donnent :

$$\int_0^{+\infty} x^p e^{-(k+1)x} \mathrm{d}x = \frac{p!}{(k+1)^{p+1}},$$

donc $I_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{p!}{(k+1)^{p+1}}$.

9.5. En posant $\varphi(x, t) = \dfrac{\cos xt}{\operatorname{ch} t}$, on a $|\varphi(x, t)| \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ et $\dfrac{1}{\operatorname{ch} t} \approx 2e^{-t}$ en $+\infty$: l'intégrale est absolument convergente donc f est définie sur $\mathbb{R}$, paire.

En posant, pour n dans $\mathbb{N}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^n \frac{\cos xt}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t$, on a f_n continue, et même de classe C^∞, avec, $\forall p \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n^{(p)}(x) = \frac{1}{2}\int_0^n \frac{t^p \cos\left(xt + p\,\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\pi \frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}\,\mathrm{d}t,$$ par les théorèmes généraux.

Comme $\left|\dfrac{\partial^p\varphi}{\partial x^p}(x, t)\right| \leqslant \dfrac{t^p}{\operatorname{ch} t}$ et que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^p}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t$ converge, il y a convergence uniforme en x, des $f_n^{(p)}$ vers la fonction

$$x \rightsquigarrow \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{t^p \cos\left(xt + p\,\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $p = 0$, les f_n, continues, convergent uniformément vers f, donc f est continue ; pour $p = 1$, la convergence uniforme des f_n' donne la dérivabilité de f et l'égalité $f'(x) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\cos\left(xt + \frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t$, et par application itérée de ce résultat on obtient f de classe C^∞.

Bien sûr, l'emploi des Théorèmes de convergence dominée coucircuite cette justification, qu'il faut cependant savoir faire.

En écrivant ensuite $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{2\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\cos xt}{e^t(1 + e^{-2t})}\,\mathrm{d}t$, comme $e^{-2t} \neq -1$, on a, pour tout n, l'égalité :

$$\frac{1}{1 + e^{-2t}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (e^{-2t})^k + \frac{(-1)^{n+1}(e^{-2t})^{n+1}}{1 + e^{-2t}},$$ d'où l'on tire, chaque intégrale impropre intervenant étant convergente, l'égalité :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\cos xt\,\mathrm{d}t + (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(2n+3)t}\cos xt}{1 + e^{-2t}}\,\mathrm{d}t.$$

La dernière intégrale se majore en module par $\int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2n+3}$, donc il y a convergence, (uniforme en x de plus) de la série vers $f(x)$.

On a $\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\cos xt\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t}(e^{ixt}+e^{-ixt})\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{ix-(2k+1)}+\frac{-1}{-ix-(2k+1)}\right)$$

$$= \frac{2k+1}{(2k+1)^2+x^2},$$

donc $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)^2+x^2}$.

9.6. Le terme général n'est défini que pour $n \geqslant 1$. Posons $u_0 = 0$, et introduisons la série de terme général $v_n = u_n - u_{n-1}$, pour $n \geqslant 1$, et $v_0 = 0$, alors $\mathrm{V}_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = u_n$, et on est ramené à l'étude de la convergence de la série de terme général, pour $n \geqslant 2$,

$$v_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1}(1-q^k z)\right)(1-q^n z-1),$$

qui va se majorer en module.

En effet, supposons z dans un compact K de $\mathbb{C}$, si M est une constante positive telle que $|z| \leqslant \mathrm{M}$, on aura, pour tout z de K :

$$|v_n(z)| \leqslant |q|^n \cdot \mathrm{M} \cdot \prod_{k=1}^{n-1}(1+|q|^k\mathrm{M}).$$

Or $\ln(1+|q|^k\mathrm{M})$ est équivalent, (si k tend vers $+\infty$), à $|q|^k\mathrm{M}$, terme général d'une série convergente, ($|q|<1$), donc le produit infini $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|q|^k\mathrm{M})$ converge, et sa limite P est atteinte par valeurs inférieures, d'où une majoration uniforme en z dans K en fait :

$$\|v_n\|_\infty = \sup\{|v_n(z)|\ ;\ z \in \mathrm{K}\} \leqslant \mathrm{MP}|q|^n,$$

par le terme général d'une série convergente.

Il y a convergence normale, donc uniforme, de la série des v_n, sur le compact K, d'où continuité de la somme sur $\overset{\circ}{K}$, ceci pour tout compact K de $\mathbb{C}$. On a bien convergence de la suite des u_n vers une fonction continue en z.

9.7. Tout d'abord, la propriété d'être k.Lipschitzien étant de cardinal fini, (2), elle passe à la limite pour la convergence simple : si les f_n sont k.Lipschitziennes et convergent simplement vers f, on a $|f(x)-f(y)| = \lim\limits_{n \to +\infty} |f_n(x) - f_n(y)|$, et chaque $|f_n(x) - f_n(y)|$ est inférieur à $kd(x, y)$, d'où $|f(x)-f(y)| \leqslant kd(x, y)$.

Soit alors $\varepsilon > 0$ fixé.

À chaque x de X on associe $n(x)$ dans $\mathbb{N}$ tel que, $\forall n \geqslant n(x)$, on ait : $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Mais alors, pour tout y dans la boule ouverte $\mathscr{B}_0\left(x, \dfrac{\varepsilon}{3k}\right)$, (on suppose $k > 0$, sinon les fonctions sont constantes et le résultat est évident), et pour tout $n \geqslant n(x)$, on a :

$$\begin{aligned} |f(y) - f_n(y)| &\leqslant |f(y)-f(x)| + |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| \\ &\leqslant 2k \cdot \frac{\varepsilon}{3k} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Du recouvrement de K compact par les $\mathscr{B}_0\left(x, \dfrac{\varepsilon}{3k}\right)$, on extrait un recouvrement fini associé à $x_1, x_2, ..., x_p$, et si $n_0 = \sup\{n(x_1), n(x_2), ..., n(x_p)\}$, comme pour tout x de X il existe $i \leqslant p$ tel que $x \in \mathscr{B}_0\left(x_i, \dfrac{\varepsilon}{3k}\right)$, si on a $n \geqslant n_0 \geqslant n(x_i)$, on aura $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$: on a bien $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in X, |f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$.

À rapprocher de la justification du Théorème de Dini.

9.8. Pour $x > 0$, la fonction $f : x \rightsquigarrow x(x - \ln(e^x - 1))$ est continue.

En $0, f(x) = x(x - \ln(x + o(x)))$, par développement limité, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$: la fonction est prolongeable par continuité.

En $+\infty$, $f(x) = x(x - \ln e^x(1-e^{-x}))$

$= x(x - x - \ln(1-e^{-x}))$ est équivalente à xe^{-x}, d'intégrale impropre convergente donc I existe, la fonction f étant, comme son équivalent, de signe constant vers $+\infty$.

Pour $x > 0$, on a $e^{-x} \in]0, 1[$, donc en utilisant le développement en série entière de $\ln(1-t)$, valable pour tout t de $[-1, 1[$, on a, pour tout x de $]0, +\infty[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{xe^{-nx}}{n}, \text{ expression valable aussi pour } x = 0.$$

Il nous reste à intervertir l'intégrale impropre sur un intervalle non borné, et la somme de la série. Pour cela, la convergence uniforme ne suffit pas : c'est de la convergence dominée que l'on prend. Aussi va-t-on « emprunter » e^{-x} à e^{-nx}, pour faire converger l'intégrale.

On pose $v_n(x) = \dfrac{xe^{-(n-1)x}}{n}$, et on a :

$$f(x) = e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{xe^{-(n-1)x}}{n}.$$

Puis $v'_n(x) = \dfrac{e^{-(n-1)x}}{n}(1-(n-1)x)$, s'annule en $\dfrac{1}{n-1}$, la fonction v_n croissant de 0 à $v_n\left(\dfrac{1}{n-1}\right)$, puis décroissant de $v_n\left(\dfrac{1}{n-1}\right)$ à 0 lorsque x varie de $\dfrac{1}{n-1}$ à $+\infty$, et ce pour $n \geqslant 2$ bien sûr.

Donc $\|v_n\|_\infty = v_n\left(\dfrac{1}{n-1}\right) = \dfrac{1}{en(n-1)}$: on a convergence normale, donc uniforme, de la série des v_n sur $[0, +\infty[$.

Posons $f_k(x) = e^{-x} \sum\limits_{n=1}^{k} v_n(x)$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, $\exists k_0$, $\forall k \geqslant k_0$, $\forall x \in [0, +\infty[$,

$|f(x) - f_k(x)| \leqslant e^{-x}\varepsilon$, donc :

$$\left| \mathrm{I} - \int_0^{+\infty} f_k(x)\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^{+\infty} |f(x) - f_k(x)|\mathrm{d}x \leqslant \varepsilon \int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = \varepsilon,$$

mais alors $\mathrm{I} = \lim\limits_{k \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} e^{-x} v_n(x) \right) \mathrm{d}x,$

$= \lim\limits_{k \to +\infty} \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{n} \mathrm{d}x$, puisqu'on a une somme finie de fonctions d'intégrales convergentes.

Comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-nx}}{n} \mathrm{d}x = \left[-\frac{xe^{-nx}}{n^2} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} e^{-nx} \mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{n^3},$$

on a finalement $\mathrm{I} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

9.9. On peut aborder ce calcul de deux façons au moins, mais dans chaque cas, commençons par justifier la convergence de l'intégrale impropre. On pose $f(x) = \dfrac{1-x}{\ln x}$, en 0 on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$, donc l'intégrale converge en 0 ; et en 1, $f(x) = \dfrac{(1-x)}{\ln(1-(1-x))}$ est équivalent à -1, d'où un prolongement de f, par continuité également.

Un changement de variable, $(x = e^t)$, permet d'écrire $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1-e^t}{t} e^t \mathrm{d}t$, avec :

$$\frac{1-e^t}{t} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{(k+1)!} - \frac{t^n}{(n+1)!} e^{\theta_n t},$$

avec θ_n entre 0 et 1, ceci par Taylor Lagrange pour la fonction exponentielle.

Comme $\mathrm{J}_k = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{t^k e^t}{(k+1)!} \mathrm{d}t = \frac{(-1)^k}{k+1}$, (on effectue k intégrations par parties), on a :

$$\mathrm{I} = -\sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{0} \frac{t^k e^t}{(k+1)!} \mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{0} \frac{t^n e^{\theta_n t} e^t}{(n+1)!} \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} - \mathrm{L}_n \text{ avec :}$$

$$|L_n| \leqslant \int_{-\infty}^{0} \frac{|t|^n \cdot 1 \cdot e^t}{(n+1)!}\, dt = \frac{1}{n+1}, \text{ puisque } e^{\theta_n t} \text{ est dans } [0, 1],$$

pour $\theta_n t < 0$. Donc L_n tend vers 0, et $I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2$.

Autre calcul, (astuce dirons certains ?) : le $\ln x$ en dénominateur me gène, pour le faire « sauter », il faudrait dériver une fonction puissance ayant $\ln x$ en facteur dans l'exposant, c'est-à-dire du $e^{(\text{qqc chose})\ln x}$... On introduit la fonction de α, $\frac{x^\alpha - x}{\ln x} = \varphi(\alpha, x)$, soit encore $\varphi(\alpha, x) = \frac{e^{\alpha \ln x} - x}{\ln x}$, pour $x \in]0, 1]$, fonction dérivable et de dérivée $\varphi'(\alpha) = e^{\alpha \ln x} = x^\alpha$.

Soit donc $I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\alpha - x}{\ln x}\, dx$, pour α dans [0, 1]. On va justifier la continuité et la dérivabilité de cette fonction de α. Le calcul de $I'(\alpha)$ étant facile, il donnera $I(\alpha)$.

<u>*Convergence en 0*</u> : $|\varphi(\alpha, x)| \leqslant \frac{|x^\alpha| + 1}{|\ln x|} \leqslant \frac{2}{|\ln x|} = \frac{-2}{\ln x}$, fonction majorante d'intégrale impropre convergente, et indépendante de α.

<u>*Convergence en 1*</u> : $x^\alpha - x = e^{\alpha \ln x} - e^{\ln x}$

$$= (\alpha - 1)(\ln x)e^y,$$

avec y entre $\alpha \ln x$ et $\ln x$, et ce par accroissements finis, donc :

$$\left|\frac{x^\alpha - x}{\ln x}\right| \leqslant |\alpha - 1| \leqslant 2, \text{ puisque } y < 0 \ :$$

on majore par une fonction, (constante), d'intégrale impropre convergente, et ceci uniformément en α. Il en résulte d'abord que $I(\alpha)$ existe, puis qu'avec $I_n(\alpha) = \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{x^\alpha - x}{\ln x}\, dx$, on a convergence uniforme des I_n vers I, car :

$$|I(\alpha) - I_n(\alpha)| \leqslant \int_0^{1/n} |\varphi(\alpha, x)|\, dx + \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} |\varphi(\alpha, x)|\, dx$$

$$\leqslant -\int_0^{1/n} \frac{2dx}{\ln x} + \int_{1-\frac{1}{n}}^{1} 2dx,$$

majorant indépendant de α et qui tend vers 0.

Mais I_n est fonction continue de α, donc la limite uniforme est aussi fonction continue de α. Puis I_n est dérivable en α, (Théorème de cours), avec :

$$I'_n(\alpha) = \int_{\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+1}\right),$$

qui converge vers $J(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha+1}$. De plus, cette convergence est uniforme, car pour $\alpha \in [0, 1]$ et $x \in [0, 1]$, $|x^\alpha| \leqslant 1$, donc :

$$|J(\alpha) - I'_n(\alpha)| \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} dx + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 dx = \frac{2}{n}.$$

Mais alors, (dérivation d'une limite), la fonction I est dérivable et $I'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha+1}$.

Comme $I(1) = 0$, on a :

$$I(\alpha) - I(1) = \int_1^\alpha \frac{dt}{t+1} = [\ln(1+t)]_1^\alpha = \ln(1+\alpha) - \ln 2$$

et on retrouve $I = I(0) = -\ln 2$.

Il y a une autre méthode. Comme les intégrales $\displaystyle\int_0 \frac{t dt}{\ln t}$ et $\displaystyle\int_0 \frac{dt}{\ln t}$ convergent, on a :

$$-I = \lim_{x \to 1^-} \left(\int_0^x \frac{t dt}{\ln t} - \int_0^x \frac{dt}{\ln t}\right).$$

En posant $t = \sqrt{s}$ dans la première intégrale, elle devient :

$$\int_0^x \frac{t dt}{\ln t} = \int_0^{x^2} \frac{ds}{2 \cdot \frac{1}{2} \ln s} = \int_0^{x^2} \frac{ds}{\ln s}, \text{ d'où :}$$

$$-I = \lim_{x \to 1^-} \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \lim_{x \to 1^-} \int_x^{x^2} t \cdot \frac{1}{t \ln t} dt.$$

En appliquant une formule de la moyenne, il existe ξ entre x et x^2 tel que :

$$\int_x^{x^2} t \frac{1}{t \ln t} dt = \xi [\ln(\ln t)]_x^{x^2} = \xi \ln \frac{2 \ln x}{\ln x};$$

ce qui tend vers ln 2 si x tend vers 1, d'où finalement $-I = \ln 2$.

9.10. Les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ étant réglées, traitons le cas réglées, en remarquant que f, réglée, est limite uniforme de fonctions en escalier, donc de combinaisons linéaires de fonctions constantes.

Soit donc f constante, égale à λ, sur $[a, b] \subset [0, 1]$, nulle sur $[0, 1] \setminus [a, b]$. On a :

$$\mathrm{I}_n = \int_0^1 f(t)g(nt)\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b g(nt)\mathrm{d}t \text{ ; on pose } nt = s \text{, donc :}$$

$$= \frac{\lambda}{n} \int_{na}^{nb} g(s)\mathrm{d}s.$$

En introduisant p, entier tel que : $na + p \leqslant nb < na + p + 1$, on obtient :

$$\mathrm{I}_n = \frac{\lambda}{n}\left(\sum_{k=0}^{p-1} \int_{na+k}^{na+k+1} g(s)\mathrm{d}s + \int_{na+p}^{nb} g(s)\mathrm{d}s\right).$$

Par 1 périodicité, on vérifie que $\int_{na+k}^{na+k+1} g(s)\mathrm{d}s = \int_0^1 g(s)\mathrm{d}s$, de plus,

en posant $r_n = \int_{na+p}^{nb} g(s)\mathrm{d}s$ on a $|r_n| \leqslant 1 \cdot \|g\|_\infty$ car $nb - (na + p) < 1$.

donc $\mathrm{I}_n = p\,\frac{\lambda}{n}\left(\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t\right) + \frac{r_n}{n}$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{r_n}{n} = 0$, et l'encadrement $a + \frac{p}{n} \leqslant b < a + \frac{p}{n} + \frac{1}{n}$ qui conduit à :

$$b - a - \frac{1}{n} < \frac{p}{n} \leqslant b - a, \quad \text{d'où} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{p}{n} = b - a, \quad \text{et finalement,}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(t)g(nt)\mathrm{d}t = \lambda(b - a) \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t$$

$$= \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t\right), \text{ vu la valeur de } f.$$

Par combinaison linéaire de fonctions du type f, et linéarité de l'intégrale et du passage à la limite, on obtient l'égalité pour f en escalier.

Soit alors f réglée, $\varepsilon > 0$ donné, il existe φ en escalier telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon$, (norme infinie sur [0, 1]), donc, pour tout n, on forme :

$$u_n = \int_0^1 f(t)g(nt)\mathrm{d}t - \int_0^1 f \int_0^1 g$$
$$= \int_0^1 (f(t)-\varphi(t))g(nt)\mathrm{d}t + \left(\int_0^1 \varphi(t)g(nt)\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi \int_0^1 g\right)$$
$$- \left(\int_0^1 f - \int_0^1 \varphi\right)\int_0^1 g,$$

et on va étudier le comportement des trois termes de cette somme. La fonction réglée, 1 périodique, g, est bornée sur $[0, 1]$, donc sur $\mathbb{R}$, d'où

$$|x_n| = \left|\int_0^1 (f(t)-\varphi(t))g(nt)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \varepsilon\|g\|_\infty \mathrm{d}t = \varepsilon\|g\|_\infty,$$

et aussi :

$$|z_n| = \left|\left(\int_0^1 f - \int_0^1 \varphi\right)\int_0^1 g\right| \leqslant \int_0^1 \|f-\varphi\|_\infty \int_0^1 \|g\|_\infty \leqslant \varepsilon\|g\|_\infty.$$

Puis, pour φ en escalier, on a

$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \varphi(t)g(nt)\mathrm{d}t = \int_0^1 \varphi \int_0^1 g$, donc au même $\varepsilon > 0$, on associe n_0 tel que, $\forall n \geqslant n_0$,

$$|y_n| = \left|\int_0^1 \varphi(t)g(nt)\mathrm{d}t - \int_0^1 \varphi \int_0^1 g\right| \leqslant \varepsilon,$$

et finalement, avec $u_n = x_n + y_n - z_n$ on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, |u_n| \leqslant \varepsilon(1 + 2\|g\|_\infty),$$

ce qui, vous en conviendrez facilement, signifie que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(t)g(nt)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t.$$

9.11. Le Théorème de Stone-Weierstrass permet de savoir que f, continue sur $[0, 1]$, est limite uniforme d'une suite P_n de polynômes, et, par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_0^1 \mathrm{P}_n(t) f(t)\mathrm{d}t = 0, \text{ pour tout } n.$$

Or, soit $\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, \|\mathrm{P}_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$, donc :

$$\left|\int_0^1 (f(t)-P_n(t))f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 \|f-P_n\|_\infty \|f\|_\infty \mathrm{d}t,$$

soit encore :

$$0 \leqslant \int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t \leqslant \varepsilon\|f\|_\infty, \text{ et ce pour tout } \varepsilon > 0.$$

C'est que $\int_0^1 f^2(t)\mathrm{d}t$ est nulle, avec f^2 fonction positive continue, elle est nulle donc $f = 0$.

On peut aussi dire que dans $E = \mathscr{C}^\circ([0, 1], \mathbb{R})$, préhilbertien réel normé par $\|\varphi\|_2 = \left(\int_0^1 \varphi^2(t)\mathrm{d}t\right)^{1/2}$, la fonction f est orthogonale à F, espace vectoriel des fonctions polynômes sur [0, 1], donc aussi par continuité du produit scalaire, à l'adhérence de F dans E.

Comme $\|\varphi\|_2 \leqslant \|\varphi\|_\infty$, la densité de F dans E pour $\| \ \|_\infty$, (Stone Weierstrass), implique sa densité pour $\| \ \|_2$ et finalement f est orthogonale à l'espace entier donc f est nulle. Cet aspect « géométrique » lié à l'orthogonalité se retrouve dans l'exercice 5.14.

9.12. En posant $x = \cos t$, on a, pour $t \in [0, \pi]$ et x dans $[-1, 1]$, $t = \operatorname{Arccos} x$, et la relation :

$$\cos nt = \operatorname{Re}(\cos t + i\sin t)^n = \operatorname{Re}\left(\sum_{p=0}^{n} C_n^p (i)^p \sin^p t \cos^{n-p} t\right)$$

$$= \sum_{2k \leqslant n} (-1)^k C_n^{2k} (1-\cos^2 t)^k \cos^{n-2k} t,$$

donne l'égalité :

$$T_n(x) = \sum_{2k \leqslant n} C_n^{2k} (-1)^k (1-x^2)^k x^{n-2k},$$

qui montre que T_n est un polynôme en x, de degré n, le coefficient directeur de T_n étant $\sum_{2k \leqslant n} C_n^{2k}(-1)^k(-1)^k = 2^{n-1}$.

a) Pour tout $x = \cos t \in [-1, 1]$, $T_n(x) = \cos(n \operatorname{Arccos} x)$ est compris entre -1 et 1,1 valeur atteinte si $x = 1$, d'où $\|T_n\|_\infty = 1$, et comme $W_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} T_n$, on obtient $\alpha_n = \|W_n\|_\infty = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

b) De plus, si $nt = k\pi$, $\cos nt = (-1)^k$, donc pour les valeurs $x_k = \cos \dfrac{k\pi}{n}$, on aura $T_n(x_k) = \cos k\pi = (-1)^k$. Vu l'indexation souhaitée, $-1 = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = 1$, en posant $y_k = \cos \dfrac{(n-k)\pi}{n}$, les y_k conviennent, pour $k = 0, 1, \ldots, n$.

c) Soit $V \in \mathcal{U}_n$, comme $W_n \in \mathcal{U}_n$, le polynôme $W_n - V$ devient de degré $n-1$ au plus.

Si on suppose $\|V\|_\infty < \alpha_n$, en chaque y_k on a :

$$|W_n(y_k)| = \alpha_n \text{ et } |V(y_k)| \leqslant \|V\|_\infty < \alpha_n,$$

donc la différence $W_n(y_k) - V(y_k)$ est du signe de $W_n(y_k)$: c'est alternativement positif et négatif. On détermine ainsi n intervalles $[y_i, y_{i+1}]$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, sur lesquels le polynôme $W_n - V$, de degré $n-1$ au plus, s'annule, donc il est nul, mais alors $V = W_n \Rightarrow \|V\|_\infty = \|W_n\|_\infty = \alpha_n$: c'est absurde. Donc $\|V\|_\infty \geqslant \alpha_n$.

2°) Pour f et g continues sur $[-1, 1]$, en 1, (resp. -1), on a $\dfrac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ qui est $O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$, $\left(\text{resp. } O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\right)\right)$, donc $\langle f, g \rangle$ existe, et dépend linéairement de f, de g ; c'est symétrique en f et g, et $(\nu(f))^2 = \langle f, f \rangle$ nul implique f, (continue) nulle. On a une structure préhilbertienne réelle.

a) On a :

$$\langle W_p, W_q \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2^{p-1}} \frac{1}{2^{q-1}} \frac{T_p(x)T_q(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,$$ et, en posant $x = \cos t$, pour $t = \operatorname{Arc}\cos x$ variant de π à 0, il vient :

$$\langle W_p, W_q \rangle = \int_{\pi}^{0} \frac{1}{2^{p+q-2}} \frac{\cos pt \cos qt}{\sin t} (-\sin t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2^{p+q-2}} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\cos(p+q)t + \cos(p-q)t)\,dt.$$

Comme pour n entier non nul, $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos nt\,dt = \left[\frac{1}{n} \sin nt\right]_0^{\pi} = 0$, si $p \neq q$, $n = p+q$ et $m = p-q$ sont entiers non nuls donc $\langle W_p, W_q \rangle = 0$.

b) Si $p = q = 0, p+q = p-q = 0$ et

$$\langle W_0, W_0 \rangle = \frac{1}{2^{-2}} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\,(1+1)\mathrm{d}t = 4\pi \text{ ; alors que si } p = q > 0,$$

$p+q$ est non nul et $p-q = 0$, d'où

$$\langle W_p, W_p \rangle = \frac{1}{2^{2p-2}} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2^{2p-1}}.$$

c) Il résulte de a) et b) que les vecteurs $V_p = \dfrac{W_p}{\nu(W_p)}$ forment une famille orthonormée de polynômes de degrés échelonnés.

En particulier, $V_0, V_1, \ldots, V_n$ est une base orthonormée de $F_n = \mathrm{Vect}\,(1, X, X^2, \ldots, X^n)$, sous-espace ici des fonctions polynômes de degré n au plus, sur $[-1, 1]$. Comme il est sous-espace de dimension finie de E préhilbertien, on a $E = F \oplus F^{\perp}$, et le projeté orthogonal $p(f)$ de f sur F minimise la distance de f à un élément quelconque de F, (Pythagore).

$$\text{Ce projeté est } p(f) = \sum_{i=0}^{n} \langle f, V_i \rangle V_i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{(\nu(W_i))^2} \langle f, W_i \rangle W_i,$$

d'où $c_i = \dfrac{1}{(\nu(W_i))^2} \langle f, W_i \rangle$.

d) Ici, une pincée de Stone-Weierstrass s'impose.

On sait que, pour la norme de la convergence uniforme sur $[-1, 1]$, compact, l'algèbre des fonctions polynômes est partout dense dans $E = \mathscr{C}^{\circ}([-1, 1], \mathbb{R})$. Donc, $\forall \varepsilon > 0, \exists P$, polynôme, tel que $\|f - P\|_{\infty} \leqslant \varepsilon$, f donnée dans E.

Si n_0 est le degré de P, pour tout $n \geqslant n_0$, $P \in F_n = \mathrm{Vect}\,(1, X, \ldots, X^n)$ et on a :

$$(\nu(f - p(f)))^2 = \left(\nu\left(f - \sum_{i=0}^{n} c_i W_i\right)\right)^2$$

$$\leqslant (\nu(f - P))^2,$$

puisque le projeté $p(f)$, minimise cette quantité, soit encore :

$$\left(\nu\left(f-\sum_{i=0}^{n} c_i W_i\right)\right)^2 \leqslant \int_{-1}^{1} \frac{\|f-P\|_\infty^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$
$$\leqslant \varepsilon^2 \cdot \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Il n'est pas nécessaire de calculer cette intégrale pour conclure à la convergence de la série des $c_n W_n$ vers f, pour la norme préhilbertienne ν.

Cet exercice utilise deux propriétés des polynômes de Tchebychev. Le fait qu'ils constituent une famille orthonormée totale dans un espace préhilbertien : c'est le 2° ; et le fait que chaque polynôme T_n, de degré n, atteigne en valeur absolue $n+1$ fois sa norme, avec des signes + et – alternativement, ce qui constitue une propriété utilisée en théorie de l'approximation, pour les familles dites de Tchebychev : c'est le 1°.

9.13. Posons $f(t, a) = \dfrac{1}{(1+t^4)(t^2+a^2)}$, en $+\infty$, $f(t, a)$ est équivalente à $\dfrac{1}{t^6}$, donc l'intégrale impropre converge en $+\infty$, et pour $a > 0$, elle est définie en 0, (fonction continue en 0 par rapport à t), alors que si $a = 0$, $f(t, 0)$ est équivalente à $\dfrac{1}{t^2}$ en 0 donc l'intégrale impropre diverge en ce cas, en 0.

Finalement, $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)(t^2+a^2)}$ existe pour $a > 0$, et plus précisément pour $a \neq 0$, la fonction $a \rightsquigarrow I(a)$ étant paire.

Par ailleurs, si $t \geqslant t_0 > 0$, $f(t, a) \leqslant \dfrac{1}{t_0^2(1+t^4)}$: on a une fonction majorante, d'intégrale impropre convergente, majoration uniforme en a, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} f(t, a)dt$ se majore par une constante en a. Par contre, au voisinage de 0, $\varphi : t \rightsquigarrow \dfrac{1}{1+t^4}$ se comporte comme 1, (continuité), et une intégrale du type $\displaystyle\int_0^{t_0} \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{t_0}{a}$ est équivalente à $\dfrac{\pi}{2a}$ si a tend vers 0^+ : c'est gagné.

Traduisons cela. D'abord la continuité de φ.

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists t_0 > 0$ tel que, pour tout $t \in [0, t_0]$ on ait

$$1 - \varepsilon \leqslant \frac{1}{1+t^4} \leqslant 1 \quad (\leqslant 1 + \varepsilon \text{ en fait, par continuité}).$$

Donc, pour tout $a > 0$, en multipliant par $\frac{1}{t^2 + a^2}$, positif, et en intégrant sur $[0, t_0]$, il vient :

$$(1-\varepsilon) \cdot \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{t_0}{a} \leqslant \int_0^{t_0} f(t, a) \leqslant \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{t_0}{a}.$$

Puis, l'inégalité $0 \leqslant f(t, a) \leqslant \frac{1}{t_0^2(1+t^4)}$, valable pour $t \geqslant t_0$, conduit à :

$$0 \leqslant \int_{t_0}^{+\infty} f(t, a)\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{t_0^2} \int_{t_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4},$$

d'où en sommant :

$$(1-\varepsilon) \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{t_0}{a} \leqslant \int_0^{+\infty} f(t, a)\mathrm{d}t = \mathrm{I}(a) \leqslant \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{t_0}{a} + \frac{1}{t_0^2} \int_{t_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4},$$

d'où, en multipliant par a, $a > 0$, l'encadrement :

$$(1-\varepsilon) \operatorname{Arctg} \frac{t_0}{a} \leqslant a\mathrm{I}(a) \leqslant \operatorname{Arctg} \frac{t_0}{a} + \frac{a}{t_0^2} \int_{t_0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}.$$

Mais alors, ε étant fixé, d'où t_0 aussi fixé, si a tend vers 0^+, le minorant tend vers $\frac{\pi}{2}(1-\varepsilon)$, donc devient $\geqslant \frac{\pi}{2}(1-\varepsilon) - \varepsilon$ pour a proche de 0, et le majorant, qui tend vers $\frac{\pi}{2}$, devient inférieur à $\frac{\pi}{2} + \varepsilon$. Finalement on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \text{ tel que } 0 < a \leqslant \alpha \Rightarrow \frac{\pi}{2}(1-\varepsilon) - \varepsilon \leqslant a\mathrm{I}(a) \leqslant \frac{\pi}{2} + \varepsilon \ :$$

c'est que $\lim\limits_{a \to 0^+} a\mathrm{I}(a) = \frac{\pi}{2}$, et $\mathrm{I}(a) \underset{a \to 0^+}{\approx} \frac{\pi}{2a}$.

À quoi tient l'exercice ? De la convergence dominée vers $+\infty$, de la continuité en 0, vraiment peu de chose...

9.14. Pour $y > 0$, la fonction $t \rightsquigarrow e^{-ty}\sin t$ est continue sur $\mathbb{R}$, et $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 \cdot e^{-ty}\sin t = 0$, donc l'intégrale, impropre en $+\infty$, $J = \int_0^{+\infty} e^{-ty}\sin t\,dt$ converge absolument, donc converge.

Pour tout $T > 0$, on a :

$$\int_0^T e^{-ty}\sin t\,dt = \frac{1}{2i}\int_0^T e^{-ty}(e^{it} - e^{-it})dt$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{t(i-y)}}{i-y} - \frac{e^{-t(i+y)}}{-(i+y)}\right]_0^T$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{(i+y)e^{t(i-y)} + (i-y)e^{-t(i+y)}}{-(1+y^2)}\right]_0^T,$$

et comme $\lim\limits_{T \to +\infty} e^{-yT}e^{iT} = 0 = \lim\limits_{T \to +\infty} e^{-Ty}e^{-iT}$, car $y > 0$, il vient :

$$J = \frac{1}{2i}\,\frac{(i+y)+(i-y)}{1+y^2} = \frac{1}{1+y^2}.$$

Étude de $g(y) = \int_0^{+\infty} e^{-ty}\,\frac{\sin t}{t}\,dt$, intégrale impropre en $+\infty$, car en 0 la fonction intégrée se prolonge par continuité.

La fonction $h : t \rightsquigarrow \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité en 0, elle tend vers 0 en $+\infty$, elle est continue, donc $\|h\|_\infty$ existe sur $[0, +\infty[$, et pour $y \geqslant a > 0$, on a « convergence dominée » de l'intégrale impropre car $\left|e^{-ty}\,\frac{\sin t}{t}\right| \leqslant \|h\|_\infty e^{-ta}$, et la fonction majorante est d'intégrale impropre convergente, donc $g(y)$ existe.

En posant $g_n(y) = \int_0^n e^{-ty}\,\frac{\sin t}{t}\,dt$, on a une fonction continue en y, dérivable, de dérivée $g'_n(y) = -\int_0^n e^{-ty}\sin t\,dt$ et, pour $y \geqslant a > 0$, on a

$$|g(y) - g_n(y)| = \left|\int_n^{+\infty} e^{-ty}\,\frac{\sin t}{t}\,dt\right| \leqslant \int_n^{+\infty} e^{-ta}\|h\|_\infty dt,$$

majorant uniforme en y, qui tend vers 0 si n tend vers l'infini, (inutile de le calculer), donc les g_n convergent uniformément vers g sur $[a, +\infty[$. On a continuité de g sur $]a, +\infty[$, et ce pour tout $a > 0$, donc continuité de g sur $]0, +\infty[$.

