Les topos

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Jean-Pierre Escofier

DUNOD

ISBN 978-2-10-050745-0

Sommaire

Avant-propos 5

Chapitre 1 : Débuts

I. La préhistoire *8.* **II.** Systèmes de numération *8*. **III.** Le système sumérien de numération *9.* **IV.** Approximation de $\sqrt{2}$ *11.* **V.** Équations du second degré *12.* **VI.** Plimpton 322 *13.*

Chapitre 2 : La Grèce

I. Thalès vers – 600 *15*. **II.** Pythagore, irrationnalité de $\sqrt{2}$ *15.* **III.** Platon, Aristote, Eudoxe *16*. **IV.** Alexandre, Alexandrie *18*. **V.** Les *Éléments* d'Euclide *18*. **VI.** Ératosthène (– 276 à – 194) *23.* **VII.** Archimède (– 287 à – 212) *24*. **VIII.** Aperçus sur d'autres mathématiciens grecs *27*.

Chapitre 3 : Le monde arabe de 600 à 1500

I. Le développement de la civilisation arabe *30*. **II.** Al Khwarizmi (vers 790-840/850) *30*. **III.** Omar Khayyam (1048-1131) *33*. **IV.** Aperçus sur d'autres mathématiciens arabes *34*.

Chapitre 4 : Autour de la Renaissance

I. Léonard de Pise (vers 1170 – après 1240) *36*. **II.** Représentation en perspective *37*. **III.** Nicolas Chuquet (1445 ? - 1488) *39*. **IV.** Jacques Peletier du Mans (1517-1582) *39*. **V.** L'équation du troisième degré et l'introduction des nombres complexes *40*. **VI.** François Viète (1540-1603) *42*.

Chapitre 5 : Le XVII^{e} siècle

I. L'invention des logarithmes et le calcul de tables *44*. **II.** Galilée (1564-1642) *45*. **III.** Autour de Mersenne (1588-1648) *46*. **IV.** Girard Desargues (1591-1661) *47*. **V.** Pierre de Fermat (1601 ou 1607-1665) *49*. **VI.** René Descartes (1596-1650) *51*. **VII.** Blaise Pascal (1623-1662) *53*. **VIII.** La mesure de la Terre de Jean Picard (1620-1682) *56*. **IX.** Isaac Newton (1643-1727) *56*. **X.** Gottfried von Leibniz (1646-1716) *58*.

Chapitre 6 : Le XVIII^{e} siècle

I. Leonhard Euler (1707-1783) *60*. **II.** Alexis Clairaut (1713-1765) *62*. **III.** Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) *62*. **IV.** Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) *63*.

Chapitre 7 : En France, autour de la Révolution

I. Le marquis de Condorcet (1743-1794) *65*. **II.** Gaspard Monge (1746-1818) *65*. **III.** Pierre-Simon Laplace (1749-1827) *66*. **IV.** Adrien-Marie Legendre (1752-1833) *66*. **V.** La période révolutionnaire *66*. **VI.** Condorcet *67*. **VII.** Lagrange *68*. **VIII.** Monge *69*. **IX.** Laplace *70*. **X.** Legendre *70*. **XI.** Fourier (1768-1830) *71*.

Chapitre 8 : Cartes postales du XIXe siècle

I. Karl Friedrich Gauss (1777-1855) *73*. **II.** Sophie Germain (1776-1831) *75*. **III.** Augustin Cauchy (1789-1857) *76*. **IV.** Niels Abel (1802-1829) *77*. **V.** Évariste Galois (1811-1832) *79*. **VI.** Peter Lejeune-Dirichlet (1805-1859) *81*. **VII.** Carl Jacobi (1804-1851) *82*. **VIII.** La géométrie pure *83*. **IX.** Nikolai Ivanovitch Lobatchevski (1792-1856) *84*. **X.** Bernhard Riemann (1826-1866) *86*. **XI.** Camille Jordan (1838-1922) *88*. **XII.** Karl Weierstrass (1815-1897) *88*. **XIII.** Sophie Kovalevski (1850-1891) *89*. **XIV.** Georg Cantor (1845-1918) *91*.

Chapitre 9 : Autour de 1900 : Poincaré et Hilbert

I. Henri Poincaré (1854-1912) *92*. **II.** David Hilbert (1862-1943) *94*. **III.** Les 23 problèmes de Hilbert *97*.

Chapitre 10 : Vues sur les mathématiques du XXe siècle

I. Jacques Hadamard (1865-1963) *99*. **II.** Henri Lebesgue (1875-1941) *100*. **III.** Srinivasa Ramanujan (1887-1920) *101*. **IV.** Bush et la guerre *102*. **V.** John Von Neumann (1903-1957) *102*. **VI.** Nicolas Bourbaki (né en 1934) *105*. **VII.** Le langage des catégories et des foncteurs *107*. **VIII** L'école russe autour d'Andrei Kolmogorov (1903-1987) *107*. **IX.** André Weil (1906-1998) *109*. **X.** Henri Cartan (né en 1904) *110*. **XI.** Jean Leray (1906-1998) *110*. **XII.** Laurent Schwartz (1915-2002) *111*. **XIII.** Alexandre Grothendieck (né en 1928) *112*. **XIV.** Jean-Pierre Serre (né en 1926) *114*. **XV.** Jacques-Louis Lions (1928-2001) *114*. **XVI.** Cryptographie *116*. **XVII.** Météorologie *117*. **XVIII.** D'autres domaines de recherche *118*. **XIX.** Médailles Fields *119*. **XX.** Alain Connes (né en 1947) *120*. **XXI.** Jean-Christophe Yoccoz (né en 1957) *121*. **XXII.** Prix prestigieux *121*. **XXIII.** Les problèmes de la fondation Clay *122*. **XXIV.** Le jeu des très grands *122*. **XXV.** Petite conclusion *123*.

Bibliographie 124

Avant-propos

Voici une petite histoire des mathématiques écrite, du moins je l'espère, pour le plaisir de ceux et celles qui vont la lire, qu'ils ou elles les enseignent, les étudient ou désirent simplement en connaître un peu plus à leur sujet. Les mathématiques forment un peu un monde à part ; donner une idée de leurs résultats avec des mots simples et des images plus ou moins suggestives est plus difficile que pour d'autres sciences ; un détour par leur histoire vaut parfois le voyage.

Les mathématiques se sont construites comme science bien avant toutes les autres, des millénaires contre quelques centaines d'années. Depuis toujours, elles s'occupent d'applications concrètes, depuis toujours elles étudient et généralisent les questions qui leur sont posées par la *nature*, depuis toujours, elles approfondissent les questions internes qu'elles se découvrent ; depuis toujours, les réflexions les plus profondes et les moins susceptibles apparemment d'applications se révèlent porteuses de développements scientifiques féconds et permettent de mieux connaître notre monde. Depuis toujours, les mathématicien(ne)s éprouvent un plaisir immense à leurs recherches, à jouir fortement de leurs découvertes et c'est le plus souvent pour l'éprouver qu'ils y consacrent tant de temps. Ce plaisir est souvent difficile à imaginer, mais il n'est pas vraiment différent du plaisir de tous ceux et de toutes celles qui ont la chance de faire ce qui les intéresse et de pouvoir découvrir, construire ou inventer des choses nouvelles.

Les mathématiques sont aujourd'hui étudiées aussi bien par les femmes que par les hommes, mais il ne faut pas oublier que ce droit n'a été conquis par elles que très récemment (Voir **[INT-Fe]**) et date tout au plus des années 1950-60.

Le nombre de pages des volumes de cette collection est imposé. Il fallait se limiter, sans chercher d'équilibre impossible, et j'ai dû renoncer à évoquer des pans entiers de mon sujet, conservant plus ce qui s'est passé en France, pays où les mathématiques sont brillantes.

J'ai cherché à rester au niveau des connaissances mathématiques de collèges et de lycées pour que ce livre soit accessible au plus grand nombre, aux professeurs de mathématiques de collège ou de lycée, aux étudiant(e)s, aux lecteurs ou lectrices curieux(ses) des mathématiques, donnant plus d'informations pour les années avant 1650 où les techniques sont relativement simples et des coups de projecteurs sur l'immense activité des siècles suivants en tentant de donner une légère idée de quelques résultats sans chercher le résumé idéal impossible.

Pour ma part, mon intérêt très ancien pour l'histoire des mathématiques s'est appuyé principalement sur les travaux extrêmement nombreux et variés entrepris depuis la fin des années 1970 dans les IREM (Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques, imités partout dans le monde mais aux moyens limités dans notre pays !). J'aimerais citer et remercier particulièrement :
– la commission Inter-IREM d'Histoire et d'épistémologie des mathématiques, animée et présidée par Evelyne Barbin, qui regroupe plus d'une centaine de membres passionnés de la France entière et dont les publications régulières depuis plus de vingt ans forment un bel ensemble ;
– mes collègues Gérard Hamon, Loïc Le Corre et Pascal Quinton avec qui je travaille en harmonie à Rennes depuis de longues années et qui m'ont toujours beaucoup aidé.

Je me souviens aussi du travail pionnier de Jean-Louis Ovaërt et Jean-Luc Verley qui ont dirigé les articles mathématiques de l'*Encyclopædia Universalis* et laissé inachevé un grand projet de livres mêlant histoire et mathématiques dont deux seulement furent publiés (voir **[EPI]**).

J'ai une pensée pour tous les étudiants et enseignants de l'Académie de Rennes qui m'ont exprimé leur intérêt pour ce que je leur raconte (ce que personne d'autre ne fait, disent-ils souvent), pour l'éclairage que cela leur donne sur les mathématiques, etc. C'est à eux que je dédie ce petit livre.

Mes remerciements vont également à Stéphane Leborgne et Simonne Peter qui ont bien voulu me relire et aux éditions Dunod avec lesquelles le travail est vraiment agréable.

INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES

Des histoires des mathématiques beaucoup plus volumineuses sont nombreuses en anglais. En français, les textes les plus accessibles pour le profane ou les enseignants du secondaire sont publiés par ceux qui travaillent dans les IREM. On peut également citer les textes des revues *La Recherche*, *Pour la Science* et la *Revue d'histoire des mathématiques* publiée par la Société mathématique de France, différents textes de Jean Dhombres (voir **[DHO]**), de Christian Houzel, de Roshdi Rashed (voir **[RAS]**), de Marcel Berger (voir **[BER]**), de Dominique Tournès (sur les méthodes numériques et appareils avant l'informatique) ; je me permettrai de citer à plusieurs reprises les livres que j'ai écrits pour les éditions Dunod, voir **[ESC-Al]**, **[ESC-Ga]**, pour avoir cherché à y expliquer des mathématiques pour les étudiants en liaison avec leur histoire un peu plus qu'on ne le fait d'habitude.

Une mention spéciale doit être réservée à l'histoire monumentale (près de 3000 pages) de Jean-Etienne Montucla (1725-1799) (voir **[MON]**) ; la lecture de ce travail pionnier et très documenté, au style entraînant, est passionnante.

Le site de l'université de St Andrew en Ecosse (voir **[INT-St]**) est fabuleux ; on peut y trouver des biographies de plus de 3000 mathématiciens de tous les temps. Le site Theuth (voir **[INT-Th]**) rassemble toutes les informations sur la recherche en histoire des sciences, particulièrement en histoire des mathématiques, qui se fait, surtout en France.

Il faut toujours remonter aux textes originaux. Les librairies Blanchard et Jacques Gabay ont un beau catalogue de rééditions de textes anciens. Je signale également un grand ensemble de textes fondamentaux, d'Euclide aux années 1950, réunis par Stephen Hawking (voir **[HAW]**). Depuis le développement d'Internet, la difficulté de consulter un livre rare est bien moindre. La possibilité nous est maintenant très fréquemment offerte de le lire sur le site de la BNF (voir **[INT-Ga]**) ou de quelques autres grandes institutions à la minute même où nous le souhaitons.

Chapitre 1

Débuts

I. LA PRÉHISTOIRE

Que nous reste-t-il des temps préhistoriques ? Quelques squelettes, des pierres taillées en grand nombre, quelques grottes aux peintures admirables, des os entaillés, etc. Comment parler de *mathématiques* à ce propos ? C'est cependant ce qu'a tenté de faire Olivier Keller [1]. Par exemple, dans l'évolution du travail de la pierre, depuis le simple éclat obtenu en frappant le galet en son milieu d'il y a 2,5 millions d'années jusqu'aux outils de grande finesse de la fin du néolithique ou aux sculptures sur pierre ou sur os qui apparaissent il y a plus de 30 000 ans, on peut voir une sorte d'appréhension de plus en plus poussée des volumes.

II. SYSTÈMES DE NUMÉRATION

Les systèmes de numération de tribus amazoniennes indiquent des stades différents de maîtrise des nombres. Les Mundurukus, membres d'une tribu amazonienne du Brésil étudiée récemment par Pierre Pica et d'autres, comptent jusqu'à 4 ou 5 et sont incapables de soustraire 4 de 6. Cependant, les enfants mundurukus et américains ont les mêmes résultats dans des tests de comparaison de nombres de points (plusieurs dizaines) dans des images ou dans des tests de géométrie. À partir de ces compétences qui seraient en chacun de nous, les mundurukus n'auraient pas encore inventé le minimum d'outils de langage pour calculer exactement : ils n'auraient pas de mot pour des nombres exacts

1. Keller Olivier, *Aux origines de la géométrie*, Vuibert, 2004, *Une archéologie de la géométrie*, Vuibert, 2006.

comme 10, 11, 12… mais plutôt des mots pour dizaine, vingtaine, trentaine.

Des comparaisons d'Olivier Keller entre des systèmes de dénomination des nombres entiers petits sont évocatrices de ce qu'a pu être une évolution de systèmes primitifs de base 5 (doigts-main) vers un système à base 10 (mains-pieds) ou à base 20 (mains-pieds-indiens, par exemple) où les nombres 1, 2, 3, 4 ont des dénominations particulières. Par exemple, les Zunis, qui vivent au nord du Nouveau Mexique, n'ont pas de nom spécial pour les petits nombres et ne peuvent pas aller facilement au-delà de 10 : 1 = pris pour commencer, 2 = levé avec le précédent, 3 = le doigt qui divise également, 4 = tous les doigts levés sauf un, 5 = l'entaillé, 10 = tous les doigts ; alors que des indiens du Paraguay peuvent aller jusqu'à 20 sans difficulté, ayant des mots spéciaux pour 1 et 2, puis 5= une main, 6 = un autre ajouté, 10 = tous les doigts, 11= arrivé au pied, un, 20 = fini les pieds ; un système plus évolué se rencontre chez les Tamanac du Vénézuéla avec des mots spéciaux pour les nombres de 1 à 4, 5 = une main entière, 10 = les deux mains, 11 = un du pied, 15 = tout un pied, 20 = un Indien, ensuite on va chercher un copain ; certains ne vont pas beaucoup plus loin : il n'y aurait rien à compter avec ; des Papous vont jusqu'à 500 en base 20, avec des noms de plus en plus longs. Notons des curiosités : les Yukis, un peuple indien de Californie dont il ne reste que peu de représentants, comptaient avec les espaces entre les doigts, dans un système de base 8 ; des Népalais, des Africains comptent en base 12.

III. LE SYSTÈME SUMÉRIEN DE NUMÉRATION

La civilisation sumérienne qui se développe au troisième millénaire avant J.C. a produit des œuvres merveilleuses, aussi bien littéraires qu'artistiques ; voir, par exemple, les livres de Samuel Noah Kramer, Jean Bottéro, André Parrot. Les Sumériens écrivaient avec un *calame* (tige de roseau) sur des tablettes d'argile fraîche qu'ils faisaient ensuite sécher au soleil et qui nous sont parvenues telles qu'elles avaient été écrites ou recopiées. Malheureusement, le travail des archéologues est terriblement menacé depuis le printemps 2003, quand, sous les yeux de l'armée américaine passive, le musée de Bagdad et les sites de fouille de l'Irak ont été pillés pour alimenter le commerce clandestin des antiquités.

Les toutes premières tablettes [2], datées de – 3300, marquent une étape cruciale de la naissance de l'écriture. L'étape précédente est celle des bulles-enveloppes, petites sphères d'argile dans lesquelles on plaçait des jetons, puis sur laquelle on inscrivait quelques signes pour garder la mémoire d'un accord ; les premiers coups de génie ont été de supprimer les jetons, d'aplatir les bulles et de développer l'écriture. Les premières tablettes sont par exemple, des décomptes de béliers, brebis, agneaux et agnelles. La naissance de l'écriture est liée à l'écriture de nombres ; elle n'est pas encore linéaire.

Les différents systèmes de mesure propres à chaque ville et à chaque domaine de mesure s'unifient vers – 2100 ; un système de numération en base 60 s'impose, réduit à deux signes qui suffisaient pour tout écrire, un clou et un chevron, obtenus en appuyant différemment le calame sur la tablette.

Fig.1.1 – Le clou et le chevron

Pour écrire 56, on écrira 5 chevrons suivis de 6 clous (les chevrons sont emboîtés, les clous regroupés par 3 si besoin). Pour écrire $6975 = 3600 + 56 \times 60 + 15$, on écrit un clou, puis 56, puis 15 (un chevron et 5 clous). Le clou vaut donc 1 ou, plus généralement, 60^k, le chevron vaut 10 ou, plus généralement, 10×60^k avec $k \in \mathbb{Z}$, sans que rien ne permettent souvent de connaître l'ordre de grandeur. Pour écrire 3 615, on écrit un clou, puis 15 ; le scribe laisse parfois un espace, parfois non ; il faut deviner. Ce n'est que bien plus tard, vers – 300, qu'on trouve dans des tablettes une notation de séparation jouant le rôle de notre zéro comme dans l'écriture de l'année de publication de ce livre : 2008.

2. Sur les mathématiques babyloniennes, voir **[FMPH-VI]**.

Le système en base 60 se diffuse chez les mathématiciens grecs dans les années – 300 ; il sera transmis par les Arabes aux Européens et, si vous regardez votre montre en me lisant, vous devriez avoir une pensée pour le, ou les, mathématicien(ne)s qui ont inventé ce système il y a plus de 4000 ans.

IV. APPROXIMATION DE $\sqrt{2}$

Les Babyloniens, des sémites, dominent le Moyen-Orient à partir de la fin du troisième millénaire, assimilant la culture des Sumériens. Les années – 2000 à – 1600 sont un âge d'or pour les mathématiques. Plusieurs centaines de tablettes retrouvées dans les fouilles en témoignent. Certaines donnent les inverses de nombres réguliers (dont les seuls diviseurs sont, 2, 3, 5) ; l'inverse de 2 est 30 puisque $2 \times 30 = 1$ à un facteur 60 près ; de même, l'inverse de 3 est 20, l'inverse de 4 est 15. Les choses se compliquent un peu quand on doit calculer l'inverse de 9 ; on peut dire que c'est l'inverse du carré de 3, donc, à un facteur 60^2 près, $20^2 = 400 = 6 \times 60 + 40$. Ces tablettes étaient utilisées pour faire des divisions : au lieu de diviser par un nombre, on multipliait par son inverse donné par la table ; c'est ce qui explique qu'on trouve des tables de multiplication par 44 26 40 = $(1/9)^2 = 1/81$: elles étaient destinées aux divisions par 81.

La tablette YBC 7289 fait partie de la Yale Babylonian Collection (l'université de Yale a été fondée en 1701 ; elle était très puritaine et on y était classé suivant le rang de sa famille parmi l'élite, sûr moyen de la reproduire !) ; un carré de 5 centimètres de côté y est tracé. Sa provenance exacte est inconnue ; elle a été trouvée vers 1912 et daterait des années – 1700 environ.

Sont indiquées le côté du carré : 30 (ou 1/2, impossible de décider), les valeurs 1 24 51 10, c'est-à-dire $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$, et son produit par 30, ou sa moitié ; la première donne 1,414212963 en notation décimale, valeur approchée par défaut à 6×10^{-7} près de $\sqrt{2}$; la seconde peut s'interpréter comme donnant la valeur de la diagonale du carré. Cette belle approximation était aussi utilisée par Ptolémée, 2000 ans plus tard ; on

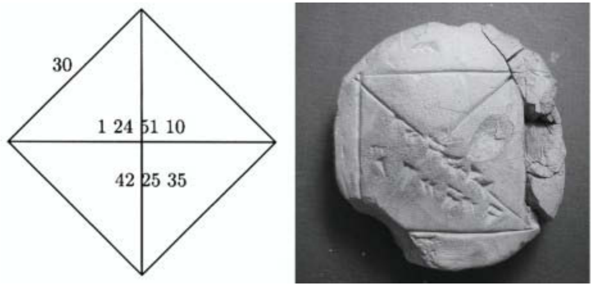

Fig.1.2 – YBC 7289 : $\sqrt{2}$
Crédit : Yale Babylonian Collection

n'avait pas encore fait mieux. On ne sait comment elle a été obtenue, mais elle correspond à une valeur donnée par l'algorithme de Héron : 577/408 (voir p. 28). Si vous voulez tout savoir sur $\sqrt{2}$, voir **[RIT]**.

V. ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Quelques dizaines de tablettes donnent des listes de problèmes comme :

> J'ai additionné 7 fois le côté de mon carré et 11 fois la surface : 6 15

qui correspond à l'équation : $11x^2 + 7x = 6{,}25$ (15/60=1/4) ; cette équation est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 11$, $b = 7$, $c = -6{,}25$. La tablette conserve les indications du *professeur* à son *élève* (j'indique entre parenthèses le calcul littéral correspondant) :

> Tu multiplieras 11 par 6 15 : 1 8 45 (calcul de $-ac$) ;
> Tu multiplieras 3 30 par 3 30 : 12 15(calcul de $(b/2)^2$) ;
> Tu l'ajouteras à 1.8.45 : 1 21 (calcul de $(b/2)^2 - ac$) ;
> C'est le carré de : 9 (calcul de $\sqrt{(b/2)^2 - ac}$) ;
> Tu soustrairas 3 30 : 5 30 (calcul de $\sqrt{(b/2)^2 - ac} - b/2$) ;
> Que poser qui, multiplié par 11 donne 5 30 : 30
> (calcul de $(\sqrt{(b/2)^2 - ac} - b/2)/a$) ;
> Le côté du carré est 30.

La méthode de calcul des racines est calquée sur la formule que nous apprenons tous par cœur ; on peut vraiment dire que les Babyloniens savaient résoudre les équations du second degré.

VI. PLIMPTON 322

La tablette Plimpton 322 est une tablette babylonienne de 12,7 sur 8,8 centimètres, trouvée probablement à Larsa au sud de l'Irak actuel et portant le numéro 322 dans la collection laissée à l'université Columbia de New-York par George Plimpton. Elle daterait des années – 1800 et a été victime d'une cassure à gauche. Elle a été déchiffrée et analysée pour la première fois par Otto Neugebauer (1899-1990) et

c^2/b^2	a	c	**n° de ligne**
[1 59 00] 15	1 59	2 49	1
[1 56 56] 58 14 50 06 15	56 07	3 12 1*	2
[1 55 07] 41 15 33 45	1 16 41	1 50 49	3
[1] 5[3] [1]0 29 32 52 16	3 31 49	5 9 1	4
[1] 48 54 01 40	1 05	1 37	5
[1] 47 06 41 40	5 19	8 01	6
[1] 43 11 56 28 26 40	38 11	59 01	7
[1] 41 33 59 03 45*	13 19	20 49	8
[1] 38 33 36 36	9 01*	12 49	9
[1] 35 10 02 28 27 24 26 40	1 22 41	2 16 1	10
[1] 33 45	45	1 15	11
[1] 29 21 54 02 15	27 59	48 49	12
[1] 27 00 03 45	7 12 01*	4 49	13
[1] 25 48 51 35 06 40	29 31	53 49	14
[1] 23 13 46 40	56*	53*	15

Fig. 1.3 – Les chiffres lisibles sur la tablette de la tablette Plimpton 322

Abraham Sachs (1914-1983) en 1945 (voir Neugebauer et Sachs, *Mathematical cuneiform texts*, American oriental series 29, 1945).

Les titres des colonnes conduisent à considérer a et c comme un côté de l'angle droit et l'hypoténuse d'un triangle rectangle à côtés entiers : on peut vérifier pour 11 des 15 lignes (celles sans *) que le troisième côté de l'angle droit, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ est aussi entier. Par exemple, ligne 7, on a $a = 38 \times 60 + 11 = 2291$, $c = 59 \times 60 + 1 = 3541$ et $b = \sqrt{3541^2 - 2291^2} = 2700$. Les triplets (a,b,c) définissant un triangle rectangle à côté entiers a,b,c, avec c pour l'hypoténuse, sont appelés *triplets pythagoriciens.* On peut corriger les nombres marqués d'une * dans les 4 lignes erronées, par exemple, le 9 01 de la ligne 9 doit être corrigé en $8\ 01 = 481$. Les chiffres entre crochets ne sont plus visibles sur la tablette. La ligne 11 correspond au triangle $(3,4,5)$.

Comment les Babyloniens en étaient-ils arrivés là ? Neugebauer et Sachs pensaient qu'ils avaient trouvé d'une manière ou d'une autre que les triplets $a = k(m^2 - n^2)$, $b = 2kmn$, $c = k(m^2 + n^2)$ sont pythagoriciens pour k, m et n entiers ; on peut imaginer, mais cela ne prouve rien, que la formule $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$ peut le suggérer. Un argument renforcerait la thèse de Neugebauer et Sachs : la liste des triplets donnés par ces formules, avec m et n réguliers, premiers entre eux et inférieurs à 125 et le plus petit angle du triangle entre 32 et 45 degrés est exactement celle de la tablette (pour une étude détaillée de la tablette, voir **[FMPH-VI]**).

Chapitre 2

La Grèce

I. THALÈS VERS – 600

Thalès (vers – 624 à – 547) est connu des élèves du secondaire pour un théorème qu'il semble ne jamais avoir énoncé. Il est originaire de Milet à l'embouchure du Méandre sur la côte ouest de la Turquie actuelle. Aucun texte de lui ne nous est parvenu. Proclus (411-485), qui vivait 1000 ans après lui, indique qu'on lui attribuait les propositions suivantes : *Un diamètre partage un cercle en deux parties égales, Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux, Les angles opposés par le sommet sont égaux* et un cas d'égalité des triangles. En donnait-il des démonstrations ?

Alors, pourquoi nomme-t-on, en France surtout, théorème de Thalès l'énoncé sur la proportionnalité des segments découpés par des parallèles sur deux droites ? Cet usage a été introduit au début des années 1880 et tous les manuels français l'ont depuis recopié.

II. PYTHAGORE, IRRATIONNALITÉ DE $\sqrt{2}$

Pythagore serait né vers – 570 dans l'île de Samos. Il n'aurait rien écrit, et son activité scientifique n'est mentionnée pour la première fois que 400 ans après sa mort ! Ainsi, les seuls noms de mathématiciens connus de tous les élèves et de tous leurs professeurs, cités dans tous les livres, Thalès et Pythagore, sont connus pour de mauvaises raisons : l'un a sans doute fait un peu de mathématiques, mais pas ce qu'on croit ; l'autre n'aurait même rien fait du tout !

Les Pythagoriciens soutenaient que tout dans la nature est nombre entier ou rapport de nombres entiers. C'est probablement aux environs de – 430 qu'un résultat inattendu est découvert : l'irrationnalité de la racine de 2 (ou du rapport de la diagonale au côté du carré), c'est-à-dire l'impossibilité d'écrire $\sqrt{2}$ sous forme d'un quotient p/q d'entiers. Tout n'était donc pas exprimable par des entiers ou des rapports d'entiers. Platon attribue cette découverte à Théodore de Cyrène dans son dialogue *Théétète*.

La démonstration de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ est pour nous très simple. Si $\sqrt{2} = p/q$ avec p,q entiers, on a $p^2 = 2q^2$. Si la plus grande puissance de 2 divisant p est 2^r et si la plus grande puissance de 2 divisant q est 2^s, les plus grandes puissances de 2 divisant p^2 et q^2 sont 2^{2r} et 2^{2s} ; dans l'égalité $p^2 = 2q^2$, les puissances de 2 des deux membres doivent être égales, donc $2r = 2s + 1$. C'est sans doute cette démonstration qu'évoque à maintes reprises Aristote en expliquant que l'incommensurabilité de $\sqrt{2}$ résulte de l'impossibilité de l'égalité du pair et de l'impair ; c'est le plus vieux raisonnement connu. On notera que l'irrationnalité n'est pas une propriété visible sur une figure.

III. PLATON, ARISTOTE, EUDOXE

Les Grecs ont fondé la philosophie (le mot viendrait de Pythagore à qui on prête beaucoup, on l'a vu). Platon (– 428 à – 348) rencontre Socrate en – 408, devient son disciple, est frappé par sa condamnation par les Athéniens (il est accusé, en particulier, de corrompre la jeunesse) à boire la ciguë, en – 399. Vers – 388, il prend l'habitude de se promener en philosophant avec ses disciples dans les jardins d'une villa ayant appartenu à un certain Akademos ; l'école qu'il fonde s'appellera donc Académie ; elle sera fermée par un édit de l'empereur Justinien (482-565), en 529. *Que nul n'entre ici s'il n'est apte à la géométrie*, autrement dit aux mathématiques, telle est la splendide maxime que Platon aurait fait placer à l'entrée de l'Académie ; mais elle n'est mentionnée que près de 1000 plus tard. Il voyage beaucoup, écrit une œuvre abondante sous forme de dialogues de Socrate avec diverses personnes dont certains touchent les mathématiques. Dans le *Timée*, Timée, philosophe pythagoricien, explique devant Socrate une théorie de l'univers où l'argumentation est parfois curieuse pour nous aujourd'hui ; il associe les cinq polyèdres convexes et réguliers (qu'on appelle depuis polyèdres de Platon) à la liste des cinq éléments : terre et cube, feu et tétraèdre, air et octaèdre, eau et icosaèdre, éther et dodécaèdre (le dernier à être découvert sans doute).

Tentons de résumer. Pour Platon, l'âme serait immortelle, datant du début de l'univers ; entre deux incarnations, elle serait en contact avec le monde du divin et des idées, aurait connaissance de tout, mais l'oublierait à chaque naissance ; elle pourrait retrouver les idées par réminiscence : devant un cercle concret, imparfait, elle se souviendrait de l'idée de cercle parfait ; les théorèmes existeraient quelque part et seraient à re-découvrir ; les raisonnements seraient conduits sur des figures imparfaites en ayant à l'esprit des figures parfaites. Les interrogations de Platon sur la nature des idées mathématiques trouvent encore des échos aujourd'hui : certains pensent que les mathématiques (les nombres premiers, les groupes simples,…) sont les mêmes sur la Terre et sur toute exoplanète d'une galaxie lointaine, voire avant le big bang et après le big crunch, d'autres non.

Aristote (– 384 à – 322) est d'abord un disciple de Platon ; en – 335, il fonde sa propre école, le *Lycée*. L'œuvre d'Aristote touche souvent aux mathématiques, particulièrement à la logique. Il définit soigneusement ce qu'est une proposition, ce qu'est une démonstration, les règles de déduction. Dans les *Seconds analytiques*, il explique comment construire la connaissance. Il faut partir de prémisses vraies, incontestables comme : *Deux choses égales à une même chose sont égales entre elles*, qu'on appelle des axiomes et qui sont indémontrables. Il faut définir des notions, demander l'existence d'objets (par exemple, on définit l'*unité* comme indivisible, on demande qu'elle existe).

