[redacted]

INITIATION AU RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

Logique et théorie des ensembles

ARMAND COLIN

ISBN : 2-200-21376-X

Armand Colin Éditeur, 103, boulevard Saint-Michel, 75240 Paris Cedex 05.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce livre fournit une méthodologie en Mathématique. Il est donc recommandé aux étudiants des cursus scientifiques universitaires. Il peut être utilisé au fur et à mesure des besoins durant les deux premières années, mais aussi en entrée ou prérentrée de première année, en introduction aux cours d'algèbre, d'analyse, et de langage de programmation. Nous le destinons également aux étudiants-professeurs des Instituts Universitaires de Formation des Maîtres; nous espérons aussi que nos collègues, enseignants de premier cycle, y trouveront une motivation pédagogique supplémentaire.

Il a servi de base à un enseignement de prérentrée, de 30 heures, pour 300 étudiants d'une section de première année de DEUG A (Sciences) de l'Institut des Sciences et Techniques de l'Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis.

Depuis plusieurs années, nous cherchons les raisons des blocages et échecs en Mathématique; nous sommes maintenant persuadés que la raison principale est le manque de connaissances de base : écriture et lecture insuffisantes du langage mathématique (par exemple, utilisation incorrecte des quantificateurs et du symbole "$\Rightarrow$" d'implication), mais aussi méconnaissance des méthodes élémentaires de démonstration qui paralyse l'étudiant lorsqu'il commence un exercice.

Nous avons également constaté que les étudiants en difficulté ne sont pas ceux qui travaillent le moins : ce sont peut-être ceux qui ont besoin de supports écrits en logique. Il faut bien reconnaître que ces supports manquent; si les ouvrages, pour la plupart, comportent maintenant une initiation convenable à la théorie des ensembles, ils sont, par contre, fort concis et imprécis en ce qui concerne l'initiation à la logique du raisonnement; cette initiation se fait donc, malheureusement, uniquement oralement, par bribes et redites durant de nombreuses années. C'est précisément cette tradition orale que nous aimerions faire passer ici sur papier : travail ingrat (comment expliquer des "évidences", expliquer "l'inexplicable" ?) mais aussi travail enthousiasmant quand le but visé est d'aider certains étudiants à jouer avec les Mathématiques et à ne pas les subir.

Nous ne prétendons pas amener tout de suite chaque étudiant au "sommet" car la résolution de certains problèmes nécessite beaucoup d'expérience et d'intuition (voir l'exemple du 2.3.*b*); mais l'expérience semble prouver qu'un étudiant possédant les bases logiques parvient largement à la moyenne dans la plupart des examens et concours. En outre, une manipulation rigoureuse des objets mathématiques facilite la compréhension des domaines connexes comme la physique et l'informatique.

Cet ouvrage ne comporte que des notions bien connues de tout enseignant de Mathématique. Désirant nous limiter à la seule logique utile aux Mathématiques des deux premières années de l'enseignement supérieur, nous avons évité les rapprochements avec les langages, les systèmes formels, l'informatique ou l'automatique. Ainsi, pour ne pas donner au lecteur des habitudes trop éloignées du langage mathématique usuel, nous avons, comme partout, accepté un langage assez simple : par exemple, nous dirons indifféremment *montrons P* ou *montrons qu'on a P* ou encore *montrons que P est vraie* ; le lecteur veillera cependant à ne pas confondre *considérons P* avec *considérons qu'on a P*, ou *soit l'assertion* $(P \Rightarrow Q)$ avec *supposons* $(P \Rightarrow Q)$.

Nous avons toutefois signalé la différence entre les prédicats (ou fonctions assertionnelles) et les assertions qui sont les prédicats constants; mais très vite, pour rejoindre les Mathématiques usuelles, nous avons appelé le prédicat, "assertion" (avec guillemets); le lecteur n'aura qu'à retirer les guillemets pour rejoindre l'appellation usuelle. Nous avons aussi été amenés à distinguer une assertion (qui peut être vraie ou fausse) d'une proposition (qui est toujours vraie) : cela n'est pas en accord avec la tradition qui, le plus souvent, utilise, à tort sans doute, la seule appellation proposition.

Il nous a semblé utile de présenter, au chapitre 3, les notions fondamentales de la théorie des ensembles nécessaires à tout enseignement de mathématiques de l'enseignement supérieur. Dans un premier temps, le lecteur ne s'y reportera qu'en cas de besoin lorsqu'une notation, rencontrée par ailleurs, lui semblera devoir être précisée.

Le lecteur trouvera en fin d'ouvrage cinq fiches d'exercices qui lui permettront d'assimiler les connaissances développées dans le cours.

Nous remercions vivement tous les collègues qui ont favorisé ce projet; en particulier, B. Dussart et A. Kabila pour leur participation active et enthousiaste à l'expérience et leur contibution aux fiches d'exercices, B. Sodaigui pour son apport d'une partie des énoncés des exercices de la fiche n° 4, ainsi que A. Fréville et J. M. Raviart, directeur et directeur-adjoint de l'Institut des Sciences, grâce à qui ce cours est enseigné à l'Université de Valenciennes. Nos remerciements vont également à tous les étudiants et collègues qui par leurs remarques nous ont permis d'améliorer le manuscrit.

Puisse cet ouvrage permettre de jouer aux Mathématiques !

Les auteurs — Juin 1993

ELÉMENTS DE LOGIQUE

1

1.1. Le calcul propositionnel ou calcul assertionnel

a. But du calcul assertionnel

Dans le cadre d'une **théorie**[1] mathématique $\mathcal{T}$ donnée, une **assertion** est une phrase[2] mathématique à laquelle on peut attribuer une et une seule **valeur de vérité**, à savoir **vrai** (V en abrégé) ou **faux** (F en abrégé).

Toutes les phrases d'une théorie ne sont pas des assertions; il en existe auxquelles il est impossible d'attacher une valeur de vérité; elles sont dites **indécidables**. Sans aborder cette question ici, signalons qu'il ne faut pas confondre "indécidable" et "sans signification"; nous ne rencontrerons que peu de phrases indécidables; nous ne rencontrerons dans les exercices et exemples que des assertions vraies ou fausses, et des expressions sans signification mathématique.

Une assertion P vraie est appelée **proposition**; on dit alors qu'*on a P*, ou que *P est vraie*. Selon l'importance qu'on donne à la proposition au sein de la théorie, celle-ci pourra aussi porter le nom de : **théorème**, **corollaire**, **lemme**[3] , ...

Dans la plupart des exemples que nous donnerons, ici et dans la suite, $\mathcal{T}$ sera la théorie des nombres réels (sauf mention expresse).

---

[1] Par exemple la théorie des groupes, la théorie des espaces vectoriels, ... ; de façon générale, nous désignerons, dans cet ouvrage, par théorie un ensemble de connaissances relatives à un domaine donné des mathématiques (la définition d'une théorie dépasse le cadre de cet ouvrage).

[2] Nous n'aborderons pas la syntaxe du langage, c'est-à-dire la manière dont ces phrases sont construites.

[3] Un théorème est une proposition jugée importante dans le développement de la théorie; un corollaire est une proposition qui est conséquence immédiate d'une proposition déjà démontrée; un lemme est une proposition intermédiaire utilisée au cours de la démonstration de certaines propositions.

Exemples

— (4 est un nombre ≥ 0) est une proposition.

— (4 est un nombre < 0) est une assertion fausse.

— ($\sqrt{2}$) n'est pas une assertion car ($\sqrt{2}$) n'est même pas une phrase.

— ($\sqrt{2} < 0$) est une assertion fausse.

— x étant un réel donné, ($\sqrt{x} > 0$) est une assertion seulement si $x \geq 0$; car si $x < 0$, $\sqrt{x}$ n'existe pas et ($\sqrt{x} > 0$) n'a donc pas de signification (de sens).

— x étant un réel donné, ($x + 2 > 0$) est une proposition si $x > -2$, une assertion fausse si $x \leq -2$.

— (le ciel est bleu) n'est pas une assertion dans le cadre de la théorie des nombres réels.

Soit $\mathcal{T}$ une théorie mathématique quelconque; $\mathcal{T}$ débute à partir du choix des **axiomes**[1] (ou **postulats**) de la théorie (notons que la plupart des théories mathématiques admettent, entre autres, les propositions de la théorie des ensembles (voir le chapitre 3)); ces propositions de base et leurs négations permettent de construire les autres assertions de $\mathcal{T}$. Si on appelle $\mathcal{A}$[2] la **classe** des assertions de cette théorie, la théorie évolue au fur et à mesure de la découverte et de l'étude d'éléments de $\mathcal{A}$, et de l'obtention de leurs valeurs de vérité.

De façon générale, en connectant, comme nous le ferons dans la suite, des éléments de $\mathcal{A}$ on obtient encore des éléments de $\mathcal{A}$, dont on étudie les valeurs de vérité grâce aux **tables de vérité** des **connecteurs** et à quelques règles logiques. Nous venons en fait de décrire la démarche du **calcul propositionnel**, que nous préférons appeler **calcul assertionnel**. Ce calcul est intéressant car les valeurs de vérité sont obtenues automatiquement et parce qu'il est valable pour toute théorie $\mathcal{T}$; son succès est également important en automatique, informatique et dans l'étude des langages, par le biais notamment de la notion d'algèbre de Boole (G. Boole, 1815-1864) et de nombreux algorithmes que nous n'étudierons pas ici.

---

[1] Les axiomes sont des phrases de la théorie que l'on admet au départ comme vraies.

[2] Le lecteur pourra assimiler "classe" et "ensemble", cette distinction dépassant le cadre de cet ouvrage.

Nous verrons comment les règles logiques peuvent être obtenues facilement à partir des tables de vérité, et, dans toute la suite, comment ces règles logiques peuvent être utilisées. Le calcul assertionnel est aussi un relais précieux pour l'étude des assertions quand la manipulation directe de celles-ci devient pénible.

b. Assertions équivalentes

Soient P et Q deux assertions de $\mathscr{A}$. On dit que P est **équivalente** à Q, ou que P et Q sont équivalentes, si P et Q ont la même valeur de vérité.

Exemples

— $(4 > 0)$ est équivalente à (4 est un nombre > 0); par simple réécriture.

— x étant un réel positif ou nul, $(x = \sqrt{x} + 6)$ est équivalente à $(x - 6 = \sqrt{x})$; par simple transformation.

— $(4 > 0)$ est équivalente à $(-2 < 0)$; plus généralement, deux propositions P et Q sont toujours équivalentes, et deux assertions fausses le sont également.

— $(4 > 0)$ n'est pas équivalente à $(2 < 0)$.

c. Négation d'une assertion

Si $P \in$[1] $\mathscr{A}$, la **négation** de P est l'assertion notée **⌉P** ou **non P**; elle est vraie si et seulement si P est fausse, comme le montre la **table de vérité** du **connecteur** ⌉ :

P	**⌉P**
V	F
F	V

Exemples

— La négation de (1 est un entier > 0) est (1 n'est pas un entier > 0).

---

[1] "$\in$" est le signe d'appartenance; $P \in \mathscr{A}$ se lit "P est un élément de $\mathscr{A}$" ou encore "P appartient à $\mathscr{A}$".

— La négation de (tout réel x vérifie l'inégalité $x + 2 > 0$) n'est pas (tout réel x ne vérifie pas l'inégalité $x + 2 > 0$) ... (les deux assertions sont fausses !), mais l'assertion (il existe un réel x ne vérifiant pas l'inégalité $x + 2 > 0$).

Ce dernier exemple prouve que la négation d'une assertion ne se construit pas toujours aussi facilement que dans le premier exemple, par simple utilisation de *ne ... pas* . La négation du second exemple s'obtiendra facilement lors de l'étude des prédicats.

d. Connecteurs binaires usuels

Le connecteur $\neg$, introduit dans le paragraphe précédent, est dit **unaire** car il opère sur une assertion.

Les connecteurs **binaires** opèrent eux sur deux assertions : ils permettent d'associer à deux assertions P et Q de $\mathscr{A}$, de nouvelles assertions de $\mathscr{A}$.

Les principaux connecteurs binaires sont :

— le connecteur $\wedge$ de **conjonction** qui fournit l'assertion $\mathbf{P \wedge Q}$, appelée **P et Q** (ou conjonction de P et Q).

— le connecteur $\vee$ de **disjonction** (inclusive) qui fournit l'assertion $\mathbf{P \vee Q}$, appelée **P ou Q** (ou disjonction de P et Q).

— le connecteur $\Rightarrow$ d'**implication** qui fournit l'assertion $\mathbf{P \Rightarrow Q}$, appelée **P implication Q**, ou encore assertion **"P implique Q"**.

— le connecteur $\Leftrightarrow$ d'**équivalence** (logique) qui fournit l'assertion $\mathbf{P \Leftrightarrow Q}$, appelée **P équivalence Q**, ou encore assertion **"P équivalente à Q"**.

Chacun des connecteurs précédents est défini au moyen de sa table de vérité qui se trouve dans le tableau suivant :

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
V	**V**	V	V	V	V
V	**F**	F	V	F	F
F	**V**	F	V	V	F
F	**F**	F	F	V	V

Par exemple, les colonnes 1, 2 et 5 constituent la table de vérité de l'implication.

Ce tableau nécessite quelques commentaires :

— $P \wedge Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont toutes deux vraies; le "et" est donc pris au sens ordinaire.

— $P \vee Q$ est vraie si et seulement si l'une (au moins) des deux assertions est vraie (si l'une des deux assertions est fausse alors l'autre est vraie); le "ou" n'est donc pas utilisé au sens exclusif : il n'a pas la signification de "ou bien". On notera encore que $P \vee Q$ est fausse si et seulement si P et Q sont toutes deux fausses.

— $(P \Rightarrow Q)$ est fausse si et seulement si P est vraie et Q fausse; remarquons également que si P est fausse alors $(P \Rightarrow Q)$ est vraie.

— $(P \Leftrightarrow Q)$ est vraie si et seulement si P et Q sont équivalentes.

Illustrons maintenant notre propos par des exemples.

— $(4 > 0$ et $2 > 0)$ est vraie; $(4 > 0$ et $2 < 0)$ est fausse; et $(4 < 0$ et $2 < 0)$ a deux raisons d'être fausse.

— l'assertion $(4 > 0$ ou $4 = 0)$, qui peut s'écrire plus rapidement $(4 \geq 0)$, est vraie car $(4 > 0)$ est vraie. Par contre l'assertion $(4 < 0$ ou $4 = 0)$ est fausse puisque $(4 < 0)$, et $(4 = 0)$ sont deux assertions fausses.

— les trois assertions $(\sqrt{2} > 0 \Rightarrow 1 > 0)$, $(\sqrt{2} < 0 \Rightarrow 1 > 0)$, $(\sqrt{2} < 0 \Rightarrow 1 < 0)$ sont vraies. Par contre l'assertion $(\sqrt{2} > 0 \Rightarrow 1 < 0)$ est fausse car $(\sqrt{2} > 0)$ est vraie et $(1 < 0)$ est fausse.

Remarque 1

Ces trois derniers exemples illustrent que la vérité de $(P \Rightarrow Q)$ traduit autre chose que le fait de voir apparaître la vérité de Q comme conséquence (au sens ordinaire, c'est-à-dire causal) de la vérité de P; toutefois, paradoxalement, pour montrer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, il suffit de montrer que si P est vraie alors Q est vraie (puisque si P est fausse, l'**implication** sera vraie quelle que soit la valeur de vérité de Q), c'est-à-dire qu'il suffit de montrer que si on a P alors on a Q.

Donc, en pratique, pour montrer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie dans une théorie, on se place dans le cas où P est vraie, c'est-à-dire on suppose qu'on a P (on dit qu'on prend P comme **hypothèse**), et on en déduit que Q (la **conclusion**) est vraie; c'est-à-dire on montre Q (en utilisant si cela est nécessaire certaines propositions P_1, P_2, ..., P_n de la théorie mathématique concernée : on montre en fait que $(((P_1 \wedge \ldots \wedge P_n) \wedge P) \Rightarrow Q)$ est vraie) . Ce raisonnement est fondamental dans la résolution des problèmes.

Montrons, par exemple, que $(\sqrt{2} < 0 \Rightarrow 2 > 0)$ est vraie (en imaginant qu'on n'ait pas remarqué que le résultat est acquis car $(\sqrt{2} < 0)$ est fausse !). Supposons donc que $\sqrt{2}$ soit strictement négatif; on a alors $(\sqrt{2} \,.\, \sqrt{2}) > 0$, (comme produit de 2 nombres < 0), d'où $2 > 0$ (et notre raisonnement est correct); mais attention, le fait d'avoir montré que $(\sqrt{2} < 0 \Rightarrow 2 > 0)$ est vraie ne permet pas d'affirmer que 2 est strictement positif dans la théorie des nombres réels.

Considérons un autre exemple; résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
$\sqrt{-x^2 + 2a - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$, où a est un réel donné.
Si x est racine de l'équation, c'est-à-dire si $\sqrt{-x^2 + 2a - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$, alors par élévation au carré on obtient que $x^2 = a$; on a donc en fait :
$(\sqrt{-x^2 + 2a - 1} = \sqrt{x^2 - 1}) \Rightarrow (x^2 = a)$.
Réciproquement, on voit que si x est un réel qui vérifie $x^2 = a$ alors l'équation est satisfaite si et seulement si $(a - 1) \geq 0$. En conclusion, si $a < 1$, l'équation n'a pas de racine; si $a \geq 1$, l'ensemble des racines est $\{-\sqrt{a}\,, \sqrt{a}\}$.

Remarque 2

Pour exprimer que $(P \Rightarrow Q)$ est vraie, on peut, selon l'usage, utiliser l'une des expressions suivantes :

— $P \Rightarrow Q$

— *P* ***implique*** *Q*

— *P* ***entraîne*** *Q*

— ***Si*** *on a P,* ***alors*** *on a Q*

— *Q est* ***conséquence*** [1] *de P*

— *Q est une* ***condition nécessaire*** *pour qu'on ait P*

— *Pour qu'on ait P,* ***il faut*** *(il est nécessaire) qu'on ait Q*

— *P est une* ***condition suffisante*** [2] *pour qu'on ait Q*

— *Pour qu'on ait Q,* ***il suffit*** *(il est suffisant) qu'on ait P.*

Pratiquement, quand on utilise le symbole "$\Rightarrow$" dans l'écriture ($P \Rightarrow Q$), P et Q doivent apparaître clairement; de même on prendra garde de ne pas confondre "$\Rightarrow$" avec "alors" ou avec "donc"; par exemple la proposition simple suivante, en style un peu "télégraphique" est cependant lisible :
comme $x > 0$ et comme ($x > 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$), alors $2x^2 \neq 0$.
Par contre, elle n'est plus lisible lorsqu'elle est écrite sous la forme :
comme $x > 0$ et ($x > 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$) $\Rightarrow 2x^2 \neq 0$;
ou : comme $x > 0$ et $x > 0 \Rightarrow x^2 \neq 0 \Rightarrow 2x^2 \neq 0$;
ou encore sous la forme :
comme $x > 0$ et $x > 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$ alors $2x^2 \neq 0$.

De même, pour exprimer que ($P \Leftrightarrow Q$) est vraie, on peut utiliser l'une des expressions suivantes :

— $P \Leftrightarrow Q$

— *P* ***équivaut*** *à Q*

— *On a P* ***si et seulement si*** *on a Q*

— *P est une* ***condition nécessaire et suffisante*** *pour qu'on ait Q.*

Là encore, l'utilisation du symbole "$\Leftrightarrow$" doit être très rigoureuse.

---

[1] Conséquence au sens mathématique, pas au sens ordinaire (revoir la remarque 1).

[2] Un critère est une condition suffisante (mais non nécessaire) pour qu'une propriété mathématique soit vraie; il fournit, dans certains cas, une règle pratique de vérification de cette propriété (par exemple, un critère de convergence d'une suite numérique).

e. Quelques règles logiques

Voici quelques résultats très utiles; ils sont valables pour toutes assertions P, Q, R de la classe $\mathscr{A}$ des assertions d'une théorie mathématique quelconque.

(1) $(P \wedge \rceil P)$ est une assertion fausse (loi de **non contradiction**).

Les 17 assertions suivantes sont toutes vraies, c'est-à-dire sont des propositions pour toute valeur de vérité de P, Q, R (on les appelle des **tautologies** [1] ou **règles logiques**).

(2) $P \vee \rceil P$ (loi du **tiers exclu**)

(3) $\rceil(\rceil P) \Leftrightarrow P$ (double négation)

(4) $\rceil(P \wedge Q) \Leftrightarrow \rceil P \vee \rceil Q$ (négation d'une conjonction)

(5) $\rceil(P \vee Q) \Leftrightarrow \rceil P \wedge \rceil Q$ (négation d'une disjonction)

(6) $(P \wedge P) \Leftrightarrow P$; $(P \vee P) \Leftrightarrow P$ (**idempotence** de $\wedge$ et de $\vee$)

(7) $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$; $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$ (**commutativité** de $\wedge$ et de $\vee$)

(8) $(P \wedge (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$ (**associativité** [2] de $\wedge$)
$(P \vee (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \vee R)$ (**associativité** de $\vee$)

(9) $(P \wedge (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$
$(P \vee (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$ (**distributivité**)

(10) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\rceil Q \Rightarrow \rceil P)$ (loi de **contraposition**)
*l'assertion $(\rceil Q \Rightarrow \rceil P)$ est appelée **contraposée** de l'assertion $(P \Rightarrow Q)$*

(11) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\rceil P \vee Q)$

(12) $\rceil(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \rceil Q)$ (négation de $(P \Rightarrow Q)$)

(13) $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ (**transitivité** de l'implication)

(14) $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$

(15) $((P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P))$

[1] *Tautologie* est un terme grec qui signifie "dire la même chose".

[2] L'associativité du "$\wedge$" permet d'écrire $P \wedge (Q \wedge R)$ sous la forme $P \wedge Q \wedge R$ (même chose pour "$\vee$").

(16) $(P \wedge (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow Q$

(règle du **détachement** ou règle **d'inférence** ou règle du **modus ponens**)[1]

(17) $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$

(18) $((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R))$

Ces résultats peuvent s'obtenir à partir des tables de vérité des assertions étudiées. Par exemple, pour montrer (1), il suffit de tracer la table de vérité de $(P \wedge \neg P)$ et de vérifier qu'il n'y a que des "F" dans la colonne finale (colonne de l'étape 2) :

	P	∧	¬P
	V	$\underline{F}$	F
	F	$\underline{F}$	V
étape :	1	2	1

Montrons maintenant (13); il y aura $2^3 = 8$ lignes puisque les valeurs de vérité possibles de chacune des 3 assertions sont au nombre de 2.

	P	Q	R	((P	⇒	Q)	∧	(Q	⇒	R))	⇒	(P	⇒	R)
	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	$\underline{V}$	V	V	V
	V	V	F	V	V	V	F	V	F	F	$\underline{V}$	V	F	F
	V	F	V	V	F	F	F	F	V	V	$\underline{V}$	V	V	V
	V	F	F	V	F	F	F	F	V	F	$\underline{V}$	V	F	F
	F	V	V	F	V	V	V	V	V	V	$\underline{V}$	F	V	V
	F	V	F	F	V	V	F	V	F	F	$\underline{V}$	F	V	F
	F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	$\underline{V}$	F	V	V
	F	F	F	F	V	F	V	F	V	F	$\underline{V}$	F	V	F
étape :				1	2	1	3	1	2	1	4	1	2	1

Les "V" obtenus en colonne, à l'étape 4, montrent que l'assertion (13) est une proposition quelles que soient les assertions P, Q et R. On remarquera,

[1] *Inférer* signifie "tirer une conséquence"; *modus ponens* est une expression d'origine latine signifiant "méthode par position" . D'après cette règle, on voit que si P est vraie et si $(P \Rightarrow Q)$ est vraie alors on a Q (Q est vraie) : on peut "détacher" Q (par syllogisme).

d'après la colonne obtenue à l'étape 3, que $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R))$ n'est pas une tautologie.

Exemple

A l'aide de (9), transformons la proposition P1 suivante, dans laquelle x, y, z et t sont des réels donnés.

P1 : (l'un ou l'autre des nombres x et y est > 0 et de même l'un ou l'autre des nombres z et t est > 0).

Désignons respectivement par P, Q, R et S les assertions suivantes $(x > 0)$, $(y > 0)$, $(z > 0)$ et $(t > 0)$;

P1 s'écrit alors : $(P \vee Q) \wedge (R \vee S)$.

P1 est donc équivalente à : $(P \wedge R) \vee (P \wedge S) \vee (Q \wedge R) \vee (Q \wedge S)$,

c'est-à-dire à :

(x et z sont > 0, ou x et t le sont, ou encore y et z sont > 0, ou y et t le sont).

Remarques

1. La formule (10) est à l'origine de la démonstration par contraposition (voir 2.3.*a* , page 47). La formule (12) est souvent utilisée; elle traduit le fait que $(P \Rightarrow Q)$ est fausse si et seulement si (P est vraie et Q fausse). Enfin la formule (15) prouve qu'il est plus "économique", pour montrer la validité de $((P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R))$, de montrer que $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \wedge (R \Rightarrow P))$ est vraie (**démonstration** dite **circulaire**).

2. L'usage autorise des écritures du type $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ ou $P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$; ces écritures sont abusives et désignent respectivement $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R))$ et $((P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R))$. Notons qu'il ne faut pas confondre $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$ avec $(P \Rightarrow Q \Rightarrow R)$.

1.2. Notion de prédicat ou d'"assertion"

Quelques concepts élémentaires de la théorie des ensembles sont utilisés dans ce paragraphe; le lecteur pourra donc, s'il le juge utile, se reporter au chapitre 3.

a. Définitions et exemples

Dans tout problème mathématique on étudie des propriétés ou prédicats d'objets x, y, ... ; plus précisément on a la définition suivante :

Définition 1

Soit E un ensemble; un **prédicat** A d'une variable $x \in E$ est une application définie sur une partie de E notée $\mathscr{D}$**(A)**[1,2], appelée **ensemble de définition** de A, et à valeurs dans $\mathscr{A}$[3]. A porte encore le nom de **fonction assertionnelle** de la **variable** x ou, plus rapidement, d'assertion $A(x)$ (de la variable x).

Ainsi si a est un élément de $\mathscr{D}(A)$, en remplaçant x par a, on obtient une assertion, l'assertion $A(a)$.

En ce qui nous concerne, pour simplifier le langage tout en évitant les confusions, le prédicat A sera appelé **"assertion"** $A(x)$ ou encore "assertion" A; on notera la présence des guillemets.

Remarquons que $\mathscr{D}(A)$ est fourni avec A; toutefois, en pratique A est souvent donnée par la seule expression $A(x)$; dans ce cas, si aucune autre précision n'est apportée, on prend comme ensemble de définition de A, l'ensemble des x pour lesquels $A(x)$ a un sens (c'est-à-dire est une assertion).

---

[1] Notons que la notation $\mathscr{D}(A)$ n'est pas universelle. Pour certains auteurs $\mathscr{D}(A) = E$; cette restriction est inutile ici.

[2] $\mathscr{D}(A)$ peut éventuellement être l'ensemble vide en Mathématique.

[3] On rappelle que $\mathscr{A}$ est la classe des assertions de la théorie considérée (voir 1.1.*a*).

Définition 2

On appelle **domaine de validité** de A, l'ensemble, noté $\mathcal{V}$**(A)**, des x de $\mathcal{D}$(A) pour lesquels A(x) est une proposition. Si F est une partie du domaine de validité de A, on dit que *A(x) est vraie sur F* ou encore qu'*on a A(x) sur F*.

On prendra garde de ne pas confondre $\mathcal{D}$(A) et $\mathcal{V}$(A).

Exemple 1

On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}$, l' "assertion" $(\sqrt{x} > 2)$ de la variable x est définie sur $[0 , +\infty[$ (sauf précision supplémentaire car l'ensemble de définition peut toujours être restreint); $(\sqrt{x} > 2)$ n'est pas une assertion si x est un réel < 0. Le domaine de validité de l' "assertion" est $]4 , +\infty[$.

Exemple 2

L' "assertion" $(\sqrt{x} > 2)$ supposée définie sur $[5 , +\infty[$ n'est vraie que sur $[5 , +\infty[$.

Exemple 3

Ici $E = \mathbb{R}^2$. L' "assertion" A(x) : $(\sqrt{x+2y} > 2)$, des variables x et y, a pour ensemble de définition le demi-plan fermé $\mathcal{D}(A) = \{ (x, y) / x + 2y \geq 0\}$ et pour domaine de validité le demi-plan ouvert $\{ (x, y) / x + 2y > 4\}$.

Remarques

1. Toute assertion peut être considérée comme une "assertion" constante d'une variable x quelconque.

2. P(x) étant une "assertion" d'une variable x, l' "assertion" $\rceil P(x)$ (c'est l' "assertion" : $x \to \rceil P(x)$) est définie elle aussi sur $\mathcal{D}(P)$; Q(x) étant aussi une "assertion" de la variable x, l' "assertion" $P(x) \vee Q(x)$ est définie sur $\mathcal{D}(P) \cap \mathcal{D}(Q)$; il en est de même des "assertions" $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$ et $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$.

3. P et Q étant des "assertions", les notations $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \Rightarrow Q$ et $P \Leftrightarrow Q$ sont strictement réservées au cas particulier $E = \mathcal{D}(P) = \mathcal{D}(Q)$; nous n'utilisons pas ces notations ici. Toutefois signalons qu'il serait aisé de montrer que toutes les règles des pages 14 et 15 sur les assertions s'appliquent aux

prédicats, à condition que ces prédicats soient définis sur un même ensemble E (pour cela, il faut, bien sûr, savoir que, par définition, un prédicat P défini sur E est vrai si P(x) est vrai pour tout x de E); on pourrait alors aborder le calcul des prédicats, ce que nous ne ferons pas.

Exemple 4

a étant un réel fixé et x une variable réelle, ($\sqrt{x - a} = \sqrt{-x} \Leftrightarrow x = \frac{a}{2}$) est une "assertion" P définie sur $\{ x / (x - a) \geq 0 \text{ et } -x \geq 0\} \cap \mathbb{R}$. Donc $\mathscr{D}(P) = [a , 0]$ si $a < 0$, $\mathscr{D}(P) = \{0\}$ si $a = 0$, et $\mathscr{D}(P) = \emptyset$ si $a > 0$. P est donc une "assertion" vraie sur $\mathscr{D}(P)$ pour toutes les valeurs de a (revoir la table de vérité de l'équivalence et se reporter à l'axiome (5) du paragraphe b suivant).
Prenons maintenant pour Q l' "assertion" ($\sqrt{x - a} = \sqrt{-x}$), on a $\mathscr{D}(P) = \mathscr{D}(Q)$. Q n'est pas vraie sur $\mathscr{D}(Q)$ si $a < 0$ (par exemple si $x = 0$, $\sqrt{x - a} \neq \sqrt{-x}$), et est vraie sur $\mathscr{D}(Q)$ si $a \geq 0$.

Exemple 5

L' "assertion" A(x,y) des deux variables x et y :

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow (y^2 = x \text{ et } y \geq 0) ,$$

est définie sur $\mathscr{D}(A) = [0 , +\infty [\times \mathbb{R}$; elle est vraie sur $\mathscr{D}(A)$ car pour tout (x, y) de $\mathscr{D}(A)$ on a bien l'équivalence :

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow (y^2 = x \text{ et } y \geq 0);$$

on a donc $((y = \sqrt{x}) \Leftrightarrow (y^2 = x \text{ et } y \geq 0))$ sur $\mathscr{D}(A)$ (voir la définition 2). Par contre l' "assertion" B(x, y) :

$$y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x ,$$

définie sur le même ensemble que A n'est pas une "assertion" vraie sur $\mathscr{D}(B)$; il suffit pour le voir d'exhiber un couple (x, y) de $\mathscr{D}(B)$, tel que B(x, y) soit faux; le couple $(x = 1, y = -1)$ en est un, car on a bien $y^2 = 1 = x$, mais $y = -1 \neq x$.

b. Quantificateurs

Le domaine de validité d'une "assertion", ou tout au moins certaines parties de ce domaine, jouant un rôle fondamental, une notion de quantification s'introduit naturellement et, avec elle, les "**quantificateurs**" qui permettent, lorsqu'ils sont bien utilisés, certains automatismes de raisonnement.

Notations

Soit une "assertion" $A(x)$ et soit D une partie de $\mathscr{D}(A)$[1] ; l'assertion

P : pour tout $x \in D$, on a $A(x)$

est notée :

(i) $\forall x \in D , A(x)$[2]

ou

$\forall x \in D , A$

ou encore

$\forall x \in D \ (A)$.

Le symbole "$\forall$" (transformation de la lettre **A**, initiale du mot anglais "All" (tout)) est appelé **quantificateur universel**.

Si $D = \mathscr{D}(A)$, P s'écrit plus simplement :

(i') $\forall x , A(x)$

ou

$\forall x , A$.

Remarque 1

P est une véritable assertion (sans guillemets) donc $P \in \mathscr{A}$; x n'est pas une variable au sens de la définition 1 du paragraphe a : on dit que x est une **variable liée**. (i) n'est pas fonction de x mais plutôt de tout l'ensemble D décrit par x; on pourrait aussi bien noter (i) sous la forme : $\forall y \in D , A(y)$.

Remarque 2

"$\forall$" n'est pas une abréviation de "pour tout" ou de "quel que soit"; il faut l'employer, comme dans (i), sous la forme :

$\forall \ldots , \ldots$

qui se lit : pour tout ... on a ...

sans omettre la virgule qui se lit "on a".

---

[1] Dans le cas où D est vide, se reporter à l'axiome (5) suivant.

[2] Dans le cas où $D = \{x_1, \ldots, x_n\}$, (i) désigne $(P(x_1) \wedge \ldots \wedge P(x_n))$.

Notons que dans (i) le quantificateur précède l' "assertion" $A(x)$, qui est appelée **portée** du quantificateur.