Pour la dérivation de g, on a de même, pour $y \geqslant a > 0$,

$$\left|-\int_0^{+\infty} e^{-ty}\sin t\,\mathrm{d}t - g'_n(y)\right| = \left|\int_n^{+\infty} e^{-ty}\sin t\,\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \int_n^{+\infty} e^{-ta}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-an}}{a}$$

majorant uniforme en y, qui tend vers 0, (le calcul était inutile), d'où convergence uniforme des g'_n vers la fonction $y \rightsquigarrow -\int_0^{+\infty} e^{-ty}\sin t\,\mathrm{d}t = -\dfrac{1}{1+y^2}$. Mais alors g est dérivable sur $]a, +\infty[$, de dérivée cette fonction, et ce pour tout $a > 0$. On a finalement $g'(y) = -\dfrac{1}{1+y^2}$ sur $]0, +\infty[$, donc g est bien de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $g(y) = -\mathrm{Arctg}\, y + \text{constante}$.

Les Théorèmes de convergence dominée s'appliquent évidemment, et donnent le résultat sans qu'il soit nécessaire de détailler la justification.

On a $\lim\limits_{y \to +\infty} g(y) = 0$. En effet, toujours avec $h(t) = \dfrac{\sin t}{t}$, bornée sur $[0, +\infty[$, on a, pour $y > 0$, la majoration :

$|g(y)| \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-ty}\|h\|_\infty \mathrm{d}t = \dfrac{\|h\|_\infty}{y}$, d'où $\lim\limits_{y \to +\infty} g(y) = 0$, et finalement $g(y) = \dfrac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\, y$.

Enfin, g est en fait définie en 0, et continue sur $[0, +\infty[$, ce qui donnera $g(0) = \int_0^{+\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2} = \mathrm{I}$, et terminera l'exercice.

La convergence de $g(0)$ peut se faire par une intégration par parties sur $[0, \mathrm{X}]$, et une limite si X tend vers $+\infty$. D'abord, pas de problème en 0, où $h : t \rightsquigarrow (\sin t)/t$ est continue, puis, pour la borne infinie :

$$\int_1^{\mathrm{X}} \frac{1}{t}\cdot \sin t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^{\mathrm{X}} - \int_1^{\mathrm{X}} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

et le second membre a une limite si X tend vers $+\infty$, car $\dfrac{\cos t}{t^2}$ est $O\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$.

Mais alors, on a $g(y) = \lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-ty} \frac{\sin t}{t}\, dt$, qui est valable pour tout $y \geqslant 0$ cette fois, et cette intégrale va apparaître comme somme partielle d'une série alternée. En effet on a :

$$S_n(y) = \int_0^{n\pi} e^{-ty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} e^{-ty} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} e^{-(k\pi+s)y} (-1)^k \frac{\sin s}{k\pi+s}\, ds = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u_k,$$

avec $u_k = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-(k\pi+s)y} \frac{\sin s}{k\pi+s}\, ds$.

On intègre un produit de deux fonctions positives, décroissantes en k, et $|u_k| \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi} 1 \cdot \frac{1}{k\pi}\, ds = \frac{1}{k}$: la série alternée des $(-1)^k u_k$ converge vers $g(y)$ avec la majoration, uniforme en $y \geqslant 0$, $|g(y) - S_n(y)| \leqslant |u_n| = \dfrac{1}{n}$.

Cette toute belle convergence uniforme donne la continuité de g sur $[0, +\infty[$ et la valeur, $\dfrac{\pi}{2}$, de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

9.15. La série de terme général $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^{n+1-\gamma}}{n+1-\gamma}$ est alternée pour x dans $[0, 1]$, et $|u_n(x)|$ tend vers 0 en décroissant : cette série converge et, en notant $U_n(x)$ la somme partielle de rang n et U sa somme, on a la majoration :

$$|U(x) - U_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+2-\gamma}}{n+2-\gamma} \leqslant \frac{1}{n+2-\gamma}, \text{ d'où :}$$

$\|U - U_n\|_\infty \leqslant \dfrac{1}{n+2-\gamma}$ et la convergence uniforme de la série sur $[0, 1]$, $u_n(0)$ valant 0 par continuité.

Le même raisonnement s'applique pour la série des $(-1)^n \dfrac{x^{n+\gamma}}{n+\gamma}$, d'où finalement la continuité de la fonction f, sur $[0, 1]$.

Pour la dérivation, avec les u_n, on a $u'_n(x) = (-1)^n x^{n-\gamma}$, donc $u'_0 = \dfrac{1}{x^\gamma}$ existe sur $]0, 1]$, puis, pour $n \geqslant 1$, la série des $u'_n(x)$ est alternée sur $[0, 1[$, avec $|u'_n(x)|$ qui tend vers 0 en décroissant, ce qui donne une convergence uniforme de la série des dérivées sur $[0, a]$, pour $a \in]0, 1[$ et $n \geqslant 1$.

Il en est de même des $v'_n(x) = (-1)^n x^{n+\gamma-1}$, pour $n \geqslant 1$, et, avec $v'_0(x) = x^{\gamma-1} = \dfrac{1}{x^{1-\gamma}}$, on a finalement f dérivable sur $]0, 1[$.

De plus, sur cet intervalle ouvert, on dérive terme à terme, donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n-\gamma} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{n-(1-\gamma)} \\ &= \frac{x^{-\gamma}}{1+x} + \frac{x^{\gamma-1}}{1+x}. \end{aligned}$$

On a alors, f étant continue sur $[0, 1]$, avec $f(0) = 0$:

$$\begin{aligned} f(1) = f(1) - f(0) &= \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ x \to 1^-}} \int_\varepsilon^x f'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(\frac{t^{-\gamma}}{1+t} + \frac{t^{-1+\gamma}}{1+t} \right) \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

puisque cette intégrale impropre converge, ($\gamma \in]0, 1[$ et $1-\gamma$ aussi).

Elle se coupe en deux intégrales impropres convergentes. Dans la deuxième, on pose $u = \dfrac{1}{t}$, d'où $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}$ et :

$$\int_0^1 \frac{t^{-1+\gamma}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^1 \frac{u^{1-\gamma}}{(u+1)u^{-1}} \left(-\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\right) = \int_1^{+\infty} \frac{u^{-\gamma}}{1+u}\,\mathrm{d}u,$$

d'où $f(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{u^{-\gamma}}{1+u}\,\mathrm{d}u$.

Un dernier changement de variable, $u = \dfrac{y}{1-y}$, pour envoyer $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$, car $y = \dfrac{u}{1+u}$, et on obtient :

$$f(1) = \int_0^1 \frac{y^{-\gamma}}{(1-y)^{-\gamma}} \cdot \frac{1}{\dfrac{1}{1-y}} \cdot \frac{1}{(1-y)^2}\, dy\,,$$

soit encore :

$$f(1) = \int_0^1 y^{-\gamma}(1-y)^{\gamma-1} dy = B(\gamma),$$

et le tour est joué. (Que je n'aime pas ces exercices « culturels »).

9.16. L'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, isomorphe à $\mathbb{R}^{n^2}$ est normé, et toutes les normes sont équivalentes. On prendre la norme d'application linéaire continue associée à une norme de $\mathbb{R}^n$, pour avoir $|||AB||| \leqslant |||A|||\ |||B|||$.

En calculant $\left(I + \dfrac{A}{p}\right)^p = \sum\limits_{k=0}^{p} C_p^k \dfrac{A^k}{p^k}$, on a :

$$|||e^A - f_p(A)||| = \left|\left|\left| \left(\sum_{k=0}^{p} \left(\frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k} \right) A^k \right) + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \right|\right|\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{p} \left| \frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k} \right| |||A|||^k + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} |||A|||^k.$$

Or $\dfrac{C_p^k}{p^k} = \dfrac{p(p-1)\dots(p-k+1)}{p \cdot p \cdot \dots \cdot p} \cdot \dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{k!}$, les valeurs absolues sont inutiles, et on a :

$$|||e^A - f_p(A)||| \leqslant \sum_{k=0}^{p} \left(\frac{1}{k!} - \frac{C_p^k}{p^k} \right) |||A|||^k + \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} |||A|||^k.$$

Si on suppose que A est dans un compact K de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, donc dans un fermé borné, et si on a $|||A||| \leqslant r$, pour tout A de K, on majore *a fortiori* par $\sum\limits_{k=0}^{p} \left(\dfrac{1}{k!} - \dfrac{C_p^k}{p^k} \right) r^k + \sum\limits_{k=p+1}^{+\infty} \dfrac{r^k}{k!}$, donc par : $e^r - \left(1 + \dfrac{r}{p}\right)^p$ en fait.

Or, cette quantité positive vu son expression développée, a pour limite 0, (résultat classique sur $\mathbb{R}$, avec $\left(1+\frac{r}{p}\right)^p = e^{p\ln\left(1+\frac{r}{p}\right)}$, et la majoration, uniforme en A dans le compact K, $|||e^A - f_p(A)||| \leqslant e^r - \left(1+\frac{r}{p}\right)^p$, donne la convergence, uniforme sur K, des f_p vers la fonction exponentielle.

b) On sent qu'il faut mettre $\left(\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right)\right)^p$ sous la forme $\left(I+\frac{\text{truc}}{p}\right)^p$ pour faire le lien avec ce qui précède.

Si on suppose A et B donnés, on a :

$$\exp\frac{A}{p} = I + \frac{A}{p} + S(A)\text{, avec } S(A) = \frac{A^2}{p^2}\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k!}\left(\frac{A}{p}\right)^{k-2}$$

donc $|||S(A)||| \leqslant \dfrac{|||A|||^2}{p^2}\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k!}|||A|||^{k-2} = \frac{1}{p^2}\sum_{k\geqslant 2}\frac{|||A|||^k}{k!}$

$$\leqslant \frac{1}{p^2}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|||A|||^k}{k!} = \frac{e^{|||A|||}}{p^2} = o\left(\frac{1}{p}\right),$$

donc $\exp\left(\frac{A}{p}\right) = I + \frac{A}{p} + \frac{U_p}{p}$ avec $\lim\limits_{p\to+\infty}|||U_p||| = 0$, et de même :

$$\exp\left(\frac{B}{p}\right) = I + \frac{B}{p} + \frac{V_p}{p} \text{ avec } \lim_{p\to+\infty}|||V_p||| = 0,$$

donc :

$$\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right) = I + \frac{A+B}{p} + \frac{W_p}{p},$$

avec $W_p = U_p + V_p + \frac{1}{p}(AB + AV_p + U_pB + U_pV_p)$, donc tel que $\lim\limits_{p\to+\infty}|||W_p||| = 0$.

On a donc

$$\left(\exp\left(\frac{A}{p}\right)\exp\left(\frac{B}{p}\right)\right)^p = \left(I + \frac{A+B+W_p}{p}\right)^p = f_p(A+B+W_p).$$

La suite des W_p convergeant vers 0, est bornée, donc les $A+B+W_p$ sont dans un compact K, sur lequel il y a convergence uniforme des f_p vers la fonction exponentielle, qui est une fonction continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, comme limite uniforme des sommes partielles, $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{M^k}{k!}$, fonctions continues en M.

Donc, $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que $|||X||| \leqslant \alpha$, (X dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$) implique $|||\exp(A+B+X) - \exp(A+B)||| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$; puis il existe p_0 tel que $p \geqslant p_0 \Rightarrow |||W_p||| \leqslant \alpha$, mais aussi, $\exists p_1$ tel que $\forall p \geqslant p_1, \forall M \in K$, $|||\exp(M) - f_p(M)||| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

On applique ceci avec $M = A + B + W_p$, pour $p \geqslant \sup(p_0, p_1)$, et on obtient :

$$\begin{aligned} |||\exp(A+B) - f_p(A+B+W_p)||| &\leqslant |||\exp(A+B) - \exp(A+B+W_p)||| \\ &\quad + |||\exp(A+B+W_p) - f_p(A+B+W_p)||| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui achève la justification de

$$\lim_{p \to +\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{p}\right) \exp\left(\frac{B}{p}\right)\right)^p = \exp(A+B).$$

On procède de même en poussant le « bouchon » du développement limité au cran suivant.

On a $e^{\frac{A}{p}} = I + \frac{A}{p} + \frac{A^2}{2p^2} + o\left(\frac{1}{p^2}\right)$; $e^{\frac{B}{p}} = I + \frac{B}{p} + \frac{B^2}{2p^2} + o\left(\frac{1}{p^2}\right)$; $e^{-\frac{A}{p}} = I - \frac{A}{p} + \frac{A^2}{2p^2} + o\left(\frac{1}{p^2}\right)$ et $e^{-\frac{B}{p}} = I - \frac{B}{p} + \frac{B^2}{2p^2} + o\left(\frac{1}{p^2}\right)$.

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} M &= e^{\frac{A}{p}} e^{\frac{B}{p}} e^{-\frac{A}{p}} e^{-\frac{B}{p}} \\ &= \left(I + \frac{1}{p}(A+B) + \frac{1}{p^2}\left(\frac{A^2}{2} + AB + \frac{B^2}{2}\right) + o\left(\frac{1}{p^2}\right)\right) \\ &\qquad \left(I - \frac{1}{p}(A+B) + \frac{1}{p^2}\left(\frac{A^2}{2} + AB + \frac{B^2}{2}\right) + o\left(\frac{1}{p^2}\right)\right) \\ &= I + \frac{1}{p^2}((A^2 + 2AB + B^2) - (A+B)^2) + o\left(\frac{1}{p^2}\right) \\ &= I + \frac{1}{p^2}(AB - BA) + \frac{W_p}{p^2}, \text{ avec } \lim_{p \to +\infty} |||W_p||| = 0, \end{aligned}$$

et $M^{p^2} = f_{p^2}(AB - BA + W_p)$, converge vers $\exp(AB - BA)$, par le même raisonnement.

c) L'ensemble $\mathscr{A}$ n'est pas vide, car avec 0 matrice carrée d'ordre n, nulle, pour tout t de $\mathbb{R}$ on a $\exp(t0) = I \in \mathscr{G}$.

Puis, si M est dans $\mathscr{A}$, pour tout λ réel et tout t réel, $\exp(t \cdot \lambda M) = \exp((t\lambda) \cdot M)$ est dans $\mathscr{G}$, donc λM est dans $\mathscr{A}$.

Enfin, si M et N sont dans $\mathscr{A}$, pour tout t réel, et tout entier p non nul, $\exp\left(\frac{t}{p} M\right)$ et $\exp\left(\frac{t}{p} N\right)$ sont dans $\mathscr{G}$, groupe multiplicatif, donc les $\left(\exp\left(\frac{tM}{p}\right)\exp\left(\frac{tN}{p}\right)\right)^p$ sont dans $\mathscr{G}$, fermé de $GL_n(\mathbb{R})$: la limite, $\exp(t(M+N))$, est donc dans $\mathscr{G}$.

Ceci étant vrai pour tout t, c'est que $M + N$ est dans $\mathscr{A}$ qui est finalement sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On démontrerait de même, grâce au b), que si M et N sont dans $\mathscr{A}$, leur crochet de Lie, $MN - NM = [M, N]$ est dans $\mathscr{A}$.

9.17. La fonction sinus étant impaire et 2π périodique, on peut supposer x dans $[0, \pi]$, (quitte à changer u_n en $-u_n$ si $x \in [-\pi, 0]$), d'où $u_1 = \sin x \in [0, 1]$.

On a par ailleurs, pour $x \in [0, \pi]$, $\sin x \leqslant x$, d'où $u_{n+1}(x) = \sin(u_n(x)) \leqslant u_n(x)$: la suite des $u_n(x)$ est décroissante, minorée par 0, donc convergente vers $l(x)$ dans $[0, \pi]$, vérifiant $l(x) = \sin l(x)$: il ne reste que $l(x) = 0$.

Mais alors, la série des $u_n(x)$ est alternée, le module tend vers 0 en décroissant : elle converge simplement.

On peut trouver un équivalent de $|u_n(x)|$. En effet on a :

$$\begin{aligned}
|u_{n+1}|^\alpha - |u_n|^\alpha &= \left|u_n\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)\right|^\alpha - |u_n|^\alpha \\
&= |u_n|^\alpha\left(1 - \alpha\,\frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) - 1\right) \\
&= -\frac{\alpha}{6}\,|u_n|^{\alpha+2}(1 + o(1)),
\end{aligned}$$

donc, si $\alpha = -2$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{|u_{n+1}|^2} - \dfrac{1}{|u_n|^2} \right) = \dfrac{1}{3}$, et, par Césaro, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \left(\sum\limits_{k=1}^{n-1} \left(\dfrac{1}{(u_{k+1})^2} - \dfrac{1}{(u_k)^2} \right) \right) = \dfrac{1}{3}$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \left(\dfrac{1}{(u_n)^2} - \dfrac{1}{(u_1)^2} \right) = \dfrac{1}{3}$.

Il en résulte que $|u_n| \approx \left(\dfrac{3}{n}\right)^{1/2}$: il n'y a pas convergence absolue même simple, alors, la convergence normale, vous pensez bien qu'elle n'a pas lieu !

9.18. Pour $x > 0$, la fonction $\varphi : t \rightsquigarrow \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est définie continue sur $[0, +\infty[$, et comme $\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 \varphi(t) = 0$, l'intégrale impropre converge en $+\infty$, donc $f(x)$ existe pour $x > 0$. Pour $x = 0$, $\dfrac{e^{-t}}{t}$ est équivalent à $\dfrac{1}{t}$ en 0 : l'intégrale est impropre divergente en 0. Enfin, si $x < 0$, il y a divergence en 0, en $-x$, alors, $f(x)$ n'existe pas.

Étude en $+\infty$. Pour $x > 0$, on a :

$\dfrac{e^{-t}}{x+t} = \dfrac{1}{x} e^{-t} \cdot \dfrac{1}{1 - \left(-\dfrac{t}{x}\right)}$, et comme $-\dfrac{t}{x} \neq 1$, pour tout $t > 0$, on a une identité, valable pour tout N entier :

$$\frac{e^{-t}}{x+t} = \frac{e^{-t}}{x} \sum_{k=0}^{N} \left(-\frac{t}{x}\right)^k + \frac{e^{-t}}{x} \frac{\left(-\frac{t}{x}\right)^{N+1}}{1 + \frac{t}{x}},$$

et comme on a une somme finie de fonctions d'intégrale impropre convergente sur $[0, +\infty[$ (présence de e^{-t}), on a :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{x^{k+1}} \left(\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} \mathrm{d}t \right) + \frac{(-1)^{N+1}}{x^{N+1}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{N+1} e^{-t}}{t+x} \, \mathrm{d}t.$$

Des intégrations par parties successives donnent $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} \mathrm{d}t = k!$, par ailleurs, avec $\mathrm{R_N}(x) = \dfrac{(-1)^{N+1}}{x^{N+1}} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{N+1} e^{-t}}{t+x} \, \mathrm{d}t$, on a :

$$|\mathrm{R_N}(x)| \leqslant \frac{1}{x^{\mathrm{N}+1}} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\mathrm{N}+1} e^{-t}}{x} \, \mathrm{d}t = \frac{(\mathrm{N}+1)!}{x^{\mathrm{N}+2}} = o\left(\frac{1}{x^{\mathrm{N}+1}}\right),$$

d'où le développement asymptotique en $+\infty$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} + o\left(\frac{1}{x^{\mathrm{N}+1}}\right).$$

9.19. L'intégrale I_n existe, (fonction majorée, en valeur absolue, par $\dfrac{\|\varphi\|_\infty}{n|x|^3}$ en $\pm\infty$).

On remarque que, pour $\alpha > 0$ fixé, on a :

$$\left|\int_\alpha^{+\infty} \frac{n^3 x\varphi(x)}{(1+n^2x^2)^2} \, \mathrm{d}x\right| \leqslant \|\varphi\|_\infty \int_\alpha^{+\infty} \frac{n^3 x}{n^4 x^4} \, \mathrm{d}x = \frac{\|\varphi\|_\infty}{n} \int_\alpha^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$$

$$\leqslant \frac{\|\varphi\|_\infty}{2\alpha^2} \cdot \frac{1}{n},$$ et, pour un α fixé, ceci tendra vers 0 si n tend vers $+\infty$. Il en est de même de $\left|\displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha} \frac{n^3 x\varphi(x)}{(1+n^2x^2)^2} \, \mathrm{d}x\right|$ qui conduit au même majorant.

Il reste à fixer α, uniformément en n, en considérant ce qui se passe au voisinage de 0, où la fonction φ étant dérivable, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x| \leqslant \alpha \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)| \leqslant \varepsilon|x|.$$

On aura donc, avec $u(x) = \varphi(x) - \varphi(0) - x\varphi'(0)$,

$$\left|\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{n^3 x u(x)}{(1+n^2x^2)^2} \, \mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{n^3 x^2 \mathrm{d}x}{(1+n^2x^2)^2},$$

on pose $nx = t$ dans l'intégrale majorante qui devient :

$$\int_{-n\alpha}^{n\alpha} \frac{t^2 \mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2} \, \mathrm{d}t = \pi - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}.$$

En calculant $\mathrm{I} = \pi = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)}$ par parties, on a :

$$\mathrm{I} = \left[t \cdot \frac{1}{(1+t^2)}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} \, \mathrm{d}t$$

$$= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2} \, \mathrm{d}t = 2\left(\pi - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\right)$$

d'où l'on tire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = \frac{\pi}{2}$.

On a donc, pour tout n, $\displaystyle\left|\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{n^3 x u(x)}{(1+n^2x^2)^2}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \varepsilon\,\frac{\pi}{2}$.

$$\text{Or } \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{n^3xu(x)}{(1+n^2x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{n^3x\varphi(x)}{(1+n^2x^2)^2}\,\mathrm{d}x - n^3\varphi(0)\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{x\mathrm{d}x}{(1+n^2x^2)^2} - \varphi'(0)\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{n^3x^2\mathrm{d}x}{(1+n^2x^2)^2}.$$

La deuxième intégrale est nulle, (on intègre une fonction impaire sur $[-\alpha, \alpha]$ et vu le calcul fait précédemment, la troisième valant, $\displaystyle\int_{-n\alpha}^{n\alpha} \frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$, converge vers $\dfrac{\pi}{2}$.

On a donc, avec cet ε et le α associé :

$$\left|\mathrm{I}_n - \frac{\pi}{2}\,\varphi'(0)\right| \leqslant \left|\int_{-\infty}^{-\alpha} \frac{n^3x\varphi(x)}{(1+n^2x^2)^2}\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{n^3x\varphi(x)}{(1+n^2x^2)^2}\right| + \left|\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{n^3x\varphi(x)}{(1+n^2x^2)^2} - \frac{\pi}{2}\,\varphi'(0)\right|$$

$$\left|\mathrm{I}_n - \frac{\pi}{2}\,\varphi'(0)\right| \leqslant \frac{2\cdot\|\varphi\|_\infty}{2\alpha^2}\cdot\frac{1}{n} + \left|\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{u(x)+\varphi(0)+x\varphi'(0)(n^3x)\mathrm{d}x}{(1+n^2x^2)^2} - \frac{\pi}{2}\,\varphi'(0)\right|$$

$$\leqslant \frac{\|\varphi\|_\infty}{n\alpha^2} + \varepsilon\,\frac{\pi}{2} + |\varphi'(0)|\left|\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{n^3x^2\mathrm{d}x}{(1+n^2x^2)^2} - \frac{\pi}{2}\right|,$$

et, pour α fixé, le premier et le troisième terme tendant vers 0 si n tend vers l'infini, leur somme devient inférieure à ε pour $n \geqslant n_0$: finalement on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, \left|\mathrm{I}_n - \frac{\pi}{2}\,\varphi'(0)\right| \leqslant \varepsilon\left(1+\frac{\pi}{2}\right).$$

On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = \frac{\pi}{2}\,\varphi'(0)$. Seule l'hypothèse φ bornée, dérivable en 0 a servi.

9.20. Posons $u_n(t) = \dfrac{t^n}{1+t^n}$, pour t réel.

Si $|t| < 1, |u_n(t)| \approx |t|^n$: il y a convergence absolue de la série ; si $|t| > 1$, $u_n(t)$ tend vers 1 si n tend vers l'infini, d'où divergence. Si $t = 1, u_n(1) = \dfrac{1}{2}$: divergence, et pour $t = -1$ et n impair, $u_n(-1)$ n'existe pas.

Pour tout t réel positif, et pour tout p entier, on a l'identité :

$\dfrac{1}{1+t^n} = \sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^k t^{nk} + \dfrac{(-1)^{p+1} t^{n(p+1)}}{1+t^n}$, donc $u_n(t)$ devient somme de $p+2$ termes de séries absolument convergentes, (toujours parce que $|t| < 1$), d'où :

$$f(t) = \underbrace{\sum_{k=0}^{p} (-1)^k (1-t) \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n(k+1)}}_{S_p(t)} + \underbrace{(-1)^{p+1}(1-t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{(p+2)n}}{1+t^n}}_{R_p(t)}.$$

On a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (t^{k+1})^n = \dfrac{1}{1-t^{k+1}}$ donc $S_p(t) = \sum\limits_{k=0}^{p} (-1)^k \dfrac{(1-t)}{1-t^{k+1}}$.

On a $\dfrac{1-t}{1-t^{k+1}} = \dfrac{1}{1+t+\ldots+t^k}$ qui tend vers $\dfrac{1}{k+1}$, lorsque t tend vers 1^-, donc, pour p fixé, $\lim\limits_{t \to 1^-} S_p(t) = \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$, somme partielle d'une série de somme $\ln 2$.

Il faut donc se débarrasser du reste, uniformément en t. On a, pour $0 < t < 1$:

$$|R_p(t)| \leqslant (1-t) \sum_{n=0}^{+\infty} (t^{p+2})^n = \frac{1-t}{1-t^{p+2}} = \frac{1}{1+t+\ldots+t^{p+1}}, \quad \text{soit :}$$

$|R_p(t)| \leqslant \dfrac{1}{(p+2)t^{p+1}}$, et on peut écrire, pour tout t de $]0, 1[$, et tout entier p, avec ce majorant de $|R_p(t)|$:

$$|f(t) - \ln 2| \leqslant \left| S_p(t) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{k+1} \right| + \left| \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln 2 \right| + \frac{1}{(p+2)t^{p+1}}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0, \exists p_0, \forall p \geqslant p_0, \dfrac{1}{p+2} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{4}$ et $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{k+1} - \ln 2\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Comme alors $\displaystyle\lim_{t \to 1^-} \frac{1}{(p+2)t^{p+1}} = \frac{1}{p+2} \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$, pour un tel $p \geqslant p_0$ *fixé*, il existe $\alpha > 0$, $\alpha < 1$, tel que $t \in [1-\alpha, 1[$ implique :

$\left|S_p(t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k}{k+1}\right| + \dfrac{1}{(p+2)t^{p+1}} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$, d'où finalement $|f(t) - \ln 2| \leqslant \varepsilon$ pour t dans $[1-\alpha, 1[$, ce qui achève la justification de $\displaystyle\lim_{t \to 1^-} f(t) = \ln 2$.

9.21. L'intégrale est impropre en $+\infty$. Pour x fixé, $x < 0$, on a $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} = +\infty$: $f(x)$ n'existe pas, et pour $x \geqslant 0$, on a $0 < \dfrac{e^{-t^2x}}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$: l'intégrale impropre converge, donc f est définie sur $[0, +\infty[$.

De plus, la majoration précédente, uniforme en $x \geqslant 0$, donne la continuité de f car, la fonction f_n, définie, pour n entier fixé, par $f_n(x) = \displaystyle\int_0^n \frac{e^{-t^2x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est continue, $\left(\text{continuité de } (t, x) \rightsquigarrow \dfrac{e^{-t^2x}}{1+t^2}\right)$; et $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$, majorant uniforme en x qui tend vers 0. La convergence uniforme, des f_n continues sur $[0, +\infty[$, vers f, donne la continuité de f. On conclut aussi par le Théorème de convergence dominée.

La fonction f_n est dérivable, (Théorèmes de cours), avec

$$f_n'(x) = \int_0^n \frac{-t^2e^{-t^2x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x > 0$, $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} t^2 \cdot \frac{t^2e^{-t^2x}}{1+t^2} = 0$, donc l'intégrale impropre définissant $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-t^2e^{-t^2x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument.

De plus, pour $x \geqslant a > 0$, on a :

$$|g(x) - f_n'(x)| = \int_n^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-t^2 x} \mathrm{d}t \leqslant \int_n^{+\infty} e^{-t^2 a} \mathrm{d}t,$$

majorant, uniforme en x, qui tend vers 0 si n tend vers $+\infty$.

La convergence uniforme des f_n' vers g sur $[a, +\infty[$, jointe à la convergence des f_n vers f, implique la dérivabilité de f, et l'égalité $f'(x) = g(x)$, sur $]a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, on a finalement f dérivable sur $]0, +\infty[$, avec $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-t^2 e^{-t^2 x}}{1+t^2} \mathrm{d}t$.

Là encore, l'emploi de la convergence dominée permet de conclure plus vite.

Dérivabilité éventuelle en 0^+.

Pour $x > 0$, on a $\frac{f(x) - f(0)}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x} - 1}{x(1+t^2)} \mathrm{d}t$.

Or, pour x réel, $e^x \geqslant 1 + x$, d'où, pour $x > -1$, $e^{-x} \leqslant \frac{1}{1+x}$, et comme ici $xt^2 \geqslant 0$ est bien > -1, on aura :

$$e^{-xt^2} - 1 \leqslant \frac{1}{1+xt^2} - 1 = \frac{-xt^2}{1+xt^2}, \text{ d'où :}$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{-t^2}{(1+t^2)(1+xt^2)} \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{1+xt^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) \mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{1}{x-1} \cdot \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right).$$

Le majorant tend vers $-\infty$ si x tend vers 0^+, d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$. Il y a non dérivabilité de f en 0, (mais on a une tangente verticale).

b) Comme $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 x}}{1+t^2} \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x} \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{x}}$, la fonction f, à valeurs positives, tend vers 0 en $+\infty$.

c) On a $f'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{(t^2+1-1)e^{-t^2x}}{1+t^2}\,dt = f(x) - \int_0^{+\infty} e^{-t^2x}dt$, et, un changement de variable, $u = \sqrt{x}t$, (déjà utilisé au b) en fait), donne l'équation différentielle :

$$f'(x) = f(x) - \frac{K}{\sqrt{x}},$$

vérifiée par f, pour $x > 0$.

L'équation homogène a pour solutions les fonctions $x \rightsquigarrow Ae^x$, et la méthode de variation des constantes, conduit, pour $X \geqslant x > 0$, à : $A(X) - A(x) = -K\int_x^X \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

En posant $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale, on obtient :

$$A(x) - A(X) = 2K\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{X}} e^{-u^2}du.$$

Comme $A(X) = f(X)e^{-X}$ est de limite nulle en $+\infty$, si X tend vers $+\infty$, on en déduit l'égalité :

$$A(x) = 2K\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-u^2}du\text{, d'où } f(x) = 2Ke^x\int_{\sqrt{x}}^{+\infty} e^{-u^2}du.$$

Si x tend vers 0, il en résulte, (continuité de f), que :

$$f(0) = \frac{\pi}{2} = 2K\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = 2K^2 \text{ d'où } K = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

9.22. La fonction f: $x \rightsquigarrow \ln(1-e^{-x})$ est définie continue sur $]0, +\infty[$, équivalente à $-e^{-x}$ en $+\infty$, donc $x^2f(x)$ tend vers 0 et l'intégrale converge (absolument) en $+\infty$.

En 0, $1-e^{-x} = x+o(x)$ et $\sqrt{x}f(x) = \sqrt{x}\ln(x+o(x))$ tend vers 0, d'où la convergence en 0.

On effectue le changement de variable $u = 1-e^{-x}$, d'où $du = e^{-x}dx = (1-u)dx$ et :

$$I = \int_0^1 \frac{(\ln u)}{1-u}\,du.$$

Sur $[0, 1[$, on a, pour tout n, l'identité $\dfrac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{n} u^k + \dfrac{u^{n+1}}{1-u}$, et comme chaque intégrale impropre $I_k = \int_0^1 u^k \ln u\, du$ converge en 0, (la fonction intégrée tend vers 0 si u tend vers 0, pour $k \geqslant 1$, et se comporte comme $\ln u$ si $k = 0$), on a :

$$I = \sum_{k=0}^{n} I_k + R_n,$$

avec $R_n = \int_0^1 \dfrac{u^{n+1}\ln u}{1-u}\, du$, qui converge aussi.

Posons, sur $]0, 1[$, $g(u) = \dfrac{u\ln u}{1-u} = \dfrac{u\ln(1-(1-u))}{1-u}$, on a $\lim\limits_{u\to 0^+} g(u) = 0$ et $\lim\limits_{u\to 1^-} g(u) = -1$, donc g se prolonge par continuité sur $[0, 1]$ et $\|g\|_\infty$ existant, on a :

$$|R_n| \leqslant \int_0^1 u^n |g(u)|\, du \leqslant \frac{\|g\|_\infty}{n+1} \text{ donc } \lim_{n\to\infty} R_n = 0.$$

Un calcul par parties de I_k donne :

$$I_k = \int_0^1 u^k \ln u\, du = \left[\frac{u^{k+1}}{k+1}\ln u\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{u^k}{k+1}\, du = \frac{-1}{(k+1)^2}$$

et finalement $I = -\sum\limits_{k\geqslant 0} \dfrac{1}{(k+1)^2} = -\dfrac{\pi^2}{6}$.

9.23. Si on pose $g(t, x) = \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\cos tx$, pour x fixé, $g(t, x)$ est équivalent à $(b-a)$ si t tend vers 0, donc l'intégrale impropre converge en 0. Comme $|g(t, x)| \leqslant \dfrac{e^{-at}}{t}$, il y a aussi convergence en $+\infty$.