Le témoignage d'Archimède permet d'attribuer à Eudoxe de Cnide (vers – 408 à – 355, Cnide est sur l'île de Rhodes) la théorie des proportions exposée dans le livre V des *Éléments* d'Euclide et les méthodes d'exhaustion donnant le volume de la pyramide et du cône ; on peut donc penser qu'Eudoxe, connu aussi comme astronome (il a conçu un modèle complexe du système solaire avec 27 sphères), autour de qui s'était formé une école, mais dont il ne nous reste pas de texte, avait un grand génie.

IV. ALEXANDRE, ALEXANDRIE

Le roi Philippe de Macédoine avait forgé à son fils Alexandre un joujou extraordinaire : la phalange macédonienne, armée novatrice de guerriers serrés en rangs les uns contre les autres armés de longues sarisses, les pointes de celles du cinquième rang dépassant encore le premier rang… Quand Philippe meurt, Alexandre ne tarde pas à se servir de ses soldats. En dix ans, il va bouleverser le Proche Orient, écrasant les Perses, puis s'engageant dans une extraordinaire aventure, allant jusqu'en Afghanistan sans réussir à le pacifier (déjà !), atteignant les royaumes du bord de l'Indus (voir Arrien, *Histoire d'Alexandre*, Éditions de minuit, 1984). Alexandre avait le génie de la création de villes (portant son nom). C'est ainsi qu'en janvier – 331, lors d'une opération éclair en Égypte, il fonde Alexandrie. Quand il meurt, en – 323, son empire est partagé entre ses généraux.

L'un d'eux, Ptolémée reçoit l'Égypte ; il lui faut du temps pour s'imposer et prendre le pouvoir ; il fait venir du monde grec de nombreux savants et artistes. Pour les accueillir et leur permettre de travailler ensemble, il fonde le *Musée* ; pour leur documentation, il fonde la *Bibliothèque*. Rapidement, sont réunies des collections de plusieurs centaines de milliers de textes écrits sur de longues bandes (les *volumen*, de plusieurs mètres parfois) faites de papyrus (d'où le mot papier), roulées sur elles-mêmes et qui devaient être complètement déroulées pour en lire la fin, inconvénient que nos livres n'ont pas.

C'est dans ce contexte exceptionnel qu'a été conçu un ouvrage qui ne l'est pas moins, les *Éléments* d'Euclide.

V. LES *ÉLÉMENTS* D'EUCLIDE

D'Euclide, nous ne savons rien. Il aurait travaillé à Alexandrie. Quand ? Difficile de le dire. Les experts proposent entre – 300 et – 270 sans qu'aucune source permette de préciser plus.

Les manuscrits complets des *Éléments* qui ont été conservés ont été copiés plus de 1000 ans après Euclide sur des copies de copies, etc. On n'a longtemps connu que des manuscrits descendants d'une édition des *Éléments* réalisée à la fin des années 300 par Théon d'Alexandrie (335-405), père de la seule mathématicienne connue de l'Antiquité, Hypathie (370-415) (morte assassinée, probablement par une secte de chrétiens fanatiques). En 1808, le bibliothécaire de l'École polytechnique, François Peyrard (1760-1822), découvrit parmi tous les documents du Vatican rapportés par Monge, un parchemin du dixième siècle, le codex 190, copié sur une version des *Éléments* antérieure à celle de Théon et en différant par endroits. On doit à Johan Heiberg (1854-1928), dans les années 1880, une édition critique des *Éléments*, s'appuyant sur de nombreux manuscrits dont le codex 190. On peut lire la traduction française de cette édition par Bernard Vitrac : Euclide d'Alexandrie, Les *Éléments*, 4 vol., 1990-2002, PUF, qui l'a considérablement enrichie de notes, commentaires et notices, avec une belle introduction de Maurice Caveing. C'est à elle que nous renvoyons les lectrices et lecteurs désirant mieux connaître les *Éléments.*

Pendant plus de 2000 ans, les *Éléments* ont été la base de la formation des mathématiciens du monde occidental. Le livre qui a été le plus publié depuis l'invention de l'imprimerie est la Bible, bien sûr ; mais le second, loin derrière tout de même, ce sont les *Éléments* d'Euclide.

Les *Éléments* comportent 13 livres. Les livres I à IV traitent de géométrie plane, les livres V et VI de la théorie des proportions, les livres VII à IX d'arithmétique, le livre X, aux dimensions imposantes, traite de problèmes d'irrationnalité, les livres XI à XIII de géométrie dans l'espace.

La première chose qui frappe en ouvrant les *Éléments*, c'est le langage et le style d'exposition, très proche du nôtre : des énoncés et des démonstrations.

Euclide commence par donner ses définitions de point (*ce dont il n'y a aucune partie*), ligne droite (*celle qui est placé de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle*), angle, angle aigu, cercle, diamètre, triangles isocèles, carré, etc. Les droites parallèles sont des droites *qui, étant dans le même plan … ne se rencontrent pas…* On remarquera l'imprécision de la définition du point, l'obscurité de la définition de la droite, mais il faudrait les discuter dans le contexte de l'époque.

Euclide formule ensuite cinq demandes (ou axiomes) comme :

> 1) mener une ligne droite de tout point à tout point ;
> 3) construire un cercle de centre donné et de rayon donné ;
> 5) si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où sont les angles plus petits que deux droits.

La demande 5 est ce qu'on appelle souvent le cinquième postulat, mais qu'on énonce aujourd'hui sous la forme (équivalente) : *par un point extérieur à une droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite* ; elle signifie que, si les angles en E et F marqués sur la figure 2.1 ont une somme plus petite que deux droits, les droites (AB) et (CD) vont se rencontrer du côté de B et D. On remarquera que l'infini y est invoqué : Euclide et ceux qui l'ont suivi auraient dû se méfier !

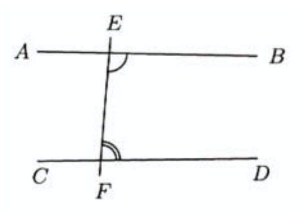

Fig. 2.1 – Postulat d'Euclide

Vous connaissez sans doute les efforts des mathématiciens durant des siècles pour chercher, en vain, à donner une démonstration de ce cinquième postulat : avec un système d'axiomes incomplet et une définition de la droite qui n'en est pas une, ce n'est, avec le recul, pas étonnant.

En fait, les demandes d'Euclide sont en nombre très insuffisant et beaucoup sont implicites, ce qui n'enlève rien à la grandeur des *Éléments*. Il faudra attendre Hilbert pour avoir une axiomatique complète de la géométrie.

Le livre I donne des propositions de géométrie élémentaire que nous apprenons tous au collège : partage d'un angle en deux, cas d'égalité des triangles, construction de la perpendiculaire à une droite donnée par un point donné, etc. La proposition 47 et dernière du livre I est le fameux théorème que nous appelons théorème de Pythagore. Le livre IV culmine dans la construction du pentagone régulier inscrit dans un cercle.

Le sujet du livre V est la théorie des proportions ; on dit aussi que c'est la *mesure des grandeurs*, le mot *grandeur*, qu'Euclide ne définit pas, se référant implicitement à des grandeurs de différentes espèces (notion également non définie) : segments de droite, aires, volumes, angles… Les grandeurs de même espèce peuvent être comparées, ajoutées. Deux grandeurs A et B de même espèce ont un rapport ($\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$) si des multiples de la première dépassent des multiples de la seconde et des multiples de la seconde dépassent des multiples de la première. En ce sens, le côté a d'un carré et sa diagonale $a\sqrt{2}$ ont un rapport puisque $a < a\sqrt{2} < 2a$.

La superbe définition 5 (qui remonterait donc à Eudoxe et a lointainement inspiré à Richard Dedekind sa construction des réels par les coupures en 1858) définit l'égalité de rapports : A et B ont le même rapport que C et D, si pour tous entiers m et n :

- $mA < nB$ équivaut à $mC < nD$;
- $mA = nB$ équivaut à $mC = nD$;
- $mA > nB$ équivaut à $mC > nD$.

Euclide n'a cependant parcouru qu'une partie du chemin : il définit les rapports irrationnels, mais ce sont des objets isolés et il n'en fait presque rien car il ne définit pas comment faire la somme ou le produit de deux rapports. Cela limite considérablement la portée du livre V. Tous ceux qui font des calculs n'auront pas besoin de cette admirable construction théorique et pourront continuer à calculer comme ils en avaient l'habitude. La proposition 2 du livre VI montre notre théorème de Thalès français, espagnol, etc.

L'arithmétique occupe les trois livres suivants des *Éléments*. La définition 23 est celle de nombre *parfait*, nombre égal à la somme de ses diviseurs (autres que lui-même), comme 6 et 28. Les deux premières propositions du livre VII donnent ce que nous appelons l'*algorithme d'Euclide* ; elles permettent de calculer le pgcd de deux nombres par soustractions successives (nous ferions des divisions euclidiennes). La démonstration de la proposition 31 : *Tout nombre composé est mesuré par un certain nombre premier*, fait appel à l'infini d'une manière explicite pour justifier que, parmi les diviseurs d'un nombre A, existe nécessairement un nombre premier : *s'il ne s'en trouvait pas, des nombres en quantité illimitée mesureraient le nombre A dont chacun serait plus petit que le précédent, ce qui est impossible dans les nombres.*

La proposition 20 du livre IX est remarquable. Elle affirme qu'il y a une infinité de nombres premiers sous la forme suivante : *Les nombres premiers sont plus nombreux que toute multitude de nombres premiers proposée.* Certain(e)s refuseront la démonstration d'Euclide : elle commence par *Soient les nombres premiers proposés* A,B,C. *Je dis que les nombres premiers sont plus nombreux que* A,B,C. Pourquoi donc ne raisonner qu'avec trois nombres ? La suite donne l'argument que nous connaissons : le nombre $ABC+1$ a un diviseur premier et ce diviseur n'est ni A, ni B, ni C. On remarque qu'Euclide parle de l'infini comme Aristote : les nombres premiers ne sont pas une infinité en *acte*, mais sont plus nombreux que tout nombre donné ; c'est une infinité en *puissance*.
Le livre XII nous fait entrer dans un nouveau monde. Euclide montre que le rapport des aires de deux cercles C et C' est égal au carré du rapport de leurs diamètres $\frac{d^2}{d'^2}$ en utilisant des polygones réguliers de 2^n côtés inscrits et circonscrits aux cercles. Il s'agit du premier raisonnement mettant en œuvre des éléments de calcul intégral. Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) soulignera le côté universel de cette méthode de raisonnement, de ce travail d'exhaustion (*totum exhaustionis negotium*), en 1648, et le nom de *méthode d'exhaustion* lui est resté depuis.

Le corollaire de la proposition 7 établit que le volume d'une pyramide triangulaire est le tiers de la base par la hauteur, formule découverte par Démocrite (vers – 460 à – 370) et démontrée par Eudoxe. De nouveau, il s'agit d'un raisonnement annonciateur du calcul intégral (l'histoire des différentes démonstrations de la formule donnant le volume des pyramides triangulaires est racontée par Michèle Grégoire, *Histoires de pyramides*, Mnémosyne, IREM, Paris VII, 1993).

Le livre XIII se termine en beauté par l'étude des polyèdres réguliers convexes.

VI. ÉRATOSTHÈNE (– 276 À – 194)

Ératosthène naît, à Cyrène dans la Lybie actuelle. Nous connaissons par Nicomède son *crible* pour déterminer de proche en proche les nombres premiers : on écrit tous les nombres entiers, de 2 à 1000 par exemple, à la suite. Le premier nombre écrit : 2, est premier ; les multiples de 2 strictement supérieurs à 2 ne sont donc pas premiers et on les barre ; le premier nombre non barré : 3, est premier ; les multiples de 3 strictement supérieurs à 3 ne sont donc pas premiers et on les barre ; le premier nombre non barré : 5, est premier, etc.

Ératosthène est surtout connu pour avoir donné une très bonne estimation des dimensions de la terre (pour cette mesure, voir Pascal Quinton, Activités mathématiques à propos de la mesure de la terre, in **[ACT-13]**). Que la terre soit sphérique est bien établi depuis plus d'un siècle dans le monde grec. Ératosthène sait qu'Alexandrie et Assouan (Syène dans les textes grecs) sont sur le même mériden. Il sait aussi qu'à Syène, à midi au solstice d'été, les objets n'ont pas d'ombre et qu'on voit le soleil du fond des puits ; le soleil est donc à la verticale de Syène. Pour comprendre la situation, traçons la section de la terre par le plan diamétral passant par les pôles, par Alexandrie, notée A, et par Syène, notée B. Le soleil, noté S, est suffisamment loin de la terre pour qu'on puisse supposer que les rayons que nous représentons arrivant en A et en B soient parallèles.

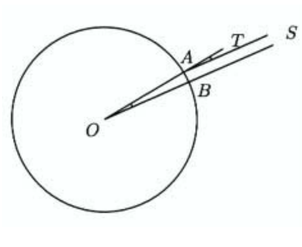

Fig. 2.2 – La mesure d'Ératosthène

Les droites (OAT) et (OBS) sont les verticales d'Alexandrie et de Syène, les rayons (SA) et (SB) sont parallèles, donc l'angle $\widehat{AOB}$ est égal à l'angle $\widehat{SAT}$. Ératosthène donne la valeur de ce dernier angle : $7°12$, soit exactement $360°/50$. Comme il sait que la distance de Syène à Alexandrie est de 5 000 stades, la circonférence de la terre est de $50 \times 5\,000 = 250\,000$ stades. Le raisonnement est d'une grande simplicité. La valeur finale d'Ératosthène est 252 000 stades pour avoir un nombre entier de stades par 60-ième de circonférence : 4 200 stades (la division du cercle en 360 parties s'impose un siècle plus tard). Le problème est qu'aucun document ne permet de préciser la valeur de ce stade : on peut hésiter entre des valeurs très différentes, donnant pour le tour de la terre entre 24000 km et 46000 km, ce qui serait malgré tout de beaux résultats.

La figure que nous avons tracée suppose de savoir que la terre est ronde et que le soleil est comme à l'infini. George Gamow (1904-1964), un brillant cosmologiste, expliquait, dans un de ses livres de vulgarisation, *Une étoile nommée soleil*, apparemment sérieusement, qu'Anaxagore ayant déjà les données précédentes, mais supposant la terre plate et le soleil à distance finie, voyait le triangle SAB rectangle en B et, trouvant $\widehat{SAT} = 7°12$, en déduisait $\widehat{SAB} = 82°48$, puis $SB \approx 6500$ km. Cela a tellement l'air de la vérité que l'histoire est maintenant donnée comme vraie par des programmes et des manuels de physique français !

VII. ARCHIMÈDE (– 287 À – 212)

Nous arrivons à celui qui est considéré comme le plus grand mathématicien et scientifique de l'Antiquité. Sa vie est très mal connue. Il est né à Syracuse, une ville de la côte est de la Sicile, grecque à cette époque. Tout le monde sait qu'il se serait écrié *Euréka* et serait sorti tout nu de son bain en découvrant la poussée dite d'Archimède sur les corps immergés dans un fluide (on possède un seul récit de ce *streaking* scientifique, par l'architecte Vitruve, du premier siècle avant J.-C.), qu'il aurait inventé des engins dévastateurs pour les assiégeants de sa ville ; aucun document sûr ne le prouve.

Le traité *De la sphère et du cylindre* contient plusieurs résultats importants et nouveaux : l'aire d'une sphère de rayon r est quatre fois l'aire d'un grand cercle : $4\pi r^2$ et son volume est $(4/3)\pi r^3$, etc. L'axiome dit d'Archimède est la cinquième demande du traité :

> Parmi les lignes inégales, les surfaces inégales, les corps solides inégaux, le plus grand dépasse le plus petit d'une grandeur telle que, ajoutée à elle-même un nombre suffisant de fois, elle peut dépasser toute grandeur donnée ayant un rapport avec les grandeurs comparées entre elles.

Archimède va plus loin qu'Euclide dans le traité *La mesure du cercle*. Trois propositions seulement. La première établit par exhaustion que l'aire $\mathcal{A}(C)$ d'un cercle C de rayon r est égale à l'aire $\mathcal{A}(T)$ d'un triangle rectangle T dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur r et la circonférence $2\pi r$ de C ; autrement dit, $\mathcal{A}(C) = r \times 2\pi r = \mathcal{A}(T)$; superbe : c'est la même constante qui lie rayon et diamètre, rayon et aire. Puis Archimède établit les fameuses inégalités $3 + \dfrac{1}{7} < \pi < 3 + \dfrac{10}{71}$, en encadrant le cercle par des polygones réguliers de 96 côtés inscrits et circonscrits respectivement à C. Parmi les approximations de π par des fractions à numérateur et dénominateur entier, $22/7$ est excellente ; avec des dénominateurs inférieurs à 105, on ne peut obtenir mieux.

En 1899, un universitaire grec découvre à Constantinople un palimpseste où un texte mathématique a été gratté pour être recouvert de prières ; il en publie quelques lignes ; elles attirent l'attention de Heiberg qui vient examiner le manuscrit en 1906, s'aperçoit qu'il s'agit de sept œuvres d'Archimède dont la *Méthode*, inconnue jusque-là, déchiffre ce qu'il peut et en fait la pièce centrale de son édition des années 1910 de l'œuvre d'Archimède. La suite est aussi rocambolesque. Le manuscrit disparaît, volé sans doute. En 1998, nouveau rebondissement : le manuscrit, malheureusement abîmé, est mis en vente chez Christie par une famille française qui déclare l'avoir acheté à un bouquiniste de Constantinople en 1930. L'acheteur le confie à un musée de Baltimore (voir le site http://www.archimedespalimpsest.org/), où il est depuis étudié avec toutes les techniques modernes afin de lire ce qui n'a jamais pu l'être ; l'achèvement du travail est prévu pour 2008. On a pu déterminer que le manuscrit date des années 850-900 et qu'il a été effacé en 1229.

Qu'un génie comme Archimède ait cru bon d'expliquer sa méthode de découverte, c'est absolument unique et on peut être alléché. Il en donne comme exemple une *méthode de pesée* qui lui permet d'avoir un résultat que les mathématiques doivent ensuite montrer. Il considère une parabole de sommet B, deux points A et G symétriques par rapport à l'axe de la parabole, D leur projection sur l'axe (voir figure 2.3). La tangente en G à la parabole coupe l'axe en E et la parallèle à l'axe passant par A en Z ; B est le milieu de $[DE]$. On note K le milieu de $[AZ]$, P le symétrique de G par rapport à K.

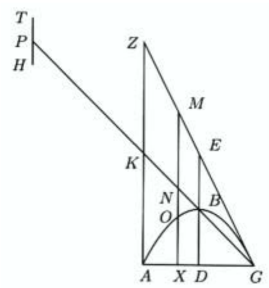

Fig. 2.3 – Méthode de pesée d'Archimède

Notons $\mathcal{R}$ la région limitée par l'arc de parabole et le segment $[AG]$. Archimède entreprend de peser les segments $[OX]$, X quelconque sur AG ; les segments sont sans épaisseur, mais cela ne semble pas poser de problème, et c'est une idée absolument nouvelle. Archimède pense sa figure dans un plan vertical et envisage $[PG]$ comme le fléau d'une balance tournant autour d'un axe horizontal passant par K. Il place $[OX]$ en $[TH]$, segment vertical de milieu P ; ce segment est équilibré par $[MX]$ puisque $TH \times AG = MX \times AX$.
Archimède en déduit que les segments verticaux de $\mathcal{R}$ sont équilibrés par les segments du triangle AGZ. L'aire $\mathcal{A}$ de $\mathcal{R}$ placée en P équilibre le triangle AGZ, donc $\mathcal{A} \times AG = (AG \times AZ/2) \times AG/3$; soit $\mathcal{A} = \dfrac{4}{3} \times (AG \times BD/2)$; l'aire de $\mathcal{R}$ serait donc les 4/3 de l'aire du triangle ABG : *La pro-*

position n'est, certes, pas démontrée par ce que nous venons de dire, mais elle donne une certaine idée que la conclusion est vraie, précise Archimède.

VIII. APERÇUS SUR D'AUTRES MATHÉMATICIENS GRECS

Aristarque de Samos est né un peu avant – 300. Comme Archimède l'explique dans l'*Arénaire*, il a fait l'hypothèse étonnante que le Soleil, beaucoup plus gros que la Terre, était fixe et que la Terre tournait autour de lui, en déduisant que les étoiles étaient nécessairement très éloignées de la Terre, puisque leurs positions ne changeaient pas quand la Terre effectuait une révolution. Sa théorie ne semble pas avoir rencontré beaucoup d'adhésion. L'observation de la Lune au premier quartier le conduit à estimer que la distance Terre-Soleil est entre 18 et 20 fois la distance Terre-Lune. Cette valeur n'est pas correcte à cause de la difficulté d'estimation des angles du triangle Terre-Lune-Soleil au moment du premier quartier, mais entreprendre cette estimation est une belle idée.

Apollonius de Pergé (vers – 260 à – 190) est né à Pergé, sur la côte sud de la Turquie actuelle. De ses nombreuses œuvres, beaucoup sont perdues. On ne connaît que sept des huit livres de son traité sur les coniques, certains par des sources arabes. C'est lui qui nomme les coniques *ellipse* (d'un verbe grec signifiant qu'il lui manque quelque chose pour être un cercle), *parabole* (pour être lancé à côté, le verbe *ballein* se retrouve dans balistique) et *hyperbole* (pour être lancé au-delà de tout). Il donne les propriétés des coniques qui étaient encore enseignées il y a cinquante ans dans les classes de terminales : constructions des tangentes, propriétés des foyers et des directrices, propriétés des asymptotes. Il donne également les propriétés des normales, des centres de courbure, des directions conjuguées. Les résultats d'Apollonius sont restés pendant très longtemps des résultats de mathématiques pures. Au début du XVII^e siècle, les paraboles apparaissent pour modéliser la chute des corps dans les travaux de Galilée, avec les applications à la balistique qui en résulteront, et les ellipses pour modéliser le mouvement des planètes (lois de Kepler (1571-1630) énoncées entre 1509 et 1519).

Héron d'Alexandrie vivait autour de 62, comme nous le dévoile la date de l'une de ses observations. Il a beaucoup écrit. Dans les *Métriques*, il donne l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle en fonction des longueurs a,b,c des côtés :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

où $p = (a+b+c)/2$ est le demi-périmètre du triangle. Dans le même ouvrage, il explique comment obtenir une racine carrée de manière approchée, prenant l'exemple du calcul de $a = 720$. Il part de $u_0 = 27$, puisque $27^2 = 729$ est proche de a, et calcule $u_1 = (27 + 720/27)/2 = \quad 26 + 1/2 + 1/3$. Comme $u_1^2 = 720 + 1/36$, u_1 est une bonne approximation de $\sqrt{a}$. Héron ajoute que, si nous voulons rendre la différence inférieure à $1/36$, on prend u_1 à la place de u_0 ; Héron suggère donc de calculer le troisième terme de la suite définie par récurrence par la formule $u_{n+1} = (u_n + a/u_n)/2$. Cette suite converge rapidement vers $\sqrt{a}$, c'est elle qui sert aujourd'hui.

Claude Ptolémée (aucun rapport avec la dynastie des Ptolémée) a vécu à Alexandrie dans les années 100-150. Il met en place une description du système solaire à l'aide de cercles dans les 13 livres de sa *Composition mathématique*, titre que les Arabes vont transformer en l'*Almageste* (du grec megiste : le très grand). Dans ce système, c'est la Terre qui est immobile au centre du monde ; la Lune, le Soleil et les planètes tournent autour de la Terre. Pour rendre compte des mouvements réels, Ptolémée reprend une idée géométrique d'Apollonius : les planètes ont des orbites circulaires autour de points qui décrivent un cercle (le *déférent*) autour de la Terre, méthode qui donne de bonnes descriptions des mouvements et esquisse les séries de Fourier. Jusqu'à Copernic (et même un siècle plus tard), les conceptions de Ptolémée vont être dominantes.

Ptolémée est également le fondateur de la trigonométrie plane ; dans le livre I de l'*Almageste*, il donne une table des longueurs des cordes sous-tendues par un angle au centre a dans un cercle de rayon $r = 60$ (la corde sous-tendue par a est $2r \sin(a/2)$, a variant de 0 à 180 degrés avec un pas d'un demi-degré).

Pappus d'Alexandrie vivait probablement au début des années 300. Sa *Collection* est un vaste recueil de propositions recueillies dans des traités antérieurs qu'on ne connaît parfois que par cet ouvrage : discussions autour de la duplication du cube, spirales et autres courbes, problème de la forme de la courbe de longueur donnée limitant la plus grande aire possible (en partant de la description des alvéoles des abeilles). Pappus accompagne ce recueil de démonstrations détaillées et ajoute ses propres résultats dont, au livre 7, des résultats qui annoncent la géométrie projective.

Diophante (probablement IIIe siècle après J.-C.) est célèbre pour les 13 livres de ses *Arithmétiques* (voir le bel article : Schappacher Norbert, Diophante d'Alexandrie : un texte et son histoire *in* **[ACT-13]**). Six nous sont parvenus par des manuscrits grecs copiés à Byzance au XIIIe siècle. Un miracle s'est produit en 1971 quand Roshdi Rashed découvrit qu'un texte mal référencé d'une bibliothèque de Meshed en Iran était en réalité une traduction des années 870 des livres IV à VII.

Diophante pose des problèmes généraux (plus de 300), mais il ne donne de solution (rationnelle, positive, parfois de grande taille) que dans des cas particuliers. Pour l'énoncé : *Décomposer un carré donné en deux carrés* (II.8), au lieu de résoudre $a^2 + b^2 = c^2$, il prend $c = 4$ (qui a pour lui un caractère générique), pose $a = 2b - 4$, ce qui le conduit à $5b^2 = 16b$. Il signale que son choix de $2b - 4$ est un cas particulier de $a = kb - 4$; on peut comprendre que Diophante coupe le cercle $x^2 + y^2 = 16$ par des droites $x = ky - 4$ passant toutes par le point $(-4,0)$ du cercle ; ce qui conduit à $b = 2k/(k^2 + 1)$, etc., mais Diophante ne dit pas si on obtient ainsi toutes les solutions. Il suit dans beaucoup d'autres problèmes une méthode analogue.

Chapitre 3

Le monde arabe de 600 à 1500

I. LE DÉVELOPPEMENT DE LA CIVILISATION ARABE

Quand Mahomet (570-632) meurt, les armées arabes partent à la conquête du monde. En 711, elles traversent le détroit de Gibraltar (djebel de Tarik ibn Ziyad, leur commandant). Elles sont stoppées en France dans les années 730 (la bataille de Poitiers a lieu en 732). L'empire arabe connaît un développement culturel considérable sous les règnes des califes Haroun al Rachid (786-809) et al Mamoun (813-833). Le *Bayt al Hikma* (la *Maison de la sagesse*), institution récemment recréée, réunit des savants d'origines et de cultures diverses qui rassemblent les connaissances de leur époque, se procurent des manuscrits grecs et les traduisent. Puis les sciences arabes connaissent un développement extraordinaire (voir **[DJE]** et **[RAS]**). Dans les années 1100, la reconquête de l'Espagne a commencé. Les érudits du monde chrétien se précipitent à Tolède (*Je me hâtai de m'y rendre pour écouter les leçons des plus grands savants du monde*, écrit Robert de Morlay), ville contact entre le monde chrétien et le monde musulman, pour y traduire des dizaines de manuscrits arabes, certains étant des traductions de textes grecs ; parmi les 80 (environ) ouvrages traduits par Gérard de Crémone (vers 1114-1187) et son atelier figurent l'*Almageste* de Ptolémée, des traités d'Aristote et d'Apollonius, aussi bien que des textes d'auteurs arabes ; Adélard de Bath (vers 1075-1160) traduit les *Éléments* d'Euclide, etc.

II. AL KHWARIZMI (VERS 790-840/850)

Le nom de Mohammed ibn Musa al Khwarizmi (Mohammed fils de Moïse) semble indiquer qu'il était originaire du Khwarezm, une province de l'Ouzbékistan.

Le principal ouvrage mathématique d'Al Khwarizmi est *Al Kitab al Mukhtasar fi Hisab al jabr wa-l-Muqabala* : *Livre concis du calcul par les procédés du jabr et du muqabala* (merci de m'excuser pour l'orthographe arabe imparfaite). Rédigé à l'époque d'al Mamoun, l'ouvrage traite des équations du second degré liant les dirhams, les racines et les carrés (correspondant à nos nombres, nos x et nos x^2). Al Khwarizmi a l'idée de les classer en six types différents, toujours en phrases comme : *Racines et carrés égaux à des nombres*, *Carrés et nombres égaux à des racines*, *Racines et nombres égaux à des carrés*, autrement dit $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $bx + c = ax^2$ avec $a,b,c > 0$ (les trois au-tres types sont plus faciles : $ax = b$, $ax^2 = b$, $ax^2 = bx$). Il montre comment les résoudre sur les exemples : $x^2 + 10x = 39$, $x^2 + 21 = 10x$, $3x + 4 = x^2$ (il préfère toujours se ramener au cas où $a = 1$), puis traite une trentaine d'équations comportant des difficultés de calcul diverses. Au lecteur de comprendre comment traiter d'autres exemples à partir de ceux-ci, mais tout ce qui relève de l'algèbre *doit te mener à l'un des six types que j'ai décrits dans mon livre.* Pour le premier et le troisième exemple, il donne une résolution identique à la babylonienne (2500 ans avant lui, voir p. 12), indiquant la méthode de calcul de la racine positive. Pour le second, il innove.

> Divise en deux les racines ; ce qui donne 5 ; multiplie 5 par lui-même, tu obtiens 25 ; retire les 21 qui sont ajoutés au carré ; il reste 4 ; extrais la racine, cela donne 2, et retire-la de la moitié de la racine, c'est-à-dire de 5 ; il reste 3 ; c'est la racine du carré que tu cherches et le carré est 9. Si tu le désires, ajoute cela à la moitié de la racine, ce qui donne 7, qui est la racine du carré que tu cherches et le carré est 49. Si tu rencontres un problème qui se ramène à ce cas, examine alors sa justesse à l'aide de l'addition ; si tu ne le peux, tu obtiendras certainement (la solution) à l'aide de la soustraction. Parmi les trois cas dans lesquels on doit diviser en deux les racines, c'est le seul où l'on se serve de l'addition et de la soustraction. Sache en outre que si, dans ce cas, tu divises en deux la racine, que tu la multiplies par elle-même et que le produit soit plus petit que les dirhams qui sont ajoutés au carré, alors le problème est impossible. Mais s'il est égal aux dirhams, la racine du carré est égale à la moitié de la racine, sans qu'on ajoute ou retire quoi que ce soit.

Autrement dit, Al Khwarizmi explique que, dans un problème du type $x^2 + c = bx$, si $\left(\frac{b}{2}\right)^2 > c$, il y a deux solutions, si $\left(\frac{b}{2}\right)^2 < c$, le problème est impossible et si $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$, la solution est $\frac{b}{2}$.

Il faut souligner l'importance de cette partie du travail d'Al Khwarizmi : c'est la première fois qu'on considère qu'une équation du second degré peut avoir deux racines et le critère d'existence à l'aide du discriminant de l'équation est donné.