Il faut également veiller à contrôler dans (i) la partie $A(x)$ sur laquelle porte la quantification; par exemple l'assertion

$$\forall x , \sqrt{x+2} = \sqrt{-x} \Rightarrow x = 0$$

est l'assertion

$$\forall x , (\sqrt{x+2} = \sqrt{-x} \Rightarrow x = 0) ,$$

qui ne doit pas être confondue avec l'assertion

$$(\forall x , \sqrt{x+2} = \sqrt{-x}) \Rightarrow x = 0 ;$$

la première est fausse, alors que la seconde est vraie puisque l'assertion

$(\forall x , \sqrt{x+2} = \sqrt{-x})$ est fausse.

Il est également important de détacher du contexte (soit par mise entre parenthèses, soit en passant à la ligne) toute phrase contenant ce symbole "$\forall$", sous peine de rendre une copie illisible.

Reprenons l'assertion

P : pour tout $x \in D$, on a $A(x)$;

sa négation étant :

il existe (au moins un) x de D tel qu'on a $\neg A(x)$,

on introduit le **quantificateur existentiel** "$\exists$" (Le symbole "$\exists$" est une transformation de la lettre **E**, initiale du mot anglais "Exist" (existe)) qui permet d'écrire cette négation sous la forme :

$$\exists x \in D , \neg A(x) ;$$

précisons cela dans les notations qui suivent.

Notations

Soit une "assertion" $A(x)$ et soit D une partie de $\mathcal{D}(A)$; l'assertion

Q : il existe x dans D tel qu'on a $A(x)$

est notée :

(ii) $\exists x \in D , A(x)$ [1]

ou plus simplement

$$\exists x \in D , A$$

---

[1] Dans le cas où $D = \{x_1, ..., x_n\}$, (ii) désigne $(P(x_1) \vee ... \vee P(x_n))$.

ou encore

$$\exists x \in D\ (A).$$

Si $D = \mathscr{D}(A)$, Q s'écrit plus simplement

(ii') $\exists x , A(x)$

ou

$$\exists x , A .$$

Remarque 3

Les remarques 1 et 2 se transposent immédiatement; cette fois encore la virgule située dans (ii) ou (ii') a un rôle important.

$$\exists \ldots , \ldots$$

peut se lire :

Pour au moins un ... on a ...

ou encore

il existe ... tel qu'on a ...

Proposition

Pour toute "assertion" $A(x)$, si D est inclus dans $\mathscr{D}(A)$, on a :

(1) $\rceil(\forall x \in D, A) \Leftrightarrow (\exists x \in D, \rceil A)$.

(2) $\rceil(\exists x \in D, A) \Leftrightarrow (\forall x \in D, \rceil A)$.

Démonstration. (1) a été remarqué précédemment; (2) s'obtient à partir de (1) en remplacant A par sa négation . ◊ [1]

Exemple 1

La négation de

$$\exists x \in [0 , 1], \sqrt{x} > x ,$$

est

$$\forall x \in [0 , 1], \sqrt{x} \leq x ;$$

la première assertion est vraie, la seconde est donc fausse.

[1] Ce symbole signale, dans ce document, la fin d'une démonstration.

Exemple 2

L'assertion :

Il existe un unique x de D tel qu'on a $A(x)$,

(ou encore : pour un et un seul x on a $A(x)$)

est notée :

P : $\exists! \, x \in D, A(x)$.

Ce qui peut encore s'écrire :

$((\exists\, x \in D , A(x))$ et $(\forall (x, y) \in D^2 , (A(x) \text{ et } A(y)) \Rightarrow x = y))$.

La négation de P est donc

$\rceil P$: $((\forall\, x \in D , \rceil A(x))$ [1] ou $(\exists (x, y) \in D^2 , (A(x) \text{ et } A(y)) \text{ et } x \neq y))$,

qui signifie que $A(x)$ est fausse pour tout x de D ou que $A(x)$ est vraie pour au moins deux éléments de D.

Le lecteur pourra appliquer la même démarche à l'assertion :

il existe au plus un x de D tel qu'on a $A(x)$.

Remarque 4

Il faut prendre garde dans l'application des propositions précédentes (1) et (2), ainsi que dans (i) et (ii), de respecter l'hypothèse "$D \subset \mathcal{D}(A)$". Par exemple, si on est tenté, à tort, de considérer la phrase

$\exists\, x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} < 0$

comme une assertion, on aurait tendance à considérer qu'elle est fausse; donc sa négation

$\forall\, x \in \mathbb{R}, \sqrt{x} \geq 0$

serait une proposition; en fait, cette phrase n'a pas de sens.

De même l'équivalence $(\sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9)$ valable sur $[0 , +\infty [$, ne nous autorise pas à écrire que :

$\forall\, x \in \mathbb{R}, (\sqrt{x} > 3 \Leftrightarrow x > 9)$.

Il ne faudrait pas pour autant croire que, lorsqu'on manipule une assertion du type (i) ou (ii), il soit toujours nécessaire de calculer $\mathcal{D}(A)$; on évite ce calcul autant que possible. Par exemple, y étant un réel fixé et x une variable réelle,

$\exists\, x, \sqrt{x^3 - y^2} > 4$

---

[1] L'assertion $(\forall x \in D , \rceil A(x))$ peut encore s'écrire $\nexists\, x \in D , A(x))$ qui se lit *il n'existe pas d'élément de D vérifiant A* ou *aucun x de D ne vérifie A.*

est une assertion vraie : en effet, prenons pour x un nombre tel que $x^3 - y^2 > 16$ (un tel x existe car $x^3 - y^2 \to +\infty$, quand $x \to +\infty$); on a bien $x \in \mathcal{D}(A)$ car $x^3 - y^2 \geq 0$; et de plus $\sqrt{x^3 - y^2} > \sqrt{16} = 4$ (voir le paragraphe 2.2.*c* page 41).

Remarque 5

Si $D \subset \mathcal{D}(A)$, on a les propositions (3) et (4) suivantes :

(3) $(\exists x \in D, A) \Leftrightarrow (\exists x, (x \in D \text{ et } A))$

(4) $(\forall x \in D, A) \Leftrightarrow (\forall x, (x \in D \Rightarrow A))$.

En effet (3) est évidente; quant à (4) si on l'écrit sous forme (P1 $\Leftrightarrow$ P2), il suffit de montrer que : (non P1) $\Leftrightarrow$ (non P2).

$$
\begin{aligned}
\text{Or :}\qquad (\text{non P1}) &\Leftrightarrow (\exists x \in D, \neg A)\\
&\Leftrightarrow (\exists x, (x \in D \text{ et } \neg A)) \quad (\text{d'après (3)})\\
&\Leftrightarrow (\exists x, \neg(x \in D \Rightarrow A)) \quad (\text{d'après (12) du 1.1.}e)\\
&\Leftrightarrow (\text{non P2}) . \lozenge
\end{aligned}
$$

Donnons maintenant un axiome de la théorie de ensembles.

Axiome

Pour toute "assertion" $A(x)$ on a la proposition :

(5) $\forall x \in \varnothing, A(x)$.

Remarque 6

Le (5) précédent est souvent utilisé en mathématique; il permet d'éviter de traiter le cas où $\mathcal{D}(A)$ est vide lorsqu'on montre que $(\forall x , A(x))$.

Par exemple, a étant un réel fixé, l'assertion

$$\forall x, \sqrt{-x^2 + 2a - 1} = \sqrt{x^2 - 1} \Rightarrow x^2 = a$$

est vraie; elle se présente sous la forme

$$\forall x, A(x) ;$$

et, pour montrer qu'elle est vraie, il n'y a pas à envisager le cas particulier où $\mathcal{D}(A)$ est l'ensemble vide (situation qui se produit par exemple lorsque $a = 0$); il n'est même pas nécessaire de calculer $\mathcal{D}(A)$. On procède de la façon suivante: supposons $x \in \mathcal{D}(A)$, c'est-à-dire supposons $-x^2 + 2a - 1 \geq 0$ et $x^2 - 1 \geq 0$, et vérifions qu'on a $A(x)$; ceci est immédiat par élévation au carré de l'expression $\sqrt{-x^2 + 2a - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$ (voir le paragraphe 2.2.*b* page 39).

c. Quelques remarques sur l'utilisation des quantificateurs

Avant de lire ce paragraphe *c* et le paragraphe *d* suivant, le lecteur pourrait se familiariser avec la section 2.2 page 38.

Remarque 1

Il faut éviter de surcharger l'écriture d'une assertion quantifiée, sinon sa négation peut devenir incompréhensible.

Ecrivons par exemple qu'une suite numérique $(u_n)_n$ est majorée; ceci s'exprime par l'assertion

P : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$;

sa négation exprime donc que la suite $(u_n)_n$ n'est pas majorée; on a

$\rceil$P : $\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M$ (voir la 2e partie du *d* page 28).

Surchargeons l'écriture de P en remplacant "$\exists M \in \mathbb{R}$", par "$\exists M \in \mathbb{R}$ tel qu'on a" ; la négation "automatique" qui s'écrit :

$\forall M \in \mathbb{R}$ tel qu'on a , $\exists n \in \mathbb{N}, u_n > M$

ne se comprend pas.

On peut surcharger $\rceil$P de façon plus subtile en remplaçant n par n(M) (pour mettre en valeur le fait que n dépend de M) :

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n(M) \in \mathbb{N}, u_n > M$.

La négation s'écrit alors :

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall n(M) \in \mathbb{N}, u_n \leq M$;

et est, là encore, incompréhensible.

Remarque 2

Si on peut intervertir l'ordre d'apparition de deux quantificateurs de même espèce, on ne doit pas intervertir l'ordre d'apparition de "$\forall$" et "$\exists$" (sous peine de changer le sens de la phrase).

Remplaçons l'assertion P de la remarque 1 par :

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists M \in \mathbb{R}, u_n \leq M$;

on obtient ainsi une assertion vraie pour toute suite $(u_n)_n$ (en effet si n est un

entier naturel quelconque fixé, le nombre $M = u_n$ vérifie l'inégalité $u_n \leq M$); or l'assertion P d'origine n'est pas vraie pour toute suite $(u_n)_n$.
Toutefois le lecteur pourra vérifier (en révision de la fiche d'exercices n° 3) que l'assertion suivante est vraie pour toute "assertion" $A(x, y)$:

$$(\exists x \in D_1, \forall y \in D_2, A(x, y)) \Rightarrow (\forall y \in D_2, \exists x \in D_1, A(x, y)) .$$

Remarque 3

Lorsqu'on éprouve des difficultés de compréhension d'une phrase quantifiée, il est bon de faire la distinction entre les variables et les variables liées (voir la remarque 1 du *b* page 20) et de voir si un changement d'appellation de certaines variables liées ne rend pas la compréhension plus facile.
Par exemple l' "assertion"
$P(x, y)$: $(\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0)$ et $(x + y \neq 0)$,
est de la forme : $A(x, y)$ et $B(x, y)$.
$A(x, y)$ est en fait une "assertion" constante dans laquelle les variables liées x et y peuvent très bien être désignées par u et v :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \exists v \in \mathbb{R}, u + v = 0 ;$$

cette assertion étant vraie, $P(x, y)$ est en fait équivalente à $B(x, y)$ sur $\mathbb{R}^2$.

Considérons un autre exemple; soit l' "assertion"
$P(x, y)$: $(x = y - 1$ et $y > 0) \Rightarrow (\forall y, x > -y^2)$.
Si on remplace x par $y - 1$ dans le membre de droite, on obtient l' "assertion"
$Q(x, y)$: $(x = y - 1$ et $y > 0) \Rightarrow (\forall y , y - 1 > -y^2)$
qui n'est pas équivalente à $P(x, y)$ sur $\mathbb{R}^2$ (par exemple $P(1, 2)$ est vraie alors que $Q(1, 2)$ est fausse);
par contre $P(x, y)$ est équivalente sur $\mathbb{R}^2$ à :

$$(x = y - 1 \text{ et } y > 0) \Rightarrow (\forall u , x > -u^2) ,$$

elle-même équivalente sur $\mathbb{R}^2$ à :

$$(x = y - 1 \text{ et } y > 0) \Rightarrow (\forall u , y - 1 > -u^2) .$$

On voit qu'il faut éviter de donner à une variable liée (ici "u") le nom d'une variable (ici "y") figurant dans la portée (ici "$y - 1 > -u^2$") du quantificateur associé à la variable liée.

Remarque 4

Il est clair que si on a $(\forall x \in D, P(x))$, et si on suppose x_0 dans D, on a $P(x_0)$; par exemple considérons la proposition suivante :

$\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, y = x + 1$,

qui exprime que tout entier naturel x a un successeur $x + 1$; on a ici :

$\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$; avec

$P(x)$: $\exists y \in \mathbb{N}, y = x + 1$.

Si, à tort, on choisit $x_0 = y$, $P(x_0)$ est vraie et donne :

$\exists y \in \mathbb{N}, y = y + 1$,

qui est une assertion fausse ! L'erreur est du même type que celle rencontrée dans la remarque précédente : dans l' "assertion" $P(x)$, on a remplacé la variable x par la variable liée y (alors que x est dans la portée "$y = x + 1$" du quantificateur existentiel liant y).

On peut aussi remarquer que, pour x fixé, le y fourni par $P(x)$ est fonction de x : c'est un $y(x)$ (à savoir $x + 1$) qui ne prend la valeur x pour aucun x.

Remarque 5

Supposons qu'on a $(\forall x \in D, P(x))$.

f désignant une application quelconque, posons $x = f(u)$; si on note $\overset{-1}{f}(D) = \{ u / f(u) \in D \}$, il est alors aisé de montrer qu'on a :

$\forall u \in \overset{-1}{f}(D), P(f(u))$.

Par exemple, on a

$\forall x \geq 0, x \geq \sin x$.

Posons : $x = (u - 1)^3$ (f est l'application $u \mapsto (u - 1)^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$).

On a $\overset{-1}{f}(D) = \{ u / (u - 1)^3 \geq 0 \} = \{ u / u \geq 1 \}$; donc

$\forall u \in \{u / u \geq 1\}, (u - 1)^3 \geq \sin (u - 1)^3$.

Il ne serait pas correct d'écrire

$\forall (u - 1)^3 \geq 1, (u - 1)^3 \geq \sin (u - 1)^3$ (revoir le (i) du paragraphe *b*).

Par contre, l'écriture "incorrecte"

$\forall u \geq 1, (u - 1)^3 \geq \sin (u - 1)^3$

est admise.

d. Sur les avantages à utiliser les quantificateurs

L'écriture d'une assertion sous forme quantifiée (c'est-à-dire en utilisant "au maximum" les symboles "$\forall$" et "$\exists$") présente les avantages suivants :

— elle fournit une **modélisation**[1]; en outre elle nécessite une étude sérieuse de la signification de l'assertion; "écrire exactement ce que l'on pense" est une qualité essentielle en Mathématique, comme dans toute science, et permet, à l'usage, d'améliorer la "puissance" du raisonnement.

— elle fournit une assertion sous une forme facilement utilisable; on a, par exemple, automatiquement accès à la négation de l'assertion envisagée.

Exemple

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique; écrivons que cette suite est convergente en partant du concept "intuitif" de convergence.

Une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente s'il existe un nombre $l \in \mathbb{R}$ tel que u_n soit aussi proche que l'on veut de l pourvu que n soit assez grand.

Précisons ce concept :

il existe $l \in \mathbb{R}$ *tel qu'on ait*

P1 : u_n *est aussi proche que l'on veut de* l *pourvu que* n *soit assez grand.*

Précisons maintenant

P1 : *pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a* $|u_n - l| < \varepsilon$ *pourvu que* n *soit assez grand.*

P1 s'écrit donc

P1 : *pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a* P2 ; avec

P2 : $|u_n - l| < \varepsilon$ *pourvu que* n *soit assez grand.*

Précisons

P2 : $(n \text{ assez grand}) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon)$.

P2 n'est pas encore suffisamment précise car n est non quantifié; continuons donc à préciser cette assertion

P2 : *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* : $((n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon))$;

n n'est pas encore quantifié; continuons

P2 : *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel qu'on ait* P3 ; avec

P3 : *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* P4 ; avec

P4 : $(n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon)$.

Le concept de départ est maintenant fixé en une "définition" (i) :

[1] En Mathématique, au sens le plus large, modéliser une situation physique, c'est en trouver une écriture mathématique, un *modèle mathématique*.

$$(\mathrm{i})\quad \left|\begin{array}{ll} \exists l \in \mathbb{R}, P1; & \text{avec} \\ P1: \forall \varepsilon > 0, P2; & \text{avec} \\ P2: \exists N \in \mathbb{N}, P3; & \text{avec} \\ P3: \forall n \in \mathbb{N}, P4; & \text{avec} \\ P4: (n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon). & \end{array}\right.$$

(i) s'écrit donc sous la forme (ii) suivante :

(ii) $$\exists l \in \mathbb{R}, \Big(\forall \varepsilon > 0, \big(\exists N \in \mathbb{N}, (\forall n \in \mathbb{N}, ((n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon)))\big)\Big).$$

En pratique, on peut se passer de la plupart des parenthèses, car chaque parenthèse ouverte après un quantificateur se ferme à la fin de la proposition complète; la virgule qui suit le quantificateur remplace donc les deux parenthèses. (ii) s'écrit alors sous la forme (iii) suivante

(iii) $$\exists l \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon).$$

Déterminons maintenant la négation de (i), et illustrons ainsi le second point; pour cela il suffit d'appliquer (1) ou (2) du paragraphe *b* autant de fois qu'il le faut :

non (i) : $\forall l \in \mathbb{R}$, non P1

non P1 : $\exists \varepsilon > 0$, non P2

.... : ....

La négation s'obtient donc directement à partir de (iii) par remplacement de "$\forall$" par "$\exists$" et réciproquement; ainsi on obtient

non (iii) : $\forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}$, non $\big((n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon)\big)$;

il ne reste plus qu'à remplacer *non* $\big((n \geq N) \Rightarrow (|u_n - l| < \varepsilon)\big)$ par :

$n \geq N$ et $|u_n - l| \geq \varepsilon$ (voir la règle (12) page 14).

On obtient ainsi, de façon définitive

non (iii) : $\forall l \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, \; n \geq N$ *et* $|u_n - l| \geq \varepsilon$.

A partir de non (iii) on peut maintenant comprendre la notion de suite non convergente (notion difficile à saisir d'emblée) et de ce fait améliorer la compréhension de la notion de suite convergente; paradoxalement, une assertion n'est pas comprise si on n'a pas compris sa négation.

LOGIQUE
DU RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE
MÉTHODES USUELLES DE DÉMONSTRATION

2

Le paragraphe 2.1 aborde la notion de démonstration : analyse, synthèse et preuve de démonstration. Nous fournissons une présentation structurée de la démonstration; que le lecteur ne se décourage pas ! les nombreux exemples des fiches 3 et 4 lui permettront de structurer facilement une démonstration et d'aboutir ainsi à la notion de preuve.

Les paragraphes 2.2, 2.3 et 2.4 passent en revue les méthodes usuelles de démonstration, celles que tout étudiant ne peut méconnaître; les exemples donnés sont, pour la plupart, simples et devraient permettre au lecteur de faire porter toute son attention sur les méthodes employées.

2.1. La démonstration en mathématique

Précisons d'abord qu'il n'y a de vérité mathématique que dans le cadre d'une théorie donnée. Par exemple, l'assertion "tout nombre admet un nombre strictement inférieur (pour l'ordre usuel)" est une assertion vraie dans la théorie des nombres réels, fausse dans la théorie des entiers naturels et n'est même pas une assertion dans la théorie des nombres complexes (car il n'y a pas d'ordre usuel sur les nombres complexes).

Plaçons-nous donc à l'intérieur d'une théorie mathématique donnée; dans cette théorie résoudre un problème, c'est montrer une proposition du type $(H \Rightarrow C)$ [1] : c'est **déduire** C de H , c'est-à-dire **démontrer l'assertion C sous l'hypothèse H** (on dit aussi **démontrer** ou **prouver la proposition C**, ou **montrer la proposition C**, ou encore **montrer l'assertion C sous l'hypothèse H**); on dispose pour cela non seulement de la donnée H (ou

[1] Si dans certains problèmes, l'hypothèse est absente, il s'agit alors de déduire C directement des propositions de la théorie.

hypothèse principale) du problème mais aussi des propositions de la théorie concernée. Pour démontrer $(H \Rightarrow C)$ on met en évidence une suite $Q_0, Q_1, \dots, Q_n, Q_{n+1}$ d'assertions[1] telles que Q_0 soit H affectée de la valeur de vérité V, Q_{n+1} soit C, et telles que la vérité de chaque Q_i (pour $1 \leq i \leq n+1$) puisse être déduite des valeurs de vérité V des assertions précédentes $Q_0, Q_1, \dots, Q_{i-1}$, par l'intermédiaire des propositions de la théorie et des règles logiques.

Les assertions $Q_1, \dots, Q_n$ sont donc telles qu'on a :

$$(S) \begin{cases} H \Rightarrow Q_1 \\ (H \wedge Q_1) \Rightarrow Q_2 \\ \dots\dots \\ (H \wedge (Q_1 \wedge \dots \wedge Q_{n-1})) \Rightarrow Q_n \\ (H \wedge (Q_1 \wedge \dots \wedge Q_{n-1} \wedge Q_n)) \Rightarrow C \end{cases}$$

On voit alors que $Q_1, \dots, Q_n$ et C sont vraies sous l'hypothèse H. En effet, en supposant qu'on a H, on a Q_1 (par la règle du modus ponens, puisqu'on a $H \wedge (H \Rightarrow Q_1)$); puis de $(H \wedge Q_1)$ et de la règle du modus ponens, on déduit que Q_2 est vraie; ... et ainsi de suite.

Si l'une des assertions Q_i précédentes est encore trop complexe à démontrer (sous l'hypothèse H), on peut envisager pour Q_i une **démonstration auxiliaire** $Q'_1, \dots$; mais il ne faut pas oublier, si Q_i se présente sous la forme $(H'_i \Rightarrow C'_i)$, de faire intervenir, à côté de l'**hypothèse auxiliaire** H'_i, l'hypothèse principale H : on montre en fait $((H \wedge H'_i) \Rightarrow C'_i)$; l'hypothèse auxiliaire est abandonnée une fois Q_i montrée.

Comme cas particuliers du schéma de démonstration (S) précédent, on utilise souvent l'un des schémas (S_1), (S_2) et (S_3) suivants :

(S_1) : $H \Rightarrow Q_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow Q_n \Rightarrow C.$

(S_2) : $H \Rightarrow Q_1 \Rightarrow C.$

(S_3) : $H \Rightarrow (Q_1 \wedge \dots \wedge Q_n) \Rightarrow C.$

---

[1] non nécessairement vraies dans la théorie.

En pratique, il vaut mieux travailler "au plus près" de la conclusion : imaginer l' "étape" Q_n, puis Q_{n-1}, ...; mais, en cours de démonstration, il est nécessaire de procéder dans l'ordre naturel : il faut montrer Q_i en considérant, le temps de la démonstration, H, Q_1, ..., Q_{i-1} comme des propositions de la théorie (ce qui souvent n'est pas le cas).

Toute résolution d'un problème débute par une **analyse** (ne serait-ce qu'une analyse mentale très simple) qui a pour but d'imaginer la suite $Q_1, \ldots, Q_n$ des résultats partiels conduisant à la solution, ou au moins une partie des éléments de cette suite; la mise en œuvre de la démonstration de chacun des Q_i nécessite, elle aussi, une analyse qui, en général, est facile car, le plus souvent, il s'agit d'appliquer un procédé élémentaire de démonstration (voir les paragraphes 2.2, 2.3 et 2.4). En fait, l'analyse est donc constituée **d'analyses partielles** qu'on développe en cours de démonstration (voir l'exemple 1).
Il y a, pour un problème donné, bien des analyses possibles; c'est au niveau de l'analyse qu'interviennent surtout les qualités du mathématicien, l'expérience et l'intuition. Une bonne analyse peut conduire à une solution rapide; par contre une analyse lourde conduit parfois à une solution fort longue; c'est pourquoi il faut "prendre son temps" au moment de l'analyse. De toute façon, une analyse s'avère valable seulement si elle conduit à une solution du problème posé.

Parmi les procédés courants de l'analyse, on peut citer :

— une écriture mathématique quantifiée de C

— éventuellement une ou des réécritures de l'écriture initiale; par exemple, l'égalité $A = B$ de deux parties A et B d'un même ensemble E peut s'écrire $(\forall x \in E, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ (voir page 56), et l'égalité $f = g$ de deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire $(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = g(x))$ (voir page 67); ou encore par l'utilisation des règles logiques du paragraphe 1.1.*e*

— l'utilisation d'analogies (pour cela, la connaissance de la théorie et l'expérience jouent un rôle fondamental).

— la recherche de propriétés nécessairement vérifiées par l'objet ou les objets à déterminer

— et surtout : imaginer Q_1, "plus simple" que C, telle qu'on ait $(H \Rightarrow Q_1 \Rightarrow C)$; ou imaginer Q_1 et Q_2 telles que $(H \Rightarrow (Q_1 \wedge Q_2) \Rightarrow C)$. Il est conseillé de commencer par étudier C, c'est-à-dire de chercher Q_1, Q_2 telles que $(Q_1 \Rightarrow C)$, ou $((Q_1 \wedge Q_2) \Rightarrow C)$. Une réécriture des hypothèses est souvent une perte de temps; il vaut mieux les utiliser au fur et à mesure des besoins ("sous forme dynamique").

L'analyse est parfois simple et, dans ce cas, elle ne se rédige pas. Si l'analyse est plus compliquée, il est bon de la donner au correcteur, hors démonstration, en précisant bien qu'il s'agit d'une analyse : commencer l'analyse par le mot "analyse"; la suite de la démonstration doit alors être introduite par le mot **"synthèse"**.

La démonstration n'est acceptable que si elle est en même temps une **preuve de démonstration** d'elle-même, c'est-à-dire si chaque «proposition» Q_1, Q_2, ... peut être vérifiée sans difficulté. Redisons encore que l'analyse sert de support à la démonstration : l'analyse est toujours hors solution, même si elle est parfois intégrée à la rédaction.

Exemple 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $x = \sqrt{x} + 6$.

1^{re} solution

Analyse (hors rédaction). On prend $H : S = \{x \ / \ x = \sqrt{x} + 6\}$ et $C : S = \ldots$. Une analyse consisterait à élever au carré les deux membres de l'équation $x = \sqrt{x} + 6$; cette analyse conduit à un blocage (l'équation obtenue contient encore $\sqrt{x}$) ou à une solution assez lourde (en éliminant $\sqrt{x}$ entre les deux équations). On peut affiner cette analyse en la remplaçant par l'analyse suivante (qu'il serait inutile, car elle est trop simple, de faire figurer sur une rédaction définitive) : en élevant au carré les deux membres de l'égalité équivalente $x - 6 = \sqrt{x}$, on obtient un polynôme du second degré; il suffit alors de sélectionner parmi ses racines celles qui conviennent.

Ici l'analyse est complète car elle imagine un schéma conduisant à la conclusion. Elle n'intéresse pas le correcteur.

Solution. Si $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation, x vérifie l'égalité $x - 6 = \sqrt{x}$; en élevant au carré cette égalité on obtient l'équation $x^2 - 13x + 36 = 0$, c'est-à-dire $(x - 9)(x - 4) = 0$. Ainsi nécessairement, $x = 9$ ou $x = 4$. En portant $x = 9$ dans l'équation, on obtient $9 - 6 = \sqrt{9}$; $x = 9$ est donc solution. En portant $x = 4$ dans l'équation, on obtient $4 - 6 = \sqrt{4}$; ce qui montre que 4 n'est pas solution. En conclusion l'équation $x = \sqrt{x} + 6$ possède une unique solution qui est $x = 9$. ◊

2e solution

Analyse (partielle; hors rédaction). Envisageons, comme précédemment, d'élever au carré les deux membres de l'égalité $x - 6 = \sqrt{x}$, puis de rechercher les solutions de l'équation du second degré obtenue de façon à obtenir des renseignements significatifs sur les racines de l'équation $x - 6 = \sqrt{x}$.

Solution. Si $x \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation, x vérifie l'égalité $x - 6 = \sqrt{x}$; en élevant au carré cette égalité, on obtient l'équation $x^2 - 13x + 36 = 0$, c'est-à-dire $(x - 9)(x - 4) = 0$. Ainsi nécessairement, $x = 9$ ou $x = 4$.

> *Commentaires. A ce stade, on obtient une conclusion partielle, à savoir que l'ensemble S des solutions vérifie $S \subset \{4, 9\}$. On débute donc une nouvelle analyse partielle qui fournit l'idée de tester si 4 (ou 9) est dans S.*

En portant $x = 4$ dans l'équation, on obtient $4 - 6 = \sqrt{4}$; ce qui montre que 4 n'est pas solution; par contre 9 est solution évidente. En conclusion l'équation $x = \sqrt{x} + 6$ possède une unique solution qui est $x = 9$. ◊

3e solution (démonstration structurée).

Montrons C [1]

C : L'ensemble des racines de l'équation $x = \sqrt{x} + 6$ est $\{9\}$.

— Montrons, pour cela, Q_1

Q_1 : $H' \Rightarrow C'$,

avec H' : $S = \{x \,/\, x = \sqrt{x} + 6\}$ et C' : $S = \{9\}$.

• Supposons donc H'. (hypothèse) [2]

---

[1] H est ici absent.

[2] H' est hypothèse auxiliaire; on l'abandonne une fois Q_1 montrée.

- Montrons alors que C' est vraie, en montrant Q'_4

  où $Q'_4 : Q'_1 \wedge Q'_2 \wedge Q'_3$

  avec $Q'_1 : S \subset \{4, 9\}$, $Q'_2 : 4 \notin S$, $Q'_3 : 9 \in S$.

  - Montrons tout d'abord que Q'_1 est vraie, en vérifiant que $(\forall x, x \in S \Rightarrow x \in \{4, 9\})$ est vraie.

    · Supposons H'_1

    $H'_1 : x \in S$. (hypothèse)[1]

    · Vérifions que $x \in \{4, 9\}$.

    Au moyen de calculs simples, on montre successivement que chacune des 4 assertions suivantes est vraie.

    - $Q''_1 : x = \sqrt{x} + 6$ (d'après H'_1 et H')
    - $Q''_2 : x - 6 = \sqrt{x}$ (par calcul élémentaire)
    - $Q''_3 : x^2 - 13x + 36 = 0$ (par élévation au carré)
    - $Q''_4 : x = 4$ ou $x = 9$. (racines d'un trinôme)

    · On peut conclure que l'assertion $x \in \{4, 9\}$ est vraie.

  - On peut conclure que $x \in \{4, 9\}$ sous l'hypothèse H'_1; donc que Q'_1 est vraie.

  - Montrons ensuite que Q'_2 est vraie.

    On a $\sqrt{4} + 6 = 8 \neq 4$.

  - On peut conclure que Q'_2 est vraie.

  - Montrons enfin que Q'_3 est vraie.

    On a $\sqrt{9} + 6 = 9$.

  - On peut conclure que Q'_3 est vraie.

  - On peut conclure que Q'_4 est vraie.

- On peut conclure que C' est vraie.

— On peut conclure que C' est vraie sous l'hypothèse H', donc qu'on a Q_1.

On peut conclure que C est vraie.

---

[1] H'_1 est hypothèse auxiliaire; on l'abandonne une fois Q'_1 montrée. Mais pour montrer Q'_1, il faut ajouter à H'_1 l'hypothèse H', c'est-à-dire prendre $(H \wedge H'_1)$ pour hypothèse.

Il est clair que, s'il convient de travailler de temps en temps une démonstration structurée comme ci-dessus, il n'est pas possible de rédiger une telle démonstration sur une copie. Avec l'habitude, on peut écrire la solution suivante.

4e solution

Soit $S = \{x \,/\, x = \sqrt{x} + 6\}$.

Montrons : $\forall x, x \in S \Rightarrow x \in \{4, 9\}$.

Supposons que x est un élément de S.

On a successivement :

$x - 6 = \sqrt{x}$ (calcul élémentaire)

$x^2 - 13x + 36 = 0$ (élévation au carré)

$x \in \{4, 9\}$ (racine de l'équation précédente)

d'où le résultat. Par suite $S \subset \{4, 9\}$.

De plus : $4 \neq \sqrt{4} + 6$, donc $4 \notin S$;

et $9 = \sqrt{9} + 6$, donc $9 \in S$.

Finalement $S = \{9\}$. ◊

Exemple 2

Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $Q(n) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$.

1re solution

Analyse (qu'on présente dans la rédaction car elle éclaire le correcteur). A partir des valeurs $Q(1) = 1$, $Q(2) = 4$ et $Q(3) = 9$ on peut avoir l'idée (démarche inductive[1]) que $Q(n) = n^2$.

Synthèse. elle consiste à montrer cette égalité par récurrence (voir l'exemple 1 du paragraphe 2.4, page 51). ◊

2e solution

Remarquons que :

$$\begin{array}{llllll} & Q(n) & = & 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) \\ \text{et} & Q(n) & = & (2n-1) + (2n-3) + (2n-5) + \ldots + 1 \\ \text{D'où} & 2\,Q(n) & = & n \, . \, 2n \end{array}$$

[1] Une démarche inductive consiste à inférer à partir d'informations limitées.

et ainsi $\quad Q(n) \quad = \quad n^2$. ◊

Dans cette deuxième solution, l'analyse, par chance, fournit directement la solution.

L'analyse, ici, n'a pas à être rédigée. Maintenant, si on remplace le problème initial par :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$;

l'assertion C est alors donnée; ce problème est donc plus facile et la solution par récurrence tout à fait naturelle.

Exemple 3

Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrons que si x est pair alors x^2 est pair.

Pour ce problème, l'analyse est uniquement mentale. On doit donc vérifier qu'on a (x pair $\Rightarrow$ x^2 pair).

En se référant à la remarque 1 page 12, on obtient la solution suivante.