En fait $g(t, x)$ est le produit de la fonction $(t, x) \rightsquigarrow \cos tx$ et de la fonction $(t, x) \rightsquigarrow \dfrac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$, pour $t \neq 0$, et $0 \rightsquigarrow b-a$; les deux étant continues par rapport au couple (t, x), donc, en posant

$f_n(x) = \int_0^n g(t, x)\mathrm{d}t$, on a, pour n dans $\mathbb{N}$, une fonction continue en x, (Théorème de cours), qui converge uniformément vers f car $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t}\,\mathrm{d}t$, majorant uniforme en x, qui tend vers 0 si n tend vers l'infini par convergence de l'intégrale impropre de $\frac{e^{-at}}{t}$. Mais alors f, limite uniforme de fonctions continues, est continue.

De même, on a $\frac{\partial g}{\partial x}(t, x) = -(e^{-at} - e^{-bt})\sin tx$ qui est continue par rapport au couple (t, x), donc, par le cours on sait que f_n est dérivable et :

$$f_n'(x) = -\int_0^n (e^{-at} - e^{-bt})\sin(tx)\mathrm{d}t.$$

Ces fonctions convergent uniformément vers la fonction h avec :

$h(x) = -\int_0^{+\infty} (e^{-at} - e^{-bt})\sin(tx)\mathrm{d}t$, car on a :

$|h(x) - f_n'(x)| \leqslant \int_n^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t = \frac{1}{a(e^a)^n}$, majorant qu'il était inutile de calculer pour justifier qu'il tend vers 0 si n tend vers $+\infty$.

La convergence uniforme des f_n', et celle, simple, des f_n, justifie la dérivabilité de f, et l'égalité $f'(x) = h(x)$, fonction continue comme limite uniforme des f_n' qui sont continues. On a donc f de classe C^1.

On calcule facilement $f'(x)$ car :

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} (e^{-bt} - e^{-at}) \operatorname{Im}(e^{ixt})\mathrm{d}t = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} (e^{(ix-b)t} - e^{(ix-a)t})\mathrm{d}t$$

$$= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{b - ix} - \frac{1}{a - ix}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{b + ix}{b^2 + x^2} - \frac{a + ix}{a^2 + x^2}\right), \text{ d'où}$$

$$f'(x) = \frac{x}{b^2 + x^2} - \frac{x}{a^2 + x^2}.$$

On a ensuite $f(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ n \to +\infty}} \int_\varepsilon^n \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t.$

Or, $\displaystyle\int_{\varepsilon}^{n} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{n} e^{-at}\,\frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_{\varepsilon}^{n} e^{-bt}\,\frac{\mathrm{d}t}{t}$

$$= \int_{a\varepsilon}^{an} e^{-u}\,\frac{\mathrm{d}u}{u} - \int_{b\varepsilon}^{bn} e^{-u}\,\frac{\mathrm{d}u}{u}$$

$$= \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{an}^{bn} \frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

$$= e^{-c_\varepsilon}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\mathrm{d}u}{u} - e^{-d_n}\int_{an}^{bn} \frac{\mathrm{d}u}{u},$$

avec c_ε entre $a\varepsilon$ et $b\varepsilon$ et d_n entre bn et an, par formule de la moyenne, soit encore :

$$= \left(\ln \frac{b}{a}\right)(e^{-c_\varepsilon} - e^{-d_n}).$$

Si ε tend vers 0, c_ε tend vers 0 et e^{-c_ε} vers 1, alors que si n tend vers $+\infty$, d_n tend vers $+\infty$ et e^{-d_n} vers 0.

Donc $f(0) = \ln \frac{b}{a}$.

Mais alors, $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$ conduit à :

$$f(x) = \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{2t}{b^2+t^2} - \frac{2t}{a^2+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \ln \frac{b}{a} + \frac{1}{2}\left[\ln \frac{b^2+t^2}{a^2+t^2}\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2}\ln \frac{b^2+x^2}{a^2+x^2}.$$

9.24. Pour $u \geqslant 0$, si on pose $\varphi(u) = 1 - \frac{u^2}{2} - \cos u$, on a $\varphi'(u) = \sin u - u \leqslant 0$, or $\varphi(0) = 0$, donc φ est négative sur $[0, +\infty[$, ce qui conduit à l'inégalité :

$0 \leqslant 1 - \cos u \leqslant \dfrac{u^2}{2}$, valable pour $u \geqslant 0$, d'où, pour $t > 0$ et x réel positif, l'encadrement :

$$0 \leqslant \frac{1 - \cos tx}{t^2} e^{-t} \leqslant \frac{x^2}{2} e^{-t},$$

valable aussi pour $x < 0$, par parité du cosinus.

Pour x fixé, $\varphi(t, x) = \dfrac{1 - \cos tx}{t^2} e^{-t}$ est tel que $\lim\limits_{t \to 0} \varphi(t, x) = \dfrac{x^2}{2}$, donc l'intégrale impropre définissant f converge en 0, et le majorant donné de $\varphi(t, x)$ assure la convergence en $+\infty$, (présence de e^{-t}), donc f est définie sur $\mathbb{R}$, et c'est une fonction paire.

Posons $f_n(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{n} \varphi(t, x)\mathrm{d}t$.

On a une fonction continue du couple (t, x) dans $\left[\dfrac{1}{n}, n\right] \times \mathbb{R}$, donc f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

Puis, pour $|x| \leqslant a$, on aura, compte tenu de l'encadrement de φ :

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \int_0^{1/n} \frac{x^2}{2} e^{-t}\mathrm{d}t + \int_n^{+\infty} \frac{x^2}{2} e^{-t}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{a^2}{2n} + \frac{a^2}{2} \frac{1}{e^n},$$

majorant uniforme en x et qui tend vers 0, d'où la convergence uniforme sur $[-a, a]$, des f_n continues, vers f, donc f est continue sur $]-a, a[$, et ce, pour tout $a > 0$. On a bien continuité de f sur $\mathbb{R}$.

La majoration, pour $|x| \leqslant a$, de $|\varphi(t, x)|$ par $\dfrac{a^2}{2} e^{-t}$, donne aussi sans effort le résultat grâce aux nouveaux théorèmes de cours.

9.25. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $f^n(0) = f^n(1) = 0$.

La parabole d'équation $f(x) = 2x(1 - x)$ a son sommet en $x = \dfrac{1}{2}$, et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Donc, pour tout x de $[0, 1]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$. De plus, par concavité, $f(x) \geqslant x$ pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, ($f$ au-dessus de la corde joignant $(0, 0)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$). Donc, pour tout $n \geqslant 1$, $f_n(x) \leqslant f(f_n(x)) = f_{n+1}(x) \leqslant \frac{1}{2}$: la suite croissante majorée des $f_n(x)$ converge vers un nombre l de $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ vérifiant $f(l) = l$, à la limite, avec, si $x \in]0, 1[$, $l \geqslant f(x) > 0$: il ne reste que $l = \frac{1}{2}$ comme candidat.

Soit alors K un compact de $]0, 1[$, et $r > 0$, $\left(r < \frac{1}{2}\right)$, tel que $K \subset [r, 1-r]$, pour tout x de K on a : $r \leqslant f(r) \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$, (symétrie de la parabole par rapport à $x = \frac{1}{2}$), d'où, par croissance de f sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, pour tout $n \geqslant 1$, $f_n(r) \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{2}$, et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(r) = \frac{1}{2}$ on a $\left\| f_n - \frac{1}{2} \right\|_\infty \leqslant \frac{1}{2} - f_n(r)$, (norme infinie prise sur K), majorant qui tend vers 0 et donne la convergence uniforme des f_n vers la fonction constante $\frac{1}{2}$, sur chaque compact K de $]0, 1[$.

Soit $[a, b] \subset]0, 1[$ et φ dans $\mathscr{C}^\circ([a, b], \mathbb{R})$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$, avec $\|\varphi - Q\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, (norme infinie sur $[a, b]$).

Soit n le degré de Q. Sur $\mathbb{R}_n[X]$, toutes les normes sont équivalentes, en particulier $\| \ \|_\infty$ et $\|P\|$ = la borne supérieure des valeurs absolues des coefficients de P : il existe une constante c_n telle que pour tout P de $\mathbb{R}_n[X]$ on ait $\|P\|_\infty \leqslant c_n \|P\|$.

Si $Q(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$, on pose $P_r(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} E(2^r a_i) X^i$,

(avec $E(u)$, partie entière de u).

On a $\left|2^r a_i - E(2^r a_i)\right| < 1$, donc :

$$\|2^r Q - P_r\| \leqslant 1 \text{, d'où } \left\|Q - \frac{1}{2^r} P_r\right\| \leqslant \frac{1}{2^r} \text{ et } \left\|Q - \frac{1}{2^r} P_r\right\|_\infty \leqslant \frac{c_n}{2^r}.$$

On choisit r tel que $\frac{c_n}{2^r} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, et pour l'instant on a déterminé un polynôme P_r de degré n et à coefficients entiers tel que $\left\|\varphi - \frac{1}{2^r} P_r\right\|_\infty \leqslant 2\,\frac{\varepsilon}{3}$: on approche.

En effet, la convergence uniforme sur $[a, b]$, des polynômes $f_m(x)$ vers $\frac{1}{2}$, nous permet de dire qu'il existe un m tel que $\left\|(f_m)^r - \frac{1}{2^r}\right\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3\|P_r\|_\infty}$, (n'oublions pas que ε fixé, entraîne n puis r fixés, et maintenant m fixé.

Mais alors $\left\|(f_m)^r P_r - \frac{1}{2^r} P_r\right\|_\infty \leqslant \|P_r\|_\infty \left\|(f_m)^r - \frac{1}{2^r}\right\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$ et, avec $P(X) = (f_m(X))^r P_r(X)$, polynôme à coefficients entiers, on a $\|\varphi - P\|_\infty \leqslant \varepsilon$: le résultat est justifié.

9.26. Posons $u_n(t) = n^k a^n e^{-tn}$. Il y a convergence si $a = 0$, (et dans ce cas $S_k(t) = 0$, bien que 0^0 pose problème !). On suppose $a \neq 0$, alors $\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{a}{e^t}$ tend vers $\frac{a}{e^t}$ d'où convergence absolue si $e^t > |a|$, c'est-à-dire $t > \ln|a|$, divergence si $t < \ln|a|$, car dans ce cas le terme général ne tend pas vers zéro.

Pour $e^t = a$, (si $a > 0$) ou $e^t = -a$, (si $a < 0$), $|u_n(t)| = n^k$, ne tend pas vers 0, donc il y a divergence. On peut remarquer qu'avec $x(t) = ae^{-t}$, on a $S_k(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^k (x(t))^n = g \circ (x(t))$, avec g somme de la série entière des $n^k x^n$, de domaine de convergence $]-1, 1[$, et t doit être tel que $|ae^{-t}| < 1$.

La fonction $f : t \rightsquigarrow \frac{1}{1 - ae^{-t}}$ est de classe C^∞ si $|ae^{-t}| < 1$.

$$\text{On a } f'(t) = \frac{-ae^{-t}}{(1-ae^{-t})^2} = \frac{-ae^{-t}+1-1}{(1-ae^{-t})^2}$$
$$= \frac{1}{(1-ae^{-t})} - \frac{1}{(1-ae^{-t})^2} = f(t) - f^2(t).$$

Si on pose $P_1(X) = X - X^2$, on a $f^{(1)}(t) = P_1 \circ f(t)$.

Supposons l'existence d'un polynôme P_k tel que $f^{(k)} = P_k \circ f$.

$$\text{Alors } f^{(k+1)} = (P'_k \circ f)\, f'(t)$$
$$= P'_k(f(t))P_1(f(t)).$$

En posant $P_{k+1}(X) = P'_k(X)P_1(X)$, on obtient bien un polynôme tel que $f^{(k+1)}(t) = (P_{k+1} \circ f)(t)$.

Par récurrence, à partir de $P_1(X) = X - X^2$ et $P_{k+1} = P'_k P_1$, on vérifie que P_k $(k \geqslant 1)$ est de degré $k+1$.

On a $P_2 = P'_1 P_1 = (1-2X)(X-X^2) = 2X^3 - 3X^2 + X$
et $P_3 = P'_2 P_1 = (6X^2 - 6X + 1)(X - X^2) = -6X^4 + 12X^3 - 7X^2 + X$.

Par ailleurs, pour $|ae^{-t}| < 1$, on a, (avec la convention $0^0 = 0$) :

$$f(t) = \frac{1}{1-ae^{-t}} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-nt} = S_0(t).$$

Or, le terme général $n^k a^n e^{-tn} = u_n(t)$ de la série de somme $S_k(t)$, est tel que $u'_n(t) = -n^{k+1} a^n e^{-tn}$, et pour $|ae^{-t}| \leqslant r < 1$, la série des $u'_n(t)$ converge uniformément, (la série des $n^{k+1} x^n$, a 1 pour rayon de convergence, d'où une convergence uniforme pour $|x| \leqslant r < 1$).

On peut donc dériver terme à terme la série des S_k et constater que $(S_k)' = -S_{k+1}$.

Partant de $S_0 = f$, on a donc successivement $S'_0 = -S_1$, $S''_0 = -S'_1 = S_2$ et $S_3 = -(S_0)^{(3)}$, soit $S_3(t) = -f^{(3)}(t) = -P_3 \circ f(t)$, d'où l'expression :

$$S_3(t) = \frac{6}{(1-ae^{-t})^4} - \frac{12}{(1-ae^{-t})^3} + \frac{7}{(1-ae^{-t})^2} - \frac{1}{1-ae^{-t}}.$$

9.27. Pour faire apparaître une série dans l'intégrale définie $\int_a^b \frac{ie^{it}}{1-e^{it}}\,\mathrm{d}t$, on serait tenté d'utiliser $\frac{1}{1-e^{it}} = \sum_{n \geqslant 0} e^{int}$, mais on a une série divergente. Aussi va-t-on introduire l'expression $f(r, t) = \frac{e^{it}}{1-re^{it}}$, définie pour $r \in [0, 1[$, et t entre a et b, avec cette fois un développement en série de fonctions de t :

$$f(r, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n e^{i(n+1)t},$$

et, pour $r < 1$ fixé, $(r \geqslant 0)$, une convergence normale en t. On aura donc :

$$\int_a^b if(r, t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} r^n \int_a^b ie^{i(n+1)t}\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{r^n}{n+1}\left(e^{i(n+1)b} - e^{i(n+1)a}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} r^{k-1}\,\frac{e^{ikb} - e^{ika}}{k}.$$

Un passage à la limite, (si $r \to 1^-$), devrait nous tirer d'affaire. On a d'abord :

$$|f(r, t) - f(1, t)| = \left|e^{it}\left(\frac{1}{1-re^{it}} - \frac{1}{1-e^{it}}\right)\right|$$

$$= \frac{\left|e^{2it}(r-1)\right|}{\left|1-re^{it}\right|\left|1-e^{it}\right|}$$

$$= \frac{1-r}{\sqrt{((1-r\cos t)^2 + r^2\sin^2 t)((1-\cos t)^2 + \sin^2 t)}}$$

$$= \frac{1-r}{(1+r^2-2r\cos t)^{1/2}\sqrt{2}(1-\cos t)^{1/2}}.$$

Or $t \in [a, b] \subset]0, 2\pi[$, (on peut supposer $a < b$, et avec $\alpha > 0$ tel que $[a, b] \subset [\alpha, 2\pi - \alpha]$, on a : $\cos t \leqslant \cos\alpha$ donc $1 - \cos t \geqslant 1 - \cos\alpha$, et :

$$1 + r^2 - 2r\cos t \geqslant 1 + r^2 - 2r\cos\alpha,$$

d'où, $\forall t \in [a, b]$:

$$|f(r, t) - f(1, t)| \leqslant \frac{1-r}{\sqrt{2}(1+r^2-2r\cos\alpha)^{1/2}(1-\cos\alpha)^{1/2}},$$

majorant uniforme en t, qui tend vers 0 si r tend vers 1^-, ce qui prouve déjà que :

$$i\int_a^b \frac{e^{it}}{1-e^{it}}\,\mathrm{d}t = \int_a^b if(1,t)\mathrm{d}t = \lim_{r\to 1^-}\int_a^b if(r,t)\mathrm{d}t.$$

Considérons alors la série :

$$\mathrm{S}(a,r) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(re^{ia})^k}{k}.$$

La série entière $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{k}$ admet 1 pour rayon de convergence, et, pour $a \neq 0(2\pi)$, converge en $z = e^{ia}$, (par transformation d'Abel : $\frac{1}{k}$ tend vers 0 en décroissant et les sommes $\mathrm{S}_{p,q} = \sum_{n=p}^{q} e^{ina}$ sont majorées), donc, par une autre transformation d'Abel, on justifie la convergence uniforme en $r \in [0, 1]$ cette fois, de la série des $r^k \cdot \frac{e^{ika}}{k}$, donc la continuité de la fonction $r \leadsto \mathrm{S}(a,r)$.

Le travail se fait aussi en b, d'où :

$\lim_{r\to 1^-}\sum_{k=1}^{+\infty} r^{k-1}\frac{e^{ikb}-e^{ika}}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ikb}-e^{ika}}{k}$ et finalement l'égalité voulue : $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ikb}-e^{ika}}{k} = i\int_a^b \frac{e^{it}}{1-e^{it}}\,\mathrm{d}t.$

En posant $\mathrm{F}(b) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{e^{ikb}}{k}$, cette égalité : $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a) = i\int_a^b \frac{e^{it}}{1-e^{it}}\,\mathrm{d}t$, fait apparaître F comme une primitive de la fonction $t \leadsto \frac{ie^{it}}{1-e^{it}}$.

$$\text{Or } \frac{e^{it}}{1-e^{it}} = \frac{(\cos t + i\sin t)(1-\cos t + i\sin t)}{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}$$
$$= \frac{\cos t - 1}{2(1-\cos t)} + \frac{i\sin t(1-\cos t+\cos t)}{2(1-\cos t)}$$
$$= -\frac{1}{2}+\frac{i\sin t}{2(1-\cos t)},$$

d'où $\displaystyle\int_a^b \frac{ie^{it}\mathrm{d}t}{1-e^{it}} = i\,\frac{(a-b)}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos b}{1-\cos a}\right|$.

Il en résulte qu'il existe une constante C telle que :

$$\mathrm{F}(b) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ikb}}{k} = -\frac{ib}{2} - \frac{1}{2}\ln|1-\cos b| + \mathrm{C}.$$

Or $\displaystyle\mathrm{F}(\pi) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln 2 = -\frac{i\pi}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 + \mathrm{C}$, on a $\mathrm{C} = \dfrac{i\pi}{2} - \dfrac{1}{2}\ln 2$, d'où une expression qui vaut ce qu'elle vaut : $\mathrm{F}(b) = \dfrac{i}{2}(\pi - b) - \dfrac{1}{2}\ln 2(1-\cos b)$.

9.28. Posons $f(x) = \left(\dfrac{\mathrm{Arc}\tan x}{x}\right)^2$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$, et $f(x)$ est équivalent à $\left(\dfrac{\pi}{2x}\right)^2$ en $+\infty$, dont l'intégrale impropre :

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty}\left(\frac{\mathrm{Arc}\tan x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x,$$

est absolument convergente.

Une intégration par parties entre ε et X, $\varepsilon > 0$, donne :

$$u = (\mathrm{Arc}\tan x)^2,\ \mathrm{d}u = \frac{2\mathrm{Arc}\tan x}{1+x^2}\ ;$$

$$\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}x}{x^2},\ v = -\frac{1}{x}\ ;\ \text{d'où :}$$

$$\mathrm{I}(\varepsilon, \mathrm{X}) = \int_\varepsilon^{\mathrm{X}}\left(\frac{\mathrm{Arc}\tan x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{-(\mathrm{Arc}\tan x)^2}{x}\right]_\varepsilon^{\mathrm{X}} + 2\int_\varepsilon^{\mathrm{X}} \frac{\mathrm{Arc}\tan x}{x(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

Or $\lim\limits_{\mathrm{X}\to+\infty} \dfrac{-(\mathrm{Arc}\tan \mathrm{X})^2}{\mathrm{X}} = 0$, et comme $\dfrac{(\mathrm{Arc}\tan x)^2}{x}$ est équivalent à x en 0, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \dfrac{(\mathrm{Arc}\tan \varepsilon)^2}{\varepsilon} = 0$ aussi, d'où :

$$\mathrm{I} = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0^+ \\ \mathrm{X} \to +\infty}} \mathrm{I}(\varepsilon, \mathrm{X}) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} x}{x(1+x^2)}\, dx = 2\mathrm{G}(1),$$

si on pose :

$$\mathrm{G}(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(tx)}{x(1+x^2)}\, dx.$$

Pour étudier et calculer G, posons $g(x, t) = \dfrac{\operatorname{Arctan}(tx)}{x(1+x^2)}$, pour $x \neq 0$.

On a $g(x, 0) = 0$ sur $\mathbb{R}^*$, donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x, 0) = 0$.

Puis, si $t \neq 0$, $g(x, t)$ est équivalent à $\dfrac{tx}{x} = t$ si x tend vers 0, donc on posera $g(0, t) = t$, pour tout t.

L'intégrale définissant G est donc impropre en $+\infty$ seulement.

On a $\mathrm{G}(0) = 0$, G impaire, il reste à trouver son domaine de définition pour $t \geqslant 0$.

Or, pour $u \geqslant 0$, $\operatorname{Arctan} u \leqslant u$, donc on a :

$\forall x \in \,]0, +\infty[, \forall t \geqslant 0, 0 \leqslant g(x, t) \leqslant \dfrac{tx}{x(1+x^2)} = \dfrac{t}{1+x^2}$, et, pour $t \in [0, a]$, avec $a > 0$, on a :

$$0 \leqslant g(x, t) \leqslant \frac{a}{1+x^2} = \varphi(x),$$

avec φ positive, continue, telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi$ existe.

Comme g est continue par rapport au couple $(x, t) \in \,]0, +\infty[\, \times [0, a]$, on en déduit l'existence et la continuité de G, sur $[0, a]$, par le théorème de convergence dominée ceci pour tout $a > 0$, donc G *existe sur* $\mathbb{R}$ *et est continue.*

Pour la dérivabilité, on considère $\dfrac{\partial g}{\partial t}(x, t) = \dfrac{x}{x(1+x^2)(1+t^2x^2)}$, avec $x > 0$, d'où la majoration :

$$\forall (x, t) \in \,]0, +\infty[\, \times \mathbb{R}, 0 \leqslant \frac{\partial g}{\partial t}(x, t) \leqslant \frac{1}{1+x^2} = \psi(x),$$

et le Théorème de dérivation de Lebesgue s'applique, on a :

$$\mathrm{G}'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+t^2x^2)},$$

intégrale qu'il nous reste à calculer.

On décompose la fraction rationnelle, par rapport à x^2 comme variable. Pour $t \neq 0$ cela donne :

$$\frac{1}{(1+x^2)(1+t^2x^2)} = \frac{\frac{1}{1-t^2}}{1+x^2} + \frac{\frac{1}{1-\frac{1}{t^2}}}{1+t^2x^2}$$

$$= \frac{1}{1-t^2}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{t^2}{1+t^2x^2}\right),$$

d'où, pour l'intégrale donnant $G'(t)$:

$$G'(t) = \frac{1}{1-t^2}\left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} - t^2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+t^2x^2}\right),$$

$$= \frac{1}{1-t^2}\left(\frac{\pi}{2} - t^2\left[\frac{\operatorname{Arc}\tan tx}{t}\right]_0^{+\infty}\right),$$

$$= \frac{1}{1-t^2}\left(\frac{\pi}{2} - t\,\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2(1+t)}.$$

Compte tenu de $G(0) = 0$, ceci donne :

$$G(t) = \frac{\pi}{2}\ln(1+t),$$

et comme $I = 2G(1)$, on obtient $I = \pi \ln 2$.

9.29. Posons $f(t, x) = \dfrac{1}{1+t+t^{1+x}}$, la fonction est définie sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, à valeurs positives.

En $+\infty$, $t^{1+x} = e^{(1+x)\ln t}$ tend vers :

1°) 0 si $1+x<0$, la fonction est alors équivalente à $\dfrac{1}{1+t}$ et l'intégrale diverge ;

2°) vaut 1 si $x = -1$, la fonction vaut $\dfrac{1}{2+t}$: il y a divergence ;

3°) si $0 < 1+x \leqslant 1$, t^{1+x} tend vers $+\infty$, mais la fonction équivaut à $\dfrac{1}{t}$ ou à $\dfrac{1}{2t}$ en $+\infty$: il y a divergence ;

4°) enfin, pour $x > 0$, la fonction équivaut à $\dfrac{1}{t^{1+x}}$ en $+\infty$, d'où la convergence absolue de l'intégrale en $+\infty$.

Comme pour $x > 0$, on a $\lim\limits_{t \to 0} f(t, x) = 1$, la fonction F est finalement définie pour $x > 0$.

Continuité : on suppose que l'on a : $0 < a \leqslant x \leqslant b$.

Pour $t \in]0, 1]$, $\ln t \leqslant 0$, d'où :

$$(1+b)\ln t \leqslant (1+x)\ln t \leqslant (1+a)\ln t, \text{ donc}$$

$$t^{1+b} \leqslant t^{1+x} \leqslant t^{1+a},$$

et en passant aux inverses, pour $(t, x) \in]0, 1] \times [a, b]$:

$$0 \leqslant f(t, x) \leqslant \frac{1}{1+t+t^{1+b}} \ ;$$

alors que pour $(t, x) \in [1, +\infty[\times [a, b]$, on a :

$$0 \leqslant f(t, x) \leqslant \frac{1}{1+t+t^{1+a}} \ ;$$

la fonction continue, φ, définie par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+t+t^{1+b}} \text{ sur }]0, 1] \text{ et } \varphi(t) = \frac{1}{1+t+t^{1+a}} \text{ sur } [1, +\infty[,$$

permet de conclure à la continuité de F sur $[a, b]$ par le Théorème de convergence dominée, et comme a et b sont quelconques, $a > 0$, on a la continuité pour $x > 0$.

Pour la dérivée, on a de même :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = \frac{-(\ln t)t^{1+x}}{(1+t+t^{1+x})^2}, \text{ et :}$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)\right| \leqslant |\ln t| \cdot \frac{t^{1+x}}{(1+t+t^{1+x})} \cdot \frac{1}{(1+t+t^{1+x})},$$

$$\leqslant \psi(t), \text{ avec, pour } x \in [a, b] :$$

$$\psi(t) = \frac{|\ln t|}{1+t+t^{1+b}} \text{ sur }]0, 1] \text{ et } \psi(t) = \frac{|\ln t|}{1+t+t^{1+a}} \text{ sur } [1, +\infty[.$$

Cette fonction majorante est intégrable sur $]0, +\infty[$, d'où la dérivabilité de F par le Théorème de Lebesgue, et :

$$\mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-\ln t)t^{1+x}}{(1+t+t^{1+x})^2}\, dt.$$

Passons aux limites, en commençant par x tendant vers $+\infty$.

Le comportement différent de t^{1+x} suivant la place de t par rapport à 1 incite à couper l'intégrale en 1.

On a : $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{1+x}} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+x}} = \left[-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{t^x}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x}$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{1+x}} = 0$.

Pour la limite de $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{1+x}}$, lorsque x tend vers $+\infty$, on peut remarquer que, si x croît, t^{1+x} décroît, (car $t \in]0, 1]$, donc $\ln t < 0$), la fonction intégrée croît, donc G est croissante en fonction de x, et de ce fait on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{G}(x) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{G}(n)$: on se ramène à une suite d'intégrales.

En posant $g_n(t) = \dfrac{1}{1+t+t^{n+1}}$, sur $]0, 1[$ ces fonctions convergent simplement vers g avec $g(t) = \dfrac{1}{1+t}$, la suite est croissante, et on a :

$\displaystyle\int_0^1 g_n \leqslant \int_0^1 g(t)\mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln 2$: le *Théorème de convergence monotone* s'applique et nous donne, bien gentiment :

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{G}(x) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{G}(n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n = \int_0^1 g = \ln 2$, d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{F}(x) = \ln 2$.

Venons-en à l'étude en 0.

Si x tend vers 0 en décroissant, pour $t \in]0, 1[$, si on a : $x' < x \Rightarrow t^{1+x} < t^{1+x'}$, d'où après passage à l'inverse, et intégration, $\mathrm{G}(x') < \mathrm{G}(x)$: vu la monotonie de G, on aura $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \mathrm{G}(x) = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{G}\left(\frac{1}{n}\right)$, limites dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Or $\mathrm{G}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{1+\frac{1}{n}}}$, et les fonctions h_n avec : $h_n(t) = \dfrac{1}{1+t+t^{1+1/n}}$ convergent simplement vers $h(t) = \dfrac{1}{1+2t}$ sur

]0, 1[, on a une suite décroissante de fonctions : comme $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+2t} = \frac{1}{2}\,[\ln(1+2t)]_0^1 = \frac{\ln 3}{2}$ existe, on peut dire, par le *Théorème de convergence monotone*, que $\lim\limits_{x \to 0^+} G(x) = \frac{\ln 3}{2}$.

Soit alors $K(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^{1+x}}$.

Cette fois, si x décroît vers 0, $H(x)$ croît, on ramène donc la limite de K à celle des $K\left(\frac{1}{n}\right)$, et la suite croissante des fonctions k_n : $t \rightsquigarrow \frac{1}{1+t+t^{1+1/n}}$, pour $t \in]1, +\infty[$, convergeant vers $k : t \rightsquigarrow \frac{1}{1+2t}$, simplement, comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+2t}$ diverge, la suite croissante des $K\left(\frac{1}{n}\right)$ n'est pas majorée, (contraposé du Théorème de convergence monotone), donc diverge vers $+\infty$:

on a $\lim\limits_{x \to 0^+} K(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} K\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$, et finalement $\lim\limits_{x \to 0^+} F(x) = +\infty$.

<u>*Pour la recherche d'un équivalent,*</u> $G(x)$ tendant vers $\frac{\ln 3}{2}$, constante, c'est $K(x)$ qui nous donnera un infiniment grand.

On constate que :

$$K(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^{1+x}} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^x)}.$$

En posant $t^x = u$, d'où $t = u^{1/x}$ et $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\, u^{\frac{1}{x}-1}\,\mathrm{d}u$, on a :

$$K(x) \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{u^{\frac{1}{x}-1}}{u^{1/x}(1+u)}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)}$$

$$\leqslant \frac{1}{x} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\left[\ln \frac{u}{1+u}\right]_1^{+\infty} = \frac{\ln 2}{x}.$$

En affinant, on a :

$$0 \leqslant \frac{\ln 2}{x} - \mathrm{K}(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t + t^{1+x}} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t + t^{1+x}}$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t + t^{1+x})(t + t^{1+x})} < \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{2+2x}},$$

d'où, après calcul :

$0 \leqslant \dfrac{\ln 2}{x} - \mathrm{K}(x) \leqslant \dfrac{1}{2x+1}$, et le majorant tend vers 1 si x tend vers 0^+. On a donc l'encadrement

$$\frac{\ln 2}{x} - \frac{1}{2x+1} \leqslant \mathrm{K}(x) \leqslant \frac{\ln 2}{x},$$

d'où, en divisant par $\dfrac{\ln 2}{x}$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\mathrm{K}(x)}{\frac{\ln 2}{x}} = 1$, et en fait $\mathrm{K}(x) \approx \mathrm{F}(x) \approx \dfrac{\ln 2}{x}$ si x tend vers 0^+.

Le Théorème de *convergence monotone, encore lui*, donne plus, car :

$$\frac{\ln 2}{x} - \mathrm{K}(x) = \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t + t^{1+x})(t + t^{1+x})} = \mathrm{L}(x),$$

avec L fonction décroissante de x, donc si x décroît vers 0^+, $\mathrm{L}(x)$ croît, on se ramène à $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{L}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, la suite croissante des fonctions l_n :

$$t \rightsquigarrow l_n(t) = \frac{1}{(1 + t + t^{1+1/n})(t + t^{1+1/n})},$$

converge simplement vers l : $t \rightsquigarrow l(t) = \dfrac{1}{2t(1+2t)}$ sur $]1, +\infty[$, et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} l$ existe, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathrm{L}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{x \to 0^+} \mathrm{L}(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t(1+2t)}.$$

Cette intégrale vaut :

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2t} - \frac{1}{(1+2t)}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\ln \frac{t}{1+2t}\right]_1^{+\infty} = \frac{\ln 3 - \ln 2}{2},$$

et finalement :

$$\frac{\ln 2}{x} - F(x) = \frac{\ln 2}{x} - G(x) - K(x) = L(x) - G(x),$$ quantité qui tend vers $\frac{\ln 3}{2} - \frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{2} = -\frac{\ln 2}{2}$, d'où $F(x) = \frac{\ln 2}{x} + \frac{\ln 2}{2} + o(1)$.

9.30. Pour $t \neq 0$, posons $f(t, x) = \dfrac{\sin xt}{e^t - 1}$. Pour $x \neq 0$, on a :

$$f(t, x) \underset{t \to 0}{\approx} \frac{xt}{t} = x, \text{ donc } \lim_{t \to 0} f(t, x) = x.$$

Comme, sur $\mathbb{R}^*$, $f(t, 0) = 0$, on a aussi $\lim\limits_{t \to 0} f(t, 0) = 0$. L'intégrale définissant F est donc définie en 0, impropre en $+\infty$, mais convergente absolument, car :

$$|f(t, x)| \leqslant \frac{1}{e^t - 1} \approx e^{-t} \text{ en } +\infty.$$

Y a-t-il convergence dominée ?

En écrivant, pour $x \neq 0$ et $t > 0$:

$$f(t, x) = \frac{\sin xt}{xt} \cdot \frac{xt}{e^t - 1},$$

on a

$$|f(t, x)| \leqslant |x| \cdot \varphi(t),$$

avec $\varphi(t) = \dfrac{t}{e^t - 1}$, fonction continue de t, positive sur $[0, +\infty[$, d'intégrale convergente sur $[0, +\infty[$.

