J. GENET et G. PUPION

ANALYSE MODERNE

RÉSUMÉ DE COURS ET EXERCICES CORRIGÉS. MP2. PC2

TOME 1

espaces métriques - séries - systèmes différentiels

VUIBERT

analyse moderne 1

espaces métriques
séries
systèmes différentiels

analyse moderne

résumé de cours et exercices corrigés

par

J. Genet et G. Pupion

agrégé de l'Université,
docteur ès sciences mathématiques,
maître de conférences à
l'Université de Pau

agrégé de l'Université,
docteur ès sciences mathématiques,
maîtres de conférences à
l'Université de Bordeaux

TOME 1

espaces métriques

séries

systèmes différentiels

à l'usage des étudiants du DUES, M.P. et P.C., des classes préparatoires aux grandes Écoles et de la première année des maîtrises de Mathématiques

LIBRAIRIE VUIBERT
Boulevard Saint-Germain, 63
PARIS - 5e

AVANT-PROPOS

Cet ouvrage est le premier d'une série destinée aux étudiants du DUES, M.P. et P.C., et à ceux des classes préparatoires aux grandes Écoles scientifiques. Ce volume est consacré à une partie du programme d'Analyse de M.P.2 et de P.C.2. Chaque chapitre comprend un cours résumé et les exercices d'applications.

En fait, il ne manque pas de recueils d'exercices sur le cours d'Analyse, mais il nous a paru, avec l'expérience de ces dernières années, que ces recueils restaient par trop traditionnels et qu'ils ne faisaient pas une part assez importante aux aspects actuels — et nécessaires — de l'Analyse.

Puisque, entre autres..., le premier cycle des Facultés des sciences doit conduire au second, certaines notions fondamentales, telles que les notions de topologie, doivent y être abordées. C'est dans cet esprit que ce premier volume d'Analyse a été conçu. Non seulement il doit permettre aux étudiants de réviser et d'approfondir leur cours de M.P.2 ou de P.C.2, mais encore — en ce qui concerne les premiers chapitres — nous pensons qu'il aura une utilité certaine pour la mise en route d'une maîtrise (de Mathématiques ou de Physique) en facilitant l'accès à la topologie générale et à ses applications.

Le début de cet ouvrage a également pour ambition d'être utile à nos collègues de l'Enseignement secondaire qui sont nombreux à participer à des cours de recyclage et qui désireraient travailler de plus près ces notions d'Analyse.

Une attention particulière a été apportée aux propriétés dont la terminologie pourrait prêter à confusion :

— « boules fermées » et fermeture de la « boule ouverte » de même rayon,

— « distances équivalentes » (ne conservant pas la complétion en général), « distances uniformément équivalentes »...,

— applications biunivoques continues, mais non bicontinues, ... etc.

Signalons que nombre des exercices développés dans cet ouvrage ont déjà été expérimentés, puisque utilisés comme illustration du cours, ou proposés à nos étudiants en Travaux Pratiques.

Nous remercions vivement la Librairie Vuibert, spécialisée dans l'édition d'excellents ouvrages de Mathématiques de ce genre, qui a bien voulu se charger de la publication de ce manuel avec tous les soins nécessaires.

LES AUTEURS.

Utilisation et numérotation des exercices

En tête de chaque chapitre, l'indication M.P.2, M.P.2 — P.C.2, P.C.2 précise que le programme traité correspond à M.P.2 seulement, à une partie commune de M.P.2 et de P.C.2, à P.C.2 seulement. Il a été fait en sorte que l'ouvrage puisse correspondre à une progression normale des connaissances, tant pour M.P.2 que pour P.C.2.

Les exercices sont numérotés à l'aide de trois chiffres. Par exemple, l'exercice $p.q.r.$ se rapporte au chapitre p, paragraphe q et est le r^e correspondant à ce paragraphe. La résolution de cet exercice fait nécessairement appel à l'une des propriétés développées au paragraphe q du chapitre p, mais peut utiliser des connaissances « antérieures ».

Les symboles ◆, ◆◆ et ◆◆◆ sont relatifs à la difficulté des exercices proposés.

◆ Exercices faciles. (Application immédiate du cours ou exercice technique.)

◆◆ Exercices de difficulté moyenne.

◆◆◆ Exercices plus difficiles. (Ces derniers sont conseillés à titre de révision en début de Maîtrise.)

Principales notations

$\mathbb{N}$: anneau des entiers arithmétiques.

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$.

$\mathbb{Z}$: anneau des entiers relatifs.

$\mathbb{Q}$: corps des rationnels.

$\mathbb{R}$: corps des réels (et espace métrique muni de la distance euclidienne s'il n'y a pas d'autre indication).

$\mathbb{R}_+ = \{x;\ x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}$.

$\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ - \{0\}$.

$\mathbb{C}$: corps des complexes.

$\mathbb{R}^n$: espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des n-uples ordonnés $(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$, $x_j \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{C}^n$: espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des n-uples ordonnés $(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$, $x_j \in \mathbb{C}$.

$[x]$: partie entière du réel x.

f : $x \mapsto f(x) = y$ désigne l'application f qui à x fait correspondre y.

$f \rightsquigarrow S(f) \Leftrightarrow$ à f correspond la série de Fourier $S(f)$.

$\rightarrow$: symbole utilisé pour la convergence.

$u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} u \Leftrightarrow u_n$ tend vers u lorsque n tend vers l'infini.

TABLE DES MATIÈRES

1. ESPACES MÉTRIQUES

Ouverts - Fermés - Bornés

I. — GÉNÉRALITÉS.

1° Notion de distance. — Soit un ensemble E. On appelle métrique (ou distance) définie sur E, toute application $d : E \times E \mapsto \mathbb{R}_+$ qui vérifie

(1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (axiome de séparation),
(2) $d(x, y) = d(y, x)$ (axiome de symétrie),
(3) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Exemples :

a) Sur E, ensemble quelconque : $d(x, x) = 0$ et $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$.

b) Sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, lire valeur absolue, ou module.

2° Espace métrique *(E, d)*. — Un ensemble E muni d'une distance d est appelé espace métrique. On le notera (E, d). Ses éléments seront appelés *points.*

Sous-espace métrique. — Soit A un sous-ensemble de E. Le sous-ensemble A muni de la distance d est appelé sous-espace métrique de E.

Produit d'espaces métriques. — Soit $(E_1, d_1), \ldots, (E_n, d_n)$, n espaces métriques, et E l'espace produit

$$E = \prod_{i=1}^{n} E_i,$$

$X \in E \Leftrightarrow X = (x_1, \ldots, x_n)$, où $x_i \in E_i$, $\quad Y \in E \Leftrightarrow Y = (y_1, \ldots, y_n)$, où $y_i \in E_i$.

On définit alors

$$d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)},$$

qui est une distance dans l'espace produit E.

« On peut aussi définir

$$d_1(X, Y) = \sup_i d_i(x_i, y_i) \qquad \text{ou} \qquad d_2(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i). \text{ »}$$

Application :

a) On munit généralement $\mathbb{R}^n$ de

$$d(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

(distance euclidienne ou naturelle).

b) On munit généralement $\mathbb{C}^n$ de

$$d(Z, Z') = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i - z'_i|^2},$$

où

$$Z = (z_1, \ldots, z_n) \quad \text{et} \quad Z' = (z'_1, \ldots, z'_n) \qquad \text{avec} \qquad z_i \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad z'_i \in \mathbb{C}.$$

II. — OUVERTS D'UN ESPACE MÉTRIQUE (E, d).

1° Boule ouverte (resp. fermée). — On appelle boule ouverte [resp. fermée], de centre a et de rayon ρ, l'ensemble des $x \in E$ tels que $d(a, x) < \rho$ (ρ constante positive) [resp. $d(a, x) \leqslant \rho$]. Une telle boule sera notée $B_\rho(a)$ [resp. $B'_\rho(a)$].

2° Définition d'un ouvert de (E, d). — Soit $O \subset E$. L'ensemble O non vide est dit ouvert si chacun de ses points est centre d'une boule ouverte contenue dans O. L'ensemble vide est supposé appartenir à la famille des ouverts de E.

Donc

$$O \text{ ouvert} \Leftrightarrow \begin{cases} O = \varnothing \\ \text{ou bien} \\ \forall x \in O, \ \exists \rho_x > 0 \quad \text{tel que} \quad B_{\rho_x}(x) \subset O. \end{cases}$$

Une boule ouverte est évidemment un ouvert.

Exemples dans $\mathbb{R}^2$ (x, y) *:*

a) $\{(x, y);\ |x| < 1 \text{ et } |y| < 1\}$ et $\{(x, y);\ x + y - 1 > 0\}$ sont des ouverts;

b) $\{(x, y);\ |x| \leqslant 1 \text{ et } |y| < 1\}$ et $\{(x, y);\ x + y - 1 \geqslant 0\}$ ne sont pas des ouverts.

3° Théorème 1.II.1. — Dans un espace métrique (E, d) on a les propriétés suivantes :

i) E et $\varnothing$ sont ouverts;

ii) toute réunion d'ouverts est un ouvert : $\bigcup_{i \in I} O_i = O$;

iii) toute intersection d'un **nombre fini** d'ouverts est un ouvert :

$$\bigcap_{i=1}^{n} O_i = O.$$

4° Notion de structure topologique. — Soit E un ensemble et $\mathcal{T}$ un ensemble de parties de E. On dit que $\mathcal{T}$ est une topologie sur E, ou aussi que $\mathcal{T}$ définit une structure topologique sur E, pour exprimer que $\mathcal{T}$ satisfait aux axiomes suivants :

i) E et $\varnothing \in \mathcal{T}$;

ii) $O_i \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$, $\forall I$ ensemble d'indices;

iii) $O_i \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}$, $\forall I$ ensemble **fini** d'indices.

E muni de la topologie $\mathcal{T}$ est appelé espace topologique et est noté $(E, \mathcal{T})$.

Les parties de E appartenant à $\mathcal{T}$ sont dits les ouverts de l'espace $(E, \mathcal{T})$. Autrement dit, $\mathcal{T}$ est l'ensemble des ouverts.

Sur un ensemble E (non réduit à un élément) on peut toujours définir plusieurs topologies.

Exemples :

Topologie discrète $\mathcal{T} = \mathcal{P}(E)$, ensemble de toutes les parties de E.

Topologie grossière $\mathcal{T} = \{\varnothing, E\}$.

Ces deux topologies sont les topologies extrêmes correspondant respectivement au maximum et au minimum d'ouverts.

5° Topologie associée à une distance. — Vu la définition précédente et le théorème 1.II.1. l'ensemble des *ouverts* d'un espace métrique (E, d) constitue effectivement une topologie sur E. On l'appelle topologie associée à la distance. Ceci justifie aussi le terme *ouvert* employé auparavant.

6° Distances équivalentes. — Deux distances sont dites équivalentes lorsque les topologies associées sont identiques.

Pour que deux distances d et d' sur E soient équivalentes il faut, et suffit, que toute boule $B_\rho^d(a)$ contienne une boule $B_{\rho'}^{d'}(a)$ et réciproquement.

$$\left(B_\rho^d(a) = \{x\,; d(a, x) < \rho\}.\right)$$

Distances uniformément équivalentes. — Elles sont définies par

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \quad \text{tel que} \quad d(x', x'') < \eta \Rightarrow d'(x', x'') < \varepsilon$$

et

$$\exists \eta' > 0 \quad \text{tel que} \quad d'(x', x'') < \eta' \Rightarrow d(x', x'') < \varepsilon.$$

Exemple :

Deux distances telles que $\lambda d \leqslant d' \leqslant \mu d$ (λ et μ constantes strictement positives) sont uniformément équivalentes.

7° Ouverts d'un espace relatif A inclus dans E. — Soit O un ouvert de (E, d) et $O_A = O \cap A$. L'ensemble O_A est dit ouvert de l'espace relatif A.

Réciproquement, on définit les ouverts de A par

$$\Omega \text{ ouvert de } A \Leftrightarrow \exists O \text{ ouvert de } E \text{ tel que } \Omega = O \cap A.$$

III. — FERMÉS D'UN ESPACE MÉTRIQUE (E, d).

1° Points adhérents de A (sous-ensemble de E). Fermeture $\bar{A}$. — Tout point x de E tel que

$$B_\rho(x) \cap A \neq \varnothing, \qquad \forall \rho > 0$$

est dit **adhérent** à A.

L'ensemble des points adhérents de A est appelé **fermeture** de A et on le note $\bar{A}$.