Démonstration . Supposons x pair et montrons que x^2 est pair.
Puisque x est pair, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k$. Ainsi on a $x^2 = (2k)^2$, ou encore $x^2 = 2(2k^2)$ (avec $2k^2$ dans $\mathbb{Z}$); x^2 est donc pair. ◊

2.2. Les démonstrations élémentaires directes

Nous allons voir comment débuter l'analyse, donc, en fait, comment débuter la démonstration d'une assertion C lorsque C se présente sous certaines formes très usitées.

Rappelons d'abord la démarche fondamentale à suivre pour démontrer une assertion du type ($P \Rightarrow Q$) (remarque 1 du paragraphe 1.1.*d* page 12).

Pour démontrer directement une assertion du type ($P \Rightarrow Q$) :

On suppose qu'on a P et on montre que Q est vraie en utilisant des propositions de la théorie concernée.

Lors de la rédaction on écrit :

Supposons qu'on a P et montrons qu'on a Q. ...

a. Méthodes de démonstration des propositions $P \wedge Q$, $P \vee Q$

Les tables de vérité de la conjonction et de la disjonction (voir le paragraphe 1.1.*d*) indiquent clairement la méthode à suivre pour montrer C :

— si C est de la forme $P \wedge Q$, on montrera P et on montrera Q.

— si C est de la forme $P \vee Q$, on peut montrer que l'une des deux assertions P, Q est vraie, ou encore montrer que si l'une des deux assertions est fausse (par exemple P), alors l'autre (à savoir Q) est vraie : ce qui revient à vérifier la validité de l'assertion $(\neg P \Rightarrow Q)$[1], ou (et non pas "et") la validité de l'assertion $(\neg Q \Rightarrow P)$.

Exemple

Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrons que l'assertion (x impair ou x^2 pair) est vraie.

Démonstration. Supposons l'assertion "x impair" fausse (x est donc pair) et montrons que x^2 est pair. ... (revenir à l'exemple 3 page 38). ◊

Remarque

Si C se présente sous la forme $(P \Leftrightarrow Q)$ on peut toujours se ramener à la forme équivalente $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$; il est, en général, très "coûteux" de ne travailler que par équivalences.

b. Une méthode de démonstration de la proposition $(\forall x \in D, P(x))$

Le plus souvent, pour montrer l'assertion $(\forall x \in D, P(x))$, on écrit lors de la rédaction finale :

Supposons que x est un élément (quelconque fixé) [2] *de D; montrons qu'on a P(x). ...*

---

[1] On a, comme conséquence des règles (3) et (11) du paragraphe 1.1.*e*, la règle logique suivante : $(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \Rightarrow Q)$.

[2] Ce "quelconque fixé" est redondant, mais il semble utile pendant la période d'apprentissage.

ou encore, si on est sûr de la non-vacuité de D :

Soit x un élément (quelconque fixé) de D (ou : prenons x dans D); montrons qu'on a P(x) ... .

On remarquera que, lorsqu'on écrit : *supposons que x est (ou soit x) un élément de D*, on "fixe" x, mais on ne lui impose aucune particularité, hormis le fait d'appartenir à D; cet élément représente donc un élément quelconque de D. La propriété obtenue est, par conséquent, valable pour tout élément de D.

Enfin, une fois x "fixé", l' "assertion" P(x) peut se manipuler comme une assertion; on peut lui appliquer les règles du calcul assertionnel. Par exemple, pour montrer une assertion du type $(\forall x \in D, P(x) \Rightarrow Q(x))$, on suppose x "fixé" dans D, et on montre $(P(x) \Rightarrow Q(x))$ en considérant P(x) et Q(x) comme des assertions de la théorie (c'est ce que nous avons déjà fait à plusieurs reprises !).

Remarque 1

L'assertion $(\forall x \in D, P(x))$ s'écrit encore, d'après la remarque 5 de la page 24, $(\forall x, x \in D \Rightarrow P(x))$; avec les notations du paragraphe 2.1, on peut considérer en pratique que H est l'assertion $(x \in D)$ et C l'assertion P(x) obtenue en fixant x comme l'impose l'hypothèse.

Exemple

Dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$, on définit une opération T par :
a T b = 2 a b. On désire vérifier l'associativité de cette opération. On doit donc montrer qu'on a : $\forall (a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, a T (b T c) = (a T b) T c .

Démonstration . Soit (a, b , c) un élément de $\mathbb{N}^3$, c'est-à-dire soient a, b et c trois entiers naturels (quelconques fixés).

Montrons que a T (b T c) = (a T b) T c.

Par définition de la loi T, on a, a T (b T c) = 2 a (2 b c) , c'est-à-dire, d'après les propriétés de la multiplication dans $\mathbb{N}$, a T (b T c) = 4 a b c .

De même, on a (a T b) T c = 4 a b c .

Ainsi a T (b T c) = (a T b) T c , et l'opération T est associative. ◊

Remarque 2

Dans le cas particulier où $D = \mathbb{N}$, il existe une autre méthode de démonstration qui peut être plus avantageuse; c'est la démonstration par récurrence (voir le paragraphe 2.4, page 50).

c. Une méthode de démonstration de la proposition ($\exists x \in D, P(x)$) la notion de contre-exemple

Soit à montrer l'assertion ($\exists x \in D, P(x)$).

Pour certains problèmes, il n'est pas utile d'exhiber un élément x de D vérifiant P afin de prouver l'assertion ($\exists x \in D, P(x)$) (voir l'exemple de la remarque 4 page 23); certains théorèmes d'existence permettent de conclure d'entrée. Nous n'insistons pas sur ce fait.

Mais le plus souvent, on est amené à exhiber un élément x de D vérifiant P; on analyse le problème afin de trouver un élément x qui semble convenir; la démonstration consiste alors à vérifier, tout simplement, que l'élément choisi vérifie la propriété P.

L'analyse est parfois difficile; mais la recherche de conditions nécessaires à l'existence de l'élément x ("*supposons x élément de D vérifiant P et essayons de mettre en évidence des propriétés nécessairement vérifiées par x*") conduit souvent sur la voie d'une solution. On met ainsi en valeur un certain nombre de "candidats-solutions" qu'il faut examiner et trier. La synthèse consiste alors à prouver que le candidat retenu (choisi le plus simple possible) vérifie bien la propriété P.

Les "candidats-solutions" ne sont pas, en général, tous solution du problème, comme le montre l'exemple 1 page 34 :
si on veut montrer ($\exists x \in \mathbb{R}, x = \sqrt{x} + 6$), l'analyse fournit deux "candidats-solutions" 4 et 9, et seul 9 est utile pour montrer que l'assertion est vraie.

On peut aussi remarquer que, si ($\forall x \in D, Q(x) \Rightarrow P(x)$), alors on a :

$$(\exists x \in D, Q(x)) \Rightarrow (\exists x \in D, P(x)) ;$$

cette situation est intéressante si l' "assertion" $Q(x)$ est plus simple à manier que l' "assertion" $P(x)$ (à condition que l'assertion ($\exists x \in D, Q(x)$) soit vraie !);

voir à ce propos l'exercice 8 de la fiche n° 3, ou l'autre analyse de l'exemple 1 qui suit.

Lors de la rédaction de la démonstration de $(\exists\, x \in D, P(x))$, on écrit :

> *Posons* $x = \ldots$ (ou *prenons x tel que ...*)*; alors* $x \in D$ *car ... ; montrons* $P(x)$. ...

On remarquera que, lorsqu'on écrit *posons* $x = \ldots$, ou *prenons* x *tel que ...*, on désigne, en général, un objet précis de D (contrairement à ce qu'on fait en *b*).

Remarque 1

Le problème peut être envisagé sous la forme $(H \Rightarrow Q)$ avec
$H : S = \{x \in D \,/\, P(x)\}$ et $Q : S \neq \emptyset$.

Exemple 1

On considère l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Cet ensemble est muni d'une addition $(f, g) \mapsto f + g$ définie par :

$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout x réel,

et d'une multiplication $(f, g) \mapsto f.g$ définie par :

$(f.g)(x) = f(x).g(x)$ pour tout x réel.

Considérons l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$f(1) = 1$ et $f(x) = 0$ pour $x \neq 1$.

Montrons alors la proposition :

$\exists\, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, (g \neq 0$ et $f.g = O)$;

où O désigne l'application nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire prenant la valeur 0 en tout x réel.

Analyse (mentale ou au brouillon). Il faut donc exhiber une application g non nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall\, x \in \mathbb{R}, f(x).g(x) = 0$.

Il est donc nécessaire de prendre une application g non nulle telle que $g(1) = 0$. D'où l'idée de considérer simplement l'application g définie par :

$g(1) = 0$ et $g(x) = 1$ pour tout $x \neq 1$.

Autre analyse. On a : $\forall\, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $g(1) = 0 \Rightarrow f.g = O$; on peut donc prendre pour g toute application non nulle telle que $g(1) = 0$.

1re solution

Prenons l'application g telle que : $g(1) = 0$ et $g(x) = 1$ pour tout réel $x \neq 1$.
Alors g est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non nulle.
Montrons qu'on a : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $f(x).g(x) = 0$ (voir le paragraphe *b*).
Soit $x \in \mathbb{R}$ (quelconque fixé);

— si $x = 1$ alors $f(x).g(x) = 0$ car $g(1) = 0$;

— si maintenant $x \neq 1$ alors $f(x).g(x) = 0$ car $f(x) = 0$.

Ainsi $f.g = O$, d'où le résultat. ◊

2e solution

Comme $f(x) = 0$ pour tout $x \neq 1$, exhiber une application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ non nulle telle que $f.g = O$, revient à exhiber une application g non nulle telle que $f(1).g(1) = 0$, c'est-à-dire telle que $g(1) = 0$; prenons, par exemple, l'application g définie par : $g(1) = 0$ et $g(x) = 1$ pour tout $x \neq 1$; on a bien $f.g = O$. ◊

Remarque 2

La deuxième solution est sans doute plus pénible à rédiger que la première car elle comporte des informations supplémentaires non exigées; ces informations supplémentaires, lorsqu'elles sont trop coûteuses, sont à éviter comme le montre l'exemple suivant.

Montrons qu'il existe un réel x tel que $\sqrt{x^2 - x + 4} > \sqrt{x^2 + x + 2}$.

Démonstration. Prenons $x = 0$; alors $x \in \mathbb{R}$ et
$\sqrt{x^2 - x + 4} = 2 > \sqrt{x^2 + x + 2} = \sqrt{2}$. ◊

Dans cet exemple, il serait long d'étudier l'inéquation donnée.

Exemple 2

f étant un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, montrer qu'il s'écrit de manière unique, comme somme d'une application paire et d'une application impaire.

Démonstration. Notons $\mathcal{P}$ (respectivement $\mathcal{I}$) l'ensemble des applications paires (respectivement impaires) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et montrons l'assertion :

$$\exists!\, (g, h) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}\ ,\ f = g + h\ .$$

Si f s'écrit $f = g + h$ avec $(g, h) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}$, alors pour tout réel x on a :

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

et $\quad f(-x) = g(x) - h(x)$;

d'où nécessairement :

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$$

et $\quad h(x) = \dfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))$.

Ainsi, s'il existe $(g, h) \in \mathcal{P} \times \mathcal{I}$ tel que $f = g + h$, alors f et g sont uniques.

Vérifions que les applications g et h trouvées au-dessus sont solutions de notre problème; $g \in \mathcal{P}$ et $h \in \mathcal{I}$ car pour tout x,

$g(-x) = \dfrac{1}{2}(f(-x) + f(x)) = g(x)$ et

$h(-x) = \dfrac{1}{2}(f(-x) - f(x)) = -h(x)$;

enfin pour tout x, on a bien $f(x) = g(x) + h(x)$, donc $f = g + h$; d'où le résultat. ◊

Remarque 3

Ici il est nécessaire de rédiger l'analyse faite car elle résoud le problème de l'unicité (qui est posé).

Application à la notion de contre-exemple

Pour prouver que l'assertion $(\forall x \in D, P(x))$ est fausse, il suffit de vérifier que l'assertion $(\exists x \in D, \neg P(x))$ est vraie; c'est-à-dire d'exhiber un élément x_0 de D qui ne vérifie pas la propriété P : x_0 est appelé **contre-exemple** de l'assertion $(\forall x \in D, P(x))$.

Lors de la rédaction, on écrit :

> *Montrons que l'assertion $(\forall x \in D, P(x))$ est fausse; donnons un contre-exemple; posons $x = \ldots$.*

Exemple 3

Montrons que $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq x)$ est une assertion fausse.

Démonstration. Donnons un contre-exemple; posons $x = 2$; alors $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 > x$. ◊

d. Utilisation itérée des méthodes précédentes

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer bon nombre d'assertions en combinant les méthodes précédentes.

Exemple

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{-2n+3}{n+2}$. Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite -2.

Dans cet exemple, H est l'assertion $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{-2n+3}{n+2})$, et C l'assertion ($(u_n)_n$ a pour limite -2); on commence par traduire C en langage mathématique (en revenant à la définition de la convergence d'une suite que nous avons vue au paragraphe 1.2.*d*), puis on se laisse "guider" par la forme de l'expression obtenue.

1re solution

D'après la définition de la convergence d'une suite, il faut montrer qu'on a :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq N \Rightarrow |2 + u_k| \leq \varepsilon$.
(écriture quantifiée de C)

Soit $\varepsilon > 0$ (quelconque fixé);
(méthode du paragraphe b appliquée à : $\forall\varepsilon>0, (\exists N\in\mathbb{N}, \forall k\in\mathbb{N}, k\geq N \Rightarrow |2+u_k|\leq\varepsilon)$)
montrons : $\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq N \Rightarrow |2 + u_k| \leq \varepsilon$.

Analyse. Pour cet $\varepsilon > 0$, si N existe, alors on aura $|2 + u_k| \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\frac{7}{2+k} \leq \varepsilon$, pour tout $k \geq N$. Ainsi, en particulier, on doit avoir $\frac{7}{2+N} \leq \varepsilon$, donc nécessairement $N \geq (\frac{7}{\varepsilon} - 2)$; par exemple, on peut essayer $N \geq \mathbb{E}(\frac{7}{\varepsilon} - 2) + 1 = \mathbb{E}(\frac{7}{\varepsilon} - 1)$ ($\mathbb{E}(x)$ désignant la partie entière de x). Nous allons voir qu'en fait un tel N convient.

Synthèse. Prenons pour N un entier naturel supérieur à $(\frac{7}{\varepsilon} - 2)$,

(méthode de paragraphe c appliquée à : $\exists N \in \mathbb{N}, (\forall k \in \mathbb{N},\ k \geq N \Rightarrow |2+u_k| \leq \varepsilon)$)

par exemple $N = \text{Max}\,\{0\ ,\ \mathbb{E}\,(\frac{7}{\varepsilon} - 1)\}$,

et montrons qu'on a :

$\forall\, k \in \mathbb{N}\ ,\ k \geq N \Rightarrow |2 + u_k| \leq \varepsilon$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ (quelconque fixé); montrons :

(méthode de paragraphe b appliquée à : $\forall k \in \mathbb{N}, (k \geq N \Rightarrow |2+u_k| \leq \varepsilon)$)

$k \geq N \Rightarrow |2 + u_k| \leq \varepsilon$.

Supposons $k \geq N$ et vérifions que : $|2 + u_k| \leq \varepsilon$.

(méthode de démonstration directe de $(k \geq N \Rightarrow |2+u_k| \leq \varepsilon)$)

D'après la définition de la suite $(u_n)_n$

on a $|2 + u_k| = \dfrac{7}{2+k}$. *(utilisation de H)*

Ainsi $\dfrac{7}{2+k} \leq \dfrac{7}{2+N} \leq \dfrac{7}{\frac{7}{\varepsilon} - 2 + 2} = \varepsilon$ (par définition de N), donc $|2 + u_k| \leq \varepsilon$.

Ainsi, la suite $(u_n)_n$ converge et a pour limite -2 . ◊

2e solution

Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que :

$\exists\, N \in \mathbb{N}\ , \forall\, k \in \mathbb{N}\ ,\ k \geq N \Rightarrow |2 + u_k| \leq \varepsilon$.

Analyse : $\forall\, k \in \mathbb{N}\ , \left(|2 + u_k| = \dfrac{7}{2+k} \leq \varepsilon \Leftrightarrow k \geq \dfrac{7}{\varepsilon} - 2\right)$.

Synthèse : Prenons pour N un entier naturel supérieur ou égal à $(\frac{7}{\varepsilon} - 2)$,

et montrons que : $\forall\, k \in \mathbb{N}\ , k \geq N \Rightarrow |2 + u_k| \leq \varepsilon$.

Supposons $k \in \mathbb{N}, k \geq N$ et vérifions que $|2 + u_k| \leq \varepsilon$; on a $k \geq N \geq \frac{7}{\varepsilon} - 2$,

donc $k \geq \frac{7}{\varepsilon} - 2$; d'où $k + 2 \geq \frac{7}{\varepsilon}$, c'est-à-dire $|2 + u_k| \leq \varepsilon$. ◊

Remarque

Dans la première solution, l'analyse conduit à prendre un entier naturel $N \geq (\frac{7}{\varepsilon} - 2)$; il est bon de remarquer que ce N aurait très bien pu ne pas convenir. Par chance, ce N convient (grâce à la monotonie de la suite) et, dès lors, on peut considérer que l'analyse est acceptable puisqu'elle conduit à une solution (même si certains correcteurs n'aiment pas "aller à la pêche" parmi les "candidats-solutions", et préféreront l'analyse figurant dans la deuxième solution).

De toute façon, il vaut mieux dans cet exemple intégrer à la rédaction une analyse, car prendre directement $N \geq (\frac{7}{\varepsilon} - 2)$ est à la limite du "parachutage".

2.3. Les démonstrations indirectes

a. La démonstration de $(P \Rightarrow Q)$ par contraposition

La démonstration par contraposition de $(P \Rightarrow Q)$ consiste à montrer directement qu'on a $(\neg Q \Rightarrow \neg P)$; c'est-à-dire que la contraposée de $(P \Rightarrow Q)$ est vraie. Elle s'appuie sur la loi de contraposition (règle (10) page 14) :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

On écrit donc, lors de la rédaction :

Raisonnons par contraposition. Supposons qu'on a $\neg Q$ et montrons qu'on a $\neg P$. ....

Exemple

Soit $x \in \mathbb{Z}$; montrons que si x^2 est impair alors x est impair.

Démonstration. Montrons l'assertion (x^2 impair $\Rightarrow$ x impair).
Raisonnons par contraposition; supposons x pair et vérifions que x^2 est également pair. Puisque x est pair, ... (on laisse le lecteur revenir à l'exemple 3, page 38) . ◊

Sur cet exemple, la démonstration par contraposition s'introduit naturellement car la démonstration directe est plus pénible (il est souvent plus facile de déduire une propriété de x^2 à partir d'une propriété de x, que l'inverse).

b. La démonstration par l'absurde

La démonstration par l'absurde s'appuie sur la règle logique suivante, que le lecteur pourra vérifier sans peine :

$$((\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)) \Leftrightarrow P.$$

Cette forme démonstrative consiste, pour montrer qu'une assertion P est vraie, à montrer que $((\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q))$ est vraie pour une certaine assertion Q. Pour cela, on suppose P fausse, et on recherche une assertion Q (non connue à l'avance) telle qu'on ait à la fois Q et $\neg Q$; on aboutit donc à la **contradiction** $(Q \wedge \neg Q)$ (ce qui n'est pas autorisé en vertu de la règle (1) page 14); on dit parfois que l'hypothèse "P fausse" est **absurde**); par suite P est vraie.

On écrit lors de la rédaction :

Raisonnons par l'absurde; supposons qu'on a $\neg P$ et montrons qu'on obtient une contradiction . ...

Exemple

Montrons que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde; supposons l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres premiers fini et montrons qu'on arrive à une contradiction.

Comme $\mathcal{P}$ est fini et non vide, $\mathcal{P}$ a un plus grand élément; notons n ce plus grand élément. Posons $p = 1 + n!$. Comme $p > n$, p n'est pas premier; p admet donc un diviseur premier. Un tel diviseur est forcément différent de 2, 3, ... et n, car chacun de ces entiers naturels divise $(n!)$ et ne divise pas 1; ainsi ce diviseur premier est nécessairement supérieur à n; ce qui est en contradiction avec la définition de n. $\mathcal{P}$ est donc infini. ◊

Remarques

1. Sur cet exemple, l'assertion annexe Q est ($\mathcal{P}$ a un plus grand élément).
2. Cet exemple montre que l'analyse d'un problème n'est pas toujours évidente.
3. Une démonstration par contraposition de $(A \Rightarrow B)$ peut être remplacée par une démonstration par l'absurde (mais attention, cela déplaît parfois à certains correcteurs du fait de sa lourdeur). Par exemple, soit $x \in \mathbb{Z}$, et montrons (à nouveau) que : $(x^2 \text{ impair}) \Rightarrow (x \text{ impair})$.

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant l'assertion fausse. On a donc : x^2 impair et x pair (règle (12) page 14);mais comme x est pair, x^2 l'est aussi; ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (x^2 impair). ◊

Dans cet exemple l'assertion auxiliaire Q est l'assertion (x^2 impair).

c. La démonstration par disjonction des cas

En contraposant chacune des assertions $(\neg P \Rightarrow Q)$ et $(\neg P \Rightarrow \neg Q)$, dans la règle logique figurant en début du paragraphe précédent, on obtient :

$$((Q \Rightarrow P) \wedge (\neg Q \Rightarrow P)) \Leftrightarrow P.$$

Ainsi, pour montrer qu'une assertion P donnée est vraie, il suffit de trouver une assertion Q telle que $(Q \Rightarrow P)$ et $(\neg Q \Rightarrow P)$ soient vraies. Précisons, qu'en général, l'assertion Q intervient de façon naturelle au cours de l'analyse.

Lors de la rédaction, on écrit :

- 1er cas : *Supposons qu'on a Q et vérifions qu'on a P. ...*
- 2e cas : *Supposons maintenant qu'on a $\neg Q$ et vérifions qu'on a encore P. ...*

Exemple

Soit $\lambda < 0$; Montrons qu'on a : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{Max}\{\lambda x, \lambda y\} = \lambda \, \mathrm{Min}\{x, y\}$.

Démonstration. Soient x et y deux réels (quelconques fixés).

- 1er cas : Supposons $x \leq y$;
  alors $\lambda x \geq \lambda y$ et $\mathrm{Max}\{\lambda x, \lambda y\} = \lambda x = \lambda \, \mathrm{Min}\{x, y\}$.
- 2e cas : Supposons maintenant $x > y$;
  alors $\lambda x < \lambda y$ et $\mathrm{Max}\{\lambda x, \lambda y\} = \lambda y = \lambda \, \mathrm{Min}\{x, y\}$.

D'où le résultat. ◊

Remarque

Dans cet exemple, l'assertion auxiliaire Q est $(x \leq y)$; elle intervient naturellement[1] dans l'évaluation de $\mathrm{Min}\{x, y\}$. La première solution de l'exemple 1 page 43 fournit un autre exemple de démonstration par disjonction des cas (Q est dans ce cas l'assertion $(x = 1)$).

La méthode présentée se généralise facilement à l'étude de plus de deux cas comme le montre l'exercice 6 de la fiche d'exercices n° 4 (page 124).

[1] Attention : il faut éviter d'aller à la "pêche des cas particuliers".

2.4. La démonstration par récurrence

Ce type de démonstration s'applique aux propositions dont l'énoncé dépend d'un entier naturel n; pour montrer une proposition de la forme $(\forall n \in \mathbb{N}, P(n))$, il est souvent plus efficace d'utiliser une démonstration par récurrence plutôt qu'une démonstration classique.

La **propriété de récurrence** est ici présentée comme une conséquence de la construction de $\mathbb{N}$ (mais il faut savoir qu'elle peut à son tour servir de base à cette même construction; on change, dans ce cas, de jeu d'axiomes).

Elle s'appuie sur le théorème d'arithmétique suivant :

Toute partie X de $\mathbb{N}$ qui vérifie

(1) $0 \in X$,

(2) $\forall x \in X, x+1 \in X$,

est identique à $\mathbb{N}$.

Et s'exprime sous la forme suivante :

Propriété de récurrence

P étant une "assertion" de la variable entière n, on a la proposition :

$$(P(0) \wedge (\forall k \in \mathbb{N}, P(k) \Rightarrow P(k+1))) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N}, P(n)) .$$

Démonstration. On pose $X=\{n \in \mathbb{N} / P(n)\}$. Supposons qu'on a :

$$(P(0) \wedge (\forall k \in \mathbb{N}, P(k) \Rightarrow P(k+1))) .$$

Alors $0 \in X$, et $(\forall k \in \mathbb{N}, k \in X \Rightarrow k+1 \in X)$, d'où d'après le théorème d'arithmétique précédent $X = \mathbb{N}$; ce qui signifie encore $(\forall n \in \mathbb{N}, P(n))$. ◊

C'est de la proposition précédente que découle le processus de la démonstration par récurrence; il se déroule en trois étapes :

- 1re étape (initialisation) : on montre que $P(0)$ est vraie.
- 2e étape (hypothèse de récurrence) : k étant un entier naturel, on suppose $P(k)$.
- 3e étape (transmissibilité) : on montre qu'on a $P(k+1)$ ... et on conclut.

Remarque 1

Signalons deux variantes couramment rencontrées, conséquences de la propriété de récurrence :

Propriété de la récurrence incomplète :
$(P(n_0) \wedge (\forall k \geq n_0 , P(k) \Rightarrow P(k+1))) \Rightarrow (\forall n \geq n_0 , P(n))$.

Propriété de la récurrence finie : si $I = \{n_0, n_0 + 1, \dots , m\}$ on a,
$(P(n_0) \wedge (\forall k \in \{n_0, n_0 + 1, \dots , m - 1\} , P(k) \Rightarrow P(k+1))) \Rightarrow (\forall n \in I , P(n))$.

Exemple 1

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Démonstration. Posons $Q(n) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$; appelons $P(n)$ l' "assertion" $(Q(n) = n^2)$ et montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^* , P(n))$.

- 1re étape : $P(1)$ est vraie puisque $Q(1) = 1 = 1^2$.
- 2e étape : soit k un entier naturel non nul quelconque; supposons $P(k)$, c'est-à-dire supposons que $Q(k) = k^2$.
- 3e étape : vérifions $P(k+1)$, c'est-à-dire que $Q(k+1) = (k+1)^2$;

$Q(k+1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) + (2k + 1)$ ce qui s'écrit encore
$Q(k+1) = Q(k) + (2k + 1)$; l'hypothèse de récurrence donne alors :
$Q(k+1) = k^2 + (2k + 1) = (k+1)^2$.
Ainsi pour tout entier naturel non nul, on a $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$. ◊

Donnons une dernière variante de la démonstration par récurrence; N étant un entier naturel donné; en appliquant le principe initial à l' "assertion" $R(n)$ définie par $(P(0) \wedge \dots \wedge P(N)) \wedge (P(N+1) \wedge \dots \wedge P(N+n))$ et en remarquant que pour tout n, $(R(n) \Rightarrow P(N + n + 1))$ implique $(R(n) \Rightarrow R(n+1))$, on obtient alors la **propriété de récurrence forte** :
$((P(0) \wedge \dots \wedge P(N)) \wedge (\forall k \geq N, (P(0) \wedge \dots \wedge P(k)) \Rightarrow P(k+1))) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N} , P(n))$.

(Cette récurrence forte peut être, elle aussi, incomplète ou finie).

Le processus de démonstration est le suivant :

• 1^{re} étape (initialisation) : on montre que $P(0) \wedge ... \wedge P(N)$ est vraie;

• 2^{e} étape (hypothèse de récurrence) : k étant un entier $\geq N$, on suppose qu'on a $P(0) \wedge ... \wedge P(k)$;

• 3^{e} étape (transmissibilité) : on montre qu'on a $P(k + 1)$ ... et on conclut.

Exemple 2

Soient a un réel donné et $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 2 \cos(a)$ et par $u_{p+1} = u_1 . u_p - u_{p-1}$ pour $p \geq 1$.

Montrons qu'on a $(\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \cos(na))$.

Démonstration. Notons $P(n)$ l' "assertion" $u_n = 2 \cos(na)$ et montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}, P(n))$.

• 1^{re} étape : $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies car $2 \cos(0.a) = 2 = u_0$ et par définition $2 \cos(1.a) = u_1$.

• 2^{e} étape : soit $k \geq 1$; supposons que pour tout $n \leq k$ on a $P(n)$, c'est-à-dire, $u_n = 2 \cos(n\,a)$.

• 3^{e} étape : vérifions qu'on a $P(k + 1)$, ou encore que :
$u_{k+1} = 2 \cos((k + 1)a)$. Comme $u_{k+1} = u_1 . u_k - u_{k-1}$, on a d'après l'hypothèse de récurrence $u_{k+1} = 2 \cos(a).2 \cos(ka) - 2 \cos((k - 1)a)$,d'où, d'après une formule classique de trigonométrie, $u_{k+1} = 2 \cos((k + 1)a)$. ◊

NOTIONS FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

3

Signalons qu'un certain nombre de résultats énoncés dans ce chapitre et non démontrés sont prouvés dans les fiches d'exercices en fin d'ouvrage.

3.1. Généralités sur les ensembles

a. Eléments et parties d'un ensemble

La notion d'**ensemble** est une notion primitive des mathématiques (dont l'utilisation est régie par des axiomes que nous ne donnerons pas ici, axiomes qui donnent naissance à la théorie des ensembles); ce concept évoque, intuitivement, l'idée d'un groupement ou d'une collection d'objets. Les objets de l'ensemble portent le nom d'**éléments** de l'ensemble. En général, un ensemble est formé d'éléments susceptibles de posséder certaines propriétés. Par exemple, on peut considérer l'ensemble des entiers pairs, l'ensemble des solutions d'une équation, et, en géométrie classique, l'ensemble des triangles équilatéraux du plan, ou encore l'ensemble des cordes d'un cercle orthogonales à un diamètre donné, ...

A priori, rien ne s'opposerait à considérer "l'ensemble de tous les ensembles", mais ceci serait en contradiction avec l'axiome de la théorie des ensembles, qui dit qu'*un objet mathématique ne peut jamais être à la fois un ensemble et élément de cet ensemble* ***(axiome de régularité*** *).*

Nous noterons les ensembles par des lettres majuscules (ou combinaisons de lettres) de divers alphabets (E, F, G, ..., $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, ..., Ω, Γ, ...), et leurs éléments par des lettres minuscules (x, y, z, ..., α, β, λ, ...), une lettre pouvant désigner, soit un élément déterminé, soit un élément arbitraire (qu'on appelle **variable** ou **argument**) d'un ensemble. Rappelons qu'on désigne par $\mathbb{N}$ l'ensemble des **entiers naturels** (ou des **naturels**, ou encore des entiers positifs ou nuls), $\mathbb{Z}$ l'ensemble des **entiers**[1] (ou des **entiers relatifs**, ou encore des **entiers rationnels**), $\mathbb{Q}$ l'ensemble des **rationnels**, $\mathbb{R}$ l'ensemble des **réels** et $\mathbb{C}$ l'ensemble des **complexes**; enfin, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, ..., désigneront, respectivement, l'ensemble $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, ..., privé de son élément nul.

Considérons une propriété P quelconque relative à un élément d'un ensemble E (cela signifie que la propriété en question a un sens pour tout élément de E et qu'elle est éventuellement vraie pour certains éléments et fausses pour les autres); autrement dit, considérons une "assertion" définie sur E. Les éléments de E qui possèdent cette propriété forment un nouvel ensemble, noté $\{x \in E \mid P(x)\}$, qu'on appelle **partie** ou **sous-ensemble** de E. Ainsi si $A = \{x \in E \mid P(x)\}$, on a pour tout $x \in E$: $x \in A \iff P(x)$.

Rappelons que si A est une partie de E et x un élément de E, la propriété "x appartient à A", qui signifie que x est un élément de A, se note "$x \in A$" ($\in$ est le symbole d'**appartenance**). La négation de cette propriété se note "$x \notin A$" et se lit "x n'appartient pas à A" ($\notin$ est le symbole de non-appartenance). Par exemple, si A est l'ensemble des solutions réelles de l'équation "$x^4 = 1$", on a $-1 \in A$ et $2 \notin A$.

D'après l'axiome de régularité, on a : **(1)** $\forall x, x \notin x$.

Pour décrire une partie d'un ensemble, il suffit de donner une **propriété caractéristique** de cette partie, c'est-à-dire une propriété telle qu'un élément lui appartienne si et seulement s'il vérifie celle-ci; dans ce cas, on dit qu'elle est définie en **compréhension**. Par exemple, l'ensemble A des solutions réelles de l'équation "$x^4 = 1$" s'écrit : $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^4 = 1\}$. A est défini par la propriété caractéristique (l' "assertion") $(x^4 = 1)$.

L'intervalle réel $[\, a, b\, [$, où a et b sont deux réels donnés, est la partie de $\mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ définie par la propriété caractéristique (l' "assertion") $(a \leq x$ et $x < b)$.

Lorsque cela est possible, on peut aussi, pour décrire la partie, dresser la liste de ses éléments (qu'on place entre deux accolades); on dit alors qu'elle est décrite ou définie en **extension**. Par exemple, l'ensemble précédent s'écrit en

[1] Un entier naturel est parfois appelé entier; le contexte permet toujours de lever l'ambiguïté.

extension $A = \{-1, 1\}$ et si E est l'ensemble des entiers naturels qui divisent 8, on écrit : $E = \{1, 2, 4, 8\}$; l'ensemble E des entiers pairs compris entre 2 et 16 s'écrit : $E = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$, ou encore pour abréger $E = \{2, 4, 6, \ldots, 16\}$. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on peut décrire en extension des ensembles infinis; l'ensemble E des entiers naturels pairs s'écrit ainsi :
$E = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$.