Pour $|x| \leqslant a$, avec $a > 0$, on a donc convergence dominée (en x), de l'intégrale impropre, continuité de f par rapport au couple (t, x), d'*où la continuité de F* sur $[-a, a]$, pour tout $a > 0$, donc *sur* $\mathbb{R}$.

Passons aux dérivations : pour tout entier k non nul, on a :

$$\frac{\partial^k f(t, x)}{\partial x^k} = \frac{t^k \sin\left(xt + k\,\frac{\pi}{2}\right)}{e^t - 1},$$

d'où :

$$\left|\frac{\partial^k f(t, x)}{\partial x^k}\right| \leqslant \psi_k(t) = \frac{t^k}{e^t - 1},$$

fonction à valeurs positives, intégrable sur $]0, +\infty[$, d'où par le Théorème de dérivation de Lebesgue, F de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$, avec, pour tout k :

$$F^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^k}{e^t - 1} \sin\left(xt + k\frac{\pi}{2}\right) dt.$$

Passons au calcul de $F(x)$. Une convergence uniforme sur un intervalle non borné étant de peu d'utilité, on cherche des évaluations précises du reste d'une série.

C'est le cas de :

$$\frac{1}{e^t - 1} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} = \sum_{k=0}^{n} e^{-(k+1)t} + \frac{e^{-(n+2)t}}{1 - e^{-t}},$$

identité valable pour tout $t > 0$.

Or les intégrales impropres :

$$I_k(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(k+1)t} \sin xt \, dt,$$

sont absolument convergentes, et :

$$r_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} \cdot e^{-(n+1)t} \cdot \sin xt \, dt,$$

est aussi absolument convergente, car la fonction intégrée s'écrit :

$$\frac{\sin xt}{e^t - 1} e^{-(n+1)t} = g(x, t) e^{-(n+1)t},$$

et, pour x fixé, $\lim_{t \to 0} g(x, t) = x$, $\lim_{t \to +\infty} g(x, t) = 0$, d'où comme cette fonction est continue, l'existence de $\|g(x, \cdot)\|_{\infty} = \sup\{|g(x, t)| \; ; \; t > 0\}$, d'où la majoration :

$$\left|\frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}} e^{-(n+1)t} \sin xt\right| \leqslant \|g(x, \cdot)\|_{\infty} e^{-(n+1)t}.$$

Ceci donne l'existence de r_n, et la majoration :

$$|r_n| \leqslant \|g(x, \cdot)\|_{\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt = \frac{\|g(x, \cdot)\|_{\infty}}{n+1},$$

d'où finalement :

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} I_k(x) + r_n,$$

qui donne, puisque r_n tend vers 0 si n tend vers l'infini :

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{I}_k(x),$$

et il ne reste plus qu'à calculer, en intégrant par parties, les $\mathrm{I}_k(x)$.

On a : $\mathrm{I}_k(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(k+1)t}\sin xt\,dt = 0$ si $x = 0$, et pour $x \neq 0$:

$$u(t) = \sin xt, \quad u'(t) = x\cos xt\ ;$$

$$v'(t) = e^{-(k+1)t}, \quad v(t) = -\frac{1}{k+1}e^{-(k+1)t}\ ;$$

comme $\sin(x0) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} (\sin xt)e^{-(k+1)t} = 0$, il vient :

$$\mathrm{I}_k(x) = \frac{x}{k+1}\int_0^{+\infty} e^{-(k+1)t}\cos xt\,dt,$$

que l'on intègre encore par parties.

Avec $u(t) = \cos xt$, d'où $u'(t) = -x\sin xt$, et $v'(t) = e^{-(k+1)t}$, on a :

$$\mathrm{I}_k(x) = \frac{x}{k+1}\left(\left[\frac{-\cos xt}{k+1}e^{-(k+1)t}\right]_0^{+\infty} - \frac{x}{k+1}\int_0^{+\infty} e^{-(k+1)t}\sin xt\,dt\right)$$

$$= \frac{x}{(k+1)^2} - \frac{x^2}{(k+1)^2}\mathrm{I}_k(x), \text{ d'où :}$$

$$\mathrm{I}_k(x) = \frac{x}{x^2 + (k+1)^2}, \text{ et finalement :}$$

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}, \text{ expression valable aussi pour } x = 0.$$

9.31. Posons, pour (t, x) dans $[0, +\infty[\times \mathbb{R}$,

$$f(t, x) = \frac{te^{xt}}{1 + 2t^2}.$$

Cette fonction est continue par rapport à (t, x), donc l'intégrale est définie en 0. Si t tend vers $+\infty$, on a : pour $x \geqslant 0$, $f(t, x) \geqslant \dfrac{t}{1 + 2t^2} \approx \dfrac{1}{2t}$:

il y a divergence de l'intégrale, alors que pour $x < 0$, la fonction, positive, est équivalente à $\frac{e^{xt}}{2t}$ si t tend vers $+\infty$, d'où la convergence de l'intégrale, ($t^2 f(t, x)$ tend vers 0 par exemple).

Donc F est définie sur $]-\infty, 0[$.

Pour $x \leqslant -a$, avec $a > 0$, on a :

$| f(t, x)| \leqslant \frac{te^{-at}}{1+2t^2} = \varphi(t)$, fonction positive, (continue), d'intégrale convergente sur $[0, +\infty[$, donc, (Théorème de convergence dominée), F est continue sur $]-\infty, -a]$, pour tout $a < 0$, donc continue sur $]-\infty, 0[$.

Puis, pour tout entier k, on a $\frac{\partial f^k(t, x)}{\partial x^k} = \frac{t^{k+1}e^{xt}}{1+2t^2}$, donc, pour $x \leqslant -a$ (avec $a > 0$), et pour tout $t \geqslant 0$,

$$\left|\frac{\partial f^k(t, x)}{\partial x^k}\right| \leqslant \frac{t^{k+1}e^{-at}}{1+2t^2} = \psi_k(t),$$

avec ψ_k fonction continue, positive, d'intégrale convergente sur $[0, +\infty[$, d'où, (Théorème de Lebesgue), F est de classe C^{∞}, sur $]-\infty, 0[$ finalement, avec :

$$F^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{k+1}}{1+2t^2} e^{tx} \mathrm{d}t.$$

Cherchons la limite de F en 0^-. Si x croît vers 0^-, $x \rightsquigarrow e^{xt}$ croît, donc $x \rightsquigarrow f(t, x)$ croît : la fonction F est croissante, donc la limite de F se ramène à celle de $\lim\limits_{n \to +\infty} F\left(-\frac{1}{n}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-\frac{t}{n}}}{1+2t^2} \mathrm{d}t$, (limite dans $\overline{\mathbb{R}}$).

Or, avec $f_n(t) = \frac{te^{-\frac{t}{n}}}{1+2t^2}$, on a une suite de fonctions continues, suite croissante, qui converge simplement vers f, continue, avec $f(t) = \frac{t}{1+2t^2}$.

Comme $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = +\infty$, par contraposée du Théorème de convergence monotone, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = +\infty$ donc $\lim_{x \to 0^-} F(x) = +\infty$.

9.32. Pour $t \neq 0$, on pose $f(t, x) = \dfrac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}$: si $x = 1$ on a $f(t, 1) = 0$, donc $\lim_{t \to 0} f(t, 1) = 0$; si $x \neq 1$, on a :

$$\frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} \underset{t \to 0}{\approx} \frac{(x-1)t}{t}, \text{ donc } \lim_{t \to 0} f(t, x) = x - 1 :$$

pour chaque x réel, la fonction est prolongeable par continuité en $t = 0$.

Comme $f(t, 1) = 0$, $F(1)$ existe et $F(1) = 0$.

Pour $x \neq 1$, l'intégrale est définie en 0, et en $+\infty$ elle est convergente si et seulement si $x > 0$.

On peut recourir aux Théorèmes de convergence dominée pour étudier la continuité, la dérivabilité mais ici... il y a plus simple : on peut calculer F.

Pour $\varepsilon > 0$, les intégrales impropres $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$ et $\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t} \mathrm{d}t$ existent.

Si dans la deuxième intégrale on pose $tx = s$, on a :

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{t} \mathrm{d}t = \int_{\varepsilon x}^{+\infty} \frac{e^{-s}}{s} \mathrm{d}s, \text{ donc :}$$

$$\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} \mathrm{d}t = \int_\varepsilon^{\varepsilon x} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t = e^{-\xi} \int_\varepsilon^{\varepsilon x} \frac{\mathrm{d}t}{t},$$

avec ξ entre ε et εx, par formule de la moyenne.

C'est encore $e^{-\xi} \ln x$, et, si ε tend vers 0, ξ tend vers 0 d'où, à la limite, $F(x) = \ln(x)$, pour $x > 0$.

Il est alors facile de voir que F est de classe C^∞.

Séries entières

Le premier problème qui se pose est celui de la *détermination du rayon de convergence*, et du domaine de convergence, de la série des $a_n z^n$. Comme pour $|z| < \mathrm{R}$ la convergence est absolue, on travaille sur un équivalent de $|a_n|$. Ne pas oublier de préciser le comportement de la série sur le bord du disque, souvent par le *critère d'Abel*, (voir 10.3).

Les séries entières s'intégrant et se dérivant terme à terme sans modification du rayon de convergence, ne pas oublier que des encadrements même grossiers de $|a_n|$, du type $0 \leqslant u_n \leqslant |a_n| \leqslant v_n$, avec $\sum u_n z^n$ diverge pour $|z| > a$ et $\sum v_n z^n$ converge pour $|z| < a$ permettent de conclure à $\mathrm{R} = a$, voir 10.9 par exemple.

Il peut enfin se faire que la convergence, et la détermination du rayon de convergence d'une série entière provienne d'autres arguments, du type équation différentielle, ou fonctionnelle, (voir 10.2).

Enfin Taylor Lagrange est toujours d'actualité, (voir 10.4).

Vient ensuite *la détermination de la somme*, souvent à l'aide des fonctions usuelles.

On se tire d'affaire en utilisant les propriétés algébriques sur les séries entières : somme, (ou combinaison linéaire) de séries entières ; dérivation ou intégration de séries connues, produit de séries entières, tous ces procédés pouvant se combiner. En particulier la dérivée de Arctg $u(x)$, $\dfrac{u'}{1+u^2}$, sera une fraction rationnelle si u en est une, d'où un calcul possible, (10.10).

À ce propos, si on veut « extraire » une série d'une série entière, en prenant les termes de p en p, penser aux racines $p^{\text{ième}}$ de l'unité qui peuvent introduire cette périodicité, (voir 10.5, 10.8).

De même, si on considère $\sum a_n x^n$, avec a_n fraction rationnelle en n, on peut la décomposer en éléments simples...

Se pose aussi le *problème du développement en série entière* d'une fonction f, et là, bien souvent les arguments liés aux équations différentielles interviennent, f intervenant comme la solution répondant à une donnée initiale, et une série entière déterminée terme à terme convenant aussi. C'est la connaissance de *Cauchy Lipschitz* qui donne la réponse.

Il reste toutes les questions liées *à l'analycité*, du type zéros isolés à l'intérieur du domaine de convergence, d'où les prolongements analytiques, voir 10.1 ; 10.7 ; 10.22.

Ne pas oublier la convergence uniforme sur tout compact contenu dans le *domaine ouvert* de convergence, ce qui conduit à la détermination intégrale des a_n sous la forme :

$a_n = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$, (**formules de Cauchy**), avec γ cercle de centre 0, de rayon $r < R$, dans $\mathbb{C}$, (voir 10.20) orienté dans le sens direct.

Enfin un détour par les **séries de Fourier** vaut la peine, car si on a une série entière $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, de rayon de convergence $R > 0$, pour chaque $r \in [0, R[$, on dispose d'une série trigonométrique $S_r(\theta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}$ fonction de classe C^∞ en fait, dont on connaît la série de Fourier, d'où Bessel..., (voir 10.6).

Quelques compléments.

Définition du logarithme complexe : voir 10.1.

Ne pas oublier qu'une **transformation d'Abel**, comme toujours dans les séries, peut servir. Elle est basée sur la présence d'un terme, u_n, différence de deux choses consécutives : $u_n = a_n - a_{n-1}$, et d'une interversion de deux sommations. Penser à $1 = (n+1) - n$, (eh oui), ou bien à la différence de deux sommes partielles consécutives d'une série.

Penser aux interversions de sommations dans les sommes doubles, (10.7).

Les progressions géométriques ça c'est quelque chose ! (10.9 par exemple).

Énoncés

10.1. Soit a un endomorphisme de E espace vectoriel complexe de dimension finie. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que, pour tout s de $]-R, R[$, on ait

$$\det(\mathrm{Id} - sa) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k}{k} \operatorname{trace}(a^k)\right).$$

10.2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe un réel q vérifiant $|q| < 1$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (1 - qx) f(qx).$$

Montrer que f se développe en série entière de rayon de convergence infini.

10.3. Domaine de convergence de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} x^n \frac{\ln n}{1 + n^{\alpha}}$.

10.4. Soit P un polynôme de degré impair de $\mathbb{R}[X]$, et f une application de classe C^{∞} de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left|f^{(n)}(x)\right| \leqslant P(x).$$

Que dire de f ?

10.5. On donne $\displaystyle S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$. On donne deux entiers h et p fixés.

Exprimer $\displaystyle S_{h,p}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{h+kp}\, x^{h+kp}$.

10.6. Soit (a_n) une suite d'éléments de $\mathbb{Z}$ telle que la série $\sum a_n z^n$ ait un rayon de convergence $R \geqslant 1$, et que la fonction somme, f, soit bornée sur le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$. Montrer que f est une fonction polynôme.

10.7. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Une fonction f de I dans $\mathbb{R}$ est analytique sur I si elle est développable en série entière en chaque x de I.

a) Soient g_1 et g_2 analytiques sur I, et x_0 dans I. Montrer l'équivalence de :

i) $g_1 = g_2$,

ii) $\forall n \geqslant 0, g_1^{(n)}(x_0) = g_2^{(n)}(x_0)$,

iii) g_1 et g_2 coïncident sur un voisinage de x_0.

b) Soit $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ pour $x > 1$. Montrer que ζ est analytique sur $]1, +\infty[$.

Trouver un équivalent $Q(x)$ de $\zeta(x)$ en 1.

Analycité de $\zeta - Q$?

10.8. Calculer $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{3n+1}}{(3n+1)!}$.

10.9. On pose $a_n = \int_0^1 (\operatorname{tg} u)^n \mathrm{d}u$. Rayon de convergence de la série entière des $a_n x^n$, $n \geqslant 0$, et calcul de la somme.

10.10. Développer la fonction f: $f(x) = \operatorname{Arctg} \frac{1}{1+x}$, en série entière en 0.

10.11. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle de limite 1. On définit une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(n-k)!}$. Quelle est la limite des p_n ?

10.12. Soit une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, de rayon de convergence $R > 0$; pour z avec $|z| < R$, et r tel que $|z| < r < R$, calculer l'intégrale :

$$I(r, z) = \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Im} f(re^{it})}{r - ze^{-it}} \mathrm{d}t.$$

On suppose qu'il existe α dans $]0, R[$ tel que f soit à valeurs réelles sur le cercle Γ de centre 0, de rayon α. Que dire de f ?

10.13. Soit $f(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$. Trouver une équation différentielle vérifiée par f. En déduire que f n'est pas développable en série entière au voisinage de $+\infty$.

10.14. Soit une série entière complexe, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, de rayon de convergence R, les a_n étant tous non nuls. Que dire du rayon de convergence de la série des $\dfrac{z^n}{(a_n)^2}$.

10.15. Soit une fonction f indéfiniment dérivable de l'intervalle borné $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que :

(i) f admet une infinité de zéros sur un segment $[c, d]$ de $]a, b[$;

(ii) $\sup_{x \in]a, b[} \left| f^{(n)}(x) \right| = O(n!)$

Montrer que f est identiquement nulle.

10.16. Soit $S(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n + b^n}{n^2}$. Déterminer les couples (a, b) pour lesquels la série converge.

Pour $a = x$ et $b = \dfrac{-x}{1-x}$, étudier les x pour lesquels la série converge et calculer sa somme. Même question pour $a = x$ et $b = 1-x$.

10.17. Calculer $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(5n)!}$.

10.18. Développement en série entière de la fonction f :

$x \rightsquigarrow (\operatorname{Arc}\sin x)^2$.

10.19. Étude de la série $\sum \dfrac{n!}{(n+1)(n+2)\dots(2n+1)} x^n$. Calcul de sa somme.

10.20. Soit une suite complexe, de terme général a_n, telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$ existe, $l > 0$. Quel est le rayon de convergence de la série des $\dfrac{a_n}{n!} z^n$. On note f la fonction somme.

On suppose que $\dfrac{\ln(|f(z)|)}{|z|}$ a une limite l' lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$. Montrer que $l = l'$.

10.21. Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x)^n \mathrm{d}x$, puis calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1 - t\cos x}$ pour $|t| < 1$.

En déduire le développement en série entière de $(\operatorname{Arcsin} t)^2$, (comparer avec le résultat de 10.18).

10.22. Soit une fonction f, de classe C^∞ de $[0, b[$ dans $\mathbb{R}$, f et toutes ses dérivées étant à valeurs positives.

1°) Justifier que f est analytique sur $]0, b[$.

2°) Prouver que la série de Taylor de f en 0 converge vers f sur $\left[0, \dfrac{b}{2}\right[$, puis sur $[0, b[$.

10.23. Montrer que la série entière de terme général $a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul si et seulement si la suite des $|a_n|^{1/n}$ est majorée.

10.24. Soit $H_{n,k}$ le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments ayant exactement k points fixes. On pose $h_k = H_{k,0}$.

Prouver : $H_{n,k} = C_n^k h_{n-k}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k h_k$.

On considère la série entière $\mathrm{D}(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h_k z^k}{k!}$.

Minorer son rayon de convergence, R.

Calculer $\mathrm{D}(z)$ pour $|z| < \mathrm{R}$ et en déduire que h_k est la partie entière de $\dfrac{k!}{e} + \dfrac{1}{2}$.

Solutions

10.1. Soit $\mathscr{B}$ une base de trigonalisation de a, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les éléments diagonaux de la matrice triangulaire A de a dans cette base, on a $\det(\mathrm{Id} - sa) = \prod_{j=1}^{n} (1 - s\lambda_j)$ et $\operatorname{trace} A^k = \operatorname{trace} a^k = \sum_{j=1}^{n} (\lambda_j)^k$, (avec $n = \dim E$).

Si les λ_j *sont tous réels,* pour $|s|$ assez petit, $1 - s\lambda_j > 0$, ($\exists R$ tel que $|s| < R \Rightarrow |s\lambda_j| < 1$ pour $j = 1, \ldots, n$) et dans ce cas :

$$\det(\mathrm{Id} - sa) = \exp\left(\ln\left(\prod_{j=1}^{n}(1 - s\lambda_j)\right)\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \ln(1 - s\lambda_j)\right)$$

$$= \exp\left(\sum_{j=1}^{n} -\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k (\lambda_j)^k}{k}\right)\right),$$

(puisque $|s\lambda_j| < 1$: on peut développer en série entière $\ln(1 - s\lambda_j)$), donc, par somme d'un nombre fini, n, de séries entières, on a :

$$\det(\mathrm{Id} - sa) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s^k \operatorname{trace}(a^k)}{k}\right).$$

Retour au cas général des λ_j pouvant être complexes.

Si on veut, Z étant donné, trouver $z = x + iy$ tel que $e^z = Z$, comme $e^z \neq 0$, ce n'est possible que si $Z \neq 0$, mais alors Z a un module, ρ, et un argument, $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$, angle de vecteurs, (avec M d'affixe Z), et on doit avoir : $e^x e^{iy} = \rho e^{i\theta}$, d'où $x = \ln|\rho|$ parfaitement connu, et... $y = \theta$ (modulo 2π), avec une confusion entre l'angle de vecteurs θ, et une détermination de l'une de ses mesures en radians.

Le problème, pour définir une fonction, va être de fixer ce « modulo 2π ». Pourquoi ? Si on ne faisait que considérer $\ln Z$, (pour l'encadrer, le mettre dans une vitrine par exemple), il n'y aurait pas de problème.

Mais ce logarithme, on veut le manipuler, le couper en morceaux, (en 5 si on veut $(Z)^{1/5}$ ...) et dans ce cas, ajouter 2π, 4π, -2π, ... à une détermination de y, modifiera les résultats.

Définir un logarithme complexe, va donc consister à fixer un intervalle semi-ouvert d'amplitude 2π, où y variera. Pourquoi semi-ouvert, et bien parce qu'on veut *définir une fonction*, et qu'entre deux déterminations α et $\alpha + 2\pi$, il faut en choisir une seule, (à un Z donné, on ne peut pas, par une fonction, associer deux valeurs).

En général, on impose à l'argument de varier entre $-\pi$ et π, de façon que pour $Z = x$ *réel positif*, d'argument nul, le logarithme complexe soit $\ln x + i0$, c'est-à-dire coïncide avec le logarithme des réels positifs.

Règle de calcul. Une fois ce logarithme complexe défini, (avec par exemple un argument entre $-\pi$ et π), on aura $e^z = Z \Leftrightarrow z = \ln Z$, et pour un produit de nombres complexes non nuls, $\mu_1, \dots, \mu_n$, on aura :

$$\prod_{j=1}^{n} \mu_j = \prod_{j=1}^{n} e^{(\ln \mu_j)} = \exp \sum_{j=1}^{n} \ln \mu_j ,$$

d'où $\ln\left(\prod_{j=1}^{n} \mu_j\right) = \dots = \left(\sum_{j=1}^{n} \ln \mu_j\right) + 2k\pi$, *k étant choisi de façon à ramener l'argument du second membre entre* $-\pi$ *et* π, (et voilà pourquoi l'emploi des logarithmes complexes est délicat).

Ici, pour $|s|$ assez petit, s pouvant d'ailleurs être complexe, les nombres $1 - s\lambda_j$ sont dans un disque centré en 1, de rayon $r = |s| \sup \{|\lambda_j| \,;\, 1 \leqslant j \leqslant n\}$, donc leur argument « principal » α_j est tel que $\sin \alpha_j \leqslant r$, (faites un dessin) donc pour $|s|$ assez petit, chaque α_j sera dans $-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}$ par exemple, d'où une somme des arguments des $\ln(1 - s\lambda_j)$ comprise entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, et une égalité $\det\left(\prod_{j=1}^{n} (1 - s\lambda_j)\right) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} \ln(1 - s\lambda_j)\right)$ valable pour tout s complexe tel que $|s| < R$, pour un R bien choisi.

Il reste à justifier l'égalité $\ln(1 - z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, pour $|z| < 1$, et ce choix de la détermination du logarithme complexe.

Comme la fonction $z \rightsquigarrow \ln(1-z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \varphi(z)$ est holomorphe, (voir après), donc analytique sur le disque ouvert de centre 0 de rayon 1, identiquement nulle sur $]-1, 1[$: elle est identiquement nulle. (Rappelons qu'avec $\varphi(z) = \sum a_n z^n$ développement en série entière de φ, si les a_n ne sont pas tous nuls, avec $n_0 = \inf\{n \,;\, a_n \neq 0\}$ et en factorisant z^{n_0}, on trouve un voisinage de 0, privé de 0, sur lequel φ ne s'annule pas, ce qui contredit $\varphi \equiv 0$ sur $]-1, 1[$).

Il reste à justifier le caractère holomorphe de $g : z \rightsquigarrow \ln(1-z)$, c'est-à-dire dérivable en z, or pour h complexe assez petit, on a :

$$\frac{e^{\ln(1-z-h)} - e^{\ln(1-z)}}{h} = e^{\ln(1-z)} \frac{(e^{\ln(1-z-h)-\ln(1-z)} - 1)}{h}$$

et comme $\lim\limits_{h \to 0} \ln(1-z-h) - \ln(1-z) = 0$, le second membre est équivalent à $e^{\ln(1-z)} \dfrac{(\ln(1-z-h) - \ln(1-z))}{h}$ alors que le premier vaut $\dfrac{(1-z-h)-(1-z)}{h} = -1$,

finalement $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1-z-h) - \ln(1-z)}{h} = -e^{-\ln(1-z)} = \dfrac{-1}{1-z}$: la fonction g est bien dérivable.

10.2. Par une récurrence immédiate, on obtient,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, f(x) = \left(\prod_{j=1}^{n} (1 - q^j x) \right) f(q^n x),$$

et comme $|q| < 1$, le produit infini considéré converge, (pour x fixé et j assez grand, $1 - q^j x > 0$, on passe aux logarithmes, et la série des $\ln(1 - q^j x)$, équivalente à celle des $-q^j x$, $j \in \mathbb{N}$, converge).

La seule hypothèse f continue en 0, jointe à $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n x = 0$ donne alors l'égalité $f(x) = f(0) \prod\limits_{j=1}^{\infty} (1 - q^j x)$: les fonctions vérifiant les données forment donc un espace vectoriel de dimension un, engendré par g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \prod\limits_{j=1}^{\infty} (1 - q^j x)$.

Si on trouve une fonction h, somme d'une série entière, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence infini, vérifiant les mêmes conditions, et si $h(0) = f(0)$, on aura $f = h$, et ceci justifiera le côté développable en série entière de f.

Les a_n doivent être tels que :

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n - \sum_{n \geqslant 0} a_n q^n x^n + \sum_{n \geqslant 0} a_n q^{n+1} x^{n+1} = 0,$$

d'où les relations $a_0(1-1) = 0$: a_0 est quelconque ; et pour $n \geqslant 1$, $a_n(1-q^n) = -a_{n-1}q^n$, donc, comme $|q| < 1$,

$a_n = -\dfrac{q^n}{1-q^n} a_{n-1} = (-1)^n a_0 \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \dfrac{q^k}{1-q^k}$: une telle suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ existe, déterminée par la donnée de a_0, et comme $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\dfrac{q^{n+1}}{1-q^{n+1}}\right|$ tend vers 0, la fonction somme, h, a un rayon de convergence infini. La proportionnalité de h et de f, (appartenance à un espace vectoriel de dimension un) donne $f = h$ si $a_0 = f(0)$.

10.3. Pour $n \geqslant 2$, et $x \neq 0$, avec $u_n = x^n \dfrac{\ln n}{1+n^\alpha}$, on a :

$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |x| \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \dfrac{1+n^\alpha}{1+(n+1)^\alpha}$, et on doit préciser la limite de $\dfrac{1+n^\alpha}{1+(n+1)^\alpha}$: c'est toujours 1, que α soit > 0, $= 0$ auquel cas le rapport est constant égal à 1, ou < 0. Donc le rayon de convergence est 1.

Précisons le comportement sur le bord du disque.

Pour $\alpha \leqslant 0$ et $|x| = 1$, $\left|x^n \dfrac{\ln n}{1+n^\alpha}\right| \to +\infty$ si n tend vers l'infini : divergence sur le bord du disque.

Si $\alpha > 0$, il y a du Abel dans l'air.

D'abord $\alpha > 1$ conduit à une convergence de la série des $\dfrac{\ln n}{1+n^{\alpha}}$: écrire $\alpha = 1+2a$ et $u_n = \dfrac{1}{n^{1+a}} \cdot \dfrac{\ln n}{(n^{1+2a}+1)n^{-1-a}} = o\left(\dfrac{1}{n^{1+a}}\right)$, d'où une convergence sur tout le bord du disque, uniforme en fait.

Il reste le cas de $\alpha \in]0, 1]$, en posant $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{1+x^{\alpha}}$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{x(1+x^{\alpha})} - \frac{\alpha x^{\alpha-1}\ln x}{(1+x^{\alpha})^2} = \frac{1+x^{\alpha}-\alpha x^{\alpha}\ln x}{x(1+x^{\alpha})^2},$$

du signe de $g(x) = x^{\alpha}(1-\alpha\ln x)+1$, donc négatif pour x assez grand.

Avec $z = e^{i\theta}$ et $u_n = z^n f(n) = e^{in\theta} f(n)$, pour $\theta \neq 0(2\pi)$, les sommes $S_{p,q} = \sum_{n=p}^{q} e^{in\theta}$, $(q \geqslant p)$, sont bornées en p et q, et $f(n)$ tend vers 0 en décroissant : par transformation d'Abel la série converge.

Pour $\theta = 0$, $u_n = f(n) \underset{n\to+\infty}{\approx} \dfrac{\ln n}{n^{\alpha}}$, terme général d'une série de Bertrand divergente, ($\alpha \leqslant 1$), d'où finalement, pour α dans]0, 1], la convergence sur le bord du disque privé de 1.

10.4. La fonction f est déjà analytique sur $\mathbb{R}$, car soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$ fixé, sur le segment $[x_0 - r, x_0 + r]$, la fonction continue $x \rightsquigarrow |P(x)|$ est bornée par $M > 0$. En appliquant la formule de Taylor à l'ordre n, entre x et x_0, pour $|x - x_0| \leqslant r$, on a l'existence de $c(n, x)$ entre x et x_0, tel que :

$$f(x) - \sum_{p=0}^{n} f^{(p)}(x_0)\,\frac{(x-x_0)^p}{p!} = R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1} f^{(n+1)}(c(n,x))}{(n+1)!}$$

et la majoration $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{r^{n+1}M}{(n+1)!}$, avec pour majorant le terme général de la série Me^r, prouve la convergence de la série de Taylor de f en x_0 vers la fonction f, et ceci pour tout x de $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Donc f est analytique sur $\mathbb{R}$, le rayon de convergence en chaque x_0 étant $+\infty$.

Et l'hypothèse P *de degré impair* ? Eh bien, elle sert à justifier l'existence d'un zéro x_1 de P, mais alors pour tout n, $\left|f^{(n)}(x_1)\right| \leqslant |P(x_1)| \Rightarrow f^{(n)}(x_1) = 0$: la série de Taylor de f en x_1 est nulle, donc <u>*f est nulle*</u>.

10.5. Il s'agit d'extirper de la série initiale, de somme S, les termes d'indices $h, h+p, h+2p, \dots, h+kp$, donc déjà de supprimer ceux d'indice $n < h$: c'est fait en considérant

$T(x) = S(x) - a_0 - a_1 x - \dots - a_{h-1}x^{h-1} = \sum\limits_{n=h}^{+\infty} a_n x^n$, puis, dans la série de somme T en prenant les termes de p en p, ce qui semble faire intervenir des racines $p^{\text{ième}}$ de l'unité.

Soit donc $\xi_1, \dots, \xi_p$, les racines $p^{\text{ième}}$ de l'unité, (ensemble réduit à 1 si $p = 1$). Soit alors $n \geqslant h$.

On divise $n - h$ par p : il existe $r \in [0, p[$ et q, entiers tels que $n = h + pq + r$, et pour $1 \leqslant j \leqslant p$, on a :

$$\begin{aligned}(\xi_j x)^n &= \xi_j^h((\xi_j)^p)^q(\xi_j)^r x^{h+pq+r}\\ &= \xi_j^h \xi_j^r x^{h+pq+r}.\end{aligned}$$

Comme pour $|x| < R$, on a convergence absolue de la série initiale (donc aussi de toute série extraite), on a :

$$T(\xi_j x) = (\xi_j)^h \left(\sum_{r=0}^{p-1} (\xi_j)^r \left(\sum_{q=0}^{+\infty} a_{h+pq+r}\, x^{h+pq+r}\right)\right).$$

Si on somme alors par rapport à j, comme pour $r = 1, 2, \dots, p-1$, on a $\sum\limits_{j=1}^{p} (\xi_j)^r = 0$, il restera, avec $p = \sum\limits_{j=1}^{p} (\xi_j)^0$:

$$\sum_{j=1}^{p} \xi_j^{-h} T(\xi_j x) = p \sum_{q=0}^{+\infty} a_{h+pq}\, x^{h+pq}, \text{ donc :}$$

$$\sum_{q=0}^{+\infty} a_{h+pq}\, x^{h+pq} = \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} (\xi_j)^{-h} T(\xi_j x), \text{ avec :}$$

$$T(x) = S(x) - \sum_{n=0}^{h-1} a_n x^n.$$

10.6. On pourrait être tenté d'utiliser les formules de Cauchy. Avec γ, cercle de centre 0 de rayon $r < 1$, et A majorant $|f(z)|$ sur le disque ouvert de rayon 1, l'égalité $a_n = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$ conduit à $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{2\pi}\, 2\pi\, \dfrac{A}{r^n}$, donc à $|a_n| \leqslant \dfrac{A}{r^n}$, majorant qui tend vers... l'infini si n tend vers $+\infty$. Il faut autre chose, et c'est les séries de Fourier qui vont convenir.

Pour $r \in [0, 1[$, on pose $g_r(\theta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} = f(re^{i\theta})$. C'est une fonction de classe C^∞, égale à sa série de Fourier : on applique l'égalité de Bessel. On a donc :

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n}|a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \leqslant A^2$, avec A qui majore $|f(z)|$ pour $|z| < 1$.

Mais en revenant à une somme partielle dans le premier membre, et en faisant tendre r vers 1^-, on a $\forall N \in \mathbb{N}$:

$\displaystyle\sum_{n=0}^{N} |a_n|^2 \leqslant A^2$: la série des entiers $|a_n|^2$ converge, (il est temps de se rappeler que $a_n \in \mathbb{Z}$), c'est qu'ils sont tous nuls à partir d'un certain rang, donc f est un polynôme.

10.7. Il est clair que i) $\Rightarrow$ ii. Puis, la série entière dont la somme est égale, sur un voisinage V_1 de x_0, à g_1 étant sa série de Taylor, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g_1^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, on a ii) $\Rightarrow$ iii).

Mais à son tour, l'égalité de g_1 et de g_2 sur un voisinage de V de x_0, donne, par dérivations successives, les égalités $g_1^{(n)}(x_0) = g_2^{(n)}(x_0)$, pour tout n, d'où iii) $\Rightarrow$ ii).

Il reste à justifier que ii) implique i).

Pour cela, soit $\Omega = \{x \,;\, x \in I \,;\, \forall n \in \mathbb{N}, g_1^{(n)}(x) = g_2^{(n)}(x)\}$.

D'après ii), Ω est non vide, (il contient x_0).