On a (Ex. **1**.III.1.)

$$A \subset \bar{A}, \qquad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}, \qquad \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \bar{\bar{A}} = \bar{A}.$$

Exemples :

a) Dans $\mathbb{R}^2$, soit

$$A = \{(x, y);\ x > 1 \text{ et } x + y - 1 < 0\},$$
$$\bar{A} = \{(x, y);\ x \geqslant 1 \text{ et } x + y - 1 \leqslant 0\}.$$

b) Dans $\mathbb{R}$, soit

$$A = \left\{x_n; \qquad x_n = \frac{(-1)^n}{n}\right\},$$

alors $\bar{A} = A \cup \{0\}$.

c) Une boule fermée est un fermé (attention : $\bar{B}_\rho(a) \subset B'_\rho(a)$, mais on n'a pas l'identité en général !).

2° Définition et propriétés d'un fermé. — Un ensemble A est dit fermé lorsque $A = \bar{A}$. Autrement dit,

$$A \text{ fermé} \Leftrightarrow \text{tout point adhérent à } A \text{ appartient à } A.$$

Théorème 1.III.1. — Le complémentaire d'un ouvert est un fermé et réciproquement.

Théorème 1.III.2.

i) E et $\varnothing$ sont fermés.

ii) Toute intersection de fermés est un fermé : $\bigcap\limits_{i \in I} F_i = F$.

iii) Toute réunion d'un **nombre fini** de fermés est fermée : $\bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i = F$.

3° Fermés d'un espace relatif A inclus dans E. — Les fermés F_A de A sont de la forme $F_A = F \cap A$, où F est un fermé de E.

IV. — BORNES D'UN ESPACE MÉTRIQUE (E, d).

Soit $A \subset E$ et $\delta(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y)$ appelé diamètre de A.
Si $\delta(A) < \infty$, on dit que A est borné.

Théorème 1.IV.1.

$$A \text{ borné} \Leftrightarrow \exists a \in E \text{ et } r_a \quad \text{tel que} \quad B_{r_a}(a) \supset A.$$

V. — DÉFINITIONS DIVERSES ET COMPLÉMENTS RELATIFS A UN (E, d).

1° Voisinage de $a \in E$. — On appelle voisinage d'un point a de E tout ensemble V_a qui contient une boule ouverte $B_\rho(a)$. Un ouvert non vide est un voisinage de chacun de ses points.

2° Intérieur de A. — Soit $A \subset E$. On dit que x est intérieur à A si A est un voisinage de x, c'est-à-dire s'il existe $B_\rho(x)$ $(\rho > 0)$ inclus dans A. L'ensemble des points intérieurs à A est noté $\mathring{A}$:

$$A \text{ ouvert} \Leftrightarrow A = \mathring{A}.$$

3° Frontière de A. — On appelle frontière de A la différence $\delta A = \bar{A} - \mathring{A}$. Si $x \in \bar{A} - \mathring{A}$, toute boule $B_\rho(x)$ contient au moins un élément de A et un élément de $\complement A$.

4° Espace séparable. — Un sous-ensemble A est dit dense dans E si $\bar{A} = E$. Si (E, d) contient un sous-ensemble dénombrable dense, il est dit **séparable.** Par exemple $\mathbb{R}$ (puisque $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$), $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$.

5° Distance de deux ensembles. — Soit A et B deux parties de E.

$$d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$$

est appelée distance de A à B.

6° Espaces et sous-ensembles connexes. — Un espace métrique (E, d) connexe est caractérisé par l'une des deux propriétés suivantes, qui sont équivalentes :

— E n'est pas la réunion de deux ouverts (ou de deux fermés) disjoints non vides;

— les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées sont E et $\varnothing$.

Une partie A d'un espace (E, d) est dite connexe lorsque le sous-espace (A, d) est connexe.

A connexe $\Leftrightarrow$ de tout recouvrement de A par **deux ouverts disjoints** non vides, on peut extraire **un ouvert** contenant A.

Exemple :

$$E = \mathbb{C} \text{ et } A_\alpha = \{z ; |z+1| \leqslant \alpha \text{ et } |z-1| < 1\}, \ \alpha \text{ constante positive,}$$
$$A_\alpha \text{ connexe si } \alpha \geqslant 1, \text{ non connexe si } \alpha < 1.$$

EXERCICES DU CHAPITRE 1

1.I.1. ◆ **(Distance SNCF.)**
$\mathbb{C}$ étant le corps des complexes, on considère l'application de $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par

$$(z, z') \mapsto d(z, z') = |z-z'|, \text{ si } \arg z = \arg z' \text{ ou si l'un des deux éléments } z \text{ ou } z' \text{ est nul,}$$
$$= |z|+|z'| \text{ dans tous les autres cas.}$$

Établir qu'il s'agit d'une distance sur $\mathbb{C}$.

1.I.2. ◆ *Sur $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ on définit $d(z, z')$ par*

$$d(z, z') = |z-z'|, \text{ si } |z| = |z'|, \qquad d(z, z') = |z|+|z'|, \text{ si } |z| \neq |z'|.$$

Vérifier qu'il s'agit d'une distance sur $\mathbb{C}$.

1.I.3. ◆◆ *Vérifier directement que les applications suivantes de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ sont bien des distances. Indiquer quelles sont les boules ouvertes de centre O et de rayon 1 correspondantes dans $\mathbb{R}^2$. On note*

$$x = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \dots, y_n).$$

a) $(x, y) \mapsto d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i|.$

b) $(x, y) \mapsto d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i-y_i|^2}.$

c) $(x, y) \mapsto d_\infty(x, y) = \sup_{i\in[1,\dots,n]} |x_i-y_i|.$

Pour le b) utiliser la relation

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2},$$

où a_i et $b_i \in \mathbb{R}$ (inégalité de Cauchy-Schwarz).

I.1.4. ◆◆◆ 1° *Soit $\gamma \in]0, +1[$, démontrer que $\forall x > 0$, $x^\gamma-1 \leqslant \gamma(x-1)$.*
En déduire que

$$\forall\alpha \text{ et } \forall\beta \geqslant 0, \text{ tels que } \alpha+\beta = 1 \text{ et } \forall a \text{ et } \forall b \geqslant 0$$

on a

(1) $\quad a^\alpha b^\beta \leqslant \alpha a+\beta b.$

2° *Établir l'inégalité de Hölder :*

(2) $$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^{r'}\right)^{\frac{1}{r'}}, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1,$$

r et r' étant des constantes positives, et les a_i, b_i des réels positifs ou nuls. On posera

$$a = \frac{a_i}{A^{\frac{1}{r}}},\ b = \frac{b_i}{B^{\frac{1}{r}}}, \qquad \text{avec} \qquad A = \sum_{i=1}^{n} a_i^r \qquad \text{et} \qquad B = \sum_{i=1}^{n} b_i^r.$$

3° *On définit l'application $d_p(x, y)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ par*

$$(x, y) \mapsto d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } p \geqslant 1.$$

Vérifier qu'il s'agit d'une distance sur $\mathbb{R}^n$.
On démontrera d'abord l'inégalité de Minkowski:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

en utilisant une majoration convenable de

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i + b_i)^{p-1} \qquad \text{et de} \qquad \sum_{i=1}^{n} b_i(a_i + b_i)^{p-1}.$$

4° *x et y étant fixés, quelle est la limite pour $p \to +\infty$ de $d_p(x, y)$?*

1.I.5. ◆

1° *Soit ϕ une fonction à valeurs réelles strictement croissante, définie sur* $[0, +\infty[$ *telle que* $\phi(0) = 0$ *et vérifiant $\phi(u+v) \leqslant \phi(u) + \phi(v)$ (sous-additivité). Montrer que si d est une distance définie sur un ensemble E, $\phi(d)$ est également une distance sur E.*

2° Application : $d_1 = \dfrac{d}{1+d}$, $d_2 = Log\,(1+d)$, $d_3 = d^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ *sont des distances sur E.*

1.I.6. ◆

Une semi-distance, ou écart, sur un ensemble E est une application e de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ qui satisfait aux deuxième et troisième axiomes des distances, le premier axiome étant remplacé par

$$x = y \Rightarrow e(x, y) = 0.$$

1° *Donner un exemple d'écart.*

2° *Montrer que la relation $\mathfrak{R}$ définie par*

$$x\ \mathfrak{R}\ y \Leftrightarrow e(x, y) = 0$$

est une relation d'équivalence sur E. En déduire qu'on peut définir une distance sur l'espace quotient $\dfrac{E}{\mathfrak{R}}$.

1.I.7. ◆◆

Espaces ultramétriques.

Une ultra-distance sur un ensemble E est une application d de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$ satisfaisant aux premier et deuxième axiomes des distances, le troisième étant remplacé par

$$\forall x, y, z \in E,\ d(x, y) \leqslant \sup\,[d(x, z),\ d(z, y)].$$

1° *Montrer que d est une distance sur E. L'espace (E, d) est dit ultramétrique.*

Exemple : *On considère l'ensemble $\mathfrak{T}$ des polynômes à une indéterminée sur un corps $\mathbb{K}$. Montrer que l'on définit une ultra-distance sur $\mathfrak{T}$ en posant*

$$d(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q,$$
$$d(P, Q) = e^{-val(P-Q)}, \text{ si } P \neq Q,$$

$val(A)$ désigne la valuation du polynôme A.

2° *Montrer que dans un espace ultramétrique (E, d)*

$$\text{si } d(x, z) \neq d(z, y) \text{ alors } d(x, y) = \sup[d(x, z), d(z, y)].$$

1.I.8. ◆◆ **Valeur absolue p-adique.**

Soit c un réel tel que $c \in]0, 1[$ et p un nombre premier donnés. Tout élément x de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels peut s'écrire

$$x = p^\alpha \frac{a}{b},$$

$\alpha \in \mathbb{Z}$, a et b étant des entiers, premiers avec p.
On définit l'application de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}_+$: $x \mapsto |x|_p$ par

$$|0|_p = 0 \qquad \text{et} \qquad |x|_p = c^\alpha.$$

1° *Vérifier que $|x+y|_p \leqslant \sup(|x|_p, |y|_p)$.*
Montrer que l'application $x \mapsto |x|_p$ est une valeur absolue sur le corps $\mathbb{Q}$. On l'appelle valeur absolue p-adique.

2° *On pose $d^{(p)}(x, y) = |x-y|_p$ pour $x, y \in \mathbb{Q}$. Montrer que $d^{(p)}$ est une ultra-distance sur $\mathbb{Q}$ (cf. exercice **1.I.7.**).*

1.II.1. ◆ *Soit d une distance sur un ensemble E, on considère*

$$\delta(x, y) = \inf[1, d(x, y)], \quad \forall x, y \in E.$$

1° *Montrer que δ est également une distance sur E.*

2° *On prend $E = \mathbb{R}^2$ et $d = d_2$ distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$; étudier les boules ouvertes et fermées de l'espace métrique $(\mathbb{R}^2, \delta)$.*

1.II.2. ◆◆ *Déterminer les boules ouvertes et fermées des espaces métriques définis sur $\mathbb{C}$ à l'aide des distances étudiées aux exercices **1.I.1.** et **1.I.2.***

1.II.3. ◆ *On considère un ensemble E de quatre éléments: $E = \{a, b, c, d\}$.*

1° *Les familles suivantes :*

$$U_1 = \{\emptyset, \{a\}, E\},$$
$$U_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, d\}, E\},$$
$$U_3 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, E\},$$

sont-elles des topologies sur E?

2° *Donner un exemple d'une topologie sur E comportant quatre ouverts.*

1.II.4. ◆ *Établir que les distances définies dans l'exercice* **1.I.3.** *sont équivalentes. Même question pour les distances* d_p *de l'exercice* **1.I.4.**

1.II.5. ◆ *Si d est une distance, les distances définies par*

$$\frac{d}{1+d}, \quad Log\,(1+d), \quad d^{\alpha}(0<\alpha<1),$$

(voir l'exercice **1.I.5.***) sont-elles uniformément équivalentes à d?*

1.II.6. ◆◆◆ *Soit O un ouvert quelconque de* $\mathbb{R}$ *muni de la distance naturelle.*

1° *Étudier l'ensemble* $A=\{x\,;\,x\in\complement O, x>a\}$ *et montrer que, si A n'est pas vide, il admet une borne inférieure* μ *avec* $\mu\notin O$*. En conclure que* $[a, +\infty[\subset O$ *ou* $[a, \mu[\subset O$.