Al Khwarizmi passe de l'équation :

$$4x^2 - 2x + 3 = 3x^2 + 2$$

à l'équation

$$4x^2 + 3 = 3x^2 + 2x + 2$$

par *al jabr*, mot qui exprime, en arabe, l'idée de remplissage ou de réduction d'une fracture. C'est l'opération consistant à ajouter aux deux membres d'une équation le même terme afin de faire disparaître les termes affectés du signe –. Ce mot est à l'origine du mot algèbre, ayant été conservé tel quel dans les premières traductions latines.

Un ouvrage probablement ultérieur d'Al Khwarizmi explique, pour le monde arabe, l'invention indienne du zéro (Al Khwarizmi, *Le calcul indien*, trad. par André Allard, Blanchard, 1992) ; il contient un premier exposé du système décimal et décrit l'usage d'un petit cercle pour noter l'absence d'unités, de dizaines, de centaines… À partir de 1150, ce livre est à son tour traduit en latin à de très nombreuses reprises et diffusé dans toute l'Europe par des manuscrits appelés *algorismus*, déformation d'Al Khwarizmi, mot qui donne algorithme et a pris le sens de *procédé de calcul* que l'on sait. Le signe rond est alors appelé circulus ou cifre, transcription de l'arabe as-sifr. Le mot deviendra chiffre en français, zéro en italien. Attention, ce signe rond est un signe d'absence et non le signe représentant le nombre 0 dont Brahmagupta (598-670) avait énoncé les propriétés.

III. OMAR KHAYYAM (1048-1131)

Omar Khayyam vit dans une époque de guerres entre les turcs seldjoukides, convertis à l'Islam sunnite, et les chiites d'Iran et d'Irak (les tensions entre les deux communautés sont anciennes). Il est astronome, mathématicien, philosophe. Beaucoup de livres le disent aussi un poète, auteur de nombreux et célèbres quatrains, mais aucun document ancien ne permet d'identifier le poète et le mathématicien selon Roshdi Rashed. Faut-il être prudent ? Citons tout de même un vers traduit lu au hasard ou presque, du poète qui aimait le vin, l'amour :

> Qui t'amène vive comme le vent pour attiser le feu déjà ardent en ton absence.

Le traité d'algèbre d'Omar Khayyam (écrit vers 1074) est connu par 10 manuscrits, aucun n'étant l'original ; le texte a été publié avec une analyse critique par Rashed Roshdi, *Al Khayyam mathématicien*, Blanchard, 1999.

Omar Khayyam est conscient du problème des dimensions créé par l'interprétation des nombres comme segments, des produits de deux nombres comme rectangles, etc. :

> Et si l'algébriste emploie le carré-carré dans les problèmes de géométrie, c'est métaphoriquement, et non pas proprement, étant donné qu'il est impossible que le carré-carré fasse partie des grandeurs. Ce qui se trouve dans les grandeurs, c'est d'abord une seule dimension, c'est-à-dire la seule racine, ou, rapporté à son carré, le côté. Puis les deux dimensions, c'est-à-dire la surface… enfin les trois dimensions, c'est-à-dire le corps… comme il n'existe aucune autre dimension, ne font partie des grandeurs ni le carré-carré ni, à plus forte raison, ce qui lui est supérieur.
>
> Et toutes les fois que dans ce traité nous disons : un nombre est égal à une surface, nous entendons par le nombre un quadrilatère à angles droits, dont l'un des deux côtés est un et l'autre une droite égale en mesure au nombre donné… Et toutes les fois que nous disons : un nombre est égal à un solide, nous entendons par nombre un parallélépipède rectangle, dont la base est le carré de l'unité et dont la hauteur est égale au nombre donné.

Le sujet du traité d'algèbre est l'étude détaillée des équations du troisième degré. Omar Khayyam cite Al Khazin (vers 900-

971) qui aurait résolu cette équation avec des sections coniques. Ne considérant que des coefficients strictement positifs, Omar Khayyam distingue 25 cas dont 11 se ramènent à des équations de degré inférieur (équations de degré inférieur ou égal à 2 et équations sans termes constants). Il reste 14 cas où Omar Khayyam obtient les solutions positives par intersection de coniques : cercles, paraboles ou hyperboles.

Par exemple, pour $x^3 + ax = b$, Omar Khayyam obtient la solution comme longueur d'un segment construit à l'aide de l'intersection (distincte de 0) de la parabole $y = x^2/\sqrt{a}$ et du cercle $x(x - \frac{b}{a}) + y^2 = 0$.

Pour la solution algébrique des équations du troisième degré, Omar Khayyam est laconique : *Elle n'est possible ni pour nous, ni pour aucun de ceux qui sont passés maîtres en cette science. Peut-être qu'un de ceux qui viendront après nous la réalisera.*

IV. APERÇUS SUR D'AUTRES MATHÉMATICIENS ARABES

Abu Ali al Hassan Ibn al Haytham (vers 965-1041) est connu en Occident sous le nom d'Alhazen, forme latine de son second prénom. Il est né à Bassorah. Ses textes les plus connus portent sur l'optique ; il dissèque des yeux, explique que la lumière se reflète sur les objets et pénètre dans l'œil (Ptolémée pensait que c'était l'œil qui envoyait de la lumière sur les objets), pose le problème de déterminer le point de réflexion d'un rayon lumineux sur un miroir sphérique, invente la chambre noire. Il a des idées sur l'attraction réciproque de deux corps en fonction de leur masse. Il cherche à montrer que les nombres parfaits pairs sont tous de la forme $2^{n-1}(2^n - 1)$ avec $2^n - 1$ premier. Il affirme l'existence des objets mathématiques comme les lignes, les surfaces et les solides dans le domaine des idées, en faisant abstraction des objets concrets : *ceux qui existent pour les sens n'existent pas en vérité car les sens trompent souvent sans que l'opérateur le décèle* alors que *ceux qui existent en imagination existent vraiment et absolument…* Al Haytham utilise beaucoup le mouvement ;

par exemple, il définit une droite comme une ligne qui ne change pas si on la fait tourner autour de deux quelconques de ses points. Sa tentative de démonstration du cinquième postulat échoue car il s'appuie sur la proposition équivalente : *L'ensemble des points équidistants d'une droite et d'un même côté est une droite.*

Nasir al Din al Tusi (1201-1274) a été un grand astronome, disposant d'un observatoire construit par le petit fils de Gengis Khan et ses observations du mouvement des planètes, de la précession des équinoxes sont très précises. Son étude des équations du troisième degré innove ; il classe les 25 cas d'Omar Khayyam suivant le nombre de leurs racines réelles positives (il ne reconnaît pas les racines négatives). Il fait une étude géométrique soigneuse étudiant dans chaque cas les conditions d'existence d'une solution. Il est amené à chercher le maximum d'un polynôme, introduit ce que nous reconnaissons être une dérivée et étudie le signe du polynôme au voisinage de ce point. Un gros travail.

Ghiyath Al Kashi (autour de 1380-1430) est un mathématicien perse connu par sa formule de trigonométrie du triangle : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \sin \widehat{A}$. Lui aussi a pu faire des observations astronomiques précises grâce au magnifique observatoire construit à Samarkande par le prince mongol Ulug Beg (1393-1449). Il obtient $60 \sin 1^\circ$ avec une précision de 60^{-10}, en utilisant une méthode itérative ; il calcule π avec la même précision, en 1424, avec des polygones réguliers inscrits et circonscrits à un cercle, ayant 3×2^{28} côtés. Enfin, il expose l'usage des fractions décimales.

Chapitre 4

Autour de la Renaissance

I. LÉONARD DE PISE (VERS 1170 – APRÈS 1240)

Le père de Léonard représente les marchands pisans à Bougie (Bejaia, en Algérie) et son jeune fils (connu aujourd'hui sous le nom de Fibonacci, une invention de Guillaume Libri, 1803-1869), qui l'accompagne, en profite pour se familiariser avec la numération arabe, comme il l'explique dans son premier texte, le *Liber abaci*, écrit en 1202.

C'est dans ce livre qu'apparaît la suite que nous appelons suite de Fibonacci : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, etc. Léonard imagine qu'un couple de lapins engendre régulièrement tous les mois un couple de petits lapins capables, deux mois plus tard et les mois suivants, d'engendrer à leur tour un couple de lapins. Au départ, il y a un seul couple de lapins ; le mois suivant, toujours un, le mois suivant, deux, etc. En appelant F_n le nombre de couples au début du n-ième mois, la relation de récurrence est $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Léonard est réaliste et s'arrête au bout d'un an. Si on veut continuer, il faut supposer les lapins immortels et infatigables…

C'est aussi dans le *Liber abaci* que Léonard utilise des lettres comme notations, ébauche de symbolisme, et présente le système de calcul des Indiens avec neuf chiffres et le zéro (la tentative d'introduction de Gerbert d'Aurillac (vers 838-1003), le pape de l'an 1000, n'avait pas eu de suite).

Dans *Flos*, Léonard montre que l'équation $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ n'a pas de solution entière, ni rationnelle, ni une racine carrée de rationnel et donne (sans qu'on sache comment il l'a obtenue) une remarquable approximation sexagésimale de l'unique racine réelle : 1 22 7 42 33 4 40, valeur exacte à 10^{-9} près.

Les différents textes de Léonard de Pise n'auront qu'une diffusion restreinte (l'imprimerie n'existait pas alors) ; certains sont perdus. Le *Livre des Carrés* et le *Flos…* n'ont été retrouvés que dans les années 1850 par le prince Baldassare Boncompagni à la bibliothèque ambrosienne de Milan.

II. REPRÉSENTATION EN PERSPECTIVE

Dans ses fresques tellement belles de Padoue ou d'Assise, Giotto di Bondone (1267-1337) donne une dimension expressive et dramatique nouvelle en peinture ; mais les tailles des objets et des bâtiments ne sont pas cohérentes avec celles des personnages et les arêtes ne sont pas dessinées en perspective.

Les premiers tableaux en perspective auraient été peints par l'architecte du Dôme de Florence, Filippo Brunelleschi (1377-1446), vers 1411 ; ils sont perdus. Un tableau de 1427, la Trinité de Masaccio (1401-1428), accroché dans l'église Santa Maria Novella de Florence, contient une voûte en perspective ; il n'est pas difficile de trouver le tableau, il y a toujours un groupe de touristes devant, un guide à la main, regardant *le premier tableau peint en perspective*.

Leone Battista Alberti (1404-1472) est un des grands humanistes de son époque, un architecte connu (c'est lui qui dessine la façade de Santa Maria Novella). Il disait des mathématiques que *rien ne l'aidait plus à chasser la tristesse*. Dans son *De pictura* (éd. Macula Dédale, 1993) de 1435, il donne une technique de construction de l'image d'un carrelage du plan $\mathcal{P}$ dont les carreaux sont rangés parallèlement à $\mathcal{P} \cap \mathcal{T}$, à l'aide d'une vue de face et d'une vue de côté, comme on le fait en dessin industriel.

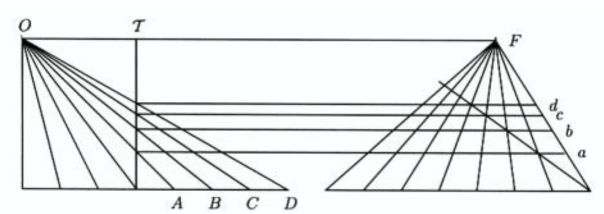

Fig. 4.1 – Construction de l'image d'un carrelage par Alberti

Les hauteurs des lignes a,b,c,d représentant les bords des rangées du carrelage vus de côtés en A,B,C,D sont obtenues dans la figure de gauche et des droites de rappel les reportent dans la figure de droite. Avant Alberti, les peintres utilisaient pour construire ces lignes une règle empirique inexacte.

À partir des années 1440, la technique est le plus souvent parfaitement maîtrisée par les peintres. Le magnifique livre de Daniel Arasse (1944-2003) : *L'Annonciation italienne. Une histoire en perspective*, Hazan, 1999, en donne de nombreux exemples d'une grande beauté représentant tous l'*Annonciation*, comme celle de Fra Angelico (1387-1455) en 1450 qui vous saisit en montant l'escalier du couvent de San Marco à Florence. En 1470, Piero della Francesca (vers 1420-1492) et Francesco della Cossa (1435-1477) tirent parti de la perspective d'une manière prodigieuse dans des *Annonciations* où l'ange Gabriel et la Vierge ne se voient pas parce que des colonnes les en empêchent, ce qui ne s'aperçoit qu'après une analyse minutieuse. Piero della Francesca est un grand maître. On a pu retrouver ses traits de construction à Arezzo lors de restaurations. Il rédige dans le style euclidien un beau traité *De la perspective en peinture*, (réédition par Jean-Pierre Le Goff, In Medias Res, 1998). Pendant près de deux siècles, les traités sur la perspective seront écrits par des peintres ou des architectes ; par exemple, le livre d'Albrecht Dürer de 1525 : *Underweysung der Messung*, traduit par Jeanne Peiffer sous le titre *Géométrie* (Seuil, 1995), dont certains dessins sont très connus.

On s'est rapidement aperçu qu'on ne pouvait construire un tableau avec la rigueur d'une construction géométrique, car si le peintre peint son tableau avec un œil fixe, celui qui le regarde se déplace. L'image d'un cercle posé sur le sol est une ellipse ; si elle représente une assiette qui n'est pas en face du peintre, sa représentation dans le tableau est une ellipse inclinée. Dans une représentation de *La Cène*, les assiettes devant les apôtres assis aux extrémités de la table ne peuvent être dessinées inclinées, sinon on aurait l'impression que leur contenu va se répandre sur la table ; le peintre dessine donc des ellipses à grand axe horizontal fausses du strict point de vue de la perspective.

Il est cependant un cas où le peintre peut tirer partie de la position de son œil, c'est celui des trompe-l'œil où l'on impose à l'œil du spectateur une position bien précise. Des exemples fabuleux sont ceux des peintures d'Andrea Pozzo (1642-1709) dans l'église Saint-Ignace de Loyola de Rome. Voyez aussi les peintures sur le trottoir de peintres contemporains comme Julian Beever.

III. NICOLAS CHUQUET (1445 ? - 1488)

Nicolas Chuquet écrit le premier traité d'algèbre français, le *Triparty en la science des nombres* et un traité de géométrie pratique.

Le *Triparty* s'appuie sur une tradition de traités d'arithmétique marchande. Il innove en algèbre ; Chuquet utilise des exposants entiers positifs, négatifs ou nuls ; il énonce la règle des produits de puissances : $x^{m+n} = x^m \times x^n$; ses notations sont agréables : 1225 p 148^2 signifie $1225 + 148x^2$ et 8^3 par 7^{1m} égal 56^2 signifie : $8x^3 \times 7x^{-1} = 56x^2$.

Chuquet est aussi à l'origine de nos usages pour nommer les grands nombres, imposant les préfixes correspondant aux puissances du million : billion pour $(10^6)^2$, trillion pour $(10^6)^3$,… *le huytième ottyllion, le neufième nonyllion et ainsi des aultr's se plus oultre on vouloit proceder. Idem lon doit sauoir que ung million vault mille milliers de unitez, et ung byllion vault mille milliers de millions. Et tryllion vault mille milliers de byllions.* Ce système est aujourd'hui menacé par un autre système (adopté vers 1800 aux États-Unis) où billion, trillion, etc. désignent 10^9, 10^{12}, etc.

IV. JACQUES PELETIER DU MANS (1517-1582)

C'est Jacques Peletier du Mans qui propose d'appeler milliard 10^9 ; auteur d'un livre d'algèbre en 1554, Peletier du Mans est un auteur merveilleux de fraîcheur, aussi bien mathématicien que linguiste ou poète ; en voici quelques strophes.

A ceux qui blâment les mathématiques

Tant plus je vois que vous blâmez
Sa noble discipline,
Plus à l'aimer vous enflammez
Ma volonté encline.

Le ciel orné de tels flambeaux
N'est-il point admirable ?
La notice de corps si beaux
N'est-elle désirable ?
Car que chaut-il à qui l'honore
Qu'elle soit contemnée (méprisée) ?
Science, de cil qui l'ignore,
Est toujours condamnée.

V. L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ ET L'INTRODUCTION DES NOMBRES COMPLEXES

Nous avons vu qu'Omar Khayyam n'avait pu trouver de solution algébrique aux équations du troisième degré (voir p. 33). Personne ne fit mieux pendant les siècles suivants. C'est Scipione del Ferro (1465-1526) de Bologne qui y parvint enfin en 1515, date bien connue dans notre pays. Cette découverte qui a attendu si longtemps tient en une simple astuce de calcul. Il ne faut pas oublier qu'à cette époque le calcul littéral n'existait pas et qu'on écrivait *Quand les cubes et les inconnues sont égaux à des nombres* pour une équation de la forme $x^3 + px = q$ et qu'on ne discutait que sur des exemples numériques. Scipione del Ferro consigne sa découverte mais ne la publie pas. Jérôme Cardan (1501-1576) en prend connaissance en 1539 : c'est une histoire rocambolesque (voir **[ESC-Ga]**, chapitre II). Cardan explique la résolution de l'équation du troisième degré dans l'*Ars Magna* (1545). La première phrase n'oublie pas al Khwarizmi : *Cet art a son origine chez l'arabe Mahomet fils de Moïse, d'après le témoignage digne de confiance de Léonard de Pise*. L'idée de la résolution de l'équation $x^3 + px + q = 0$, avec nos notations algébriques, un 0 dans le second membre, toutes choses qui n'existaient pas en 1540, n'est pas difficile à comprendre : on pose $x = u + v$, avec $3uv + p = 0$, ce qui conduit à un système qui donne u^3 et v^3 comme solutions d'une équation du second degré, puis à la formule :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Une chose est vraiment choquante avec cette formule : quand on cherche à l'appliquer à des équations ayant trois racines réelles, on s'aperçoit que la quantité $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ est toujours négative ; la formule propose donc l'extraction d'une racine carrée de nombre négatif, ce qui paraît absurde. Ce cas est appelé *cas irréductible*. Quand Cardan donne un exemple de ce cas, il triche, devine l'une des solutions et arrive à une équation du second degré pour les deux autres. Mais il a dû y réfléchir, car il propose un exercice très curieux. Il s'agit de la recherche de deux nombres de somme 10, de produit 40, ce qui conduit à l'équation $x^2-10x+40=0$; Cardan reconnaît l'impossibilité de satisfaire l'équation, mais propose une solution *sophistiquée* : $5\pm\sqrt{-15}$.

C'est Raffaelle Bombelli (1526-1572 env.), un ingénieur qui s'occupe de grands projets d'assèchement de marais, qui comprend comment manier les nombres complexes. Il introduit le module, le conjugué, les parties réelles et imaginaires d'un nombre complexe. Il pose, sous forme de madrigal, les règles *du plus que moins*, comme il appelle $\imath$:

> Piu di meno via piu di meno, fa meno ($\imath\times\imath=-1$)
> Piu di meno via men di meno, fa piu ($\imath\times(-\imath)=1$)...

Il montre l'utilité de ces nombres pour la résolution de l'équation $x^3=15x+4$, pour laquelle la formule de Cardan donne : $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$, en trouvant (après un tour de passe-passe, hélas) que $a=2$, $b=1$ sont tels que $a+\imath b=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ et en en déduisant $x=(2+\imath)+(2-\imath)=4$, ce qui est tout de même plus agréable que la valeur initiale.

Il rédige *L'algebra* (1572) dans un style agréable et fluide, s'inquiètant du niveau de ses lecteurs, cherchant à montrer aux uns des exemples simples, aux autres des résultats plus difficiles.

Les nombres complexes sont donc nés dans le contexte bien précis de la résolution de l'équation du troisième degré. Jean Leray écrit à ce propos :

> Quand, au seizième siècle, Cardan ose calculer avec des nombres imaginaires, peut-il pressentir qu'ils seront indispensables, trois cents ans plus tard, au calcul des réseaux transportant l'énergie électrique ? Quand il invente, en mécanique, les joints portant son nom, peut-il soupçonner qu'il rend possible l'industrie automobile ?

VI. FRANÇOIS VIÈTE (1540-1603)

Sur Viète, on peut lire Barbin Évelyne, *François Viète : Un mathématicien français à la Renaissance*, Vuibert, 2006 ou aller sur le site créé par Jean-Paul Guichard à Parthenay. L'utilisation des lettres dans les calculs mathématiques marque une rupture profonde dans l'histoire des mathématiques. Viète utilise des lettres et explique comment calculer avec dans son *In artem analyticem Isagoge*, *Introduction dans l'Art analytique*, de 9 feuillets (18 pages) publié à Tours en 1591 ; après lui, en moins de 50 ans, tout le monde en fera autant sans difficulté ; l'économie de pensée est considérable, on peut se concentrer sur les calculs, les polynômes deviennent visibles et on unifie le traitement des équations. Toutefois, Viète est un peu trop optimiste sur sa nouvelle algèbre, croyant qu'elle pourra résoudre tous les problèmes !

Les textes de Viète diffèrent des nôtres, utilisant : *in* pour un produit, *æquetur* pour une égalité... Viète désigne les inconnues par des voyelles : A, E et les données par des consonnes : $B, C, D, F, G\ldots$ Ensuite, chaque lettre représente une grandeur et chaque grandeur a une « dimension » : ce peut être une longueur, un plan, un solide, etc. ; on ne peut additionner, soustraire que des grandeurs homogènes entre elles. Par exemple, quand Viète écrit : *Si A cubus + B 3in A quad. + D plano in A, æquetur Z solido* (si $A^3 + 3BA^2 + DA = Z\ldots$), A^3 est homogène à BA^2, DA, Z.

Viète est né dans une famille aisée de Fontenay-le-Comte, en Vendée. Il raconte qu'il a étudié les mathématiques seul, en amateur : *moi… que l'étude des mathématiques charme, quand j'ai du temps libre.* Ses qualités le conduisent à être un des personnages importants du royaume, conseiller de Henri III, puis de Henri IV.

En 1579, Viète publie un traité de trigonométrie avec des tables très précises, les méthodes pour les obtenir, l'expression de $\sin nx$, une valeur approchée de π avec neuf décimales exactes obtenue avec la méthode d'Archimède, etc.

Fin 1589, quand les combats font rage en France, des lettres chiffrées du commandant des troupes espagnoles en France sont confiées à Viète ; il parvient à en percer le sens ; peu de

Fig. 4.2 – François Viète

temps avant sa mort, il expliquera la nature algébrique de ses méthodes, comme de remarquer qu'une voyelle figure dans tout groupe de trois signes successifs.

La souplesse de son langage algébrique permet à Viète d'étudier des équations algébriques (les racines doubles, les relations entre coefficients et racines (supposées positives)), etc. En 1615, on publie son travail sur l'équation du troisième degré : le cas irréductible est ramené à la division d'un angle en 3, contournant ainsi la difficulté des radicaux non réels de la formule de Cardan (voir **[ESC-Ga]**, exercice 2.5).

Quittons Viète avec sa formule infinie donnant π :

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Chapitre 5

Le XVII^{e} siècle

I. L'INVENTION DES LOGARITHMES ET LE CALCUL DE TABLES

C'est en 1614 que John Neper (1550-1617) publie le résultat de ses recherches : *Mirifici logarithmorum Canonis descriptio*, pour montrer comment *rejeter du travail les nombres mêmes utilisés dans les multiplications, les divisions et les extractions de racines longues et difficiles et substituer à leur place des nombres qui se chargent des rôles de ceux-ci par l'intermédiaire des seules additions, soustractions, divisions par 2 ou par 3.*

Il s'agit bien d'une description d'une nouvelle méthode de calcul (voir **[FMPH-III]**) où les nombres sont remplacés par ce que Neper appelle leurs logarithmes (*d'arithme* : nombre et *logos* : raison). Neper imagine deux mobiles B et β, le premier se déplaçant à vitesse constante sur un axe en passant par les positions $C, D, E, \ldots$ aux moments 1, 2, 3,... en décrivant des intervalles égaux $AC, CD, DE, \ldots$ dans des temps égaux, le second se déplaçant sur un segment $[\alpha\omega]$ de façon qu'aux moments 1, 2, 3,... il occupe des positions γ, δ, ε telles que $\gamma\omega = k\alpha\omega$, $\delta\omega = k^2\alpha\omega$, etc., k étant fixé. Si b_n et β_n notent les positions de b et β à l'instant n, Neper définit le logarithme de $\beta_n\omega$ comme étant Ab_n.

La *Descriptio* ne précise pas comment obtenir les logarithmes des points dont l'extrémité n'est pas un des points α, β, γ ; il y a là effectivement une énorme difficulté pour *combler les trous.* Dans le texte publié après sa mort, en 1619, la *Constructio*, Neper explique qu'il utilise le mouvement, autrement dit, le temps est une valeur intermédiaire, jouant le rôle de la droite réelle ; les réels ne sont pas définis ni la notion de fonction, mais la cinématique permet de mettre en place une équation différentielle. Le calcul des tables de Neper est un bricolage qui s'ouvre vers l'analyse.

Henry Briggs (1561-1630) est beaucoup moins connu que Neper, à tort ; il est professeur de géométrie au Gresham College (une sorte de Collège de France) de Londres depuis 1596 et ses recherches en astronomie l'amènent souvent à des calculs particulièrement longs. Les choix de Neper ne lui semblent pas judicieux. Il lui écrit. Neper l'invite l'été 1615 et le reçoit chaleureusement. Lui non plus n'est pas content de ses choix ; il envisage les logarithmes décimaux ; mais il n'est pas en bonne santé et préfère terminer ce qu'il a commencé, encourageant Briggs à calculer ces nouveaux logarithmes. Briggs revient l'été suivant ; *J'en aurai fait de même l'année suivante, s'il eût été encore vivant.*

Les différentes méthodes de Briggs pour calculer les logarithmes décimaux sont variées et très ingénieuses (voir **[FMPH-III]**) : longs calculs pour obtenir avec une grande précision les logarithmes des nombres premiers de 2 à 97, méthode des différences finies (jusqu'aux différences sixièmes, un tour de force pour l'époque), etc. En 1624, Briggs publie une table partielle des logarithmes décimaux de 1 à 100 000, avec une précision de 14 décimales. Elle est complétée quatre ans plus tard par Adriaan Vlacq (1600-1667), avec une précision de 10 décimales seulement.

II. GALILÉE (1564-1642)

En 1610, Galilée publie le *Siderus Nuncius*, le *Messager céleste*. Il y raconte comment il a obtenu en quelques semaines *des observations infiniment stupéfiantes.* En mai 1609, il a entendu parler de lunettes astronomiques construites depuis peu par des Hollandais ; il en fabrique lui-même une grossissant 30 fois. Il la dirige vers la lune : une partie est éclairée par le soleil, l'autre pas ; la ligne de séparation ne lui apparaît pas régulière et il y a de petites zones éclairées dans la zone sombre. Galilée comprend que le phénomène est analogue à celui du soleil éclairant au couchant les sommets entourant une vallée déjà plongée dans l'obscurité et en déduit la hauteur d'une montagne lunaire : 4,987 miles, soit 7371 mètres, résultat remarquable de précision que Galilée accompagne d'un commentaire étonnant pour nous : *sur la terre, il n'existe pas de* *montagnes d'un seul mille à la verticale* ; on a donc connu la hauteur des montagnes de la lune, avant de connaître celle des montagnes des Alpes ! Puis Galilée découvre que la voix lactée est un *troupeau* d'étoiles et, aussi extraordinaire : *le 7 janvier 1610, à une heure de la nuit, comme j'observais le ciel à la lunette, Jupiter se présenta et … je reconnus que trois petites étoiles, assurément menues, mais très brillantes, étaient près de lui.* Ce sont les satellites de Jupiter ; ainsi la Terre n'était pas la seule planète du système solaire à avoir un satellite !

Galilée écrit dans *Il Saggiatore* (*L'Essayeur*, Paris : Les Belles Lettres, 1979), en 1623 :

> La philosophie est écrite dans cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'univers, mais on ne peut le comprendre si l'on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à connaître les caractères avec lesquels il a été écrit. Il est écrit dans la langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot.

Galilée marie pour toujours les mathématiques et physique, pressentant les futures modélisations mathématiques des lois de la nature.

On connaît la condamnation de Galilée le 22 juin 1633, pour avoir pris vigoureusement parti pour le système copernicien. Il est assigné à résidence pour les dernières années de sa vie. C'est alors qu'il écrit *Discours concernant deux sciences nouvelles*, jetant les bases de la mécanique rationnelle.

III. AUTOUR DE MERSENNE (1588-1648)

Marin Mersenne naît à Oizé, à 24 km du Mans (voir : Beaulieu Armand, *Mersenne le grand minime*, Bruxelles, Fondation Peiresc, 1995). Sa famille est aisée. Il se souviendra plus tard du plaisir de voir battre le blé et critiquera les sorcières soufflant sur l'herpès ou récitant des pater. C'est un amateur de mathématiques enthousiaste :

> Il n'y a point de sciences, après la théologie, qui nous proposent et nous fassent voir tant de merveilles comme font les mathématiques, lesquelles élèvent l'esprit par dessus soi-même et le forcent à reconnaître une divinité.

Il est religieux, de l'ordre des Minimes ; son couvent est sur l'actuelle place des Vosges de Paris. Il y entretient une correspondance abondante avec tous les scientifiques de son temps, les questionnant, communiquant aux uns les travaux des autres, etc. À partir de 1635, il organise des réunions régulières entre les savants, le jeudi le plus souvent et à son couvent. Par exemple, en 1637, Roberval reçoit une lettre de Fermat un lundi, la communique le jeudi suivant *à l'assemblée de nos mathématiciens*, où elle est étudiée et admirée ; Étienne Pascal est chargé d'en fournir des copies pour tous.

En 1644, Mersenne donne une liste presque exacte de nombres premiers de la forme $2^n - 1$, avec $n \leqslant 257$. Les nombres premiers de cette forme sont maintenant appelés nombres de Mersenne, et c'est parmi eux qu'on a trouvé les plus grands nombres premiers connus, actuellement 44, pour $n = 2,3,5,7,13,17,19,31,\ldots$, les plus grands étant trouvés au rythme de un par an à peu près : le dernier, pour $n = 32\,582\,657$, trouvé le 4-9-2006, comporte presque dix millions de chiffres.

Au retour d'un voyage en Italie de 1644 à 1645, Mersenne fait connaître en France les expériences sur le baromètre. C'est l'origine des expériences que propose Pascal, réalisées le 19 septembre 1648 au Puy-de-Dôme. Mersenne n'aura pas connaissance de ces mesures, mort le premier septembre, regretté de tous les savants de son époque, pour avoir bu trop d'eau fraîche avec Descartes par un chaud jour d'août.

IV. GIRARD DESARGUES (1591-1661)

Girard Desargues est moins connu que Pascal, Descartes ou Fermat. C'est cependant un géomètre original qui apporte des idées très nouvelles et qui ne seront reconnues qu'au XIXe siècle (voir Taton René, *L'Œuvre mathématique de G. Desargues*, PUF, 1951 et Dhombres Jean, Sakarovitch Joël, *Desargues et son temps*, Blanchard, 1994). Il est né à Lyon ; sa famille vient de Condrieu, un village au bord du Rhône, en face de Vienne, où il possédait des vignes ; son vin avait-il ce léger parfum de violette qu'on lui connaît aujourd'hui ?