Puis $\Omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (g_1^{(n)} - g_2^{(n)})^{-1}(\{0\})$ est un fermé de I, intervalle donc connexe. S'il est ouvert, on aura $\Omega = \mathrm{I}$ et en particulier, pour $n = 0$, $g_1 = g_2$ sur I.

Or si $x_1 \in \Omega$, en appliquant ii) $\Leftrightarrow$ iii) en x_1, on a g_1 et g_2 qui coïncident sur un voisinage de x_1, donc sur un intervalle ouvert $]x_1 - \alpha, x_1 + \alpha[$ dans ce voisinage, par dérivations $g_1^{(n)}$ et $g_2^{(n)}$ sont égales, donc $]x_1 - \alpha, x_2 + \alpha[\subset \Omega$ qui est bien ouvert. Finalement ii) $\Rightarrow$ i).

b) Soit $x_0 > 1$, posons $x_0 = 1 + 2a$, et justifions la convergence, pour $|x - x_0| \leqslant a$, d'une série entière en $x - x_0$, vers $\zeta(x)$, (qui converge bien sûr pour $x > 1$, x réel).

On a $n^{-x} = n^{-x_0} n^{-(x - x_0)} = n^{-x_0} e^{-(x - x_0)\mathrm{Log} n}$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{n^{-x_0}(x - x_0)^k (\mathrm{Log} n)^k}{k!}, \text{ série}$$ qui converge en fait pour tout x réel.

Alors $\zeta(x) = \sum_{n \geqslant 1} n^{-x} = \sum_{n \geqslant 1} \left(\sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^k n^{-x_0}(x - x_0)^k (\mathrm{Log} n)^k}{k!} \right)$

devient une somme double, $\sum_{n,k} u_{n,k}$, et si on peut intervertir les sommations, on récupérera une série en $(x - x_0)$. Pour cela, il suffit de justifier la convergence en module dans un sens, (celui qui ne donne pas la série en $(x - x_0)$, sinon il n'y aurait pas de problème).

Or, avec $|x - x_0| \leqslant a$, on a $\sum_{k \geqslant 0} |u_{n,k}| \leqslant n^{-x_0} \sum_{k \geqslant 0} \frac{(a\mathrm{Log} n)^k}{k!}$, soit encore un majorant égal à $n^{-x_0} e^{a\mathrm{Log} n} = n^{a - x_0} = \frac{1}{n^{1+a}}$, terme général d'une série en n convergente, donc :

$\sum_{n \geqslant 1} \left(\sum_{k \geqslant 0} |u_{n,k}| \right)$ converge : on peut intervertir les sommations, et écrire, pour $|x - x_0| \leqslant a$, l'égalité :

$$\zeta(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-x_0} (\mathrm{Log} n)^k \right) \frac{(x - x_0)^k}{k!},$$

d'où l'analycité de la fonction ζ sur $]1, +\infty[$.

Recherche d'un équivalent.

La fonction $t \rightsquigarrow \frac{1}{t^x}$, ($x$ réel > 1 fixé), est positive décroissante, donc on peut encadrer $\frac{1}{n^x}$ avec des intégrales. On a :

$$\frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x},$$

et on déduit l'encadrement,

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} \leqslant \frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}, \text{ ce qui conduit à :}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = 1 + \frac{1}{x-1},$$ et donne $\zeta(x)$ équivalent à $\frac{1}{x-1}$ lorsque x tend vers 1^+.

<u>Remarque</u>. De l'égalité $u_n = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^x} = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1}{(n+1)^{x-1}} - \frac{1}{n^{x-1}}\right)$, on déduit $\zeta(x) - \frac{1}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} (n^{-x} - t^{-x})\mathrm{d}t$, et en prenant un développement en série entière en $x_0 > 0$, de $v_n(x) = \int_n^{n+1} (n^{-x} - t^{-x})\mathrm{d}t$, on peut, comme précédemment, justifier l'analycité de $\zeta(x) - \frac{1}{x-1}$ pour $x > 0$. Mais je suis ridicule : ζ est analytique, ainsi que la fraction rationnelle Q, donc $\zeta - \mathrm{Q}$ l'est !

10.8. C'est un exercice facile pour vous reposer du précédent. Comme on considère des termes de trois en trois, extraits de la série exponentielle, on considère les relations :

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\ ; \quad e^{jz} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^n z^n}{n!} \quad \text{et} \quad e^{j^2 z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{j^{2n} z^n}{n!}, \quad \text{donc}$$

$e^z + j^2 e^{jz} + j e^{j^2 z}$ est une série entière de terme général $\frac{z^n}{n!}(1 + j^{n+2} + j^{2n+1})$, et ceci avec j racine cubique de l'unité. Si $n = 3k$, la parenthèse vaut

$1 + j^2 + j = 0$, si $n = 3k + 1$, elle vaut $1 + 1 + 1 = 3$ et si $n = 3k + 2$, elle vaut $1 + j + j^2 = 0$, finalement $S(z) = \frac{1}{3}(e^z + j^2 e^{jz} + j e^{j^2 z})$. Je vous avais dit que ce serait facile.

10.9. Sur [0, 1], $0 \leqslant \operatorname{tg} u \leqslant \operatorname{tg} 1 \Rightarrow a_n \leqslant (\operatorname{tg} 1)^n$,

donc $|a_n x^n| \leqslant (|x| \operatorname{tg} 1)^n$ qui converge si $|x| < \frac{1}{\operatorname{tg} 1}$: on a $R \geqslant \frac{1}{\operatorname{tg} 1}$.

La continuité de la fonction tangente donne :

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que sur $[1 - \alpha, 1]$, (on impose $\alpha < 1$ et $\varepsilon < \operatorname{tg} 1$), on ait :

$$\operatorname{tg} 1 - \varepsilon \leqslant \operatorname{tg} u \leqslant \operatorname{tg} 1, \text{ d'où } a_n \geqslant \int_{1-\alpha}^{1} (\operatorname{tg} u)^n \mathrm{d}u \geqslant \alpha(\operatorname{tg} 1 - \varepsilon)^n$$

$\Rightarrow |a_n x^n| \geqslant \alpha(|x|(\operatorname{tg} 1 - \varepsilon))^n$, minorant qui tend vers l'infini quand n tend vers l'infini pour $|x| > \frac{1}{\operatorname{tg} 1 - \varepsilon}$ donc $R \leqslant \frac{1}{\operatorname{tg} 1 - \varepsilon}$, et ceci pour tout ε de $]0, \operatorname{tg} 1[$ en fait : finalement $R = \frac{1}{\operatorname{tg} 1}$.

Passons au calcul de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Pour $|x| < \frac{1}{\operatorname{tg} 1}$ et $u \in [0, 1]$, on a $u_n(x, u) = x^n (\operatorname{tg} u)^n$ majoré en module par $|x| \operatorname{tg} 1 < 1$: on a convergence normale, donc uniforme en u dans [0, 1], de cette série vers $\frac{1}{1 - x \operatorname{tg} u}$ donc $S(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1 - x \operatorname{tg} u}$.

Cette intégrale se calcule en posant $\operatorname{tg} u = t$, donc $(1 + t^2)\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$, et :

$$S(x) = \int_0^{\operatorname{tg} 1} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + t^2)(1 - xt)} = \frac{1}{1 + x^2} \int_0^{\operatorname{tg} 1} \left(\frac{x^2}{1 - xt} + \frac{xt + 1}{1 + t^2} \right) \mathrm{d}t,$$

en décomposant en éléments simples, ce qui conduit à :

$$S(x) = \left[-\frac{x}{1 + x^2} \ln(1 - xt) + \frac{x}{2(1 + x^2)} \ln(1 + t^2) + \frac{1}{1 + x^2} \operatorname{Arctg} t \right]_0^{\operatorname{tg} 1}$$

$$= \frac{-x \ln(1 - x \operatorname{tg} 1)}{1 + x^2} + \frac{x \ln(1 + \operatorname{tg}^2 1)}{2(1 + x^2)} + \frac{1}{1 + x^2}.$$

Cette valeur montre que $\lim_{x \to \frac{1}{\operatorname{tg} 1}^-} S(x) = +\infty$ en fait : on pouvait se contenter de $R \geqslant \frac{1}{\operatorname{tg} 1}$, calculer $S(x)$ pour $|x| < \frac{1}{\operatorname{tg} 1}$, et conclure alors que R n'est pas supérieur strictement à $\frac{1}{\operatorname{tg} 1}$.

10.10. La dérivée de $f(x) = \operatorname{Arctg} \frac{1}{1+x}$ sera une fraction rationnelle :

$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{(1+x)^2}}{1+\frac{1}{(1+x)^2}} = -\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{-i/2}{x+1+i} + \frac{i/2}{x+1-i}$$

$$= \frac{-i}{2(1+i)} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{1+i}} + \frac{i}{2(1-i)} \cdot \frac{1}{1+\frac{x}{1-i}}.$$

Avec $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$, pour $|x| < \sqrt{2}$, on a :

$$f'(x) = \frac{-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{2^{\frac{n}{2}}} e^{-in\frac{\pi}{4}} + \frac{i}{2\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n e^{in\frac{\pi}{4}}}{2^{\frac{n}{2}}}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{ix^n}{2^{\frac{n+3}{2}}} \left(-e^{-i(n+1)\frac{\pi}{4}} + e^{i(n+1)\frac{\pi}{4}}\right).$$

La parenthèse vaut $2i\sin(n+1)\frac{\pi}{4}$, donc :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \sin(n+1)\frac{\pi}{4} \frac{x^n}{2^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Comme $f(0) = \operatorname{Arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, et qu'une série entière s'intègre terme à terme à l'intérieur du domaine de convergence, on a :

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \sin(n+1)\frac{\pi}{4}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{n+1}, \text{ ou encore :}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin\left(k\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^k.$$

10.11. On a $p_0 = a_0$, et la connaissance de $p_0, p_1, ..., p_{n-1}$ donne $p_n = a_n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k}{(n-k)!}$ donc la suite des p_n est parfaitement connue.

L'expression $\sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(n-k)!}$ fait penser au terme général, (degré n), du produit de deux séries entières, de termes généraux $p_n x^n$ et $\frac{x^n}{n!}$.

On peut justifiér que la série des $p_n x^n$ a un rayon de convergence non nul, car, en supposant $|p_0|, |p_1|, ..., |p_{n-1}|$ majorés par m_{n-1}, on aura, avec $\|a\|_\infty = \sup\{|a_k| ; k \in \mathbb{N}\}$, (existe car une suite convergente est bornée) :

$$|p_n| \leqslant \|a\|_\infty + m_{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)!} \leqslant \|a\|_\infty + e m_{n-1}.$$

Or $|p_0| = |a_0| \leqslant \|a\|_\infty \leqslant \|a\|_\infty + e$;

$$|p_1| \leqslant \|a\|_\infty + e(\|a\|_\infty + e) \leqslant \|a\|_\infty(\|a\|_\infty + e) + e(\|a\|_\infty + e)$$

soit $|p_1| \leqslant (\|a\|_\infty + e)^2$;
et si on suppose $m_{n-1} \leqslant (\|a\|_\infty + e)^n$, il vient :

$$|p_n| \leqslant \|a\|_\infty + e(\|a\|_\infty + e)^n \leqslant \|a\|_\infty(\|a\|_\infty + e)^n + e(\|a\|_\infty + e)^n$$

d'où $|p_n| \leqslant (\|a\|_\infty + e)^{n+1}$, et on peut prendre $m_n \leqslant (\|a\|_\infty + e)^{n+1}$, par récurrence ; et la série entière des $p_n x^n$ a un rayon de convergence $\geqslant \frac{1}{e + \|a\|_\infty}$.

Pour $|x| < \frac{1}{e + \|a\|_\infty}$, on peut effectuer le produit de $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$ et de $e^x = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{x^r}{r!}$, on obtient une série entière de terme général c_n avec :

$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{p_k}{(n-k)!} = a_n$, d'où, avec $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, (de rayon de convergence $\geqslant 1$, car la suite des a_n, convergente, est bornée), l'égalité :

$A(x) = P(x)e^x$, pour $|x| < \frac{1}{e + \|a\|_\infty}$, qui conduit à $P(x) = A(x)e^{-x}$, d'où, (produit de deux séries entières), la valeur de p_n :

$$p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} a_{n-k},$$

qui va permettre de trouver la limite.

Pour cela, on analyse la situation en se disant que parmi toutes les suites qui convergent vers 1, il y a la suite constante, égale à 1, qui fournirait $p_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ qui converge vers $\frac{1}{e}$: la suite doit sans doute converger vers $\frac{1}{e}$. On le justifie en introduisant $a_{n-k} - 1 + 1$ et en considérant :

$$q_n = p_n - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} (a_{n-k} - 1).$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (a_r - 1) \frac{(-1)^{n-r}}{(n-r)!}.$$

On a : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, |a_n - 1| \leqslant \varepsilon$. On suppose $n \geqslant n_0$ et on coupe la somme au rang n_0, on a :

$$|q_n| \leqslant \sum_{r=0}^{n_0 - 1} |a_r - 1| \frac{1}{(n-r)!} + \sum_{n = n_0}^{n} \varepsilon \cdot \frac{1}{(n-r)!}$$

$$\leqslant (1 + \|a\|_\infty) \sum_{s = n - n_0 + 1}^{n} \frac{1}{s!} + e\varepsilon,$$

puis il existe n_1 tel que $\forall n \geqslant n_1$, $\sum_{s=n_1}^{n} \frac{1}{s!} \leqslant \varepsilon$, (série des $\frac{1}{n!}$ convergente),

donc si $n - n_0 + 1 \geqslant n_1$, soit si $n \geqslant n_0 + n_1 - 1$, *a fortiori*, $\sum_{s = n - n_0 + 1}^{n} \frac{1}{s!} \leqslant \varepsilon$

et alors : $|q_n| \leqslant \varepsilon(e + 1 + \|a\|_\infty)$.

La suite des q_n converge vers 0, celle des p_n converge donc vers $\frac{1}{e}$.

Remarquons que la convergence des a_n vers l donnerait celle des p_n vers $\frac{l}{e}$.

De même, l'utilisation de l'algèbre des séries formelles permet d'éviter la justification de l'existence d'un rayon de convergence non nul pour la série des $p_n x^n$ au départ.

10.12. On a :

$$\mathrm{I}(r,z) = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r\left(1-\frac{z}{r}e^{-it}\right)}\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n(a_n e^{int} - \overline{a_n} e^{-int})\right) \mathrm{d}t,$$

$$= \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi} \frac{1}{r}\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^p}{r^p} e^{-ipt}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} r^n(a_n e^{int} - \bar{a}_n e^{-int})\right) \mathrm{d}t,$$

les deux séries étant uniformément convergentes, (car $\frac{|z|}{r} < 1$ et $r < \mathrm{R}$) et donnant des fonctions bornées, ce qui permet d'intervertir, l'une après l'autre, les deux sommations, d'où:

$$\mathrm{I}(r,z) = \frac{1}{2ir}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} z^p r^{n-p}\left(a_n \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t} - \overline{a_n}\int_0^{2\pi} e^{-i(p+n)t}\right) \mathrm{d}t.$$

Comme $\int_0^{2\pi} e^{ikt}\mathrm{d}t = 2\pi$ si $k = 0$, et $\frac{1}{ik}\,[e^{ikt}]_0^{2\pi} = 0$, si $k \neq 0$, il reste :

$$\mathrm{I}(r,z) = \frac{1}{2ir}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n a_n 2\pi - \frac{2\pi}{2ir}\,\overline{a_0}$$

$$= \frac{\pi}{ir}\,(f(z) - \overline{f(0)}).$$

Si pour un $\alpha > 0$, avec $\alpha < \mathrm{R}$, on a f réelle sur le cercle de rayon α, pour $|z| < \alpha$, (et $\alpha = r$) le calcul précédent donne $\mathrm{I}(\alpha, z) = 0$, donc $f(z) = \overline{f(0)}$ sur le disque ouvert de rayon $\alpha > 0$, mais alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, $f^{(n)}(z)$ est nulle sur ce disque ouvert, et la série de Taylor de f en 0 donne $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$, pour $n \geqslant 1$, donc f est en réalité constante, réelle, sur son domaine de convergence.

10.13. L'intégrale impropre converge, $\left(\lim\limits_{t \to +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0\right)$, donc $f(x)$ existe.

En posant $f(x) = e^{x^2}\left(\int_x^a e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_a^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)$, on constate que f est un produit de deux fonctions dérivables.

On a $f'(x) = 2xe^{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + e^{x^2}(-e^{-x^2})$, soit :

$$f'(x) = 2xf(x) - 1.$$

Il en résulte par récurrence que la fonction f est de classe C^∞. Dire que f est développable en série entière au voisinage de $+\infty$ revient à dire qu'il existe $A > 0$, et des $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que : $\forall x \geqslant A,\ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot \dfrac{1}{x^n}$.

Posons, pour $|t| < \dfrac{1}{A}$, $g(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$, cette série entière se dérive terme à terme et on a, pour $x > A$, $f(x) = g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ donc $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}g'\left(\dfrac{1}{x}\right)$, d'où, compte tenu de l'équation différentielle, l'identité : $-1 + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} 2a_n \dfrac{x}{x^n} = -\dfrac{1}{x^2}\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_n \dfrac{1}{x^{n-1}}$, soit encore :

$$2a_0 x + (2a_1 - 1) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2a_n}{x^{n-1}} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{na_n}{x^{n+1}}.$$

Comme les séries entières $\sum\limits_{n \geqslant 2} 2a_n t^{n-1}$ et $\sum\limits_{n \geqslant 1} na_n t^{n+1}$ ont un rayon de convergence $\geqslant \dfrac{1}{A} > 0$, elles définissent des fonctions continues sur $]-A, A[$, nulles si $t = 0$, donc, en passant à la limite dans l'égalité précédente, si x tend vers l'infini, on en déduit que a_0 est nul, puis $a_1 = \dfrac{1}{2}$.

On a alors $\sum_{n=2}^{+\infty} 2a_n t^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^{n+1} = 0$, pour tout t de $\left]0, \frac{1}{A}\right[$, ce qui conduit aux relations : $2a_2 = 0$; et, pour tout $k \geqslant 2$, en prenant le coefficient de t^k, à : $2a_{k+1} + (k-1)a_{k-1} = 0$, soit : $a_{k+1} = -\frac{k-1}{2}\, a_{k-1}$.

Mais alors, les a_{2p} sont tous nuls, et on a :

$$a_{2p+1} = (-1)^p \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2p-1)}{2^{p+1}}.$$

L'ennui, c'est que la série entière g, de rayon de convergence supposé strictement positif, $\left(\geqslant \frac{1}{A}\right)$, est alors de rayon de convergence nul, car $\left|\frac{a_{2p+1}}{a_{2p-1}}\right| = \frac{2p-1}{2}$ tend vers $+\infty$. Donc f n'est pas développable en série entière au voisinage de $+\infty$.

10.14. Si la série des $\frac{z'^n}{a_n^2}$ converge, son terme général est majoré en module, (car il tend vers 0), par une constante M'.

Mais alors, pour $|z| < R$, on aura, avec $|z'|^n \leqslant M'|a_n|^2$:

$$\left|z\sqrt{|z'|}\right|^n \leqslant \sqrt{M'}\left|z^n a_n\right|,$$

et comme $\sum a_n z^n$ converge, c'est que $\left|z\sqrt{|z'|}\right|^n$ tend vers 0, donc est de module majoré par 1. Mais l'inégalité $|z|\sqrt{|z'|} \leqslant 1$, valable pour tout z de module inférieur à R donne $R\sqrt{|z'|} \leqslant 1$, et ce pour tout z' tel que $\sum \frac{z'^n}{a_n^2}$ converge : en appelant R' le rayon de convergence de cette série, on aura $R\sqrt{R'} \leqslant 1$ d'où $R' \leqslant \frac{1}{R^2}$.

On ne peut pas faire mieux. En posant $a_{2n} = 2^n$ et $a_{2n+1} = 3^n$, on a $a_{2n}z^{2n} = (\sqrt{2}z)^{2n}$, qui converge si $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, et $a_{2n+1}z^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}z)^{2n+1}$, qui converge si $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, d'où $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$, (si

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} < |z| < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, les $a_{2n+1}z^{2n+1}$ ne tendent pas vers 0). Puis $\dfrac{z^{2n}}{(a_{2n})^2} = \left(\dfrac{z}{2}\right)^{2n}$, converge pour $|z| < 2$, alors que $\dfrac{z^{2n+1}}{(a_{2n+1})^2} = 3 \cdot \left(\dfrac{z}{3}\right)^{2n+1}$, ce qui converge pour $|z| < 3$, d'où $R' = 2 < \dfrac{1}{R^2} = 3$.

En fait, si on connaît le Théorème d'Hadamard, qui donne :

$$R = \frac{1}{\limsup |a_n|^{1/n}}, \quad \text{on a } R' = \frac{1}{\limsup |a_n|^{-2/n}}$$
$$= \frac{1}{\dfrac{1}{\liminf (|a_n|^{2/n})}}$$

et $R' = (\liminf |a_n|^{1/n})^2 \leqslant (\limsup |a_n|^{1/n})^2 = \dfrac{1}{R^2}$.

10.15. Soit $A = \{x \in [c, d], f(x) = 0\}$, cet ensemble infini de $[c, d]$, compact, admet un point d'accumulation, x_0, donc on peut construire une suite strictement monotone $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de zéros de f qui converge vers x_0.

En effet, x_0 point d'accumulation de A, donc il existe t_0 de A tel que $0 < |x_0 - t_0| < 1$, puis t_1 tel que :

$0 < |x_0 - t_1| < \inf\left(\dfrac{1}{2}, |x_0 - t_0|\right)$, (d'où $t_1 \neq t_0$) et ainsi de suite, on a des t_n de A tels que :

$$0 < |x_0 - t_n| < \inf\left(\frac{1}{n+1}, |x_0 - t_{n-1}|\right),$$

ce qui assure la convergence des t_n vers x_0, et le fait qu'ils soient distincts.

Puis on introduit $N_1 = \{n \,;\, t_n > x_0\}$ et $N_2 = \{n \,;\, t_n < x_0\}$. Comme $\mathbb{N} = N_1 \cup N_2$ avec $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, l'une des parties est de cardinal infini, et en réindexant les t_n correspondants, on obtient une suite monotone, notée $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de zéros distincts de f qui converge vers x_0.

Mais alors, par Rolle, entre y_n et y_{n+1} on a un zéro de f', d'où une suite strictement monotone de zéros de f', qui converge vers x_0, ce qui donne d'une part $f'(x_0) = 0$ par continuité, mais permet de passer à f'' : finalement on obtient $f^{(n)}(x_0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, avec à chaque étape une suite strictement monotone convergeant vers x_0, de zéros de $f^{(n)}$.

Soit alors $\Omega = \{x \in]a, b[, \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x) = 0\}$: on a x_0 dans Ω.

Comme $f^{(n)}$ est continue, $(f^{(n)})^{-1}(0)$ est un fermé de $]a, b[$, donc $\Omega = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (f^{(n)})^{-1}(0)$ est un fermé de $]a, b[$.

De plus Ω est ouvert car si $x_1 \in \Omega$, la formule de Taylor Lagrange en x_1 donnant un reste du type $(x - x_1)^{n+1} \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} = O((x - x_1)^{n+1})$, vu l'hypothèse (ii), pour $|x - x_1| < 1$, ce reste tend vers 0, la fonction f est donc localement égale à sa série de Taylor qui, en x_1 dans Ω est nulle. Mais alors f identiquement nulle sur un voisinage de V de x_1 donne $f^{(n)}(x) = 0$ sur V, d'où V dans Ω.

Comme Ω est non vide, ouvert et fermé de $]a, b[$ connexe, c'est $]a, b[$, d'où la nullité de f.

10.16. L'énoncé ne précisant pas la nature de a et b, on les supposera complexes dans la première partie de l'exercice. Si $|a| \neq |b|$, et $r = \sup(|a|, |b|)$, on a, avec $u_n = \dfrac{a^n + b^n}{n^2}$, $|u_n| \underset{n \to +\infty}{\approx} \dfrac{r^n}{n^2}$, donc il y a convergence pour $r \leqslant 1$, divergence si $r > 1$ car u_n ne tend pas vers 0 dans ce cas.

De plus $|a| \leqslant 1$ et $|b| \leqslant 1$ donne $|u_n| \leqslant \dfrac{2}{n^2}$, d'où une convergence normale en fait pour (a, b) dans $D \times D$, avec D disque unité fermé de $\mathbb{C}$.

Il reste à voir si, pour $|a| = |b| = r > 1$, il y a divergence ou non. En posant $a = re^{i\alpha}$ et $b = re^{i\beta}$, on a $u_n = \dfrac{r^n e^{in\alpha}}{n^2}(1 + e^{in(\beta - \alpha)})$, et le comportement des $e^{in(\beta - \alpha)}$, pour n dans $\mathbb{Z}$, qui forment un ensemble partout dense, ou fini, de valeurs du cercle unité montre que u_n ne tend pas vers 0, (on a $r > 1$, ne l'oublions pas).

Donc la série converge si et seulement si $|a| \leqslant 1$ et $|b| \leqslant 1$. Dans le domaine réel, pour x dans $]-1, 1[$, en posant $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, on a $g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$, (avec $g'(0) = 1$ par continuité), et comme $g(0) = 0$, on a $g(x) = \int_0^x -\frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$ sur $[-1, 1]$ en fait, d'où $S(a, b) = g(a) + g(b)$, pour a et b dans $[-1, 1]$.

Une intégration par parties dans $g(x)$: $\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{t}$ d'où $u = \ln|t|$ et $v = -\ln(1-t)$, donc $\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$, conduit à :

$$g(x) = [-\ln|t|\ln(1-t)]_0^x - \int_0^x \frac{\ln|t|}{1-t}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\ln|x|\ln(1-x) - \int_0^x \frac{\ln|t|}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

En particulier, par continuité de g si x tend vers 1^-, (convergence normale sur $[-1, 1]$ de g), on a :

$$g(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t.$$

Dans $g(1-x)$, pour x tel que $-1 \leqslant 1-x \leqslant 1$, soit $0 \leqslant x \leqslant 2$, défini par $g(1-x) = \int_0^{1-x} -\frac{\ln(1-t)}{t}\,\mathrm{d}t$, on effectue le changement de variable $1-t = s$, d'où :

$$g(1-x) = \int_1^x -\frac{\ln s}{1-s}(-\mathrm{d}s) = \int_0^x \frac{\ln s}{1-s}\,\mathrm{d}s - \int_0^1 \frac{\ln s}{1-s}\,\mathrm{d}s,$$

donc *pour* $0 \leqslant x \leqslant 1$, on aura :

$$S(x, 1-x) = g(x) + g(1-x)$$

$$= -\ln x \ln(1-x) - \int_0^x \frac{\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t + \int_0^x \frac{\ln s}{1-s}\,\mathrm{d}s + \frac{\pi^2}{6},$$

soit encore $S(x, 1-x) = \frac{\pi^2}{6} - \ln x \ln(1-x)$.

Pour calculer $f(x) = \mathrm{S}\left(x, \frac{-x}{1-x}\right)$ on va exprimer $f'(x)$. D'abord $\theta(x) = \frac{-x}{1-x}$ est tel que $\theta'(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}$, donc θ décroît sur $\mathbb{R}-\{1\}$.

On a :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1		$+\infty$
θ	$1 \searrow$	$-1 \searrow$	$-\infty$ ‖	$+\infty \searrow$	1

donc f est définie continue sur $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$, dérivable sur $\left]-1, \frac{1}{2}\right[$, et comme $f(x) = g(x) + g(\theta(x))$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) + g'(\theta(x))\theta'(x) \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln\left(1+\frac{x}{1-x}\right)}{-\frac{x}{1-x}}\left(\frac{-1}{(1-x)^2}\right) \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x(1-x)} = \frac{\ln(1-x)}{x}\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) \\ &= \frac{\ln(1-x)}{1-x}. \end{aligned}$$

Comme $f(0) = 0$, on a finalement $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1-s)}{1-s}\,\mathrm{d}s$, soit $f(x) = \left[-\frac{1}{2}(\ln(1-s))^2\right]_0^x = -\frac{1}{2}(\ln(1-x))^2$.

Tout ceci sans aucune garantie. A vous de vérifier les calculs.

10.17. Si on compare à 10.5, cet exercice est un aimable divertissement où vont intervenir les racines $5^{\text{ième}}$ de l'unité. Soit $w = e^{\frac{2i\pi}{5}}$, introduisons, pour $k = 0, 1, 2, 3$ et 4, les sommes $\mathrm{S}_k = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(5n+k)!}$.

$$\begin{aligned}
\text{On a } e &= S_0 + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \\
e^{w} &= S_0 + wS_1 + w^2S_2 + w^3S_3 + w^4S_4 \\
e^{w^2} &= S_0 + w^2S_1 + w^4S_2 + wS_3 + w^3S_4 \\
e^{w^3} &= S_0 + w^3S_1 + wS_2 + w^4S_3 + w^2S_4 \\
e^{w^4} &= S_0 + w^4S_1 + w^3s_2 + w^2S_3 + wS_4,
\end{aligned}$$

d'où $S_0 = \frac{1}{5}\,(e + e^{w} + e^{w^2} + e^{w^3} + e^{w^4})$, puisque

$$1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = \frac{w^5 - 1}{w - 1} = 0\,.$$

Un exercice comme cela, c'est facile, pas cher, et cela peut rapporter gros. Sur ce, je vais me promener « à la fraîche ».

10.18. Un exercice bientôt rendu obsolète par le calcul formel. Mais il faut quand même savoir le faire, en cas de panne d'ordinateur, ou bien si on est isolé sur une île déserte...

La fonction $f : x \leadsto (\mathrm{Arc}\sin x)^2$ est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$. On a $f'(x) = 2(1 - x^2)^{-1/2}\ \mathrm{Arc}\sin x$, donc :

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 2\left(\frac{1}{1 - x^2} - \frac{1}{2}\,(1 - x^2)^{-3/2}(-2x)\ \mathrm{Arc}\sin x\right) \\
&= \frac{2}{1 - x^2} + \frac{x}{1 - x^2}\,f'(x),
\end{aligned}$$

donc, f vérifie l'équation différentielle linéaire du 2° ordre :

$$(1 - x^2)\,f''(x) - x\,f'(x) = 2\,.$$

Comme $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$, et que le Théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure de l'existence et de l'unicité d'une solution S de cette équation différentielle sur $]-1, 1[$, de donnée initiale $S(0) = S'(0) = 0$, si la somme S d'une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ convient, ce sera f.

Les a_n doivent être tels que $a_0 = a_1 = 0$ et :

$$(1 - x^2)\sum_{n \geqslant 2} n(n-1)a_n x^{n-2} - x\sum_{n \geqslant 1} n a_n x^{n-1} = 2\,.$$

On a $2a_2 = 2$ et $6a_3 = 0$, (termes de degré 0 et 1), puis, pour $k \geqslant 2$, le coefficient de x^k est :

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - ka_k = 0 \text{, d'où :}$$

$$a_{k+2} = \frac{k^2}{(k+1)(k+2)} a_k .$$

On a donc $a_{2n+1} = 0$ pour tout n, $a_0 = 0, a_2 = 1$ et $a_{2n} = \dfrac{2(2^{n-1}(n-1)!)^2}{(2n)!}$, pour $n \geqslant 1$; de plus $\lim\limits_{k \to +\infty} \dfrac{a_{k+2}}{a_k} = 1$, ($k$ pair), donc S a un rayon de convergence non nul, (égal à 1 en fait) d'où

$$(\operatorname{Arcsin} x)^2 = \sum_{n \geqslant 1} \frac{2 \cdot 4^{n-1}((n-1)!)^2}{(2n)!} x^{2n} .$$

10.19. Posons $u_n = \dfrac{n!}{(n+1)...(2n+1)} = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}$, on a :

$\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} = \dfrac{n+1}{2(2n+3)}$, ce qui tend vers $\dfrac{1}{4}$ donc la série entière a pour rayon de convergence 4.

Soit S la fonction somme, comme rien de simple n'apparaît on va exploiter la relation $2(2n+3)u_{n+1} - (n+1)u_n = 0$, ce qui va conduire à une équation différentielle vérifiée par S, si on se rappelle que S' a pour terme général $nu_n x^{n-1}$. On cherche donc à faire apparaître les ku_k. On a :

$$4(n+1)u_{n+1} + 2u_{n+1} - nu_n - u_n = 0 .$$

On multiplie par x^n, pour $0 < |x| < 4$, et on somme, pour $n \geqslant 0$, d'où la relation :

$$4S'(x) + 2\,\frac{S(x) - S(0)}{x} - xS'(x) - S(x) = 0 ,$$

ou encore, comme $S(0) = u_0 = 1$:

$$(4 - x)S'(x) + \left(\frac{2}{x} - 1\right) S(x) = \frac{2}{x} .$$

Équation sans second membre : $\dfrac{S'}{S} = \dfrac{x-2}{x(4-x)} = \dfrac{1}{2(4-x)} - \dfrac{1}{2x}$, de solution $S(x) = \dfrac{\lambda}{|x(4-x)|^{1/2}}$, ce qui conduit, par la méthode de variation des constantes, et pour $x \in]0, 4[$, à $\lambda' \left(\frac{4-x}{x}\right)^{1/2} = \frac{2}{x}$, ou encore $\lambda' = \frac{2}{\sqrt{4x - x^2}} = \frac{2}{\sqrt{4 - (x-2)^2}}$ donc $\lambda = 2 \operatorname{Arcsin} \frac{x-2}{2} + c$, et une expression :

$$S(x) = \frac{c + 2 \operatorname{Arcsin} \frac{x-2}{2}}{(x(4-x))^{1/2}} \text{ sur }]0, 4[, \ c \text{ étant telle que } S(0) = 1,$$

ce qui conduit à prendre $c = \pi$.