2° *Étudier l'ensemble* $B=\{x\,;\,x\in\complement O, x<a\}$ *et montrer que, si B n'est pas vide, il admet une borne supérieure* λ *avec* $\lambda\notin O$*. En déduire que* $\forall a\in O, \exists]\lambda, \mu[\subset O$ *disjoint de toute autre partie de O, avec* $a\in]\lambda, \mu[$ *(éventuellement* $\lambda=-\infty$, $\mu=+\infty$).

3° *Utiliser la propriété précédente pour établir que l'ouvert le plus général de la droite numérique est constitué par une réunion dénombrable d'intervalles ouverts.*

1.III.1. ◆ **Fermeture sur un ensemble.**

On définit sur $\mathcal{P}(E)$*, ensemble des parties d'un ensemble E, l'application F suivante :*

$$F:\ A\mapsto F(A),\ \ \forall A\in\mathcal{P}(E),\ F(A)\in\mathcal{P}(E),$$

que l'on appelle fermeture sur E lorsqu'elle satisfait aux quatre axiomes suivants :

(1) $F(\varnothing)=\varnothing$ *(invariance du vide),*

(2) $A\subset F(A)$ *(croissance),*

(3) $A\subset B\Rightarrow F(A)\subset F(B)$ *(isotonie),*

(4) $F[F(A)]=F(A)$ *(idempotence).*

Démontrer que, dans un espace métrique (et plus généralement dans un espace topologique quelconque), l'application suivante :

$$A\mapsto \bar{A},\ \bar{A} \text{ adhérence de } A,$$

est bien une fermeture au sens précédent et que cette fermeture satisfait à la propriété supplémentaire suivante :

$$F(A\cup B)=F(A)\cup F(B) \text{ (additivité).}$$

1.III.2. ◆ *Dans* $\mathbb{R}$ *muni de la distance naturelle, l'ensemble*

$$\{(-1)^n+\frac{1}{n},\quad n\in\mathbb{N}^*\}$$

est-il fermé?

Dans $\mathbb{R}^2, (x_1, x_2)$ *muni de la distance naturelle, les ensembles suivants :*

$$a \leqslant x_1 \leqslant b, \quad x_1^2 - x_2^2 \leqslant 1, \quad \{x_1^2 - x_2^2 \leqslant 1 \quad \text{et} \quad x_1^2 + x_2^2 < 2\}$$

sont-ils fermés ?

1.III.3. ◆◆ ◆

1° *Dans* $\mathbb{R}^2$, (x, y) *muni de la distance naturelle, on considère les boules*

$$\omega_n = \left\{ (x, y);\ \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{k^2}{n^2} \right\},$$

$n \in \mathbb{N}^*$ *et k constante positive ou nulle. L'ensemble* $\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n$ *est-il un fermé ? Discuter.*

2° *Même question pour* $\omega_n = \left\{ (x, y);\ \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{k_n^2}{n^2} \right\}$, *où* $\{k_n\}$ *est une suite positive bornée.*

1.III.4. ◆

Boule fermée et fermeture de la boule ouverte.

1° *Soit* $B_r(x)$ *et* $B'_r(x)$ *les boules respectivement ouvertes et fermées d'un espace métrique* (E, d). *Montrer que* $\overline{B_r(x)} \subset B'_r(x)$.

2° *Dans* $\mathbb{Z}$ *l'ensemble des entiers algébriques muni de la distance naturelle* $d(n, m) = |n - m|$, *définir les boules* $B_1(n)$, $\overline{B_1(n)}$, $B'_1(n)$. *Quelle conclusion peut-on en tirer ?*

1.III.5. ◆

$B'_\rho(a)$ *désigne la boule fermée de centre a et de rayon ρ dans un espace métrique* (E, d).

a) *Déterminer* $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1+\frac{1}{n}}(a)$. *Qu'en déduit-on ?*

b) *Même question pour* $\bigcup_{n=1}^{\infty} B'_{\frac{n}{n+1}}(a)$.

1.III.6. ◆◆

$\boldsymbol{F = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n}$ **et** $\boldsymbol{O = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n}$.

Soit F un fermé quelconque d'un espace métrique (E, d). *A chaque entier positif, n, on fait correspondre l'ouvert* O_n *tel que* $O_n = \bigcup_{x \in F} B_{\frac{1}{n}}(x)$, *où* $B_{\frac{1}{n}}(x)$ *désigne la boule ouverte de centre x et de rayon* $\frac{1}{n}$.

1° *Montrer que* $F \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$.

Démontrer l'inclusion réciproque. On établira que si $y \in \bigcap_1^{\infty} O_n$ *pour chaque entier n, il existe* $x_n \in F$ *tel que* $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(y)$.

2° *En déduire que tout fermé d'un espace métrique est l'intersection dénombrable d'une famille d'ouverts et que tout ouvert est l'union dénombrable d'une famille de fermés.*

1.III.7. ◆◆◆ **Propriétés des boules dans un espace ultramétrique.**

[*Voir la définition et les premières propriétés d'un ultramétrique* (E, d) *dans l'exercice* **1.I.7.**]

On rappelle que, dans un tel espace

$$d(x, z) \neq d(z, y) \Rightarrow d(x, y) = \sup\,[d(x, z), d(z, y)].$$

1° *Montrer que toute boule ouverte* $B_r(x)$ *est un ensemble ouvert et fermé. Établir que* $\forall y \in B_r(x)$, *on a* $B_r(y) = B_r(x)$.

2° *Montrer que toute boule fermée* $B'_r(x)$ *est un ensemble ouvert et fermé et que* $\forall y \in B'_r(x)$, *on a* $B'_r(y) = B'_r(x)$.

3° *Montrer que si deux boules ont une intersection non vide, l'une est contenue dans l'autre.*

1.III.8. ◆◆ *On munit* $\mathbb{C}$ *de la distance* $d: (z_1, z_2) \mapsto d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ *et soit*

$A_1 = \{z \in \mathbb{C};\ |z-1| \leqslant \alpha\}$, α *constante réelle positive ou nulle,*

$A_2 = \{z \in \mathbb{C};\ |z+1| \leqslant \alpha\}$,

$A\ = A_1 \cup A_2$.

1° *a) Montrer que* A *est fermé dans* $\mathbb{C}$.

b) Montrer que pour $\alpha < 1$, A_1 *et* A_2 *sont à la fois ouverts et fermés dans le sous-espace métrique* A. *Que peut-on dire lorsque* $\alpha \geqslant 1$?

2° *Même question que précédemment, mais relativement à*

$$B_1 = \{z \in \mathbb{C};\ |z-1| < \alpha\},$$
$$B_2 = \{z \in \mathbb{C};\ |z+1| \leqslant \alpha\},$$
$$B\ = B_1 \cup B_2.$$

1.III.9. ◆ **Fermeture d'un sous-groupe.**

Soit A *un sous-groupe additif (sous-anneau, sous-corps) d'un groupe (d'un anneau, d'un corps) muni d'une distance. Montrer que* $\bar{A}$ *est aussi un sous-groupe additif (sous-anneau, sous-corps).*

1.IV.1. ◆ A *et* B *sont deux ensembles bornés d'un espace métrique. Montrer que la réunion* $A \cup B$ *est également bornée.*

1.IV.2. ◆ *On sait que sur* $\mathbb{R}$ *les deux distances* d *et* $d' = \dfrac{d}{1+d}$ *sont équivalentes.*

Montrer que l'espace métrique $(\mathbb{R}, d')$ *est borné lorsque* d *est la distance naturelle. Que peut-on en conclure?*

1.V.1. ◆◆ **Filtres de voisinages.**

Soit E *un ensemble quelconque, on appelle filtre sur* E *un ensemble* $\mathcal{F}$ *de parties de* E *satisfaisant aux axiomes suivants:*

(1) $\varnothing \notin \mathcal{F}$,

(2) *Si* $A \in \mathcal{F}$ *et* $B \supset A$ *alors* $B \in \mathcal{F}$,

(3) A *et* $B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$.

Exemples :

1° *Montrer que l'ensemble des complémentaires des parties finies de* $\mathbb{N}$ *constitue un filtre sur* $\mathbb{N}$.

2° (E, d) *étant un espace métrique, montrer que l'ensemble* $\mathcal{V}_a$ *des voisinages* V_a *d'un point* a *constitue un filtre (appelé filtre des voisinages).*

1.V.2. ◆◆

1° *Soit* A *un sous-ensemble ouvert dans un espace métrique* (E, d). *Montrer que pour tout sous-ensemble* B *on a* $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$.

2° *Dans* $\mathbb{R}^2$ *(distance naturelle), on considère deux disques* D_1 *et* D_2 *fermés disjoints. Soit* $A = \mathring{D}_1 \cup \partial D_2$, $B = \mathring{D}_2$.
Montrer que $A \cap \bar{B}$ *n'est pas contenu dans* $\overline{A \cap B}$.
Donner sur $\mathbb{R}$ *un exemple d'une telle circonstance.*

3° *Donner, dans* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^2$, *des exemples d'ouverts* A *et* B *tels que les quatre ensembles suivants soient tous différents :* $A \cap \bar{B}$, $B \cap \bar{A}$, $\overline{A \cap B}$, $\bar{A} \cap \bar{B}$.

•

1.V.3. ◆◆◆

Propriétés de l'intérieur d'un ensemble.

1° *Démontrer que pour tout ensemble* A *l'intérieur* $\mathring{A}$ *est le plus grand ouvert contenu dans* A. *[On pourra montrer que,* $\mathring{A} = \cup O_i$, O_i *ouvert* $\subset A$.*]*

2° *Établir les propriétés suivantes :*

$$A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}, \quad \forall A \text{ et } B : \ \widehat{A \cup B}^{\circ} = \mathring{A} \cup \mathring{B}.$$

3° *On pose* $\alpha(A) = \mathring{\bar{A}}$ *et* $\beta(A) = \overline{\mathring{A}}$. *Montrer que*

$$A \text{ ouvert} \Rightarrow A \subset \alpha(A) ; \quad A \text{ fermé} \Rightarrow \beta(A) \subset A.$$

En déduire que pour tout ensemble A

$$\alpha[\alpha(A)] = \alpha(A) \qquad \text{et} \qquad \beta[\beta(A)] = \beta(A).$$

4° *Donner un exemple dans* $\mathbb{R}$ *où les cinq ensembles* $\mathring{A}$, A, $\bar{A}$, $\alpha(A)$ *et* $\beta(A)$ *sont tous distincts.*

1.V.4. ◆

A est une partie d'un espace métrique et $d(x, A)$ *désigne la distance du point* x *à la partie* A.

1° *Montrer que* $d(x, A) = 0$ *si, et seulement si,* x *est adhérent à* A.

2° *Établir que* $d(x, A) = d(x, \bar{A})$.

1.V.5. ◆◆

A et B sont deux parties non vides d'un espace métrique ; démontrer que

$$d(A, B) = \inf_{x \in A} d(x, B) \qquad \text{et} \qquad d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B}).$$

1.V.6. ◆◆◆ *Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties fermées non vides d'un espace métrique (E, d). Pour A et $B \in \mathcal{F}$ on pose*

$$\lambda(A, B) = \sup_{a \in A} [d(a, B)], \qquad \mu(A, B) = \sup_{b \in B} [d(b, A)]$$

et $$d(A, B) = \sup [\lambda(A, B), \mu(A, B)].$$

1° *Calculer $d(\{a\},\{b\})$, où a et $b \in E$.
Montrer que $d(A, B) = d(B, A)$.*

2° *Établir que $d(A, B) = 0 \Rightarrow A = B$.
Soit $a \in E$, B et $C \in \mathcal{F}$, montrer que l'on a*

$$\forall a \in E : d(a, C) \leqslant d(a, B) + d(B, C).$$

3° *Démontrer que d est une distance sur $\mathcal{F}$.*

1.V.7. ◆◆ *Montrer que $\mathbb{R}$ muni de la distance naturelle est connexe.*

1.V.8. ◆ *Montrer que si A est un ensemble connexe, $\bar{A}$ l'est également.*

1.V.9. ◆◆◆ 1° *Soit A et B deux sous-ensembles connexes d'un espace métrique (E, d) satisfaisant à $A \cap B \neq \emptyset$. Montrer que $A \cup B$ est connexe. (On établira d'abord que si $A \cup B$ n'est pas connexe, A et B sont nécessairement inclus dans deux ouverts disjoints.)*

2° *En déduire que si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des sous-ensembles connexes tels que $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$, pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$ alors l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est connexe.*

3° *Si une famille d'ensembles connexes A_i $(i = 1, \ldots, n)$ contient un ensemble rencontrant tous les autres, la réunion est connexe.*

SOLUTIONS

1.I.1.