Les publications de Desargues sont des opuscules de quelques pages, écrits à l'approche de ses 50 ans, tirés à très peu d'exemplaires, avec un titre en général curieusement long ; il n'en reste que très peu d'originaux. Le premier, de mai 1636, reprend le problème de la représentation en perspective, traité pour la première fois par un grand mathématicien, à la fois sur le plan théorique et le plan pratique.

Le grand texte de Desargues est le *Brovillon proiect d'vne atteinte avx euenemens des rencontres du Cone auec vn Plan* (publié en 1639, 30 pages, 50 exemplaires). Desargues y définit une *ordonnance* de lignes droites (ce que nous appelons un faisceau) comme une famille de droites soit toutes concourantes en un point, soit toutes parallèles, et cela revient au même car Desargues introduit un *point à l'infini* pour chaque droite (un seul point pour les deux directions) : *Icy toute ligne droite est entendüe alongée au besoin à l'infiny d'une part et d'autre* ; ce qui est absolument remarquable et nouveau, c'est que Desargues traite ce point à l'infini sans le distinguer des points à distance finie, sans se soucier d'une *existence réelle* de ce point. En quelques pages, tout est mis en place pour une nouvelle géométrie, la géométrie projective.

En 1640, Desargues écrit un traité expliquant comment tailler les pierres d'une voûte *biaise* dans un mur en *talus*, ce qui signifie que la voûte est de travers et que le mur n'a aucune raison d'être vertical. Desargues se place donc dans le cas le plus général et il crée, en 4 pages et 4 planches, les méthodes de tracés par rabattemment sur un plan de la géométrie descriptive, plus d'un siècle avant Gaspard Monge (1746-1818) ; il reste trois exemplaires de ce *Brouillon Project d'Exemple d'une Manière universelle du S. G. D. L. touchant la pratique du trait à preuves pour la coupe des pierres en l'Architecture…* dont un à la Biliothèque municipale de Quimper. Les initiales S.G.D.L. signifient Sieur Girard Desargues Lyonnais.

Enfin, adjointes à un traité de 1648 du graveur Abraham Bosse (1604-1676), un de ceux qui défendaient ses méthodes, figurent le *théorème de Desargues* et la notion de birapport qui jouent un rôle fondamental en géométrie.

V. PIERRE DE FERMAT (1601 OU 1607-1665)

Le *premier homme du monde* écrivait Pascal le 10 août 1660. Et je dois en parler en quelques lignes ! La date de naissance de Pierre de Fermat est l'objet d'une discussion récente. On donne habituellement 1601, mais Klaus Barner a donné en 2001 plusieurs arguments pour que cette date soit changée en 1607 (voir Barner Klaus, *How old did Fermat become* ?, *International Journal for History and Ethics of Natural Sciences*, octobre 2001), en particulier que la fin de son épitaphe, faite par ses enfants, indique que Fermat avait 57 ans à sa mort à Castres, le 12 janvier 1665.

Fermat est d'une famille aisée ; il fait des études de droit, achète très cher une charge de Conseiller au Parlement de Toulouse en 1630. Son travail est particulièrement lourd et, toute sa vie, il aura peu de temps pour s'occuper de physique, de mathématiques ou de littérature.

L'œuvre de Fermat nous est connue par quelques opuscules, sa correspondance, des publications posthumes de son fils. La première lettre conservée de Fermat est une réponse à une lettre perdue de Mersenne, le 26 avril 1636 :

> Je vous reste beaucoup obligé de la faveur que vous me faites espérer de conférer par lettres, et n'est pas une des moindres obligations que j'aie à M. de Carcavi qui me l'a procurée. Je serai bien aise d'apprendre par votre moyen tous les Traités ou Livres nouveaux de Mathématiques qui ont paru depuis cinq ou six ans…

Fig. 5.1 – Pierre de Fermat

Les premières lettres de Fermat à Mersenne exposent en particulier la *Théorie de la recherche du maximum et du minimum* mise au point vers 1629 et qu'il applique à la détermination des tangentes à une courbe ; ce sont les débuts du calcul différentiel. La quantité variable envisagée par Fermat dans ses premiers exemples est un polynôme ; elle a une valeur extrémale en un nombre inconnu a. La méthode de Fermat est algébrique et inspirée d'un travail de Viète sur la *synchrèse* ; elle revient à résoudre $P'(a) = 0$.

Fermat calcule les aires sous les courbes $y = x^a$ avec a rationnel positif ou négatif, -1 étant exclu, allant nettement plus loin que Cavalieri ; ce sont les débuts du calcul intégral. Il pose aussi les bases de la géométrie analytique, indépendamment de Descartes fixant des axes de coordonnées pour écrire les équations de certains lieux géométriques.

En optique, Fermat pose le principe *que la nature agit toujours par les voies les plus courtes,* montrant que ce principe implique les deux lois de Descartes et fondant ce qu'on appelle maintenant le calcul des variations. Si Fermat a marqué le monde mathématique, c'est surtout par ses résultats géniaux en théorie des nombres. Même Pascal ne pouvait le comprendre : *Cherchez ailleurs qui vous suive dans vos inventions numériques… cela me passe de loin* (1654). En août 1659, il écrit à Carcavi une *Relation des nouvelles découvertes en la science des nombres* énumérant des résultats obtenus par sa méthode de descente infinie :

– Tout nombre premier p de la forme $4k + 1$ s'écrit comme somme de deux carrés : $p = a^2 + b^2$.

– Tout entier est somme de quatre carrés au plus.

– Une équation de la forme $x^2 - dy^2 = 1$, avec d sans facteur carré, a une infinité de solutions (une erreur d'Euler a donné à ces équations le nom de John Pell (1611-1685) ; on dit parfois équation de Pell-Fermat, mais la mention de Pell est encore de trop !) Etc.

Fermat conclut : *Voilà sommairement le compte de mes rêveries sur le sujet des nombres. Je ne l'ai écrit que parce que j'appréhende que le loisir d'étendre et de mettre tout au long toutes ces démonstrations me manquera… Et peut-être la postérité me* *saura gré de lui avoir fait connaître que les Anciens n'ont pas tout su…* Il termine superbement : *Multi pertransibunt et augebitur scientia* (Beaucoup passeront et la science augmentera).

Parlons enfin de la célébrissime note de Fermat, en marge de la question II. VIII (qui demande d'écrire un carré comme somme de deux carrés) de son Diophante. Elle peut dater des années 1640.

> Cependant, il est impossible de partager un cube en deux cubes, un bicarré en deux bicarrés et, en général, une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré. J'en ai découvert une démonstration vraiment merveilleuse. La marge est trop étroite pour la contenir.

Fermat n'a jamais fait état de ce problème qui allait passionner les mathématiciens et conduire à de multiples développements, sous le nom de grand ou dernier théorème de Fermat (voir p. 109). Fermat disait connaître une démonstration du cas $n = 3$ et avait démontré le cas $n = 4$.

VI. RENÉ DESCARTES (1596-1650)

L'édition en XI volumes de 700 pages environ des *Œuvres complètes* de Descartes vient d'être republiée par la librairie J. Vrin en 1996. Descartes naît en Touraine. À l'âge de 10 ans, il part étudier au collège de La Flèche, où il restera huit ans : *je me plaisais surtout aux mathématiques à cause de la certitude et de l'évidence de leurs raisons… je m'étonnais de ce que leurs fondements étant si fermes et si solides, on n'avait rien bâti dessus de plus relevé*. Il joue au militaire, sans prendre part aux horribles combats de la guerre de trente ans. Le 10 novembre 1619 a lieu cette scène célèbre que Descartes a raconté dans le Discours de la méthode. Dans une chambre bien chauffée que Descartes appelle un *poële* (Raymond Queneau fait dire à Sally Mara : *À poêle, Descartes, à poêle*), des méditations, et des rêves, vont décider du sens de sa vie : *pour toutes les opinions que j'avais reçues jusques alors en ma créance, je ne pouvais mieux faire que d'entreprendre une bonne fois de les en ôter, afin d'y en remettre par après ou d'autres meilleures, ou bien les mêmes lorsque je les aurais ajustées au niveau de la raison*. Enthousiasme juvénile, mais Descartes s'aperçut rapidement que ce n'était pas si facile de quitter ses opinions anciennes…

En 1628, Descartes part pour la Hollande : *Quel autre pays où l'on puisse jouir d'une liberté si entière, où l'on puisse dormir avec moins d'inquiétude* et où on puisse *vivre aussi solitaire et retiré que dans les déserts les plus écartés.* Descartes a une liaison avec la servante d'un libraire, en a une fille, Francine, *conçue à Amsterdam le dimanche 25 octobre de l'an 1634.* À la douleur de son père, elle meurt de la scarlatine à cinq ans.

Fig. 5.2 – René Descartes

La publication du *Discours de la méthode*, en 1637, est un grand moment de l'histoire de la philosophie. Le texte repose constamment sur des idées mathématiques : *Ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes s'entresuivent en même façon.* Il est naturel que le premier traité du *Discours de la méthode* soit *La Géométrie*, moins de 100 pages, divisé en trois livres, écrit en français, alors que le latin était encore la langue des scientifiques.

Au début du premier livre, Descartes règle définitivement les problèmes des liens entre les nombres et la géométrie : il utilise un segment de longueur 1 et reprend les idées de Bombelli et Omar Khayyam (voir p. 33). Descartes choisit, sans dire qu'il change les conventions de Viète, de noter par des lettres minuscules x, y, z les quantités inconnues, $a, b, c, \ldots$ les connues. Cette nouvelle convention s'impose.

Le second livre aborde le problème de la classification des lignes courbes. C'est là que Descartes introduit (indépendamment de Fermat) des coordonnées qu'on appelle depuis cartésiennes (Descartes s'écrit aussi *des Cartes*) ; les mots ordonnée et abscisse ne seront proposés que plus tard, le premier par Pascal (*Histoire de la roulette*, 1658). Une restriction est implicite : Descartes s'arrange pour que ses x et y soient toujours positifs. La classification ancienne des courbes vole en éclats :

> Les anciens ont fort bien remarqué qu'entre les problèmes de Géométrie, les uns sont plans, les autres solides, et les autres linéaires : c'est à dire que les uns peuvent être construits en ne traçant que des lignes droites et des cercles ; au lieu que les autres ne le peuvent être, qu'on n'y emploie pour le moins quelque section conique ; ni enfin les autres, qu'on n'y emploie quelque autre ligne plus composée. Mais je m'étonne de ce qu'ils n'ont point outre cela distingué divers degrés entre ces lignes plus composées, et je ne saurais comprendre pourquoi ils les ont nommées mécaniques plutôt que géométriques.

Descartes propose une classification plus claire, basée sur le degré des inconnues dans les équations.

Il a plein d'autres idées nouvelles, comme sur le réflexe de Pavlov : *Si on avait bien fouetté un chien cinq ou six fois au son du violon, sitôt qu'il ouirait une autre fois cette musique, il commencerait à crier et à s'enfuir*, ou sur les lois de réflexion et de réfraction (connues de Ibn Sahl (vers 940-1000) et de Snel (1580-1626)). La jeune reine de Suède, Christine (1626-1689), fantasque et passionnée, cause la mort de Descartes ; elle l'invite en Suède, lui demande des leçons de philosophie à cinq heures du matin ; lui qui depuis longtemps se levait très tard attrape une pneumonie.

VII. BLAISE PASCAL (1623-1662)

Blaise Pascal naît à Clermont (à cette époque, Clermont et Montferrand n'étaient pas fusionnées). Sa mère meurt quand il a 3 ans. Son père, Étienne Pascal (1588-1651) est un haut magistrat. En 1631, il quitte l'Auvergne pour Paris avec ses enfants ; il se consacre à leur éducation, leur enseigne les langues et littératures anciennes, ainsi que les sciences. Blaise est très brillant, apprend et comprend tout. En 1635, Étienne fréquente l'Académie mise en place par Mersenne. Il y emmène Blaise, 13 ans et très admiré.

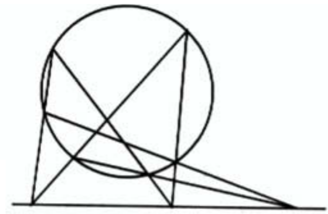

Fig. 5.3 – L'Hexagramme mystique de Pascal

Le premier travail de Pascal est un court *Essay pour les coniques* où il rend hommage à Desargues et énonce son fameux théorème sur l'hexagone inscrit dans un cercle : les côtés opposés se coupent sur une droite. Il définit les coniques comme intersection d'un cône à base circulaire par un plan, ses droites sont infinies dans les deux sens, la parabole a une tangente en son point à l'infini image de la tangente au cercle au point sans image. Même si cela nous paraît presque aller de soi, c'est une révolution dans la géométrie : l'espace est devenu infini avec Pascal et Desargues.

En 1640, Étienne Pascal s'installe à Rouen comme commissaire pour la levée des impôts. Blaise entreprend de l'aider pour faire ses calculs. En février 1644, il présente un premier exemplaire de ce qu'on appellera la *Pascaline*, à six roues décimales. D'autres modèles suivront. La sœur de Pascal souligne le côté absolument nouveau de l'invention : *d'avoir réduit en machine une science qui réside tout entière dans l'esprit* et la possibilité de calculer sans *savoir aucune règle d'arithmétique.*

En 1654, Pascal travaille sur les propriétés des combinaisons et réunit ses propositions dans le *Traité du triangle arithmétique* (le triangle que nous appelons maintenant triangle de Pascal était déjà connu des Arabes et des Chinois). Pascal y donne une rédaction très éclairante d'un raisonnement par récurrence : *Quoy que cette proposition ait une infinité de cas, j'en donneray une démonstration bien courte, en supposant 2 lemmes. Le 1, qui est évident de soy-mesme* est que la proposition soit vraie pour la base 1 ; le second est que si cette proposition est vraie *pour une base quelconque, elle se trouvera nécessairement vraie dans la base suivante.*

Antoine Gombaud, Chevalier de Méré (1607-1684) avait posé à Pascal le problème de deux joueurs jouant une certaine somme d'argent S ; ils s'engagent dans une série de parties ; le premier qui en aura gagné un certain nombre N recevra la somme totale. Mais le jeu s'arrête avant que l'un des deux joueurs ait gagné N parties ; comment répartir S entre les deux joueurs de manière équitable ? Pascal explique ce *problèmes des partis* à Fermat ; leur correspondance fonde la théorie des probabilités. Par exemple, le 29 juillet 1654, Pascal écrit : *Je ne doute plus maintenant que je sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.* Quand Pascal écrit : *Je vous le dirais en latin, car le français n'y vaut rien…*, la traduction en français qu'il en donne est parfaitement claire.

Fig. 5.4 – Blaise Pascal

Évoquons d'autres contributions majeures de Pascal aux mathématiques. D'abord, les traités fondant le calcul intégral et critiquant les indivisibles en vogue à son époque : *Ainsi un espace, quelque petit qu'il soit, ne peut-il pas être divisé en deux, et ces moitiés encore ? Et comment pourrait-il se faire que ces moitiés fussent indivisibles sans aucune étendue, elles qui, jointes ensembles ont fait la première étendue.* Ensuite, *De l'esprit géométrique* et *De l'art de persuader* où Pascal dégage les bases logiques des raisonnements mathématiques :

> Cette véritable méthode, qui formerait des démonstrations dans la plus haute excellence, s'il était possible d'y arriver, consisterait en deux choses principales : l'une, de n'employer aucun terme dont on n'eût auparavant expliqué nettement le sens ; l'autre, de n'avancer jamais aucune proposition qu'on ne démontrât par des vérités déjà connues…

Quelle langue et quel esprit superbes !

VIII. LA MESURE DE LA TERRE DE JEAN PICARD (1620-1682)

Jean-Baptiste Colbert (1619-1683) fonde l'Académie royale des sciences en 1666 (voir Pierre Gauja, *L'Académie des sciences de l'Institut de France*, Gauthier-Villars, 1934).

L'un des premiers grands travaux de l'Académie, en 1670, sera la mesure d'un degré de méridien terrestre par Jean Picard (pour cette mesure, voir Pascal Quinton, Activités mathématiques à propos de la mesure de la terre, *in* **[ACT-13]**) pour, écrit Picard, *l'utilité de la Géographie en ce qui concerne les différences des Longitudes, mais particulièrement encore pour l'usage de Navigation, d'autant plus que jusqu'à présent, personne ne s'était avisé de se prévaloir du grand avantage qu'on pouvait tirer des Lunettes d'approche pour l'exécution de ce dessein…*

L'idée de la mesure est la même qu'au temps d'Ératosthène : mesurer un arc de méridien le plus précisément possible, en se tournant vers les étoiles pour connaître les latitudes, mais en utilisant une méthode de triangulation pour les mesures au sol. Tous les calculs sont basés sur une simple formule de trigonométrie : dans un triangle ABC, le rapport d'un côté au sinus de l'angle opposé est constant :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Picard obtient 57057 toises, soit 40033 km, pour la longueur d'un degré terrestre. Sa méthode sera reprise pour les différentes mesures du XVIII[e] siècle et par Delambre et Méchain pour la détermination du mètre.

IX. ISAAC NEWTON (1643-1727)

Newton est né le 4 janvier 1643 (le calendrier grégorien n'ayant été introduit en Angleterre qu'en 1752, la date anglaise est Noël 1642) dans une famille de fermiers analphabètes. C'était dans un petit village à 200 kilomètres au nord de Londres ; son père venait de mourir ; Isaac était prématuré et chétif. Deux ans plus tard, sa mère se remarie et le confie à sa grand-mère. Newton hait son beau-père et sa mère, *menaçant de les brûler vifs dans leur maison* raconterat-il ; il souffre de n'avoir pas connu son père. Quand son beau-père meurt, il a 10 ans.

En 1661, il entre à l'Université voisine de Cambridge. Il vient juste de terminer ses études, en avril 1665, quand une épidémie de peste frappe l'Angleterre ; l'Université ferme et Newton se réfugie dans son village.

C'est là, entre 1664 et 1666, qu'il conçoit, seul, un pan après l'autre, une grande partie de son œuvre : séries, méthode des fluxions (une des origines du calcul infinitésimal), théorie des couleurs, théorie de la gravitation (voir Marco Panza, *Newton et les origines de l'analyse : 1664-1666*, Blanchard, 2005). Il était, dira-t-il, dans *l'âge créatif*. Il obtient, par exemple, la formule du binôme :

$(1+x)^a = 1 + ax + a(a-1)x^2/2 + a(a-1)(a-2)x^3/3! + \ldots$

pour a rationnel positif ou négatif, en déduit l'intégration de $1/(1+x) = (1+x)^{-1}$ et $1/\sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{-1/2}$, le développement de $\ln(1+x)$ et $\arcsin(1+x)$, puis ceux de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$, calcule des logarithmes avec une grande précision, etc.

Newton garde d'abord pour lui sa théorie de la gravitation, le calcul du mouvement de la lune ne lui donnant pas les résultats attendus. En 1682, il prend connaissance de la mesure du rayon de la Terre de Picard ; elle lui donne des résultats satisfaisants. Edmond Halley (celui de la comète, 1656-1742) va alors jouer un rôle important ; il pousse Newton à rédiger ses principaux résultats. Newton travaille jour et nuit. Halley s'occupe de tout, relit, corrige, finance, sert d'intermédiaire. Enfin paraissent, en latin, en 1687, un des ouvrages scientifiques les plus célèbres de tous les temps, les *Principia* (Principes mathématiques de la philosophie naturelle, le texte complet est donné dans Hawking Stephen, *Sur les épaules des géants*, Dunod, 2003). Les *Principia* sont aussi le début d'une nouvelle science, la mécanique céleste, qui allait permettre d'expliquer dans le détail les mouvements planétaires et cométaires. Newton résout le problème des mouvements de deux corps isolés soumis à l'attraction universelle et aborde le problème des trois corps, problème central des travaux futurs, qui montre que, si les équations sont simples, les mouvements peuvent être très compliqués.

Newton a été sujet à des dépressions nerveuses (1678, 1693). Il était absolument détestable avec ses rivaux scientifiques (Robert Hooke (1635-1703) pour la théorie de la gravitation, Leibniz pour les calculs différentiel et intégral). Terminons plutôt par ce rapport comme maternel à la science : *J'ai seulement joué comme un garçon au bord de la mer, m'amusant à ramasser de temps en temps un galet plus lisse, ou un coquillage plus joli que les ordinaires, pendant que le grand océan de la vérité s'étendait devant moi, inexploré.* On ne lui connaît aucune aventure sentimentale.

X. GOTTFRIED VON LEIBNIZ (1646-1716)

Leibniz s'est intéressé à des sujets très différents, philosophie, religion, géologie, chimie, etc. Ses manuscrits montrent son cheminement pour aboutir, le 21 novembre 1675, à l'écriture $\int f(x)\,dx$ (le $\int$ est l'initiale allongée de *Summa omnium*). Il voit l'intégration comme une opération générale et comprend les rôles inverses des opérateurs d et $\int$. Un an plus tard, il écrit $d(x^n) = nx^{n-1}\,dx$ pour n entier ou fractionnaire. Il souligne les aspects algébriques de son calcul : $d(x+y) = dx + dy, d(xy) = xdy + ydx$. Il avance hardiment, définissant des termes comme ddx, $dddx$, $\int\int y$ (pour un solide), dy/dx, etc. Mais il lui manque la rigueur : il peut seulement dire qu'on peut faire disparaître dans une somme les termes incomparablement petits. Leibniz ne connaît pas la nature exacte de ses infiniment petits et infiniment grands : il se pourrait qu'ils *soient imaginaires, mais aptes à déterminer le réel.* Bientôt, les frères Bernoulli, Jean (1667-1748) et Jacques (1654-1705), comprennent et diffusent le nouveau calcul, en particulier à travers le célèbre *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes et des courbes*, publié en 1696 par le marquis de l'Hospital (1661-1704). Le nouveau calcul permet de résoudre de nombreux problèmes sans aucun effort d'imagination, comme l'écrit, en 1691, Leibniz à Huygens.

En 1694, Leibniz introduit les primitives définies à une constante arbitraire près, *moyen universel de donner des solutions générales aux problèmes différentiels.* La conception et les notations de Leibniz s'imposent, celles de Newton sont publiées trop tard pour avoir de l'influence.

Pour son entrée à l'Académie des sciences de Paris, en 1701, Leibniz expose le système de numération en base 2 qu'il a conçu en 1679.

Leibniz est revenu à plusieurs reprises sur son projet de concevoir une langue universelle, algébrique, écrite avec des symboles, basée sur des concepts primitifs simples, un *alphabet des pensées humaines*, s'appuyant sur des règles de déduction pour découvrir de nouvelles vérités ; *Sans cela, notre esprit ne saurait faire un long chemin sans s'égarer*. Il devance les travaux de logique des propositions qui viendront bien plus tard.

Chapitre 6

Le XVIII^{e} siècle

I. LEONHARD EULER (1707-1783)

Euler est le scientifique qui a le plus écrit, et sur des sujets très divers ; ses œuvres complètes comprennent plus de 800 travaux, occupent près de 100 volumes.

La vie d'Euler est relativement simple. Son père est pasteur et souhaite voir son fils faire de même, sa mère est d'une famille d'humanistes. Jean Bernoulli, ami de son père, conseille et guide le jeune Leonhard, qui a du goût pour les mathématiques, dans ses lectures. En 1726, Leonhard se voit offrir un poste à l'Académie de Saint Pétersbourg (qui vient d'être crée par Pierre le Grand (1672-1725)). En 1735, il tombe gravement malade ; trois ans plus tard, il perd l'usage de l'œil droit. En 1741, il répond à l'invitation de Frédéric II de rejoindre l'Académie de Berlin ; son activité est extraordinaire, aussi bien scientifique que dans les multiples tâches pour lesquelles il est sollicité. Il retourne à Saint Petersbourg en 1766. Une opération sur son œil gauche ne réussit pas et il devient complètement aveugle en 1771. Euler, qui a une mémoire prodigieuse continue à travailler ; il est aidé par deux de ses fils et plusieurs autres mathématiciens, discutant avec eux et les laissant rédiger ses idées. Il produira ainsi la moitié de toute son œuvre. Le 18 septembre 1783, il travaille le matin comme d'habitude, donne une leçon de mathématiques à un de ses petits-fils, discute d'Uranus qui vient d'être découverte, a une attaque cérébrale à cinq heures du soir et juste le temps de dire qu'il meurt.

Euler a fortement influencé le cours des mathématiques, dans toutes les branches de l'analyse et de l'algèbre, en mécanique, en musique, etc. Il est le premier à reprendre les travaux de Fermat en théorie des nombres. Posons :

$$\zeta(s) = \sum_{n>0} 1/n^s.$$

En 1735, Euler montre que :

$$\zeta(2) = \pi^2/6.$$

Il montre même beaucoup plus, obtenant $\zeta(n)$ pour n pair : $\zeta(4) = \pi^4/90$, etc., formules dans lesquelles il fera apparaître les nombres de Bernoulli (Jacques). La valeur de $\zeta(n)$ pour n impair lui échappe ; Roger Apéry (1916-1994) a montré en 1978 que ce n'était pas un nombre rationnel ; on ne sait rien de plus depuis. Un autre résultat extraordinaire et porteur de développements futurs est une formule de 1737, pour $s > 1$:

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} (1 - 1/p^s)^{-1}$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers, formule qui s'obtient simplement en développant chacun des termes du produit avec la formule $1/(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

L'*Introductio in Analysin Infinitorum* (1748) est un livre de près de 800 pages. La grande innovation est de tout baser sur la notion de fonction : *Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.* Ce sont des exemples qui précisent ce que signifie *expression analytique composée.* C'est Euler qui impose la notation e et donne les célèbres formules :

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{x\sqrt{-1}} + \mathrm{e}^{-x\sqrt{-1}}}{2} \qquad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{x\sqrt{-1}} - \mathrm{e}^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$\mathrm{e}^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x \qquad \mathrm{e}^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\sin x$$

En posant $x = \pi$, on obtient $\mathrm{e}^{\iota\pi} = -1$, formule fascinante reliant e, ι (notation d'Euler de 1777), π.

Faisons juste mention :

– de la définition, en 1735, de la constante d'Euler $\gamma = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n - \ln(n))$, très difficile à calculer avec précision et dont on ne sait toujours pas si elle est irrationnelle ou non ;

– de sa résolution du problème des ponts de Königsberg qui préfigure à la fois la topologie et la théorie des graphes…

… et tant d'autres résultats. Quelle énergie et quel génie !

II. ALEXIS CLAIRAUT (1713-1765)

Depuis les morts de Pascal et Fermat, il n'y avait pas eu de très grands mathématiciens en France. Alexis Clairaut est le second de 21 enfants ; le premier étant mort en nourrice, sa mère décide de le nourrir elle-même. Son père enseigne les mathématiques et les lui apprend dès son plus jeune âge. Il est très précoce. À 10 ans, il lit le traité du marquis de l'Hospital et se cache avec son jeune frère pour travailler la nuit. L'Académie des sciences l'accueille à 13 ans à peine pour lire son premier mémoire, à 18 ans, comme membre (le plus jeune jamais élu à l'Académie).

En 1735-37, il organise et participe avec Maupertuis à l'expédition en Finlande pour mesurer un degré de méridien terrestre. Avec les mesures faites par Bouguer (1698-1758) et La Condamine (1701-1774) en Équateur au même moment, elles établiront que la terre n'est pas sphérique, mais aplatie aux pôles. En 1741, il publie ses *Éléments de géométrie*, présentés sous une forme intuitive et qui sont toujours à relire pour enseigner aujourd'hui. Suivent des *Éléments d'algèbre*, en 1746.

Parmi les travaux de Clairaut les plus célèbres figurent l'étude des mouvements de la Lune et, en 1759, le calcul de la date du retour de la comète de Halley avec moins d'un mois d'erreur. C'est le triomphe des théories de Newton.

III. JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717-1783)

Sa mère, la marquise de Tencin, l'abandonne sur les marches de l'église Saint Jean Le Rond, à Paris. Il restera jusqu'à 48 ans chez la femme qui le recueille. Ses Œuvres complètes sont en cours de publication.

Dans les années 1740, il s'occupe de mécanique, étudiant le problème des trois corps, de mécanique des fluides, de philosophie.

Il cherche à être plus rigoureux en analyse ; on connaît son critère de convergence : $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ d'une série de terme général u_n strictement positif. Il tente, en 1746, de montrer le théorème que nous appelons théorème de d'Alembert, mais son idée ne sera menée à terme que 100 ans plus tard. La description du mouvement d'une corde qui vibre, tendue entre deux points fixes, le conduit à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

($a = 1$ pour d'Alembert) que ses prédécesseurs n'avaient pas trouvée et qui va avoir une grande importance dans le développement des mathématiques. Il donne une infinité de solutions sous la forme : $f(x - at) + g(x + at)$, f et g étant des fonctions déterminées par la forme initiale de la corde, décrite par une fonction quelconque, et la vitesse de ses points.

Se pose le problème de savoir ce que sont les fonctions quelconques. D'Alembert pense à des expressions analytiques. Euler donne un autre avis : *la première vibration dépend de notre bon plaisir*… et les deux savants s'engagent dans une longue controverse.

Enfin, d'Alembert est célèbre pour l'énorme travail qu'il accomplit en dirigeant l'*Encyclopédie* avec Diderot, rédigeant le *Discours préliminaire* (en 1751) et beaucoup d'articles mathématiques. L'œuvre aura une importance capitale pour le développement des idées nouvelles en France et en Europe ; c'est une des sources de la Révolution française et un modèle pour toutes les encyclopédies qui suivent.

IV. JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736-1813)

Lagrange est né à Turin, dans le Piémont. Il est français pour les Français, italien pour les Italiens. Il se forme seul aux mathématiques. Ses premiers envois à Euler le font reconnaître et il est élu à l'Académie de Berlin en 1756 ; quand Euler quitte Berlin, en 1766, il accepte l'offre de Frédéric II (conseillé par d'Alembert) et vient le remplacer.

Fig. 6.1 – Joseph-Louis Lagrange

En 1770, il donne une démonstration d'un énoncé dont Fermat affirmait avoir une démonstration : *tout nombre entier est la somme de quatre carrés d'entiers*, comme $43 = 5^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2$ (basée sur le fait que le produit de deux sommes de quatre carrés est une somme de quatre carrés, d'après une identité d'Euler). Il reprend le problème de la résolution algébrique des équations, dans un mémoire de plus de 200 pages, dégageant (voir **[ESC-Ga]**) les principes qui ont permis de résoudre les équations de degré 2, 3 et 4 et ouvrant la voie aux idées d'Abel et Galois. Le théorème de Lagrange disant que l'ordre d'un sous-groupe d'un groupe fini divise l'ordre de ce groupe vient d'un résultat de ce texte. Les progrès de la théorie des nombres au dix-huitième siècle sont dus à deux mathématiciens seulement : Euler et Lagrange.

Sa femme meurt en 1783, puis Frédéric II. Lagrange est terriblement déprimé, souffre de la solitude. Il accepte l'offre de venir en France comme membre de l'Académie ; il publie, en 1788, sa *Méchanique analitique* prête depuis plusieurs années. C'est un grand livre qui renouvelle les problèmes de la mécanique en les posant de façon purement mathématique.