On peut vérifier que pour x tendant vers 0^+, $\pi + 2 \operatorname{Arcsin} \frac{x-2}{2}$ est équivalent à $2\sqrt{x}$, car c'est $2\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2} - 1\right)\right)$, quantité qui, tendant vers 0 est équivalente à $2 \times \sin\left(\frac{\pi}{2} + \ldots\right)$ soit à :

$$2\cos\left(\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{2} - 1\right)\right) = 2\left(1 - \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2\right)^{1/2} \approx 2\sqrt{x}.$$

Pour x dans $]-4, 0[$, on est conduit à $\lambda' = \frac{-2}{\sqrt{x^2 - 4x}}$, soit encore à $\lambda' = \frac{-2}{\sqrt{(x-2)^2 - 4}} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{x}{2} - 1\right)^2 - 1}}$ ce qui conduit à $\lambda = 2 \operatorname{Arg\,ch}\left(1 - \frac{x}{2}\right) - 2 \operatorname{Arg\,ch} 1$, et à une expression de S qui est ce qu'elle est, à savoir :

$$S(x) = \frac{2 \operatorname{Arg\,ch}\left(1 - \frac{x}{2}\right) - 2 \operatorname{Arg\,ch} 1}{(x^2 - 4x)^{1/2}} \text{ sur }]-4, 0[.$$

Je ne serais pas étonné que cela soit faux !

10.20. La suite des $\sqrt[n]{|a_n|}$ étant convergente est bornée, donc si on a $\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant M$, pour tout n, on a alors la majoration $\left|a_n \frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \frac{(M|z|)^n}{n!}$, terme général de la série convergente de somme $e^{M|z|}$, donc la série entière des $a_n \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout z. De plus, la majoration précédente fait penser qu'en remplaçant M par $l+\varepsilon$, on aura, à une somme partielle près, (qui est un polynôme en z), une majoration de $|f(z)|$ par $e^{(l+\varepsilon)|z|}$, ce qui, dans $\lim\limits_{|z| \to +\infty} \frac{\ln(|f(z)|)}{|z|}$ doit servir.

Plus précisément, soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$, $\forall n \geqslant n_0$, $|a_n| \leqslant (l+\varepsilon)^n$. En notant $S_{n_0}(z) = \sum\limits_{n=0}^{n_0} \frac{a_n}{n!} z^n$, on a donc :

$$\left| f(z) - S_{n_0}(z) \right| \leqslant \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{((l+\varepsilon)|z|)^n}{n!} = e^{(l+\varepsilon)|z|} - \sum_{n=0}^{n_0} \frac{(l+\varepsilon)|z|^n}{n!},$$

d'où, par inégalité triangulaire :

$$|f(z)| \leqslant e^{(l+\varepsilon)|z|} + \sum_{n=0}^{n_0} \frac{(|a_n| - (l+\varepsilon))|z|^n}{n!}.$$

On note $R_{n_0}(|z|) = \sum\limits_{n=0}^{n_0} \frac{(|a_n| - (l+\varepsilon))|z|^n}{n!}$, avec R_{n_0} polynôme en $|z|$ de degré n_0. On a alors :

$$|f(z)| \leqslant e^{(l+\varepsilon)|z|}(1 + e^{-(l+\varepsilon)|z|} R_{n_0}(|z|)),$$

d'où, avec $u(|z|) = e^{-(l+\varepsilon)|z|} R_{n_0}(|z|)$, une fonction à valeurs réelles qui tend vers 0 si $|z|$ tend vers $+\infty$. La parenthèse devient positive : on prend les logarithmes et, pour $|z|$ assez grand, on a :

$$\frac{\ln|f(z)|}{|z|} \leqslant (l+\varepsilon) + \frac{\ln(1+u(|z|))}{|z|}.$$

Comme le majorant tend vers $l+\varepsilon$ si $|z|$ tend vers $+\infty$, on a $l' \leqslant l+\varepsilon$, et ce pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $l' \leqslant l$.

Pour l'autre inégalité, il faut exprimer les a_n uniquement à l'aide de f : c'est possible grâce aux formules de Cauchy.

Pour $|z| = r$, la série des fonctions de t définies par $\frac{a_n r^n e^{int}}{n!}$ convergent uniformément pour t variant dans $[0, 2\pi]$, ainsi que, pour p fixé, la série des $\dfrac{a_n r^n e^{int} e^{-ipt}}{n!}$, (convergence normale en fait car on majore en module par $|a_n| \dfrac{r^n}{n!}\Big)$. On a donc :

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}\mathrm{d}t &= \sum_{n \geqslant 0} \frac{a_n r^n}{n!} \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}\mathrm{d}t \\ &= \frac{2\pi a_p r^p}{p!},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{donc } |a_p| &\leqslant \frac{p!}{2\pi r^p} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{p!}{2\pi r^p}\, 2\pi \cdot \sup\{|f(z)|\,;\,|z| = r\}.\end{aligned}$$

Supposons alors que $\lim\limits_{|z| = +\infty} \dfrac{\ln|f(z)|}{|z|} = l'$, soit $\varepsilon > 0$, il existe r_0 tel que pour tout $r \geqslant r_0$, si $|z| = r$, on ait $|f(z)| \leqslant e^{(l'+\varepsilon)r}$, d'où, pour tout $r \geqslant r_0$, et pour tout p entier,

$$|a_p| \leqslant \frac{p!}{r^p} e^{(l'+\varepsilon)r}.$$

Comme on va faire tendre p vers $+\infty$ dans $\sqrt[p]{|a_p|}$, on ne garde que les $p \geqslant (l'+\varepsilon)r_0$, et pour un tel p, on prend $r = \dfrac{p}{l'+\varepsilon}$, (donc $r \geqslant r_0$), dans la majoration précédente, ce qui donne : $|a_p| \leqslant \dfrac{p!}{\left(\dfrac{p}{l'+\varepsilon}\right)^p} e^p$, d'où :

$$|a_p|^{1/p} \leqslant \frac{e}{\left(\dfrac{p}{l'+\varepsilon}\right)} (p!)^{1/p}.$$

Comme, (formule de Stirling), $p! = \left(\dfrac{p}{e}\right)^p \sqrt{2\pi p}(1 + o(1))$, on a :

$$(p!)^{1/p} = \frac{p}{e} (2\pi p(1 + o(1)))^{1/p}, \text{ donc :}$$

$$|a_p|^{1/p} \leqslant (l'+\varepsilon)e^{\frac{1}{p}\ln(2\pi p(1+o(1)))}.$$

Le majorant tend vers $l' + \varepsilon$ si p tend vers $+\infty$, donc $l \leqslant l' + \varepsilon$, et ce pour tout $\varepsilon > 0$, donc $l \leqslant l'$ et on conclut bien à l'égalité $l = l'$.

10.21. C'est un calcul classique de $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \mathrm{d}x$. Une intégration par parties, pour $n \geqslant 2$, avec $u = \cos^{n-1} x$ et $\mathrm{d}v = \cos x \mathrm{d}x$, donne $\mathrm{d}u = -(n-1)(\cos^{n-2} x)\sin x \mathrm{d}x$ et $v = \sin x$, donc

$$I_n = \left[\sin x \cos^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} x \sin^2 x \mathrm{d}x$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{n-2} x)(1-\cos^2 x)\mathrm{d}x = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

d'où la relation $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

Comme $I_0 = \pi/2$ et $I_1 = 1$, on en déduit les valeurs :

$$I_{2p} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2p-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots 2p}\,\frac{\pi}{2} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\,\frac{\pi}{2}, \text{ et,}$$

$$I_{2p+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2p}{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2p+1)} \cdot 1 = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Pour $|t| < 1$, $1 - t\cos x$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, donc $f(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1 - t\cos x}$ existe. La recherche « d'invariants » n'aboutit pas donc on pose $\tan\frac{x}{2} = u$, d'où $(1+u^2)\frac{\mathrm{d}x}{2} = \mathrm{d}u$, et $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$, ce qui conduit à :

$$f(t) = \int_0^1 \frac{2\mathrm{d}u}{(1+u^2)\left(1 - t\,\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)} = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1 - t + u^2(1+t)}$$

$$= \frac{2}{1+t}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\frac{1-t}{1+t} + u^2} = \frac{2}{1+t}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\left[\operatorname{Arctan} u\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right]_0^1,$$

$$\boxed{f(t) = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}.}$$

Si on veut se débarrasser de la racine carrée dans Arctan, on passe aux « angles doubles » en posant $t = \cos 2u$, avec, pour $t \in]-1, 1[$, un seul u dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ tel qu'il en soit ainsi.

Mais alors $1+t = 2\cos^2 u$, $1-t = 2\sin^2 u$, d'où $\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}} = \operatorname{cotan} u$ car $\operatorname{cotan} u \geqslant 0$, et :

$$f(t) = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \operatorname{Arctan}(\operatorname{cotan} u) = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Arccos} t\right) = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin} t\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\operatorname{Arcsin} t}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-t^2}} \operatorname{Arcsin} t.$$

Comme la dérivée de $g(t) = (\operatorname{Arcsin} t)^2$ est $g'(t) = \dfrac{2 \operatorname{Arcsin} t}{\sqrt{1-t^2}}$, l'égalité $f(t) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{1-t^2}} + \dfrac{1}{2} g'(t)$ fournira un développement en série entière, (en 0), de g', (d'où de g), si on en connaît un de f.

Or, pour $|t| < 1$, pour tout x réel on a $|t\cos x| \leqslant |t| < 1$ et : $\dfrac{1}{1 - t\cos x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} t^k \cos^k x$, avec une convergence normale, (donc uniforme), en x, de cette série. On peut intégrer terme à terme, d'où :

$$f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^k x \, dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{I}_k t^k, \text{ relation valable si } |t| < 1.$$

Puis, pour $|t| < 1$, on a :

$$(1-t^2)^{-1/2} = \sum_{n \geqslant 0} \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - n + 1\right) \frac{(-t^2)^n}{n!}$$

$$= \sum_{n \geqslant 0} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2n-1) \cdot t^{2n}}{2^n n!} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{2}{\pi} \mathrm{I}_{2n} t^{2n}.$$

On a donc :

$$\frac{\pi}{2\sqrt{1-t^2}} + \frac{1}{2} g'(t) = \sum_{n \geqslant 0} \mathrm{I}_{2n} t^{2n} + \frac{1}{2} g'(t) = \sum_{k \geqslant 0} \mathrm{I}_k t^k,$$

d'où $g'(t) = 2 \sum_{p \geq 0} I_{2p+1} t^{2p+1}$, et, comme $g(0) = 0$, on obtient en intégrant, $g(t) = (\operatorname{Arcsin} t)^2 = 2 \sum_{p \geq 0} I_{2p+1} \dfrac{t^{2p+2}}{2p+2}$.

C'est encore $\sum_{p \geq 0} 2 \cdot \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!} \dfrac{t^{2p+2}}{2p+2}$, et, en posant $n = p+1$, on obtient

$$f(t) = \sum_{n \geq 1} 2^{2n-1} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!} t^{2n},$$

ce qui est bien le résultat de l'exercice 10.18, car $2^{2n-1} = 2 \cdot 4^{n-1}$.

10.22. 1°) Soit x_0 dans $[0, b[$, et $[x_0, x_0 + 2l]$, un intervalle contenu dans $[0, b[$. La formule de Taylor à l'ordre n entre x_0 et x de $[x_0, x_0 + 2l]$ s'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_n),$$

avec ξ_n entre x_0 et x, et, comme f et ses dérivées sont à valeurs positives, la suite des sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0)$ est croissante, majorée par $f(x)$, donc convergente : on note g la fonction somme de la série entière sur $[x_0, x_0 + 2l]$.

On veut prouver, que pour x proche de x_0, $g(x) = f(x)$, donc que le reste $R_n(x) = \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_n)$ tend vers 0. Or, ($f^{(n+2)} \geq 0 \Rightarrow f^{(n+1)}$ croissante), pour $x_0 \leq \xi_n \leq x$, on a $0 \leq R_n(x) \leq \dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x)$, et, pour majorer ce terme, on va appliquer, pour un y avec $x_0 < x < y < x_0 + 2l$, la formule de Taylor Lagrange entre x et y à l'ordre $n+2$: on a un η_{n+1} entre x et y tel que :

$$f(y) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(y-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(y-x)^{n+2}}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\eta_{n+1})$$

et comme tous les termes sont positifs, en particulier on a :

$$\frac{(y-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \leqslant f(y)\text{, soit } f^{(n+1)}(x) \leqslant \frac{(n+1)!}{(y-x)^{n+1}} f(y)\,.$$

Mais alors, avec $x_0 < x < y < x_0 + 2l$, on obtient une majoration du reste dans la formule de Taylor d'ordre n entre x_0 et x :

$$\mathrm{R}_n(x) \leqslant \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{(n+1)!}{(y-x)^{n+1}} f(y) = f(y)\cdot\left(\frac{x-x_0}{y-x}\right)^{n+1}.$$

Si on prend x dans $[x_0, x_0 + l[$, on aura $0 \leqslant x - x_0 < l$ et, comme $x_0 + 2l - x > l$, on pourra choisir y dans $[x_0 + l, x_0 + 2l]$ tel que $y - x > l$, d'où $0 < \dfrac{x - x_0}{y - x} < 1$, et pour un tel choix de y, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} f(y)\left(\frac{x-x_0}{y-x}\right)^{n+1} = 0$.

Il en résulte que, sur $[x_0, x_0 + l[$, la fonction somme de la série de Taylor de f en x_0 est f, et donc que sur $]x_0, x_0 + l\,[$ on a f analytique, comme somme d'une série entière.

Mais alors, si $x_1 \in\,]0, b\,[$, il existe x_0 et l tels que l'on ait $0 \leqslant x_0 < x_1 < x_0 + l < x_0 + 2l < b$, on applique ce qui précède et f est analytique en x_1.

2°) On reprend le 1°) avec $x_0 = 0$, et $l = \dfrac{b}{2}$, on a déjà f égale à la somme de sa série de Taylor en 0, sur $\left[0, \dfrac{b}{2}\right[$, mais aussi existence de g définie sur $[0, b[$, par $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0)$.

De plus f et g sont analytiques sur $[0, b[$, connexe, donc $f - g$ est analytique sur $[0, b[$ et identiquement nulle sur $\left[0, \dfrac{b}{2}\right[$: elle est identiquement nulle sur $[0, b[$, car ses zéros ne sont pas isolés, et finalement f est somme de sa série de Taylor en 0, sur $[0, b[$.

10.23. Si la suite des $|a_n|^{1/n}$ est majorée par $\mathrm{A} > 0$, l'inégalité $|a_n| \leqslant \mathrm{A}^n$, implique la majoration de $|a_n z^n|$ par $(\mathrm{A}|z|)^n$, terme général d'une série géométrique convergente pour $|z| < \frac{1}{A}$, donc le rayon de convergence de la série est non nul, car supérieur ou égal à $\frac{1}{A}$.

Réciproquement, si la série entière a un rayon de convergence $R > 0$, soit z_0 tel que $0 < |z_0| < R$, comme la série des $a_n z_0^n$ converge, son terme général tend vers 0, donc est borné : il existe une constante $K > 0$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n z_0^n| \leqslant K$, d'où : $|a_n|^{1/n} \leqslant \frac{1}{|z_0|}(K)^{1/n}$. Mais $\lim\limits_{n \to +\infty} K^{1/n} = 1$: la suite majorante étant convergente vers $\frac{1}{|z_0|}$, est à son tour bornée, donc la suite des $(|a_n|)^{1/n}$ est bornée.

10.24. On a $h_k = H_{k,0}$ est le nombre de permutations sans point fixe d'un ensemble de k éléments, donc toutes les permutations ayant exactement k points fixes sont obtenues en choisissant ces points fixes, (C_n^k choix), et en permutant, sans point fixe, les $n-k$ autres, ce qui se fait de h_{n-k} façons, d'où $H_{n,k} = C_n^k h_{n-k}$.

On obtient ensuite toutes les permutations en les groupant suivant leur nombre, k, de points fixes donc $n! = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k h_{n-k}$.

Comme $h_k \leqslant k!$, (h_k ne représente qu'une partie des $k!$ permutations de k éléments), on a $\left|\frac{h_k z^k}{k!}\right| \leqslant |z|^k$, série qui converge si $|z| < 1$, d'où $R \geqslant 1$.

On a calculé $n! = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k h_{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!}\frac{h_k}{k!}$, donc $1 = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \cdot \frac{h_k}{k!}$: voilà qui rappelle fortement le terme général de la série produit $e^z D(z)$. On a donc, pour $|z| < R$, $e^z D(z) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} z^p = \frac{1}{1-z}$, et l'égalité $D(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}$ prouve que le rayon de convergence de la série D est 1.

On a enfin $\dfrac{D^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{h_k}{k!}$, et la formule de Liebnitz nous donne la dérivée $k^{\text{ième}}$ du produit $D(z)$, en :

$$D^{(k)}(z) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \frac{i!}{(1-z)^{i+1}} (-1)^{k-i} e^{-z}, \text{ donc on a :}$$

$$h_k = D^{(k)}(0) = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (-1)^{k-i} i! = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \frac{k!}{(k-i)!}$$

$$= k! \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Or $\dfrac{1}{e} = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$, donc $\displaystyle\sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{e} - \sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$ d'où $h_k - \dfrac{k!}{e} = -k! \displaystyle\sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!}$.

La série des $\dfrac{(-1)^i}{i!}$ est alternée, et converge suivant son critère donc $k! \left| \displaystyle\sum_{i=k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| < \dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$ si $k \geqslant 1$, d'où :

$$-\frac{1}{2} < h_k - \frac{k!}{e} < \frac{1}{2} \Rightarrow -1 < h_k - \left(\frac{k!}{e} + \frac{1}{2}\right) < 0,$$

soit encore :

$0 < \left(\dfrac{k!}{e} + \dfrac{1}{2}\right) - h_k < 1$, avec h_k entier, c'est que h_k est la partie entière de $\dfrac{k!}{e} + \dfrac{1}{2}$.

CHAPITRE XI

Espaces hermitiens, séries de Fourier

L'étude des espaces hermitiens, d'un point de vue algébrique, ressemble beaucoup à celle des espaces euclidiens.

On y retrouve les notions de base orthonormée, le procédé d'orthonormalisation de Schmidt est encore là, ainsi que les projections orthogonales et les symétries orthogonales associées à des décompositions du type $E = F \oplus F^{\perp}$. On a encore droit à la signature d'une forme hermitienne.

Une grande importance est à accorder à la notion d'opérateur adjoint, avec les opérateurs auto-adjoints, (diagonalisables dans le groupe unitaire), et les opérateurs normaux, (c'est à dire u opérateur qui commute avec son adjoint).

Mais l'essentiel du chapitre concerne les espaces préhilbertiens de dimension infinie, avec en particulier l'étude des séries de Fourier. C'est dire l'importance de la topologie dans ce cas.

En prenant l'exemple de l'espace E des applications continues, 2π périodiques, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, il sera donc normé par $\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}$, norme associée au produit scalaire hermitien $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) \mathrm{d}t$, et aussi par la norme de la convergence uniforme, $\|f\|_\infty = \sup \{|f(t)| \,;\, t \in [0, 2\pi]\}$. On a $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$, mais il n'y a pas équivalence des deux normes.

Les fonctions $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ avec $e_n(t) = e^{int}$, forment une famille orthonormée de E, et, l'espace T des polynômes trigonométriques qu'elles engendrent étant partout dense dans E pour $\| \;\|_\infty$, (conséquence de Stone Weierstrass), l'est aussi pour $\| \;\|_2$: on obtient une famille totale, chaque élément f de E étant « égal » à la somme de la série des $\langle e_n, f \rangle e_n$, pour n dans $\mathbb{Z}$, mais attention, égal pour la norme $\| \;\|_2$: c'est *l'égalité de*

Bessel, qui, avec $c_n = \langle e_n, f \rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}\mathrm{d}t$ s'écrit : $(\|f\|_2)^2 = \displaystyle\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$, et qui équivaut à :

$$\lim_{\substack{p \to -\infty \\ q \to +\infty}} \left\| f - \sum_{n=p}^{q} c_n(f)e_n \right\|_2 = 0 .$$

L'égalité de Bessel est aussi valable pour les fonctions continues par morceaux, 2π périodiques, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, mais là, on a seulement une semi-norme.

Un mot des autres types de convergence pour les séries de Fourier :

1°) si f est continue, de classe C^1 par morceaux, il y a convergence uniforme de la série de Fourier vers f ;

2°) si f est dans l'espace D de Dirichlet des fonctions continues par morceaux, de discontinuités de première espèce, il y a *convergence simple* vers la régularisée de f, qui est... f, (c'est le *Théorème de Dirichlet*) des <u>sommes symétriques</u> ;

3°) si f est continue par morceaux sans plus, il y a convergence *au sens de Césaro* des moyennes arithmétiques des sommes symétriques vers la régularisée de f : c'est le <u>*Théorème de Féjer*</u>.

Du fait de ces différents modes de convergence, les séries de Fourier sont d'un emploi moins commode que les séries entières. Attention donc aux dérivations terme à terme.

Se rappeler à ce sujet que, si f est 2π périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, de classe C^p, on a, $c_n(f) = \left(\dfrac{1}{in}\right)^p c_n(f^{(p)})$, (si $n \neq 0$), et comme $|c_n(f^{(p)})| \leqslant \|f^{(p)}\|_\infty$, $c_n(f)$ est $O\left(\dfrac{1}{n^p}\right)$.

En posant $u_n(x) = c_n(f)e^{inx}$, et si on dérive q fois, on aura $u_n^{(q)}(x) = \dfrac{(in)^q}{(in)^p} c_n(f^{(p)})$, d'où une convergence uniforme de la série des dérivées jusqu'à l'ordre $p-2$, et même $p-1$ car la série des $\dfrac{1}{n} \cdot c_n(f^{(p)})$ est absolument convergente, puisque $2 \cdot \dfrac{1}{|n|} |c_n(f^{(p)})| \leqslant \dfrac{1}{n^2} + |c_n(f^{(p)})|^2$.

Voir en 11.6 l'utilisation de cette dérivation, ou en 11.8.

J'ai parlé des séries entières : ne pas oublier que la somme $S(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ d'une série entière de rayon de convergence R, fournit des séries de Fourier d'un type particulier, les fonctions $f_r(\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}$, avec $c_k(f_r) = 0$ si $k < 0$ et $c_k(f_r) = a_k r^k$ si $k \geqslant 0$: il y a un lien évident entre séries entières et séries de Fourier avec des $c_n(f)$ nuls si $n < 0$.

Voici une liste de résultats à garder en mémoire :

• en dimension infinie, l'adjoint n'existe pas forcément, mais s'il existe, il est unique ;

• si u est auto-adjoint, ses sous-espaces propres éventuels (pensez à la dimension infinie) sont en somme directe orthogonale ;

• Si F est sous-espace de dimension finie de E, espace préhilbertien, on a $E = F \oplus F^{\perp}$, et si $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base orthonormée de F, le projeté d'un vecteur x de E sur F est $p_F(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, f \rangle e_k$;

• s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy Schwarz, c'est que les vecteurs sont liés ;

• si A est une matrice (p, q), ${}^t\bar{A}A$ est une matrice hermitienne positive carrée d'ordre q ;

• pensez à l'espace $l^2(\mathbb{C})$ des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (ou $n \in \mathbb{Z}$) dont la série des $|u_n|^2$ converge ;

• n'oubliez pas le *lemme de Lebesgue*, (utilisé pour justifier le Théorème de Dirichlet) : si f est réglée, on a :

$$\lim_{n \to \pm\infty} \int_a^b f(t) e^{int} dt = 0, \text{ (voir 11.16) ;}$$

• il est bon de savoir que A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable dans le groupe unitaire, (voir 11.9) ;

• soyez sensible à l'indépendance du problème, (ou sa stabilité) si on remplace une matrice par une matrice semblable, ce qui permet souvent de prendre des formes adaptées, (voir 11.10) ;

• comme dans le cas de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la **décomposition polaire** d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ existe, l'unicité étant laissée de côté si on ne part pas d'une matrice inversible, (voir 11.12) ;

• pour ne garder que les termes de p en p dans une série de Fourier, penser aux racines $p^{\text{ième}}$ de l'unité, (11.5).

Énoncés

11.1. Soit f continue, 2π périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note a_n et b_n ses coefficients de Fourier.

Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x réels, on pose $D_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$ et

$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$.

Soit $\psi_x(t) = f(x-t) - f(x+t)$. Donner une expression de $S_n(x)$ sous forme d'une intégrale portant sur ψ_x et D_n. On suppose l'intégrale $\int_0^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{t}\, dt$ absolument convergente, que dire de la suite des $S_n(x)$?

11.2. Soit une suite réelle décroissante $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui converge vers 0.

a) Montrer que :

$\forall x \in \mathbb{R}, \sum a_n \cos nx$ converge $\Leftrightarrow \sum a_n$ converge.

b) Montrer que :

$\sum a_n \sin nx$ converge uniformément $\Leftrightarrow na_n$ tend vers 0.

11.3. Soit f continue, 2π périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et γ dans $[0, 2\pi]$ tel que $\frac{\gamma}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x + k\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f$.

11.4. Soit A une matrice carrée réelle et A' une matrice de même taille telle que $AA'A = A$. Soit U dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On pose $A = U{}^tU$, $V = A' - {}^tA'$ et $W = {}^tUVU$. Montrer que $W = 0$.

On pose $P = {}^tUA'U$, montrer que P est un projecteur symétrique. Soient X dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et Y une matrice réelle symétrique définie positive d'ordre n. On pose $Z = Y + X{}^tX$. Montrer que $I_p - {}^tXZ'X$ est symétrique définie positive, (on pourra mettre Y sous la forme $T{}^tT$).

11.5. Soit une fonction f, 2π périodique, continue par morceaux, de discontinuités régulières, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, que l'on suppose égale à sa série de Fourier.

Quelle est la somme de la série trigonométrique des fonctions obtenues en ne gardant que les termes de la série de Fourier, d'indice dans $p\mathbb{Z}$, p fixé dans $\mathbb{N}^*$.

11.6. Déterminer toutes les fonctions 2π périodique, de classe C^2 au moins, telles que $f(2x) = 2\sin x\, f'(x)$.

11.7. On pose, pour $t > 0$ fixé, $f(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\dfrac{(k-x)^2}{2t}\right)$.

Définition, continuité, périodicité de f. Coefficients de Fourier de f.

On pose $\theta(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi\dfrac{k^2}{t}\right)$. Relation entre $\theta(t)$ et $\theta\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

11.8. Soit une fonction g, 2π périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, paire, nulle sur $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$, valant $\cos x$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Déterminer son développement en série de Fourier.

Soit a réel, déterminer, s'il en existe, une solution 2π périodique de l'équation différentielle $y'' + ay = g$.

11.9. Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Montrer que

$$\operatorname{trace}(A^*A) = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \Leftrightarrow A^*A = AA^*.$$

11.10. Montrer que l'application $H \rightsquigarrow e^H$ établit une bijection entre l'ensemble $\mathscr{H}$ des matrices hermitiennes et celui $\mathscr{D}$ des matrices hermitiennes définies positives.

11.11. Soit sur $E = \mathbb{C}^n$ hermitien canonique, un endomorphisme hermitien u tel que $|||u||| \leqslant 1$. Montrer que h, opérateur défini par

$h(x) = x - u^*u(x)$ est hermitien positif, et que $h(x_0) = 0$ équivaut à $\langle h(x_0), x_0 \rangle = 0$.

11.12. Soient A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AA^* = BB^*$. Montrer qu'il existe U unitaire telle que $B = AU$.

11.13. Soit une matrice B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et k un entier non nul. Montrer qu'il existe une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A(A^*A)^k = B$.

11.14. Développer en série de Fourier la fonction f définie par $f(x) = e^{iax}$ sur $]-\pi, \pi[$, par $f(\pi) = \cos a\pi$, f étant 2π périodique.

En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$, pour a non dans $\mathbb{Z}^*$.

11.15. Soit, pour tout entier naturel n, $\displaystyle I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(2n+1)t}{1+\cos^2 t}\,dt$.

Convergence et calcul de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n$.

11.16. Montrer la convergence de la série de terme général $(-1)^n \displaystyle\int_0^1 \cos(nt^2)\,dt$, et calculer sa somme.

Solutions

11.1. En remplaçant a_k et b_k par leurs valeurs, on a :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi} f(t)(\cos kt \sin kx - \sin kt \cos kx)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi} f(t)\sin k(x-t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En utilisant la 2π périodicité des fonctions, on ramène l'intégrale à $\int_{x-\pi}^{x+\pi} = \int_{x-\pi}^{x} + \int_{x}^{x+\pi}$. Sur la première, on effectue le changement de variable $x-t = u$, u variant de π à 0, sur la deuxième, $x-t = -u$, u variant de 0 à π, après regroupement, il vient :

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(f(x-u)-f(x+u))\left(\sum_{k=1}^{n}\sin ku\right)\mathrm{d}u \text{, soit}$$

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi_x(u)D_n(u)\mathrm{d}u.$$

$$\begin{aligned} \text{Puis } D_n(u) &= \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{iku}\right) \\ &= \operatorname{Im}\frac{e^{i(n+1)u}-e^{iu}}{e^{iu}-1}\text{, pour } u \neq 0(2\pi), \\ &= \operatorname{Im}\frac{e^{iu}\cdot e^{i\frac{n}{2}u}2i\sin\frac{n}{2}u}{e^{i\frac{u}{2}}2i\sin\frac{u}{2}} = \frac{\sin\frac{nu}{2}\sin\frac{(n+1)u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}, \end{aligned}$$

(et, pour $u = 0(2\pi)$, par continuité on trouve la valeur exacte, 0).

Donc :

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\psi_x(t)\frac{\sin\frac{nt}{2}\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t\text{, avec :}$$

$$\sin \frac{nt}{2} \sin \frac{n+1}{2}\, t = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{t}{2} - \cos \frac{(2n+1)t}{2}\right), \text{ d'où :}$$

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{t}\left(\frac{t\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2}}\right) dt - \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{\sin \frac{t}{2}} \cos \frac{2n+1}{2}\, t dt.$$

On a supposé l'intégrale impropre en 0, $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{t}\, dt$ absolument convergente, comme $t \rightsquigarrow \dfrac{t\cos t/2}{\sin t/2}$ tend vers 2 en 0, la première intégrale impropre converge, notons la I, elle ne dépend pas de n. La deuxième converge aussi, le cosinus étant borné et $\sin t/2$ étant équivalent à $t/2$ en 0. On a alors :

$$|S_n(x) - I| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{\sin \frac{t}{2}} \cos \frac{2n+1}{2}\, t\, dt\right|.$$

Or, $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \left(\alpha < \dfrac{\pi}{2}\right), \displaystyle\int_0^{\alpha} \left|\frac{\psi_x(t)}{\sin \frac{t}{2}}\right| dt \leqslant \varepsilon$, d'où : $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$|S_n(x) - I| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\alpha}^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{\sin \frac{t}{2}} \cos \frac{2n+1}{2}\, t\, dt\right|,$$

$$\left(\text{on écrit} \left|\int_0^{\pi}\right| = \left|\int_0^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\pi}\right| \leqslant \left|\int_0^{\alpha}\right| + \left|\int_{\alpha}^{\pi}\right| \right.$$
$$\left. \leqslant \int_0^{\alpha} |\ | + \left|\int_{\alpha}^{\pi}\right|\right).$$

Un peu de culture permet de savoir qu'on conclura grâce au lemme de Lebesgue : sur le segment $[\alpha, \pi]$, la fonction $t \rightsquigarrow \dfrac{\psi_x(t)}{\sin \frac{t}{2}}$ est continue, (donc réglée), donc : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_{\alpha}^{\pi} \frac{\psi_x(t)}{\sin \frac{t}{2}} \cos \frac{2n+1}{2}\, t\, dt = 0$, et pour le même $\varepsilon > 0$, on peut trouver n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, la deuxième intégrale soit majorée par ε d'où $|S_n(x) - I| \leqslant \frac{\varepsilon}{\pi}$, et

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\psi_x(t) \cos \frac{t}{2}}{\sin t/2} \, dt.$$

Le lemme de Lebesgue se justifie en commençant par une fonction constante, puis en passant aux fonctions en escalier par combinaison linéaire, et en concluant pour les fonctions réglées par passage à la limite.

11.2. a) Si la série des $a_n \cos nx$ converge pour tout x, elle converge pour $x = 0$, donc la série des a_n converge.

Si la série des a_n converge, comme a_n tend vers 0 en décroissant, les a_n sont positifs ou nuls, et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|a_n \cos nx| \leqslant a_n$: il y a convergence absolue de la série des $a_n \cos nx$.

b) C'est beaucoup plus délicat.

Si la série des $a_n \sin nx = u_n(x)$ converge uniformément, en appliquant le critère de Cauchy uniformément on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \forall m \geqslant n, \forall x \in \mathbb{R}, \left| \sum_{p=n}^{m} u_n(x) \right| \leqslant \varepsilon .$$

Prenons alors $n \geqslant n_0, x_n = \dfrac{1}{2n}$, pour $p = n+1, n+2, \ldots, 2n$, on a $0 < \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{n+1}{2n} \leqslant p x_n \leqslant \dfrac{2n}{2n} = 1 < \dfrac{\pi}{2}$, et par concavité, sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geqslant \dfrac{2}{\pi} x$, donc $\sin p x_n \geqslant \dfrac{2}{\pi} \dfrac{p}{2n} = \dfrac{p}{\pi n}$.

On multiplie par $a_p \geqslant 0$, (toujours a_n tend vers 0 en décroissant), et pour $n \geqslant n_0, m = 2n$, on a :

$$\varepsilon \geqslant \sum_{p=n+1}^{2n} a_p \sin(p x_n) \geqslant \sum_{p=n+1}^{2n} a_p \cdot \frac{p}{\pi n}.$$

Les a_p sont tous supérieurs à a_{2n}, (décroissance de la suite), et même, on minore p par n, d'où, $\forall n \geqslant n_0$:

$$\varepsilon \geqslant n \cdot a_{2n} \cdot \frac{n}{\pi n} = \frac{1}{2\pi} 2n a_{2n} \geqslant 0 \text{, on a déjà : } \lim_{n \to +\infty} 2n a_{2n} = 0 .$$

Comme $0 \leqslant (2n+1)a_{2n+1} = (2n)a_{2n+1} + a_{2n+1} \leqslant 2na_{2n} + a_{2n}$, et que la suite des a_k converge vers 0, on a également :

$$\lim_{n \to +\infty} (2n+1)a_{2n+1} = 0 \text{, et finalement } \lim_{k \to +\infty} ka_k = 0 .$$

Réciproquement, on suppose que a_n tend vers 0 en décroissant, et que na_n tend vers 0 aussi. Cela, (a_n tend vers 0 en décroissant) fait penser à une transformation d'Abel.