1° Soit $d(z, z') = 0$.

Alors, ou bien $|z-z'| = 0$ et $\arg z = \arg z'$, c'est-à-dire $z = z'$,
ou bien $|z|+|z'| = 0$ soit $|z| = |z'| = 0$, donc $z = z' = 0$.

L'axiome de séparation est donc bien vérifié.

2° $d(z, z') = d(z', z)$ d'après la symétrie même de la définition.

3° Soit à démontrer l'inégalité triangulaire suivante :

$$d(z, z') \leqslant d(z, z'')+d(z'', z').$$

Envisageons tous les cas possibles.

α) $\arg z = \arg z' = \arg z''$ alors, $|z-z'| \leqslant |z-z''|+|z''-z'|$.

β) $\arg z = \arg z' \neq \arg z''$ alors, $|z-z'| \leqslant |z|+|z''|+|z''|+|z'|$, puisque

$$|z-z'| \leqslant |z|+|z'|.$$

γ) $\arg z \neq \arg z'$ et $\arg z''$ égal à l'un des deux, soit $\arg z'' = \arg z$, par exemple. Alors,

$$d(z, z') = |z|+|z'|, \quad d(z, z'') = |z-z''|, \quad d(z'', z') = |z'|+|z''|;$$

mais

$$|z| = |z-z''+z''| \leqslant |z-z''|+|z''| \Rightarrow |z|+|z'| \leqslant |z-z''|+|z''|+|z'|.$$

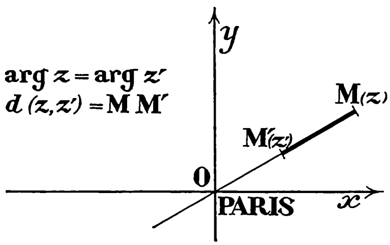
On obtient le même résultat si l'on suppose $\arg z'' = \arg z'$.

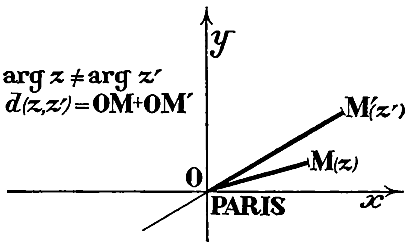
δ) Les trois arguments sont différents deux à deux, alors

$$|z|+|z'| \leqslant |z|+|z''|+|z''|+|z'|.$$

Dans tous les cas l'inégalité triangulaire est vérifiée.

L'espace métrique ainsi obtenu peut être appelé « espace de la SNCF ». (Il suffit de faire le schéma pour en comprendre la raison!)





1.I.2.

Il s'agit de vérifier les trois axiomes suivants :

1° $d(z, z') = 0$, ou bien $|z-z'| = 0 \Leftrightarrow z = z'$,
ou bien $|z|+|z'| = 0 \Leftrightarrow |z| = |z'| = 0$ donc $z = z'$.

2° $|z-z'| = |z'-z|$ et $|z|+|z'| = |z'|+|z|$ donc $d(z, z') = d(z', z)$.

3° On envisage les différentes possibilités pour démontrer l'inégalité triangulaire.

α) $|z| = |z'| = |z''|$, alors $|z-z'| \leqslant |z-z''|+|z''-z'| \Rightarrow d(z,z') \leqslant d(z,z'')+d(z'',z')$.

β) $|z| = |z'| \neq |z''|$, alors $d(z, z') = |z-z'| \leqslant |z|+|z'| \leqslant d(z, z'')+d(z'', z')$.

γ) $|z| \neq |z'|$ et $|z| = |z''|$, par exemple;
l'inégalité

$$|z'|\leqslant|z'-z''|+|z''| \text{ entraîne } |z|+|z'|\leqslant|z'-z''|+|z''|+|z|,$$

donc

$$d(z, z') \leqslant d(z, z'')+d(z'', z').$$

δ) Les trois modules sont distincts deux à deux. L'inégalité triangulaire est alors immédiate, puisque

$$|z|+|z'| \leqslant |z|+|z''|+|z''|+|z'|.$$

1.I.3.

Dans les trois cas les axiomes 1 et 2 sont immédiatement vérifiables. Il reste donc à vérifier l'axiome 3.

a) $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i-z_i+z_i-y_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i-z_i|+\sum_{i=1}^{n} |z_i-y_i| \Rightarrow d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$.

b) $\sum_{i=1}^{n} |x_i-z_i+z_i-y_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i-z_i|^2+\sum_{i=1}^{n} |z_i-y_i|^2+2\sum_{i=1}^{n} |x_i-z_i||z_i-y_i|$.

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire

$$\sum_{=1}^{n} |x_i-z_i||z_i-y_i|\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i-z_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |z_i-y_i|^2},$$

donc

$$d^2(x, y)\leqslant[d(x, z)+d(z, y)]^2,$$

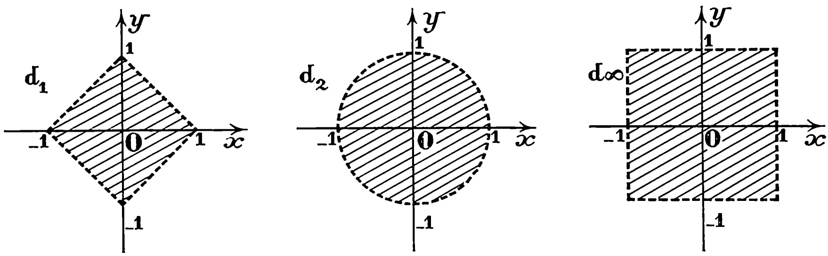
ce qui est équivalent à l'axiome 3.

c) Puisque

$$\sup_i |x_i - y_i| \leqslant \sup_i |x_i - z_i| + \sup |z_i - y_i|$$

l'axiome 3 est vérifié.

Les boules ouvertes sont représentées ci-dessous, la frontière est exclue.



La notation d_1, d_2, d_∞ est justifiée à l'exercice suivant.

1.I.4.

1° La fonction $x \mapsto x^\gamma$ est concave puisque $\gamma \in]0, +1[$, la dérivée seconde s'écrivant $\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}$.

Le graphe de cette fonction est donc situé au-dessous de la tangente au point $(+1, +1)$. Alors,

$$\forall x \geqslant 0 \; : \; x^\gamma \leqslant \gamma(x-1)+1, \qquad \text{ou} \qquad x^\gamma \leqslant \gamma x + 1 - \gamma.$$

En posant $\alpha = \gamma$ et $\beta = 1-\gamma$, la relation (1) à démontrer s'écrit

$$a^\gamma b^{1-\gamma} \leqslant \gamma a + (1-\gamma)b.$$

Appliquons la relation précédente avec $x = \dfrac{a}{b}$ [$b \neq 0$, sinon (1) est triviale], il vient

$$a^\gamma b^{-\gamma} \leqslant \frac{\gamma a}{b} + 1 - \gamma,$$

soit

$$a^\gamma b^{1-\gamma} \leqslant \gamma a + (1-\gamma)b,$$

c'est-à-dire (1).

2° Les a_i étant supposés non tous nuls, ainsi que les b_i, considérons la somme

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{A^{\frac{1}{r}}} \frac{b_i}{B^{\frac{1}{r'}}}, \qquad \text{avec} \qquad A = \sum_{i=1}^{n} a_i^r \text{ et } B = \sum_{i=1}^{n} b_i^{r'},$$

alors

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i^r}{A}\right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{b_i^{r'}}{B}\right)^{\frac{1}{r'}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{r}\cdot\frac{a_i^r}{A} + \frac{1}{r'}\cdot\frac{b_i^{r'}}{B}\right),$$

d'après l'inégalité (1) applicable ici avec $\alpha = \frac{1}{r}$ et $\beta = \frac{1}{r'}$.

Donc

$$S \leqslant \frac{1}{rA} \sum_{i=1}^{n} a_i^r + \frac{1}{r'B} \sum_{i=1}^{n} b_i^r = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$$

ce qui établit l'inégalité de Hölder (2).

Pour $r = r' = 2$ on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz utilisée dans l'exercice précédent.

3° Les axiomes 1 et 2 sont immédiats. La vérification de l'axiome 3 résulte de l'inégalité suivante (de Minkowski) :

— pour a_i et $b_i \geqslant 0$ et $p \geqslant 1$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}; \tag{3}$$

— pour $p = 1$, (3) est une égalité triviale.

Soit donc $p > 1$ et $s_i = a_i + b_i$,

$$\sum_{i=1}^{n} s_i^p = \sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i) s_i^{p-1}.$$

De l'inégalité (2) avec $r = p$ et $r' = \frac{p}{p-1}$ (applicable puisque $p > 1$), on déduit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i s_i^{p-1} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} s_i^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

De même avec $\sum_{i=1}^{n} b_i s_i^{p-1}$; alors

$$\sum_{i=1}^{n} s_i^p \leqslant \left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left(\sum_{i=1}^{n} s_i^p\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

donc

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i+b_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Il suffit alors d'appliquer cette inégalité avec

$$a_i = |x_i - z_i| \qquad \text{et} \qquad b_i = |z_i - y_i|$$

pour constater que l'axiome 3 est satisfait.

d_p est donc bien une distance, les cas particuliers $p = 1, 2$ ont été vus à l'exercice 1.I.3.

La boule ouverte de centre O et de rayon 1 correspondante est constituée par l'ensemble des points $\sum_{i=1}^{n} x_i^p < 1$. Dans $\mathbb{R}^2$ la représentation est aisée.

4° Soit $\lambda = \sup_i |x_i - y_i|$; on a évidemment

$$\lambda^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \leqslant n\lambda^p,$$

ou encore

$$\lambda \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant n^{\frac{1}{p}} \lambda.$$

Lorsque $p \to +\infty$, $n^{\frac{1}{p}} \to 1$ et, par suite,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \underset{p \to \infty}{\to} \lambda = \sup_i |x_i - y_i|.$$

1.I.5.

1° $u \geqslant 0 \Rightarrow \phi(u) \geqslant 0$ puisque ϕ croissante et $\phi(0) = 0$.
Vérifions alors les trois axiomes :

(1) $\phi[d(x, y)] = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(2) $\phi[d(x, y)] = \phi[d(y, x)]$;
(3) $\phi[d(x, y)] \leqslant \phi[d(x, z)] + \phi[d(z, y)]$.

Ces trois points s'établissent ainsi :

$\phi[d(x, y)] = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
$\phi[d(x, y)] = \phi[d(y, x)]$, puisque $d(x, y) = d(y, x)$,
$\phi[d(x, y)] \leqslant \phi[d(x, z) + d(z, y)]$, puisque ϕ est croissante, donc
$\phi[d(x, y)] \leqslant \phi[d(x, y)] + \phi[d(y, z)]$, puisque ϕ est sous-additive.

2° Il suffit de montrer que les trois fonctions

$$x \mapsto \frac{x}{1+x}, \qquad x \mapsto \operatorname{Log}(1+x) \qquad \text{et} \qquad x \mapsto x^\alpha$$

sont sous-additives pour $x \geqslant 0$, puisque les autres hypothèses faites sur ϕ sont évidemment vérifiées ici.

a) $\dfrac{u+v}{1+u+v} \leqslant \dfrac{u}{1+u} + \dfrac{v}{1+v}$ résulte de l'identité

$$\frac{u}{1+u} + \frac{v}{1+v} - \frac{u+v}{1+u+v} = \frac{uv(u+v)}{(1+u)(1+v)(1+u+v)},$$

puisque u et v sont positifs ou nuls.

b) $\operatorname{Log}(1+u+v) \leqslant \operatorname{Log}(1+u) + \operatorname{Log}(1+v)$ résulte de $1+u+v \leqslant (1+u)(1+v)$, puisque $uv \geqslant 0$.

c) $(u+v)^\alpha \leqslant u^\alpha + v^\alpha$ résulte de l'inégalité $(x+1)^\alpha - x^\alpha - 1 \leqslant 0$ $(0 < \alpha < 1)$ pour $x \geqslant 0$.

1.I.6.