Chapitre 7

En France, autour de la Révolution

I. LE MARQUIS DE CONDORCET (1743-1794)

Condorcet tient son nom d'un village de la Drôme. C'est un élève brillant, remarqué par d'Alembert. Ses premières publications, sur des équations différentielles et le calcul intégral, lui valent d'entrer à l'Académie des sciences à 26 ans. Il s'engage dans la politique aux côtés de Turgot dont il défendra les options économiques. Il cumule peu à peu des fonctions importantes et prenantes : secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, membre de l'Académie française, inspecteur général de la monnaie. Il développe le calcul des probabilités ; ses études sur les systèmes de vote le conduisent à découvrir un paradoxe célèbre : des choix de classement de trois candidats A, B, C, peuvent aboutir à ce qu'à la majorité, on ait $A > B$, $B > C$… et aussi : $C > A$.

II. GASPARD MONGE (1746-1818)

Monge est Bourguignon, né à Beaune (voir François Pairault, *Gaspard Monge, le fondateur de polytechnique*, Tallandier, 2000). Ses talents sont reconnus et on lui propose d'enseigner le dessin et la coupe des pierres à l'École du génie de Mézières (dans les Ardennes), la première école destinée à la formation des ingénieurs militaires ; comme il n'est pas d'origine noble, il n'est pas question de lui confier d'autres tâches ! Il étonne ses supérieurs en inventant de nouvelles techniques de tracé pour la construction des fortifications : c'est le début de la géométrie descriptive.

Monge est doué pour tout. Ses premiers travaux mathématiques (géométrie différentielle, équations aux dérivées partielles) le font entrer à l'Académie des sciences en 1780.

III. PIERRE-SIMON LAPLACE (1749-1827)

Laplace est normand, du pays d'Auge. D'une famille de fermiers, il se découvre goût et don pour les mathématiques à l'Université de Caen. Il part à Paris, est aidé par d'Alembert.

En 1782, Laplace introduit la transformée qui porte son nom et qui associe à une fonction de variable réelle f la fonction F définie par $F(p) = \int_0^\infty f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,dt$; on change ainsi les dérivations et intégrations en multiplications et divisions ; des tables de transformées de Laplace devaient rendre d'énormes services dans la résolution des équations différentielles issues de problèmes physiques.

Les années suivantes, Laplace commence à travailler sur le système solaire en cherchant à ce que les calculs de la mécanique newtonienne menés avec la puissance du calcul différentiel rendent compte exactement des mouvements observés, expliquant enfin une variation périodique des mouvements de Jupiter et Saturne et des variations dans l'orbite de la Lune, introduisant la notion de *Laplacien* d'une fonction f de trois variables :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

une notion qui va se retrouver dans beaucoup de problèmes de physique.

IV. ADRIEN-MARIE LEGENDRE (1752-1833)

Dans un travail sur la détermination de la forme des planètes, un développement en série le conduit à des polynômes dont il aperçoit bientôt de nombreuses propriétés. Ces polynômes portent maintenant son nom et jouent un rôle dans de nombreuses branches des mathématiques et de la physique.

V. LA PÉRIODE RÉVOLUTIONNAIRE

La période révolutionnaire voit le triomphe des mathématiques dans l'enseignement et dans les sciences (l'ouvrage de référence est **[DHO]**). À Rennes, par exemple, la chaire de mathématiques est rétablie au collège, car *les mathématiques sont justement regardées comme la base de toutes les sciences* et c'est *l'enseignement le plus utile, le plus propre à former des hommes.*

Une fois les dangers passés, les structures de l'enseignement et de la recherche sont reconstruites. C'est d'abord l'École normale de l'an 3, de janvier à mai 1795. Lagrange, Laplace, Monge donnent les cours de mathématiques [1]. L'ambition est folle : former en quelques semaines plus de 1000 personnes à l'enseignement en leur donnant le dernier état de la recherche ! Les cours ont lieu dans le grand amphithéâtre du Museum d'histoire naturelle au Jardin des plantes, non chauffé.

La conception de l'École polytechnique remonte à mars 1794, en pleine Terreur. Elle est conçue pour former les grands ingénieurs dont l'État a besoin. La rapidité de la mise en place est étonnante. L'enseignement est novateur. Monge est l'âme de cette création, il en est l'enseignant principal ; c'est un professeur prodigieux, chaleureux avec ses élèves, les enthousiasmant à chaque instant. Il est à l'origine du succès de l'école.

Le 25 octobre 1795, l'Institut est créé avec plusieurs classes et des sections. Tout était en place pour que Paris reste la capitale des mathématiques pendant encore un demi-siècle.

Les engagements dans la Révolution des mathématiciens dont nous avons commencé l'histoire sont divers.

VI. CONDORCET

Condorcet s'est engagé pleinement dans la Révolution ; il a été l'un des seuls de son époque à se battre contre l'esclavage, répondant aux colons qui déclarent qu'on ne peut manger de sucre qu'à ce prix, qu'il faut alors savoir renoncer à *une denrée souillée du sang de nos frères.* Athée, il défend la liberté de culte, est pour l'égalité entre les hommes, pour l'égalité entre les sexes : *Je crois que la loi ne devrait exclure les femmes d'aucune place.*

1. Voir la magnifique édition, Jean Dhombres, *L'École normale de l'an III, Leçons de mathématiques*, Dunod, 1992.

Fig. 7.1 – Le marquis de Condorcet

En juillet 1793, il échappe à l'arrestation, se cache, rédige sans documents son *Esquisse d'un tableau historique des progrès de l'esprit humain*, livre plein d'espoir dans l'avenir ; son travail achevé, il quitte sa cachette, est arrêté le 7 Germinal An II (Mars 94), est retrouvé mort le lendemain matin dans sa cellule. Mort naturelle ou suicide, on ne sait. Quelques semaines plus tard, le 8 mai 1794, Lavoisier est aussi guillotiné, pour avoir été fermier général ; Lagrange déclare :

> Il ne leur a fallu qu'un moment pour faire tomber cette tête, et cent années, peut-être, ne suffiront pas pour en produire une semblable.

VII. LAGRANGE

En 1792, la fille de l'astronome Lemonnier lui propose un nouveau mariage ; elle est vraiment beaucoup plus jeune que lui ; Lagrange accepte : c'est cela qui a le plus de prix dans la vie ; il se remet au travail.

La *Théorie des fonctions analytiques* forme le neuvième cahier du Journal de l'École polytechnique en 1798 ; c'est la rédaction du cours donné au tout début de l'École normale de l'an 3. C'est là que Lagrange impose les notations f, f', f'', f''', etc., pour les dérivées successives d'une fonction. La voie choisie au dix-neuvième siècle pour introduire de la rigueur en analyse ne suivra pas le livre de Lagrange et Cauchy publiera en 1822 un exemple que n'avait pas pressenti Lagrange, celui de la fonction $x \mapsto e^{-1/x^2}$ dont toutes les dérivées en 0 sont nulles alors que la fonction n'est pas nulle.

VIII. MONGE

Monge se révèle un ardent patriote ; il est l'un des six ministres du gouvernement Roland qui se met en place après le 10 août 1792, celui de la marine, qu'il connaît bien ; ses sympathies l'orientent vers les Montagnards.

Fig. 7.2 – Gaspard Monge

Quand, pour conjurer la montée des périls intérieurs et extérieurs, la Convention appelle à la levée en masse, le 25 août 1793, Monge, et d'autres savants qu'il entraîne à sa suite, vont trouver en quelques mois des moyens de fabriquer près de mille fusils par jour (en fondant tout ce qu'ils trouvent), d'organiser partout la récupération du salpêtre, d'avoir des ballons espionnant les mouvements de l'adversaire pendant les batailles. L'enthousiasme et l'énergie de gens comme Monge ont contribué aux victoires des armées françaises.

L'activité de Monge en l'an 3 est prodigieuse, on l'a vu ; il se partage entre ses cours à l'École normale, ceux à Polytechnique, rédige sa *Géométrie descriptive*, rééditée et traduite maintes fois dans le siècle suivant, louée par Gauss. Monge est sollicité par Bonaparte pour aller sélectionner des œuvres d'art dans les musées italiens pendant la campagne d'Italie. Il doit laisser à Paris sa femme et ses filles, qu'il adore. De Rome, il envoie des caisses pleines de documents à Paris ; dans l'une d'elles, le manuscrit 190 du Vatican (voir p. 19). En 1798, il prend part à l'expédition d'Égypte, une aventure incroyable où il est infatigable, explique ce qu'est un mirage, etc.

La Restauration l'exclut de l'Institut et de l'École polytechnique ; les dernières années de Monge sont tristes.

IX. LAPLACE

Pendant plus d'un an, Laplace s'était prudemment éloigné de Paris et vivait à Melun. À partir de 1796, ses publications de mécanique céleste sont magnifiques ; d'abord un texte de vulgarisation, sans équations : *L'exposition du système du monde*, puis le grand *Traité de mécanique céleste*, un titre que Poincaré reprendra cent ans plus tard en hommage, en cinq volumes, immense travail rassemblant tous les calculs de ses prédécesseurs, cherchant à rendre compte de toutes les irrégularités observées. Les longueurs sont exprimées en mètres, le jour et l'angle droit sont décimalisés.

La publication de la méthode des moindres carrés de Gauss en 1809 conduit Laplace à reprendre ses travaux de probabilité. Il obtient un *théorème central limite* (donnant la probabilité de l'erreur sur une moyenne théorique en prenant la moyenne de *n* observations) ; sa *Théorie analytique des probabilités* date en 1812. Gauss reprendra le problème en 1821 ; la théorie des probabilités se formait dans cette discussion de géants.

En 1814, Laplace énonce nettement l'hypothèse déterministe :

> Nous devons donc envisager l'état présent de l'Univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui, pour un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'Univers et ceux du plus léger atome. Rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux.

En 1814-1815, Laplace négocie bien le changement de régime et continue à jouer un rôle important.

X. LEGENDRE

En 1794, Legendre publie ses *Éléments de géométrie*. Le succès de ce livre est exceptionnel ; il prend la place du livre d'Euclide dans l'enseignement, en France comme aux États-Unis, pour au moins un siècle. On peut s'amuser de voir au fil des éditions

Legendre soit annoncer avec fierté qu'il donne une démonstration du cinquième postulat, soit annoncer que la démonstration donnée dans la précédente édition connaît quelques difficultés, sans pressentir les géométries non euclidiennes.

La première édition de sa *Théorie des nombres* remonte à 1798. Il y reprend des travaux antérieurs, donne une démonstration incomplète de la loi de réciprocité quadratique. Dans la seconde édition, dix ans plus tard, il propose un équivalent du nombre $\pi(n)$ de nombres premiers inférieurs à n : $\pi(n) \approx n/\ln(n)$; cette conjecture ne sera prouvée que près de cent ans plus tard.

Enfin, dans les années 1810, Legendre s'attaque aux intégrales elliptiques. Son grand traité sur ce sujet est publié au moment où Abel et Jacobi vont trouver des idées entièrement nouvelles, ce dont il sera heureux. Il meurt dans la pauvreté.

XI. FOURIER (1768-1830)

Joseph Fourier est un Bourguignon né à Auxerre dans une famille très pauvre. Sa vie est pleine de rebondissements (voir Jean Dhombres, Jean-Bernard Robert, *Fourier*, Belin, 1998). En 1793, il s'engage dans le mouvement révolutionnaire : *Je me passionnais pour cette cause…*, puis enseigne à Polytechnique. En 1798, il prend part à l'expédition d'Égypte ; il y déploie tous ses talents d'organisateur et de diplomate.

Fourier espérait à son retour reprendre le cours de ses recherches et enseignements, mais Bonaparte le nomme préfet de l'Isère. Fourier est un très grand préfet, infatigable. Il trouve le temps de développer, seul et isolé, son travail pionnier sur la théorie de la chaleur, fait des expériences avec un matériel rudimentaire pour comprendre comment elle se propage dans des corps aux formes variées (prismes, anneaux, etc.), comment elle atteint un équilibre.

Après l'épisode des Cents jours, Fourier réussit à se faire élire à l'Académie, en devient secrétaire perpétuel. Il publie enfin, en 1822, sa *Théorie analytique de la chaleur* : *L'étude approfondie de la nature est la source la plus féconde des découvertes mathématiques… Il ne peut y avoir de langage plus universel et plus simple, plus exempt d'erreurs et d'obscurités…* Il montre que l'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles de la forme $a\Delta f = \frac{\partial f}{\partial t}$ et introduit les séries trigonométriques pour la résoudre. Les fameuses formules reliant une fonction à sa série de Fourier vont donner beaucoup de travail aux mathématiciens pour comprendre à quelles fonctions elles peuvent réellement s'appliquer, étudier les problèmes de convergence, trouver des contre-exemples, construire des théories de l'intégration pour les fonctions utilisées (intégrales de Riemann et de Lebesgue). Fourier est sans doute le premier à dire clairement ce qu'est une fonction quelconque : *une suite de valeurs dont chacune est arbitraire*. On lui doit également la notation des intégrales définies avec la mention des deux bornes a et b : $\int_a^b f(x)\, dx$.

Fourier a toujours été d'une grande courtoisie et d'une grande réserve. Il avait de la sympathie pour Sophie Germain, isolée comme lui. On ne lui connaît aucune aventure féminine ; mais il est mort d'un problème de cœur.

Fig. 7.3 – Joseph Fourier

Chapitre 8

Cartes postales du XIX^e siècle

Voici quelques cartes postales donnant des aperçus sur la construction des mathématiques des années 1800-1900.

I. KARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855)

Gauss naît dans une famille très pauvre, apprend à lire et compter seul vers 3 ans, questionnant les adultes (voir une biographie plus détaillée dans le chapitre 17 de **[ESC-Al]**, où la vie de Gauss, son mariage avec Johanna, la mort de celle-ci, son second mariage, sont racontés). À 7 ans, il est remarqué par son instituteur pour avoir calculé instantanément la somme des nombres de 1 à 100, expliquant qu'il suffisait de grouper les nombres en 50 paquets de somme 101 : $100+1$, $99+2$, $98+3$, etc. Il étudie la nuit dans son lit sous les combles, à la lueur d'une lanterne faite d'un navet évidé, un peu de gras et une mèche de coton.

Le matin du 30 mars 1796, Gauss découvre la construction à la règle et au compas du polygone régulier à 17 côtés (voir **[ESC-Ga]**). Le résultat lui paraît si beau qu'il décide de se consacrer aux mathématiques ; il résulte d'une compréhension profonde des racines dix-septième de l'unité. Il commence à prendre des notes sur ses travaux ; un petit cahier de 19 pages où il avait noté 146 résultats sera retrouvé en 1898 dans des papiers de famille. Les découvertes se succèdent rapidement : une démonstration de la loi de réciprocité quadratique, essentielle en théorie des nombres, une démonstration convaincante du théorème de d'Alembert.

En 1801 paraissent les *Recherches arithmétiques* (en latin), un chef d'œuvre de 500 pages exposant tout ce que Gauss vient de trouver en arithmétique. Gauss commence par exposer les bases de l'arithmétique modulaire dans des termes proches des nôtres, écrivant, par exemple : $-6 \equiv 9$ mod. 5 ; il est traduit en français dès 1807. Le style est d'une grande clarté.

Le livre n'est pas encore paru que Gauss se tourne vers l'astronomie et la théorie des planètes, inventant sa méthode des moindres carrés pour déterminer leur orbite à partir d'un petit nombre d'observations. Il est très sollicité mais préfère aller à Göttingen avec la promesse qu'on lui construise un observatoire. En juin 1809, paraît son second livre, un chef d'œuvre lui aussi, sur la théorie du mouvement des corps célestes : *Theoria motus corporum cœlestium*..., où apparaît la fameuse courbe en cloche des probabilités.

Gauss continue ses calculs et ses observations astronomiques, se couchant vers une heure du matin (sa fille Minna guette le ciel chaque soir pour savoir si son père va rester avec elle ou la quitter pour aller travailler). En 1812, il étudie la série hypergéométrique, s'occupant soigneusement des problèmes de convergence, ce qui est une nouveauté ; il donne des méthodes de calcul approché d'intégrales, puis sa méthode du pivot pour la résolution des systèmes linéaires qui sont à la base des méthodes actuelles de calcul numérique.

Dans les années 1820, Gauss s'occupe de la triangulation de son pays. Il passe plusieurs étés à effectuer des mesures, allant de village en village, dormant chez l'habitant, aidé par son fils aîné. Gauss utilise l'*héliotrope*, instrument qu'il invente en 1821 et qui permet, avec un miroir mobile, d'effectuer des triangulations sur des distances supérieures à celles de ses prédécesseurs et sert de télégraphe optique. Les méthodes de Gauss seront utilisées jusqu'à l'apparition de la photographie aérienne.

Gauss se plonge, à l'automne 1825, dans des recherches théoriques sur les surfaces et leur courbure. Il ne dort pratiquement plus et c'est l'une des périodes les plus épuisantes de sa vie. L'article de 1827 sur la courbure des surfaces de l'espace ordinaire aura une influence considérable sur les travaux de géométrie différentielle ultérieurs. Le théorème principal est connu sous le nom que lui donne Gauss : *theorema egregium* (théorème remarquable) énonçant que la courbure (de Gauss) d'une surface ne change pas par isométrie ; ainsi on ne peut appliquer une feuille de papier sur une sphère et bien d'autres conséquences. Einstein dira que si Gauss n'avait pas créé sa géométrie des surfaces, base des travaux de Riemann et de la théorie de la relativité, il aurait été difficile d'imaginer que quelqu'un d'autre l'eût fait à sa place.

Fig. 8.1 – Karl Friedrich Gauss, d'après C.A. Jensen

En travaillant sur l'anneau des complexes $a + \imath b$, a et b entiers (les *entiers de Gauss*), Gauss montre que les nombres complexes peuvent s'interpréter géométriquement : ils ne sont plus seulement des imaginaires.

Gauss avait aussi conçu les géométries non euclidiennes (bien avant Janos Bolyai (1802-1860) et Lobatchevski). Il meurt paisiblement dans son sommeil le 23 février 1855 à 1 heure 5 du matin.

II. SOPHIE GERMAIN (1776-1831)

Sophie Germain découvre les mathématiques à 13 ans, passant son temps la nuit à lire Newton et Euler. Quand elle soumet un travail à Lagrange, elle adopte le pseudonyme de Le Blanc, un ancien élève de l'École polytechnique. Lagrange découvre en la convoquant qu'il s'agit d'une femme et l'aide dans sa formation. Legendre intègre ses résultats dans la seconde édition de sa théorie des nombres. Elle correspond également avec Gauss, toujours comme Monsieur Leblanc, entre 1804 et 1809 pour discuter de théorie des nombres. Le théorème de Sophie Germain en théorie des nombres est le premier résultat important sur le grand théorème de Fermat.

Sophie Germain s'engage ensuite dans des recherches difficiles, cherchant à généraliser ce qui se faisait pour les cordes vibrantes aux surfaces vibrantes et inventant la notion de courbure moyenne d'une surface. Elle meurt d'un cancer du sein, ayant toujours vécu dans sa famille.

III. AUGUSTIN CAUCHY (1789-1857)

Le traité d'analyse d'Euler était le premier traité moderne. Ceux de Cauchy, rédactions des années 1820 de cours à l'École polytechnique sont très proches des nôtres et fondent la rigueur actuelle (même s'il ne sont pas parfaits).

Comme Euler, Cauchy commence par parler des fonctions. Les problèmes de limites et de continuité sont abordés avec des infiniment petits, mais ce sont plus des êtres imaginaires, mais des fonctions qui tendent vers 0, presque ce que nous manions aujourd'hui avec les ϵ ; c'est l'enterrement des infiniment petits ; ils ne devaient renaître, cette fois-ci avec un véritable statut mathématique, qu'avec Abraham Robinson (1918-1974) dans son *Analyse non standard* (1961).

La géométrie s'introduit dans le cours d'analyse quand Cauchy montre le théorème des valeurs intermédiaires : c'est pour lui une évidence géométrique. Bolzano (1780-1848), dans un mémoire passé inaperçu en 1817, avait pourtant vu la difficulté, construisant sa démonstration à partir du fait que tout ensemble borné et majoré de $\mathbb{R}$ a une borne supérieure, comme on le fait aujourd'hui.

Cauchy définit l'intégrale d'une fonction continue f sur un intervalle $[a,b]$ comme la limite de sommes $(x_1 - a)f(a) + \ldots + (b - x_{n-1})f(x_{n-1})$ pour des suites strictement croissantes $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < b = x_n$ quand le maximum des $x_{i+1} - x_i$ tend vers 0. Avec sa définition, il montre que $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ donne une primitive de f (l'uniforme continuité de f sur l'intervalle est implicite).

Cauchy naît l'année de la Révolution française dans une famille qui vit la Révolution dans la peur ; il restera toute sa vie dans des opinions ultraroyalistes, extrêmement religieux, insupportable par son prosélytisme. Il entre à Polytechnique à seize ans et y devient professeur en 1815 (ses élèves se plaignaient de ses cours supplémentaires) ; en 1816, les renvois de Carnot et Monge lui offrent une place à l'Académie des sciences qu'il accepte sans scrupule. Cauchy était très productif ; ses œuvres complètes comportent 27 volumes touchant à toutes les parties des mathématiques de son époque.

Les étudiants de première et seconde année de licence connaissent Cauchy pour ses critères de convergence de suites, de séries et d'intégrales. Les étudiants de troisième année le connaissent pour sa théorie des fonctions de la variable complexe où il a établi tous les résultats de base, l'intégration d'une fonction le long d'un chemin et le théorème des résidus, qui datent de 1825, la notion de fonction holomorphe, etc.

Parmi les multiples résultats de Cauchy, citons encore un théorème de fonctions implicites, des théorèmes d'existence de solutions d'équations différentielles et aux dérivées partielles, les bases de l'élasticité.

IV. NIELS ABEL (1802-1829)

Le père d'Abel est pasteur, a fait des études sérieuses (voir Arild Stubhaug, *Niels Henrik Abel et son époque*, Springer, 2004). Il a des idées modernes, rédige un catéchisme, répand la vaccination antivariolique mise au point par Jenner en 1796 ; en 1814, il est élu député ; il a très peu d'argent, mais envoie ses fils étudier au lycée de Christiania (11 000 habitants, future Oslo) ; en 1818, il sombre dans l'alcoolisme. À Christiania, un professeur de mathématiques brutal, suspendu après la mort d'un élève qu'il a violemment frappé, est remplacé par un jeune professeur, Bernt Holmboe (1795-1850), qui découvre les aptitudes d'Abel et lui fait lire les grands textes mathématiques. En 1820, le père d'Abel meurt ; sa mère a une conduite scandaleuse, le mot est faible, lors des obsèques. Pendant les années suivantes, Abel soutiendra seul ses frères et sa sœur dans la misère.

Abel entre à l'Université en 1821, sans professeur à son niveau. Il cherche d'abord à résoudre l'équation du cinquième degré par radicaux, découvre une erreur dans son raisonnement et cherche alors à montrer l'impossibilité de cette résolution ; il publie son premier article en 1823 et commence à s'attaquer aux intégrales elliptiques comme $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, ayant déjà l'idée de l'inversion analogue à celle définissant la fonction *arc sinus* comme fonction inverse de la fonction sinus. Il rencontre sa future fiancée, Christine Kemp (1804-1862). En 1824, il publie à compte d'auteur, sans succès, ses démonstrations de l'impossibilité de résoudre par radicaux les équations algébriques de degré supérieur ou égal à 5 ; Gauss reçoit le livre mais ne l'ouvre pas. Puis il laisse sa fiancée et part en septembre 1825 avec très peu d'argent pour près de deux ans.

Il va d'abord à Berlin où il noue des relations fortes avec August Crelle (1780-1855) qui lance l'année suivante le *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (*Journal de mathématiques pures et appliquées*) où Abel publie plusieurs articles. Les *Recherches sur la série du binôme* montrent enfin rigoureusement la formule proposée par Newton ; Abel étudie soigneusement la convergence des séries entières, énonce ce qu'on appelle le lemme d'Abel, montre pourquoi Cauchy a commis une erreur en supposant qu'une limite de fonctions continues convergeant pour chaque *x* n'est pas nécessairement continue ; la notion de convergence uniforme n'est pas encore inventée, mais Abel la démontre dans des cas particuliers.

Un long voyage par l'Autriche et l'Italie le conduit à Paris en juillet 1826. Cauchy perd un de ses grands mémoires, qui ne sera publié qu'en 1841 (le manuscrit a été volé par Libri ; certaines pages n'en ont été retrouvées qu'en 2000 dans une bibliothèque de Florence). Le séjour à Paris est marqué par la solitude, la pauvreté et l'annonce de sa tuberculose. Il revient en Norvège en juillet 1927 et publie ses *Recherches sur les fonctions elliptiques* dans le Journal de Crelle.

En 1828, les travaux d'Abel se succèdent, sont admirés ; il est en compétition avec Jacobi sur les fonctions elliptiques ; ses solutions sont plus générales.

Fig. 8.2 – Niels Abel

Il écrit à Legendre :

> J'ai été assez heureux de trouver une règle sûre, à l'aide de laquelle on pourra reconnaître si une équation quelconque proposée est résoluble à l'aide de radicaux, ou non. Un corollaire de ma théorie fait voir que généralement il est impossible de résoudre les équations supérieures au quatrième degré.

Cette découverte fut annoncée par Legendre à l'Académie des Sciences, le 23 février 1829 ; mais Abel n'a rien publié à ce sujet, et l'on n'a rien trouvé qui s'y rapporte dans ses papiers ; sans doute était-ce de la théorie de Galois.

Abel passe l'été et Noël 1828 avec sa fiancée. Début janvier 1829, il doit s'aliter, crache le sang, s'affaiblit, sa fiancée vient le rejoindre, mais ne peut le sauver. Il meurt le 6 avril ; deux jours après, une lettre de Crelle annonce qu'on lui a créé un poste à Berlin.

V. ÉVARISTE GALOIS (1811-1832)

À 15 ans, Évariste Galois (voir **[ESC-Ga]** pour une biographie plus détaillée) découvre les mathématiques et lit avec passion les livres des grands mathématiciens qui l'ont précédé : Legendre, Lagrange, Euler, Gauss. En 1827, il obtient le premier prix au Concours général de mathématiques. En 1828, son professeur à Louis-le-grand, Louis Richard (1795-1849), admire le génie de son élève et l'encourage à publier ses premiers travaux.

En 1829, les épreuves et les drames commencent et vont s'accumuler. Un article envoyé à l'Académie des sciences, confié à Cauchy, est perdu. Quelques jours plus tard, Galois échoue pour la seconde fois au concours d'entrée à l'École polytechnique. Il aurait jeté le chiffon à effacer la craie à la tête d'un examinateur qu'il jugeait stupide ; *sa place n'est certainement pas dans la postérité*, écrit-il.

Il présente le résultat de ses recherches à l'Académie des sciences. Fourier emporte le manuscrit chez lui et meurt. L'année suivante, Galois écrit une nouvelle version de ses travaux : les académiciens (le grand Poisson, 1781-1840) ne le comprennent pas et lui renvoient son texte en lui demandant des éclaircissements. Les idées de Galois, qui nous paraissent claires maintenant, sont trop en avance pour son époque.

Galois construisait une théorie nouvelle, la théorie des groupes de permutations des ensembles finis, pour donner une réponse au problème de la résolution par radicaux des équations algébriques. Le déplacement du problème, du cadre de la théorie des équations à un cadre algébrique abstrait où se lisent les propriétés des équations est superbe : la résolubilité de l'équation correspond à une propriété du groupe. Galois inventait la notion de sous-groupe distingué, montrait que les groupes alternés A_n n'en avaient pas de non triviaux pour $n \geqslant 5$ (on parle alors de groupe simple), etc. La théorie des groupes et les idées de Galois devaient se révéler d'une grande richesse, d'une grande utilité dans toutes les branches des mathématiques ; c'était un pas gigantesque vers les conceptions d'aujourd'hui.

La vie de Galois prend alors une direction différente : ses opinions politiques évoluent rapidement. Il s'est rebellé avec une grande vigueur contre l'ordre scientifique, il se révolte de même contre l'ordre mis en place par Louis-Philippe, vivant avec la même intensité les événements historiques et mathématiques. Il est arrêté le 14 juillet 1831 à la tête de plusieurs centaines de manifestants sur le Pont-Neuf et condamné à six mois de prison à Sainte Pélagie ; il continue à travailler dans ce cadre peu propice.

Fig. 8.3 – Évariste Galois dessiné de mémoire par son frère

En mai 1832, il a une brève aventure amoureuse. Un duel semble en résulter. La nuit du 29 mai, Evariste rassemble ses dernières découvertes dans une splendide lettre à un ami fidèle, Auguste Chevalier. Pressentant sa mort, pressé par le temps, l'urgence absolue est pour lui ce résumé ultime de tout ce qu'il avait compris. Parmi ses dernières phrases : *Après cela il se trouvera, j'espère, des gens qui trouveront leur profit à déchiffrer tout ce gâchis* et une note dans la marge : *Il y a quelque chose à compléter dans cette démonstration. Je n'ai pas le temps.* Il semble qu'il avait déjà conçu des résultats sur les surfaces de Riemann et sur les intégrales abéliennes.

Le 30 mai, Galois, grièvement blessé, est conduit à l'hôpital Cochin où il meurt de péritonite dans les bras de son jeune frère Alfred : *Ne pleure pas, j'ai besoin de tout mon courage pour mourir à vingt ans.* Il est enterré dans la fosse commune du cimetière Montparnasse.

C'est en 1843 que Liouville annonce à l'Académie des Sciences qu'il vient de trouver dans les papiers de Galois *une solution aussi exacte que profonde* au problème de la résolubilité des équations par radicaux. Les idées de Galois commencent à féconder les mathématiques. Elles se retrouvent encore aujourd'hui au centre des travaux de mathématiciens comme Grothendieck ou Connes.

VI. PETER LEJEUNE-DIRICHLET (1805-1859)

Dirichlet est attiré par les mathématiques et utilise son argent de poche à 12 ans pour acheter des livres de sa science préférée. Il suit les cours d'Ohm à Bonn, mais part à Paris pour avoir une meilleure formation, les *Disquisitiones* de Gauss sous le bras. En 1825, il présente à l'Académie des sciences une démonstration partielle du théorème de Fermat pour $n = 5$ que son rapporteur, Legendre, peut complèter. Il retourne ensuite en Allemagne, obtient un poste à Berlin en 1828, épouse une sœur de Félix Mendelsohn. C'est grâce à Dirichlet que Berlin devient un grand centre de mathématiques. Le travail à Berlin est très lourd et Dirichlet accepte avec joie en 1855 l'invitation à occuper la chaire de Gauss à Göttingen. En 1858, il a un malaise cardiaque à Montreux, en Suisse, revient difficilement à Göttingen ; sa femme meurt brutalement ; il ne lui survit pas longtemps.

Dirichlet clarifie les problèmes de convergence des séries de Fourier en 1829, en se limitant aux fonctions de classe C^1 ; il met en évidence le lien entre les discontinuités de la fonction et la notion d'intégrale, sans résoudre le problème, et donne l'exemple fameux d'une fonction égale à une constante sur les rationnels, à une autre sur les irrationnels. Ses résultats en théorie des nombres sont très importants : démonstration du théorème de la progression arithmétique (1837, conjecturé par Legendre) : *Étant donnés deux entiers a et b premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers de la forme* $ak+b$; sa démonstration introduit l'analyse en théorie des nombres : c'est inattendu. Puis il dégage la structure du groupe multiplicatif des unités d'un corps de nombres. Un travail sur le système solaire le conduit en 1856-57 au problème, dit de Dirichlet, de montrer l'existence sur un domaine fermé d'une unique fonction harmonique (fonction de laplacien nul) égale à une fonction continue donnée sur la frontière du domaine. Rappelons enfin un principe très simple qui porte aussi son nom : si $n+1$ objets sont dans n tiroirs, un tiroir au moins contient au moins deux objets.