En introduisant $\mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \sin kx = \mathrm{Im}\, \dfrac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1}$, pour $x \neq 0(2\pi)$, on a encore :

$$\mathrm{S}_n(x) = \mathrm{Im} \left(\frac{e^{i\frac{n+1}{2}x} \cdot 2i\sin \frac{n+1}{2}x}{e^{i\frac{x}{2}} \cdot 2i\sin \frac{x}{2}} \right) = \sin \frac{nx}{2} \frac{\sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}},$$

d'où, pour $x \neq 0(2\pi)$, $|\mathrm{S}_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$.

On va majorer une somme du type :

$$\mathrm{S}_{n,q}(x) = \sum_{k=n+1}^{q} a_k \sin kx,$$

avec $q > n$, en procédant de façon différente suivant x.

D'abord, on travaille pour x dans $[0, 2\pi]$, (périodicité), et même $[0, \pi]$, (imparité en fait). Pour $x = 0(\pi)$, la somme est nulle. Comment utiliser l'hypothèse na_n tend vers 0 ? Peut-être en majorant $|\sin kx|$ par $k|x|$?

Soit $\varepsilon > 0, \exists n_0, \forall k \geqslant n_0, 0 \leqslant ka_k \leqslant \varepsilon$, (n'oublions pas que les a_k sont positifs).

Donc pour $n \geqslant n_0$, et $p \geqslant 1$, (on verra comment lier x et p ensuite), on a

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \sin kx \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} ka_k |x| \leqslant p\varepsilon |x| .$$

Puis, si $q \geqslant n + p + 1$, en effectuant une transformation d'Abel, on a :

$$\left|\sum_{k=n+p+1}^{q} a_k(S_k(x)-S_{k-1}(x))\right|$$
$$= \left|-a_{n+p+1}S_{n+p}+a_qS_q+\sum_{k=n+p+1}^{q-1}(a_k-a_{k+1})S_k\right|,$$

soit, comme $a_k - a_{k+1} \geqslant 0$, et en majorant $|S_k(x)|$ par $\dfrac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$:

$$\left|\sum_{k=n+p+1}^{q} a_k \sin kx\right| \leqslant \left(a_{n+p+1}+a_q+\sum_{k=n+p+1}^{q-1} a_k-a_{k+1}\right)\frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}$$
$$\leqslant \frac{2a_{n+p+1}}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

On a donc, avec $q \geqslant n+p+1$, et $x \neq 0(2\pi)$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{q} a_k \sin kx\right| \leqslant p\varepsilon|x| + \frac{2a_{n+p+1}}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

De plus, $a_{n+p+1} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{n+p+1} \leqslant \dfrac{\varepsilon}{p+1}$, donc pour x dans $]0, \pi[$, comme $\dfrac{x}{2} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, intervalle où on a $\sin y \geqslant \dfrac{2}{\pi}\, y$, on a finalement, avec $p \geqslant 1$ et $q \geqslant n+p+1$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{q} a_k \sin kx\right| \leqslant p\varepsilon x + \frac{2\varepsilon}{(p+1)\,\frac{2}{\pi}\,\frac{x}{2}}, \text{ soit}$$
$$\leqslant \varepsilon\left(px + \frac{2\pi}{(p+1)x}\right).$$

Soit alors $x \in\,]0, \pi[$ et $p = 1 + \mathrm{E}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, on a :

$p - 1 \leqslant \dfrac{1}{x} < p$ d'où $px \leqslant 1 + x < 1 + \pi$ et $(p+1)x > 1 + x > 1$, d'où $\dfrac{2\pi}{(p+1)x} < 2\pi$, et la majoration :

$\left|\sum_{k=n+1}^{q} a_k \sin kx\right| \leqslant \varepsilon(1+3\pi)$, valable pour tout x de $]0, \pi[$, mais aussi en 0 et π, donc le critère de Cauchy s'applique uniformément en x.

11.3. Les deux membres de l'égalité dépendent linéairement de f et sont « stables » par convergence uniforme en f. On peut donc établir le résultat pour les polynômes trigonométriques, l'étendre aux fonctions continues, C^1 par morceaux, puis aux continues.

Pour $f(x) = e^{ipx} = \cos px + i\sin px$, on a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = 1 \text{ si } p = 0,\ 0 \text{ si } p \neq 0.$$

Pour $p = 0$, (donc $f \equiv 1$), on a $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k\gamma) = 1$, d'où l'égalité dans ce cas.

Pour $p \neq 0$, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip(x+k\gamma)} = \frac{e^{ipx}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{ip\gamma})^k$.

Or $e^{ip\gamma} = 1$ est exclu, sinon il existerait a dans $\mathbb{Z}$ tel que $p\gamma = 2a\pi$ et $\frac{\gamma}{\pi} = \frac{2a}{p} \in \mathbb{Q}$; on a donc une progression géométrique de raison différente de 1, donc :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip(x+k\gamma)} &= \frac{e^{ipx}}{n}\cdot\frac{e^{ipn\gamma}-1}{e^{ip\gamma}-1}\\ &= \frac{e^{ipx}}{n}\cdot\frac{e^{ipn\frac{\gamma}{2}}2i\sin\frac{pn\gamma}{2}}{e^{ip\frac{\gamma}{2}}2i\sin\frac{\gamma}{2}}\\ &= \frac{e^{ipx}}{n}\cdot e^{ip(n-1)\frac{\gamma}{2}}\,\frac{\sin\frac{pn\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}},\end{aligned}$$

quantité, qui dans $\mathbb{C}$, tend vers 0 si n tend vers $+\infty$.

Il en résulte que l'égalité est valable pour les fonctions du type $x \rightsquigarrow \cos px$, ou $x \rightsquigarrow \sin px$, donc, par linéarité, pour les polynômes trigonométriques.

Puis, si f est limite uniforme de fonctions $(g_r)_{r \in \mathbb{N}}$ continues, 2π périodiques, vérifiant l'égalité, alors f la vérifie. En effet, posons :

$I_n(f) = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+k\gamma)$: I_n dépend linéairement de f.

On a $I_n(f) = I_n(f-g_r) + I_n(g_r)$, et :

$$|I_n(f-g_r)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \|f-g_r\|_\infty + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |f(x+k\gamma) - g_r(x+k\gamma)|\,.$$

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists r_0$ tel que $\forall r \geqslant r_0$, $\|f-g_r\|_\infty \leqslant \varepsilon$, en particulier :

$$|I_n(f-g_{r_0})| \leqslant \frac{1}{2\pi}\cdot 2\pi\cdot\varepsilon + \frac{1}{n}\cdot n\cdot\varepsilon = 2\varepsilon\ ;$$

puis, pour r_0 fixé, $\exists n_0, \forall n \geqslant n_0, I_n(g_{r_0}) \leqslant \varepsilon$, d'où, $\forall n \geqslant n_0$, $|I_n(f)| \leqslant 3\varepsilon$: on a bien $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n(f) = 0$, c'est-à-dire l'égalité pour f.

Mais alors on peut conclure rapidement si on sait que f, continue, 2π périodique, est limite uniforme, sur $[0, 2\pi]$, de polynômes trigonométriques, grâce au Théorème de Stone-Weierstrass.

Sinon, on fait un détour en passant par des fonctions continues, de classe C^1 par morceaux, qui sont alors sommes de leur série de Fourier qui converge uniformément. (Honnêtement, je ne sais si on n'utilise pas Stone-Weierstrass pour obtenir cela.)

L'égalité est donc vraie pour f continue, C^1 par morceaux.

Enfin, si f est bêtement continue sur $\mathbb{R}$, 2π périodique, elle est uniformément continue. Soit donc $\varepsilon > 0$ et $\alpha > 0$ tel que $|x-y| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$, si $\frac{2\pi}{n} \leqslant \alpha$, en coupant $[0, 2\pi]$ en n segments, et en construisant g affine par morceaux, en joignant les points $\left(\frac{2k\pi}{n}, f\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$, on obtient g continue, de classe C^1 par morceaux, avec $\|f-g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Pour conclure, f continue 2π périodique est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, 2π périodiques, C^1 par morceaux pour lesquelles l'égalité est vérifiée, donc elle l'est pour f.

11.4. Comme on parle de matrices symétriques, on se placera sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{R}^p$, euclidiens canoniques, de bases orthonormées notées $\mathscr{B}$ ou $\mathscr{B}'$ et on considère les applications linéaires a, a', p... de matrices A, A', P... relativement à ces bases.

Ainsi, si $\mathscr{B}$ est base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, avec a linéaire de matrice A dans la base $\mathscr{B}$, est-ce que a' existe, avec $aa'a = a$? Il y a un problème de « simplification » par a à droite, (ou de définition de a' sur l'image Im a), or a induit un isomorphisme, noté $\tilde{a}$, d'un supplémentaire F de Ker a sur Im a. Alors, allons-y en introduisant F tel que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} a \oplus F$ et G tel que $\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} a \oplus G$.

Sur $\operatorname{Im} a = \operatorname{Im} \tilde{a} = \tilde{a}(F)$, pourquoi ne pas poser :

$$\forall y \in \operatorname{Im} a, a'(y) = \tilde{a}^{-1}(y),$$

et envoyer, par a', G sur 0.

Vérifions qu'alors $aa'a$ et a coïncident sur $\mathbb{R}^n = \operatorname{Ker} a \oplus F$.

D'abord, pour tout x de Ker a, $aa'a(x) = 0 = a(x)$, puis, si x est dans F, $a(x) = \tilde{a}(x)$, avec $\tilde{a}(x)$ dans Im a, donc :

$$(aa'a)(x) = aa'(\tilde{a}(x)) = a\tilde{a}^{-1}(\tilde{a}(x)) = a(x),$$

on a bien l'existence de a'.

On considère maintenant U dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, donc $A = U{}^tU$ est une matrice carrée symétrique, positive, car avec X matrice colonne d'ordre n, et $Y = {}^tUX$, matrice colonne d'ordre p, on a

$${}^tXAX = ({}^tXU)({}^tUX) = {}^tYY = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 \geqslant 0.$$

Ce côté symétrique de A, si on l'exploite en transposant l'égalité $AA'A = A$, donne $A{}^tA'A = A$, et, par linéarité, avec $V = A' - {}^tA'$, on aura :

$$AVA = AA'A - A{}^tA'A = A - A = 0.$$

Par ailleurs ${}^t\mathrm{V} = {}^t\mathrm{A}' - \mathrm{A}' = -\mathrm{V}$, donc V est antisymétrique, ainsi que $\mathrm{W} = {}^t\mathrm{UVU}$, donc la matrice $i\mathrm{W}$ est hermitienne, donc diagonalisable dans le groupe unitaire.

Mais alors W aussi est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$: elle sera nulle si et seulement si elle n'admet que 0 pour valeur propre, donc si et seulement si elle annule un polynôme du type x^k, ce qui conduit à calculer les puissances de W.

On a $\mathrm{W}^2 = {}^t\mathrm{UV}(\mathrm{U}{}^t\mathrm{U})\mathrm{VU} = {}^t\mathrm{UVAVU}$, encore « un coup », et on aura du $\mathrm{AVA} = 0$.

$$\begin{aligned}\text{On a } \mathrm{W}^3 &= ({}^t\mathrm{UVAV})(\mathrm{U}{}^t\mathrm{U})\mathrm{VU} = ({}^t\mathrm{UVAV})\mathrm{AVU}\\ &= {}^t\mathrm{UV}(\mathrm{AVA})\mathrm{VU} = {}^t\mathrm{UV0VU} = 0,\end{aligned}$$

donc W, diagonalisable n'ayant que 0 pour valeur propre, est nul.

Comme on ne connaît pas directement A', on ne peut pas exhiber ${}^t\mathrm{A}'$, donc calculer ${}^t\mathrm{P} = {}^t({}^t\mathrm{UA'U})$ tout seul ne sert à rien, mais avoir P symétrique, c'est-à-dire ${}^t\mathrm{P} = \mathrm{P}$, c'est aussi avoir $\mathrm{P} - {}^t\mathrm{P} = 0$, (sachez « voir » les égalités sous différentes formes), or on a :

$$\mathrm{P} - {}^t\mathrm{P} = {}^t\mathrm{UA'U} - {}^t\mathrm{U}{}^t\mathrm{A'U} = {}^t\mathrm{U}(\mathrm{A}' - {}^t\mathrm{A}')\mathrm{U} = {}^t\mathrm{UVU} = \mathrm{W} = 0.$$

L'opérateur P, symétrique, est donc diagonalisable dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, (matrice carrée d'ordre p), il sera donc un projecteur si et seulement si il n'a que 0 et 1 pour valeurs propres, donc si et seulement si il annule un polynôme du type $x^\alpha(1-x)^\beta$.

On a $\mathrm{P}^2 = {}^t\mathrm{UA'}(\mathrm{U}{}^t\mathrm{U})\mathrm{A'U} = {}^t\mathrm{UA'AA'U}$, et pour retrouver P, ou une puissance de P, il faudrait utiliser l'égalité $\mathrm{AA'A} = \mathrm{A}$, donc retrouver $(\mathrm{U}{}^t\mathrm{U})$ ..., ce qui conduit à calculer :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^3 &= ({}^t\mathrm{UA'AA'})(\mathrm{U}{}^t\mathrm{U})\mathrm{A'U} = {}^t\mathrm{UA'}(\mathrm{AA'A})\mathrm{A'U}\\ &= {}^t\mathrm{UA'AA'U} = \mathrm{P}^2,\end{aligned}$$

donc P annule le polynôme $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$: ses seules valeurs propres possibles sont 0 et 1, donc P étant symétrique, donc diagonalisable, est un projecteur, orthogonal d'ailleurs car ses sous-espaces propres sont orthogonaux entre-eux.

Passons au dernier point.

Comme Y est symétrique réelle, définie positive, elle munit $\mathbb{R}^n$, (rapporté à sa base canonique, $\mathscr{B}$), d'une structure euclidienne et si $\mathscr{C}$ est une base orthonormée pour cette structure, avec P matrice régulière de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ on aura ${}^t\mathrm{PYP} = \mathrm{I}_n$, donc $\mathrm{Y} = {}^t(\mathrm{P}^{-1})\mathrm{P}^{-1}$ s'écrit $\mathrm{T}{}^t\mathrm{T}$ avec $\mathrm{T} = {}^t(\mathrm{P}^{-1})$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

On a alors $\mathrm{Z} = \mathrm{T}{}^t\mathrm{T} + \mathrm{X}{}^t\mathrm{X} = \mathrm{T}(\mathrm{I}_n + \mathrm{T}^{-1}\mathrm{X}{}^t\mathrm{X}{}^t\mathrm{T}^{-1}){}^t\mathrm{T}$

$$= \mathrm{T}(\mathrm{I}_n + \mathrm{X}_1{}^t\mathrm{X}_1){}^t\mathrm{T}, \text{ avec } \mathrm{X}_1 = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{X},$$

et $\mathrm{X}_1{}^t\mathrm{X}_1$ étant symétrique positive, donc de valeurs propres positives, les valeurs propres de $\mathrm{I}_n + \mathrm{X}_1{}^t\mathrm{X}_1$ sont $\geqslant 1$, et cette matrice est inversible, donc Z aussi, mais alors l'égalité $\mathrm{ZZ'Z} = \mathrm{Z}$ donne $\mathrm{Z'} = \mathrm{Z}^{-1}$.

On a donc $\mathrm{I}_p - {}^t\mathrm{XZ'X} = \mathrm{I}_p - {}^t\mathrm{XZ}^{-1}\mathrm{X}$, avec $\mathrm{Z} = \mathrm{T}(\mathrm{I}_n + \mathrm{X}_1{}^t\mathrm{X}_1){}^t\mathrm{T}$,

donc $\mathrm{I}_p - {}^t\mathrm{XZ'X} = \mathrm{I}_p - {}^t\mathrm{X}{}^t\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{I}_n + \mathrm{X}_1{}^t\mathrm{X}_1)^{-1}\mathrm{T}^{-1}\mathrm{X}$,

et comme $\mathrm{X}_1 = \mathrm{T}^{-1}\mathrm{X}$, c'est encore :

$$\mathrm{I}_p - {}^t\mathrm{XZ'X} = \mathrm{I}_p - {}^t\mathrm{X}_1(\mathrm{I}_n + \mathrm{X}_1{}^t\mathrm{X}_1)^{-1}\mathrm{X}_1.$$

Si on pose $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{I}_n + \mathrm{X}_1{}^t\mathrm{X}_1$, on a encore Z_1 inversible, car symétrique de valeurs propres $\geqslant 1$, donc $(\mathrm{I}_n + \mathrm{X}_1{}^t\mathrm{X}_1)^{-1} = \mathrm{Z'}_1$, et on doit justifier que $\mathrm{I}_p - {}^t\mathrm{X}_1\mathrm{Z'}_1\mathrm{X}_1$ est symétrique définie positive, avec $\mathrm{Z'}_1$ associé à $\mathrm{Z}_1 = \mathrm{I}_n + \mathrm{X}_1{}^t\mathrm{X}_1$, c'est-à-dire $\mathrm{Z'}_1 = \mathrm{Z}_1^{-1}$.

Ceci revient à prouver que les valeurs propres de $\mathrm{I}_p - {}^t\mathrm{X}_1\mathrm{Z'}_1\mathrm{X}_1$ sont strictement positives, donc que celles de ${}^t\mathrm{X}_1\mathrm{Z'}_1\mathrm{X}_1$ sont < 1.

Or, si λ est une valeur propre de la matrice symétrique ${}^t\mathrm{X}_1\mathrm{Z'}_1\mathrm{X}_1$, et si U est un vecteur colonne d'ordre p, vecteur propre non nul associé, on a ${}^t\mathrm{X}_1\mathrm{Z'}_1\mathrm{X}_1\mathrm{U} = \lambda\mathrm{U}$ d'où :

$\mathrm{X}_1{}^t\mathrm{X}_1\mathrm{Z'}_1(\mathrm{X}_1\mathrm{U}) = \lambda\mathrm{X}_1\mathrm{U}$,

et, si $\lambda \neq 0$, $\mathrm{X}_1\mathrm{U}$ est non nul, (sinon $\lambda\mathrm{U} = 0$: c'est difficile avec $\lambda \neq 0$ et $\mathrm{U} \neq 0$), donc $\mathrm{U}_1 = \mathrm{X}_1\mathrm{U}$ devient vecteur propre de $(\mathrm{X}_1{}^t\mathrm{X}_1)\mathrm{Z'}_1 = (-\mathrm{I}_n + \mathrm{Z}_1)\mathrm{Z}_1^{-1} = -\mathrm{Z}_1^{-1} + \mathrm{I}_n$, pour la valeur propre λ, d'où $\mathrm{U}_1 - \mathrm{Z}_1^{-1}\mathrm{U}_1 = \lambda\mathrm{U}_1$, soit $\mathrm{Z}_1^{-1}\mathrm{U}_1 = (1-\lambda)\mathrm{U}_1$. Comme Z_1^{-1} est définie positive, comme Z_1, on a $1-\lambda>0$ d'où $\lambda<1$, (ouf !), inégalité vérifiée aussi si $\lambda = 0$ et finalement les valeurs propres de ${}^t X_1 Z'_1 X_1$ sont bien < 1.

11.5. Précisons d'abord les données. Pour f dans l'espace D de Dirichlet, on a convergence simple de la suite des $P_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}$ vers la fonction f ici.

On suppose donc un peu plus, en supposant ici que l'on a $\lim_{\substack{r\to-\infty \\ s\to+\infty}} \sum_{n=r}^{s} c_n(f)e^{inx} = f(x)$, (et non plus seulement un résultat pour les sommes symétriques).

Cette hypothèse sera bien sûr vérifiée pour f continue, C^1 par morceaux par exemple, (convergence uniforme en ce cas).

Soit alors p un entier fixé, et ω une racine $p^{\text{ième}}$ primitive de l'unité, $\omega = e^{\frac{2i\pi}{p}}$ par exemple.

Partant de l'expression $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}$, on a, pour tout k compris entre 1 et $p-1$:

$$f\left(x+k\cdot\frac{2\pi}{p}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}\cdot e^{i\frac{2\pi}{p}kn}, \quad \text{avec} \quad e^{2\frac{i\pi}{p}kn} = \omega^{kn},$$

d'où, (somme finie de séries),

$$\sum_{k=0}^{p-1} f\left(x+k\,\frac{2\pi}{p}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)(1+\omega^n+\omega^{2n}+\ldots+(\omega^n)^{p-1})e^{inx}.$$

Pour $n\equiv 0(p)$, on a $\omega^n = 1$ et $1+\omega^n+\ldots+\omega^{n(p-1)} = p$; puis, pour n du type $rp+s$ avec $0<s<p$, on aura :

$$\omega^n = \omega^s \neq 1, \text{ et } 1+\omega^n+\ldots+(\omega^n)^{p-1} = \frac{(\omega^n)^p-1}{\omega^n-1} = 0.$$

On obtient donc l'égalité :

$$\sum_{n\in p\mathbb{Z}} c_n(f)e^{inx} = \frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1} f\left(x+\frac{2k\pi}{p}\right).$$

À rapprocher de 10.5 ou de 10.17.

11.6. Comme f est 2π périodique, de classe C^2, elle est développable en série de Fourier, avec convergence uniforme de sa série de Fourier.

De plus on sait que $c_n(f) = \left(\frac{1}{in}\right)^2 c_n(f'')$, pour $n \neq 0$, avec $|c_n(f'')| \leqslant \|f''\|_\infty$. Si on note u_n la fonction $x \rightsquigarrow c_n e^{inx}$, on a u_n dérivable et $u'_n(x) = inc_n e^{inx}$

$$= \frac{1}{in} c_n(f'') e^{inx},$$

donc $\|u'_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{|n|} |c_n(f'')|$, et comme la série des $\frac{1}{n^2}$ converge, ainsi que celle des $|c_n(f'')|^2$, (égalité de Bessel pour f''), la série des $\frac{1}{|n|} |c_n(f'')|$ est convergente, d'où la convergence normale de la série des u'_n, et la dérivation terme à terme de la série de Fourier de f.

Plus généralement, avec f de classe C^p, $p \geqslant 2$, et $c_n(f) = \left(\frac{1}{in}\right)^p c_n(f^{(p)})$, pour $n \neq 0$, on a :

$$u_n^{(p-1)}(x) = (in)^{p-1} c_n(f) e^{inx} = \frac{1}{in} c_n(f^{(p)}) e^{inx}, \text{ d'où}$$

$\left\|u_n^{(p-1)}\right\|_\infty \leqslant \frac{1}{|n|} \left|c_n(f^{(p)})\right|$, une série majorante convergente car on a deux séries dans $l^2(\mathbb{C})$, d'où une dérivation terme à terme de la série de Fourier de f, jusqu'à l'ordre $p-1$.

Revenons à l'exercice et à l'expression $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ qui donne $f'(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} inc_n e^{inx}$. La fonction f vérifie alors l'équation $f(2x) = 2\sin x\, f'(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i} f'(x)$ si et seulement si on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2inx} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} kc_k e^{i(k+1)x} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} kc_k e^{i(k-1)x},$$

et la famille des $(e^{irx})_{r \in \mathbb{Z}}$ étant totale dans l'espace vectoriel des applications continues, 2π périodique, pour le produit scalaire hermitien canonique, les coefficients de chaque e^{irx} dans chaque membre sont égaux.

Terme en $e^{i(2p+1)x}$, on a : $0 = 2pc_{2p} - (2p+2)c_{2p+2}$. Cette relation donne c_{2p+2} en fonction de c_{2p}, (ou vice versa), sauf si $2p+2 = 0$ ou si $2p = 0$.

Pour $p = 0$, il reste $-2c_2 = 0$ d'où $c_2 = 0$, puis, $(p = 1)$:

$$4c_4 = 2c_2 \text{ donc } c_4 = 0\text{, et par récurrence } c_{2p} = 0, \forall p \geqslant 1.$$

Pour $p = -1$, on obtient $-2c_{-2} = 0$, puis, $(p = -2)$, on a :

$4c_{-4} = 2c_{-2}$, donc $c_{-4} = 0$, et par récurrence, $c_{2p} = 0$ pour tout $p \leqslant -1$. On garde c_0 comme paramètre.

Passons aux coefficients de e^{2ipx}. On a :

$$c_p = (2p-1)c_{2p-1} - (2p+1)c_{2p+1}.$$

Pour $p = 0$, cela donne $c_0 = -c_{-1} - c_1$.

Pour $p = 1$, on obtient $c_1 = c_1 - 3c_3$ d'où $c_3 = 0$, et on démontre la nullité des $c_{2p+1}, p \geqslant 1$, par récurrence, car les c_p du premier membre sont associés soit à p pair $\geqslant 2$, donc $c_p = 0$, soit à p impair $\geqslant 3$, et si on les suppose nuls jusqu'au rang $2p-1$, avec p impair, $p \leqslant 2p-1$, il reste $0 = (2p-1)c_{2p-1} - (2p+1)c_{2p+1}$ d'où $c_{2p+1} = 0$.

Enfin, si $p = -1$, on a $c_{-1} = -3c_{-3} + c_{-1}$, donc $c_{-3} = 0$, et l'égalité $c_{2p-1} = \dfrac{2p+1}{2p-1} c_{2p+1}$, valable pour $p \leqslant -2$, (comme précédemment, c_p est nul soit parce que p pair $\leqslant -2$, soit p impair avec $2p+1 \leqslant p \leqslant -3$, donc $c_p = 0$) donnera $c_{2p-1} = 0$ si c_{2p+1} l'est.

On obtient donc pour solutions les fonctions f définies par :

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1 e^{ix} - (c_0 + c_1)e^{-ix} \\ &= c_0(1 - e^{-ix}) + c_1(e^{ix} - e^{-ix}) \\ &= c_0(1 - \cos x + i\sin x) + 2ic_1 \sin x \\ &= c_0(1 - \cos x) + i(c_0 + 2c_1)\sin x. \end{aligned}$$

Si on cherche des solutions à valeurs réelles, on prend c_0 réel et c_1 tel que $c_0 + 2c_1$ soit imaginaire pur.

11.7. Posons $u_k(x) = \exp\left(-\dfrac{(k-x)^2}{2t}\right)$, avec $t > 0$ fixé. Pour x dans $[-r, r]$, et pour $|k| > r$, on a :

$|k-x| \geqslant \big|\, |k| - |x| \,\big| = |k| - |x| \geqslant |k| - r > 0$, donc

$-(|k|-r)^2 \geqslant -(k-x)^2$ et la majoration :

$0 \leqslant u_k(x) \leqslant \exp\left(-\dfrac{(|k|-r)^2}{t}\right) = \alpha_{|k|}$.

On a donc, pour la norme infinie sur $[-r, r]$, $\|u_k\|_\infty \leqslant \alpha_{|k|}$ et comme $\lim\limits_{|k| \to +\infty} k^2 \alpha_{|k|} = 0$, il y a convergence normale sur $[-r, r]$ de la série des u_k, d'où existence et continuité de la fonction f sur $[-r, r]$, et ce pour tout $r > 0$, donc sur $\mathbb{R}$ finalement.

En fait f est de classe C^∞. En effet, $u'_k(x) = \dfrac{k-x}{t} u_k(x)$, donc, toujours sur $[-r, r]$, on a, pour $|k| > r$:

$\|u'_k\|_\infty \leqslant \dfrac{|k|+r}{t} \exp\left(-\dfrac{(|k|-r)^2}{t}\right) = \beta_{|k|}$, avec, là encore, $\lim\limits_{|k| \to +\infty} k^2 \beta_{|k|} = 0$, d'où une convergence uniforme de la série des dérivées et une dérivabilité terme à terme de la fonction f qui est de classe C^1.

La présence de l'exponentielle permet de poursuivre le raisonnement : f est C^∞ sur $\mathbb{R}$ en fait.

Comme $u_{k+1}(x+1) = u_k(x)$, et que l'on somme pour k dans $\mathbb{Z}$, on a :

$$f(x+1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(x+1) = \sum_{k' \in \mathbb{Z}} u_{k'+1}(x+1),$$

(avec $k' = k-1$ qui parcourt $\mathbb{Z}$), soit encore :

$f(x+1) = \sum\limits_{k' \in \mathbb{Z}} u_{k'}(x) = f(x)$: la fonction f est 1.périodique, de classe C^1 : elle est égale à sa série de Fourier avec convergence uniforme.

Calcul des coefficients de Fourier.

On a $c_n(f) = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(x)\right) e^{-2i\pi nx} \mathrm{d}x$.

La convergence uniforme de la série des u_k, sur $[0, 1]$, jointe au fait que $\left|e^{-2i\pi nx}\right| = 1$, donne la convergence uniforme sur $[0, 1]$ de la série des fonctions $x \rightsquigarrow u_k(x)e^{-2i\pi nx}$, donc, (laissons tomber le f) :

$$c_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 e^{-\frac{(k-x)^2}{2t} - 2i\pi nx}\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{k-1}^{k} e^{-\frac{u^2}{2t} - 2i\pi n(k-u)}\,\mathrm{d}u,$$

(on pose $k - x = u$, u varie de k à $k-1$, mais $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u$) ; on a $e^{-2i\pi nk} = 1$, exit l'exponentielle, et les intégrales se « recollent » car l'intégrale impropre qui suit converge absolument. On a :

$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2t} + 2i\pi nu}\,\mathrm{d}u.$$

Cette intégrale, je vais la calculer de deux façons.

<u>*Première méthode*</u>. Je ne connais pas de primitive de e^{-u^2}, mais, s'il y avait u en facteur... Pour cela, il faudrait dériver $e^{-\frac{u^2}{2t} + 2i\pi nu}$ par rapport à n...

Allons-y en introduisant la fonction g :

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2t} + 2i\pi yu}\,\mathrm{d}u = \lim_{p \to +\infty} \int_{-p}^{p} e^{-\frac{u^2}{2t} + 2i\pi yu}\,\mathrm{d}u.$$

En notant $g_p(y)$ cette intégrale, on a g_p dérivable et $g'_p(y) = \int_{-p}^{p} 2i\pi u e^{-\frac{u^2}{2t}} e^{2i\pi yu}\,\mathrm{d}u$, et cette suite des g'_p converge uniformément par rapport à y, (car $\left|e^{2i\pi yu}\right| = 1$), vers $\int_{-\infty}^{+\infty} 2i\pi u e^{-\frac{u^2}{2t} + 2i\pi yu}\,\mathrm{d}u$, qui est donc la dérivée de g. Cette intégrale se calcule par parties : posons $ue^{-\frac{u^2}{2t}}\mathrm{d}u = \mathrm{d}s$ et $\tau = e^{2i\pi yu}$, on aura $s = -te^{-\frac{u^2}{2t}}$ et $\mathrm{d}\tau = 2i\pi y e^{2i\pi yu}\mathrm{d}u$,

$$\text{donc } g'(y) = 2i\pi\left(\left[-te^{-\frac{u^2}{2t} + 2i\pi yu}\right]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi yt\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2t} + 2i\pi yu}\,\mathrm{d}u\right)$$

$$= -4\pi^2 ytg(y).$$

Cette équation différentielle linéaire du premier ordre conduit donc à $g(y) = g(0)e^{-2\pi^2 y^2 t}$, avec $g(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2t}} \mathrm{d}u$.

Posons $\frac{u}{\sqrt{2t}} = v$, on a $g(0) = \sqrt{2t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2}\mathrm{d}v = \sqrt{2\pi t}$, et $g(y) = \sqrt{2\pi t}e^{-2\pi^2 y^2 t}$.

(Rappel, si $\mathrm{I} = \int_0^{-\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x, \mathrm{I}^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, soit, en polaires, $\mathrm{I}^2 = \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{+\infty} re^{-r^2}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} -\mathrm{d}(e^{-r^2})$, soit $\mathrm{I}^2 = \frac{\pi}{4}$ et $\mathrm{I} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.)

On obtient donc $c_n(f) = g(n) = \sqrt{2\pi t}e^{-2\pi^2 n^2 t}$. Je termine l'exercice, et après je vous calcule $g(n)$ par résidus. Puisque f est de classe C^1, il y a convergence uniforme de sa série de Fourier vers f, donc, pour tout x on a :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(k-x)^2}{2t}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi t}e^{-2\pi^2 n^2 t}e^{2i\pi nx} :$$

il y a un lien évident avec t et $\frac{1}{t}$. Pour $x = 0$, on a :

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{k^2}{2t}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\frac{k^2}{2\pi t}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sqrt{2\pi t}e^{-\pi n^2/(1/(2\pi t))},$$

soit l'égalité $\theta(2\pi t) = \sqrt{2\pi t}\,\theta\left(\frac{1}{2\pi t}\right)$, et il suffit de poser $\tau = 2\pi t$, pour obtenir une formule classique (pour qui ?) de la fonction thêta : $\theta(\tau) = \sqrt{\tau}\,\theta\left(\frac{1}{\tau}\right)$, (avec $\tau > 0$).

Acceptez-vous de m'accompagner encore un peu, pour *calculer par résidus* $c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2t}}e^{2i\pi nu}\mathrm{d}u$?