1° Dans $\mathbb{R}^n$ soit $e(x, y) = |x_{i_0} - y_{i_0}|$, i_0 fixé, $i_0 \in [1, \ldots, n]$,

$$x = y \Rightarrow \forall i, x_i = y_i \qquad \text{donc} \qquad e(x, y) = 0.$$

La réciproque est inexacte $e(x, y) = 0$ entraîne que les points de coordonnées x et y ont une même projection sur l'axe Ox_{i_0} et ne sont pas confondus en général.

2° La réflexivité et la symétrie de $\mathcal{R}$ sont immédiates.
Établissons la transitivité :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow e(x, y) = 0, \qquad y\mathcal{R}z \Leftrightarrow e(y, z) = 0,$$

mais

$$e(x, z) \leqslant e(x, y) + e(y, z), \qquad \text{donc} \qquad e(x, z) \leqslant 0,$$

alors

$$e(x, z) = 0 \text{ et } x \mathcal{R} z.$$

Soit $\frac{E}{\mathcal{R}}$ l'ensemble quotient et $\widehat{x_0}$ la classe d'équivalence de l'élément x_0 de E :

$$\widehat{x_0} = \{x; e(x, x_0) = 0\}.$$

Démontrons que l'écart de deux éléments de deux classes distinctes ne dépend pas du choix de ces éléments, cet écart sera donc caractéristique des deux classes. En effet, soit

$$x_1 \text{ et } x_2 \in \widehat{x_0} \text{ et } y_1 \text{ et } y_2 \in \widehat{y_0},$$

$$e(x_1, y_1) \leqslant e(x_1, x_2) + e(x_2, y_1) \leqslant e(x_1, x_2) + e(x_2, y_2) + e(y_2, y_1),$$

donc

$$e(x_1, y_1) \leqslant e(x_2, y_2), \qquad \text{puisque} \qquad e(x_1, x_2) = e(y_2, y_1) = 0;$$

mais aussi

$$e(x_2, y_2) \leqslant e(x_1, y_1)$$

en échangeant les couples (x_1, y_1) et (x_2, y_2),
donc

$$e(x_1, y_1) = e(x_2, y_2).$$

Posons alors

$$d(\widehat{x_0}, \widehat{y_0}) = e(x_0, y_0).$$

Les axiomes 2 et 3 sont bien vérifiés par définition.
Il reste à voir si l'axiome 1 est lui aussi vérifié.
Or, $d(\widehat{x_0}, \widehat{y_0}) = 0 \Leftrightarrow e(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 \in \widehat{y_0} \Leftrightarrow \widehat{x_0} = \widehat{y_0}$, d est donc une distance sur $\frac{E}{\mathcal{R}}$.

L'exemple du 1° dans $\mathbb{R}^2$ avec $e(x, y) = x_1 - y_1$ illustre ce résultat : les classes d'équivalence sont les droites parallèles à Ox_2 et la distance de deux classes est en fait la distance des deux droites parallèlement à Ox_1.

1.I.7.

1° Puisque

$$\sup [d(x, z), d(z, y)] \leqslant d(x, z)+d(z, y),$$

l'axiome 3 est *a fortiori* satisfait.

La valuation est le degré du monôme de plus bas degré. Il est immédiat que

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{val}(P-Q) = \operatorname{val}(Q-P);$$

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{val}(A+B) \geqslant \inf(\operatorname{val} A, \operatorname{val} B).$$

Les axiomes 1 et 2 étant satisfaits : l'axiome 1 par hypothèse et l'axiome 2 comme conséquence de (1), il reste à vérifier le troisième axiome.

D'après (2),

$$\operatorname{val}(P-Q) = \operatorname{val}(P-R+R-Q) \geqslant \inf[\operatorname{val}(P-R), \operatorname{val}(R-Q)],$$

donc

$$e^{-\operatorname{val}(P-Q)} \leqslant e^{\sup[-\operatorname{val}(P-R), -\operatorname{val}(R-Q)]}.$$

Comme $e^{\sup(a,b)} = \sup(e^a, e^b)$, on obtient

$$e^{-\operatorname{val}(P-Q)} \leqslant \sup\left[e^{-\operatorname{val}(P-R)}, e^{-\operatorname{val}(R-Q)}\right]$$

ce qui établit

$$d(P, Q) \leqslant \sup[d(P, R), d(R, Q)].$$

2° Supposons, par exemple $d(x, z) < d(z, y)$,

$$d(x, y) \leqslant \sup[d(x, z), d(z, y)] \Rightarrow d(x, y) \leqslant d(z, y).$$

Supposons que l'on ait $d(x, y) < d(z, y)$. Cette inégalité, jointe à $d(x, z) < d(z, y)$, montre alors que

$$d(z, y) > \sup[d(x, y), d(x, z)],$$

ce qui est contradictoire, donc

$$d(x, y) = d(z, y) = \sup[d(x, z), d(z, y)].$$

Variante :

$$d(x, z) < d(z, y) \Rightarrow d(x, y) \leqslant d(z, y),$$

donc

$$\sup[d(x, z), d(x, y)] \leqslant d(z, y) \leqslant \sup[d(x, z), d(x, y)].$$

Alors

$$d(z, y) = \sup[d(x, z), d(x, y)] = d(x, y), \qquad \text{puisque} \qquad d(z, y) > d(x, z).$$

Dans un espace ultramétrique *tout triangle est donc isocèle*, les deux côtés égaux étant supérieurs ou égaux au troisième côté.

1.I.8.

1° Il s'agit de vérifier les axiomes suivants :

$|x|_p = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (évident ici);

$|xy|_p = |x|_p|y|_p$;

$|x+y|_p \leqslant |x|_p + |y|_p$.

(En fait, pour ce dernier axiome on obtiendra mieux.)

Montrons d'abord que $|xy|_p = |x|_p|y|_p$.

$xy = p^\alpha \frac{a}{b} p^{\alpha'} \frac{a'}{b'} = p^{\alpha+\alpha'} \frac{aa'}{bb'}$, aa' et bb' sont premiers avec p,

donc $|xy|_p = c^{\alpha+\alpha'} = c^\alpha c^{\alpha'} = |x|_p|y|_p$.

Pour établir l'inégalité triangulaire on va montrer que $|x+y|_p \leqslant \sup(|x|_p, |y|_p)$, ce qui peut se faire par une vérification directe ou en remarquant que cette inégalité est équivalente à la propriété $|x|_p \leqslant 1 \Rightarrow |x+1|_p \leqslant 1$, cette dernière propriété s'établissant rapidement.

a) Vérification.

Soit $x = p^\alpha \frac{a}{b}$, $y = p^{\alpha'} \frac{a'}{b'}$. Supposons $\alpha < \alpha'$, alors

$$x+y = p^\alpha \left[\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} p^{\alpha'-\alpha}\right] = p^\alpha \frac{A}{B},$$

avec

$$A = ab' + a'bp^{\alpha'-\alpha} \qquad \text{et} \qquad B = bb'.$$

bb' est premier avec p, $ab' + a'bp^{\alpha'-\alpha}$ l'est également puisque ab' l'est; alors

$$|x+y|_p = c^\alpha = \sup(|x|_p, |y|_p).$$

Si $\alpha > \alpha'$, on a le même résultat avec $c^{\alpha'}$. Donc

$$|x+y|_p = \sup(|x|_p, |y|_p), \quad \text{si } |x|_p \neq |y|_p.$$

(Comparer avec la propriété (2) de l'exercice **1.I.7.**)

Il reste à voir le cas $|x|_p = |y|_p$, soit $\alpha' = \alpha$. Dans ce cas

$$x+y = p^\alpha \left(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}\right) = p^\alpha \frac{ab'+ba'}{bb'}.$$

bb' est premier avec p, mais $ab'+ba'$ ne l'est pas nécessairement, donc

$$x+y = p^{\alpha''} \frac{a''}{bb'} \text{ avec } \alpha'' \geqslant \alpha,\ a'' \text{ premier avec } p,$$

alors

$$|x+y|_p = c^{\alpha''} \leqslant c^\alpha = \sup(|x|_p, |y|_p).$$

Finalement, $|x+y|_p \leqslant \sup(|x|_p, |y|_p)$ dans tous les cas.

b) Autre démonstration.

Établissons que

$$(1) \quad |x+y|_p \leqslant \sup(|x|_p, |y|_p) \Leftrightarrow (2) \quad |x|_p \leqslant 1 \Rightarrow |x+1|_p \leqslant 1.$$

L'implication (1) $\Rightarrow$ (2) est immédiate puisque $|1|_p = 1$.

Démontrons l'implication réciproque.

Supposons x et y non nuls (sinon cas banal) et, par exemple, $|x|_p \leqslant |y|_p$ (sinon on échange x et y),
alors

$$\left|\frac{x}{y}\right|_p = \frac{|x|_p}{|y|_p} \leqslant 1,$$

donc (2) entraîne

$$\left|1+\frac{x}{y}\right|_p \leqslant 1, \qquad \text{soit} \qquad |x+y|_p \leqslant |y|_p = \sup(|x|_p, |y|_p).$$

Or, la propriété (2) est immédiate à démontrer puisque $|x|_p \leqslant 1$ signifie $\alpha \geqslant 0$ et donc $|1+x|_p \leqslant 1$.

2° Puisque $|-y|_p = |-1|_p|y|_p = |y|_p$, les axiomes définissant la valeur absolue $|y|_p$ entraînent automatiquement les axiomes de la distance pour $d^{(p)}(x, y) = |x-y|_p$.

De plus, en vertu de $|x+y|_p \leqslant \sup[|x|_p, |y|_p]$, il s'agit bien d'une ultra-distance.

1.II.1.

1° $(x, y) \mapsto \delta(x, y)$ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}_+$, puisque

$$d(x, y) \geqslant 0 \Rightarrow \inf[1, d(x, y)] \geqslant 0, \qquad \text{donc} \qquad \delta(x, y) \geqslant 0.$$

Vérifions maintenant les trois axiomes de la distance.

a) ***Séparation :***

$$\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

En effet,

$$\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow \inf[1, d(x, y)] = 0 \Leftrightarrow d(x, y) = 0,$$

or, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, puisque d est une distance.

b) ***Symétrie :***

$\delta(x, y) = \delta(y, x)$, puisque $d(x, y) = d(y, x)$ entraîne $\inf[1, d(x, y)] = \inf[1, d(y, x)]$.

c) ***Inégalité triangulaire :***

$$\delta(x, y) \leqslant \partial(x, z) + \delta(z, y), \qquad \forall x, y, z \in E.$$

On peut établir cette inégalité en envisageant les différentes possibilités, ou bien en utilisant des formules concernant $\inf(a, b)$ et $\inf(x, a+b)$.

Première méthode :

α) *L'un des deux nombres $d(x, z)$ et $d(z, y)$ est supérieur ou égal à 1.*

Alors l'un des deux nombres $\delta(x, z)$ et $\delta(z, y)$ est égal à 1, or on a toujours $\delta(x, y) \leqslant 1$, d'après la définition, donc

$$\delta(x, y) \leqslant \delta(x, z) \qquad \text{ou} \qquad \delta(x, y) \leqslant \delta(z, y).$$

Donc, *a fortiori,*

$$\delta(x, y) \leqslant \delta(x, z)+\delta(z, y).$$

β) Les deux nombres $d(x, z)$ et $d(z, y)$ sont inférieurs à 1.
Alors

$$\delta(x, z)+\delta(z, y) = d(x, z)+d(z, y).$$

Mais on a toujours

$$\delta(x, y) \leqslant d(x, y).$$

Or, d est une distance, donc

$$d(x, y) \leqslant d(x, z)+d(z, y) = \delta(x, y)+\delta(z, y).$$

On en déduit

$$\delta(x, y) \leqslant \delta(x, z)+\delta(z, y).$$

Tous les cas étant envisagés, l'inégalité triangulaire est démontrée.

Deuxième méthode :
Elle est basée sur l'application des formules

(1) $\quad \forall c \in \mathbb{R}, \quad a \leqslant b \Rightarrow \inf(a, c) \leqslant \inf(b, c),$

(2) $\quad \forall c \in \mathbb{R}_+, \quad a \text{ et } b > 0 \Rightarrow \inf(c, a+b) \leqslant \inf(c, a)+\inf(c, b).$

L'égalité

$$\delta(x, y) = \inf[1, d(x, y)]$$

et l'inégalité

$$d(x, y) \leqslant d(x, z)+d(z, y)$$

entraînent, en appliquant (1),

$$\delta(x, y) \leqslant \inf[1, d(x, z)+d(z, y)].$$

On peut alors appliquer (2) avec

$$c = 1, \quad a = d(x, z), \quad b = d(z, y),$$

puisque a et b sont tous deux positifs ou nuls.
Donc

$$\delta(x, y) \leqslant \inf[1, d(x, z)]+\inf[1, d(z, y)]$$

ce qui n'est autre que l'inégalité triangulaire.