Lorsqu'une partie A ne contient qu'un seul élément a, on dit qu'elle est réduite au seul élément a ou que A est le **singleton** $\{a\}$; lorsqu'elle contient deux éléments distincts a et a', on parle de la **paire** $\{a, a'\}$.
Remarquons que, d'après (1), on a pour tout x : **(2)** $x \neq \{x\}$.

Si A est une partie d'un ensemble E, l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A, se note $\mathbf{E \setminus A}$, $\mathbf{C_E A}$, ou encore $\bar{A}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble (de référence) E; cette partie porte le nom de **complémentaire** de A (dans l'ensemble E).
Ainsi $\bar{A} = \{x \in E \,/\, x \notin A\}$ $(= \{x \in E \,/\, \neg(x \in A)\})$; on remarquera, d'après la règle (3) page 14, que $\bar{\bar{A}} = A$.
Enfin, pour tout $x \in E$, on a : $x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$ $(\Leftrightarrow \neg(x \in A))$.

Certaines propriétés, par exemple $x = x$ [1], sont vraies pour tous les éléments de E; la partie qu'elles définissent n'est autre que l'ensemble E lui même. Inversement, certaines propriétés, par exemple $x \neq x$, ne sont vraies pour aucun élément de E; la partie qu'elles définissent est appelée la **partie vide** de E et on la note $\emptyset$; une partie est donc dite vide si elle n'a aucun élément. Par exemple, en géométrie plane classique, l'ensemble des triangles ayant deux angles obtus est la partie vide (de l'ensemble des triangles du plan). Cette partie vide se caractérise par le fait que si x est un élément quelconque de E, $(x \in \emptyset)$ est une assertion toujours fausse (donc $(x \notin \emptyset)$ est une assertion toujours vraie).
On remarquera enfin que E et $\emptyset$ sont complémentaires l'un de l'autre.

On admet, en théorie des ensembles, que la partie vide de chaque ensemble est la même pour tout ensemble.

---

[1] Rappelons, à cette occasion, que si x et y sont deux éléments d'un ensemble E, l'égalité $x = y$ signifie que x et y sont deux symboles (deux noms différents) qui désignent le même objet de l'ensemble E. La négation de $x = y$ se note $x \neq y$ (qui se lit "x est différent de y").

b. Inclusion

Soient A et B deux parties de E; si tout élément de A appartient aussi à B, on dit que A est **contenu** [1] (ou **inclus**) dans B, ou que B **contient** A, ou encore que A est une partie de B; cette **inclusion** se note $\mathbf{A \subset B}$ ou $\mathbf{B \supset A}$, et sa négation se note $A \not\subset B$.

Ainsi : $\quad A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in A, x \in B)$,

donc : $\quad A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B)$.

De plus, pour toute partie A de E et pour tout $x \in E$, on a :

$$\emptyset \subset A \quad , \quad A \subset E \quad \text{et} \quad (x \in A \Leftrightarrow \{x\} \subset A).$$

Enfin, comme l'égalité $\mathbf{A = B}$ signifie que A et B sont composés exactement des mêmes objets (un ensemble est entièrement déterminé par ses éléments), on a : $\quad A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subset B \text{ et } B \subset A)$;

d'où : $\quad A = B \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in E, x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Remarquons également que deux parties qui ont des propriétés caractéristiques P_1 et P_2 équivalentes (c'est-à-dire : $\forall x \in E,\ P_1(x) \Leftrightarrow P_2(x)$) sont égales.

On appelle **ensemble des parties** d'un ensemble E l'ensemble, noté $\mathcal{P}(\mathbf{E})$, dont les éléments sont les parties de E. On a $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$, $E \in \mathcal{P}(E)$, et si x est un élément de E, $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$. Par exemple, si $E = \{1, 2, 3\}$, alors : $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, E\}$. Si $E = \emptyset$, alors $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$; d'après (2), $\emptyset$ est différent de $\{\emptyset\}$ (ce dernier ensemble possède un élément, alors que le premier n'en a pas).

c. Opérations sur les ensembles

Soient A et B deux parties de E (deux éléments de $\mathcal{P}(E)$), l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B porte le nom de **réunion** de A et B, et se note $\mathbf{A \cup B}$ (on lit "A **union** B" ou encore "A **réunion** B"); l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à la fois à A et à B porte le nom d'**intersection** de A et B, et se note $\mathbf{A \cap B}$ (on lit "A **inter** B"). Ainsi $A \cup B = \{x \in E \,/\, (x \in A) \text{ ou } (x \in B)\}$ et $A \cap B = \{x \in E \,/\, (x \in A) \text{ et } (x \in B)\}$; on ne manquera pas de rapprocher le graphisme des symboles d'union "$\cup$" et de

[1] Cela n'exclut pas que l'on ait $A = B$. Si A est une partie distincte de B, on dit que A est une partie **propre** de B; on peut alors noter cela sous la forme $A \subsetneq B$.

disjonction "$\vee$" (le "ou"), ainsi que celui des symboles d'intersection "$\cap$" et de conjonction "$\wedge$" (le "et").

Ainsi, pour tout $x \in E$, on a :

$$x \in A \cup B \iff ((x \in A) \text{ ou } (x \in B))$$

et $$x \in A \cap B \iff ((x \in A) \text{ et } (x \in B))$$

On a en utilisant les propriétés des connecteurs de disjonction et de conjonction : $A \cup \emptyset = A$ et $A \cup E = E$; $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cap E = A$.
Si $A \cap B = \emptyset$ on dit que les parties A et B sont **disjointes**; c'est-à-dire si $A \cap B \neq \emptyset$, on dit que A et B se **rencontrent**.

Donnons maintenant les principales propriétés de l'inclusion, de la réunion et de l'intersection; dans les énoncés suivants, A, B, C désignent des parties quelconques d'un même ensemble E.

(1) $A \cap \overline{A} = \emptyset$

(2) $A \cup \overline{A} = E$

(3) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(5) $A \cap A = A;\ A \cup A = A$ (idempotence de $\cap$ et de $\cup$)

(6) $A \cap B = B \cap A;\ A \cup B = B \cup A$ (commutativité de $\cap$ et de $\cup$)

(7) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativité [1] de $\cap$)
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité de $\cup$)

(8) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité)

(9) $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$

(10) $A \cup B = A \iff B \subset A;\ A \cap B = A \iff A \subset B$

(11) $(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

Vérifions par exemple l'égalité (4); pour cela il suffit de remarquer que pour tout x de E, on a :

[1] L'associativité de l'intersection permet d'écrire $A \cap (B \cap C)$ sous la forme $A \cap B \cap C$ (même chose pour l'union). Par exemple, si x, y, z sont trois éléments distincts de E, $\{x\} \cup \{y\} \cup \{z\} = \{x, y, z\}$ et $\{x\} \cap \{y\} \cap \{z\} = \emptyset$; si $x = z$ et si $x \neq y$, on a $\{x\} \cup \{y\} \cup \{z\} = \{x, y\} = \{y, z\}$, et toujours $\{x\} \cap \{y\} \cap \{z\} = \emptyset$.

$$
\begin{array}{llll}
x \in \overline{A \cup B} & \Leftrightarrow & \rceil (x \in (A \cup B)) & \text{(définition du complémentaire)} \\
 & \Leftrightarrow & \rceil (x \in A \ \text{ ou } \ x \in B) & \text{(définition de la réunion)} \\
 & \Leftrightarrow & \rceil (x \in A) \ \text{ et } \ \rceil (x \in B) & \text{(négation d'une disjonction)} \\
 & \Leftrightarrow & x \in \overline{A} \ \text{ et } \ x \in \overline{B} & \text{(définition du complémentaire)} \\
 & \Leftrightarrow & x \in \overline{A} \cap \overline{B} & \text{(définition de l'intersection).}
\end{array}
$$

Les propriétés (3) et (4) portent le nom de **formules de De Morgan** (A. De Morgan, 1806-1871). On peut passer de l'une à l'autre en remplaçant toute partie par son complémentaire et le symbole d'union par celui d'intersection (et réciproquement); ces deux formules sont dites **duales**.

Soient E et F deux ensembles (distincts ou non). Les **couples**[1] (x, y) dont le premier élément x est un élément quelconque de E, et le second y un élément quelconque de F, sont les éléments d'un nouvel ensemble, qu'on appelle **ensemble produit** ou **produit cartésien** de E par F et qu'on note **E x F**. Deux couples (x, y) et (x', y') sont égaux si et seulement si on a $(x = x'$ et $y = y')$[2].

Si A et B sont des parties respectivement de E et de F, on a :
$A \times B = \{(a, b) \in E \times F \ / \ a \in A$ et $b \in B\}$; puisque $(x \in \emptyset)$ est une "assertion" fausse on a : $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow (A = \emptyset$ ou $B = \emptyset)$.

Plus généralement, on définit le produit cartésien de n $(n \geq 2)$ ensembles E_1, E_2, ..., E_n comme l'ensemble des **n-uplets** $(x_1, x_2, ..., x_n)$ où chaque x_i est un élément quelconque de E_i; on le note $\mathbf{E_1 \times E_2 \times ... \times E_n}$ et on a :
$E_1 \times E_2 \times ... \times E_n = \{ (x_1, x_2, ..., x_n) \ / \ \forall i \in \{1, 2, ..., n\}, x_i \in E_i \}$.
L'égalité de deux n-uplets se définit par l'égalité entre les éléments de même rang. Dans le cas où $E_1 = E_2 = ... = E_n = E$, $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$ se note $\mathbf{E^n}$.
Enfin, étant donné trois ensembles E_1, E_2, E_3, les deux produits cartésiens $(E_1 \times E_2) \times E_3$ et $E_1 \times (E_2 \times E_3)$ sont identifiables[3] au produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$ de E_1, E_2 et E_3.

[1] On ne doit pas confondre le couple (x, y) avec l'ensemble $\{x, y\}$ (la paire $\{x, y\}$).

[2] Il faut distinguer le couple (x, y) du couple (y, x) même si x et y sont éléments d'un même ensemble $(E = F)$. Si E et F sont distincts et non vides $E \times F \neq F \times E$.

[3] C'est-à-dire, en bijection avec l'ensemble $E_1 \times E_2 \times E_3$ (voir 3.3.*b* page 71).

Le lecteur pourra, dans un premier temps, ne pas lire ce paragraphe.

Les concepts d'intersection et d'union se généralisent au cas d'un ensemble quelconque de parties de E.

Si $\mathcal{F}$ est une partie de $\mathcal{P}(E)$, on note :

$$\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F = \{x \in E \,/\, \forall F \in \mathcal{F}, x \in F\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F = \{x \in E \,/\, \exists F \in \mathcal{F}, x \in F\}.$$

Si $\mathcal{F}$ est la partie vide de $\mathcal{P}(E)$, on a alors : $\bigcap_{F\in\emptyset} F = E$ et $\bigcup_{F\in\emptyset} F = \emptyset$.

Si maintenant $\mathcal{F}$ est une famille [1] $(F_i)_{i\in I}$ de parties de E indéxées par un ensemble I, on note :

$$\bigcap_{i\in I} F_i = \{x \in E \,/\, \forall i \in I, x \in F_i\} \quad \text{et} \quad \bigcup_{i\in I} F_i = \{x \in E \,/\, \exists i \in I, x \in F_i\};$$

si, de plus, I est l'ensemble fini $\{1, 2, ..., n\}$, on note :

$$\bigcap_{i=1}^{n} F_i = \{x \in E \,/\, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}, x \in F_i\}$$

et $$\bigcup_{i=1}^{n} F_i = \{x \in E \,/\, \exists i \in \{1, 2, ..., n\}, x \in F_i\}.$$

Par exemple, pour n = 3, on retrouve :

$$\bigcap_{i=1}^{3} F_i = F_1 \cap F_2 \cap F_3 \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=1}^{3} F_i = F_1 \cup F_2 \cup F_3.$$

Notons que les formules de De Morgan se généralisent à une famille quelconque de parties de E (voir l'exercice 5 de la fiche n°2).

Terminons par deux définitions.

1. Un ensemble $\mathcal{F}$ de parties de E constitue un **recouvrement** d'une partie A de E, si $A \subset \bigcup_{F\in\mathcal{F}} F$.

En particulier si $\mathcal{F}$ est un recouvrement de E, on a $\bigcup_{F\in\mathcal{F}} F = E$.

---

[1] Une famille $(F_i)_{i\in I}$ de parties de E est une application (voir 3.3.*a* page 67) de I dans $\mathcal{P}(E)$.

2. On appelle **partition** de E un recouvrement $\mathcal{F}$ de E, où les éléments F de $\mathcal{F}$ sont tous non vides et mutuellement disjoints, c'est-à-dire deux à deux disjoints.

3.2. Relations entre ensembles

a. Généralités

Soient E et F deux ensembles.

Définition

On appelle **relation** (ou **correspondance**) de l'ensemble E vers l'ensemble F tout triplet $\mathcal{R} = (E, F, \Gamma)$ où Γ est une partie du produit cartésien E x F, appelée **graphe** de la relation. E porte le nom de **source** ou **ensemble de départ**, ou encore **ensemble de définition**, et F porte le nom de **but** ou **ensemble d'arrivée** de la relation $\mathcal{R}$. On dit que $a \in E$ est en relation avec $b \in F$ si et seulement si $(a, b) \in \Gamma$, ce que l'on note encore **$a \mathcal{R} b$**; a est dit *un* **antécédent** de b, et b est *une* **image** de a par la relation $\mathcal{R}$. Enfin, si E = F, la relation $\mathcal{R}$ porte le nom de relation **sur** (l'ensemble) E.

L'ensemble des relations de E vers F s'identifie donc à l'ensemble $\mathcal{P}(E \times F)$.

En pratique, une relation de E vers F est définie par une propriété qui permet de définir Γ.

Donnons quelques exemples de relations :

— (i) l'égalité entre éléments d'un même ensemble E ($\mathcal{R} = (E, E, \Gamma)$ avec $\Gamma = \{ (x, x) / x \in E\}$ (dite diagonale de E x E));

— (ii) l'inégalité entre éléments d'un même ensemble E ($\mathcal{R} = (E, E, \Gamma)$ où Γ est le complémentaire de la diagonale de E x E);

— (iii) l'appartenance des éléments d'un ensemble E à une des parties de E ($\mathcal{R}$ = (E, $\mathcal{P}$(E), Γ) où Γ est défini par la propriété :
(x, A) ∈ Γ si x ∈ A);

— (iv) l'inclusion entre parties d'un même ensemble E ($\mathcal{R}$ = ($\mathcal{P}$(E), $\mathcal{P}$(E), Γ) où Γ est défini par la propriété : (A, B) ∈ Γ si A ⊂ B);

— (v) en géométrie élémentaire, le parallélisme entre droites du plan ($\mathcal{R}$ = ($\mathcal{D}$, $\mathcal{D}$, Γ) où $\mathcal{D}$ est l'ensemble des droites du plan et Γ est défini par : (Δ, Δ') ∈ Γ si Δ // Δ');

— (vi) la divisibilité dans $\mathbb{Z}$ ($\mathcal{R}$ = ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$, Γ) où Γ est défini par :
(x, x') ∈ Γ si x **divise** x' (c'est-à-dire si : $\exists\, k \in \mathbb{Z},\ x' = k\,x$)).
(x divise x') se traduit encore par (x' est un **multiple** de x).

— (vii) la congruence modulo l'entier n dans $\mathbb{Z}$ ($\mathcal{R}$ = ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$, Γ) où Γ est défini par : (x, y) ∈ Γ si x - y est multiple de n ($\exists\, k \in \mathbb{Z},\ x - y = k\,n$); que l'on note $x \equiv y \pmod n$);

— (viii) la relation sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{R}$ = ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, Γ) où Γ est défini par : (x, y) ∈ Γ si $x^2 + y^2 = 1$ (Γ correspond au cercle de $\mathbb{R}^2$ centré à l'origine et de rayon 1).

Voici maintenant les principales propriétés d'une relation sur un ensemble E que l'on peut rencontrer.

Définitions

Une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble E est dite

(1) **réflexive** si : $\forall x \in E,\ x \,\mathcal{R}\, x$;

(2) **symétrique** si : $\forall (x, y) \in E^2,\ x \,\mathcal{R}\, y \Rightarrow y \,\mathcal{R}\, x$;

(3) **antisymétrique** si : $\forall (x, y) \in E^2,\ (x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, x) \Rightarrow x = y$;

(4) **transitive** si : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{R}\, z) \Rightarrow x \,\mathcal{R}\, z$.

Dans les exemples précédents, sont réflexives les relations "(i), (iv), (v), (vi), (vii)", symétriques "(i), (ii), (v), (vii), (viii)", antisymétriques "(i), (iv)", et transitives "(i), (iv), (v), (vi), (vii)".

b. Relations d'équivalence sur un ensemble

Définition

On appelle **relation d'équivalence** ou **équivalence** sur un ensemble E toute relation sur E qui est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Par exemple, les relations "(i), (v), (vii)" sont des relations d'équivalence.

Définition

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Si on a $x \mathcal{R} y$, on dit que x est équivalent à y (modulo la relation $\mathcal{R}$). L'ensemble des éléments de E équivalents (modulo $\mathcal{R}$) à un élément a de E porte le nom de **classe d'équivalence** (modulo $\mathcal{R}$) de a; on le note $\bar{a}$ ($\bar{a} = \{x \in E \,/\, x \mathcal{R} a\}$). Un élément d'une classe d'équivalence est appelé **représentant** de la classe d'équivalence. Enfin, l'ensemble des classes d'équivalence (modulo $\mathcal{R}$) sur E porte le nom d'**ensemble quotient** de E par $\mathcal{R}$; on le note **$E/\mathcal{R}$** [1].

Pour l'équivalence (i), les classes sont réduites à un élément ($E/\mathcal{R}$ s'identifie alors à E); pour l'équivalence (v), chaque classe peut être représentée par une droite passant par un point fixé du plan.

Considérons la relation d'équivalence (vii) dans le cas particulier où $n = 3$, et cherchons les classes d'équivalence. Si $x \in \mathbb{Z}$ est strictement négatif, alors $x \equiv 2\,|x|$ (modulo 3) (puisque $x - 2\,|x| = 3\,x$); ainsi, il suffit de déterminer les ensembles $\bar{x}$ où x est un entier positif ou nul. D'après l'exercice 10 de la fiche 4 page 124, pour tout $x \in \mathbb{N}$ il existe dans $\mathbb{N}$, q et r uniques tels que $x = 3\,q + r$ avec $0 \leq r < 3$; on a donc $\bar{x} = \bar{r}$ où $r \in \{0, 1, 2\}$. Par conséquent, l'ensemble des classes d'équivalence est formé de trois éléments :

$\bar{0} = \{0, 3, -3, 6, -6, 9, -9, \ldots\} = \{3k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$,

$\bar{1} = \{1, 4, -2, 7, -5, 10, -8, \ldots\} = \{1 + 3k \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$ et

---

[1] En théorie des nombres, on construit successivement $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ à partir de l'ensemble $\mathbb{N}$; $\mathbb{Z}$ est l'ensemble quotient $\mathbb{N}^2/\mathcal{R}_1$ et $\mathbb{Q}$ l'ensemble quotient $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\mathcal{R}_2$ où $\mathcal{R}_1$ est la relation d'équivalence définie par : $(x, y)\, \mathcal{R}_1\, (x', y') \Leftrightarrow x - y' = x' - y$, et $\mathcal{R}_2$ la relation d'équivalence définie par : $(x, y)\, \mathcal{R}_2\, (x', y') \Leftrightarrow x\,y' = x'\,y$.

$\bar{2} = \{2, 5, -1, 8, -4, 11, -7, ...\} = \{2 + 3k \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.

Ainsi $E/\mathcal{R}$, qui se note $E/3\mathbb{Z}$, est l'ensemble $E/3\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ (ou encore, par exemple, $E/3\mathbb{Z} = \{\overline{-9}, \bar{7}, \overline{-7}\}$).

Théorème

Etant donné une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur un ensemble E, l'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathcal{R}$ est une partition de E [1].

Démonstration. tout élément de E appartient au moins à une classe $\bar{x}$ (celle dont il est un représentant), les classes forment ainsi un recouvrement de E; par définition, chaque classe contient au moins un représentant, donc les classes d'équivalence sont non vides. Il faut encore vérifier que deux classes distinctes sont disjointes ou encore par contraposition, que deux classes qui se rencontrent sont égales. Considérons deux classes ayant comme représentants respectifs x et y, et soit z un élément commun à $\bar{x}$ et $\bar{y}$. On a $z \,\mathcal{R}\, x$ et $z \,\mathcal{R}\, y$, d'où par symétrie et transitivité de la relation $\mathcal{R}$, $x \,\mathcal{R}\, y$; tout élément de la classe $\bar{x}$ est ainsi, par transitivité de $\mathcal{R}$, élément de la classe $\bar{y}$ (et réciproquement), ce qui signifie $\bar{x} = \bar{y}$. ◊

c. Relations d'ordre sur un ensemble

Définition

Une **relation d'ordre** sur un ensemble E est une relation sur E à la fois réflexive, antisymétrique et transitive. On la note, en générale $\leq$ [2] et on dit que $(E, \leq)$ est un **ensemble ordonné**. Deux éléments x, y de E sont dits **comparables** si $x \leq y$ ou $y \leq x$ ($x \leq y$ se lit "x est inférieur ou égal à y", ou encore "y est supérieur ou égal à x"). Si tous les éléments de E sont deux à deux comparables, on dit que E est **totalement ordonné** par $\leq$ ou que $\leq$ est un **ordre total** sur E; sinon, c'est-à-dire s'il existe deux éléments de E non

---

[1] Réciproquement, toute partition $\mathcal{F}$ de E définit une relation d'équivalence; en effet, si $\mathcal{F}$ est une partition de E, la relation $\mathcal{R}$ définie par :
$x \,\mathcal{R}\, y \iff (\exists F \in \mathcal{F}, x \in F \text{ et } y \in F)$, est une relation d'équivalence sur E.

[2] Attention dans ce paragraphe, ce symbole ne désigne pas uniquement l'ordre usuel sur les réels.

comparables, on dit que la relation d'ordre $\leq$ est **partielle** (ou que $\leq$ est un **ordre partiel** sur E).

On appelle (abusivement), relation d'**ordre strict** associée à la relation d'ordre $\leq$, la relation notée $<$ et définie par : $x < y$ si et seulement si ($x \leq y$ et $x \neq y$); $x < y$ se lit "x est strictement inférieur à y". Il est à noter que cette relation n'est pas une relation d'ordre puisqu'elle n'est pas réflexive.

La relation (iv) (de même que la relation (i), ce qui ne présente que peu d'intérêt) est une relation d'ordre partielle sur $\mathcal{P}(E)$ lorsque E a plus d'un élément; l'ordre usuel (noté $\leq$) dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ est un ordre total. A la différence de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$ (relation (vi)), qui n'est pas un ordre, la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$, notée $|$ et définie par : $\mathbf{x \mid y} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}, y = kx)$, est un ordre partiel ($x \mid y$ se lit "x **divise** y", ou "x est un diviseur de y", ou encore "y est **multiple** de x", ou "y est un multiple de x").
On pourra vérifier également que les relations $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ sur le produit cartésien $\mathbb{R}^2$ définies par :

$$(x, y)\ \mathcal{R}_1\ (x', y') \Leftrightarrow (x \leq x' \text{ et } y \leq y'),$$

et

$$(x, y)\ \mathcal{R}_2\ (x', y') \Leftrightarrow (x < x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y')),$$

sont des relations d'ordre, partielle pour $\mathcal{R}_1$ et totale pour $\mathcal{R}_2$ (ce dernier ordre porte le nom d'**ordre lexicographique** car il est de même nature que l'ordre des mots dans un dictionnaire).

Nous allons maintenant donner la définition de quelques éléments remarquables d'un ensemble (ou d'une partie d'un ensemble) ordonné.

Définitions

Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, A une partie de E et M, m, a, b, S, s des éléments de E; on dit que :

(1) M est un **majorant** de A si : $\forall x \in A, x \leq M$;
si A admet un majorant, on dit que A est **majorée**;

(2) m est un **minorant** de A si : $\forall x \in A, m \leq x$;
si A admet un minorant, on dit que A est **minorée**;

(3) si A est majorée et minorée, on dit que A est une partie **bornée**;

(4) a est **le plus grand élément** de A si a est un majorant de A qui appartient à A, on le note Max (A);

(5) b est **le plus petit élément** de A si b est un minorant de A qui appartient à A, on le note Min (A);

(6) S est **la borne supérieure** de A, si S est le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A; on le note Sup (A);

(7) s est **la borne inférieure** de A, si s est le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A; on le note Inf (A).

Remarques

• Lorsqu'il existe, le plus grand élément est unique (ce qui justifie dans la définition, "*le* " dans *le plus grand élément*). En effet, si a et a' sont des plus grands éléments de A, on a $a' \leq a$ (puisque a est un plus grand élément de A) et $a \leq a'$ (puisque a' est un plus grand élément de A); ainsi par antisymétrie de $\leq$ on a $a = a'$. ◊ (de même le plus petit élément est unique).

• D'après la remarque précédente, lorsqu'elle existe, la borne supérieure (respectivement inférieure) est unique.

• Le plus petit élément (respectivement plus grand élément) de A, lorsqu'il existe, est aussi borne inférieure (respectivement borne supérieure) de A. En effet, si a est, par exemple, le plus petit élément de la partie A, a est un minorant de A; si a' est un autre minorant de A, comme $a \in A$, on a $a' \leq a$; ainsi a est le plus grand élément de l'ensemble des minorants et donc $a = \inf(A)$. ◊

Donnons maintenant quelques exemples pour illustrer notre propos.

• Pour l'ordre usuel, $\mathbb{R}$ n'a ni majorant, ni minorant. $\mathbb{N}$ n'est pas majoré (donc $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément), mais admet un plus petit élément qui est 0; d'ailleurs toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément [1] .
L'intervalle réel $]2, +\infty[$ possède, dans $\mathbb{R}$, une borne inférieure qui est 2, et ne possède pas de plus petit élément.

---

[1] On dit que $(\mathbb{N}, \leq)$ est **bien ordonné** ou que $\leq$ est un **bon ordre** sur $\mathbb{N}$. On démontre, que tout ensemble E (en particulier $\mathbb{R}$) peut être bien ordonné (théorème de Zermelo (E. Zermelo, 1871-1953)); c'est un théorème d'existence. On ne sait pas donner explicitement un bon ordre sur $\mathbb{R}$.

• Si on considère la relation d'ordre (iv), $\mathcal{P}(E)$ a un plus petit élément $\emptyset$ et un plus grand élément E.

• Dans $(\mathbb{Q}, \leq)$, la partie $A = \{x \in \mathbb{Q} \ / \ x > 0 \text{ et } x^2 < 2\}$ admet une borne inférieure qui est 0, mais pas de plus petit élément, et n'admet pas de borne supérieure, bien que A soit majorée; a fortiori elle n'admet pas de plus grand élément.

• Si on considère l'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, |\,)$ et $A = \{1, 2, 4, 6\}$, alors $\text{Inf}\,(A) = \text{Min}\,(A) = 1$, $\text{Sup}\,(A) = 12$, et Max (A) n'existe pas (sinon on aurait $\text{Sup}\,(A) = \text{Max}\,(A) \in A$).

Terminons ce paragraphe par la définition d'éléments particuliers qui ne présentent vraiment d'intérêt que dans le cas d'un ensemble partiellement ordonné.

Définitions

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné.

(1) un élément a de E est dit **maximal** si : $\forall x \in E, a \leq x \Rightarrow a = x$;

(2) un élément a de E est dit **minimal** si : $\forall x \in E, x \leq a \Rightarrow a = x$.

Par exemple, si on considère $\mathcal{P}(E) \setminus \emptyset$, ordonné par l'inclusion, les éléments minimaux sont les singletons (il n'y a pas de plus petit élément) et les éléments maximaux se réduisent à E qui est le plus grand élément.

Pour $A = \{1, 2, 4, 6\}$, ordonné par la relation de divisibilité " | " dans $\mathbb{N}$, il y a un seul élément minimal 1 qui est aussi le plus petit élément de A, et deux éléments maximaux 4 et 6.

3.3. Applications d'un ensemble dans un autre

a. Généralités sur les applications

Soient E et F deux ensembles.

Définition

Une relation f de E vers F est appelée **application, relation fonctionnelle** ou **fonction** de E vers (ou à valeurs dans) F, si tout élément x de E est en relation avec un et un seul élément y de F; cet élément est noté f (x) et porte le nom d'**image** ou **valeur** de la fonction en x (on parle aussi de **transformé** de x par f).

On la note[1] $f: \begin{array}{l} E \longrightarrow F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$ ou encore plus brièvement $E \xrightarrow{f} F$ ou $f: E \longrightarrow F$.

L'ensemble des applications de E vers F, se note $\mathcal{F}(E, F)$ ou F^E.

Par exemple, la fonction "partie entière", qui à tout réel x, associe sa partie entière $\mathbb{E}(x)$ (encore notée $[x]$), est un élément de $\mathbb{Z}^{\mathbb{R}}$; rappelons que $\mathbb{E}(x)$ est l'unique entier qui vérifie $\mathbb{E}(x) \leq x < 1 + \mathbb{E}(x)$ (ainsi, $\mathbb{E}(-4{,}56) = -5$ et $\mathbb{E}(7{,}23) = 7$).

D'une manière générale, on appelle **fonction numérique**, ou **réelle**, toute application d'un ensemble E dans $\mathbb{R}$, et fonction numérique (ou réelle) d'une **variable réelle** toute application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Définitions

1. La **famille** $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E (ou à valeurs dans E) est l'application $f: I \longrightarrow E$, $i \mapsto x_i$; l'ensemble de définition I de f est appelé **ensemble des indices** de la famille. On dit encore que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est indexée par I.

2. De plus, si $I = \mathbb{N}$ (ou plus généralement $I = \{p, p+1, \ldots\} \subset \mathbb{N}$), la famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est appelée **suite** d'éléments de E (ou à valeurs dans E).

Par exemple, la famille $(\sin x)_{x \in \mathbb{R}}$ d'éléments de $[-1, +1]$ est l'application : $\mathbb{R} \longrightarrow [-1, +1]$, $x \mapsto \sin x$.

Deux **applications** $f: E \longrightarrow F$ et $g: E' \longrightarrow F'$ sont **égales** si l'assertion $(E = E'$ et $F = F'$ et $(\forall x \in E, f(x) = g(x)))$ est vraie.

[1] On évitera pour présenter une application l'abus de langage suivant : "soit l'application f (x)".

On doit distinguer ainsi, les trois applications suivantes :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad g : \mathbb{R} \to [-1, 1] \qquad \text{et} \qquad h : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sin(x) \qquad x \mapsto \sin(x) \qquad x \mapsto \sin(x)$$

Voici trois applications importantes.

• L'application définie sur E et qui prend une même valeur a pour tout élément de E est dite **application constante** de valeur a.

• L'application de E dans E qui fait correspondre à tout élément x de E cet élément lui même, est appelée **application identique** de E (ou **identité** de E) et se note $\mathbf{Id_E}$.

• Si A est une partie non vide de E, l'application de A dans E qui à tout élément x de A fait correspondre x considéré comme élément de E, porte le nom d'**injection canonique** [1] de A dans E.

Etudions maintenant le moyen de construire de nouvelles applications à partir d'applications existantes.

Définition

Soient f une application de E dans F, et A une partie de E; l'application g de A dans F, dont la valeur en tout élément x de A est f (x), s'appelle *la* **restriction** de f à A et se note $f_{|A}$; on dit alors que f est *un* **prolongement** de l'application g à E [2]. Si deux applications de E dans F ont même restriction à A, on dit qu'elles **coïncident** dans A.

Remarquons que $f_{|E} = f$.

Définition

Soient E, F et G trois ensembles; soient f une application de E dans F et g une application de F dans G. L'application de E dans G, dont la valeur, en un élément quelconque x de E, est g (f (x)) , s'appelle l'**application**

[1] Pour les mathématiciens, "canonique" signifie "naturel" ou "intrinsèque".

[2] Si la restriction de f à A est unique (d'où le "*la*" de *la restriction)* une application peut avoir, par contre, plusieurs prolongements.

composée de g et f, et se note **g o f** [1]. L'égalité $h = g \circ f$ s'appelle une **factorisation** de h.

On peut décrire cela par le **diagramme** suivant :

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dr, "g"] & \\ E \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g \circ f"'] & & G \end{tikzcd}$$

On remarquera que si G est distinct de E, l'application composée de f et g ($f \circ g$) n'a aucun sens.

Exemples

1. Soient $g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ et $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \sin(x)$ $\qquad$ $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$

L'application composée de g et f est :

$$\begin{aligned} g \circ f :\ & [-1, 1] \to [-1, 1] \\ & x \mapsto \sin(\sqrt{1 - x^2}) \end{aligned}$$

L'application composée de f et g est :

$$\begin{aligned} f \circ g :\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \sqrt{1 - \sin^2(x)} = \sqrt{\cos^2(x)} = |\cos(x)| \end{aligned}$$

2. Soient A une partie non vide de E et f une application de E dans F. Si on note i, l'injection canonique de A dans F, alors la factorisation de $f_{|A}$ est $f_{|A} = f \circ i$.

Remarques

1. L'exemple 1 précédent montre que, même lorsqu'elles existent toutes les deux, les applications $g \circ f$ et $f \circ g$ ne sont pas, en général, comparables.

[1] La notation $g \circ f$ signifie, comme l'indique la définition, que l'on effectue d'abord le calcul de $f(x)$, puis le calcul de $g(f(x))$.

2. Si f et g sont deux applications de E dans E, en général, $g \circ f \neq f \circ g$ (ce qui signifie que la composition des applications n'est pas commutative); pour s'en convaincre, on pourra considérer, par exemple, les applications suivantes :

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{et} \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 \qquad\qquad x \mapsto 1 + x$$

3. Soient E, F, G et H quatre ensembles; le lecteur pourra vérifier que si f est une application de E dans F, g une application de F dans G et h une application de G dans H, alors on a : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$; cette application de E dans H se note plus simplement $h \circ g \circ f$ (c'est "l'associativité de la composition des applications").

4. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$, alors on a : $f \circ Id_E = f$ et $Id_G \circ g = g$.

Terminons par des définitions dans le cas où les ensembles E et F sont ordonnés.

Définitions

Soient E, F deux ensembles ordonnés (on note dans les deux cas la relation d'ordre par le même symbole $\leq$, et l'"ordre strict" associé par $<$) et f une application de E dans F. On dit que :

1. f est **croissante** si : $\forall (x, y) \in E^2,\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$;
2. f est **strictement croissante** si : $\forall (x, y) \in E^2,\ (x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$;
3. f est **décroissante** si : $\forall (x, y) \in E^2,\ (x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$;
4. f est **strictement décroissante** si : $\forall (x, y) \in E^2,\ (x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$;
5. f est **monotone** si f est croissante ou décroissante;
6. f est **strictement monotone** si f est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemples

• La fonction partie entière est croissante (non strictement), et donc monotone.

• La fonction sinus de $\mathbb{R}$ dans $[-1, +1]$ n'est ni croissante, ni décroissante (donc non monotone).

• Une fonction constante est croissante (non strictement) et décroissante (non strictement).

b. Applications surjectives, injectives et bijectives

Voici quelques propriétés fondamentales des applications.

Définitions

Soit f une application de E dans F.

1. f est dite **surjective** (ou f est une **surjection** de E dans F) si un élément quelconque de F a au moins un antécédent par la relation fonctionnelle f, c'est-à-dire si : $\forall\, y \in F, \exists\, x \in E, y = f(x)$.
Dans ce cas, on dit également que f est une surjection de E **sur** F.

2. f est dite **injective** (ou f est une **injection** de E dans F) si un élément quelconque de F a au plus un antécédent par la relation fonctionnelle f, c'est-à-dire si : $\forall\, (x, x') \in E^2,\ f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

3. f est dite **bijective** (ou f est une **bijection** de E dans F) si un élément quelconque de F a un et un seul antécédent par la relation fonctionnelle f, c'est-à-dire si f est à la fois injective et surjective. La bijectivité de f est donc équivalente à : $\forall\, y \in F, \exists!\, x \in E, y = f(x)$.
Dans ce cas, on dit également que f est une bijection de E **sur** F.

Exemples

1. L'injection canonique d'une partie non vide A de E dans F est effectivement une injection qui n'est pas surjective lorsque $A \neq E$. Si $A = E$ cette application n'est autre que Id_E qui est injective et surjective, donc bijective

2. L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$ n'est ni injective, ni surjective; par contre l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$, $x \mapsto \sin(x)$ est surjective et non injective.

3. L'application $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, $x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ est bijective.

Le théorème qui suit est très important, puisqu'il précise les conditions permettant d'"inverser" une relation fonctionnelle f.

Définition et théorème

Soit f une application de E dans F.

f est bijective si et seulement s'il existe une application g de F dans E telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. g est alors unique et bijective; elle porte le nom d'**application inverse** ou **réciproque** de f et se note $\mathbf{f^{-1}}$. Enfin f^{-1} est définie par : $\forall (x, y) \in E \times F,\ (y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y))$.

Démonstration. Le lecteur pourra vérifier facilement que si $f \in F^E$ et $g \in E^F$, alors l' assertion ($g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$) est équivalente à

(*) $(\forall (x, y) \in E \times F,\ (y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)))$.

Montrons maintenant que l'existence d'une application g vérifiant ($g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$) entraîne la bijectivité de f (donc par symétrie la bijectivité de g). Supposons donc ($g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$). Comme g est une application de F dans E, pour tout y de F, il existe un et un seul x de E vérifiant $x = g(y)$; donc d'après (*), il existe un et un seul x de E tel que $y = f(x)$. Ainsi f est bijective.

Réciproquement, si f est bijective on a $(\forall y \in F, \exists!\, x \in E,\ y = f(x))$ (**). Soit alors g l'application de F dans E où l'image d'un élément quelconque y de F est l'unique x de E défini par (**) vérifiant $y = f(x)$; cette définition de g entraîne (*), d'où le résultat. De plus, par construction, g ne peut être qu'unique. ◊

Par exemple, on a $(Id_E)^{-1} = Id_E$, et si f est l'application de l'exemple 3 précédent, $f^{-1} = f$.

L'application $\begin{array}{rl} f : \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto 1 + x \end{array}$ est bijective et $\begin{array}{rl} f^{-1} : \mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x - 1 \end{array}$

Propriété

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

c. Image directe et image réciproque de sous-ensembles

Définitions

Soient f une application de E dans F, A une partie de E et B une partie de F.

1. On appelle **image directe** (ou tout simplement **image**) de A par f, le sous-ensemble de F noté $\mathbf{f(A)}$ et défini par $f(A) = \{y \in F \,/\, \exists\, x \in A,\ y = f(x)\}$, ce qu'on écrit plus rapidement $f(A) = \{f(x) \,/\, x \in A\}$. Ainsi, pour tout y de F, on a :

$$y \in f(A) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists\, x \in A,\ y = f(x)).$$

Si $A = E$, $f(E)$ porte le nom d'**image de f**.

2. On appelle **image réciproque** de B par f, le sous-ensemble de E noté $\mathbf{\overset{-1}{f}(B)}$ et défini par $\overset{-1}{f}(B) = \{x \in E \,/\, f(x) \in B\}$ [1]. Ainsi, pour tout x de E, on a :

$$x \in \overset{-1}{f}(B) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in B.$$

Remarques

1. $f(A)$ et $\overset{-1}{f}(B)$ sont des ensembles. $\overset{-1}{f}(B)$ existe toujours et ne préjuge pas de l'existence de l'application réciproque f^{-1} de f.

2. Si f est bijective, l'application réciproque f^{-1} existe et on a $f^{-1}(B) = \overset{-1}{f}(B)$ (égalité entre l'image réciproque de B par f et l'image directe de B par f^{-1}).

3. On a : $f(\varnothing) = \varnothing$ et $\overset{-1}{f}(\varnothing) = \varnothing$.

4. Si x est un élément de A alors $f(\{x\}) = \{f(x)\}$.

5. f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Exemple

Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$, alors on a :

$f(\{0, \pi\}) = \{0\}$, $f(\mathbb{R}) = f([0, 2\pi[) = [-1, 1]$, $\overset{-1}{f}(\{2\}) = \varnothing$,

et $\overset{-1}{f}(\frac{1}{2}) = \{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \,/\, k \in \mathbb{Z}\}$.

---

[1] Très souvent, $\overset{-1}{f}(B)$ se note $f^{-1}(B)$, mais attention, f n'est pas pour autant bijective.

Propriétés

Soient f une application de E dans F, A et A' deux parties de E, et B, B' deux parties de F. On a :

1. $A \subset A' \Rightarrow f(A) \subset f(A')$;
2. $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$;
3. $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$;
4. $A \subset \overset{-1}{f}(B) \Leftrightarrow f(A) \subset B$;
5. $B \subset B' \Rightarrow \overset{-1}{f}(B) \subset \overset{-1}{f}(B')$;
6. $\overset{-1}{f}(B \cup B') = \overset{-1}{f}(B) \cup \overset{-1}{f}(B')$;
7. $\overset{-1}{f}(B \cap B') = \overset{-1}{f}(B) \cap \overset{-1}{f}(B')$;
8. $\overset{-1}{f}(\complement_F B) = \complement_E(\overset{-1}{f}(B))$;
9. $A \subset \overset{-1}{f}(f(A))$;
10. $f(\overset{-1}{f}(B)) \subset B$;
11. f injective $\Leftrightarrow (\forall A \in \mathcal{P}(E), A = \overset{-1}{f}(f(A)))$;
12. f surjective $\Leftrightarrow (\forall B \in \mathcal{P}(F), B = f(\overset{-1}{f}(B)))$.

Vérifions par exemple (6); Il suffit de remarquer que, pour tout x de E, on a :

$$\begin{aligned} x \in \overset{-1}{f}(B \cup B') &\Leftrightarrow f(x) \in B \cup B' && \text{(définition de l'image réciproque)} \\ &\Leftrightarrow f(x) \in B \text{ ou } f(x) \in B' && \text{(définition de la réunion)} \\ &\Leftrightarrow x \in \overset{-1}{f}(B) \text{ ou } x \in \overset{-1}{f}(B') && \text{(définition de l'image réciproque)} \\ &\Leftrightarrow x \in \overset{-1}{f}(B) \cup \overset{-1}{f}(B') && \text{(définition de la réunion).} \ \lozenge \end{aligned}$$

Signalons que les formules (2), (3), (6) et (7) se généralisent au cas d'un ensemble $\mathcal{F}$ quelconque de parties de E (ou de F); par exemple, la formule (2) donne : $f(\bigcup_{F \in \mathcal{F}} F) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} f(F)$.

Terminons ce paragraphe par une application des différentes notions que nous venons de voir (le lecteur sautera ce passage lors d'une première lecture).

Soit f une application quelconque de E dans F.

La relation $\mathcal{R}$ sur E, définie par $(x \mathcal{R} x' \Leftrightarrow f(x) = f(x'))$, est une relation d'équivalence ; deux éléments qui ont même image par f se retrouvent dans une même classe d'équivalence de l'espace quotient.

L'application $s : E \rightarrow E/\mathcal{R}\ ;\ x \mapsto \bar{x}$ est surjective.

Notons enfin i l'injection canonique de l'image $f(E)$ dans F.

Comme deux représentants quelconques d'une même classe d'équivalence X ont même image par f (d'après la définition de $\mathcal{R}$), on peut considérer l'application g de $E/\mathcal{R}$ dans $f(E)$, définie par $g(X) = f(x)$ où x est un représentant quelconque de la classe X (cette définition ne dépendant pas du choix du représentant x, g est donc bien une application). Cette application g est bijective. En effet elle est surjective car si $y \in f(E)$, d'après la définition de l'image directe $f(E)$, il existe x dans E tel que $y = f(x)$ et par conséquent $g(\bar{x}) = y$; elle est également injective puisque, si X et X' sont deux classes d'équivalence représentées respectivement par x et x', $g(X) = g(X')$ étant équivalent à $f(x) = f(x')$, on a, d'après la définition de $\mathcal{R}$, $\bar{x} = \bar{x'}$; d'où $X = X'$.

Enfin il est facile de vérifier que $f = i \circ g \circ s$; $i \circ g \circ s$ est la **factorisation canonique** ou **décomposition canonique** de f; elle permet d'exprimer f en fonction d'une bijection (l'application g). Cette écriture de f peut se représenter sous la forme du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"'] & F \\
E/\mathcal{R} \arrow[r, "g"] & f(E) \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

3.4. Comparaison des ensembles - notions sur les cardinaux

Nous ne donnons ici que quelques remarques initiatiques (à titre culturel) et sans justification (excepté le théorème de Cantor).

On dit qu'un ensemble E est **équipotent** à un ensemble F, ou que E et F ont même **cardinal** [1] (ou encore que E et F ont **même puissance**) s'il existe une bijection de E sur F. On admet qu'il existe des ensembles appelés **cardinaux** (ou **nombres cardinaux**), tels que tout ensemble E donné soit équipotent à un et un seul d'entre eux; ce cardinal est appelé cardinal ou puissance de E, et on le note **Card (E)**. Ainsi, si E est équipotent à F, on a Card (E) = Card (F).

Si E est équipotent à une partie de F, ce qui équivaut à l'existence d'une injection de E dans F, on note Card (E) $\leq$ Card (F); et si de plus, il n'existe pas de surjection de E sur F, on écrit Card (E) < Card (F).

On admettra que l'équipotence a les mêmes propriétés qu'une relation d'équivalence (sur la classe des ensembles), et que $\leq$ a les mêmes propriétés qu'une relation d'ordre (sur la classe des cardinaux).

On dit qu'un ensemble E est **fini** s'il est vide ou équipotent à $\{1, \ldots, n\}$ (pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$); on note alors Card (E) = 0 si $E = \emptyset$, et Card (E) = n si E est équipotent à $\{1, \ldots, n\}$. Un ensemble non fini est dit **infini**.

Un ensemble E équipotent à $\mathbb{N}$ est dit **infini dénombrable** et on note Card (E) = $\aleph_0$ (**aleph** [2] **zéro**). Un ensemble est dit **dénombrable** s'il est équipotent à une partie finie ou non de $\mathbb{N}$.

Pour toute partie A d'un ensemble E, on a Card (A) $\leq$ Card (E). Si un ensemble fini ne peut pas être équipotent à une de ses parties propres (si A est une partie finie de E, différente de E, alors Card (A) < Card (E)), il n'en est pas de même pour les ensembles infinis.

Par exemple, $\mathbb{N}$ et l'ensemble des entiers naturels pairs ont même cardinal puisque $n \mapsto 2n$ est une bijection; et de façon générale, toute partie infinie de $\mathbb{N}$ est équipotente à $\mathbb{N}$. On a aussi, par exemple, Card (]0, 1[) = Card ($\mathbb{R}$) (considérer l'application $x \mapsto \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$).

---

[1] Intuitivement, dire que deux ensembles sont équipotents, c'est dire qu'ils ont même "nombre d'éléments".

[2] $\aleph$ est la première lettre de l'alphabet hébraïque.

En fait, la possibilité pour un ensemble de pouvoir être équipotent à l'une (au moins) de ses parties propres est caractéristique des ensemble infinis (ce résultat est dû au mathématicien R. J. Dedekind (1831-1916)).

Indiquons les principales opérations que l'on peut faire sur les cardinaux (elles étendent les opérations classiques sur les ensembles finis).

— Si A et B sont deux ensembles disjoints, si A' et B' sont également disjoints et respectivement équipotents à A et B, on vérifie que $A \cup B$ est équipotent à $A' \cup B'$; on pose alors : $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.

— Si A et B sont respectivement équipotents à A' et B', alors $A \times B$ est équipotent à $A' \times B'$; on pose alors : $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$ (et si $A = B$, on pose $\text{Card}(A^2) = (\text{Card}(A))^2$).

— Si A et B sont respectivement équipotents à A' et B', alors B^A (ensemble des applications de A dans B) est équipotent à $B'^{A'}$; on pose alors : $\text{Card}(B^A) = \text{Card}(B)^{\text{Card}(A)}$.

Signalons, à titre d'exemple, que : $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0{}^2 = \aleph_0$.

Démontrons maintenant le **théorème de Cantor** (G. F. Cantor, 1845-1918).

Théorème

Pour tout ensemble E, on a $\text{Card}(E) < \text{Card}(\mathcal{P}(E))$.

Démonstration. L'application de E dans $\mathcal{P}(E)$, définie par $x \mapsto \{x\}$, est injective et on a $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(\mathcal{P}(E))$. Il suffit donc de prouver qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$. Considérons une application f de E dans $\mathcal{P}(E)$ et posons $Y = \{x \in E \,/\, x \notin f(x)\}$; alors Y est une partie de E, donc un élément de $\mathcal{P}(E)$ qui n'est pas atteint par f, car :

— si $x \notin Y$, alors $x \in f(x)$ et $f(x) \neq Y$;

— si $x \in Y$, alors $x \notin f(x)$ et $f(x) \neq Y$.

Ainsi f n'est pas surjective et $\text{Card}(E) < \text{card}(\mathcal{P}(E))$. ◊

De plus, on montre que $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}$ (voir l'exercice 8 de la fiche n° 5 dans le cas où E est fini) et ainsi $\text{Card}(E) < 2^{\text{Card}(E)}$.

Le théorème de Cantor permet de construire des ensembles infinis de "plus en plus grands"; il permet aussi d'affirmer qu'il existe des ensembles infinis non dénombrables; en effet, on a $\aleph_0 = \text{Card}(\mathbb{N}) < \text{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}$.

Les ensembles E qui, comme $\mathbb{R}$, vérifient $\text{Card}(E) = 2^{\aleph_0}$ sont dits avoir la **puissance du continu**.

Le problème de l'existence d'un ensemble ayant un cardinal strictement compris entre $\aleph_0$ et $2^{\aleph_0}$ est indécidable.
Supposer la non-existence d'un tel ensemble, c'est poser l'**hypothèse du continu** (on note, dans ce cas, $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ (**aleph un**)); sous cette hypothèse, $\mathbb{R}$ ne possède que deux types de sous-ensembles : les ensembles dénombrables et les ensembles ayant la puissance du continu.

Donnons pour terminer le cardinal de certains ensembles.

On a, si n désigne un entier naturel non nul quelconque :

- $\text{Card}(\mathbb{N}^n) = \text{Card}(\mathbb{Z}^n) = \text{Card}(\mathbb{Q}^n) = \aleph_0$;
- $\text{Card}(\mathbb{R}^n) = \text{Card}(\mathbb{C}^n) = \text{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}$ $(= \aleph_1 > \aleph_0)$;
- $\text{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{R})) = \text{Card}(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}) = 2^{(2^{\aleph_0})}$ $(= 2^{\aleph_1} > \aleph_1)$.

EN GUISE DE CONCLUSION ... 4

La Mathématique est comme tout le reste, ***manipulation d'objets*** ;

ne les cassons pas.

Telles sont les règles du jeu, amusons nous bien !

Les auteurs

Les ouvrages suivants, dont le niveau dépasse très largement le niveau que nous avons visé ici, nous ont bien aidés.

— R. APERY, R. FRAÏSSE et coauteurs, *Penser les mathématiques*, Editions du Seuil, 1982.

— S. C. KLEENE, *Logique mathématique*, Editions J. Gabay, 1987.

— A. TARSKI, *Introduction à la logique*, Editions Gauthier-Villars, 1971.

— A. THAYSE et coauteurs, *Approche logique de l'intelligence artificielle* (tome 1), Editions Dunod Informatique, 1990.

Par contre, l'ouvrage de vulgarisation suivant est d'une lecture abordable et enrichissante.

— D. HOFSTADTER, *Gödel, Escher, Bach : les brins d'une guirlande éternelle*, InterEditions, 1985.

Le lecteur qui s'intéresse à la théorie des ensembles pourra consulter le livre suivant, d'un niveau, là encore, abordable :

— A. BOUVIER, *La théorie des ensembles* , Presses Universitaires de France, collection "Que sais-je ?" n° 1363, 1982.

FICHE N° 1

Connecteurs, règles logiques, démonstration de (P $\Rightarrow$ Q), définitions et exemples de prédicats

EXERCICES

Cette fiche est relative au 1.1, au a. du 1.2 et utilise quelques notions très simples du 3. Pour les tables de vérité, on se reportera aux exercices 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10. Pour les règles logiques, on verra les exercices 3, 5, 8, 9, 11, 12,13, 14, 16 et pour le travail du langage (y compris les ensembles), les exercices 6, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 21. Pour l'utilisation de (P $\Rightarrow$ Q), voir les exercices 15, 17, 18, 19, 20; enfin pour la définition des prédicats, on s'intéressera aux exercices 14, 15, 16, 19, 20 et 21.

Dans un premier temps, le lecteur se contentera de deux ou trois exercices par rubrique.

1 Préciser, selon la valeur du réel x, si les phrases suivantes définissent des assertions, des assertions vraies (c'est-à-dire des propositions) ou des assertions fausses.

(i) $\cos^2(\tan x) \geq 0$.

(ii) $\dfrac{1}{1+x} \leq 1$.

(iii) La restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[0, x]$ est injective.

2 En utilisant une méthode analogue à celle employée dans la preuve de la règle logique (13), vérifier les règles logiques (4), (8), (10), (12) et (16) des pages 14 et 15.

3 Prouver, sans construire les tables de vérité, les règles logiques suivantes (donc valables pour toutes assertions P et Q de $\mathscr{A}$).

(i) $(P \vee Q) \Leftrightarrow (\urcorner P \Rightarrow Q)$.

(ii) $P \Leftrightarrow ((Q \Rightarrow P) \wedge (\urcorner Q \Rightarrow P))$.

(iii) $P \Leftrightarrow ((\urcorner P \Rightarrow Q) \wedge (\urcorner P \Rightarrow \urcorner Q))$.

La règle (i) fournit une méthode de démonstration d'une assertion disjonctive; les règles (ii) et (iii) donnent respectivement naissance aux démonstrations par disjonction des cas et par l'absurde, ainsi qu'on le voit pages 49 et 47.

4 Vérifier, à partir d'une table de vérité, la non-associativité du connecteur d'implication, et l'associativité du connecteur d'équivalence (de façon générale, un connecteur binaire Δ est dit associatif si, pour toutes assertions P, Q, R de la théorie donnée, on a la proposition $(((P \Delta Q) \Delta R) \Leftrightarrow (P \Delta (Q \Delta R)))$.

5 Chercher l'expression de $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow \urcorner R))$ en fonction des seuls connecteurs $\urcorner$ et $\vee$.

6 Donner la table de vérité des connecteurs binaires suivants :

- l'alternative (ou disjonction exclusive) w , qui se lit "ou bien ..., ou bien ..." ou encore "soit ..., soit ..." (c'est le "ou exclusif");
- l'incompatibilité (ou connecteur de Sheffer) | , qui se lit "... exclut ...";
- le rejet (ou connecteur de Peirce) || , qui se lit "ni ..., ni ...".

En automatique, le connecteur de Sheffer (H. M. Sheffer, 1883-) porte également le nom "d'opérateur NAND ("non et")"; on pourra vérifier que $(P|Q \Leftrightarrow (P \Rightarrow \urcorner Q))$, ce qui justifie la traduction de "|" par "exclut". Le connecteur de Peirce (C. S. Peirce, 1839-1914) porte le nom "d'opérateur NOR ("non ou")".

7 Montrer qu'il y a 4 connecteurs unaires et 16 connecteurs binaires différents. Déterminer pour chacun d'eux sa table de vérité. Exprimer, à l'aide des connecteurs usuels $\urcorner$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, le résultat de l'application de chacun des 16 connecteurs binaires à des assertions P et Q; retrouver parmi eux les connecteurs w, |, || de l'exercice précédent.

8 Le calcul assertionnel peut se construire en utilisant un unique connecteur, comme le connecteur de Peirce ou encore le connecteur de Sheffer (voir l'exercice 6 pour la définition de ces connecteurs). Montrer, par exemple, que l'on a pour toutes assertions P et Q de $\mathcal{A}$:

(i) $\neg P \Leftrightarrow (P \mid\mid P)$.

(ii) $P \vee Q \Leftrightarrow ((P \mid\mid Q) \mid\mid (P \mid\mid Q))$.

Déterminer alors l'expression de $(\neg P \wedge \neg Q)$ et de $(P \Rightarrow Q)$ en fonction du connecteur $\mid\mid$.

9 A l'aide du tableau de l'exercice 7 et des règles logiques de la page 14, vérifier l'exactitude des affirmations suivantes :

- non (P et Q) signifie (non P ou non Q), ou encore signifie (P exclut Q);
- non (P ou Q) signifie (non P et non Q), ou encore signifie (ni P, ni Q);
- non (P entraîne Q) signifie (P et non Q);
- non (P si et seulement si Q) signifie (ou bien P, ou bien Q);
- non (ni P, ni Q) signifie (P ou Q);
- non (ou bien P, ou bien Q) signifie (P si et seulement si Q);
- non (P exclut Q) signifie (P et Q).

10 Soient P et Q deux assertions d'une théorie mathématique donnée.

1° L'assertion "(P et Q) est fausse" est-elle équivalente à (i), ou à (ii) ?

(i) P et Q sont fausses.

(ii) P est fausse et Q est fausse.

2° L'assertion "(P et Q) est vraie" est-elle équivalente à (iii), ou à (iv) ?

(iii) P et Q sont vraies.

(iv) P est vraie et Q est vraie.

11 Une application bijective est une application injective et surjective. Dans quels cas une application n'est-elle pas bijective ? Préciser toutes les possibilités.

$\boxed{12}$ Donner la négation des cinq assertions suivantes :
$P \wedge \urcorner Q$; $P \vee (Q \wedge R)$; $P \Leftrightarrow Q$; $P \Rightarrow \urcorner Q$; $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$.

$\boxed{13}$ A l'aide de la règle logique (17) de la page 15, transformer la proposition suivante de la géométrie élémentaire portant sur un triangle T : "si T est rectangle, alors si T est isocèle, T possède deux angles de 45°". Puis transformer la proposition obtenue en appliquant successivement la règle (7) et la règle (17).

$\boxed{14}$ Utiliser les règles logiques de la page 14 pour montrer les résultats suivants de la théorie des ensembles (on utilisera une méthode analogue à celle employée page 58); A, B et C désignent des parties d'un même ensemble E.

(i) $\overline{\overline{A}} = A$.

(ii) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(iii) $A \cup \overline{A} = E$.

(iv) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$\boxed{15}$ A, B et C sont trois parties d'un même ensemble E. Prouver que :
$A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$.

$\boxed{16}$ Soit P une fonction assertionnelle d'une variable réelle x, que l'on suppose définie sur $\mathbb{R}$, ($P(x)$ est donc une assertion pour tout réel x).

1° Déterminer l'ensemble $\mathcal{A}$ des x tels que l'on ait $P(x) \vee \urcorner P(x)$.

2° Déterminer l'ensemble $\mathcal{B}$ des x tels que l'on ait $P(x) \wedge \urcorner P(x)$.

3° Montrer que l'ensemble $\mathcal{B}$ peut encore s'écrire comme l'ensemble des réels x vérifiant $x \neq x$.

$\boxed{17}$ **1°** La condition (m et n sont deux entiers pairs) est-elle une condition nécessaire, une condition suffisante, une condition nécessaire et suffisante, pour que l'on ait ($m + n$ est un entier pair) ? (m et n sont des entiers fixés en fonction desquels il conviendra de discuter).

2° Même question avec les assertions des questions a), b), c) :

a) $(x + \sqrt{2x} = 4)$; $(x = 2)$.

b) (f dérivable en O $\Rightarrow$ f continue en O) ;

(f non dérivable en O ou f continue en O) .

c) $(y > x)$; $(\max\{x, \frac{x+2y}{3}\} > x)$.

Dans a), x est un réel positif ou nul fixé; dans b), f est une application fixée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; dans c), x et y sont des réels fixés.

18 Soient x et α deux réels; on suppose $\alpha \leq \frac{1}{3}$. Montrer que :
$|x - 1| \leq \alpha \Rightarrow |x^2 - 1| \leq 1$.

19 Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $\sqrt{x^{10}+x} = \sqrt{x^{10}-x+2b}$ où b est un réel positif ou nul donné.

20 Donner le domaine de validité de l' "assertion" suivante :
"si c'est aujourd'hui lundi, alors demain c'est samedi"; on remarquera que la variable *aujourd'hui* est à valeurs dans l'ensemble à 7 éléments {dimanche, ..., samedi}.

21 On appelle *intéressant* tout nombre réel qui satisfait à la fois les "assertions" de la variable réelle x, $P_1(x), \ldots, P_n(x)$.
Parmi les assertions suivantes, quelles sont celles qui sont vraies et celles qui sont fausses (justifier vos réponses) ?

(i) Tout nombre *intéressant* vérifie P_1.

(ii) Pour tout nombre *non intéressant*, l'une au moins des propriétés données n'est pas satisfaite.

FICHE N° 1

INDICATIONS ET RÉPONSES

1 **Indications** . Pour (i), on recherchera l'ensemble de définition des fonctions cos, $\cos^2$, tan et $\cos^2 \circ \tan$. Pour (ii), après avoir déterminé l'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, on étudiera sur chacun des intervalles de cet ensemble l'inégalité $\frac{1}{1+x} \leq 1$ (on pourra multiplier les deux membres de l'inégalité par $(1 + x)$; mais attention au signe de $(1 + x)$). Quant à (iii), on se rappellera (voir le cours de terminale) qu'une fonction numérique f continue sur un intervalle I définit une bijection (donc une injection) entre I et f (I), si et seulement si elle est strictement monotone.

Réponses .

(i) Si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, la phrase (i) n'a pas de sens et n'est donc pas une assertion; sinon la phrase (i) est une proposition.

(ii) Si $x = -1$, (ii) ne définit pas une assertion; si $x \in]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$, (ii) est une proposition; si $x \in]-1, 0[$, (ii) est une assertion fausse.

(iii) Si $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$, (iii) est une proposition; si $x > \frac{\pi}{2}$, (iii) est une assertion fausse et si $x \leq 0$, (iii) n'est pas une assertion.

2 **Réponses**

Règle n°4 :

	⌉	(P	∧	Q)	⇔	(⌉P	∨	⌉Q)
	F	**V**	V	**V**	<u>V</u>	F	F	F
	V	**V**	F	**F**	<u>V</u>	F	V	V
	V	**F**	F	**V**	<u>V</u>	V	V	F
	V	**F**	F	**F**	<u>V</u>	V	V	V
étape :	4	1	3	1	5	2	3	2

Règle n°8 :

(P	∧	(Q	∧	R))	⇔	((P	∧	Q)	∧	R)
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	V	V	V	V	F	F	V	F	V
F	F	V	F	F	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	V	V	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	V	F	F	F	F	F

étape : 1 3 1 2 1 4 1 2 1 3 1

Règle n°10 :

(P	⇒	Q)	⇔	(¬Q	⇒	¬P)
V	V	V	V	F	V	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	V	V	V

étape : 1 2 1 4 2 3 2

Règle n°12 :

¬	(P	⇒	Q)	⇔	(P	∧	¬Q)
F	V	V	V	V	V	F	F
V	V	F	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F	F	V

étape : 3 1 2 1 4 1 3 2

Règle n°16 :

(P	$\wedge$	(P	$\Rightarrow$	Q))	$\Rightarrow$	Q
V	V	V	V	V	$\underline{V}$	V
V	F	V	F	F	$\underline{V}$	F
F	F	F	V	V	$\underline{V}$	V
F	F	F	V	F	$\underline{V}$	F

étape : 1 3 1 2 1 4 1

3 **Indications** . On transforme, en utilisant les règles logiques, un des deux membres de l'équivalence en une assertion équivalente.

(i) Transformer l'assertion $(\urcorner P \Rightarrow Q)$ en utilisant la règle (11), puis la règle (3).

(ii) Transformer le deuxième membre en utilisant successivement les règles (11), (3), (7) et (9) pour obtenir $(P \vee (\urcorner Q \wedge Q))$. Remarquer avec la règle (1) et la table de vérité de la disjonction, que l'assertion obtenue a mêmes valeurs de vérité que l'assertion P; elle est donc équivalente à P.

(iii) Contraposer (règle (10)) les implications de (ii).

4 **Indications** . Pour l'implication, il suffit de rechercher les valeurs de vérité des assertions $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow R)$ et $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$ et de remarquer qu'elles ne sont pas toujours les mêmes. Pour l'équivalence, il faut vérifier que l'assertion $(((P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow R)))$ est une assertion vraie indépendamment des valeurs de vérité des assertions P, Q, R.

Réponses

	((P	$\Rightarrow$	Q)	$\Rightarrow$	R)	$\Leftrightarrow$	(P	$\Rightarrow$	(Q	$\Rightarrow$	R))
	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
	V	V	V	F	F	V	V	F	V	F	F
	V	F	F	V	V	V	V	V	F	V	V
	V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	F
	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V
	F	V	V	$\boxed{F}$	F	F	F	$\boxed{V}$	V	F	F
	F	V	F	V	V	V	F	V	F	V	V
	F	V	F	$\boxed{F}$	F	F	F	$\boxed{V}$	F	V	F
étape :	1	2	1	3	1	4	1	3	1	2	1

	((P	$\Leftrightarrow$	Q)	$\Leftrightarrow$	R)	$\Leftrightarrow$	(P	$\Leftrightarrow$	(Q	$\Leftrightarrow$	R))
	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
	V	V	V	F	F	V	V	F	V	F	F
	V	F	F	F	V	V	V	F	F	F	V
	V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	F
	F	F	V	F	V	V	F	F	V	V	V
	F	F	V	V	F	V	F	V	V	F	F
	F	V	F	V	V	V	F	V	F	F	V
	F	V	F	F	F	V	F	F	F	V	F
étape :	1	2	1	3	1	4	1	3	1	2	1

5 **Indications**. Noter S l'assertion $(Q \Rightarrow \neg R)$ et utiliser la règle logique (11) sur $(P \Rightarrow S)$, puis sur S elle-même.

Réponses. $\neg P \vee (\neg Q \vee \neg R)$ ou de façon équivalente, d'après la règle logique (8), $\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$.

$\boxed{6}$ **Indications** . P | Q est défini par ⌉(P ∧ Q) (*non* (P *et* Q)), et P || Q par ⌉(P ∨ Q) (*non* (P *ou* Q)).

Réponses .

P	Q	P w Q	P | Q	P || Q
V	V	F	F	F
V	F	V	V	F
F	V	V	V	F
F	F	F	V	V

$\boxed{7}$ **Réponses** . Le nombre de possibilités de placer 2 éléments V et F dans 2 (respectivement 4) cases correspond au nombre d'arrangements avec répétitions, donc est égal à $2^2 = 4$ (respectivement $2^4 = 16$); il s'agit encore du nombre d'applications d'un ensemble à 2 éléments dans un ensemble à 2 (respectivement 4) éléments. En conclusion, il y a 4 connecteurs unaires et 16 binaires.