C'est encore :

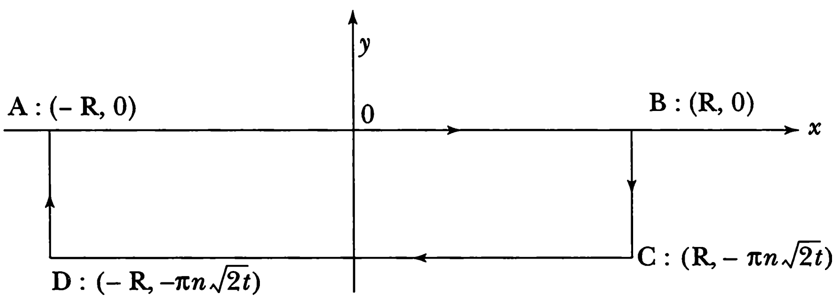
$$c_n = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2t}((u-2i\pi nt)^2+4\pi^2n^2t^2)}\mathrm{d}u$$

$$= e^{-2\pi^2n^2t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{u-2i\pi nt}{\sqrt{2t}}\right)^2}\mathrm{d}u,$$

donc, avec $v = \dfrac{u}{\sqrt{2t}}$, on a :

$$c_n = \sqrt{2t}e^{-2\pi^2n^2t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(v-i\pi n\sqrt{2t})^2}\mathrm{d}v.$$

Soit la fonction $z \rightsquigarrow e^{-z^2}$: elle est holomorphe sur $\mathbb{C}$, donc son intégrale sur le rectangle ABCD suivant est nulle.



On a donc :

$$\int_{-R}^{R} e^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_0^{-\pi n\sqrt{2t}} e^{-(R+iy)^2}i\mathrm{d}y + \int_R^{-R} e^{-(x-i\pi n\sqrt{2t})^2}\mathrm{d}x$$
$$+ \int_{-\pi n\sqrt{2t}}^{0} e^{-(-R+iy)^2}\mathrm{d}y = 0$$

Notons I_1, I_2, I_3, et I_4 ces quatre intégrales.

Pour I_2, on a $\left|e^{-(R^2+2iRy-y^2)}\right| = e^{-R^2}e^{y^2} \leqslant e^{-R^2}e^{2\pi^2n^2t}$, d'où l'on déduit :

$$|I_2| \leqslant \pi n\sqrt{2t}e^{2\pi^2n^2t}e^{-R^2},$$

majorant qui tend vers 0 si R tend vers + ∞.

On a de même $\lim\limits_{R \to +\infty} I_4 = 0$, et finalement, on aura $\lim\limits_{R \to +\infty} I_1 + \lim\limits_{R \to +\infty} I_3 = \sqrt{\pi} + \lim\limits_{R \to +\infty} I_3 = 0$, d'où $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x - i\pi n\sqrt{2t})^2} dx = \sqrt{\pi}$ et $c_n = \sqrt{2\pi t}e^{-2\pi^2 n^2 t}$: on retrouve le résultat précédent.

11.8. Comme la fonction g est continue, de classe C^1 par morceaux, il y a convergence uniforme de sa série de Fourier vers g. Elle est paire, donc $g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx$ avec :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)\cos nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\cos nt\,dt\text{, par parité de } g.$$

Vu la nullité de g sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, il reste :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos t \cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\cos(n+1)t + \cos(n-1)t)dt.$$

Pour $n \neq 1$, on a $a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n+1)t}{n+1} + \frac{\sin(n-1)t}{n-1}\right]_0^{\pi/2}$, donc si $n = 2p+1$, $p \geqslant 1$, $(2p+1+1)\frac{\pi}{2} = (p+1)\pi$ et $(2p+1-1)\frac{\pi}{2} = p\pi$: il reste $a_{2p+1} = 0$.

Pour $n = 1$, on a $a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t)dt = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$.

$$\text{Pour } n = 2p,\ a_{2p} = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(2p+1)\pi/2}{2p+1} + \frac{\sin(2p-1)\pi/2}{2p-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^p}{2p+1} + \frac{(-1)^{p+1}}{2p-1}\right) = \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}.$$

En particulier $a_0 = \frac{2}{\pi}$ et finalement on a :

$$g(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{\cos x}{2} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1} 2\cos 2px}{\pi(4p^2-1)}.$$

Étude de l'équation différentielle $y'' + ay = g$. On suppose que y est solution 2π périodique, y est déjà 2 fois dérivable, et $y'' = -ay + g$ est encore

continue, C^1 par morceaux. En notant $c_n(y)$ les coefficients de Fourier de $y = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(y)e^{inx}$, un calcul classique d'intégration par parties donne
$c_n(y) = \frac{1}{(in)^2} c_n(y'')$ et même $c_n(y) = \frac{1}{(in)^3} c_n(y''') = \frac{1}{(in)^3} c_n(g' - ay')$,
ceci pour $n \neq 0$ bien sûr.

Avec $u_n(x) = c_n(y)e^{inx}$, on a $u''_n(x) = (in)^2 c_n(y)e^{inx}$, donc $\|u''_n\|_\infty = n^2|c_n(y)| = \frac{1}{n} |c_n(y''')| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |c_n(y''')|^2\right)$ d'où, (égalité de Parseval Bessel pour y'''), une convergence uniforme de la série de Fourier des u''_n, et une dérivation terme à terme du développement de Fourier de y, à l'ordre deux.

En travaillant sur la forme réelle, on a :

$$y = c + \sum_{n \geqslant 1} a_n \sin nx + \sum_{n \geqslant 1} b_n \cos nx, \text{ d'où :}$$

$$y'' = \sum_{n \geqslant 1} - n^2 a_n \sin nx + \sum_{n \geqslant 1} - n^2 b_n \cos nx, \text{ donc :}$$

$$y'' + ay = ac + \sum_{n \geqslant 1} (a - n^2)a_n \sin nx + \sum_{n \geqslant 1} (a - n^2)b_n \cos nx,$$

expression à identifier au développement de g.

On a donc $ac = \frac{1}{\pi}$: *si* $a = 0$, *pas de solution* ; poursuivons avec $a \neq 0$, on prendra $c = \frac{1}{a\pi}$.

Puis on doit avoir $(a - n^2)a_n = 0$, pour tout $n \geqslant 1$, ce qui conduit à distinguer le cas de a du type n_0^2 ou non.

Supposons $a \neq n_0^2, \forall n_0 \geqslant 1$: on doit avoir $a_n = 0$, pour tout $n \geqslant 1$, puis $(a-1)b_1 = \frac{1}{2}$, donc $b_1 = \frac{1}{2(a-1)}$, et enfin, pour tout n impair, $n = 2p+1$, $(a - (2p+1)^2)b_{2p+1} = 0$ d'où $b_{2p+1} = 0$; et si $n = 2p$, $(a - 4p^2)b_{2p} = \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}$, donc $b_{2p} = \frac{2(-1)^p}{\pi(4p^2-1)(4p^2-a)}$ et dans ce cas une solution particulière :

$$y(x) = \frac{1}{a\pi} + \frac{1}{2(a-1)} \cos x + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^p}{\pi(4p^2-1)(4p^2-a)} \cos 2px.$$

On suppose maintenant que $a = n_0^2$, avec $n_0 \geqslant 1$.

On devra avoir $(a - n_0^2)b_{n_0} = 0 =$ le coefficient de $\cos n_0 x$ dans g. Donc si n_0 est pair c'est impossible : pas de solution.

Si $a = (2p_0 + 1)^2$, il y a encore deux cas suivant la nullité ou non de p_0. Si $a = 1$, on doit avoir $(1-1)b_1 = \frac{1}{2}$: exclu, pas de solution.

Si $a = (2p_0 + 1)^2 = n_0^2$ avec $p_0 \geqslant 1$, il reste les conditions :

$(a - n^2)a_n = 0$ qui conduisent à a_{n_0} <u>*quelconque*</u> et a_n nul si $n \neq n_0$; et

$$(a-1)b_1 = \frac{1}{2}, \text{ donc } b_1 = \frac{1}{2(a-1)}, \text{ puis :}$$

$$(a - 4p^2)b_{2p} = \frac{2(-1)^{p+1}}{\pi(4p^2-1)}, \text{ donc } b_{2p} = \frac{2(-1)^p}{\pi(4p^2-1)(4p^2-a)}, \text{ et :}$$

$(a - (2p+1)^2)b_{2p+1} = 0$ qui donnent b_{2p_0+1} <u>*quelconque*</u> et $b_{2p+1} = 0$ si $p \neq p_0$.

Finalement, pour $n_0^2 = (2p_0+1)^2 = a$, on garde la même expression de $y(x)$, et on lui ajoute $\lambda \cos n_0 x + \mu \sin n_0 x$, ce qui n'a rien d'étonnant car c'est l'intégrale générale de l'équation différentielle $y'' + n_0^2 y = 0$.

11.9. Il est des exercices exigeant un peu de connaissances, par exemple celui-ci, où il peut être utile de savoir qu'une matrice complexe carrée A est trigonalisable dans le groupe unitaire.

En effet, soit $\mathbb{C}^n$ hermitien canonique rapporté à une base orthonormée $\mathscr{B}$, et α l'endomorphisme de matrice A dans cette base $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

On peut trigonaliser α : il existe une base $\mathscr{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ telle que, pour chaque j, $\alpha(e'_j) \in \text{Vect}\,(e'_1, \ldots, e'_j)$.

On orthonormalise $\mathscr{B}'$ en $\mathscr{C} = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ par le procédé de Schmidt, donc, pour tout j, $\text{Vect}\,(e'_1, \ldots, e'_j) = \text{Vect}\,(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j)$. Mais alors, $\alpha(\varepsilon_j) \in \alpha(\text{Vect}\,(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_j)) = \alpha(\text{Vect}\,(e'_1, ..., e'_j))$, avec chaque $\alpha(e'_r)$, pour $r \leqslant j$, dans $\text{Vect}\,(e'_1, ..., e'_r) \subset \text{Vect}\,(e'_1, ..., e'_j)$, donc finalement $\alpha(\varepsilon_j) \in \text{Vect}\,(e'_1, ..., e'_j) = \text{Vect}\,(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_j)$: dans la base $\mathscr{C}$, la matrice T de α est triangulaire.

Comme $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont orthonormés, il existe U unitaire telle que $U^{-1}AU = U^*AU = T$, d'où $A = UTU^*$ et $A^*A = UT^*U^*UTU^*$ soit $A^*A = UT^*TU^*$: les deux matrices A^*A et T^*T sont semblables et ont même trace.

Notons t_{ij} le terme de la $i^{\text{ième}}$ ligne, $j^{\text{ième}}$ colonne de T, les t_{jj} sont les λ_j, valeurs propres de A, et les t_{jk} sont nuls si $j > k$.

La trace de T^*T est : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{j} \overline{t_{kj}}t_{kj}\right)$ soit encore :

$$\text{trace}\,(A^*A) = \sum_{j=1}^{n}\left(|t_{jj}|^2 + \sum_{k=1}^{j-1} |t_{kj}|^2\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\left(|\lambda_j|^2 + \sum_{k=1}^{j-1} |t_{kj}|^2\right).$$

On a donc $\text{trace}\,(A^*A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2$ si et seulement si chaque t_{kj}, pour $1 \leqslant k \leqslant j-1$, est nul, soit, (T triangulaire), si et seulement si T est diagonale, mais alors T et T* commutent, donc A et A* aussi.

Réciproquement, si A et A* commutent, A est une matrice normale, donc diagonalisable dans une base orthonormée et, avec U unitaire telle que $U^*AU = \text{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, en transposant et en conjuguant on obtient $U^*A^*U = \text{diag}\,(\overline{\lambda_1}, ..., \overline{\lambda_n})$, donc :

$$(U^*A^*U)(U^*AU) = U^*(A^*A)U, \text{ car } UU^* = I_n, \text{ et c'est :}$$
$$= \text{diag}\,(\overline{\lambda_1}\lambda_1, \overline{\lambda_2}\lambda_2, ..., \overline{\lambda_n}\lambda_n), \text{ donc :}$$

$$\text{trace}\,(A^*A) = \text{trace}\,(U^*(A^*A)U) = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|^2.$$

11.10. Quand on définit $e^{A} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!} = \lim_{r \to +\infty} \sum_{p=0}^{r} \frac{A^p}{p!}$, si on remplace A par une matrice semblable $A' = Q^{-1}AQ$, on obtiendra $e^{A'} = Q^{-1}(e^{A})Q$, semblable à e^{A}. On va utiliser cette remarque pour prendre A sous une forme plus simple.

Soit A hermitienne, il existe U unitaire telle que $U^{-1}AU = D$ soit diagonale réelle. Un calcul rapide montre que si $D = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on a $e^{D} = \mathrm{diag}\,(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}) = \Delta$, matrice hermitienne définie positive, et $e^{A} = e^{UDU^{-1}} = U(e^{D})U^{-1} = U(e^{D})\,{}^t\overline{U}$ est elle aussi hermitienne, définie positive.

Il y a plus. Si on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de A, de multiplicités respectives $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, avec E_j sous-espace propre pour A et la valeur propre λ_j, A induit sur E_j l'homothétie h_j de rapport λ_j, donc e^{A} induit sur E_j l'homothétie de rapport e^{λ_j}. Comme les λ_j sont réels distincts, les e^{λ_j} sont réels positifs distincts, et de ce fait, comme $E = \bigoplus_{j=1}^{k} E_j$, les E_j sont exactement les sous-espaces propres de e^{A}, pour les valeurs propres λ_j.

Mais alors, partant de Δ hermitienne définie positive, de valeurs propres $\mu_1, \ldots, \mu_k$ distinctes, de sous-espaces propres, (dans $E = \mathbb{C}^n$) les E_j, en prenant h_j homothétie de rapport $\lambda_j = \ln \mu_j$ sur E_j, et H l'endomorphisme défini par $H\left(\sum_{j=1}^{k} x_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j$ si $x = \sum_{j=1}^{k} x_j$ est décomposé dans $\bigoplus_{j=1}^{k} E_j$, on aura $e^{H} = \Delta$, avec H opérateur hermitien en fait puisque les E_j sont en somme directe orthogonale. On a trouvé H tel que $e^{H} = \Delta$, et c'est la seule solution, toute matrice A telle que $e^{A} = \Delta$, avec A hermitienne, ayant les mêmes sous-espaces propres que Δ, et les rapports d'homothétie étant définis de manière unique.

<u>*Remarque*</u> : $A \rightsquigarrow e^{A}$ n'est pas morphisme de groupe, car si A et B ne commutent pas, on n'a pas $e^{A+B} = e^{A} \circ e^{B}$.

11.11. L'application linéaire $h : x \rightsquigarrow x - u^* \circ u(x)$, a pour matrice dans une base orthonormée de E, $H = I_n - {}^t\overline{A}A$, si A est celle de u, donc H est hermitienne, $({}^t\overline{H} = H)$, mais de plus ${}^t\overline{A} = A$, (u est un endomorphisme hermitien), donc $H = I_n - A^2$ est un polynôme en A, et les valeurs propres de H sont les $1 - \lambda_j^2$, avec λ_j valeurs propres réelles de A.

Si e_j est vecteur propre de u, (donc de A), pour la valeur propre λ_j, on a $\|u(e_j)\| = |\lambda_j|\,\|e_j\| \leqslant |||u|||\,\|e_j\| \leqslant \|e_j\|$, donc, (prendre e_j non nul), on a $|\lambda_j| \leqslant 1$ d'où $1 - \lambda_j^2 \geqslant 0$, et e_j est également vecteur propre pour h, pour la valeur propre $\mu_j = 1 - \lambda_j^2 \geqslant 0$: h est bien hermitien positif.

Soit $\mathscr{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ une base orthonormée de vecteurs propres pour u, (donc pour h), pour les valeurs propres λ_j.

Si x_0 est tel que $h(x_0) = 0$, en décomposant x_0 en $x_0 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$, on a : $h(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \alpha_j e_j$, donc $h(x_0) = 0$ équivaut à la nullité des α_j associés aux $\mu_j \neq 0$.

Comme $\langle h(x_0)|x_0\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\mu_j}|\alpha_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} \mu_j|\alpha_j|^2$ avec des $\mu_j \geqslant 0$, la nullité de $\langle h(x_0)|x_0\rangle$ est elle aussi équivalente à la nullité des α_j associés aux $\mu_j \neq 0$, d'où l'équivalence cherchée.

11.12. Les matrices AA* et BB*, (égales), sont hermitiennes positives, donc il existe V unitaire telle que $V^*(AA^*)V = V^*(BB^*)V$ soit une matrice D, diagonale, avec des coefficients diagonaux positifs, donc D peut s'écrire Δ^2 avec $\Delta = \text{diag}\,(a_1, a_2, ..., a_n)$, là encore les a_i étant positifs ou nuls, indexés de façon que les r premiers soient strictement positifs, et les suivants nuls.

On a $V^*A(A^*V) = (A^*V)^*(A^*V) = \Delta^2$.

Posons $C = A^*V$, matrice ayant pour colonnes $C_1, C_2, ..., C_n$. La matrice $V^*A = (A^*V)^* = C^*$ a pour lignes ${}^t\overline{C_1}, {}^t\overline{C_2}, ..., {}^t\overline{C_n}$, et le terme de la $k^{\text{ième}}$ ligne, $j^{\text{ième}}$ colonne de $C^*C = \Delta^2$ est ${}^t\overline{C_k}C_j = \langle C_k, C_j\rangle$, produit scalaire hermitien canonique sur $\mathbb{C}^n$.

En particulier, si $j > r$, on a $a_j^2 = 0 = {}^t\overline{C_j}C_j = \|C_j\|^2$, donc la $j^{\text{ième}}$ colonne de C est nulle.

Soit alors les vecteurs $W_j = \dfrac{1}{a_j} C_j$, pour $j = 1, \dots, r$: on a $\langle W_k, W_j\rangle = 0$ si $j \neq k$, et $\langle W_j, W_j\rangle = \dfrac{1}{a_j^2} \langle C_j, C_j\rangle = 1$. On complète cette famille orthonormée $\{W_1, W_2, \dots, W_r\}$ en une base orthonormée de $\mathbb{C}^n$, $\mathscr{W} = \{W_1, \dots, W_r, W_{r+1}, \dots, W_n\}$. La matrice W ayant les W_j pour colonnes est alors unitaire et

$$W\Delta = \left(W_1 \middle| W_2 \middle| \dots \middle| W_n\right) \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \left(a_1 W_1 \middle| \dots \middle| a_r W_r \middle| 0 \middle| \dots 0\right) = C.$$

On a donc trouvé V et W unitaires telles que $W\Delta = A^*V$. Mais on trouverait de même W' unitaire telle que $W'\Delta = B^*V$, donc :

$V^*B = \Delta W'^*$ et $V^*A = \Delta W^*$ d'où $\Delta = V^*AW$ ce qui donne :

$V^*B = V^*AWW'^*$, et comme V^*, unitaire, est régulière, il reste $B = A(WW'^*)$, avec WW'^* unitaire comme produit de deux éléments du groupe unitaire. On a trouvé $U = WW'^*$ unitaire telle que $B = AU$.

11.13. On va utiliser une décomposition de la matrice B du type $B = UH$, avec U unitaire et H hermitienne positive. Justifions cette décomposition. Si on suppose son existence, on aura :

$B^*B = H^*(U^*U)H = H^*H = H^2$, puisque U est unitaire et H hermitienne.

Or B*B est hermitienne positive, donc il existe V unitaire telle que $B^*B = V^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)\,V$, avec les $\lambda_j \geqslant 0$, d'où, en posant $\mu_j = \sqrt{\lambda_j}$ et $D = \operatorname{diag}(\mu_1, ..., \mu_n)$, l'égalité :

$$B^*B = V^{-1}D^2V = (V^{-1}DV)^2, \quad \text{avec} \quad H = V^{-1}DV = V^*DV$$

matrice hermitienne.

Pour cette matrice H, on voudrait pouvoir écrire $B = UH$ avec U unitaire, c'est-à-dire « factoriser » H dans B, et cela est possible si $\operatorname{Ker} H \subset \ker B$, puis factoriser avec une matrice unitaire.

On a déjà $\operatorname{Ker} B \subset \operatorname{Ker}(B^*B)$. Puis si $z \in \operatorname{Ker} B^*B$, on a $\|B(z)\|^2 = \langle B(z), B(z)\rangle = \langle z, B^*B(z)\rangle = 0$, donc $B(z) = 0$, d'où $\operatorname{Ker}(B^*B) = \operatorname{Ker} B$. Supposons ce noyau de dimension $n - r$, c'est que $\operatorname{rang}(B) = \operatorname{rang}(B^*B) = r$.

Mais, revenant en arrière, ce rang r est le nombre de $\lambda_j > 0$, donc de $\mu_j = \sqrt{\lambda_j} > 0$: c'est aussi le rang de H, matrice semblable à D, que l'on peut supposer égale à $\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_r}, 0, 0, ..., 0)$, avec les r premiers coefficients diagonaux non nuls.

Comme alors $B^*B = V^{-1}\operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_r\,;\, 0, 0, ..., 0)\,V$, et que

$$H = V^{-1}\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_r}\,;\, 0, ..., 0)\,V,$$

il est clair que $\operatorname{Ker} H = \operatorname{Ker} B^*B = \operatorname{Ker} B$.

De plus $\operatorname{Im}(H) = (\operatorname{Ker} H)^{\perp}$, (V unitaire, et cette orthogonalité est évidente sous forme diagonale).

Soit alors $\mathbb{C}^n$ hermitien canonique, la base canonique $\mathscr{B}$ étant orthonormée, on note b et h les endomorphismes de matrices B et H dans cette base, on a h hermitien et $\operatorname{Ker} h$ et $\operatorname{Im} h$ sont en somme directe orthogonale. On prend comme base orthonormée de $\operatorname{Im} h$ une base $\{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_r\}$ telle que $h(\varepsilon_j) = \sqrt{\lambda_j}\varepsilon_j$, (et $b^*b(\varepsilon_j) = \lambda_j\varepsilon_j$), et soit une base orthonormée, $\{\varepsilon_{r+1}, ..., \varepsilon_n\}$ de $\operatorname{Ker} h$, d'où $\mathscr{C} = \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n\}$ base orthonormée de $E = \mathbb{C}^n$, et on cherche u, opérateur unitaire tel que $b = u \circ h$.

Comme h induit un isomorphisme de $\operatorname{Im} h$, (supplémentaire de $\operatorname{Ker} h$) sur $\operatorname{Im} h$, en notant $\tilde{h}$ cet isomorphisme, et en notant b' la restriction de b à $\operatorname{Im} h$, on comprend que l'égalité voulue implique $b' = u' \circ \tilde{h}$, (avec u' restriction de u à $\operatorname{Im} h$), ce qui impose $u' = b' \circ \tilde{h}^{-1}$ sur $\operatorname{Im} h$.

Vérifions qu'on a bien un opérateur « unitaire », (les guillemets car u' va de $\operatorname{Im} h$ dans E). Pour la base des ε_j de $\operatorname{Im} h$, on a : $\langle u'(\varepsilon_j), u'(\varepsilon_k)\rangle = \langle b'(\tilde{h}^{-1}(\varepsilon_j)), b'(\tilde{h}^{-1}(\varepsilon_k))\rangle$, soit :

$$\langle u'(\varepsilon_j), u'(\varepsilon_k)\rangle = \langle b'\left(\frac{\varepsilon_j}{\mu_j}\right), b'\left(\frac{\varepsilon_k}{\mu_k}\right)\rangle = \frac{1}{\mu_j\mu_k}\langle b(\varepsilon_j), b(\varepsilon_k)\rangle,$$

car μ_j et μ_k sont réels, et b' est une restriction de b.

C'est encore :

$$\begin{aligned}\langle u'(\varepsilon_j), u'(\varepsilon_k)\rangle &= \frac{1}{\mu_j\mu_k}\langle \varepsilon_j, b^*b(\varepsilon_k)\rangle \\ &= \frac{1}{\mu_j\mu_k}\langle \varepsilon_j, \lambda_k\varepsilon_k\rangle = \frac{\lambda_k}{\mu_j\mu_k}\langle \varepsilon_j, \varepsilon_k\rangle.\end{aligned}$$

Comme les ε_j, pour $1 \leqslant j \leqslant r$, forment une base orthonormée de $\operatorname{Im} h$, si $j \neq k$ on a 0, et si $j = k$, il reste $\dfrac{\lambda_k}{(\mu_k)^2} = 1$ puisque $\mu_k = \sqrt{\lambda_k}$.

Donc les $u'(\varepsilon_j)$, pour $1 \leqslant j \leqslant r$, forment une famille orthonormée qui engendre un sous-espace F de $E = \mathbb{C}^n$.

En définissant u par $u(\varepsilon_j) = u'(\varepsilon_j)$ si $1 \leqslant j \leqslant r$, et en envoyant la base orthonormée de $\operatorname{Ker} h$, par u, sur une base orthonormée d'un supplémentaire de F, on définit bien u opérateur unitaire tel que $b = u \circ h$, puisque b et $u \circ h$ coïncident sur les bases de $\operatorname{Im} h$ et $\operatorname{Ker} h$, sous-espaces en somme directe.

On comprend alors qu'il n'y a pas unicité si b, (donc h), n'est pas de rang n.

Retour à l'exercice.

On écrit la matrice B sous la forme UH avec U unitaire et H hermitienne positive. Il existe alors V unitaire telle que $H = V^*DV$, avec D matrice diagonale des $\mu_j \geqslant 0$, donc B s'écrit $B = (UV^*)DV = WDV$ avec $W = UV^*$ et V matrices unitaires. Chercher alors A telle que :

$A(A^*A)^k = B = WDV$, équivaut à trouver A telle que :

$W^{-1}A(A^*A)^kV^{-1} = D = W^*A(A^*A)^kV^*$.

Si on introduit $A' = W^{-1}AV^{-1} = W^*AV^*$, on a

$A'(A'^*A')^k = W^*AV^*(VA^*WW^*AV^*)^k$, et, compte tenu de $WW^* = I_n = V^*V$, tous calculs faits, il restera $A'(A'^*A')^k = W^*(A(A^*A)^k)V^*$, donc si A' est tel que $A'(A'^*A')^k = D$, on aura A tel que $A(A^*A) = B$.

Or, on peut trouver de telles matrices A', il suffit de poser $A' = \operatorname{diag}\left((\mu_1)^{\frac{1}{2k+1}}, (\mu_2)^{\frac{1}{2k+1}}, \dots, (\mu_n)^{\frac{1}{2k+1}}\right)$ pour avoir une solution.

11.14. Pour a dans $\mathbb{Z}^*$, le développement est tout trouvé : c'est e^{iax}, et la série n'existe pas.

On suppose donc a non dans $\mathbb{Z}^*$. La fonction est C^1 par morceaux, régulière car $\dfrac{f(\pi+0)+f(\pi-0)}{2} = \dfrac{e^{-ia\pi}+e^{ia\pi}}{2}$ c'est $\cos a\pi = f(\pi)$.

Donc, par le Théorème de Dirichlet, en notant $c_n(f)$ les coefficients de Fourier, on a :

$$f(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)e^{inx}, \text{ (il faut des sommes symétriques).}$$

On a $c_n(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(a-n)x}dx = \dfrac{1}{2i(a-n)\pi}\,[e^{i(a-n)x}]_{-\pi}^{\pi}$

$$= \frac{\sin(a-n)\pi}{(a-n)\pi} = \frac{(-1)^n \sin a\pi}{(a-n)\pi},$$

d'où $f(x) = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{\sin a\pi}{\pi} \sum_{n=-N}^{N} \frac{(-1)^n}{a-n} e^{inx}$.

Pour $x = \pi$, $f(\pi) = \cos a\pi$ étant réel, on a :

$$\cos a\pi = \lim_{N\to+\infty} \frac{\sin a\pi}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{a} + \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \cos n\pi \left(\frac{1}{a-n}+\frac{1}{a+n}\right)\right),$$

expression obtenue en prenant la partie réelle et en groupant les termes en n et $-n$. C'est encore :

$$\cos a\pi = \lim_{N\to+\infty}\left(\frac{\sin a\pi}{a\pi} + \frac{\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{2a}{a^2-n^2}\right)$$

puisque $e^{in\pi} = \cos n\pi = (-1)^n$, donc

$$\cos a\pi - \frac{\sin a\pi}{a\pi} = 2a\,\frac{\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a^2-n^2}\ \text{et}$$

$\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2-a^2} = \frac{1}{2a^2}-\frac{\pi}{2a}\operatorname{cotan} a\pi$, expression valable pour $a \notin \mathbb{Z}$.

11.15. On considère la fonction f, 2π périodique, impaire, valant :

$$f(t) = \frac{1}{1+\cos^2 t}\ \text{sur }]0, \pi[,$$

et avec par exemple $f(0) = f(\pi) = 0$.

Cette fonction est alors de classe C^1 par morceaux, donc sa série de Fourier converge simplement vers la régularisée de f, qui est f ici puisque

$$f(0) = 0 = \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2},\ \text{et}\quad f(\pi^+) = f(-\pi^+) = -f(\pi^-),$$

(impaire), donc $f(\pi^+)+f(\pi^-) = 0$ et on a posé $f(\pi) = 0$.

Comme f est impaire, les $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$, sont nuls, et on a :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin nt}{1+\cos^2 t}\,dt.$$

Pour n pair, $\sin n(\pi-t) = \sin(-nt) = -\sin nt$,

et comme $\cos^2(\pi-t) = \cos^2 t$,

la fonction est « impaire » par rapport à $\frac{\pi}{2}$, on a b_n nul.

Il reste donc les $b_{2n+1} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)t}{1+\cos^2 t}\,dt = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{I}_n$.

D'après le théorème de Dirichlet, on a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{\pi}\,\mathrm{I}_n\,\sin(2n+1)t,$$

et en particulier, si $t = \frac{\pi}{2}$, $\sin(2n+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^n$, d'où la convergence de la série des $(-1)^n I_n$, et la valeur :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n = \frac{\pi}{2} f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

11.16. Si on calcule les sommes partielles, on doit évaluer :

$$U_N(t) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \cos nt^2 = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n e^{int^2},$$

$$= \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{N} (-e^{it^2})^n\right).$$

On suppose $-e^{it^2} \neq 1$, soit $e^{it^2} \neq e^{i\pi}$, ce qui est le cas pour $t \in [0, 1]$, donc :

$$U_N(t) = \operatorname{Re} \frac{1-(-1)^{N+1} e^{i(N+1)t^2}}{1+e^{it^2}}.$$

Poursuivons le calcul pour N pair, $N = 2p$. Alors on a :

$$U_{2p}(t) = \operatorname{Re} \frac{1+e^{i(2p+1)t^2}}{1+e^{it^2}} = \operatorname{Re} \frac{e^{i\left(p+\frac{1}{2}\right)t^2}}{e^{i\frac{t^2}{2}}} \cdot \frac{\cos\left(p+\frac{1}{2}\right)t^2}{\cos\frac{t^2}{2}}$$

$$= \frac{\cos pt^2 \cos\left(p+\frac{1}{2}\right)t^2}{\cos\frac{t^2}{2}},$$

d'où la somme partielle d'indice $2p$ de la série à étudier :

$$S_{2p} = \int_0^1 \frac{1}{2\cos\frac{t^2}{2}}\left(\cos\left(2p+\frac{1}{2}\right)t^2 + \cos\frac{t^2}{2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\cos\left(2p+\frac{1}{2}\right)t^2}{\cos\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

En utilisant le développement :

$$\cos\left(2p+\frac{1}{2}\right)t^2 = \cos 2pt^2 \cos\frac{t^2}{2} - \sin 2pt^2 \sin\frac{t^2}{2}, \text{ on obtient :}$$

$$S_{2p} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \cos 2pt^2 \mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\sin 2pt^2 \sin\frac{t^2}{2}}{\cos\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t.$$

En posant $u = 2pt^2$, on a $t = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2p}}$, et :

$$\int_0^1 \cos 2pt^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2p}}\int_0^{2p} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u.$$

Comme $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u$ existe, (pas de problème en 0, la fonction intégrée est équivalente à $\frac{1}{2\sqrt{u}}$, et en $+\infty$ on fait une intégration par parties), la présence du $\frac{1}{\sqrt{2p}}$ en facteur donne $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_0^1 \cos 2pt^2 \mathrm{d}t = 0$.

Pour l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin 2pt^2 \sin\frac{t^2}{2}}{\cos\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$, en posant $t^2 = u$, elle vaut :

$$\int_0^1 \sin 2pu \frac{\sin\frac{u}{2}}{2\sqrt{u}\cos\frac{u}{2}}\mathrm{d}u,$$

et, avec $\varphi(u) = \frac{\sin\frac{u}{2}}{2\sqrt{u}\cos\frac{u}{2}}$, $(\varphi(0) = 0$ par continuité), intégrable sur $[0, 1]$, par le Lemme de Lebesgue, on a :

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^1 \sin(2pu)\varphi(u)\mathrm{d}u = 0.$$

Finalement, $\lim\limits_{p\to+\infty} S_{2p} - \frac{1}{2} = 0$.

Comme $S_{2p+1} = S_{2p} + (-1)^{2p+1} \int_0^1 \cos(2p+1)t^2 \mathrm{d}t$, et que, (voir le calcul pour $\int_0^1 \cos 2pt^2 \mathrm{d}t$), on a :

$$\lim_{p \to +\infty} \int_0^1 \cos(2p+1)t^2 \mathrm{d}t = 0,$$

finalement la série donnée converge et a pour somme $\frac{1}{2}$.

Imprimé en France
Imprimerie des Presses Universitaires de France
73, avenue Ronsard, 41100 Vendôme
Septembre 1997 — N° 44 449

Ces exercices de topologie et d'analyse ont été choisis avec le souci de montrer comment faire usage de parties partout denses dans un espace, pour ramener la vérification d'une propriété ponctuelle sur l'espace à une telle partie, en présence de stabilité par continuité.

Ce type de méthode présente certaines analogies avec l'utilisation de parties génératrices pour caractériser les morphismes en algèbre.

Dans le même esprit la notion de connexité a été développée pour mettre en évidence ses applications.

Enfin, dans le cadre des espaces fonctionnels, si certains exercices sont rédigés en tenant compte des théorèmes de convergence monotone ou dominée, donc conformément aux nouveaux programmes, d'autres ont été rédigés en faisant usage des notions classiques de semi-convergence.

218 FF 22412580/9/97