2° Boules de $(\mathbb{R}^2, \delta)$: $B_\rho(x_0)$ et $B'_\rho(x_0)$.

a) Boules ouvertes :

<u>$\rho \leqslant 1$.</u>

$$\delta(x_0, x) < \rho \Leftrightarrow d(x_0, x) < \rho,$$

donc $B_\rho(x_0)$ est la boule euclidienne ouverte de centre x_0, de rayon ρ.

<u>$\rho > 1$.</u>

$$\delta(x_0, x) < \rho, \quad \text{mais} \quad \delta(x_0, x) \leqslant 1 < \rho, \ \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

$\mathbb{R}^2$ est donc la boule ouverte de centre x_0 et de rayon ρ ($\rho > 1$).

b) Boules fermées :

$\underline{\rho < 1.}$

$$\delta(x_0, x) \leqslant \rho \Leftrightarrow d(x_0, x) \leqslant \rho,$$

donc $B'_\rho(x_0)$ est la boule euclidienne fermée de centre x_0, de rayon ρ.

$\underline{\rho \geqslant 1.}$

$$\delta(x_0, x) \leqslant 1, \ \forall x \leqslant \mathbb{R}^2,$$

les boules fermées sont toujours $\mathbb{R}^2$.

On remarque que *pour* $\rho = 1$, *la boule ouverte est la boule euclidienne ouverte de centre* x_0, *de rayon* 1, alors que *la boule fermée est le plan tout entier.*

1.II.2.

1° Distance $d(z, z') = |z-z'|$, si $\arg z = \arg z'$, $d(z, z') = |z|+|z'|$ dans tous les autres cas.

a) Boules centrées à l'origine :

$$z_0 = 0, \ d(z_0, z) = |z_0|+|z| = |z|$$

(puisque $\arg 0$ n'est pas défini).

En conséquence, les boules ouvertes et fermées de centre O sont les boules euclidiennes correspondantes de rayon ρ.

b) Boules centrées en $z_0 \neq 0$:

$\underline{\rho < |z_0|.}$

Boules ouvertes : si $z_0 = |z_0|e^{i\alpha}$, intervalles ouverts $(|z_0|-\rho)e^{i\alpha}$, $(|z_0|+\rho)e^{i\alpha}$.
Boules fermées : segments $(|z_0|-\rho)e^{i\alpha}$, $(|z_0|+\rho)e^{i\alpha}$.

$\underline{\rho = |z_0|.}$

Intervalle ouvert de centre z_0, sur la droite passant par O et $M_0(z_0)$ définie par O et par $2z_0$, ces points étant exclus et pour la boule fermée l'intervalle précédent fermé.

$\underline{\rho > |z_0|.}$

Deux possibilités :

– sur la droite OM_0 l'ensemble des points z tels que

$$|z-z_0| < \rho \text{ (resp. inférieur ou égal à } \rho);$$

– l'ensemble des points z tels que

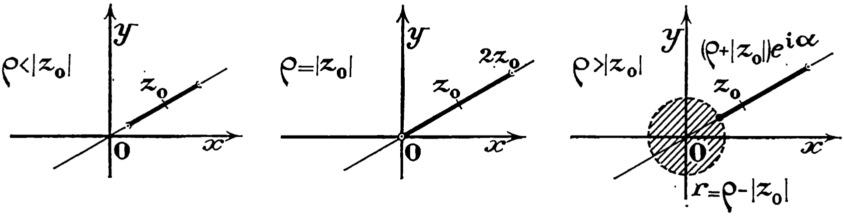
$$|z| < \rho - |z_0| \text{ (resp. } |z| \leqslant \rho - |z_0|).$$

Autrement dit,

$$\text{Boules ouvertes} \begin{cases} \arg z = \arg z_0, \ 0 < |z| < \rho + |z_0|, \\ \text{boule euclidienne ouverte de centre } O \text{ et de rayon } \rho - |z_0|. \end{cases}$$

$$\text{Boules fermées} \begin{cases} \arg z = \arg z_0, \ 0 < |z| \leqslant \rho + |z_0|, \\ \text{boule euclidienne fermée de centre } O \text{ et de rayon } \rho - |z_0|. \end{cases}$$

Schéma des boules ouvertes :



2° Les résultats sont analogues à ceux de la question 1°, le segment de droite étant toutefois à remplacer par un arc de cercle centré à l'origine, dont le milieu est z_0.

a) Boules centrées à l'origine :
Boules euclidiennes ouvertes (resp. fermées), de rayon ρ.

b) Boules centrées en z_0, $|z_0| \neq 0$ **:**

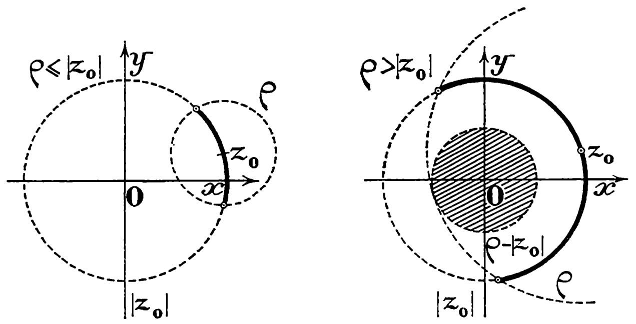
$\underline{\rho \leqslant |z_0|.}$

Arc de cercle, extrémités exclues (resp. incluses) sur le cercle $(O, |z_0|)$ obtenu par l'intersection avec le cercle (z_0, ρ).
Dans le cas de la boule fermée pour $\rho = |z_0|$, il faut adjoindre le point O.

$\underline{\rho > |z_0|.}$

Union d'un arc de cercle du type précédent et de la boule euclidienne ouverte (resp. fermée) de centre O et de rayon $\rho - |z_0|$.

Schéma des boules ouvertes :



1.II.3.

1° Pour U_1, U_2, U_3, l'axiome i) $\varnothing$ et $E \in U_j$ $(j = 1, 2, 3)$ est satisfait.
Les axiomes de l'union et de l'intersection sont également satisfaits pour U_1 et U_3, l'axiome de la réunion ne l'est pas pour U_2. Donc, U_1 et U_3 sont des topologies, U_2 n'en est pas une.

2° En s'inspirant des exemples précédents, on peut considérer l'ensemble

$$U_4 = \{\phi, \{a\}, \{a, b\}, E\},$$

puisque

$$\{a\} \cap \{a, b\} = \{a\} \in U_4$$

et

$$\{a\} \cup \{a, b\} = \{a, b\} \in U_4;$$

U_4 est bien une topologie sur E comportant quatre ouverts.

1.II.4.

1° Une condition suffisante pour que d et d' soient équivalentes est qu'il existe deux constantes positives, λ et μ, telles que

$$\lambda d < d' < \mu d.$$

(En fait, cette condition est plus forte que celle de l'équivalence; elle entraîne aussi que d et d' sont alors uniformément équivalentes.)

Il est immédiat que l'on a

$$d_\infty \leqslant d_1 \leqslant n d_\infty \qquad \text{et} \qquad d_\infty \leqslant d_2 \leqslant \sqrt{n}\, d_\infty,$$

ce qui entraîne l'équivalence de d_1 et d_∞, de d_2 et d_∞, donc celle de d_1 et d_2.

On obtient d'ailleurs facilement la double inégalité

$$d_2 \leqslant d_1 \leqslant \sqrt{n}\, d_2.$$

2° Pour les distances d_p l'uniforme équivalence, et par suite l'équivalence, résultent des inégalités

$$d_\infty \leqslant d_p \leqslant n^{\frac{1}{p}} d_\infty$$

(puisqu'alors d_p est uniformément équivalent à d_∞, $\forall p \geqslant 1$).

1.II.5.

Lorsque $d' = f(d)$ la condition d'équivalence uniforme indiquée revient à la continuité à l'origine des applications $x \mapsto f(x) = x'$ et $x' \mapsto x$ (lorsque l'application réciproque, $f^{-1} : x' \mapsto x$, existe). C'est précisément le cas ici, puisque

$$d = \frac{d_1}{1-d_1}, \qquad d = e^{d_2} - 1, \qquad d = d_3^{\frac{1}{\alpha}} \ (0<\alpha<1),$$

et les applications sont bicontinues à l'origine.

La propriété est générale et peut être énoncée pour $d' = \phi(d)$, ϕ fonction possédant les propriétés définies à l'exercice 1.I.5. et supposée de plus continue. Alors ϕ^{-1} existe et est continue d'après le théorème sur les fonctions réciproques.

On remarquera, sur les exemples, que l'uniforme d'équivalence de d et $\phi(d)$ n'entraîne pas nécessairement l'existence de constantes, λ et μ, telles que

(1) λ et $\mu > 0$ $\quad \lambda d(x, y) \leqslant \phi[d(x, y)] \leqslant \mu d(x, y), \ \forall x, y.$

On a ici seulement

$$d_1 \leqslant d \quad \text{et} \quad d_2 \leqslant d.$$

1.II.6.

1° Si A est vide, alors $[a, +\infty[\subset O$.

Si A est non vide, alors A possède une borne inférieure, μ, puisque A est un ensemble de réels non vide minoré par a.

Montrons que $\mu \notin O$, en supposant le contraire.

$\mu \in O \Rightarrow \exists B_\varepsilon(\mu) \subset O$, puisque O ouvert, $B_\varepsilon(\mu)$ étant la boule ouverte de centre μ, de rayon ε (ici l'intervalle $]-\varepsilon+\mu, \mu+\varepsilon[$); mais, par définition de μ, il existe $x \in \complement O$, tel que

$$\mu \leqslant x \leqslant \mu + \frac{\varepsilon}{2} < \mu + \varepsilon.$$

Il existerait donc $x \in O$ et $x \in \complement O$, ce qui est contradictoire, donc $\mu \in \complement O$ et c'est le plus petit élément de A. Il est nécessairement différent de a.

On en conclut que, ou bien $[a, +\infty[\subset O$, ou bien $[a, \mu[\subset O$.

2° Le raisonnement est analogue au précédent, ou bien B est vide, alors $]-\infty, a] \subset O$, ou bien B est non vide, B possède alors une borne supérieure λ, puisque c'est un ensemble de réels majoré par a.

Montrons que $\lambda \notin O$ en supposant le contraire.

$$\lambda \in O \Rightarrow \exists B_\varepsilon(\lambda) \subset O;$$

mais il existe $x \in \complement O$, tel que $\lambda - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant x \leqslant \lambda$, ce qui est contradictoire, donc $\lambda \in \complement O$ et c'est le plus grand élément de B. En conclusion, ou bien $]-\infty, a] \subset O$, ou bien $]\lambda, a] \in O$.

On en déduit immédiatement que, $\forall a \in O$, on a l'une des situations suivantes :

$]-\infty, +\infty[\subset O$,
$a \in]-\infty, \mu[\subset O$, disjoint de toute autre partie de O,
$a \in]\lambda, +\infty[\subset O$, disjoint de toute autre partie de O,
$a \in]\lambda, \mu[\subset O$, disjoint de toute autre partie de O.

3° Il découle des seules possibilités mises en évidence à la question 2° que l'ouvert O est la réunion d'intervalles deux à deux disjoints. Dans chacun des intervalles il existe un rationnel; or, l'ensemble des rationnels est dénombrable, donc O est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts.

1.III.1.