Les 4 connecteurs unaires sont (avec leurs tables de vérité) :

	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$
P	⌉P	P	⌉P ∨ P	⌉P ∧ P
V	F	V	V	F
F	V	F	V	F

Les 16 connecteurs binaires sont (avec leurs tables de vérité) :

		$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$
P	**Q**	P ∨ ⌉P	**P ∨ Q**	**Q ⇒ P**	P	**P ⇒ Q**	Q	**P ⇔ Q**	**P ∧ Q**
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	F
ou		Q ∨ ⌉Q		⌉Q ∨ P		⌉P ∨Q			

P	Q	$\boxed{9}$ $\neg(P\wedge Q)$	$\boxed{10}$ $\neg(P\Leftrightarrow Q)$	$\boxed{11}$ $\neg Q$	$\boxed{12}$ $\neg(P\Rightarrow Q)$	$\boxed{13}$ $\neg P$	$\boxed{14}$ $\neg(Q\Rightarrow P)$	$\boxed{15}$ $\neg(P\vee Q)$	$\boxed{16}$ $P\wedge\neg P$
V	**V**	F	F	F	F	F	F	F	F
V	**F**	V	V	V	V	F	F	F	F
F	**V**	V	V	F	F	V	V	F	F
F	**F**	V	F	V	F	V	F	V	F
ou		$P\mid Q$ $P\Rightarrow\neg Q$	$P \mathrm{w} Q$		$P\wedge\neg Q$		$Q\wedge\neg P$	$P\,\|\,Q$	$Q\wedge\neg Q$

$\boxed{8}$ **Indications** . Pour vérifier (i) et (ii), on pourra utiliser soit les tables de vérité, soit l'équivalence $((P \,\|\, Q) \Leftrightarrow \neg(P \vee Q))$. Pour le reste de l'exercice, on exprimera $(\neg P \wedge \neg Q)$ (respectivement $(P \Rightarrow Q)$) en fonction des seuls connecteurs $\neg$ et $\vee$, puis on utilisera la définition de $\|$ (respectivement les assertions (i) et (ii)).

Réponses . $(\neg P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (P \,\|\, Q)$.

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\,((P \,\|\, P) \,\|\, Q) \,\|\, ((P \,\|\, P) \,\|\, Q)\,).$$

$\boxed{9}$ **Indications** . Utiliser le vocabulaire introduit dans l'exercice 6, les règles logiques et se reporter aux tableaux de l'exercice 7.

$\boxed{10}$ **Indications** . Utiliser la table de vérité de la conjonction.

Réponses . (i) et (ii) sont équivalentes, mais ne sont pas équivalentes à "(P et Q) est fausse" comme le montre la table :

P	Q	(i)	"(P et Q) est fausse"
V	**V**	F	F
V	**F**	$\boxed{F}$	$\boxed{V}$
F	**V**	$\boxed{F}$	$\boxed{V}$
F	**F**	V	V

Les trois assertions (iii), (iv) et "(P et Q) est vraie" sont équivalentes.

11 **Indications** . Utiliser la règle logique (4) et la table de vérité de la disjonction.

Réponses . Une application n'est pas bijective lorsqu'elle est non injective ou non surjective; il y a donc trois possibilités :

- l'application est injective et non surjective;
- l'application est surjective et non injective;
- l'application est non injective et non surjective.

12 **Indications** . Utiliser les règles logiques (3), (4), (5), (8), (12) et (14) de la page 14.

Réponses .

$\rceil(P \wedge \rceil Q) \iff (\rceil P \vee Q)$.
$\rceil(P \vee (Q \wedge R)) \iff (\rceil P \wedge (\rceil Q \vee \rceil R))$.
$\rceil(P \iff Q) \iff ((P \wedge \rceil Q) \vee (Q \wedge \rceil P))$.
$\rceil(P \Rightarrow \rceil Q) \iff (P \wedge Q)$.
$\rceil(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \iff (P \wedge Q \wedge \rceil R)$.

13 **Indications** . Poser : P : "T est rectangle"; Q : "T est isocèle" et R : "T possède deux angles à 45°".
La phrase s'écrit alors $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R))$.

Réponses . La règle logique (17) donne alors :
"si T est rectangle et isocèle, alors T possède deux angles à 45°".
En appliquant la règle logique (7), puis la règle (17), à la phrase précédente, on obtient : "si T est isocèle, alors si T est rectangle, T possède deux angles à 45°".

14 **Indications** . Considérer les fonctions assertionnelles, de la variable x de E, suivantes : $P(x) : (x \in A)$; $Q(x) : (x \in B)$ et $R(x) : (x \in C)$.
Pour tout x fixé dans E, remarquer que les règles logiques fournissent les équivalences suivantes :

- $\rceil(\rceil P(x)) \iff P(x)$;
- $\rceil(P(x) \wedge Q(x)) \iff (\rceil P(x) \vee \rceil Q(x))$;
- $(P(x) \vee \rceil P(x)) \iff (x \in E)$ (puisque les deux assertions ont la même valeur de vérité "V");

• $(P(x) \wedge (Q(x) \vee R(x))) \Leftrightarrow ((P(x) \wedge Q(x)) \vee (P(x) \wedge R(x)))$.

Déduire alors, des définitions de l'égalité de deux parties de E et des opérations sur les parties de E, les résultats souhaités.

15 **Indications** . Il suffit de prouver l'implication $(A = B \Rightarrow \overline{A} = \overline{B})$; en effet, l'implication réciproque est alors obtenue en remplaçant A par $\overline{A}$, et B par $\overline{B}$ (puisque $\overline{\overline{A}} = A$ et $\overline{\overline{B}} = B$ (voir page 55)).

Pour montrer l'assertion $(A = B \Rightarrow \overline{A} = \overline{B})$, on suppose $A = B$, et on montre l'égalité $\overline{A} = \overline{B}$ en remarquant que pour tout x de E, on a :

$x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$ par définition du complémentaire de A

$\Leftrightarrow x \notin B$ puisque $A = B$

$\Leftrightarrow x \in \overline{B}$ par définition du complémentaire de B.

16 **Indications** . Pour les questions 1 et 2, on utilisera les règles logiques (1) et (2); pour la question 3, on remarquera que $\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq x\} = \emptyset$.

Réponses . **1°** $A = \mathbb{R}$. **2°** $B = \emptyset$.

17 **Indications et réponses** .

1° • (m et n sont deux entiers pairs) est une condition suffisante pour qu'on ait (m + n est un entier pair), puisqu'on a, indépendamment de la parité de m et n, la proposition :

(m et n sont deux entiers pairs) $\Rightarrow$ (m + n est un entier pair).

Pour le prouver : supposer $m = 2m'$ et $n = 2n'$ et en déduire la parité de $m + n$.

• La condition est nécessaire si et seulement si les deux entiers sont de parités différentes ou s'ils sont tous les deux pairs (revoir la table de vérité de $(P \Rightarrow Q)$).

• La condition est donc nécessaire et suffisante si et seulement si m et n sont tous les deux pairs ou sont de parités différentes.

2° a) La condition $(x + \sqrt{2x} = 4)$ est une condition nécessaire est suffisante pour qu'on ait $(x = 2)$, puisque l'équivalence $(x = 2 \Leftrightarrow x + \sqrt{2x} = 4)$ est vraie.

Pour le prouver : montrer d'abord l'implication $(x = 2 \Rightarrow x + \sqrt{2x} = 4)$; pour cela, supposer $x = 2$ et vérifier que $x + \sqrt{2x} = 4$.

Montrer ensuite l'implication $(x + \sqrt{2x} = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2)$; pour cela supposer que x vérifie $x + \sqrt{2x} = 4$, c'est-à-dire vérifie $\sqrt{2x} = 4 - x$, et en déduire par élévation au carré que $x \in \{2, 8\}$ (ce qui montre qu'on a l'implication $(x + \sqrt{2x} = 4 \quad \Rightarrow \quad x \in \{2, 8\})$). Remarquer enfin que l'égalité $x + \sqrt{2x} = 4$ n'est pas vérifiée par $x = 8$.

b) La condition est nécessaire et suffisante, puisque la règle logique (11) montre que les deux assertions sont équivalentes.

c) La condition $(y > x)$ est une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait $(\max\{x, \frac{x+2y}{3}\} > x)$, puisqu'on a l'équivalence $(y > x \iff \max\{x, \frac{x+2y}{3}\} > x)$.

Pour le prouver : supposer tout d'abord que $y > x$ et vérifier qu'on a $\max\{x, \frac{x+2y}{3}\} = \frac{x+2y}{3} > x$.

Supposer ensuite que $\max\{x, \frac{x+2y}{3}\} > x$ et remarquer qu'alors $\frac{x+2y}{3} > x$; en déduire que $y > x$.

18 **Indications** . Supposer $|x - 1| \leq \alpha$.

Remarquer : $(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1) = (x - 1)(x - 1 + 2)$.

En déduire : $|x^2 - 1| = |x - 1|\,|(x - 1) + 2| \leq |x - 1|\,(|x - 1| + 2)$.

Utiliser l'hypothèse $|x - 1| \leq \alpha$, pour affirmer que $|x^2 - 1| \leq \alpha(\alpha + 2)$.

Enfin, utiliser l'hypothèse $\alpha \leq \frac{1}{3}$, pour vérifier que $|x^2 - 1| \leq \frac{7}{9} \leq 1$.

19 **Réponse** .Soit l' "assertion" $P(x)$: $\sqrt{x^{10}+x} = \sqrt{x^{10} - x + 2b}$.
L'ensemble des solutions cherchées est le domaine de validité $\mathcal{V}(P)$ de P, c'est-à-dire l'ensemble $\{x \in \mathcal{D}(P) \,/\, P(x)\}$ où $\mathcal{D}(P)$ est le domaine de définition de P. Soit x un réel.

• Supposons $x \in \mathcal{V}(P)$; alors $\sqrt{x^{10}+x} = \sqrt{x^{10} - x + 2b}$; donc par élévation au carré et simplifications élémentaires on obtient $x = b$. Ainsi :

(i) $\quad x \in \mathcal{V}(P) \Rightarrow x = b$.

• Réciproquement, si $x = b$ alors $b \in \mathcal{D}(P)$ ($x^{10} + x = x^{10} - x + 2b \geq 0$), et b vérifie l'équation $\sqrt{x^{10}+x} = \sqrt{x^{10} - x + 2b}$. Ainsi :

(ii) $\quad x = b \Rightarrow x \in \mathcal{V}(P)$.

• D'après (i) et (ii), $\mathcal{V}(P) = \{b\}$ et l'équation admet une et une seule solution, à savoir le nombre b.

20 **Réponse .** Appelons x la variable aujourd'hui .

Notons : $P(x)$: "aujourd'hui c'est lundi";

$Q(x)$: "demain c'est samedi.

L' "assertion" s'écrit alors $(P(x) \Rightarrow Q(x))$. Sa valeur de vérité dépend du jour où on pose la question. Si x = lundi , $P(x)$ est vraie et $Q(x)$ est fausse, donc $(P(x) \Rightarrow Q(x))$ est fausse; sinon $P(x)$ est fausse et $(P(x) \Rightarrow Q(x))$ est vraie.

La réponse est donc {dimanche, mardi, mercredi, jeudi, vendredi, samedi}.

21 **Réponses** . Notons $\mathcal{I}$ l'ensemble des nombres réels *intéressants*; on a : $x \in \mathcal{I} \Leftrightarrow (P_1(x) \wedge \ldots \wedge P_n(x))$.

(i) est une assertion vraie, car si $x \in \mathcal{I}$ on a $P_1(x)$ puisqu'on à la fois $P_1(x), \ldots, P_n(x)$.

(ii) est également une assertion vraie.

En effet l'assertion $(x \in \mathcal{I} \Leftrightarrow (P_1(x) \wedge \ldots \wedge P_n(x)))$ est équivalente à l'assertion $(x \notin \mathcal{I} \Leftrightarrow (\neg P_1(x) \vee \ldots \vee \neg P_n(x)))$. Ainsi, d'après l'associativité de la disjonction et sa table de vérité, si $x \notin \mathcal{I}$ alors l'une (au moins) des assertions $\neg P_1(x), \ldots, \neg P_n(x)$ est vérifiée; c'est-à-dire l'une (au moins) des assertions $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ n'est pas vérifiée.

FICHE N° 2

Prédicats ou "assertions"

EXERCICES

Il s'agit d'assimiler dans cette fiche le paragraphe 1.2 par un aller-retour entre le langage mathématique ordinaire, quasi-physique, et le véritable langage mathématique : le langage quantifié. Il ne s'agit pas de démontrer (sauf dans l'exercice 5), mais d'écrire, modéliser, comprendre et manipuler. Dans un premier temps, le lecteur peut se contenter de répondre à quelques questions des exercices 1, 2, 3 et 4.

Sauf mention contraire, les variables utilisées sont réelles.

1 L' "assertion" $(\forall\ b,\ a < b \Rightarrow \exists\ x,\ a < x < b)$ est une "assertion" de la variable a qui a une structure du type : $\forall\ b,\ P(a, b) \Rightarrow Q(a, b)$; elle contient deux variables liées b et x; ce qui permet, par exemple, le changement de variables suivant :

$$\forall\ t,\ a < t \Rightarrow \exists\ u,\ a < u < t.$$

L' "assertion" d'origine peut également s'écrire, en remplaçant les deux virgules par des parenthèses, sous la forme :

$$\forall\ b\ (a < b \Rightarrow \exists\ x\ (a < x < b)).$$

Rappelons que l' "assertion" initiale ne peut être confondue avec l' "assertion" $((\forall\ b,\ a < b) \Rightarrow (\exists\ x,\ a < x < b))$, c'est-à-dire $((\forall\ b\ (a < b)) \Rightarrow (\exists\ x\ (a < x < b)))$, puisque la portée d'un quantificateur est tout ce qui "suit" ce quantificateur.

Procéder de même pour chaque "assertion" suivante : étudier sa structure, envisager les changements de variables possibles et remplacer les virgules par des parenthèses.

(i) $\forall\ x,\ (x = 0 \text{ ou } y \neq 0) \Rightarrow \exists\ z,\ x = y\,z.$

(ii) $(x = 0 \text{ ou } y \neq 0) \Rightarrow (\exists\ z,\ x = y\,z).$

(iii) $(\forall x, \text{non } (x < y) \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } y < x))$ et $(\forall z, z \geq x)$.

(iv) $\forall (x, y), x + y = 4 \Rightarrow \exists z, (x < z \text{ et } z < y)$.

(v) $(\exists x \in E, \text{non } (x \mathcal{R} x))$ ou $(\exists (x, y) \in E^2, x \mathcal{R} y \text{ et non } (y \mathcal{R} x))$ ou $(\exists (x, y, z) \in E^3, x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z \text{ et non } (x \mathcal{R} z))$

($\mathcal{R}$ désigne ici une relation sur un ensemble E).

2 Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$, puis le domaine de validité $\mathcal{V}$ de chacune des "assertions" suivantes.

(i) $x + 2 = 4 + x$. **(ii)** $x^2 = 16$.

(iii) $z < 0$ ou $z > 0$. **(iv)** $z \leq 0$ et $z \geq 0$.

(v) $P(x) \vee \neg P(x)$. **(vi)** $P(x) \wedge \neg P(x)$.

(vii) $\exists y, -\sqrt{x} = y^2$. **(viii)** $\exists y, x y = 1$.

(ix) $x y > 4 \Rightarrow (x > 2 \text{ et } y > 2)$. **(x)** $\sqrt{x y} > 4 \Rightarrow (\sqrt{x} > 2 \text{ et } \sqrt{y} > 2)$.

Pour (ix) et (x), il est conseillé de réviser la table de vérité de l'implication.

3 Ecrire en langage "ordinaire" chacune des assertions quantifiées suivantes, puis écrire sa négation en langage quantifié.

(i) $\forall a \in \mathbb{N}^*, \exists (b, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, a = b c$.

(ii) $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^{*2}, \exists c \in \mathbb{N}, a = b c$.

(iii) $\exists a \in \mathbb{N}^*, \forall b \in \mathbb{N}^*, \exists c \in \mathbb{N}, a = b c$.

(iv) $\forall (x, y, a) \in \mathbb{R}^3, (x < a \text{ et } y < a) \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}, P(x, y, z)$;

avec $P(x, y, z) : (z < a \text{ et } x \neq z \text{ et } y \neq z)$.

(v) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{Q}, a < x < b$.

(vi) $\forall x, \exists y, \forall z, (x \leq y \Rightarrow z \leq x + 1)$.

On se permettra dans ce (vi) de conserver le nom des variables sous peine d'obtenir, en langage "ordinaire", une phrase difficilement lisible.

(vii) La suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie :

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow u_n \geq M.$$

Il est conseillé de se reporter aux pages 28 et 29.

(viii) La suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.

Précisons qu'une application f d'un ensemble E vers $\mathbb{R}$ est dite majorée si son image est majorée dans $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire si on a : $\exists\, M \in \mathbb{R}, \forall\, x \in E, f(x) \leq M$); on rappelle que si f est la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alors $E = \mathbb{N}$ et $f(n) = u_n$.

(ix) L'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et le réel x_0 vérifient :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \alpha > 0, \forall\, x \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

4 Ecrire en langage quantifié chacune des assertions suivantes.

(i) Il existe 3 réels tous distincts et tous strictement inférieurs à un réel donné arbitrairement.

(ii) On peut trouver au moins un rationnel compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

(iii) On peut trouver des rationnels compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

(iv) On peut trouver certains rationnels compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

(v) Il existe des rationnels compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

(vi) Il existe un rationnel compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

(vii) Il existe plusieurs rationnels compris entre $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

(viii) f est croissante ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application donnée).

(ix) f est strictement croissante ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application donnée).

(x) f n'est pas strictement croissante ($f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une application donnée).

(xi) f n'est ni injective, ni surjective ($f : E \to F$ est une application donnée).

(xii) f n'est pas bijective ($f : E \to F$ est une application donnée).

(xiii) $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ($(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique donnée).

Précisons qu'une suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite bornée si l'image de l'application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto u_n$ (c'est-à-dire l'ensemble $\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$) est bornée dans $\mathbb{R}$.

(xiv) Etant donné 2 entiers relatifs, on peut trouver un entier relatif qui ajouté au deuxième donne le premier.

(xv) Il n'existe pas d'entier naturel supérieur ou égal à tous les autres.

(xvi) $\mathcal{R}$ n'est pas une relation d'équivalence ($\mathcal{R}$ est une relation sur E donnée).

(xvii) On peut trouver dans l'ensemble ordonné E des éléments non comparables.

(xviii) Si la somme de 2 entiers naturels est nulle alors ces 2 entiers sont nuls.

(xix) On peut trouver, à une distance aussi petite qu'on le veut de L, un terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rang aussi grand qu'on le veut; ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique donnée et L un réel donné).

Précisons que le rang du terme u_n est l'entier n.

(xx) Les nombres u_n et u_m sont aussi proches qu'on le veut, pourvu que n et m soient assez grands; ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique donnée).

(xxi) Etant donné un réel quelconque, il existe plusieurs réels qui lui sont supérieurs strictement.

(xxii) Il existe des x et des y qui vérifient à la fois la propriété $(x < y)$ et la propriété (il n'est pas vrai que pour tout z, $x + z < y + z$).

(xxiii) L'image f(E) de la fonction numérique f définie sur E est incluse dans un certain intervalle ouvert centré à l'origine.

(xxiv) On peut associer, à un réel donné, un second nombre égal au carré du premier.

(xxv) On peut associer, à un réel donné, un second réel dont le carré est le premier.

(xxvi) On peut trouver un nombre égal au carré de tout nombre.

5 Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties d'un ensemble E (c'est-à-dire une application $i \mapsto A_i$ de I dans l'ensemble des parties de E); on considère les deux parties suivantes de E :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \,/\, \exists\, i \in I, x \in A_i\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \,/\, \forall\, i \in I, x \in A_i\}.$$

1° Compléter :

$\forall x \in E, (x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \ldots\ldots);$

$\forall x \in E, (x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \ldots\ldots).$

2° Montrer que pour tout x de E on a :

$$x \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}.$$

3° Que dire de $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$ et de $\bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$?

6 A toute assertion quantifiée du type $Q : (\xi\, x \in D, P(x))$ (ξ désignant soit "$\exists$", soit "$\forall$"), on associe l'assertion $\hat{Q} : (\xi\, x \in D, \neg P(x))$ ($\hat{Q}$ porte le nom d'assertion contraire). On se propose d'étudier le "carré" suivant, dit carré d'Aristote (Aristote, 384-322 av. J.-C.) :

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \hat{Q} \arrow[d, dash] \\ \neg Q \arrow[r, dash] & \neg \hat{Q} \end{tikzcd}$$

1° Déterminer les sommets du carré qui correspondent à l'assertion Q suivante, $Q : \exists x \in \mathbb{R}, \frac{2}{1 + x^2} \leq 1.$

2° Même question avec Q : Tous les hommes sont mortels.

3° Montrer que, de façon générale, $\neg Q$ est l'assertion contraire de $\neg \hat{Q}$.

7 Pour chaque ensemble A suivant, compléter :

$A = \{ \ldots\ldots\ldots / \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \}$.

Pour tout $\ldots \in \ldots$, on a :

$\ldots\ldots \in A \quad \Leftrightarrow \quad (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots),$

$\ldots\ldots \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$.

1° I_1 et I_2 étant deux intervalles réels donnés, A est l'ensemble des réels sommes d'un élément de I_1 et d'un élément de I_2.

2° A est l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, paires.

3° x_0 et y_0 étant deux réels fixés, A est l'ensemble des nombres réels x dont la différence avec x_0 est un multiple réel de y_0.

4° A est l'ensemble des nombres entiers naturels qui sont pairs ou qui ne sont pas multiples de 3.

FICHE N° 2

INDICATIONS ET RÉPONSES

1 Réponses

(i) est une "assertion" de la variable y du type : $\forall x, P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)$.

On peut encore l'écrire : $\forall u, (u = 0 \text{ ou } y \neq 0) \Rightarrow \exists v, u = y\, v$;

ou : $\forall x\, ((x = 0 \text{ ou } y \neq 0) \Rightarrow \exists z\, (x = y\, z))$.

(ii) est une "assertion" des deux variables x et y (c'est-à-dire de la variable (x, y)), du type : $P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)$.

On peut encore l'écrire : $(x = 0 \text{ ou } y \neq 0) \Rightarrow (\exists u, x = y\, u)$;

ou : $(x = 0 \text{ ou } y \neq 0) \Rightarrow \exists u\, (x = y\, u)$.

(iii) est une "assertion" des variables x et y (ou de la variable (x, y)) du type : $(\forall x, P(x, y) \Leftrightarrow Q(x, y))$ et $(\forall z, Q(z, x))$.

On peut encore l'écrire :

$$(\forall u, \text{non } (u < y) \Leftrightarrow (u = y \text{ ou } y < u)) \text{ et } (\forall v, v \geq x);$$

ou : $(\forall x\, (\text{non } (x < y) \Leftrightarrow (x = y \text{ ou } y < x)))$ et $(\forall z\, (z \geq x))$.

(iv) est une "assertion" constante, c'est-à-dire une véritable assertion, du type : $\forall (x, y), P(x, y) \Rightarrow Q(x, y)$.

On peut l'écrire, par exemple :

$$\forall (u, v), u + v = 4 \Rightarrow (\exists w, (u < w \text{ et } w < v));$$

ou : $\forall (x, y)\, (x + y = 4 \Rightarrow \exists z\, (x < z \text{ et } z < y))$.

(v) est du type $(P_1 \text{ ou } P_2 \text{ ou } P_3)$ où P_1, P_2 et P_3 sont trois assertions. On peut l'écrire :

$(\exists x_1 \in E, \text{non } (x_1 \mathcal{R} x_1))$ ou $(\exists (x_2, x_3) \in E^2, x_2 \mathcal{R} x_3$ et non $(x_3 \mathcal{R} x_2))$

ou $(\exists (x_4, x_5, x_6) \in E^3, x_4 \mathcal{R} x_5$ et $x_5 \mathcal{R} x_6$ et non $(x_4 \mathcal{R} x_6))$;

ou encore :

$(\exists\, x \in E\ (\text{non}\ (x\ \mathcal{R}\ x)))$ ou $(\exists\, (x, y) \in E^2\ (x\ \mathcal{R}\ y \text{ et non } (y\ \mathcal{R}\ x)))$ ou $(\exists\, (x, y, z) \in E^3\ (x\ \mathcal{R}\ y \text{ et } y\ \mathcal{R}\ z \text{ et non } (x\ \mathcal{R}\ z)))$.

2 **Réponses**

(i) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{V} = \emptyset$. **(ii)** $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{V} = \{-4, 4\}$.

(iii) $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{V} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **(iv)** $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{V} = \{0\}$.

(v) $\mathcal{D} = \mathcal{D}(P)$ et $\mathcal{V} = \mathcal{D}(P)$. **(vi)** $\mathcal{D} = \mathcal{D}(P)$ et $\mathcal{V} = \emptyset$.

(vii) $\mathcal{D} = [0, +\infty[$ et $\mathcal{V} = \{0\}$. **(viii)** $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ et $\mathcal{V} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(ix) $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{V} = \{(x, y) \,/\, x\,y \le 4\} \cup (]2, +\infty[)^2$; puisque le couple (x, y) appartient à $\mathcal{V}$ si l'assertion $(x\,y > 4)$ est fausse ou si les assertions $(x\,y > 4)$ et $(x > 2$ et $y > 2)$ sont vraies toutes les deux. Remarquer que :

$$\mathcal{V} = \{(x, y) \,/\, x > 0 \text{ et } y \le \frac{4}{x}\} \cup \{(0, y) \,/\, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, y) \,/\, x < 0 \text{ et } y \ge \frac{4}{x}\} \cup (]2, +\infty[)^2 .$$

(x) $\mathcal{D} = ([0, +\infty[)^2$ et $\mathcal{V} = \mathcal{D} \cap (\{(x, y) \,/\, x\,y \le 16\} \cup (]4, +\infty[)^2)$; remarquer que :

$$\mathcal{V} = \{(x, y) \,/\, x > 0 \text{ et } 0 \le y \le \frac{16}{x}\} \cup \{(0, y) \,/\, y \ge 0\} \cup (]4, +\infty[)^2 .$$

3 **Réponses**

(i) Tout entier naturel non nul s'écrit sous forme d'un produit de 2 entiers naturels dont l'un est non nul. Une autre solution est :

Tout entier naturel non nul est divisible par au moins un entier naturel non nul.

Sa négation est : $\exists\, a \in \mathbb{N}^*, \forall\, (b, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*, a \neq bc$.

(ii) Etant donné 2 entiers naturels non nuls; le premier peut s'écrire comme produit du second par un entier naturel convenable.
Une autre solution est :

Tout entier naturel non nul est divisible par tout entier naturel non nul.

Sa négation est : $\exists\, (a, b) \in \mathbb{N}^{*2}, \forall\, c \in \mathbb{N}, a \neq bc$.

(iii) Il existe un entier naturel non nul qui s'écrit sous forme d'un produit de 2 entiers naturels, dont l'un est non nul et choisi arbitrairement; ou encore, il existe un entier naturel non nul qui est divisible par tout entier non nul.

Sa négation est : $\forall a \in \mathbb{N}^*, \exists b \in \mathbb{N}^*, \forall c \in \mathbb{N}, a \neq bc.$

(iv) Etant donné 3 réels, dont les 2 premiers sont strictement inférieurs au troisième, on peut trouver un réel distinct des 2 premiers et strictement inférieur au troisième.

Sa négation est :

$\exists (x, y, a) \in \mathbb{R}^3, (x < a \text{ et } y < a) \text{ et } (\forall z \in \mathbb{R}, z \geq a \text{ ou } x = z \text{ ou } y = z).$

(v) Etant donné 2 réels distincts, on peut trouver un rationnel strictement compris entre eux.

Sa négation est : $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, a < b \text{ et } \forall x \in \mathbb{Q}, a \geq x \text{ ou } x \geq b.$

Rappelons que $(a < x < b)$ signifie $(a < x$ et $x < b)$.

(vi) A tout réel x, on peut associer un y tel que, pour tout z, on ait $z \leq x + 1$ dès que $x \leq y$.

Sa négation est : $\exists x, \forall y, \exists z, (x \leq y \text{ et } z > x + 1).$

(vii) La suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est telle que u_n est aussi grand qu'on le veut pour n assez grand.

Sa négation est : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie

$\exists M \in \mathbb{R}, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \geq N \text{ et } u_n < M.$

(viii) Il existe un réel supérieur ou égal à chaque terme de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$; c'est-à-dire la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée.

Sa négation est : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie

$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, u_n > M.$

(ix) L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et le réel x_0 sont tels que $f(x)$ est aussi proche qu'on le veut de $f(x_0)$ pourvu que x soit assez proche de x_0.

Sa négation est : L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et le réel x_0 vérifient

$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x - x_0| \leq \alpha \text{ et } |f(x) - f(x_0)| > \varepsilon.$

4 Réponses

(i) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x \neq y \text{ et } x \neq z \text{ et } y \neq z \text{ et } x < a \text{ et } y < a \text{ et } z < a).$

(ii) $\exists x \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}$ (c'est-à-dire $\mathbb{Q} \cap [\sqrt{2}, \sqrt{3}] \neq \emptyset$).

(iii), (iv), (v) et **(vi)** : même réponse qu'en (ii); mais l'énoncé de (ii) est plus précis que les énoncés (iii), (iv), (v) et (vi).

(vii) $\exists\,(x, y) \in \mathbb{Q}^2, x \neq y$ et $\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3}$ et $\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{3}$;

ou encore : $\exists\,(x, y) \in \mathbb{Q}^2, \sqrt{2} \leq x < y \leq \sqrt{3}$.

Rappelons qu'en mathématique, "plusieurs" signifie au "moins deux".

(viii) $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

(ix) $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

(x) $\exists\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y$ et $f(x) \geq f(y)$.

(xi) $(\exists\,(x, y) \in E^2, f(x) = f(y)$ et $x \neq y)$ et $(\exists\, z \in F, \forall\, x \in E, f(x) \neq z)$.

(xii) $(\exists\,(x, y) \in E^2, f(x) = f(y)$ et $x \neq y)$ ou $(\exists\, z \in F, \forall\, x \in E, f(x) \neq z)$.

(xiii) $\exists\,(m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall\, n \in \mathbb{N}, m \leq u_n \leq M$;

ou, mieux : $\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, n \in \mathbb{N}, -\varepsilon \leq u_n \leq \varepsilon$.

(xiv) $\forall\,(x, y) \in \mathbb{Z}^2, \exists\, z \in \mathbb{Z}, x = y + z$.

(xv) $\forall\, n \in \mathbb{N}, \exists\, N \in \mathbb{N}, n < N$.

(xvi) le (v) de l'exercice 1 précédent.

(xvii) $\exists\,(x, y) \in E^2$, non $(x \leq y)$ et non $(y \leq x)$.

Attention, dans un ensemble ordonné non totalement, il est faux de remplacer non $(x \leq y)$ par $(x > y)$.

(xviii) $\forall\,(n, m) \in \mathbb{N}^2, n + m = 0 \Rightarrow n = m = 0$.

(xix) $\forall\,(\varepsilon, N) \in \,]0, +\infty[\, \times \mathbb{N}, \exists\, n \in \mathbb{N}, n \geq N$ et $|\, u_n - L \,| \leq \varepsilon$.

(xx) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\,(y, z) \in \mathbb{R}^2, (y \neq z$ et $x < y$ et $x < z)$.

(xxi)

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\,(N, N') \in \mathbb{N}^2, \forall\,(n, m) \in \mathbb{N}^2, (n \geq N$ et $m \geq N') \Rightarrow |\, u_n - u_m \,| \leq \varepsilon$;

ou mieux :

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N}, \forall\,(n, m) \in \mathbb{N}^2, (n \geq N$ et $m \geq N) \Rightarrow |\, u_n - u_m| \leq \varepsilon$.

(xxii) $\exists\,(x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y$ et $(\exists\, z \in \mathbb{R}, x + z \geq y + z)$.

(xxiii) $\exists\, \varepsilon > 0, \forall\, x \in E, f(x) \in \,]-\varepsilon, \varepsilon[$.

(xxiv) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, y = x^2$.

(xxv) $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exists\, y \in \mathbb{R}, x = y^2$.

(xxvi) $\exists\, y \in \mathbb{R}, \forall\, x \in \mathbb{R}, y = x^2$.

5 **Réponses**

1° $\forall x \in E, (x \in \bigcup_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \exists i \in I, x \in A_i)$;

$\forall x \in E, (x \in \bigcap_{i \in I} A_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in A_i)$.

2° Soit x dans E; on a :

$x \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$	$\Leftrightarrow$ non $(x \in \bigcup_{i \in I} A_i)$	définition du complémentaire
	$\Leftrightarrow$ non $(\exists i \in I, x \in A_i)$	d'après 1°
	$\Leftrightarrow (\forall i \in I, x \notin A_i)$	négation
	$\Leftrightarrow (\forall i \in I, x \in \overline{A_i})$	définition du complémentaire
	$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$.	

3° D'après 2° et la définition de l'égalité de deux parties de E, les parties $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$ et $\bigcap_{i \in I} \overline{A_i}$ sont égales.

6 **Réponses**

1° $Q : \exists x \in \mathbb{R}, \frac{2}{1+x^2} \leq 1$; $\quad \hat{Q} : \exists x \in \mathbb{R}, \frac{2}{1+x^2} > 1$;

$\neg Q : \forall x \in \mathbb{R}, \frac{2}{1+x^2} > 1$; $\quad \neg\hat{Q} : \forall x \in \mathbb{R}, \frac{2}{1+x^2} \leq 1$.

2° Q est l'assertion $(\forall x \in D, P(x))$ où D est l'ensemble des hommes vivants et $P(x)$ l' "assertion" (x est mortel); On a alors :

Q : tous les hommes sont mortels;

$\hat{Q}$: tous les hommes sont immortels;

$\neg Q$: il existe des hommes immortels;

$\neg\hat{Q}$: il existe des hommes mortels.

3° En prenant, par exemple, "$\forall$" en place de "ξ", on obtient :

$Q : \forall x \in D, P(x)$; $\quad \hat{Q} : \forall x \in D, \neg P(x)$;

$\neg Q : \exists x \in D, \neg P(x)$; $\quad \neg\hat{Q} : \exists x \in D, P(x)$.

Ainsi, $\rceil Q$ est bien l'assertion contraire de $\rceil \hat{Q}$; on obtiendrait le même résultat en remplaçant "ξ" par "∃".

7 **Réponses** .