VII. CARL JACOBI (1804-1851)

À la mort de Fourier, Jacobi écrit à Legendre en français :

> M. Fourier avait l'opinion que le but principal des mathématiques était l'utilité publique et l'explication des phénomènes naturels ; mais un philosophe comme lui aurait dû savoir que le but unique de la science, c'est l'honneur de l'esprit humain, et que sous ce titre, une question de nombres vaut autant qu'une question du système du monde.

Cette belle phrase (discutable cependant) a donné le titre d'un plaidoyer vigoureux de Dieudonné pour les mathématiques.

Jacobi naît dans une famille de banquiers aisée. C'est un élève très brillant ; il passe sa thèse à 21 ans. Sa conversion (de la religion juive à la chrétienne) lui permet d'enseigner à l'université ; il reste à Königsberg jusqu'en 1842, époque à laquelle sa santé s'altère : le diabète, et une dépression boursière lui faire perdre sa fortune ; le roi, alerté par son ami Dirichlet, lui apporte un secours pour passer huit mois en Italie ; Dirichlet l'accompagne. À son retour, il se voit offrir un poste à Berlin. Il meurt de la variole.

Jacobi a formé beaucoup d'élèves et fortement contribué à la création d'une école allemande de mathématiques.

VIII. LA GÉOMÉTRIE PURE

Poncelet et Michel Chasles sont des géomètres épris de pureté ; *l'usage de coordonnées est une souillure*, dit Poncelet.

Jean-Victor Poncelet (1788-1867) est messin, élève de Monge à l'École polytechnique en 1808-1810. Suivons le récit des épreuves qu'il a endurées telles qu'il les raconte en 1862. Il est officier du génie en mars 1812, rejoint le grande armée à Vitebsk, est fait prisonnier le 18 novembre à la bataille de Smolensk, doit marcher 1500 kilomètres en plein hiver 1812-1813, dans des conditions épouvantables (froid terrible : température inférieure à – 39 degrés car le mercure se solidifiait, vêtu des seuls lambeaux de son uniforme, nourri du pain noir des paysans russes). Arrivé à Saratov, sur les bords de la Volga, il tombe malade, ce qui n'est pas vraiment étonnant. Puis vient le mois d'avril ; il va mieux ; il décide de recréer les mathématiques dans sa tête (*Ces résultats étaient presque entièrement effacés de sa mémoire*... ; il invente en deux ans la géométrie projective, son *grand théorème*, etc., expose ses inventions à ses compagnons de prison, polytechniciens eux aussi, est libéré deux ans plus tard. Son grand *Traité des Propriétés Projectives des Figures* de 1822 fonde la géométrie projective. Reprenant les idées de Desargues, il adjoint des points à l'infini aux droites, mais ajoute aussi les points imaginaires. Il admet que ce qui est vrai dans le cas général se prolonge aux cas particuliers (*prolongement des identités algébriques*). Il dégage le *principe de dualité* qui dédouble les énoncés de la géométrie (penser que, dans l'équation d'une droite $ux + vy + wz = 0$, les triplets (u,v,w) et (x,y,z) jouent des rôles absolument symétriques). Poncelet définit également les *transformations projectives*, les *points cycliques* (les deux points imaginaires par lesquels passent tous les cercles). Le superbe *grand théorème de Poncelet* énonce qu'étant donnés deux cercles, l'un contenant l'autre, si on peut construire *un* polygone circonscrit au cercle intérieur et inscrit dans le cercle extérieur, on peut en construire une infinité.

La relation de Michel Chasles (1793-1880), $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ pour trois points alignés, peut paraître d'une grande banalité et ne pas mériter de figurer ici ; mais elle indique aussi l'entrée des nombres négatifs dans la géométrie, ce qui n'est pas négligeable.

Fig. 8.4 – Jean-Victor Poncelet

Chasles a montré, en 1864, un résultat étonnant : étant données cinq coniques du plan, il en existe 3264 (éventuellement imaginaires) qui leur sont tangentes ! Une configuration où les 3264 coniques sont toutes réelles n'a été construite qu'en 1997 ; Jean-Yves Welschinger vient de montrer en 2005 que, dans le cas de cinq ellipses sans points intérieurs communs, 32 de ces coniques au moins sont réelles, résultat qui utilise des moyens puissants mis au point récemment, comme les invariants de Gromov-Witten, utiles aussi en théorie des cordes.

IX. NIKOLAI IVANOVITCH LOBATCHEVSKI (1792-1856)

Lobatchevski naît dans une famille pauvre de Nijni Novgorod. Son père meurt quand Nikolai a sept ans. Sa mère se déplace à Kazan (à 373 kilomètres de là en bateau, il suffit de relire *Michel Strogoff*) avec Nikolai et ses deux frères.

Nikolai poursuit ses études à l'Université de Kazan créée en 1804. Il cherche d'abord à montrer le cinquième postulat, comme bien d'autres depuis Euclide, puis franchit le pas, énorme, de développer une nouvelle géométrie. Il publie ses idées en 1829, dans le *Messager de Kazan*. Ce texte est passé complètement inaperçu à l'époque.

> Toutes les droites tracées par un même point dans le plan peuvent se distribuer, par rapport à une droite donnée dans ce plan, en deux classes, à savoir : en droites qui coupent la droite donnée et en droites qui ne la coupent pas. La droite qui forme la limite commune de ces deux classes est dite parallèle à la droite donnée.

Nous voici d'un seul coup basculés dans un nouveau monde. Il s'agit en fait de demi-droites. La figure est la suivante.

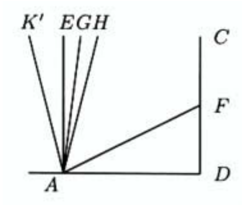

Fig. 8.5 – La parallèle comme coupure.

Les explications de Lobatchevski se réduisent à construire la perpendiculaire (AD) à (DC), puis la perpendiculaire (AE) à (AD). Lobatchevski sépare l'ensemble des droites passant par A et dans l'angle $\widehat{EAD}$ en droites qui coupent (DC) et en droites qui ne coupent pas (DC).

Fig. 8.6 – Nikolai Lobatchevski

Puis il développe une théorie complète dont les théorèmes sont souvent analogues à ceux de la géométrie euclidienne, parfois propres à la nouvelle théorie, comme : *la somme des angles d'un triangle est strictement inférieure à 180 degrés.*

Dans les années 1860, peu de gens se souviennent des écrits de Lobatchevski. En 1868, la leçon d'Habilitation de Riemann inspire les recherches d'Eugenio Beltrami (1835-1900) ; dans son : *Saggio di interpetrazione della geometria non-euclidea* (Essai d'interprétation de la géométrie non-euclidienne), il propose des modèles de la géométrie non-euclidienne décrits dans l'espace euclidien. Ces modèles permettent de montrer que la non-contradiction de la géométrie de Lobatchevski est équivalente à la non-contradiction de la géométrie euclidienne (Lobatchevski proclamait, sans raison, que sa géométrie ne conduisait à aucune contradiction).

X. BERNHARD RIEMANN (1826-1866)

Riemann est le fils d'un pasteur protestant pauvre. Il est extrêmement timide, très lié à sa famille. Il s'intéresse aux mathématiques et lit en six jours le livre de Legendre de théorie des nombres (900 pages qu'il affirme avoir entièrement comprises !). En 1846, il part à Göttingen, abandonne, avec la permission de son père, ses études de théologie pour les mathématiques, suit des cours de Gauss, poursuit ses études à Berlin.

Chacun des articles de Riemann contient de grandes idées ; certains n'ont été publiés qu'après sa mort ; ses résultats profonds mettront du temps à être compris. Dans sa thèse, en 1851, très appréciée par Gauss, il va beaucoup plus loin que Cauchy dans la théorie des fonctions de variable complexe : introduction des fameuses surfaces de Riemann pour traiter les fonctions qui ne reviennent pas à leur valeur quand on les suit par continuité sur un chemin fermé, grand théorème de la représentation conforme d'un ouvert simplement connexe (non égal à $\mathbb{C}$) sur un autre, etc. Dans son Habilitation, en 1853, pour l'étude des séries de Fourier, il donne des résultats de bases sur les séries convergentes, définit alors l'intégrale que nous nommons d'après lui, et ses généralisations, précisant les définitions de Cauchy, dégageant des problèmes de nature topologique, etc. Dans la conférence qui suit l'Habilitation, Gauss choisit, à sa surprise, son troisième sujet : c'est le fameux texte : *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* lu le 10 juin 1854, fondant la théorie des variétés de la géométrie différentielle de dimension *n* quelconque, théorie qui sera essentielle pour qu'Einstein exprime les relations de la relativité générale ; la seule formule (il s'agit d'un exposé oral à un public hétérogène) indiquée est celle donnant un élément de longueur sur une variété de dimension n : $ds = \sqrt{g_{ij}dx_i dx_j}$. Gauss, qui avait ouvert la voie par son texte de 1827, en sort enthousiasmé.

Fig. 8.7 – Bernard Riemann

Riemann est toujours sans moyen ; son père, son frère, deux de ses sœurs meurent ; le presbytère de son enfance passe en d'autres mains ; Dirichlet le soutient, mais meurt aussi, ce qui permet la nomination de Riemann comme professeur à Göttingen en juillet 1859 ; il peut enfin subvenir à ses besoins et à ceux des sœurs qui lui restent. À l'Académie des sciences de Berlin qui l'accueille, il offre l'étude : *Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée* où il montre le lien entre ce problème et celui des zéros non réels de la fonction ζ prolongée dans le plan complexe. C'est la fameuse conjecture de Riemann : *j'ai laissé cette recherche de côté pour le moment après quelques rapides essais infructueux.* La démonstration de la conjecture entraînerait toute une série de conséquences importantes.

Après son mariage en 1862, les dernières années de Riemann sont encore très tristes. Un rhume réveille une tuberculose probablement ancienne. En 1862-63, il part en Italie pour se soigner, y retourne en 1864-65, y retourne encore en 1866 ; c'est pour y mourir sur les bords du lac Majeur et c'est là qu'il est enterré, entre Mergozzo et Verbania.

XI. CAMILLE JORDAN (1838-1922)

Jordan est d'une grande famille bourgeoise ; il est reçu à l'École polytechnique avec un total exceptionnel. Il exercera longtemps son métier d'ingénieur en poursuivant ses recherches mathématiques.

C'est lui qui comprend le premier la profondeur des travaux de Galois. Il crée de nombreux concepts de la théorie des groupes (groupe quotient, homomorphisme, suite de décomposition…) et en découvre des théorèmes profonds (voir son *Traité des substitutions et des équations algébriques*, 1870, près de 700 pages). Son influence sur les idées de Félix Klein (1849-1925) et Sophus Lie (1842-1899) à cette époque est déterminante.

Les explications de Jordan pour généraliser les méthodes de la géométrie euclidienne marquent le début de l'exploration des espaces de dimension supérieure à 3. Bien plus tard, vers 1910, il démontre un théorème de topologie intuitivement évident qui porte aujourd'hui son nom : *une courbe continue et fermée du plan à un intérieur et un extérieur.*

Trois des six fils de Jordan sont tués durant la guerre de 1914-1918.

Fig. 8.8 – Camille Jordan

XII. KARL WEIERSTRASS (1815-1897)

Weierstrass a longtemps enseigné dans le secondaire. Il commence des cours à l'Université, à plus de 40 ans, en

1856. De graves crises de vertiges l'empêchent de travailler durant de longues périodes. Ses travaux en analyse sont importants, caractérisés par leur rigueur, mais nous n'évoquerons que quelques résultats de base. Nous utilisons encore sa définition des limites avec les $\varepsilon > 0$ et les $\delta > 0$; il n'y a plus de mouvement même si on dit encore *tend vers*, ce sont des quantificateurs et des inégalités qui interviennent. Il coupe les ε en trois pour montrer qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue (Cauchy avait fait une erreur sur ce sujet dans son cours de 1821), établit le théorème sur la dérivation terme à terme d'une série convergente de fonctions continues, s'inspirant d'Abel, etc.

Fig. 8.9 – Karl Weierstrass

XIII. SOPHIE KOVALEVSKI (1850-1891)

Elle naît dans une famille russe aisée qui compte des mathématiciens. Il y a tant de pièces dans la maison de campagne de ses parents que les pages lithographiées d'un cours d'Ostrogradski (1801-1862) sont utilisées pour tapisser les murs de sa chambre. Plus tard, son professeur de calcul différentiel sera fasciné ; c'est comme si elle avait tout su à l'avance. À 15 ans, Sophie est romanesque, tourmentée ; elle rencontre Dostoievski : il en tombe amoureux.

À 18 ans, ne pouvant, parce que femme, étudier en Russie, elle fait un mariage blanc et part s'installer en Allemagne. Mais là non plus, une femme ne pouvait suivre des cours à l'Université. Sophie doit persuader chacun de ses professeurs de bien vouloir l'accepter. En 1870, elle part à Berlin étudier avec Weierstrass sous la seule forme possible : des cours privés (elle ne sera admise à suivre des cours que dans les années 1880 !). Elle va passer quelques jours à Paris au moment de la Commune, puis, au prix d'un travail acharné, excessif, vivant une situation étrange avec son mari, elle termine dans la solitude une thèse avec Weierstrass, trouvant un célèbre théorème sur les solutions d'équations aux dérivées partielles, connu aujourd'hui sous le nom de théorème de Cauchy-Kovalevski. C'est la première thèse de mathématiques soutenue par une femme. Weierstass admire son élève, mais ne peut lui obtenir de poste.

Fig. 8.10 – Sophie Kovalevski

Elle revient à Saint-Petersbourg épuisée, puis consomme son mariage ; ils ont une fille, puis ils se quittent. Sophie se remet aux mathématiques ; son mari se suicide en 1883, l'année où Mittag-Leffler (1846-1927) offre à Sophie un poste de professeur à l'Université de Stockholm ; encore une première. En 1888, elle réussit à obtenir des résultats remarquables *Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe* ; si on note G le centre de gravité et P le point fixe d'un tel corps, on ne sait bien décrire son mouvement que dans trois cas : $G = P$ (cas d'Euler), la droite (GP) est un axe de révolution du solide (cas de Lagrange), la droite (GP) est orthogonale à un axe de révolution du solide et celui-ci a une forme particulière (cas de Kovalevski). Ses *Souvenirs de jeunesse* ont un grand succès en Russie. Elle tombe amoureuse d'un cousin de son premier mari, prend froid en France, rentre en Suède ; la mort la prend le 9 février. Son dernier roman, où l'héroïne est proche de ce qu'elle a été, vient d'être édité en français (*Une nihiliste*, Phébus, 2004) et sa vie vient d'être portée au théâtre par Jean-François Peyret.

XIV. GEORG CANTOR (1845-1918)

Jeune, Cantor avait le désir absolu de répondre aux vœux de son père. Le père n'y allait pas par quatre chemins, l'appelant dans des lettres au ton grandiloquent à s'en remettre à Dieu Tout Puissant, à exceller dans toutes les disciplines, à être *une étoile brillante à l'horizon de la science.*

En 1872, Cantor donne la construction (complétée en 1883) des réels à partir des nombres rationnels en considérant les suites de Cauchy de tels nombres, deux suites étant identifiées si elles ont la même limite.

Cantor rencontre Dedekind en vacances en Suisse, en juillet 1873. Le 29 novembre, il lui écrit, expliquant qu'il sait que $\mathbb{Q}$ est dénombrable (en bijection avec $\mathbb{N}$) ; le 7 décembre, il sait montrer que $[0,1]$ n'est pas dénombrable. Trois ans plus tard, Cantor montre que $[0,1]$ et le carré $[0,1] \times [0,1]$ sont en bijection ; bouleversé, il supplie Dedekind de lui donner son jugement, écrivant : *Je le vois, mais je ne le crois pas.* Cantor commence à distinguer différents infinis, puis il crée seul la *Théorie des ensembles*, une construction étonnante pour l'époque et qui ne plaisait pas à bon nombre de mathématiciens, attachés aux raisonnements constructifs. Il voulait démontrer l'hypothèse du continu, n'y parvenait pas. Cantor pensait aussi que le véritable auteur des pièces de Shakespeare était Francis Bacon ; la folie venait, des deuils aussi ; à partir de 1884, les séjours en asile alternent avec des phases plus calmes où il peut encore donner des cours, voyager. Hilbert disait : *Personne ne doit nous chasser du paradis que Cantor a créé pour nous.*

Chapitre 9

Autour de 1900 : Poincaré et Hilbert

I. HENRI POINCARÉ (1854-1912)

Son père est professeur à la Faculté de médecine de Nancy. À cinq ans, victime de la diphtérie, il frôle la mort, restant paralysé partiellement durant cinq mois. C'est un enfant brillant en tout, sauf en sport et en dessin, extrêmement inventif, ayant déjà de vastes connaissances, une mémoire exceptionnelle, se souvenant avec précision de chacun des livres qu'il lit. Pendant l'hiver 1870, il a l'occasion de voir l'horreur de la guerre de près et en restera profondément marqué. Il passe son baccalauréat ès sciences en novembre 1871 ; il arrive en retard à l'épreuve de mathématiques, comprend mal le sujet ; on lui donne la note 0, mais cela n'a pas d'importance. Deux ans plus tard, il est reçu premier à Polytechnique, avec un total jamais dépassé depuis, mais une note éliminatoire (en principe) pour avoir mal barbouillé son dessin !

Poincaré passe sa thèse avec Hermite (1er août 1879). Gaston Darboux dira, dans son Éloge de décembre 1913, qu'elle contenait *assez de résultats pour fournir matière à plusieurs bonnes thèses*, mais qu'elle manquait parfois d'éclaircissements. Il est alors nommé Maître de conférences à Caen, puis se marie, est nommé à Paris. Les travaux et les publications se succèdent. Les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques $y'' + ay' + by =$, a et b fonctions rationnelles de la variable, étudiées par Lazarus Fuchs (1833-1902), lui résistent. Poincaré est conduit à chercher des fonctions automorphes (fonctions du plan complexe dans lui-même invariantes par un certain groupe de transformations). Il réussit un jour à en trouver de nouvelles classes. Le texte où il relate les circonstances de sa découverte est souvent cité (*Science et* *méthode*, 1908) ; il est rare qu'un mathématicien s'approche ainsi de ce déclic qui se fait en lui :

> … je quittai Caen, où j'habitais alors, pour prendre part à une course géologique entreprise par l'École des Mines. Les péripéties du voyage me firent oublier mes travaux mathématiques ; arrivé à Coutances, nous montâmes dans un omnibus pour je ne sais quelle promenade ; au moment où je mettai le pied sur le marche-pied, l'idée me vint, sans que rien dans mes pensées antérieures parût m'y avoir préparé, que les transformations dont j'avais fait usage pour définir les fonctions fuchsiennes étaient identiques à celles de la géométrie non-euclidienne. Je ne fis pas la vérification ; je n'en aurais pas eu le temps, puisque, à peine assis dans l'omnibus, je repris la conversation commencée, mais j'eus tout de suite une entière certitude. De retour à Caen, je vérifiai le résultat à tête reposée pour l'acquit de ma conscience.

En 1885, le problème des *n* corps fait l'objet du concours organisé par le roi de Suède. C'est l'envoi de 250 pages de Poincaré qui est récompensé ; Weierstrass écrit : *il est d'une telle importance que sa publication ouvrira une ère nouvelle dans l'histoire de la Mécanique céleste*. Poincaré met l'accent sur les méthodes qualitatives et géométriques. Tout n'est pas clair ; Mittag-Leffler lui demande des éclaircissements et reçoit neuf longues notes. Le prix est attribué, le mémoire est déjà imprimé quand Edvard Phragmen (1863-1937) attire l'attention de Poincaré sur une nouvelle difficulté. Poincaré s'aperçoit d'une erreur : des conditions initiales très proches peuvent conduire au bout d'un certain temps à des situations tout à fait différentes et qu'on ne peut prévoir, par exemple, si une planète du système solaire (et si c'était notre Terre…) n'allait pas être éjectée à plus ou moins brève échéance. Son erreur est fantastique ; elle ouvre sur un domaine extrêmement riche, celui des comportements chaotiques pour les systèmes dynamiques ; il fallait attendre les ordinateurs pour mieux voir ce qui se passe.

De 1892 à 1905, Poincaré publie une impressionnante série de mémoires qui fondent la topologie algébrique (l'*Analysis Situs*) : *Toutes les voies diverses où je m'étais engagé successivement me conduisaient à l'*Analysis Situs. *J'avais besoin des données de cette science pour poursuivre mes études sur les courbes définies par les équations différentielles et pour les étendre aux* *équations différentielles d'ordre supérieur, et en particulier, à celles du problème des trois corps.* Poincaré introduit les objets et les méthodes de cette nouvelle discipline ; par exemple, il définit le groupe fondamental d'un espace, c'est-à-dire le groupe des lacets d'origine fixée, autrement dit les courbes fermées continues de l'espace, en identifiant les courbes qu'on peut déformer l'une en l'autre (la présence d'un trou, par exemple, empêche de déformer une courbe qui fait le tour du trou en une courbe qui ne le fait pas), il généralise la formule d'Euler pour les polyèdres en une formule appelée aujourd'hui formule d'Euler-Poincaré. Toujours aussi intuitif, il laisse aux générations suivantes le soin de constructions rigoureuses. Sa célèbre conjoncture sur les sphères (une surface de dimension 3 dont le groupe fondamental est nul est une sphère, à déformation continue près) a conduit à plusieurs médailles Fields.

Poincaré a écrit près de 500 mémoires (moins qu'Euler, mais en moins de temps) abordant tous les sujets des mathématiques, la thermodynamique, les probabilités, la physique (il est très proche des résultats d'Einstein sur la relativité restreinte). Il a aussi écrit des livres de vulgarisation toujours d'actualité comme *Science et hypothèse*, *La valeur de la science*, *Science et méthode*.

Une photo très émouvante le montre au premier congrès Solvay de 1911, vieilli, assis à côté de Marie Curie qui suit intensément ses explications alors que tout le reste du congrès (rien que des hommes, Einstein, etc.) prend la pose. En 1912, Poincaré est toujours aussi actif, se déplace à Londres, Vienne, Bruxelles. Il a des problèmes de prostate ; on l'opère le 9 juillet ; tout semble aller pour le mieux quand une embolie l'emporte, en un quart d'heure, le 17 juillet.

II. DAVID HILBERT (1862-1943)

On dit qu'Hilbert a été, avec Poincaré, l'un des deux derniers mathématiciens ayant pu avoir une vue d'ensemble sur les mathématiques. Après eux, il y avait trop de branches dans les mathématiques et personne ne pouvait tout dominer.

Hilbert est né à Königsberg (La vie de David Hilbert est racontée par Constance Reid, *Hilbert*, Springer-Verlag, 1970 et, en plus court, par Jacques Roubaud, dans *L'abominable tisonnier de John Mac Taggart Ellis Mc Taggart*, Seuil, 1997). Parmi ses camarades et amis figure Hermann Minkowski (1864-1909), futur grand mathématicien lui aussi (il enseigne à Einstein à Zürich, crée, en 1908, le concept d'espace-temps, base des théories d'Einstein, meurt brutalement d'une péritonite, discutant le dernier jour de sa vie de l'article qu'il voulait publier). Hilbert avait l'esprit lent : on lui expliquait quelque chose et il ne comprenait pas ; on insistait, on insistait encore… alors il demandait si ce qu'on lui expliquait ne pouvait pas se comprendre d'une façon très simple qu'il indiquait… Le premier grand résultat d'Hilbert est un article de quatre pages qui contourne les énormes calculs de ses prédécesseurs dans la théorie des invariants.

En 1895, un poste se libère à Göttingen et Klein appelle Hilbert pour l'occuper. Hilbert construit une grande maison avec, pour travailler, un grand tableau noir de six mètres de long contre le mur de son voisin dans une allée couverte. Göttingen devient le plus grand centre mathématique de son époque. Dans ses cours, Hilbert buttait sur des difficultés imprévues, s'arrêtait pour réfléchir, partait sur une idée nouvelle ; mais il avait un succès fou.

En 1897, le *Zahlbericht* est un rapport rassemblant tous les travaux sur la théorie des nombres algébriques ; Hilbert, *sans négliger le point de vue historique, y reprend toute la théorie d'une manière didactique, suivie, complète et personnelle… fait ressortir les théorèmes essentiels…* ; le théorème 90, connu par son numéro dans le rapport, est central en théorie de Galois et s'ouvre sur la cohomologie.

En 1899, Hilbert donne, dans les *Grundlagen der Geometrie*, un système d'axiomes complet de la géométrie plane : axiomes sur l'existence de droites et plans, sur la relation : *être situé entre*, sur la congruence de figures, sur la continuité, axiomes d'Archimède et des segments emboîtés, des parallèles. Il étudie l'indépendance des axiomes à l'aide de modèles satisfaisant certains d'entre eux et pas les autres. En utilisant un repère, il montre que les axiomes de l'arithmétique sont non contradictoires si et seulement si les axiomes de la géométrie sont non contradictoires. Le travail de Hilbert va influencer tout le développement de la logique mathématique du vingtième siècle. Raymond Queneau (1903-1973) rappelle dans son dernier texte : *Les fondements de la littérature selon David Hilbert* comment Hilbert attendant le train pour Königsberg en gare de Berlin, murmura pensivement : « *Au lieu de points, droites et plans, on pourrait tout aussi bien employer les mots : tables, chaises et vidrecomes* », et Queneau remplace points, droites et plans par *mot*, *phrase* et *paragraphe*…

Le congrès des mathématiciens de 1900 est l'occasion pour Hilbert de proposer 23 problèmes (voir la section suivante).

Hilbert étudie ensuite longuement les équations intégrales, orientant l'analyse fonctionnelle des cinquante années suivantes. Il s'intéresse ensuite à la physique, cherche les équations les plus générales, est devancé par Einstein pour les équations de la relativité générale ; il lui rendra hommage. Son livre de 1924, écrit avec Richard Courant (1888-1972) *Methoden der Mathematischen Physik*, est encore une référence.

À partir de 1922, Hilbert travaille sur les fondements des mathématiques. Il explicite clairement son programme, le 8 septembre 1930, dans un discours à la radio de Königsberg (un enregistrement de ce discours a été conservé ; on peut donc entendre la voix claire et précise de Hilbert) et il propose le slogan célèbre : *Wir müssen wissen, Wir werden wissen* (*Nous devons savoir, nous saurons*).

Pendant toutes ces années, Hilbert a été apprécié, aimé et admiré. C'était un homme simple, direct, chaleureux ; il adorait danser, il venait faire ses cours en bras de chemise par temps chaud, ce qui était très inhabituel dans l'Allemagne de cette époque ! Il ignorait les frontières créées par la guerre. Quand les non-mathématiciens du Conseil de l'université refusèrent de donner le moindre poste à la grande Emmy Noether (qu'une femme devienne leur collègue !), Hilbert dit que le Conseil n'était pas un établissement de bains ; il partagea ses cours avec elle, la payant sur son propre salaire pendant des années. C'est à elle, à Hilbert et à Emil Artin qu'on doit toute une partie des idées de l'algèbre moderne, rédigées dans un livre d'une grande influence, le *Moderne algebra* de Bartel Van der Waerden (1903-1996) de 1930.

En 1933, les nazis arrivent au pouvoir en Allemagne et commencent à chasser de l'Université tous ceux qui sont juifs, ont un ascendant juif, etc. Hilbert, qui a toujours travaillé avec les uns et les autres sans se poser de questions, ne comprend pas ; *C'est illégal !* dit-il. Emmy Noether, Courant et d'autres moins connus, des physiciens, sont démis de leurs fonctions les 25 et 27 avril ; Hermann Weyl, dont la femme est juive, tente de négocier pour tous, puis il part lui aussi aux États-Unis. Le ministre de l'éducation s'extasie devant Hilbert : *Comment sont les mathématiques à Göttingen depuis que nous vous avons débarrassé de l'influence juive ?* Hilbert répond tristement : *Il n'en reste vraiment plus.* Puis il oublie tout ; plus rien ne l'intéresse. La guerre arrive ; il reste seul avec sa femme ; il oublie tout de plus en plus. Il meurt le 14 février 1943 ; son enterrement est suivi par quelques personnes.

III. LES 23 PROBLÈMES DE HILBERT

Les premiers congrès internationaux de mathématiciens ont été organisés à la fin du dix-neuvième siècle : à Chicago (1893), Zürich (1897), Paris (1900). Depuis 1900, ils ont eu lieu tous les 4 ans (sauf en 1916, 1942, 1946) ; les premiers rassemblaient 200 personnes ; les plus récents plus de 5000.

Hilbert prépara soigneusement son intervention du 8 août 1900. Il donna une liste de problèmes ouverts, chacun comme une sorte de défi aux générations futures dont la solution marquerait la communauté mathématique et apporterait la gloire à son auteur. Il discuta de son intervention avec ses amis Adolf Hurwitz (1859-1919) et Minkowski. Il donna sa conférence en allemand, ayant fait distribuer un résumé en français.

> Lequel d'entre nous ne souhaiterait pas soulever le voile cachant le futur et jeter un œil pour connaître les développements de notre science dans le prochain siècle…

Les 23 problèmes choisis par Hilbert se sont presque tous révélés effectivement extrêmement difficiles, dignes des recherches des mathématiciens du vingtième siècle et ouvrant la voie à de nouvelles théories.

Le premier problème est l'*hypothèse du continu*, problème de théorie des ensembles posé en 1878 par Cantor : il s'agissait de montrer qu'il n'existe pas d'infini intermédiaire entre celui de l'ensemble des entiers et celui, strictement plus grand, de l'ensemble des réels. C'est Paul Cohen (médaille Fields 1966) qui apporte la réponse, négative, en 1963, en créant la méthode du *forcing* : la théorie des ensembles n'avait pas assez d'axiomes sur l'infini pour décider.

Le second problème est celui de la non-contradiction d'un système d'axiomes pour l'arithmétique ; en 1931, Kurt Gödel (1906-1978) montre un théorème dit d'*incomplétude* : pour un tel système, il existera des énoncés dont on ne pourra montrer ni qu'ils sont vrais, ni qu'ils sont faux. Il s'agit là d'un résultat d'indécidabilité relative et non d'une limite au raisonnement mathématique. Le théorème de Gödel a été transposé récemment par Régis Debray (né en 1940) dans le domaine philosophique ; l'imprudence de sa démarche est analysée dans Jacques Bouveresse, *Prodiges et vertiges de l'analogie* (Raison d'agir, 1999).

Le septième problème demande de montrer la transcendance de nombres de la forme a^b, avec a algébrique, $a \neq 0,1$ et b algébrique irrationnel (par exemple : $2^{\sqrt{2}}$). En 1844, Liouville avait donné les premiers exemples concrets de nombres transcendants, comme $\sum_{n \geqslant 0} 1/10^{n!}$. Hermite, en 1873, avait montré la transcendance de e et Ferdinand von Lindemann (1852-1939), en 1882, celle de π (ainsi, les efforts de tous ceux qui cherchaient depuis 2000 ans à construire à la règle et au compas un carré de même aire qu'un cercle donné étaient-ils absolument vains !) Hilbert considérait ce problème comme extrêmement difficile, mais Alexandre Gelfond (1906-1968) et Theodor Schneider (1911-1988) le résolvent en 1934-35.