1° et 2° sont des évidences :

$$\overline{\varnothing} = \varnothing \qquad \text{et} \qquad A \subset \bar{A}.$$

3° $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$.
En effet,

$$x \in \bar{A} \Leftrightarrow B_\rho(x) \cap A \neq \varnothing, \ \forall \rho > 0,$$

a fortiori,

$$B_\rho(x) \cap B \neq \varnothing, \ \forall \rho > 0 \qquad \text{et, par suite,} \qquad x \in \bar{B}.$$

4° $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.
En effet,

$$x \in \bar{\bar{A}} \Rightarrow B_\rho(x) \cap \bar{A} \neq \varnothing, \ \forall \rho > 0 \qquad \text{et soit} \qquad y \in B_\rho(x) \cap \bar{A};$$

y appartenant à $\bar{A}$, on a nécessairement

$$B_{\rho - d(x,y)}(y) \cap A \neq \varnothing$$

et par suite,

$$B_\rho(x) \cap A \neq \varnothing \ [\text{puisque } B_\rho(x) \supset B_{\rho - d(x,y)}(y)],$$

ou encore $x \in \bar{A}$. $\bar{A}$ est donc fermé : $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.
Établissons maintenant la propriété supplémentaire suivante :

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B},$$

en effet,

$$A \subset A \cup B \Rightarrow \bar{A} \subset \overline{A \cup B}.$$

De même

$$\bar{B} \subset \overline{A \cup B} \qquad \text{et, par suite,} \qquad \bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}.$$

Par ailleurs,

$$A \subset \bar{A} \ \text{et} \ B \subset \bar{B} \Rightarrow A \cup B \subset \bar{A} \cup \bar{B};$$

mais $\bar{A} \cup \bar{B}$ est fermé, donc

$$\overline{A \cup B} \subset \overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \bar{A} \cup \bar{B},$$

alors on a

$$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B},$$

ce qui établit l'égalité cherchée.

Remarques.

1° On a

$$\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}.$$

En effet,

$$A \subset \bar{A} \ \text{et} \ B \subset \bar{B} \Rightarrow A \cap B \subset \bar{A} \cap \bar{B} \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \overline{\bar{A} \cap \bar{B}} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

(puisque $\bar{A} \cap \bar{B}$ est fermé, comme intersection de fermés).

2° Dans le cas où E est un espace topologique quelconque, on a une démonstration analogue en substituant à $B_\rho(x)$, $\forall\rho>0$, les ouverts $O(x)$ contenant x, et en remarquant que l'on a

$$\forall y\in O(x),\ \exists O(y)\quad \text{tel que}\quad O(y)\subset O(x).$$

3° Les axiomes (1) à (4) n'entraînent pas l'additivité. On obtient seulement

$$F(A)\cup F(B)\subset F(A\cup B)\subset F[F(A)\cup F(B)].$$

1.III.2.

L'ensemble $\left\{(-1)^n+\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$ n'est pas fermé puisque -1 et $+1$ sont des points adhérents sans appartenir à l'ensemble.

La bande $a\leqslant x_1\leqslant b$ est évidemment fermée ainsi que l'intérieur de l'hyperbole équilatère $x_1^2-x_2^2=1$ complété par les deux branches de l'hyperbole. Par contre, le dernier ensemble n'est pas fermé puisqu'il y a deux arcs de cercle dont les points sont adhérents à l'ensemble sans lui appartenir.

1.III.3.

1° Soit a un élément appartenant à $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}\omega_n}$. On aura donc $B_\rho(a)\cap(\bigcup_1^\infty\omega_n)\neq\varnothing, \forall\rho>0$.

Pour $a\notin\{(x,y);\ x\neq y\}$, il existe une constante $\varepsilon_0>0$, telle que a n'appartient pas à l'ensemble $\{(x,y);\ |x-y|\leqslant 2\varepsilon_0\}=B_{2\varepsilon_0}$.

Les boules fermées ω_n, à l'exception d'un nombre fini, sont dans la bande B_{ε_0}, donc $B_\rho(a)\cap\omega_n=\varnothing$, pour $\rho<\varepsilon_0$ et $\frac{k}{n}<\varepsilon_0$.

La condition $B_\rho(a)\cap\left(\bigcup_1^\infty\omega_n\right)\neq\varnothing$ devient donc $B_\rho(a)\cap\left(\bigcup_1^N\omega_n\right)\neq\varnothing$, pour $\rho<\varepsilon_0$ et $N=\left[\frac{k}{\varepsilon_0}\right]+1$. $\left(\left[\frac{k}{\varepsilon_0}\right]\right.$ désignant la partie entière de $\left.\frac{k}{\varepsilon_0}.\right)$ Par suite, a appartient à

$$\overline{\bigcup_1^N\omega_n}=\bigcup_1^N\overline{\omega}_n=\bigcup_1^N\omega_n,$$

d'où en conclusion

$$a\in\bigcup_1^\infty\omega_n.$$

Pour $a\in\{(x,y);\ x=y\}$, avec $a=(\alpha,\alpha)\neq O$, on constate ici encore que les boules ω_n, à l'exception d'un nombre fini, sont toutes dans la bande définie par

$$B'_{2\varepsilon_0}=\{(x,y);\ |x+y|<2\varepsilon_0\},\ \text{où}\ 4\ \varepsilon_0=\alpha$$

et, par suite, $a\in\bigcup_1^\infty\omega_n$.

Il est clair que $a = O$ appartient à $\overline{\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} \omega_n}$, puisque les centres des boules s'accumulent à l'origine.

Pour $k \geqslant \sqrt{2}$.

$$O \in \omega_n,\ \forall n \qquad \text{donc} \qquad O \in \overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} \omega_n\,;$$

de ce qui précède, on peut déduire alors que $\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} \omega_n$ est fermé.

Pour $k < \sqrt{2}$.

$O \notin \omega_n$, $\forall n$, donc $\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} \omega_n$ n'est pas fermé.

2° Ici, on aura une constante k telle que $k_n \leqslant k$, $\forall n$ et soit $k = \sup (k_n)$.

Pour $k < \sqrt{2}$.

$$\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} \omega_n \text{ n'est pas fermé.}$$

Pour $k > \sqrt{2}$.

$$\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} \omega_n \text{ est évidemment fermé,}$$

puisqu'une boule au moins ω_n contiendra O.

Pour $k = \sqrt{2}$.
On a deux possibilités :

$\exists n_0$ tel que $k_{n_0} = k$, auquel cas $\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} \omega_n$ est fermé;
$k_n < k$, $\forall n$, auquel cas $\overset{\infty}{\underset{1}{\cup}} \omega_n$ n'est pas fermé.

1.III.4.

1° Nous utiliserons la propriété suivante : pour que $a \in \bar{A}$, A sous-ensemble d'un espace métrique (E, d), il faut et il suffit que a soit limite d'une suite de points $a_n \in A$, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \qquad \text{tel que} \qquad n \geqslant N \Rightarrow d(a, a_n) \leqslant \varepsilon.$$

(*Autrement dit :* que toute boule de centre a contienne tous les éléments de la suite à partir d'un certain N. On retrouvera cette notion de limite au chapitre **2**.)

$$B_r(x) = \{y;\, d(x, y) < r\},$$

$$z \in \bar{B}_r(x) \Leftrightarrow \exists \{z_n\}_{n=1}^{\infty},\ z_n \in B_r(x) \text{ et } d(z_n, z) \leqslant \varepsilon, \text{ pour } n \geqslant N.$$

Donc

$$d(x, z) \leqslant d(x, z_n) + d(z_n, z)$$

entraîne que

$$d(x, z) \leqslant r+\varepsilon, \ \forall \varepsilon>0,$$

c'est-à-dire

$$d(x, z) \leqslant r,$$

ce qui établit

$$\overline{B_r(x)} \subset B'_r(x).$$

2° $B_1(x) = \{n\}$, $\overline{B_1(n)} = \{n\}$, $B'_1(n) = \{n-1, n, n+1\}$.

L'inclusion $\overline{B_1(n)} \subset B'_1(n)$ est donc propre. En général, dans un espace métrique on n'a donc pas $\overline{B_r(x)} = B'_r(x)$.

Nous verrons que *dans un espace vectoriel normé la situation est plus naturelle et que l'on a l'égalité.*

1.III.5.

a) On a évidemment $B_{1+\frac{1}{n}}(a) \supset B'_1(a)$, donc aussi l'inclusion

(1) $$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1+\frac{1}{n}}(a) \supset B'_1(a).$$

Démontrons l'inclusion inverse

(2) $$B'_1(a) \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1+\frac{1}{n}}(a).$$

Soit $\boldsymbol{x_0 \notin B'_1(a)}$**,** donc $d(a, x_0) > 1$.

On peut trouver un entier naturel n_0 tel que $x_0 \notin B_{1+\frac{1}{n_0}}(a)$

$$\left(\text{par exemple } n_0 = 1+\left[\frac{1}{d(a, x_0)-1}\right]\right).$$

On en déduit donc

$$x_0 \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1+\frac{1}{n}}$$

et l'on en déduit l'inclusion (2)

$$\left[\complement B'_1(a) \subset \complement \bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1+\frac{1}{n}}(a)\right].$$

En résumé :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1+\frac{1}{n}}(a) = B'_1(a).$$

On a une intersection *non finie* d'ouverts qui est un fermé.

b) On a évidemment $B'_{\frac{n}{n+1}}(a) \subset B_1(a)$, donc on a aussi l'inclusion

(3) $$\bigcup_{n=1}^{\infty} B'_{\frac{n}{n+1}}(a) \subset B_1(a).$$

Démontrons l'inclusion inverse

(4) $$B_1(a) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\frac{n}{1+n}}(a).$$

Soit $x_0 \in B_1(a)$, donc $d(a, x_0) < 1$.

On peut trouver n_0 tel que $\frac{n_0}{1+n_0} > d(a, x_0)$ $\left(\text{par exemple } n_0 = \left[\frac{d}{1-d}\right] + 1\right)$, donc

$$x_0 \in B'_{\frac{n_0}{1+n_0}}(a) \qquad \text{et par suite} \qquad x_0 \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B'_{\frac{n}{1+n}},$$

d'où l'on déduit l'inclusion (4).

En résumé :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B'_{\frac{n}{n+1}} = B_1(0).$$

On a une réunion *non finie* de fermés, qui est un ouvert.

Remarque. — Du paragraphe *a*, on déduit que

$$\complement \left[\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{1+\frac{1}{n}}(a)\right] = \complement B'_1(a),$$

ou encore

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \complement B_{1+\frac{1}{n}}(a) = \complement B'_1(a).$$

En remarquant que $\complement B_{1+\frac{1}{n}}(a)$ est un fermé et $\complement B'_1(a)$ un ouvert; on a une nouvelle réunion *non finie* de fermés, qui est un ouvert.

1.III.6.

1° Il est évident que O_n contient F et cela quel que soit n; donc

$$F \subset \bigcap_{1}^{\infty} O_n.$$

Soit $y \in \bigcap_{1}^{\infty} O_n$, alors $y \in O_n$, $\forall n$, donc $y \in \bigcup_{x \in F} B_{\frac{1}{n}}(x)$.

Il existe, par suite, au moins un $x \in F$ tel que $y \in B_{\frac{1}{n}}(x)$; soit x_n l'un de ces éléments.

On en déduit

$$y \in B_{\frac{1}{n}}(x_n) \Rightarrow d(x_n, y) < \frac{1}{n} \Rightarrow x_n \in B_{\frac{1}{n}}(y),$$

ces implications sont valables quel que soit n, on en déduit que $y \in \bar{F} = F$.

En résumé :

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n.$$

2° La propriété pour un fermé, résulte de la formule précédente $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ et pour l'ouvert on a évidemment la propriété en passant aux complémentaires.

1.III.7.

1° *a*) $B_r(x)$ est évidemment un ensemble ouvert. Montrons que $\complement B_r(x)$ l'est également.

Soit $z \in \complement B_r(x)$, alors $d(x, z) \geqslant r$. Soit ε tel que l'on ait $0 < \varepsilon < r$ et considérons la boule ouverte $B_\varepsilon(z)$.

On a

$$y \in B_\varepsilon(z) \Rightarrow d(z, y) < \varepsilon; \text{ mais alors } d(x, z) \neq d(z, y),$$

donc $d(x, y) = \sup\,[d(x, z), d(z, y)]$, ce qui permet d'affirmer que

$$d(x, y) \geqslant r \qquad \text{et} \qquad B_\varepsilon(z) \subset \complement B_r(x).$$

Ansi $\qquad \forall z \in \complement B_r(x),\ \exists B_\varepsilon(z), \qquad$ tel que $\qquad B_\varepsilon(z) \subset \complement B_r(x).$

On en déduit que $\complement B_r(x)$ est un ouvert, donc $B_r(x)$ un fermé.

b) Il suffit de montrer que $y \in B_r(x) \Rightarrow B_r(y) \subset B_r(x)$, car par raison de symétrie puisque $y \in B_r(x) \Rightarrow x \in B_r(y)$, on aura $B_r(x) \subset B_r(y)$.

Démontrons donc que $B_r(y) \subset B_r(x)$.

Posons $B_r(y) = \{z;\, d(y, z) < r\}$, alors

$$\forall z \in B_r(y), \text{ on a } d(x, z) \leqslant \sup\,[d(x, y), d(y, z)] < r$$

en tenant compte de $d(x, y) < r$, qui est donné par hypothèse, donc $B_r(y) \subset B_r(x)$.