1° $A = \{x \in \mathbb{R} / \exists (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2,\ x = x_1 + x_2\}$,

ou encore :

$$A = \{x_1 + x_2 \ / \ (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2\}$$

(car $A = f(I_1 \times I_2)$ où $f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ (voir page 73)).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$x \in A \iff (\exists (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2,\ x = x_1 + x_2)$,

$x \in \overline{A} \iff (\forall (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2\ x \neq x_1 + x_2)$.

2° $A = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x)\}$.

Pour tout $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on a :

$f \in A \iff (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(-x))$,

$f \in \overline{A} \iff (\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq f(-x))$.

3° $A = \{x \in \mathbb{R} / \exists \lambda \in \mathbb{R},\ x - x_0 = \lambda y_0\}$,

ou encore :

$$A = \{x_0 + \lambda y_0 \ / \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

(car $A = f(\mathbb{R})$ où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto x_0 + \lambda y_0$).

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$x \in A \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R},\ x - x_0 = \lambda y_0)$,

$x \in \overline{A} \iff (\forall \lambda \in \mathbb{R},\ x - x_0 \neq \lambda y_0)$.

4° $A = \{n \in \mathbb{N} / (\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k) \text{ ou } (\forall q \in \mathbb{N},\ n \neq 3q)\}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$n \in A \iff ((\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k) \text{ ou } (\forall q \in \mathbb{N},\ n \neq 3q))$,

$n \in \overline{A} \iff ((\forall k \in \mathbb{N},\ n \neq 2k) \text{ et } (\exists q \in \mathbb{N},\ n = 3q))$

ou encore :

$n \in \overline{A} \iff ((\exists k \in \mathbb{N},\ n = 2k + 1) \text{ et } (\exists q \in \mathbb{N},\ n = 3q))$.

FICHE N° 3

Raisonnements élémentaires

EXERCICES

Cette fiche illustre les paragraphes 2.1 et 2.2 .

Dans les exercices 1 à 7, E et F désignent deux ensembles quelconques et f désigne une application de E vers F.

1 Soient A une partie de E et B une partie de F. Montrer que $A \subset \overset{-1}{f}(f(A))$ et $f(\overset{-1}{f}(B)) \subset B$.

2 Soient A et B deux parties de E; démontrer que :

$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$.

3 Soient A' et B' deux parties de F; démontrer que :

$A' \subset B' \Rightarrow \overset{-1}{f}(A') \subset \overset{-1}{f}(B')$.

4 Soient A et B tels que $A \subset E$ et $B \subset E$; prouver que :

$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

5 Sous les hypothèses de l'exercice précédent, montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$; puis déterminer une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et deux intervalles A et B de $\mathbb{R}$ tels qu'on ait :
$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.

6 Soient A et B deux parties de E. Dans l'exercice précédent, on a vu que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$; montrer, si f est de plus injective, que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

7 Soit A' une partie de F. D'après l'exercice 1, $f(\overset{-1}{f}(A')) \subset A'$; montrer, si f est surjective, qu'alors $f(\overset{-1}{f}(A')) = A'$.

8 E et F sont deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Soient A et B deux parties de E, f et g deux applications de E vers F. Peut-on toujours trouver une application h de E vers F telle que $h_{|A} = f_{|A}$ et $h_{|B} = g_{|B}$? ($h_{|A}$ désigne, de façon générale, la restriction de l'application h à la partie A).

On analysera le problème en étudiant le cas $A \cap B \neq \emptyset$.

9 Soit E un ensemble muni d'une loi interne (d'une "opération"), c'est-à-dire d'une application $\perp : E \times E \to E, (a, b) \mapsto a \perp b$.

Précisons que

- $\perp$ est dite commutative si : $\forall (a, b) \in E^2, a \perp b = b \perp a$.
- $\perp$ est dite associative si : $\forall (a, b, c) \in E^3, a \perp (b \perp c) = (a \perp b) \perp c$.
- $e \in E$ est dit élément neutre pour $\perp$ si : $\forall a \in E,\ a \perp e = e \perp a = a$.
- si e est élément neutre pour $\perp$, $a \in E$ est dit symétrisable pour $\perp$ si : $\exists a' \in E, a \perp a' = a' \perp a = e$.

1° E est ici l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels et $\perp$ est la loi interne définie par : $a \perp b = a + b + ab$.

Cette loi est-elle commutative, associative ? possède-t-elle un élément neutre ? Tout rationnel est-il symétrisable pour $\perp$?

2° E est maintenant l'intervalle $]0, +\infty[$ de $\mathbb{R}$, et $\perp$ est la loi interne définie par : $a \perp b = \dfrac{ab}{a+b}$.

Montrer que $\perp$ est associative.

3° E est toujours l'ensemble $]0, +\infty[$ et $\perp$ est la loi interne définie par : $a \perp b = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

Montrer, en donnant un contre-exemple, que $\perp$ n'est pas associative.

10 Montrer que l'assertion suivante est fausse :

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, x est un multiple de 3 ou x^3 est un multiple de 3.

11 Soit $x \in \mathbb{Z}$. Démontrer la proposition :

x est impair $\Rightarrow$ $x(x+2)$ est impair.

12 Montrer que l'assertion $(\forall x \in \mathbb{R}, x \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 4)$ est fausse.

13 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Z} \\ x \text{ sinon} \end{cases}$

Montrer qu'il existe une et une seule application g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \cdot g(x) = 1$.

Le lecteur utilisera une méthode analogue à celle employée dans l'exemple 2 de la page 43.

14 On pose $u_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

Montrer que $\operatorname{Sup}\{u_n \ / \ n \geq 1\} = \dfrac{3}{2}$.

On utilisera le fait que, pour toute suite numérique $(u_n)_{n \in I}$ et tout réel α, on a l'équivalence suivante :

$\alpha = \sup\{u_n \ / \ n \in I\} \Leftrightarrow ((\forall n \in I, u_n \leq \alpha)$ *et* $(\forall \varepsilon > 0, \exists\, n \in I, \alpha - \varepsilon < u_n))$ *;*
Le lecteur vérifiera que l'assertion $(\forall \varepsilon > 0, \exists\, n \in I, \alpha - \varepsilon < u_n)$ *signifie que la suite numérique* (u_n) *n'a pas de majorant strictement plus petit que* α *(ce qui n'entraîne pas que* α *soit un majorant de cette suite !).*

15 Déterminer la valeur de vérité de l'assertion :

$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, ($m$ et n sont pairs $\Leftrightarrow$ $m + n$ est pair).

16 On considère les assertions :

(i) $\forall x \in E, (P(x) \Rightarrow Q(x))$,

(ii) $(\forall x \in E, P(x)) \Rightarrow (\forall x \in E, Q(x))$

dans lesquelles P et Q sont deux "assertions" données.

Etudier la valeur de vérité des assertions ((i) $\Rightarrow$ (ii)) et ((ii) $\Rightarrow$ (i)).

17 $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite numérique, on considère les assertions :

(i) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |u_n - 1| \leq \varepsilon$;

(ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - 1| < \varepsilon$.

Montrer que (i) implique (ii) (le lecteur pourra, s'il le désire, vérifier que (i) et (ii) sont même équivalentes).

FICHE N° 3

INDICATIONS ET RÉPONSES

En dépit d'une certaine lourdeur, dans cette fiche et les suivantes, il nous a semblé important d'insister sur la structure de la solution, en particulier sur la conclusion et les conclusions partielles.

1 Indications

Montrer que $A \subset \overset{-1}{f}(f(A))$, en vérifiant l'assertion $(\forall x \in A, x \in \overset{-1}{f}(f(A)))$:

— Supposer $x \in A$.

— Montrer que $x \in \overset{-1}{f}(f(A))$ en remarquant que $f(x) \in f(A)$ (puisque $x \in A$).

Conclure que $A \subset \overset{-1}{f}(f(A))$.

Montrer que $f(\overset{-1}{f}(B)) \subset B$, en vérifiant l'assertion $(\forall y \in f(\overset{-1}{f}(B)), y \in B)$:

— Supposer $y \in f(\overset{-1}{f}(B))$ (y s'écrit sous la forme $y = f(x)$, avec $x \in \overset{-1}{f}(B)$).

— Montrer que $y \in B$ en remarquant que $f(x) \in B$.

Conclure que $f(\overset{-1}{f}(B)) \subset B$.

2 Indications

Montrer $(A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B))$:

— Supposer $A \subset B$.

— Montrer que $f(A) \subset f(B)$, en vérifiant l'assertion $(\forall y \in f(A), y \in f(B))$:

- Supposer y dans $f(A)$ (ainsi $y = f(a)$ pour un certain $a \in A$).
- Montrer que $y \in f(B)$ en remarquant que $f(a) \in f(B)$ puisque $a \in A \subset B$.

— Conclure que $f(A) \subset f(B)$.

Conclure que $(A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B))$.

3 **Indications**

Montrer $(A' \subset B' \Rightarrow \overset{-1}{f}(A') \subset \overset{-1}{f}(B'))$:

— Supposer $A' \subset B'$.

— Montrer que $\overset{-1}{f}(A') \subset \overset{-1}{f}(B')$ en vérifiant l'assertion $(\forall x \in \overset{-1}{f}(A'), x \in \overset{-1}{f}(B'))$:

- Supposer x dans $\overset{-1}{f}(A')$ (ainsi $f(x) \in A'$).
- Montrer que $x \in \overset{-1}{f}(B')$ (c'est-à-dire que $f(x) \in f(B')$) en remarquant que $f(x) \in A' \subset B'$.

— Conclure que $\overset{-1}{f}(A') \subset \overset{-1}{f}(B')$.

Conclure que $(A' \subset B' \Rightarrow \overset{-1}{f}(A') \subset \overset{-1}{f}(B'))$.

4 **Indications**

Montrer $(f(A \cup B) = f(A) \cup f(B))$ en vérifiant les assertions $(f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B))$ et $(f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B))$:

— Montrer que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ en prouvant l'assertion $(\forall y \in f(A \cup B), y \in f(A) \cup f(B))$:

- Supposer y dans $f(A \cup B)$ (ainsi $y = f(x)$ avec $x \in A$ ou $x \in B$).
- Montrer que $y \in f(A) \cup f(B)$ (c'est-à-dire que $y \in f(A)$ ou que $y \in f(B)$), en remarquant, par exemple, que si $x \in A$ alors $y = f(x) \in f(A)$.

— Conclure que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.

— Montrer que $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$ en prouvant l'assertion $(\forall y \in f(A) \cup f(B), y \in f(A \cup B))$:

- Supposer y dans $f(A) \cup f(B)$ (ainsi $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$).
- Montrer que $y \in f(A \cup B)$ en remarquant, par exemple, que si $y \in f(A)$, alors $y = f(a)$ pour un certain $a \in A \subset A \cup B$.

— Conclure que $f(A \cup B) \supset f(A) \cup f(B)$.

Conclure que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

5 **Indications**

Montrer $(f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B))$ en vérifiant l'assertion $(\forall y \in f(A \cap B), y \in f(A) \cap f(B))$:

— Supposer y dans $f(A \cap B)$ (ainsi $y = f(x)$ avec $x \in A$ et $x \in B$).

— Montrer que $y \in f(A) \cap f(B)$ (c'est-à-dire que $y \in f(A)$ et que $y \in f(B)$), en remarquant, que $y = f(x) \in f(A)$, et $y = f(x) \in f(B)$.

Conclure que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Pour la suite de l'exercice, le problème posé est la recherche d'un contre-exemple de l'assertion :

$\forall (f, A, B) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathcal{J} \times \mathcal{J},\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$,

où $\mathcal{J}$ désigne l'ensemble des intervalles réels; pour cela il faut exhiber une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et deux intervalles A et B de $\mathbb{R}$ vérifiant $f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B)$; c'est-à-dire tels que $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$ puisqu'on a toujours $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

Analyse. Essayer d'obtenir une situation simple dans laquelle $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$ (par exemple, $f(A \cap B) = \emptyset$ et $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$), en utilisant des objets f, A, B simples. Remarquer :

· $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ peut s'obtenir en prenant des intervalles disjoints.

· si f est la fonction (constante) nulle et si A et B sont des intervalles (non vides), on a $f(A) \cap f(B) = \{0\} \neq \emptyset$.

D'où l'idée de considérer, par exemple,

$f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{cases}$, $A =]-1, 0]$ et $B =]0, 1]$.

Synthèse

— Poser $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 0 \end{cases}$, $A =]-1, 0]$ et $B =]0, 1]$

(vérifier que $(f, A, B) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathcal{J} \times \mathcal{J}$).

— Montrer (c'est obligatoire) que f, A et B répondent à la question.

Précisons encore que dans une solution rédigée, l'analyse précédente n'est pas obligatoire.

6 Indications

Montrer, cela suffit d'après l'exercice précédent, l'assertion

(f injective $\Rightarrow$ $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$) :

— Supposer f injective.

— Montrer ($f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$) en vérifiant l'assertion ($\forall y \in f(A) \cap f(B)$, $y \in f(A \cap B)$) :

- Supposer y dans $f(A) \cap f(B)$ (ainsi $y = f(a) = f(b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$).
- Montrer que $y \in f(A \cap B)$ en remarquant que l'injectivité de f entraîne l'égalité $a = b$, donc que $y = f(a)$ avec $a \in A \cap B$.

— Conclure que $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.

Conclure que (f injective $\Rightarrow$ $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$).

Le lecteur évitera, lors de la rédaction, d'écrire la définition de l'injectivité de f : lorsqu'un concept est compris, il doit être manipulé directement (de façon dynamique et non scolaire).

7 Indications

Montrer (f surjective $\Rightarrow$ $f(\overset{-1}{f}(A')) = A'$) :

— Supposer f surjective.

— Montrer, cela suffit d'après l'exercice 1, que $A' \subset f(\overset{-1}{f}(A'))$ donc que ($\forall y \in A'$, $y \in f(\overset{-1}{f}(A'))$) :

- Supposer y dans A'.
- Montrer que $y \in f(\overset{-1}{f}(A'))$, en remarquant que la surjectivité de f et $y \in A' \subset F$ entraînent l'existence d'un certain x de E tel que $y = f(x)$; d'où $x \in \overset{-1}{f}(A')$ et donc $f(x) \in f(\overset{-1}{f}(A'))$.

— Conclure que $A' \subset f(\overset{-1}{f}(A'))$, donc que $A' = f(\overset{-1}{f}(A'))$.

Conclure que (f surjective $\Rightarrow$ $f(\overset{-1}{f}(A')) = A'$).

Le lecteur évitera, lors de la rédaction, d'écrire la définition de la surjectivité de f : lorsqu'un concept est compris, il doit être manipulé directement (de façon dynamique et non scolaire).

8 **Réponse**

Notons $\mathscr{E} = (\mathscr{P}(\mathbb{R})\times\mathscr{P}(\mathbb{R})\times F^E\times F^E\times\mathscr{P}(E)\times\mathscr{P}(E))$, et P l' "assertion" de la variable $\theta = (E, F, f, g, A, B)$, définie sur $\mathscr{E}$ par

$P(\theta)$: $\exists\, h \in F^E,\ h_{|A} = f_{|A}$ et $h_{|B} = g_{|B}$.

La question posée est la suivante : l'assertion

(1) $\forall\, \theta \in \mathscr{E},\ P(\theta)$

est-elle vraie ?

Première analyse. Si θ est un élément fixé de $\mathscr{E}$ vérifiant $P(\theta)$, il existe h de E dans F vérifiant $h_{|A} = f_{|A}$ et $h_{|B} = g_{|B}$; ainsi, pour tout x de $A \cap B$, on a nécessairement $f(x) = g(x)$. Or ce dernier résultat peut être mis en défaut si $f(x) \neq g(x)$ pour au moins un x de $A \cap B$; ce qui nécessite $A \cap B \neq \emptyset$ et que F contienne au moins 2 éléments.

A la fin de cette analyse, on a peut être une idée de contre-exemple (et donc l'intuition que l'assertion (1) est fausse); sinon, on peut affiner l'analyse précédente.

Deuxième analyse. On remarque que si θ est un élément de $\mathscr{E}$ qui vérifie $P(\theta)$, alors θ vérifie également, $Q(\theta)$: $\forall\, x \in A \cap B,\ f(x) = g(x)$ (le lecteur pourra vérifier que $(\forall\, \theta \in \mathscr{E},\ P(\theta) \Rightarrow Q(\theta))$). Or, si $\theta \in \mathscr{E}$ vérifie non $Q(\theta)$, alors θ est un contre-exemple de (1) (puisque (non $Q(\theta) \Rightarrow$ non $P(\theta)$)). Il suffit donc de construire un élément θ de $\mathscr{E}$ tel qu'on ait non $Q(\theta)$, c'est-à-dire vérifiant : $\exists\, x \in A \cap B,\ f(x) \neq g(x)$.

Synthèse. La réponse à la question posée est "non"; pour le montrer :

— Poser : $\theta = (E, F, f, g, A, B)$ avec

$$E = \{0\}\ ;\ F = \{1, 2\}\ ;\ f : \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto 1 \end{cases}\ ;\ g : \begin{cases} E \to F \\ x \mapsto 2 \end{cases}\ ;\ A = B = E\ ;$$

remarquer que $\theta \in \mathscr{E}$.

— Vérifier que θ est bien un contre-exemple de (1).

Conclure qu'on ne peut pas toujours trouver une application h de E vers F telle que $h_{|A} = f_{|A}$ et $h_{|B} = g_{|B}$.

Remarquons qu'on a exhibé dans $\mathscr{E}$ un objet "simple" vérifiant une "situation" plus simple que (non $P(\theta)$); à savoir, la "situation" (non $Q(\theta)$) telle que ($\forall\, \theta \in \mathscr{E}$, non $Q(\theta) \Rightarrow$ non $P(\theta)$).

9 Indications et réponses

1° a) Montrer que $\perp$ est commutative; pour cela, vérifier l'assertion $(\forall (a, b) \in \mathbb{Q}^2, a \perp b = b \perp a)$:

— Prendre a et b dans $\mathbb{Q}$.

— Montrer que $a \perp b = b \perp a$, en remarquant, par commutativité de l'addition et de la multiplication des rationnels, que
$a + b + a\,b = b + a + b\,a$.

Conclure à la commutativité de $\perp$.

b) Montrer que $\perp$ est associative; pour cela vérifier qu'on a l'assertion $(\forall (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3, a \perp (b \perp c) = (a \perp b) \perp c)$:

— Prendre a, b et c dans $\mathbb{Q}$.

— Montrer que $a \perp (b \perp c) = (a \perp b) \perp c$, en remarquant que :

$$\begin{aligned} a \perp (b \perp c) &= a + (b + c + b\,c) + a\,(b + c + b\,c) \\ &= a + b + c + b\,c + a\,b + a\,c + a\,b\,c, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (a \perp b) \perp c) &= (a + b + a\,b) + c + (a + b + a\,b)\,c \\ &= a + b + ab + c + a\,c + b\,c + a\,b\,c. \end{aligned}$$

Conclure à l'associativité de $\perp$.

c) $\perp$ possède un élément neutre si on a l'assertion :
$(\exists e \in \mathbb{Q}, \forall a \in \mathbb{Q}, a \perp e = e \perp a = a)$.

Analyse. Remarquer que si $\perp$ possède un élément neutre e, alors pour tout rationnel a, on a $e \perp a = a$, c'est-à-dire avec la définition de $\perp$, $e\,(1 + a) = 0$; le cas particulier $a = 0$, donne $e = 0$. Ainsi, si e existe, e est nécessairement nul.

Synthèse. Montrer que le rationnel 0 est élément neutre pour $\perp$; pour cela vérifier l'assertion $(\forall a \in \mathbb{Q}, a \perp 0 = a$ et $0 \perp a = a)$:

— Prendre a dans $\mathbb{Q}$.

— Montrer que $a \perp 0 = a$, en remarquant que
$a \perp 0 = a + 0 + a\,0 = a$ (par commutativité de $\perp$ on aura $0 \perp a = a$).

Conclure que 0 est élément neutre pour $\perp$.

Précisons que, dans une solution rédigée, l'analyse précédente n'est pas obligatoire.

d) Tout rationnel est-il symétrisable pour $\perp$, c'est-à-dire a-t-on l'assertion $(\forall a \in \mathbb{Q}, \exists a' \in \mathbb{Q}, a \perp a' = a' \perp a = 0)$?

Analyse. Remarquer que si le rationnel a est symétrisable pour la loi $\perp$, alors il existe un rationnel a' tel que $a \perp a' = 0$, c'est-à-dire tel que $a + a' + a\,a' = 0$; ce qui entraîne $a'(1 + a) = -a$. Comme pour $a = -1$ on obtient $a' \times 0 = -1$, on a nécessairement $a \neq -1$.

Synthèse. Montrer que la réponse est "non"; c'est-à-dire montrer $(\exists a \in \mathbb{Q}, \forall a' \in \mathbb{Q}, a \perp a' \neq 0$ ou $a' \perp a \neq 0)$.

— Poser $a = -1$ (remarquer $a \in \mathbb{Q}$).

— Prendre un rationnel a'.

— Montrer (par exemple) que $(-1 \perp a') \neq 0$, en remarquant que :

$(-1 \perp a') = -1 + a' - a' = -1 \neq 0$.

Conclure que -1 n'est pas symétrisable pour $\perp$.

Conclure que les rationnels ne sont pas tous symétrisables pour $\perp$.

Précisons que, dans une solution rédigée, l'analyse précédente n'est pas obligatoire.

De plus, le lecteur pourra vérifier que tout rationnel a différent de -1 est symétrisable, de symétrique $a' = -\dfrac{a}{1+a}$.

2° Montrer que $\perp$ est associative; pour cela vérifier l'assertion $(\forall (a, b, c) \in]0, +\infty[^3, a \perp (b \perp c) = (a \perp b) \perp c)$:

— Prendre a, b et c trois réels strictement positifs.

— Montrer que $a \perp (b \perp c) = (a \perp b) \perp c)$, en remarquant que :

$$a \perp (b \perp c) = \frac{a \cdot \left(\frac{bc}{b+c}\right)}{a + \left(\frac{bc}{b+c}\right)} = \frac{abc}{ab+ac+bc}$$

$$\text{et } (a \perp b) \perp c) = \frac{\left(\frac{ab}{a+b}\right) \cdot c}{\left(\frac{ab}{a+b}\right) + c} = \frac{abc}{ab+ac+bc}$$

Conclure à l'associativité de $\perp$.

3° Montrer que $\perp$ n'est pas associative en donnant un contre-exemple de l'assertion $(\forall (a, b, c) \in]0, +\infty[^3, a \perp (b \perp c) = (a \perp b) \perp c)$;

pour cela, déterminer un triplet (a, b, c) de réels strictement positifs tels que $a \perp (b \perp c) \neq (a \perp b) \perp c)$:

Analyse. Remarquer qu'on a les égalités

$$a \perp (b \perp c) = \frac{1}{a} + \frac{1}{(\frac{1}{b} + \frac{1}{c})} = \frac{c + b + a\,b\,c}{a\,(c + b)}$$

et $$(a \perp b) \perp c) = \frac{1}{(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})} + \frac{1}{c} = \frac{a\,b\,c + b + a}{(b + a)\,c}.$$

Ainsi, si a, b et c strictement positifs vérifient $a \perp (b \perp c) \neq (a \perp b) \perp c$, on a nécessairement $a \neq c$.

Synthèse.

— Poser, par exemple (rester simple), $a = b = 1$ et $c = 2$ (remarquer que a, b et c sont bien strictement positifs).

— Vérifier que $a \perp (b \perp c) = \frac{5}{3} \neq (a \perp b) \perp c = 1$.

Conclure à la non-associativité de $\perp$.

Précisons que dans une solution rédigée, l'analyse précédente n'est pas obligatoire.

10 **Indications**

Montrer que l'assertion ($\forall x \in \mathbb{Z}$, x multiple de 3 ou x^3 multiple de 3) est fausse en montrant qu'on a la proposition :
($\exists x \in \mathbb{Z}$, x non multiple de 3 et x^3 non multiple de 3).

Il suffit, pour cela, de considérer (simplement) l'entier relatif -1.

11 **Indications**

Montrer (x impair $\Rightarrow$ $x\,(x + 2)$ impair) :

— Supposer x impair ($x = 2\,p + 1$ avec $p \in \mathbb{Z}$).

— Montrer que $x\,(x + 2)$ est impair, en remarquant qu'on a :
$x\,(x + 2) = 4\,p^2 + 8\,p + 3$, donc $x\,(x + 2) = 2\,k + 1$,
avec $k = 2\,p^2 + 4\,p + 1 \in \mathbb{Z}$.

Conclure que (x impair $\Rightarrow$ $x\,(x + 2)$ impair).

12 **Indications**

Pour montrer que l'assertion $(\forall\, x \in \mathbb{R},\, x \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 4)$ est fausse, vérifier que l'assertion $(\exists\, x \in \mathbb{R},\, x \leq 2$ et $x^2 > 4)$ est vraie en exhibant un réel x satisfaisant à $x \leq 2$ et à $x^2 > 4$.

Pour cela, prendre, par exemple, le réel $x = -3$.

-3 est un contre-exemple de l'assertion $(\forall\, x \in \mathbb{R},\, x \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 4)$.

13 **Indications**

Montrer l'assertion $(\exists!\, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\, \forall\, x \in \mathbb{R},\, f(x) \cdot g(x) = 1)$ (l'analyse du problème va résoudre le problème de l'unicité) :

— Montrer l'unicité de g (analyse qu'on incorpore à la rédaction) :

- Montrer que si g existe, alors on a :

$$1 = f(x) \cdot g(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ x \cdot g(x) & \text{si } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z} \end{cases}$$

- Conclure que si g existe, alors nécessairement g est définie par

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z} \end{cases}$$

(remarquer que g est bien définie sur $\mathbb{R}$).

— Conclure que si g existe alors g est unique.

— Montrer l'existence de g :

- Poser $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\; x \mapsto g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ \dfrac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$

- Vérifier que $(\forall\, x \in \mathbb{R},\, f(x) \cdot g(x) = 1)$ (ce qui est immédiat).

— Conclure à l'existence de g.

Conclure à l'existence de l'application g et à son unicité.

14 **Indications**

Vérifier que $\operatorname{Sup}\{u_n \;/\; n \geq 1\} = \dfrac{3}{2}$, en montrant qu'on a les propositions $(\forall n \geq 1,\; u_n \leq \dfrac{3}{2})$ et $(\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, n_0 \geq 1,\, \dfrac{3}{2} - \varepsilon < u_{n_0})$:

— Montrer $(\forall n \geq 1, u_n \leq \frac{3}{2})$:

- Prendre $n \geq 1$.
- Vérifier que $u_n \leq \frac{3}{2}$ en remarquant que si $n = 1$, $u_n = 0 \leq \frac{3}{2}$ et

  que, si $n \geq 2$, on a :

  $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \leq 1 + \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| \leq 1 + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{2}$.

— Conclure que $(\forall n \geq 1, u_n \leq \frac{3}{2})$.

— Montrer $(\forall \varepsilon > 0, \exists n \geq 1, \frac{3}{2} - \varepsilon < u_n)$:

- Prendre $\varepsilon > 0$.
- Montrer $(\exists n \geq 1, \frac{3}{2} - \varepsilon < u_n)$:

  - *Analyse.* Remarquer qu'on a

    $(\forall n \geq 1, \frac{3}{2} - \varepsilon < u_n \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{n} < \varepsilon)$.

    D'où l'idée de regarder s'il n'existe pas $n \geq 1$ tel que :

    $\frac{1}{2} - \frac{(-1)^n}{n} \leq 0$; on peut voir que $n = 2$ convient.

    Synthèse

    Poser $n = 2$.

  - Vérifier que $\frac{3}{2} - \varepsilon < u_n$.

- Conclure que $(\exists n \geq 1, \frac{3}{2} - \varepsilon < u_n)$.

— Conclure que $(\forall \varepsilon > 0, \exists n \geq 1, \frac{3}{2} - \varepsilon < u_n)$.

Conclure que $\text{Sup}\{u_n \,/\, n \geq 1\} = \frac{3}{2}$.

15 Réponse et indications

Notons P : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, (m et n pairs $\Leftrightarrow$ m + n pair),

alors on a (voir, par exemple, l'exercice 12 de la fiche n°1) :

non P : $\exists (m, n) \in \mathbb{N}^2$, (((m et n pairs) et (m + n impair)) ou ((m ou n impair) et (m + n pair))).

La réponse à la question est "P est fausse".

Prouver que P est fausse en montrant que non P est vraie :
vérifier, par exemple, que pour $m = n = 1$ on a ((m ou n impair) et (m + n pair)).

Le lecteur fera bien la différence entre cet exercice et l'exercice 17 de la fiche n°1 .

16 Réponses et Indications

L'assertion ((i) $\Rightarrow$ (ii)) est vraie, indépendamment des "assertions" P et Q.

Montrer que ((i) $\Rightarrow$ (ii)) est vraie :

— Supposer (i), c'est-à-dire que ($\forall$ x $\in$ E, (P(x) $\Rightarrow$ Q(x))).

— Montrer qu'on a (ii), en vérifiant l'assertion

(($\forall$ x $\in$ E, P(x)) $\Rightarrow$ ($\forall$ x $\in$ E, Q(x))).

- Supposer l'assertion :

(*) ($\forall$ x $\in$ E, P(x)).

- Montrer ($\forall$ x $\in$ E, Q(x)).

  - Supposer x dans E.

  - Montrer qu'on a Q(x), en remarquant que pour l'élément x fixé, P(x) est vraie d'après (*), et donc, d'après (i), que Q(x) est vraie.

- Conclure que ($\forall$ x $\in$ E, Q(x)).

— Conclure que (ii) est vraie

Conclure que ((i) $\Rightarrow$ (ii)) est vraie.

L'assertion ((ii) $\Rightarrow$ (i)) est fausse pour certaines "assertions" P et Q.

Prendre, par exemple, $E = \mathbb{R}$, P : $x^2 > 0$, Q : $x > 0$, et vérifier que (ii) est vraie (puisque ($\forall$ x $\in$ E, P(x)) est fausse (considérer $x = 0$)), et que (i) est fausse (puisque $x = -2$ est un contre-exemple de (i)).

17 Indications

Montrer ((i) $\Rightarrow$ (ii)).

— Supposer (i) : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |u_n - 1| \leq \varepsilon$.

— Montrer (ii) : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow |u_n - 1| < \varepsilon$,
ou de façon équivalente, montrer

(ii)' : $\forall \varepsilon' > 0, \exists N' \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N' \Rightarrow |u_n - 1| < \varepsilon'$.

- Prendre $\varepsilon' > 0$.

- *Analyse.* Remarquer que $\frac{\varepsilon'}{2} > 0$ et donc d'après (i), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait : $n > N \Rightarrow | u_n - 1 | \leq \frac{\varepsilon'}{2}$; remarquer de plus que :
  $n \geq N + 1 \Rightarrow n > N \Rightarrow | u_n - 1 | \leq \frac{\varepsilon'}{2} \Rightarrow | u_n - 1 | < \varepsilon'$.
  D'où l'idée "d'essayer" $N' = N + 1$ où N est un entier naturel, fourni par (i), associé au réel strictement positif $\frac{\varepsilon'}{2}$.
  Synthèse. Poser $N' = N + 1$ où N est un entier naturel qui vérifie :
  (*) $\forall n \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow | u_n - 1 | \leq \frac{\varepsilon'}{2}$;
  un tel entier existe d'après (i), puisque $\frac{\varepsilon'}{2} > 0$.
  (remarquer que $N' \in \mathbb{N}$)
- Prendre $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que ($n \geq N' \Rightarrow | u_n - 1 | < \varepsilon'$).
  - Supposer $n \geq N'$.
  - Montrer que $| u_n - 1 | < \varepsilon'$, en remarquant que l'entier naturel n vérifie ($n \geq N' = N + 1 > N$), et donc d'après (*), vérifie : $| u_n - 1 | \leq \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon'$.
- Conclure que ($n \geq N' \Rightarrow | u_n - 1 | < \varepsilon'$).

— Conclure que (ii)' est vraie, donc que (ii) l'est.

Conclure que ((i) $\Rightarrow$ (ii)).

L'analyse n'a pas à figurer dans la solution; remarquons également que le changement de variables dans (ii) clarifie la démonstration.

FICHE N° 4

Raisonnements par contraposition, par l'absurde, par disjonction des cas et par récurrence

EXERCICES

Cette fiche est relative aux paragraphes 2.3 et 2.4 du cours. Seul l'exercice 10 présente une certaine difficulté; l'énoncé de cet exercice sera utile à tous, mais sa solution, dans un premier temps, est réservée au lecteur se sentant déjà bien à l'aise.

1 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On considère la suite numérique $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n par $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Montrer, en raisonnant par contraposition, que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge (dans $\mathbb{R}$).

2 Soit $a \in \mathbb{R}$. En raisonnant par contraposition, montrer que :

$(\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0$.

3 En raisonnant par l'absurde, montrer que les deux droites D et D' d'équations respectives $y = x + 1$ et $y = x - 1$ sont parallèles.

On utilisera simplement le fait que dans $\mathbb{R}^2$, deux droites non parallèles sont sécantes.

4 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique convergente. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie pour tout n par $v_n = (-1)^n + u_n$, est divergente.

5 Montrer, en raisonnant par disjonction des cas, l'assertion suivante :

$\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n^2 = 4k$ ou $n^2 = 4k + 1$.

6 Soit E un ensemble; si A est une partie de E, on appelle fonction caractéristique de A la fonction numérique, notée f_A, définie par :

$$f_A : E \to \mathbb{R}\ ,\ x \mapsto f_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Montrer, en raisonnant par disjonction des cas, qu'on a :

$\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f_{A \cap B} = f_A \cdot f_B$.

Précisons que l'application $f_A \cdot f_B$ est définie sur E par : $(f_A \cdot f_B)(x) = f_A(x) f_B(x)$.

7 Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

8 Montrer par récurrence l'assertion suivante:

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, 7 divise $3^{2n} - 2^n$.

9 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = (u_n)^2$, si $n \geq 0$. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Le lecteur pourra ramener le problème à la vérification, par récurrence, de l'assertion $(\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1)$.