Le huitième problème est la conjecture de Riemann, toujours ouvert.

Le dixième problème porte sur la résolution en nombres entiers d'équations à coefficients entiers ayant un nombre d'inconnues quelconque. C'est Iouri Matiyasevitch (né en 1947) qui montre, en 1970, qu'il n'existe pas d'algorithme général pour reconnaître si des solutions rationnelles existent, utilisant les résultats de nombreuses années de recherche de Julia Robinson (1919-1985).

Chapitre 10

Vues sur les mathématiques du XX^{e} siècle

Plus nous avançons dans l'histoire et plus il y aurait de mathématiciens géniaux à citer, de travaux importants à indiquer.

I. JACQUES HADAMARD (1865-1963)

Le résultat le plus célèbre d'Hadamard est la démonstration du théorème des nombres premiers : *Le nombre* $\pi(x)$ *de nombres premiers inférieurs à* x *est équivalent à* $x/\ln(x)$ *quand* $x \to \infty$, qu'il démontra en 1896, alors qu'indépendamment, Charles de la Vallée Poussin (1866-1962) en faisait autant, tous deux s'appuyant sur la théorie des fonctions de variable complexe et sur l'article de Riemann de 1859. On supposa pendant longtemps que cette démonstration rendait immortel ; d'année en année, la conjecture se vérifiait jusqu'à ce qu'elle s'avère fausse, pour l'un, puis pour l'autre.

Hadamard (voir Vladimir Maz'ya, Tatyana Shaposhnikova, *Jacques Hadamard, un mathématicien universel*, EDP Sciences, 2005) était un personnage charmant, d'un enthousiasme juvénile, d'une mémoire et d'une vivacité d'esprit extraordinaires, toujours prêt à passer huit jours à cheval (même à 80 ans) pour aller chercher les fougères dont il était un grand connaisseur (ses collections sont parmi les plus importantes de France). Il habitait près de la place Denfert-Rochereau à Paris, organisaient des concerts où Einstein aimait jouer du violon… À partir de l'affaire Dreyfus (avec lequel il était parent), il a été de toutes les luttes pour la justice, contre le fascisme, etc. Il travaillait encore à 95 ans, mais se fatiguait plus vite. Il était aussi d'une distraction incroyable : citons son oubli des laisser-passer pour fuir la France pour les États-Unis en 1942 (ce qui vaudra à toute la famille de passer quelques jours en prison à Ellis Island), etc. Le dessinateur Christophe (George Colomb, 1856-1945) s'en est inspiré dans sa bande dessinée sur le savant Cosinus. Un rébus d'Hadamard est resté célèbre :

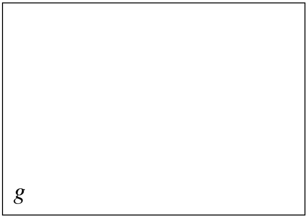

Fig. 10.1 – Le rébus d'Hadamard

Hadamard a abordé tous les domaines de l'analyse : étude de la série de Taylor (son rayon de convergence, son comportement sur le bord du disque de convergence, etc.), étude des équations aux dérivées partielles, où il définit la notion de problème bien posé (dont la solution existe, est unique et dépend continûment des conditions initiales), étude des équations de l'élasticité et de la propagation des ondes de surface, etc. Ses *Leçons de géométrie* (1898-1901) influencent les grandes réformes de 1905. Son séminaire est un lieu unique au monde où il fait exposer des travaux récents, pose des questions quand il ne comprend pas, a sans cesse des idées et des suggestions.

Les drames n'ont pas manqué dans la vie d'Hadamard. Trois de ses fils sont tués, deux à Verdun en 1917, à deux mois d'intervalle, le troisième pendant la seconde guerre mondiale.

La solution du rébus : Le Roi Pépin sans air (*R*), sans eau (*o*), sans lit (l'*i*), sans pain (*pin*), ayant perdu le peu (*Pé*) qui lui restait, gémit (*g mis*) tout seul dans son coin.

II. HENRI LEBESGUE (1875-1941)

Le travail de Lebesgue sur l'intégration est une des bases de l'analyse fonctionnelle et de la théorie des probabilités. Le premier article de Lebesgue date de 1901, sa thèse : *Intégrale, longueur, aire*, de l'année suivante. Pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et prenant un nombre fini de valeurs $a_1, \ldots, a_n$, l'intégrale de Lebesgue est définie par la somme $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i m_i$ où m_i est la mesure de l'ensemble des x tels que $f(x) = a_i$. Le calcul est donc complètement différent de celui de Riemann. Le développement de la théorie de la mesure a permis des extensions de l'intégrale de Lebesgue.

III. SRINIVASA RAMANUJAN (1887-1920)

Voici une histoire absolument extraordinaire (voir Hardy, *L'apologie d'un mathématicien*, Belin, 1985). Ramanujan est d'une famille pauvre du sud de l'Inde. À 13 ans, il acquiert un résumé de mathématiques contenant 6165 énoncés de théorèmes quasiment sans démonstrations. Il absorbe tout, comprenant à sa manière. Mais il est incapable de poursuivre des études universitaires, l'esprit rempli jour et nuit de mathématiques, réinventant des notions déjà connues, en créant de nouvelles, ayant une intuition ahurissante de nouvelles formules (il disait que la déesse Namakkal les lui inspirait pendant son sommeil). Ayant eu connaissance d'un livre d'Hardy, Ramanujan lui écrit à Cambridge en janvier 1913, envoyant une liste de 120 de ses formules. Quelle lettre ! Hardy se convainc qu'elle est de la main d'un génie et invite Ramanujan à Cambridge. Celui-ci y arrive en avril 1914 et initie une collaboration journalière avec Hardy, l'étonnant par ses idées, la façon dont il les obtient en partant d'exemples numériques. Des résultats sur des séries, les fonctions elliptiques, la fonction Γ, les fractions continues, des évaluations de quantités, des conjectures toujours actuelles (la conjecture sur la fonction τ est démontrée par Deligne en 1973) naissent de cette collaboration unique. Ramanujan est bloqué en Angleterre par la guerre, tombe malade en 1917, fait une tentative de suicide. Il retourne en Inde en 1919 ; sa dernière lettre à Hardy rend compte de sa découverte des *mock theta-functions* dont l'intérêt a été compris récemment.

IV. BUSH ET LA GUERRE

En 1931, Vannevar Bush (1890-1974) conçoit une nouvelle machine, l'*Analyseur différentiel*, permettant de résoudre des équations différentielles avec des dispositifs mécaniques. Dès 1935, le BRL (Ballistic research laboratory, à Aberdeen au Maryland) utilise une de ces machines pour calculer des tables donnant l'angle de tir pour des canons en fonction de nombreux paramètres (type du canon, type du projectile, température, vitesse du vent…) : il fallait établir une table de 2 à 4000 trajectoires par canon et chaque table demandait de longs calculs. Pendant la guerre, le BRL était capable de calculer 15 tables par semaine et la demande était de 40. Les nouveaux canons étaient donc livrés aux militaires sans tables de tir !

Le rôle de Bush est essentiel aux États-Unis pendant toute la seconde guerre mondiale. Il cumule les postes clés, coordonnant les travaux de 6000 scientifiques impliqués dans l'effort de guerre. Les documents de l'époque montrent la difficulté d'intégration des mathématiciens à cet effort : ils étaient trop purs et pas assez appliqués. Bush persuade Roosevelt (1882-1945) de débloquer 2 milliards de dollars pour la construction de la bombe atomique. Une photo le montre l'air fermé ou songeur après l'explosion de la première bombe à Alamogardo, au Nouveau Mexique.

Bush est surtout connu aujourd'hui pour son article de juillet 1945 : *As we may think*, où il a une intuition extraordinaire des possibilités des ordinateurs actuels, d'internet, etc. ; il créera le premier hypertexte.

V. JOHN VON NEUMANN (1903-1957)

Si on ne croit pas que les mathématiques sont simples, c'est qu'on ne réalise pas combien la vie est compliquée, a-t-il dit.

John Von Neumann naît à Budapest dans une famille aisée (voir Aspray William, *John Von Neumann and the origin of modern computing*, MIT Press, 1990, Goldstine Herman, *The Computer from Pascal to von Neumann*, Princeton Univ. Press, 1972). C'est un enfant prodige. Il a une mémoire exceptionnelle, étant capable de mémoriser des livres entiers et de les réciter plusieurs années plus tard.

Les premiers travaux mathématiques de Von Neumann lui valent une notoriété mondiale : ils portent sur la logique mathématique, les fondements de la théorie des ensembles avec la définition actuelle des ordinaux, la théorie de la mesure, les fonctions de variable réelle.

De 1927 à 1929, il propose l'axiomatisation de la mécanique quantique à l'aide des espaces de Hilbert (le nom lui est dû), puis initie l'étude des algèbres d'opérateurs sur ces espaces, un domaine toujours très actif. Il trouve également une réponse partielle au cinquième problème de Hilbert.

Fig. 10.2 – John Von Neumann © 2006 Los Alamos National Security, LLC, tous droits réservés.

Il est membre de l'*Institute for advanced studies* à Princeton à sa création, en 1933, et y restera toute sa vie. L'enseignement n'était pas son point fort : il écrivait dans un coin du tableau, effaçait avant qu'on ait pu copier et sa pensée fluide était difficile à suivre par des étudiants moyens. Il épouse en 1938 une hongroise, Klara Dan, rencontrée lors de l'un de ses voyages. Il a toujours aimé la vie nocturne ; c'était un habitué des cabarets de Berlin ; avec Klara, ils organisent chez eux, à Princeton, de nombreuses et brillantes soirées. Klara Dan sera une des premières programmeuses, avec la femme de Hermann Goldstine (1913-2004) et celle du sumérologue Samuel Noah Kramer (1897-1990).

Von Neumann développe la théorie des jeux à l'origine des travaux en économie de la seconde moitié du siècle. Il publie un livre fondateur sur le sujet en 1944, écrit en collaboration avec Oskar Morgenstern. La théorie des jeux servira aussi pour modéliser le fonctionnement complexe des armées : emplacements des radars, gestion des ressources humaines et matérielles, maximisation des dommages produits à des ensembles de cibles suivant leur répartition, leur vulnérabilité, leurs moyens de riposte, etc.

La participation de Von Neumann aux recherches militaires des États-Unis est impressionnante ; il y apparaît comme un acteur clef. En 1941, la guerre lui prend le quart de son temps, les années suivantes, la moitié ; il est impossible de citer tous les organismes où il est impliqué. Dans les années 1950, il est toujours très sollicité par les militaires et par les civils.

Von Neumann a été associé tardivement à la conception du premier ordinateur, l'ENIAC (Electronic Numerical Integrator Analyser and Computer), construit pour le calcul rapide de tables de tir. Mais il comprend tout ce que peuvent apporter à la recherche mathématique ces nouvelles machines et, en visionnaire, explique que les ordinateurs vont permettre de résoudre de nombreux problèmes de mathématiques pures et appliquées pour lesquels une approche purement analytique est impossible, que les algorithmes pour résoudre numériquement ces problèmes avec ces nouveaux matériels très puissants n'ont jamais été étudiés et que de nouvelles branches des mathématiques doivent être développées. Von Neumann intervient de manière décisive pour la conception de l'EDVAC (Electronic Discrete Variable Automatic Computer), en particulier dans un rapport de juin 1945 où il détaille l'architecture du futur ordinateur, sa partie logique, sa partie arithmétique, sa mémoire, ses unités d'entrée et de sortie ; il impose l'écriture des nombres en binaire, préconise l'adoption du bit comme unité de mesure, etc. Enfin, il met sur pied lui-même la construction d'un nouvel ordinateur, l'IAS (pour Institute of Advanced Study) dont l'architecture sera reproduite dans la plupart des ordinateurs jusqu'à nos jours.

Von Neumann, dont l'anticommunisme était très ancien, participa sans état d'âme aux recherches sur la bombe H ; si les Russes y parvenaient les premiers, cela leur donnerait la possibilité de poser des ultimatums insupportables et seule une puissance démocratique, avec des libertés, méritait de posséder cette arme, écrivait-on. L'effet devrait être comparable à celui d'événements naturels comme l'éruption du Krakatoa ou le tremblement de terre de San Francisco. Pour rendre les énormes calculs possibles par l'ordinateur, Stanislaw Ulam (1909-1984) et Von Neumann élaborèrent la méthode de Monte-Carlo, qui allait avoir de multiples applications : simuler au hasard des événements, prendre la moyenne des résultats.

En 1955, c'est l'un des hommes les plus puissants des États-Unis. Il est atteint d'un cancer ; il souffre beaucoup ; sa détresse devant l'approche de la mort semble avoir été terrible. Lui qui avait, à sa façon, tellement aimé la vie et su en profiter, avait encore tellement d'idées à développer.

VI. NICOLAS BOURBAKI (NÉ EN 1934)

La guerre de 1914 est terrible en France pour toutes les catégories de la population. Les jeunes scientifiques français ont été moins protégés que les scientifiques allemands du même âge ; beaucoup sont morts (sur les 240 éléves de l'École normale supérieure (ENS), 120 ont été tués, 23 n'ont pas été blessés ; à l'X, en 1919, une promotion rassemblant les élèves des cinq années précédentes a été formée).

Les meilleurs élèves des années 1920 de l'ENS sont de grands mathématiciens : Jean Delsarte (1903-1968, promotion 1922), André Weil (1906-1998, promotion 1922, Henri Cartan (né en 1904, promotion 1923), Jean Dieudonné (1906-1992, promotion 1924), Jacques Herbrand (1908-1931, promotion 1925), Claude Chevalley (1909-1984, promotion 1926). Jacques Herbrand était dit-on, le plus fort de tous. Ses premiers résultats de logique mathématique sont remarquables, mais il se tue en randonnant du côté du Pelvoux. Les autres se forment au séminaire de Jacques Hadamard, deviennent enseignants dans des facultés de province ; ils trouvent qu'aucun manuel satisfaisant n'existe pour le cours de calcul différentiel et intégral, décident d'en écrire un (réunion au café Capoulade, à l'angle de la rue Soufflot et du boulevard Saint-Michel, tout près de la Sorbonne, le 10 décembre 1934) ; ils s'engagent dans un projet immense. Les réunions succèdent aux réunions, le projet se développe ; à Besse-en-Chandesse, en juillet 1935, au premier d'une longue série de ce qu'ils appelleront *congrès*, le traité semble devoir compter plus de 3000 pages ; le groupe prend le nom de Bourbaki (pourquoi le nom de ce général français, Charles Bourbaki (1816-1897), d'origine crétoise qui fit la guerre en Algérie, en Crimée et en France en 1870-71 ?). Le groupe en vient à la rédaction d'un traité qui *prend les mathématiques à leur début, et donne des démonstrations complètes. Sa lecture ne suppose donc, en principe, aucune connaissance mathématique particulière, mais seulement une certaine habitude du raisonnement mathématique et un certain pouvoir d'abstraction*. Sous le titre d'*Éléments de mathématiques* (un hommage à Euclide), il sera séparé en livres (Théorie des ensembles, Algèbre, Topologie générale, Intégration... dix aujourd'hui) publiés en fascicules, après de multiples réécritures.

L'œuvre de Bourbaki a eu un impact considérable sur l'ensemble des mathématiques ; et on entend souvent dire quand on s'interroge sur la présentation d'une notion : *Comment fait Bourbaki ?* Toutes les notions étaient reprises dans un cadre déductif impeccable et très général ; certaines d'entre elles étant définies pour la première fois comme celle de topologie quotient ou celle de filtre, inventée en 1937 par Henri Cartan, insatisfait des définitions de la notion de convergence qui étaient proposées par ses collègues. De nombreuses notations de Bourbaki se sont imposées, comme celle de l'ensemble vide : Ø, inventée par Weil en prenant une lettre de l'alphabet norvégien. Le vocabulaire choisi avec beaucoup de soin par Bourbaki comme *boule*, *voisinage*, *compact*, *surjection*, *injection*, *bijection*, etc., s'est imposé.

Depuis 1948, le groupe Bourbaki, organise un séminaire dans lequel sont exposés, à l'amphithéâtre Hermite de l'Institut Henri Poincaré, rue d'Ulm à Paris, en trois sessions de cinq ou six conférences chaque année, les résultats mathématiques jugés les plus importants du moment.

L'enseignement universitaire a été rapidement transformé à la fin des années 1950 sous l'influence de Bourbaki, le premier signe étant le cours de topologie de Gustave Choquet (1915-2006) en 1954-55 (voir le début du livre de Jacques Roubaud, *Mathématique :*, Seuil, 1997).

VII. LE LANGAGE DES CATÉGORIES ET DES FONCTEURS

Depuis Poincaré, et même bien avant, on a cherché à associer à des espaces topologiques des objets plus faciles à manier (groupes d'homologie, d'homotopie, etc.). Cette association peut se décrire avec ce que Saunders Mac Lane (1909-2005) et Samuel Eilenberg (1913-1998) ont appelé des catégories, des foncteurs et des transformations naturelles dans une série d'articles en commun des années 1940. Le langage des catégories, les diagrammes de morphismes, sont d'une grande utilité pour décrire des situations générales. Il a permis, parmi tant d'autres exemples, à Grothendieck de définir ses topos (comme le titre de cette collection). Les topos eux-mêmes ont conduit William Lawvere (né en 1937) et Jean Bénabou (né en 1932) à repenser toute la théorie des ensembles.

VIII. L'ÉCOLE RUSSE AUTOUR D'ANDREI KOLMOGOROV (1903-1987)

Nikolai Lusin (1883-1950) est originaire de la Sibérie. Il s'oriente vers la théorie des fonctions, suivant les travaux de Lebesgue ; dans les années 1920, il fonde avec son maître Dimitri Egorov (1869-1931) la grande école mathématique de Moscou où vont se former les jeunes mathématiciens russes.

Pavel Uryson (1898-1924) est conduit par des questions d'Egorov à des notions entièrement nouvelles en topologie ; il voyage, rencontre Hilbert et Emmy Noether à Göttingen. Il se noie à Batz-sur-mer en 1924.

Kolmogorov a apporté des contributions essentielles dans des branches très différentes des mathématiques. À ses débuts, en 1922, il s'intéresse aux séries de Fourier, construisant un contre-exemple important, à la théorie des ensembles, à la logique. Au début des années 1930, il met en place le formalisme des univers avec des lois de probabilités sur l'espace des événements que nous présentons aux élèves dès la fin du secondaire.

Il commence en 1929 une amitié profonde et qui ne devait cesser qu'à leur mort avec le mathématicien Pavel Alexandrov (1896-1982). Dans leur maison de Komarovka près de

Moscou, ils accueillaient chaleureusement leurs collègues de Moscou ou de passage, comme Hadamard.

C'est en 1941 que Kolmogorov commence ses études sur la turbulence et le mouvement des planètes. Il les développe au début des années 1950 engageant l'étude des systèmes dynamiques dans de nouvelles voies ; il montre, avec des contributions d'Arnold et Jürgen Moser (1928-1999), que sous certaines conditions, les phénomènes chaotiques peuvent avoir des comportements beaucoup plus stables qu'on ne le pensait alors. C'est le début de la célèbre théorie KAM, nom formé à partir des initiales de ses inventeurs.

Fig. 10.3 – Andrei Nikolaievitch Kolmogorov

En 1956-57, Kolmogorov obtient après 15 jours de réflexion intense un résultat surprenant qui conduit Arnold, alors jeune étudiant, à résoudre négativement le treizième problème de Hilbert, puis Kolmogorov à de nouvelles découvertes qui contiennent, comme cas particulier, le fait que toute fonction continue de deux variables peut s'écrire comme somme de cinq fonctions de la forme $F(g(x)+h(y))$ où n'interviennent que des fonctions d'une variable et la somme. La résolution du treizième problème s'ouvrait sur la complexité des espaces de fonctions.

Dans les années 1960, Kolmogorov donne une définition simple de la complexité d'une suite de 0 et de 1 qui allait rendre de multiples services : par exemple, une suite constituée de 100 blocs successifs de 01 : 0101…01 est en général moins complexe qu'une suite de deux cents 0 ou 1 se succédant n'importe comment. Une suite aléatoire est définie comme ayant une complexité maximale. Cela donnait une réponse à la question de Laplace : qu'est-ce qu'un objet pris au hasard ?

Les grands mathématiciens russes formés par Kolmogorov sont nombreux : Arnold, toujours actif aujourd'hui, que j'ai déjà cité ; Israël Gelfand (né en 1913) a publié plus de 500 articles développant les théories des anneaux normés non commutatifs, de la représentation des groupes, des algèbres de Lie, des mathématiques appliquées et de la biologie émigré aux États-Unis en 1990 ; Iouri Manin a travaillé dans de nombreux domaines de l'algèbre, de la théorie des nombres et de la physique fondamentale et a écrit un beau traité d'algèbre homologique avec Gelfand en 1988, etc.

IX. ANDRÉ WEIL (1906-1998)

André Weil a raconté la première partie de sa vie dans un très beau livre : *Souvenirs d'apprentissage*, Birkhäuser, 1991. Il a été étroitement lié à sa sœur Simone (1909-1943), une philosophe engagée désespérément dans son temps. Weil s'intéresse aussi à la culture indienne, apprenant le sanscrit, se souvenant de *mandam mandam nudati pavanah*… (Doucement doucement te pousse le vent…)

Weil commence sa thèse avec Hadamard, se proposant d'attaquer une conjecture célèbre, celle de Mordell : les courbes algébriques de genre au moins 2, n'ont qu'un nombre fini de points à coordonnées rationnelles ; il y renonce avec sagesse ; la conjecture ne sera vaincue qu'en 1983 (par Gerd Faltings (né en 1954), médaille Fields 1986). C'est l'un des membres fondateurs de Bourbaki. Il est balloté par le début de la guerre, comme il le raconte, manque être exécuté comme espion en Finlande, est jeté en prison au début de 1940 comme pacifiste en France (il dit avoir rencontré en prison des conditions de travail idéales ; c'est là qu'il obtient la démonstration de la conjecture de Riemann pour les fonctions ζ des corps de fonctions) ; de 1958 à 1976, il enseigne à l'Institute for advanced studies de Princeton.

Weil a obtenu des résultats profonds en théorie des nombres, en géométrie algébrique, etc. à l'origine de plusieurs médailles

Fields. Ses trois conjectures de 1949 sur le nombre de solutions d'équations diophantiennes ont été résolues, la première par Bernard Dwork (1923-1998) en 1959, la seconde par Grothendieck en 1963, la troisième par Deligne en 1973.

La fameuse conjecture de Shimura-Taniyama-Weil est démontrée par Andrew Wiles, en 1994 ; elle entraîne le grand théorème de Fermat, et d'autres résultats magnifiques.

X. HENRI CARTAN (NÉ EN 1904)

Le père d'Henri Cartan est le grand Élie Cartan, fils d'un forgeron du Dauphiné, qui a développé la théorie des groupes de Lie, la géométrie différentielle, etc. Les travaux mathématiques d'Henri Cartan portent sur les fonctions de variables complexes, la topologie algébrique, l'algèbre homologique (son livre de 1953 sur le sujet, écrit avec Samuel Eilenberg, est un classique). On sait qu'il fait partie des membres fondateurs de Bourbaki. De 1945 à 1965, il forme les normaliens, les enthousiasmant par ses cours, dansant presque de joie à la fin d'une belle démonstration, connaissant et orientant chacun de ses élèves, encadrant des thèses. C'est à lui, en particulier, qu'est dû le renouveau de l'école mathématique française au changement de génération qui se produit dans les années 1950. À partir de 1948, le séminaire qu'il organise est un des grands lieux de la recherche mathématique mondiale. Les livres de Cartan pour les étudiants sont d'autres grands classiques. Notons enfin qu'Henri Cartan a été un militant inlassable pour l'Europe et pour le soutien aux mathématiciens persécutés dans le monde en URSS, en Argentine… Cartan a fêté ses 100 ans en 2004.

XI. JEAN LERAY (1906-1998)

Jean Leray fait ses études à Nantes puis à Rennes avant d'entrer à l'ENS en 1926. Leray se tourne d'abord vers la mécanique des fluides. Euler avait donné les équations régissant le mouvement de fluides incompressibles et non visqueux. Claude Navier (1785-1836) les avait généralisées au cas des fluides incompressibles et visqueux. Les simulations numériques sur ordinateur ont montré depuis que ces équations étaient une bonne modélisation des mouvements des fluides. Elles posent de redoutables problèmes. Leray s'y attaque dans des articles exceptionnels publiés en 1934 : toutes les idées sont nouvelles et la mécanique des fluides aussi bien que la théorie des équations aux dérivées partielles en sont bouleversées. Il montre l'existence d'une solution, unique étant donné un état de vitesse initial, dans le cas de la dimension 2. Pour la dimension 3, il montre l'existence de solutions *turbulentes* (on dit maintenant *faibles*) ; la question de l'unicité de ces solutions est toujours ouverte.

Le 24 juin 1940, Leray, resté seul à la tête de sa batterie est fait prisonnier. Il est conduit à l'Oflag XVII A en Autriche. Après avoir fait face plusieurs mois à la famine, il organise une université dans son camp, en est le recteur, fait passer 500 diplômes. Ne voulant pas que les Allemands puissent utiliser ses qualités de chercheur en mathématiques appliquées, il s'oriente vers des sujets théoriques de topologie algébrique, sans documentation. Les outils qu'il crée vont être à la base des développements futurs de l'analyse et de la géométrie algébrique. Il travaille sur les groupes de cohomologie, élabore la théorie des faisceaux, qui permet de relier les propriétés locales et globales, et sa fameuse suite spectrale. Il est libéré le 10 mai 1945, publie ses résultats, les améliore avec Henri Cartan, les expose au Collège de France où il enseignera à partir de 1947. Il revient alors aux fonctions de plusieurs variables complexes et obtient une longue série de résultats profonds (dont un théorème généralisant le théorème des résidus de Cauchy, en 1959) qui, là encore, ouvrent de vastes domaines de recherche. Il est à l'origine de la grande école de mathématiques appliquées française et Jacques-Louis Lions soulignera ce qu'il lui devait.

XII. LAURENT SCHWARTZ (1915-2002)

Dans un très beau livre (*Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Odile Jacob, 1997), Laurent Schwartz retrace son itinéraire de mathématicien, d'homme et sa vie de militant contre les injustices. La période de la guerre est extrêmement difficile pour Schwartz, d'origine juive. Schwartz invente les distributions (une généralisation de la notion de fonction, comme la *fonction* δ de Dirac, nulle partout sauf en 0 où elle est infinie et telle que $\int_{-1}^{1} f(t)\delta(t)\,dt = f(0)$), maintenant d'un usage constant dans les mathématiques appliquées et certaines branches de la physique. Il reçoit la médaille Fields en 1950.

Schwartz organise, avec d'autres, la soutenance de thèse *in abstentia* de Maurice Audin, jeune mathématicien arrêté, torturé et assassiné par l'armée française à Alger en juin 1957. Il signe le manifeste des 121 ; c'est lui aussi qui est à la tête des comités Vietnam en 1965, qui propose à Grothendieck d'aller y donner des cours sous les bombes en 1969.

Schwartz avait une singularité : il était incapable de voir dans l'espace, de se diriger dans une ville, devant faire appel à sa femme sitôt le premier coin de rue franchi. Cela ne l'handicapait pas cependant pour travailler dans des espaces de dimension infinie.

Schwartz a été Professeur à Polytechnique, y créant à partir de rien un grand centre de recherche mathématique. Il est à l'origine d'une grande partie de l'école française d'analyse actuelle.

XIII. ALEXANDRE GROTHENDIECK (NÉ EN 1928)

Le père de Grothendieck a été longuement engagé dans des combats révolutionnaires jusqu'à sa mort en 1942, dans un camp. Grothendieck passe alors deux ans au Chambon-sur-Lignon, la célèbre commune des Cévennes où 3 à 5000 enfants juifs furent sauvés par la population huguenote et le pasteur André Trocmé (1905-1971). Il étudie à Montpellier, travaillant seul, passe une année par Paris et apparaît dans le monde mathématique à Nancy en 1951, où il va voir Dieudonné et Schwartz. Il a des idées très générales (trop, lui dit Dieudonné, très agacé). Ils lui donnent une liste de 14 questions auxquelles ni l'un ni l'autre ne savent répondre ; Grothendieck disparaît ; quelques semaines plus tard, il revient avec des solutions *profondes et difficiles*, écrit Schwartz.

Apatride, refusant de faire son service militaire pour être naturalisé français, Grothendieck ne peut trouver de poste après sa thèse et part à l'étranger. Quand il revient, il s'oriente vers la géométrie algébrique. Il est nommé professeur dans un Institut nouvellement créé : l'IHES (Institut des hautes études scientifiques) construit à Bures-sur-Yvette au sud de Paris dans un cadre merveilleux. Il fonde la *théorie des schémas*, une révolution dans la géométrie algébrique. Afin de développer la théorie des équations polynomiales sur des anneaux et non plus seulement sur des corps, ce qui permet une unification de la géométrie algébrique et de la théorie des nombres suivant des idées de Serre, Weil et Galois. Pour Grothendieck : *on n'attaque pas de front un problème, mais on l'enveloppe et le dissout dans une marée montante de théories générales.*

Les publications de Grothendieck des années 1960-1970, avec l'aide de Dieudonné, forment un ensemble extraordinaire de plusieurs milliers de pages ; elles ont engendré des centaines de travaux. Le mardi était une journée chargée : cours de Serre au Collège de France le matin, déplacement dans la vallée de Chevreuse le midi, séminaire de l'IHES l'après-midi ; Serre et Grothendieck se voyaient à cette occasion ; leurs approches se complétaient, Serre étant toujours prudent, Grothendieck lançant sans cesse de nouvelles idées (voir *Correspondance Grothendieck-Serre*, SMF, 2001). Tous ceux qui l'ont vécu s'en souviennent comme d'une période unique dans leur vie.

Grothendieck a reçu la médaille Fields en 1966 sans aller la chercher à Moscou. À partir de 1970, il change de vie. Toujours avec la même énergie, il devient militant écologiste, fonde son propre mouvement. Il abandonne (au moins apparemment) les mathématiques pendant quelques années. Il y revient dix ans plus tard : *La longue marche à travers la théorie de Galois* (1980-1981, 1600 pages manuscrites), *Esquisse d'un programme* (de candidature à un poste au CNRS, dont les 48 pages contiennent des merveilles comme ce qu'on appelle les *dessins d'enfants* qui permet des représentations de l'un des objets les plus fascinants : le groupe de Galois de $\bar{\mathbb{Q}}$ (corps des nombres algébriques) sur $\mathbb{Q}$.

Au milieu des années 1980, Grothendieck publie un très long texte autobiographique : *Récoltes et semailles*, qu'on peut trouver sur la Toile. Dans une très belle langue, Grothendieck cherche à analyser ses relations avec les mathématiques, avec ses collègues, avec lui-même, donnant à lire ses interrogations, ses doutes et ses idées jour après jour.

XIV. JEAN-PIERRE SERRE (NÉ EN 1926)

Jean-Pierre Serre est né dans les Pyrénées-Orientales. Après l'École Normale supérieure, il écrit rapidement une thèse splendide sous la direction d'Henri Cartan en développant des techniques dues à Leray pour calculer des objets de la topologie algébrique, en particulier les groupes d'homotopie des sphères. Il en est récompensé par une médaille Fields en 1954, à 28 ans, un record.

Dès 1956, il est nommé professeur au Collège de France. Il le restera jusqu'à sa retraite, respectant la règle de cette institution : enseigner chaque année des résultats nouveaux. Ses cours le conduisent à écrire une douzaine de livres, souvent réédités ; son *Cours d'arithmétique* est un vrai succès. Ses œuvres complètes forment quatre épais volumes. Le style de Serre est la perfection de la rédaction, concise, précise et élégante. Ses travaux ont marqué des branches entières de l'algèbre et de la géométrie actuelle et sont constamment utilisés. Citons *Faisceaux algébriques cohérents* de 1955 où il introduit des méthodes cohomologiques en géométrie algébrique, et *Géométrie algébrique et géométrie analytique*, de 1956, connu par ses initiales : GAGA, ceux de théorie des nombres, sur les courbes elliptiques, etc.

Serre a été le premier lauréat du Prix Abel en 2003 pour *son rôle central dans l'élaboration de la forme moderne de nombreux domaines des mathématiques, notamment la topologie, la géométrie algébrique et la théorie des nombres.*

XV. JACQUES-LOUIS LIONS (1928-2001)

Résistant à 15 ans, normalien à 19, élève de Laurent Schwartz, professeur à Nancy, puis Paris, il se tourne vers le domaine des mathématiques appliquées (voir Amy Dahan-Dalmedico, *Jacques-Louis Lions un mathématicien d'exception*, La Découverte, 2005). Infatigable, il a parcouru le monde entier diffusant des travaux, rapprochant des chercheurs, etc. Au fil des ans, il va former une cinquantaine d'élèves. Il est professeur d'analyse numérique à l'École polytechnique à partir de 1966, au Collège de France à partir de 1973. Ses qualités le conduisent à diriger ou faire partie de différents organismes comme le CNES (Centre national d'études spatiales), la Météorologie nationale, France Télécom, Péchiney, Dassault Aviation, etc.

Les travaux de Lions ont porté sur l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles (EDP). Les EDP apparaissent dans les problèmes de mécanique des fluides (visqueux ou non, compressibles ou non), de résistance des matériaux, d'électromagnétisme, de physique quantique, de neutronique ; elles modélisent les pressions subies par la fusée Ariane au décollage, les problèmes de cavitation qui rendent les sous-marins en déplacement perceptibles à l'ennemi, etc. Pour avoir une idée de leurs solutions, on discrétise le problème pour se ramener à des calculs dans des espaces de dimension finie. Jusque vers les années 1950-60, les calculs devaient être faits à la main… L'apparition des premiers ordinateurs bouleverse les méthodes d'approximation. La méthode des éléments finis est l'objet d'un très grand nombre de travaux. Il s'agit de préciser les conditions d'existence de solutions, d'écrire et étudier les algorithmes permettant de les obtenir, de s'attaquer aux problèmes de perturbations, de la théorie du contrôle, etc. Les livres écrits par Lions (il écrivait très vite) et ses collaborateurs dans les années 1960-70 sont devenus des classiques. Avec Robert Dautray, qui connaît particulièrement les problèmes de physique liés à l'énergie atomique (il a dirigé la construction de la bombe H française en 1967-68), il engage un énorme travail pour donner un exposé systématique, une sorte de Bible de près de 4000 pages publiée en 1984-85, des méthodes mathématiques dont les physiciens des domaines en pointe ont besoin : *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques.*

Enfin, c'est lui qui lance l'idée, en 1992, de faire de l'année 2000 l'année des mathématiques, pour toucher le grand public et encourager la recherche mathématique dans les pays en voie de développement.

XVI. CRYPTOGRAPHIE

La théorie des nombres a été développée depuis 4000 ans sans avoir vraiment directement d'applications ; avec nos critères actuels, on ne l'aurait pas financée. Il y a une trentaine d'années, elle est devenue essentielle en cryptographie, une discipline qui n'en avait jusque là jamais eu besoin, même si des mathématiciens y avaient excellé, comme Alan Turing (1912-1954).

We stand today on the brink of a revolution in cryptography, Nous sommes en ce moment à la veille d'une révolution en cryptographie, écrivirent Whitffield Diffie et Martin Hellman dans leur article de novembre 1976 ; Diffie avait eu une nouvelle idée : rompre la symétrie entre expéditeur et destinataire d'un message. Cette idée devait changer toute la cryptographie, mais il fallut attendre que Rivest, Shamir et Adleman trouvent comment faire un an plus tard en créant le système RSA (leurs initiales), le plus célèbre de la cryptographie actuelle, basé sur la difficulté de retrouver les deux facteurs premiers p et q d'un produit $n = pq$ quand ils sont suffisamment grands (de l'ordre de 100 ou 200 chiffres), sans savoir que les mathématiciens de l'armée anglaise les avaient devancés, quelques années auparavant, pour le chiffrage des communications entre leurs troupes. C'est à partir de ces travaux que la théorie des nombres et, plus tard, des branches de la géométrie algébrique ont trouvé des utilisations inattendues.

Dans le temps, on demandait à la cryptographie de protéger (ou de dévoiler) des informations militaires, diplomatiques ou commerciales. Ces demandes ont été en augmentation très rapide et de nouvelles utilisations de la cryptographie, absolument essentielles aujourd'hui, sont apparues : sécurisation des cartes bleues, de tous les échanges d'informations entre civils ou militaires, des paiements sur le réseau, des ordinateurs, etc. Si vous cherchez un emploi, sachez que le NSA, *National security agency*, des États-Unis, dit être le plus gros employeur de mathématicien(ne)s du monde.

XVII. MÉTÉOROLOGIE

Pendant la guerre de Crimée, le 14 novembre 1854, une tempête cause la perte de 38 navires et la mort de 400 marins. L'astronome Urbain Le Verrier (1811-1877) est chargé d'en étudier les causes (voir Michel Rochas, Jean-Pierre Javelle, *La météorologie*, Syros, 1993). Il se rend compte que la tempête a traversé l'Europe en 3 jours et organise un réseau de stations d'observation (59 en 1865) reliées par télégraphe. Poincaré a bien prévu la difficulté des prévisions :

> Un dixième de degré en plus ou en moins en un point quelconque, le cyclone éclate ici et non pas là, et il étend ses ravages sur des contrées qu'il aurait épargnées. Si on avait connu ce dixième de degré, on aurait pu le savoir d'avance, mais les observations n'étaient ni assez serrées, ni assez précises, et c'est pour cela que tout semble dû à l'intervention du hasard.

Le *Meteorological Project* naît en 1948 et Von Neumann suit ses travaux en 1949 et 1950 de très près. On commence à disposer de réseaux de radars qui donnent l'état des nuages, les vitesses et directions des vents, les précipitations en des points d'un réseau plus dense chaque année. Des modèles, à deux couches, puis à trois couches sont élaborés, testés sur des journées particulières, sans donner satisfaction. Le 5 août 1952, Von Neumann réunit des représentants du Weather Bureau, de l'Air Force et de la Navy à Princeton. Un modèle plus élaboré lui paraît pouvoir donner des prévisions à 36 heures (qui se réduisent à 24 compte tenu des temps de calcul et d'acheminement des résultats). Un an plus tard, ces objectifs sont atteints. C'est le début des prévisions météorologiques calculées par ordinateur (mais le contrôle humain est une nécessité).

Actuellement, la terre est recouverte par une sorte de maillage dont les mailles ont 30 kilomètres de côté, et l'atmosphère est décomposé en une cinquantaine de couches. Il faut attribuer des valeurs aux différents points du maillage à partir des observations forcément lacunaires et inégalement réparties d'un réseau de plusieurs milliers de stations au sol, de navires, de bouées dérivantes, de satellites, transmises chaque jour aux centres de calculs. Des ordinateurs très puissants sont nécessaires pour traiter rapidement cet énorme ensemble de données. Mais la taille des mailles est encore insuffisante pour aboutir à la localisation précise d'un orage ou la prévision de la naissance d'un cyclone.

La prévision du temps est importante pour les pêcheurs, les agriculteurs, les compagnies aériennes (la connaissance des vents soufflant en altitude détermine le trajet des avions), EDF (pour la prévision de la température du lendemain dans les différentes villes qu'elle dessert), les militaires (les aviateurs aiment bien savoir le temps qu'il fera quand ils iront bombarder, les marins craignent les typhons, comme celui qui détruisit, le 18 décembre 1944, la troisième flotte américaine).

XVIII. D'AUTRES DOMAINES DE RECHERCHE

L'école d'analyse des données française a été en pointe dans les années 1960-70 grâce à Jean-Paul Benzécri, brillant normalien né en 1932, qui utilise le petit ordinateur acheté par la Faculté des sciences de Rennes en 1963 et sa vision géométrique des problèmes pour mettre au point de nouvelles méthodes statistiques (l'*Analyse factorielle des correspondance*) auxquelles il formera de nombreux élèves. Ces méthodes trouvent des applications dans de nombreux domaines, médecine, agriculture, analyse de photos, données économiques, linguistique, etc. ; ceux qui les appliquent ignorent bien souvent les mathématiciens et mathématiciennes qui les ont créées.

Paul Bézier, ingénieur chez Renault (Arts et métiers, 1910-1999), initie la description numérique des courbes (courbes de Bézier) et surfaces pour concevoir et usiner des objets industriels (carrosseries de voitures, flacons de parfums, caractères d'imprimerie, etc.) avec des gains de temps et main-d'œuvre considérables (voir **[FMPH-IV]**).

Les coefficients de Fourier permettent de décrire une fonction par une suite dénombrable de réels ; c'est une économie extraordinaire ! Dans les années 1970, un géophysicien d'Elf, Jean Morlet découvrit d'autres fonctions, baptisées *ondelettes*, permettant de telles économies pour la description des surfaces. Ses idées lui valent une mise à la retraite anticipée ! Mais elles sont développées par Yves Meyer (né en 1939) et bien d'autres ; elles sont maintenant devenues un grand thème de recherches difficiles et connaissent des applications dans de nombreux domaines de la sismologie à la physique ou au traitement de signaux et d'images (standard JPEG2000, etc.).

La théorie des graphes où brilla Claude Berge (1926-2002, artiste et membre de l'Oulipo) est une mine de problèmes auxquels se consacrent des milliers de mathématicien(ne)s ; les graphes dans les applications informatiques, le réseau Internet, dans tous les problèmes de recherche opérationnelle, ont parfois des millions de sommets et construire des algorithmes rapides est extrêmement difficile.

La soufflerie de Modane-Avrieux a longtemps servi pour étudier le comportement des avions. Cela posait des problèmes d'échelle et il serait impossible de faire entrer le gros Airbus tout entier dans la soufflerie. Les simulations numériques ont pris le relais et elles ne se limitent pas aux études d'aérodynamique ; le comportement d'une fusée en vol, d'une voiture dans un accident, d'un voilier dans la mer, de courants électriques dans une cuve à électrolyse, d'une bombe atomique dans les différentes phases de son explosion, etc. font actuellement l'objet de simulations numériques nécessitant beaucoup de mathématiques pour la modélisation des phénomènes, pour élaborer les algorithmes les plus rapides calculant des résultats et pour en évaluer la qualité d'approximation.

Les travaux mathématiques demandés par les militaires peuvent devenir des thèmes d'études non militaires et réciproquement. Tous les domaines des mathématiques peuvent servir : les statistiques pour les contrôles de qualité, des probabilités pour les bombardements, la recherche opérationnelle, etc. Les besoins en algorithmes performants pour guider les avions, les fusées (et s'en protéger), les satellites, communiquer avec eux, pour toute l'organisation, la construction de matériels sophistiqués, sont énormes.

Pour quelques exemples de développements récents et *utiles* des mathématiques, voir *L'explosion des mathématiques*, brochure éditée conjointement en 2001 par la Société mathématique de France et la Société de mathématiques appliquées et industrielles.

XIX. MÉDAILLES FIELDS

Les Médailles Fields ont été décernées pour la première fois en 1936, et régulièrement (à l'exception de 1982) depuis 1950. Leur nom est attaché à celui du mathématicien canadien John Fields (1863-1932) qui en a eu l'idée. Les lauréats des écoles française et belge sont nombreux, signe de la grande qualité de la recherche mathématique dans nos contrées : Laurent Schwartz en 1950, Jean-Pierre Serre en 1954, René Thom (1923-2002) en 1958, Alexandre Grothendieck en 1966, Pierre Deligne (né en 1944) en 1978, Alain Connes (France, né en 1947) en 1983 (le congrès qui devait se réunir à Varsovie en 1982, avait dû être reporté d'un an à cause des difficultés que connaissaient les mathématiciens polonais avec le pouvoir communiste), Jean Bourgain (né en 1954), Pierre-Louis Lions (né en 1956) et Jean-Christophe Yoccoz (né en 1957) en 1994, Laurent Lafforgue (né en 1966) en 2002, Wendelin Werner (né en 1968) en 2006. Seuls les États-Unis font mieux ! En 2006, les autres lauréats ont été Grigori Perelman (Russie, né en 1966), célèbre pour avoir résolu la conjecture de Poincaré et pour avoir refusé la médaille, Andrei Okounkov (Russie, né en 1969) et Terence Tao (Australie, né en 1975) ; ce dernier a obtenu une médaille de bronze aux Olympiades de mathématiques à l'âge de 11 ans, une médaille d'argent à 12 ans et une médaille d'or à 13 ans (personne n'a jamais fait aussi bien !).

La région parisienne abrite la plus forte communauté de mathématiciens du monde ; cette prépondérance est fortement menacée par nos dirigeants actuels.

XX. ALAIN CONNES (NÉ EN 1947)

Certains mathématiciens ont un esprit d'une grande rapidité, comprenant tout instantanément. Alain Connes dit ne pas être de ceux-là ; il n'est pas le premier arrivé au pied du mur, mais il a des qualités que d'autres n'ont pas pour le franchir. Le sujet de sa thèse est la classification d'algèbres d'opérateurs, sujet de recherche ouvert par Von Neumann et dans lequel Connes obtient de nombreux résultats qui lui valent la médaille Fields en 1983. Connes est professeur au Collège de France depuis 1984. Il cherche à unifier la relativité générale et la mécanique théorique en développant dans les années 1980 les outils et les concepts de la *géométrie non commutative*. Dans ce cadre, les idées de symétrie de Galois et les travaux de Grothendieck ouvrent de nouveaux horizons sur la géométrie de l'espace-temps que Connes continue à explorer… Ce travail pour la connaissance et la compréhension profonde de notre monde est essentiel, même s'il est sans doute sans applications immédiates.

XXI. JEAN-CHRISTOPHE YOCCOZ (NÉ EN 1957)

Jean-Christophe Yoccoz étudie les systèmes dynamiques, théorie initiée par Poincaré dans son étude du système solaire.

Poincaré avait commencé à étudier un système dynamique particulier, appliquant aux points d'un cercle un très grand nombre de fois la même application. Quel est le résultat global : proche d'une rotation (en un certain sens) ou non ? Cela dépend, comme l'ont montré Herman et Yoccoz, de propriétés fines de la fonction. En 1994, Yoccoz a reçu la médaille Fields. Il est maintenant professeur au Collège de France et membre de l'Académie des sciences. Il a dit de ses travaux :

> Je suis incapable de décrire les applications éventuelles de mes recherches à des domaines précis ni de prévoir de quelle manière, dans dix ans, mes résultats auront été utilisés. Mais il existe peu de domaines des mathématiques qui, à un moment ou un autre, ne soient applicables.

XXII. PRIX PRESTIGIEUX

Avec le soutien de l'Union Mathématique Internationale, la Norvège a créé le prix Abel pour les mathématiques, aussi prestigieux que les prix Nobel et décerné tous les ans. Les premiers lauréats sont les suivants.

2003 : Jean-Pierre Serre ; 2004 : Michael Atiyah (né en 1929) et Isadore Singer (né en 1924) ; 2005 : Peter Lax (né en 1926) ; 2006 : Lennart Carleson (né en 1928) ; 2007 : Srinivasa Varadhan (né en 1940).

La liste des lauréats de la fondation Wolf, depuis 1978, est aussi impressionnante : Gelfand, Leray, Weil, Henri Cartan, Kolmogorov, Gromov, etc.

XXIII. LES PROBLÈMES DE LA FONDATION CLAY

L'homme d'affaires Landon Clay a prévu en 2000 de récompenser par un million de dollars ceux qui résoudraient l'une des sept conjectures suivantes, choisies par de grands mathématiciens actuels.

1) L'hypothèse de Riemann, qu'Hilbert avait déjà inclus dans la liste de ses 23 problèmes.

2) La conjecture de Poincaré, démontrée depuis par Perelman, qui a refusé aussi ce prix.

3) Le problème P=NP de la théorie de la complexité des algorithmes.

4) La conjecture de Hodge (1903-1975) en géométrie algébrique.

5) La conjecture de Birch (né en 1931) et Swinnerton-Dyer (né en 1927) en théorie des nombres.

6) L'étude des équations de Navier-Stokes de la mécanique des fluides.

7) L'étude des équations de Yang (né en 1922) et Mills (1927-1999) de la physique des particules.

XXIV. LE JEU DES TRÈS GRANDS

C'est un jeu assez vain, mais tout le monde peut s'y amuser. Voici 18 noms :

Archimède, Euler, Gauss, Abel, Riemann, Hilbert, Von Neumann, Weyl, Kolmogorov ; du côté français : Fermat, Pascal, Lagrange, Galois, Poincaré, Leray, Weil, Serre ; et Grothendieck.

Pour des mathématiciens plus récents, l'avenir décidera.

XXV. PETITE CONCLUSION

L'époque actuelle voit le plus grand nombre de découvertes de toute l'histoire des mathématiques. Elle voit aussi, en France et ailleurs, des politiques (et des scientifiques, hélas), qui n'ont rien compris au rythme des inventions en mathématiques, qui croient qu'il n'y a plus rien à trouver d'intéressant en mathématique, qui pensent que les mathématiques ne sont utiles que comme des outils qu'on peut élaborer avec une calculatrice au moment où on en a besoin et qui réduisent, détruisent, dévalorisent l'enseignement et la recherche en mathématiques. Vouloir fixer des objectifs à courte vue en terme de marché, de rentabilité, financer des projets au coup par coup sont des absurdités ; les mathématiciens savent que plus ils seront nombreux, plus on leur permettra de travailler tranquillement de longues périodes sur les sujets qu'ils jugent, eux, intéressants, plus leur science avancera. Vouloir les orienter uniquement vers des problèmes très appliqués, dont la résolution rapporte des sous à coup sûr, est stupide ; c'est fortement diminuer la chance de trouver des résultats importants et de portée un peu générale ; c'est stériliser la recherche et prendre du retard sur les autres pays ; et puis, par rapport aux autres disciplines scientifiques, la recherche mathématique ne coûte vraiment pas cher ! Mais les politiques cherchent peut-être d'abord à briser une communauté scientifique structurée.

Les mathématiciens travaillent-ils pour le *bien* de l'humanité ? La réponse est positive si nous pensons au rôle essentiel des mathématiques dans la construction de la connaissance sous toutes ses formes, dans toutes les activités de notre société, dans la recherche fondamentale comme dans la recherche appliquée, dans toutes les activités de modélisation, dans la météorologie, dans la médecine, les téléphones portables, etc. Mais ce n'est pas si simple et, par exemple, les fabricants de matériel de guerre tirent partie de nouvelles idées aussi bien que les autres ; ils sont même parmi les principaux employeurs de mathématiciens.

Vous aurez peut-être des remarques, des objections à formuler, des erreurs à signaler. Merci de m'écrire : jean-pierre.escofier@univ-rennes1.fr.

Bibliographie

[ACT-xx] Actes du XX^{e} colloque Inter-IREM.

[BER] BERGER M., *Cinq siècles de mathématiques en France*, Ministère des affaires étrangères, 2005.

[DHO] DHOMBRES J. et N., *Naissance d'un nouveau pouvoir : sciences et savants en France*, 1793-1824, Payot, 1989.

[DJE] DJEBBAR A., *Histoire de la science arabe*, Seuil, 2001.

[EPI] EPISTEMON L., *Analyse 1*, *Algèbre 1*, Cedic-Nathan, 1981, 1983.

[ESC-Al] ESCOFIER J.-P., *Toute l'algèbre de la licence*, Dunod, 2006.

[ESC-Ga] ESCOFIER J.-P., *Théorie de Galois*, Dunod, 2000.

[FMPH-xx] IREM de Rennes, *Faire des mathématiques à partir de leur histoire*.

[HAW] HAWKING S., *Et Dieu créa les nombres*, Dunod, 2006.

[INT-Fe] Association Femmes et mathématiques : http://www.femmes-et-maths.fr/.

[INT-Ga] Bibliothèque Nationale de France : http://gallica.bnf.fr/.

[INT-Li] Pour localiser des textes anciens : http://math-doc.ujf-grenoble.fr/LiNuM/.

[INT-St] : Biographies : http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/.

[INT-Th] Recherche en histoire des sciences : http://theuth.univ-rennes1.fr/

[MON] MONTUCLA J.-E., *Histoire des mathématiques*, Blanchard, 1968 et site de la BNF.

[RAS] RASHED R., *Histoire des sciences arabes*, 3 vol., Seuil, 1997.

[RIT] RITTAUD B., *Le fabuleux destin de* $\sqrt{2}$, Le Pommier, 2006.

Index

Abel Niels : 64, 71, 77, 78, 79, 89, 122
Adélard de Bath : 30
Al Haytham : 34
Al Kashi Ghiyath : 35
Al Khazin : 33
Al Khwarizmi Mohammed : 30, 31, 32, 40
Al Tusi Nasir al Din : 35
Alberti Leone Battista : 37, 38
Alembert Jean Le Rond d' : 62, 63, 65, 66, 73
Alexandrov Pavel : 107
Alhazen : 34
voir al Haytham : 34
Anaxagore de Clazomènes : 24
Apéry Roger : 61
Apollonius de Pergé : 27, 28, 30
Arasse Daniel : 38
Archimède : 17, 24, 25, 26, 27, 42, 122
Aristote : 16, 17, 22, 30
Arnold Vladimir : 108, 109
Artin Emil : 96
Atiyah Michael : 121
Audin Maurice : 112

Barner Klaus : 49
Bénabou Jean : 107
Benzécri Jean-Paul : 118
Berge Claude : 119
Bernoulli Jacques : 58, 61
Bernoulli Jean : 58, 60
Birch Bryan : 122
Bolyai Janos : 75
Bolzano Bernard : 76
Bombelli Raffaelle : 41, 52
Bosse Abraham : 48
Bouguer Pierre : 62
Bourbaki Charles : 106
Bourbaki Nicolas : 105, 106
Bourgain Jean : 120
Brahmagupta : 32
Briggs Henry : 45
Brunelleschi Filippo : 37
Bush Vannevar : 102

Cantor Georg : 91, 97
Carcavi Pierre de : 49, 50
Cardan Jérôme : 40, 41, 43
Carleson Lennart : 121
Cartan Élie : 110
Cartan Henri : 105, 106, 110, 111, 114, 122
Cauchy Augustin : 68, 76, 77, 78, 79, 86, 89, 90, 91, 111
Cavalieri Bonaventura : 50
Caveing Maurice : 19
Chasles Michel : 83, 84
Chevalley Claude : 105
Choquet Gustave : 106
Christine de Suède : 53
Chuquet Nicolas : 39
Clairaut Alexis : 62
Clay Landon : 122
Cohen Paul : 98
Colbert Jean-Baptiste : 56
Condorcet marquis de : 65, 67
Connes Alain : 81, 120, 121
Courant Richard : 96, 97
Crelle August : 78, 79
Dan Klara : 103
Darboux Gaston : 92
Dautray Robert : 115
Dedekind Richard : 21, 91
Delambre Jean-Baptiste : 56
Deligne Pierre : 101, 110, 120
Delsarte Jean : 105

Démocrite : 22
Desargues Girard : 47, 48, 54, 83
Descartes Francine : 52
Descartes René : 47, 50, 51, 52, 53
Dieudonné Jean : 82, 105, 112, 113
Diophante d'Alexandrie : 29, 51
Dirichlet Peter Lejeune : 81, 82
Dwork Bernard : 110

Egorov Dimitri : 107
Eilenberg Samuel : 107, 110
Einstein Albert : 75
Eratosthène : 23, 24, 56
Euclide d'Alexandrie : 17, 18, 19, 20, 21, 22, 25, 30, 106
Eudoxe de Cnide : 16, 17, 21, 22
Euler Leonhardt : 50, 60, 61, 63, 64, 75, 76, 79, 90, 94, 110, 122

Fermat Pierre de : 47, 49, 50, 51, 53, 55, 60, 62, 64, 75, 81, 122
Ferro Scipione del : 40
Fibonacci : 36
voir Léonard de Pise : 36
Fields John : 120
Fields médaille : 120, 121
Fourier Joseph : 71, 72, 79, 81, 82, 86, 107
Fuchs Lazarus : 92

Galilée : 27, 45, 46
Galois Évariste : 64, 79, 80, 81, 88, 95, 113, 121, 122
Gamow George : 24
Gauss Karl Friedrich : 69, 70, 73, 74, 75, 78, 79, 81, 86, 87, 122
Gelfand Israël : 109, 122
Gérard de Crémone : 30
Gerbert d'Aurillac : 36
Germain Sophie : 72, 75
Gödel Kurt : 98
Goldstine Hermann : 103
Gromov Mikhaïl : 84, 122
Grothendieck Alexandre : 81, 107, 110, 112, 113, 114, 120, 121, 122

Hadamard Jacques : 99, 100, 105, 108, 109
Halley Edmond 62
Hardy Godfrey Harold : 101
Heiberg Johan : 19, 25
Herbrand Jacques : 105
Herman Michael : 121
Hermite Charles : 92, 98, 106
Héron d'alexandrie : 12, 28
Hilbert David : 20, 91, 94, 95, 96, 97, 98, 103, 107, 108, 122
Hodge William : 122
Holmboe Bernt : 77
Hooke Robert : 58
Hospital marquis Guillaume de : 58
Hurwitz Adolf : 97
Hypathie : 19

Ibn Sahl : 53

Jacobi Carl Gustav : 71, 78, 82
Jordan Camille : 88

Keller Olivier : 8, 9
Kepler Johann : 27
Khayyam Omar : 33, 34, 35, 40
Klein Félix : 88, 95
Kolmogorov Andrei : 107, 108, 109, 122
Kovalevski Sophie : 89, 90
La Condamine Charles Marie de : 62
Lafforgue Laurent : 120
Lagrange Joseph-Louis : 63, 64, 68, 71, 72, 75, 79, 122
Laplace Pierre Simon : 66, 70, 109
Lawvere William : 107
Lax Peter : 121
Le Verrier Urbain : 117
Lebesgue Henri : 72, 100, 101, 107

Legendre Adrien-Marie : 66, 70, 71, 75, 79, 81, 82, 86
Leibniz Gottfried von : 58, 59
Léonard de Pise : 36, 40
Leray Jean : 41, 110, 111, 114, 122
Libri Guillaume : 36
Lie Sophus : 88, 109
Lindemann Ferdinand von : 98
Lions Jacques-Louis : 111, 114, 115
Lions Pierre-Louis : 120
Liouville Joseph : 81, 98
Lobatchevski Nikolai : 75, 84, 85, 86
Lusin Nikolai : 107

Mac Lane Saunders : 107
Manin Iouri : 109
Matiyasevitch Iouri : 98
Méchain Pierre : 56
Mersenne Marin : 46, 47, 49, 50, 53
Meyer Yves : 119
Minkowski Hermann : 95, 97
Mittag-Leffler Gösta : 90, 93
Monge Gaspard : 19, 48, 65, 69, 76, 77, 83
Morgenstern Oskar : 103
Morlet Jean : 118
Moser Jürgen : 108

Navier Claude : 110, 122
Neper John : 44, 45
Neugebauer Otto : 13, 14
Newton Isaac : 56, 57, 58, 62, 75, 78
Nicomède : 23
Noether Emmy : 96, 97, 107

Okounkov Andrei : 120
Ostrogradski Mikhail : 89
Pascal Blaise : 47, 49, 53, 54, 55, 62, 122
Pascal Étienne : 47, 53, 54
Peletier du Mans Jacques : 39
Pell John : 50
Perelman Grigori : 120, 122
Peyrard François : 19
Philippe de Macédoine : 18
Phragmen Edvard : 93
Pica Pierre : 8
Picard Jean : 56
Piero della Francesca : 38
Pierre le Grand : 60
Platon : 16, 17
Plimpton George : 13, 322
Poincaré Henri : 70, 92, 93, 94, 106, 107, 117, 120, 121, 122
Poisson Siméon : 79
Poncelet Jean-Victor : 83
Pozzo Andrea : 39
Proclus : 15
Ptolémée Claude : 11, 30, 34
Pythagore : 15, 16, 21

Queneau Raymond : 51, 96

Ramanujan Srinivasa : 101
Rashed Roshdi : 29
Riemann Bernhard : 72, 75, 86, 87, 98, 101, 109, 122
Roberval Gilles Personne de : 47
Robinson Abraham : 76
Robinson Julia : 98
Roubaud Jacques : 95, 106

Sachs Abraham : 14
Saint-Vincent Grégoire de : 22
Schneider Theodor : 98
Schwartz Laurent : 111, 112, 114, 120
Serre Jean-Pierre : 113, 114, 120, 121, 122
Shimura Goro : 110
Singer Isadore : 121
Snel van Royen Willebrord : 53
Socrate : 16
Stokes George : 122
Swinnerton-Dyer Peter : 122
Taniyama Yutaka : 110
Tao Terence : 120
Thalès : 15
Théodore de Cyrène : 16
Théon d'Alexandrie : 19
Thom René : 120

Ulam Stanislaw : 105

Vallée Poussin Charles de la : 99
Van der Waerden Bartel : 96
Varadhan Srinivasa : 121
Viète François : 42, 43, 50, 52
Vitrac Bernard : 19
Vlacq Adriaan : 45
Von Neumann John : 102, 103, 104, 105, 120, 122

Weierstrass Karl : 88, 89, 90, 93
Weil André : 105, 106, 109, 110, 113, 122
Weil Simone : 109
Welschinger Jean-Yves : 84
Werner Wendelin : 120
Weyl Hermann : 97, 122
Wiles Andrew : 110
Witten Edward : 84

Yang Chen Ning : 122
Yoccoz Jean-Christophe : 120, 121

LES TOPOS

Sciences

Jean-Pierre Escofier

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Voici une petite histoire des mathématiques écrite pour le plaisir de ceux et celles qui la liront, qu'ils ou elles les enseignent, les étudient ou désirent simplement en connaître un peu plus à leur sujet.

Découpé en une centaine de sections, chacune portant sur un moment important de l'histoire des mathématiques, cet ouvrage synthétique dresse un panorama chronologique complet des mathématiques : de l'antiquité, Euclide et la numération, jusqu'aux développements récents (cryptographie, météorologie, informatique).

JEAN-PIERRE ESCOFIER
Maître de conférences à l'université Rennes I.

9 782100 507450

6494280
ISBN 978-2-10-050745-0

www.dunod.com

DUNOD