10 Le but de cet exercice est de fournir une démonstration par récurrence du théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$. Ce théorème s'énonce ainsi : "Pour tout couple $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, il existe un et un seul couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel qu'on ait, à la fois, $n = mq + r$ et $0 \leq r < m$".

1° On pose $P(n)$: $\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \exists (q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, m-1\}, n = mq + r$.

Montrer, en utilisant une récurrence forte, que $(\forall n \in \mathbb{N}, P(n))$.

Précisons que lors de l'étape de transmissibilité on pourra effectuer une disjonction des cas (le cas où le diviseur est strictement plus grand que le dividende se traite de façon simple).

2° Vérifier, pour chaque couple $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, l'unicité du couple (q, r) précédent.

FICHE N° 4

INDICATIONS ET RÉPONSES

[1] **Indications**

Montrer ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 $\Rightarrow$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge), en raisonnant par contraposition; pour cela vérifier l'assertion ($(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Rightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0) :

— Supposer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers un certain $L \in \mathbb{R}$).

— Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, en remarquant, d'après des théorèmes (de terminale) sur les limites de suites, que $u_n = S_n - S_{n-1} \to (L - L) = 0$.

Conclure que ($(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge $\Rightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0), donc que ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 $\Rightarrow$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge).

[2] **Indications**

Montrer $((\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0)$ en raisonnant par contraposition; pour cela, vérifier l'assertion $(a \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |a| \geq \varepsilon))$:

— Supposer $a \neq 0$.

— Prouver $(\exists \varepsilon > 0, |a| \geq \varepsilon)$:

- Poser (analyse simple) $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$ (vérifier que $\varepsilon > 0$).
- Vérifier (évident) que $|a| \geq \varepsilon$.

— Conclure que $(\exists \varepsilon > 0, |a| \geq \varepsilon)$.

Conclure que $(a \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, |a| \geq \varepsilon))$, donc que :
$((\forall \varepsilon > 0, |a| < \varepsilon) \Rightarrow a = 0)$.

[3] **Indications**

Montrer, en raisonnant par l'absurde, que D et D' sont parallèles :

— Supposer D et D' non parallèles.

— Aboutir à une contradiction, en remarquant que D et D' sont sécantes, donc ont un point commun dont les coordonnées (x_0, y_0) vérifient les égalités $y_0 = x_0 + 1 = x_0 - 1$; ce qui entraîne l'égalité "$1 = -1$" en contradiction, dans la théorie des nombres réels dont dépend la géométrie plane analytique, avec l'assertion vraie "$-1 \neq 1$" (l'assertion auxiliaire du cours est l'assertion "$-1 \neq 1$").

Conclure à la non-validité de l'hypothèse (D et D' non parallèles), donc conclure que D et D' sont parallèles.

4 Indications

Montrer, en raisonnant par l'absurde, que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente :

— Supposer $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente.

— Aboutir à une contradiction, en remarquant que, d'après un théorème (de terminale) sur les limites, la suite $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge; ce qui entraîne la convergence, contradictoire dans la théorie des suites numériques, de la suite $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$; l'assertion auxiliaire du cours est "$((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge", qui est une assertion vraie de la théorie.

Conclure que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas converger, donc diverge.

5 Indications

Montrer $(\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n^2 = 4k \text{ ou } n^2 = 4k + 1)$:

— Prendre $n \in \mathbb{N}$.

— Montrer, par disjonction des cas, $(\exists k \in \mathbb{N}, n^2 = 4k \text{ ou } n^2 = 4k + 1)$:

cas 1
- Supposer "n pair" (assertion auxiliaire naturelle) (ainsi $n = 2p$).
- Poser (analyse simple) $k = p^2$ (remarquer que $k \in \mathbb{N}$).
- Vérifier que $(n^2 = 4k \text{ ou } n^2 = 4k + 1)$, en remarquant qu'on a $n^2 = 4k$.

cas 2
- Supposer n impair (non "n pair") (ainsi $n = 2p + 1$).
- Poser (analyse simple) $k = p^2 + p$ (remarquer que $k \in \mathbb{N}$).

• Vérifier que $(n^2 = 4k$ ou $n^2 = 4k+1)$, en remarquant qu'on a $n^2 = 4k+1$.

— Conclure que $(\exists k \in \mathbb{N}, n^2 = 4k$ ou $n^2 = 4k+1)$.

Conclure que $(\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, n^2 = 4k$ ou $n^2 = 4k+1)$.

6 **Indications**

Montrer $(\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f_{A \cap B} = f_A \cdot f_B)$:

— Supposer que A et B sont deux parties de E.

— Montrer que $f_{A \cap B} = f_A \cdot f_B$; comme les deux applications ont même ensemble de définition et même ensemble d'arrivée, il reste à vérifier l'assertion $(\forall x \in E, f_{A \cap B}(x) = f_A(x) f_B(x))$; pour cela :

• Supposer x dans E.

• Montrer, par disjonction des cas, que $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) f_B(x)$:

cas 1 - Supposer $x \in A \cap B$.

- Vérifier que $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) f_B(x)$, en remarquant que $x \in A$ et $x \in B$, donc que $f_{A \cap B}(x) = 1$ et $f_A(x) = f_B(x) = 1$.

cas 2 - Supposer $x \notin A$ et $x \notin B$ (donc $x \notin A \cap B$).

- Vérifier l'assertion $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) f_B(x)$, en remarquant que $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) = f_B(x) = 0$.

cas 3 - Supposer $x \notin A$ et $x \in B$ (donc $x \notin A \cap B$).

- Vérifier l'assertion $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) f_B(x)$, en remarquant que $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) = 0$ et $f_B(x) = 1$.

cas 4 - Supposer $x \in A$ et $x \notin B$ (donc $x \notin A \cap B$).

- Vérifier l'assertion $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) f_B(x)$, en remarquant que $f_{A \cap B}(x) = f_B(x) = 0$ et $f_A(x) = 1$.

• Conclure que $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) f_B(x)$.

— Conclure que $f_{A \cap B} = f_A \cdot f_B$.

Conclure que $(\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, f_{A \cap B} = f_A \cdot f_B)$.

Précisons que la méthode par disjonction des cas, employée dans cet *exercice, est une généralisation naturelle de celle donnée dans le cours; les quatre cas, qui interviennent naturellement ici, s'excluent mutuellement et recouvrent toutes les possibilités. Le lecteur remarquera également que le quatrième cas n'est pas réellement à traiter, puisqu'il est identique au troisième (le problème étant "symétrique" en A et B).*

7 Indications

Noter P(n) l' "assertion" $(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1))$.

Montrer, par récurrence, l'assertion $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P(n))$:

— Montrer que P(1) est vraie *(initialisation)*, en remarquant que $1^2 = 1$ et que $\frac{1}{6} \times 1 \times (1+1)\,(2 \times 1 + 1) = 1$.

— Prendre un entier naturel non nul k et supposer vraie l'assertion P(k) (ainsi $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{1}{6}\, k\,(k+1)\,(2k+1)$) *(hypothèse de récurrence).*

— Montrer que P(k + 1) est vraie *(transmissibilité)*, puisque :

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{1}{6}\, k\,(k+1)\,(2k+1)) + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}\,(k+1)\,\,(k\,(2k+1) + 6\,(k+1)) \\ &= \frac{1}{6}\,(k+1)\,((k+1)+1)\,(2\,(k+1)+1). \end{aligned}$$

Conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\, n\,(n+1)\,(2n+1)$.

8 Indications

Noter P(n) l' "assertion" (7 divise $3^{2n} - 2^n$).

Montrer par récurrence l'assertion $(\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P(n))$.

— Montrer que P(1) est vraie *(initialisation)*, en remarquant que 7 divise bien $3^2 - 2$.

— Prendre $k \in \mathbb{N}^*$ et supposer que P(k) est vraie (ainsi $3^{2k} - 2^k = 7 \times N$ pour un certain N) *(hypothèse de récurrence)*.

— Montrer que P(k + 1) est vraie *(transmissibilité)*, en remarquant que :

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)} - 2^{(k+1)} &= 3^2\,(3^{2k} - 2^k) + 3^2 \times 2^k - 2^{k+1} \\ &= 3^2\,(3^{2k} - 2^k) + 7 \times 2^k \\ &= 7 \times (3^2 \times N + 2^k). \end{aligned}$$

Conclure, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, 7 divise $3^{2n} - 2^n$.

Indications

Analyse. On doit prouver par récurrence que $(\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n \geq u_{n+1})$.

On a $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{1}{16}$, ... , $u_{n+1} = (u_n)^2$; on voit que les termes de la suite sont positifs. La preuve de l'inégalité $(u_n - u_{n+1}) \geq 0$ se ramène à la preuve de l'inégalité $u_n (1 - u_n) \geq 0$, donc, d'après ce qui précède, à la preuve de $(1 - u_n) \geq 0$. D'où l'idée d'ajouter, à la propriété à démontrer, la propriété $(0 \leq u_n \leq 1)$, et de transformer le problème en "Montrons l'assertion $(\forall\, n \in \mathbb{N},\, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1)$".

Synthèse. Noter P(n) l' "assertion" $(0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1)$.

Montrer par récurrence l'assertion $(\forall\, n \in \mathbb{N},\, P(n))$.

— Montrer que P(0) est vraie *(initialisation)* , en remarquant que $1 \geq u_0 = \frac{1}{2} \geq u_1 = \frac{1}{4} \geq 0$.

— Prendre $k \in \mathbb{N}$ et supposer qu'on a P(k) (ainsi $0 \leq u_{k+1} \leq u_k \leq 1$) *(hypothèse de récurrence)* .

— Montrer que P(k + 1) $(0 \leq u_{k+2} \leq u_{k+1} \leq 1)$ est vraie *(transmissibilité)* , en remarquant que, d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$u_{k+2} = (u_{k+1})^2 \geq 0,$$

et $u_{k+2} - u_{k+1} = u_{k+1}\,(u_{k+1} - 1) \leq 0$ (d'après P(k))

et enfin $u_{k+1} \leq 1$ (toujours d'après P(k)).

Conclure que $(\forall\, n \in \mathbb{N},\, 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1)$, et par conséquent que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Le lecteur remarquera la difficulté de montrer directement, par récurrence, l'assertion $(\forall\, n \in \mathbb{N},\, u_n \geq u_{n+1})$: d'où l'intérêt de l'analyse qui suggère de faire intervenir l'assertion annexe $(\forall\, n \in \mathbb{N},\, 0 \leq u_n \leq 1)$.

10 **Indications**

1° Montrer par récurrence (forte) l'assertion $(\forall\, n \in \mathbb{N},\, P(n))$

avec $P(n) : \forall\, m \in \mathbb{N}^*,\ \exists\, (q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots , m - 1\},\ n = m\,q + r$.

— Montrer que $P(0)$ est vraie *(initialisation)*, en posant (analyse simple), pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $q = r = 0$ (remarquer que $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, m-1\}$).

— Prendre $k \in \mathbb{N}$ et supposer qu'on a, à la fois, $P(0), \ldots, P(k)$ *(hypothèse forte de récurrence)*.

— Montrer qu'on a $P(k+1)$ *(transmissibilité)*, c'est-à-dire vérifier l'assertion $(\forall\, m \in \mathbb{N}^*, \exists\, (q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, m-1\}, k+1 = m\,q + r)$:

- Prendre $m \in \mathbb{N}^*$.
- Montrer, par disjonction des cas, qu'on a l'assertion

  $(\exists\, (q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, m-1\}, k+1 = m\,q + r)$:

  $\boxed{\text{cas 1}}$ - Supposer $m > k+1$.

  - Poser (analyse simple) $q = 0$ et $r = k+1$ (remarquer que $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, m-1\}$).
  - Vérifier que $k+1 = m\,q + r$ (évident).

  $\boxed{\text{cas 2}}$ - Supposer $m \leq k+1$ (non " $m > k+1$ ").

  - Poser $q = 1 + q'$ et $r = r'$, où (q', r') est le couple fourni par $P(k')$ avec $0 \leq k' = k+1-m \leq k$ (remarquer que $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, m-1\}$).
  - Vérifier que $k+1 = m\,q + r$, en utilisant la proposition $P(k')$ ($P(k')$ est vraie d'après l'hypothèse de récurrence).

(Indications : $k+1-m = k' = q'm + r', 0 \leq r' \leq m-1$; d'où : $k+1 = m + (q'm + r') = (1+q')m + r'$; prendre $q = 1 + q'$ et $r = r'$).

- Conclure que $(\exists\, (q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, m-1\}, k+1 = m\,q + r)$.

— Conclure à $(\forall\, m \in \mathbb{N}^*, \exists\, (q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, \ldots, m-1\}, k+1 = m\,q + r)$.

Conclure que $(\forall\, n \in \mathbb{N}, P(n))$.

2° Montrer, pour (n, m) fixé, l'unicité du couple (q, r), en prouvant l'assertion (voir page 23) :

$\forall\, (q, q', r, r') \in \mathbb{N}^2 \times \{0,\ldots, m-1\}^2, n = m\,q + r = m\,q' + r' \Rightarrow q = q'$ et $r = r'$.

— Prendre $(q, q', r, r') \in \mathbb{N}^2 \times \{0, \ldots, m-1\}^2$.

— Supposer $n = m\,q + r = m\,q' + r'$.

— Vérifier que $q = q'$ et $r = r'$, en remarquant que $m q + r = m q' + r'$ entraîne $m \mid q - q' \mid = \mid r - r' \mid$; or $\mid r - r' \mid < m$ donc $\mid q - q' \mid < 1$ et ainsi $q = q'$; d'où $r = r'$.

Conclure à l'unicité du couple (q, r).

FICHE N° 5

Encore quelques exercices ...

EXERCICES

Le lecteur peur réviser la quantification avec les exercices 6 et 10, le raisonnement par récurrence avec le 8, travailler la relation d'ordre avec les exercices 5 et 7 et la relation d'équivalence avec le 9; la notion d'application intervient dans la majorité des exercices. Cette fiche est l'occasion de manipuler ensembles et relations au niveau exigé dans le cours d'algèbre et d'analyse de première année d'enseignement supérieur. Les difficultés sont principalement situées dans les exercices 5, 7 et 9.

1 Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G.

1° Montrer que si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

2° Montrer que si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

2 Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F, g une application de F dans G et H une partie de G.

Montrer que $\overset{-1}{\overbrace{(g \circ f)}}(H) = \overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(H))$.

$\overset{-1}{\overbrace{(g \circ f)}}(H)$ désigne l'image réciproque de H par l'application $g \circ f$.

3 Soient E, F et G trois ensembles, f une application de E dans F et g une application de F dans G. Montrer que si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

$(g \circ f)^{-1}$ désigne l'application réciproque de $g \circ f$.

4 Soient E, F deux ensembles, f une application de E dans F et A une partie de F. Montrer que $\overset{-1}{f}(\overline{A}) = \overline{\overset{-1}{f}(A)}$.

Soit E un ensemble. On note $\mathcal{F}$ l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E; $\mathcal{F}$ est muni de la relation d'ordre d'inclusion.

1° Montrer que toute partie de $\mathcal{F}$ admet une borne inférieure et une borne supérieure.

2° Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, donner un exemple de partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}$ sans plus petit élément et sans plus grand élément.

6 Soient E et F deux ensembles, A et B deux parties de E, X une partie de F et f une application de E dans F.

Ecrire de différentes façons, à l'aide des quantificateurs, des connecteurs logiques et de définitions de la théorie des ensembles, les assertions suivantes :

(i) f n'est pas injective.

(ii) La restriction de f à A n'est pas surjective .

(iii) $f(A)$ contient X.

(iv) $f(A \cap B)$ n'est pas inclus dans X.

(v) $f^{-1}(X)$ contient A.

7 On considère l'ensemble $A = \{ \frac{2n+3}{n+2} \,/\, n \in \mathbb{N} \}$.
Etudier l'existence de Min (A), Inf (A), Max (A) et Sup (A) .

On remarquera que $\frac{2n+3}{n+2} = 2 - \frac{1}{n+2}$ *; pour la borne supérieure, le lecteur utilisera l'équivalence donnée dans l'énoncé de l'exercice 14 de la fiche 3 .*

8 Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que tout ensemble fini E à n éléments vérifie Card $\mathcal{P}(E) = 2^n$.

Pour la transmissibilité, le lecteur vérifiera que l'ensemble des parties de E qui contiennent un élément a de E donné, et l'ensemble des parties de E qui ne le contiennent pas, sont en bijection avec $\mathcal{P}(E \setminus \{a\})$ *; ces deux ensembles ont donc même nombre d'éléments.*

$\boxed{9}$ **1°** Montrer que la relation $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$, définie par :

$x \,\mathcal{R}\, y \iff x - y \in \mathbb{Z}$

est une relation d'équivalence.

2° Montrer que $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to [0, 1[\,,\ \bar{x} \mapsto x - \mathbb{E}(x)$ définit bien une application, et que f est une bijection ($\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble quotient $\mathbb{R}/\mathcal{R}$, et $\mathbb{E}(x)$ désigne la partie entière de x).

$\boxed{10}$ Compléter :

$\cos\left([-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]\right) = \{\ \ldots\ldots\ /\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \} = [\ \ldots\ldots\ ,\ \ldots\ldots\ ]$;

$\overbrace{(\cos)}^{-1}([0, 1]) = \{\ \ldots\ldots\ /\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \} = \bigcup_{\ldots \in \ldots} [\ \ldots\ldots\ ,\ \ldots\ldots\ ]$.

FICHE N° 5

INDICATIONS ET RÉPONSES

L'analyse des problèmes est laissée au lecteur.

1 **Indications**

1° Montrer ($g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective) :

— Supposer $g \circ f$ injective.

— Montrer l'injectivité de f, en vérifiant l'assertion :

$(\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$:

- Supposer x et x' dans E.
- Supposer $f(x) = f(x')$.
- Vérifier que $x = x'$ en remarquant, comme $f(x) = f(x')$, qu'on a l'égalité $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ (l'injectivité de $g \circ f$ fournit alors l'égalité $x = x'$).

— Conclure à l'injectivité de f.

Conclure que ($g \circ f$ injective $\Rightarrow$ f injective).

2° Montrer que ($g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective) :

— Supposer $g \circ f$ surjective.

— Montrer la surjectivité de g, en vérifiant l'assertion :

$(\forall z \in G, \exists y \in F, z = g(y))$:

- Supposer z dans G.
- Poser $y = f(x)$ où $x \in E$ vérifie $z = g(f(x))$ (l'existence d'un tel x est assurée par la surjectivité de $g \circ f$) (remarquer que $y \in F$).
- Vérifier que $z = g(y)$ en remarquant que $g(y) = g(f(x)) = z$.

— Conclure à la surjectivité de g.

Conclure que ($g \circ f$ surjective $\Rightarrow$ g surjective).

2 Indications

Montrer que $\overbrace{(g \circ f)}^{-1}(H) = \overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(H))$; pour cela montrer l'assertion

$(\forall x \in E, x \in \overbrace{(g \circ f)}^{-1}(H) \Leftrightarrow x \in \overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(H)))$:

— Supposer x dans E.

— Vérifier que $(x \in \overbrace{(g \circ f)}^{-1}(H) \Leftrightarrow x \in \overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(H)))$, en remarquant qu'on a successivement, d'après les définitions de l'image réciproque et de la composition des applications :

$$\begin{aligned} x \in \overbrace{(g \circ f)}^{-1}(H) &\Leftrightarrow g \circ f(x) \in H \\ &\Leftrightarrow g(f(x)) \in H \\ &\Leftrightarrow f(x) \in \overset{-1}{g}(H) \\ &\Leftrightarrow x \in \overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(H)). \end{aligned}$$

Conclure que $\overbrace{(g \circ f)}^{-1}(H) = \overset{-1}{f}(\overset{-1}{g}(H))$.

3 Indications

Montrer que $g \circ f \in G^E$ est bijective en vérifiant (voir page 72) l'assertion $(\exists h \in E^G, h \circ (g \circ f) = Id_E$ et $(g \circ f) \circ h = Id_G)$:

— Poser $h = f^{-1} \circ g^{-1}$ (remarquer que h existe car f^{-1} et g^{-1} existent puisque f et g sont bijectives et vérifier que $h \in E^G$).

— Vérifier (immédiat d'après "l'associativité de la composition des applications") que $h \circ (g \circ f) = Id_E$ et $(g \circ f) \circ h = Id_G$.

Conclure que $g \circ f$ est bijective et que $(g \circ f)^{-1} = h = f^{-1} \circ g^{-1}$.

4 Indications

Montrer que $\overset{-1}{f}(\overline{A}) = \overline{\overset{-1}{f}(A)}$, en vérifiant l'assertion :

$(\forall x \in E, x \in \overset{-1}{f}(\overline{A}) \Leftrightarrow x \in \overline{\overset{-1}{f}(A)})$:

— Supposer x dans E.

— Montrer que $(x \in \overset{-1}{f}(\overline{A}) \Leftrightarrow x \in \overline{\overset{-1}{f}(A)})$, en remarquant qu'on a successivement, d'après les définitions de l'image réciproque et du complémentaire d'une partie :

$$\begin{aligned} x \in \overset{-1}{f}(\overline{A}) &\Leftrightarrow f(x) \in \overline{A} \\ &\Leftrightarrow f(x) \notin A \\ &\Leftrightarrow \text{non } (f(x) \in A) \\ &\Leftrightarrow \text{non } (x \in \overset{-1}{f}(A)) \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{\overset{-1}{f}(A)}\,. \end{aligned}$$

Conclure que $\overset{-1}{f}(\overline{A}) = \overline{\overset{-1}{f}(A)}$.

5 **Indications** .

1° Montrer l'assertion $(\forall \mathcal{A} \in \mathcal{P}(\mathcal{F}), \exists\, M \in \mathcal{F}, \mathrm{Sup}(\mathcal{A}) = M)$.

— Supposer $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{F}$.

— Poser $M = \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X$ (remarquer que $M \in \mathcal{F}$).

— Vérifier que M est la borne supérieure de la partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}$:

- Prouver que M est un majorant de $\mathcal{A}$, en remarquant que pour tout A élément de $\mathcal{A}$, on a $A \subset \bigcup_{X \in \mathcal{A}} X = M$.
- Montrer que M est le plus petit des majorants de $\mathcal{A}$:
  - Prendre un majorant M' de $\mathcal{A}$ (ainsi pour tout $X \in \mathcal{A}$, $X \subset M'$).
  - Montrer que $M \subset M'$, en remarquant que $\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X \subset M'$.
- Conclure que M est le plus petit des majorants de $\mathcal{A}$.

— Conclure que $M = \mathrm{Sup}(\mathcal{A})$.

Conclure que toute partie de $\mathcal{F}$ admet une borne supérieure pour l'inclusion.

On laisse au lecteur le soin de vérifier, de façon analogue, l'existence de la borne inférieure (il montrera que Inf $(\mathcal{A}) = \bigcap_{X \in \mathcal{A}} X$ en vérifiant que $m = \bigcap_{X \in \mathcal{A}} X \in \mathcal{F}$ est un minorant de $\mathcal{A}$, et que c'est le plus grand).

2° Montrer, par exemple, que $\mathcal{A} = \{ [0, x] \,/\, x \in]0, +\infty[\}$ répond à la question.

— Montrer que $\mathcal{A}$ n'a pas de plus petit élément en raisonnant par l'absurde.

- Supposer que Min $(\mathcal{A})$ existe.
- Aboutir à une contradiction en remarquant que, sous l'hypothèse précédente, on a Inf $(\mathcal{A})$ = Min $(\mathcal{A}) \in \mathcal{A}$, ce qui est absurde puisque, d'après la question précédente :
  Inf $(\mathcal{A}) = \bigcap_{x \in]0,+\infty[} [0,x] = \{0\} \notin \mathcal{A}$.

— Conclure que $\mathcal{A}$ n'a pas de plus petit élément.

— Montrer, de même, que $\mathcal{A}$ n'a pas de plus grand élément en remarquant que Sup $(\mathcal{A}) = [0, +\infty[\notin \mathcal{A}$.

Conclure que $\mathcal{A}$ répond à la question.

6 Réponses

(i) $\exists (x, x') \in E^2, f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$.

(ii) $\exists y \in F, \forall x \in A, y \neq f(x)$;

ou $\exists y \in F, \forall x \in E, x \in A \Rightarrow y \neq f(x)$.

(iii) $\forall y \in X, \exists x \in A, y = f(x)$;

ou $\forall y \in F, y \in X \Rightarrow (\exists x \in A, y = f(x))$.

(iv) $\exists x \in E, x \in A$ et $x \in B$ et $f(x) \notin X$.

(v) $\forall x \in A, f(x) \in X$;

ou $\forall x \in E, x \in A \Rightarrow f(x) \in X$.

Indications

Montrer que $\text{Min}\,(A) = \frac{3}{2}$:

— Montrer que $\frac{3}{2}$ est un minorant de la partie A, en vérifiant l'assertion $(\forall n \in \mathbb{N}, \frac{3}{2} \leq \frac{2n+3}{n+2})$:

— Prendre $n \in \mathbb{N}$.

— Vérifier que $\frac{3}{2} \leq \frac{2n+3}{n+2}$, en remarquant que :

$\frac{3}{2} \leq \frac{2n+3}{n+2} \Leftrightarrow n \geq 0.$

— Conclure que $\frac{3}{2}$ est un minorant de A.

— Montrer que $\frac{3}{2}$ est dans A $(\frac{3}{2} = \frac{2 \times 0 + 3}{0+2})$.

Conclure que $\text{Min}\,(A) = \frac{3}{2}$.

Remarquer alors que $\text{Inf}\,(A) = \text{Min}\,(A) = \frac{3}{2}$ d'après les remarques sur Min (A) et Inf (A) page 65.

Montrer par l'absurde que Max (A) n'existe pas :

— Supposer que Max (A) existe (il existe donc $k \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Max}\,(A) = \frac{2k+3}{k+2}$).

— Aboutir à une contradiction, en remarquant, comme Max (A) est un majorant de A, qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2n+3}{n+2} \leq \frac{2k+3}{k+2}$, ce qui entraîne $n \leq k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et ainsi l'existence (contradictoire dans la théorie des entiers naturels dont dépend la théorie des rationnels) d'un plus grand élément de $\mathbb{N}$ (voir page 65).

Conclure que Max (A) n'existe pas.

Montrer que $\text{Sup}\,(A) = 2$:

— Montrer que 2 est un majorant de A, en vérifiant l'assertion $(\forall n \in \mathbb{N}, \frac{2n+3}{n+2} \leq 2)$:

- Prendre $n \in \mathbb{N}$.
- Vérifier que $\frac{2n+3}{n+2} \leq 2$, en remarquant que $2n+3 \leq 2n+4$, ce qui entraîne l'inégalité souhaitée.

— Conclure que 2 est majorant de A.

— Montrer qu'il n'existe pas de majorant strictement plus petit que 2, en vérifiant l'assertion $(\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n \in \mathbb{N}, 2 - \varepsilon < \frac{2n+3}{n+2})$:

- Prendre $\varepsilon > 0$.
- Poser $n = \text{Max}\,(\{0, 1 + \mathbb{E}\,(\frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon})\})$ où $\mathbb{E}\,(\frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon})$ désigne la partie entière de $\frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon}$ (remarquer que $n \in \mathbb{N}$).

  (éléments d'analyse : remarquer qu'on a l'équivalence suivante $2 - \varepsilon < \frac{2n+3}{n+2} \iff n > \frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon}$; construire alors, un entier, positif ou nul, qui convient).
- Vérifier (facile) que $2 - \varepsilon < \frac{2n+3}{n+2}$.

— Conclure qu'il n'y a pas de majorant de A strictement plus petit que 2.

Conclure que 2 est le plus petit majorant de A, donc que Sup (A) = 2.

8 Indications

Montrer par récurrence que si E est un ensemble à n éléments alors Card $\mathcal{P}$ (E) = 2^n :

— Vérifier que Card $\mathcal{P}(\emptyset) = 2^0 = 1$, en remarquant que $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ *(initialisation)* .

— Prendre $k \in \mathbb{N}$ et supposer vrai que pour tout ensemble F à k éléments on a Card $\mathcal{P}(F) = 2^k$ *(hypothèse de récurrence)* .

— Montrer, si $E = \{x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}\}$ est un ensemble à k + 1 éléments, que Card $\mathcal{P}(E) = 2^{k+1}$ *(transmissibilité)* .

Poser $F = E \setminus \{x_{k+1}\}$. Remarquer que, si $\mathcal{F}$ est l'ensemble des parties de E contenant x_{k+1}, alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}(F)$ ont même nombre d'éléments (puisque $f : \mathcal{F} \to \mathcal{P}(F)$, $A \mapsto (A \setminus \{x_{k+1}\})$ est une bijection) (voir page 76), et que si $\mathcal{F}'$ est l'ensemble des parties de E ne contenant pas x_{k+1}, alors $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{P}(F)$ ont également même nombre d'éléments (puisque $f' : \mathcal{F}' \to \mathcal{P}(F)$, $A \mapsto A$ est une bijection); ainsi :

$$\text{Card}\,\mathcal{F} = \text{Card}\,\mathcal{F}' = \text{Card}\,\mathcal{P}(F)$$
$$= 2^k \text{ (hypothèse de récurrence appliquée à F).}$$

Enfin, comme $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ forment une partition de $\mathcal{P}(E)$, on a :

Card $\mathcal{P}$ (E) = Card $\mathcal{F}$ + Card $\mathcal{F}'$ = $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ (voir page 77).

Conclure que tout ensemble E à n éléments ($n \in \mathbb{N}$), vérifie :
Card $\mathcal{P}$ (E) = 2^n.

9 **Indications**

1° Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$:

— Montrer que $\mathcal{R}$ est réflexive, en vérifiant ($\forall x \in \mathbb{R}, x \mathcal{R} x$) :

- Prendre x dans $\mathbb{R}$.
- Vérifier que $x \mathcal{R} x$, en remarquant que $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$.

— Conclure à la réflexivité de $\mathcal{R}$.

— Montrer que $\mathcal{R}$ est symétrique, en vérifiant l'assertion ($\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$) :

- Prendre x et y dans $\mathbb{R}$.
- Supposer $x \mathcal{R} y$ (ainsi $x - y \in \mathbb{Z}$).
- Vérifier que $y \mathcal{R} x$, en remarquant que $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Z}$.

— Conclure à la symétrie de $\mathcal{R}$.

— Montrer que $\mathcal{R}$ est transitive, en vérifiant l'assertion ($\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$) :

- Prendre x, y et z dans $\mathbb{R}$.
- Supposer $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$ (ainsi $x - y \in \mathbb{Z}$ et $y - z \in \mathbb{Z}$).
- Vérifier que $x \mathcal{R} z$, en remarquant que :
  $x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Z}$.

— Conclure à la transitivité de $\mathcal{R}$.

Conclure que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2° Montrer que f est une application bijective :

— Montrer que f est une application (tout élément de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ doit avoir au plus une image par f), en remarquant que la définition de l'image par f d'une classe est indépendante du représentant choisi dans celle-ci; pour cela vérifier ($\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \overline{x} = \overline{y} \Rightarrow f(\overline{x}) = f(\overline{y})$) :

- Prendre x et y dans $\mathbb{R}$.
- Supposer $\overline{x} = \overline{y}$ (ainsi $x \mathcal{R} y$, donc $x - y \in \mathbb{Z}$ ou $x = y + k$,

avec $k \in \mathbb{Z}$).

- Prouver que $f(\overline{x}) = f(\overline{y})$, en remarquant qu'on a :

  $f(\overline{x}) = (y + k) - \mathbb{E}(y + k) = (y + k) - (\mathbb{E}(y) + k) = y - \mathbb{E}(y) = f(\overline{y})$.

— Conclure que la définition de f a un sens, donc que f est bien une application (à valeurs dans $[0, 1[$ (évident)).

Le lecteur remarquera qu'une assertion du type $(\forall c \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, P(c))$ (respectivement $(\exists c \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, P(c))$) peut s'écrire, de façon équivalente $(\forall x \in \mathbb{R}, P(\overline{x}))$ (respectivement $(\exists x \in \mathbb{R}, P(\overline{x}))$).

— Montrer que f injective, en vérifiant l'assertion $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(\overline{x}) = f(\overline{y}) \Rightarrow \overline{x} = \overline{y})$:

- Prendre x et y dans $\mathbb{R}$.
- Supposer $f(\overline{x}) = f(\overline{y})$ (ainsi $x - \mathbb{E}(x) = y - \mathbb{E}(y)$).
- Vérifier que $\overline{x} = \overline{y}$, en remarquant que $x - y \in \mathbb{Z}$ et donc que $x \mathcal{R} y$.

— Conclure que f est injective.

— Montrer que f est surjective, en vérifiant l'assertion $(\forall y \in [0, 1[, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(\overline{x}))$:

- Prendre $y \in [0, 1[$.
- Poser $x = y$ (remarquer que $x \in \mathbb{R}$).
- Vérifier $y = f(\overline{x})$, en remarquant qu'on a :

  $f(\overline{x}) = x - \mathbb{E}(x) = y - \mathbb{E}(y) = y$ car $\mathbb{E}(y) = 0$ $(y \in [0, 1[)$.

— Conclure que f est surjective.

Conclure que f est une application bijective.

$\boxed{10}$ Réponses

$$\cos\left(\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]\right) = \{ y \in \mathbb{R} \,/\, \exists x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right], y = \cos x \}$$
$$= \{ \cos x \,/\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right] \} = [0, 1] .$$

$$\overset{-1}{\widehat{(\cos)}}([0, 1]) = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, \cos x \in [0, 1] \}$$
$$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right] .$$

INDEX TERMINOLOGIQUE

INDEX DES NOTATIONS

Achevé d'imprimer par Corlet, Imprimeur, S.A.
14110 Condé-sur-Noireau (France)
N° d'Éditeur : 10505 - N° d'Imprimeur : 272 - Dépôt légal : septembre 1993
Imprimé en C.E.E.