2° *a*) La boule fermée $B'_r(x)$ est un fermé. Nous allons montrer qu'elle est aussi un ouvert.

Soit $z \in B'_r(x)$, alors $d(x, z) \leqslant r$ et $\forall y \in B'_r(z)$, on a $d(x, y) \leqslant r$, puisque

$$d(x, y) \leqslant \sup\,[d(x, z), d(z, y)] \leqslant r.$$

On peut donc affirmer que $B'_r(z) \subset B'_r(x)$ et, par suite,

$$B_r(z) \subset B'_r(z) \Rightarrow B_r(z) \subset B'_r(x),$$

donc, quel que soit $z \in B'_r(x)$, il existe une boule ouverte de centre z incluse dans $B'_r(x)$. Ceci établit que $B'_r(x)$ est aussi un ouvert.

b) Au paragraphe *a* nous avons constaté que $\forall z \in B'_r(x)$, on a

$$B'_r(z) \subset B'_r(x),$$

par raison de symétrie, on peut donc affirmer que

$$B'_r(z) = B'_r(x).$$

Ainsi dans un espace ultramétrique on a la propriété suivante : toute boule ouverte ou fermée est à la fois un ensemble ouvert et fermé.

[*Attention :* cet énoncé ne signifie pas, par exemple, que toute boule ouverte $B_r(x)$ est la boule fermée $B'_r(x)$. On a simplement $B_r(x) = \overline{B}_r(x) \subset B'_r(x)$ et $B_r(x) \subset B'_r(x) = \mathring{B}'_r(x)$.]

3° La notation B^0 désignant indifféremment une boule ouverte B ou une boule fermée B', considérons deux boules $B^0_{r_1}(x_1)$ et $B^0_{r_2}(x_2)$. Supposons leur intersection non vide et soit y un point de cette intersection. On a

$$y \in B^0_{r_1}(x_1) \Rightarrow B^0_{r_1}(x_1) = B^0_{r_1}(y),$$

d'après les questions 1° et 2°;

$$y \in B^0_{r_2}(x_2) \Rightarrow B^0_{r_2}(x_2) = B^0_{r_2}(y),$$

d'après les questions 1° et 2°.

Autrement dit, $B^0_{r_1}(x_1)$ et $B^0_{r_2}(x_2)$ apparaissent comme deux boules de même centre; l'une est donc incluse dans l'autre.

Illustration simple.

Les propriétés ainsi établies sont étonnantes, à première vue.

Un exemple concret peut éclairer la question.

Munissons un ensemble quelconque E de la distance triviale, c'est-à-dire

$$d(x, y) = 1 \text{ si } x \neq y, \qquad d(x, y) = 0 \text{ si } x = y.$$

On constate aisément que cette distance est en fait aussi une ultra-distance, que les boules ouvertes et les boules fermées sont des ensembles formés par les points eux-mêmes et E.

Les résultats précédents se vérifient alors facilement :

- toute boule ouverte est un ensemble fermé;
- toute boule fermée est un ensemble ouvert;
- tout point d'une boule est centre de cette boule;
- si deux boules ont une intersection non vide, l'une est incluse dans l'autre.

Plus précisément,

$$B_r(x) = \{x\}, \text{ si } r \leqslant 1, \qquad B_r(x) = E, \text{ si } r > 1,$$
$$B'_r(x) = \{x\}, \text{ si } r < 1, \qquad B'_r(x) = E, \text{ si } r \geqslant 1.$$

1.III.8.

1° *a*) A_1 et A_2 étant fermés dans $\mathbb{C}$, on en déduit que $A = A_1 \cup A_2$ est fermé dans $\mathbb{C}$ (cf. théorème **1.III.2.**).

b) ***Pour*** $\boldsymbol{\alpha < 1}$.
On a

$$A = A_1 \cup A_2, \text{ avec } A_1 \cap A_2 = \phi, \text{ donc } \complement_A A_1 = A_2 \text{ et } \complement_A A_2 = A_1$$

$\left[\complement_A\right.$ désignant le complémentaire dans $\left.A\right]$.
De plus, A_1 et A_2 sont fermés dans A, puisque (cf. § **3.III.**)

$$A_i (i = 1, 2) \text{ fermé dans } \mathbb{C} \Rightarrow A_i \cap A = A_i \text{ fermé dans } A,$$

donc

$$A_1 \text{ fermé dans } A \Rightarrow \complement_A A_1 = A_2 \textit{ ouvert dans } A$$

et

$$A_2 \text{ fermé dans } A \Rightarrow \complement_A A_2 = A_1 \textit{ ouvert dans } A.$$

Pour $\boldsymbol{\alpha = 1}$.
A_1 et A_2 sont évidemment fermés dans A, mais ni l'un ni l'autre ne peuvent être ouverts. En effet, soit $\beta_\rho(0)$ les boules ouvertes de centre O et de rayon ρ (positif) du sous-espace A, on peut écrire

$$\beta_\rho(0) = \{z \in A; d(O, z) < \rho\} = \{z \in A; |z| < \rho\}.$$

Il est clair que $\beta_\rho(0) \ni z_i = \dfrac{(-1)^i}{2\rho}$ $(i = 1, 2)$, élément de A, mais qui n'appartient pas à A_i. Donc $\beta_\rho(0)$ ne peut être inclus dans A_i et comme $O \in A_i$ on en déduit que A_i ne peut être un ouvert.

Pour $\boldsymbol{\alpha > 1}$.
Le raisonnement est analogue au précédent. Pour montrer, par exemple, que A_2 n'est pas ouvert dans A, on pourra considérer les boules $\beta_\rho(\alpha - 1)$.

2° ***Supposons*** $\boldsymbol{\alpha < 1}$.
Il est clair que l'on a

$$B_1 \text{ ouvert dans } \mathbb{C} \Rightarrow B_1 \cap B = B_1 \text{ ouvert dans } B$$

et

$$B_2 \text{ fermé dans } \mathbb{C} \Rightarrow B_2 \cap B = B_2 \text{ fermé dans } B.$$

Montrons maintenant que B_2 *est ouvert dans* B.
En effet, soit

$$C_2 = \left\{ z \in \mathbb{C};\ |z+1| < \frac{1+\alpha}{2} \right\},$$

donc

$$C_2 \cap B_1 = \varnothing; \quad C_2 \cap B = B_2$$

et, par suite, C_2 ouvert dans $\mathcal{C} \Rightarrow B_2$ ouvert dans B. Corrélativement, puisque B_2 est ouvert dans B, on en déduit que $\complement_B B_2 = B_1$ est fermé dans B.

Supposons $\boldsymbol{\alpha \geqslant 1}$.

Il est clair (cf. 1°) que B_2 ne peut être ouvert dans B et B_1 ne peut être fermé dans B ($1-\alpha \in \bar{B}_1$, mais $1-\alpha \notin B_1$).

1.III.9.

Nous utilisons encore la propriété suivante : pour que $a \in \bar{A}$ il faut, et il suffit, que a soit limite d'une suite de points $a_n \in A$.

Pour montrer que $\bar{A}$ est sous-groupe additif il suffit d'établir que a et $b \in \bar{A} \Rightarrow a-b \in \bar{A}$ quels que soient a et b.

On a

$$a \in \bar{A} \Rightarrow \exists \{a_n\}_1^\infty,\ a_n \in A, \text{ la suite } \{a_n\}, \text{ a pour limite } a,$$

et

$$b \in \bar{A} \Rightarrow \exists \{b_n\}_1^\infty,\ b_n \in A, \text{ la suite } \{b_n\}, \text{ a pour limite } b,$$

alors $\{a_n - b_n\}_1^\infty$ est une suite d'éléments de A, qui a pour limite $a-b$, donc $a-b \in \bar{A}$.

Notons qu'il n'en serait pas de même pour un sous-groupe multiplicatif dans un corps, *0* pouvant appartenir à $\bar{A}$ (*exemple:* $\overline{\mathbb{Q}}{}^+ = \mathbb{Q}^+$ dans $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^+$ n'est pas un sous-groupe multiplicatif de $\mathbb{Q}$).

La démonstration pour $\bar{A}$, sous-anneau, est tout à fait analogue.

En ce qui concerne le sous-corps, on sait que son adhérence $\bar{A}$ est un sous-anneau d'après ce qui précède. Il reste à prouver que pour tout a différent de 0, avec $a \in \bar{A}$ $\frac{1}{a}$ existe et appartient à $\bar{A}$.

Ce fait résulte de l'existence d'une suite $\{a_n\}_1^\infty$, $a_n \in A$, $a_n \neq 0$, alors $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}_1^\infty$ est une suite dont la limite est égale à $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a} \in \bar{A}$.

1.IV.1.

Soit x et y deux points quelconques de $A \cup B$.

Si x et $y \in A$ (resp. appartient à B), il en résulte $d(x, y) \leqslant \delta(A)$ [resp. $d(x, y) \leqslant \delta(B)$].

Si $x \in A$ et $y \in B$, alors on a

$$d(x, y) \leqslant d(x, a) + d(a, b) + d(b, y), \qquad \text{où} \qquad a \in A \text{ et } b \in B,$$

donc

$$\delta(A \cup B) \leqslant d(a, b) + \delta(A) + \delta(B),$$

ce qui établit que $A \cup B$ est borné lorsque A et B le sont, puisque $d(a, b)$ est fini.

Comme l'inégalité précédente est vraie, $\forall a \in A$ et $\forall b \in B$, on en déduit de plus que l'on a

$$\delta(A \cup B) \leqslant \delta(A) + \delta(B) + d(A, B),$$

où $d(A, B)$ est la distance des deux ensembles A et B.

$[d(A, B) = \inf\limits_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b)$, voir chapitre **1**, paragraphe V.]

1.IV.2.

La distance naturelle est $d(x, y) = |x-y|$, on peut donc écrire

$$d'(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{|x-y|}}, \quad x \neq y,$$

$$\delta'(\mathbb{R}) = \sup_{x, y \in R} d'(x, y) = \frac{1}{\inf\left(1+\dfrac{1}{|x-y|}\right)};$$

mais

$$\inf_{R}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) = 0, \qquad \text{donc} \qquad \delta'(\mathbb{R}) = 1.$$

Avec la distance naturelle on a évidemment $\delta(\mathbb{R}) = +\infty$, d et d' étant équivalentes, les topologies sont identiques et pourtant $\mathbb{R}$ est borné avec d', non borné avec d.

Autrement dit, la propriété d'être borné pour un ensemble n'est pas une propriété liée à la topologie; elle provient de la structure métrique en ce qu'elle a de plus particulier que la topologie qu'on peut lui associer.

1.V.1.

1° L'axiome (1) est satisfait.

Soit $E = \complement A$, A partie finie de $\mathbb{N}$.

Si $F \supset E$, $F \supset \complement A$, donc $\complement F \subset A$, alors $\complement F$ est une partie finie, donc $F \in \mathcal{F}$.

Soit $E = \complement A$ et $F = \complement B$; on a alors $E \cap F = \complement A \cap \complement B = \complement(A \cup B)$.

Or, $A \cup B$ est une partie finie, donc $E \cap F \in \mathcal{F}$.

2° Si $A \supset V_a$, A est également un voisinage de a puisqu'il contient une boule ouverte de centre a, donc $A \in \mathcal{V}_a$.

Soit V_a et $V'_a \in \mathcal{V}_a$, on a alors

$$\exists B_\rho(a) \quad \text{et} \quad \exists B'_\rho(a),$$

tels que

$$V_a \supset B_\rho(a) \quad \text{et} \quad V'_{a'} \supset B_{\rho'}(a),$$

alors

$$V_a \cap V'_a \supset B_\rho(a) \cap B_{\rho'}(a) = B_{\rho''}(a) \quad \text{où} \quad \rho'' = \inf(\rho, \rho').$$

On en conclut $V_a \cap V'_a \in \mathcal{V}_a$.

1.V.2.

1° Soit $x \in A \cap \bar{B}$, $x \in A \Rightarrow \exists B_r(x)$ boule ouverte, telle que $B_r(x) \subset A$, puisque A ouvert.

Sachant que

$$B_r(x) \cap B, \text{ différent de l'ensemble vide (car } x \in \bar{B})$$

il s'ensuit que

$$B_r(x) \cap (A \cap B) = [B_r(x) \cap A] \cap B = B_r(x) \cap B,$$

est aussi différent de l'ensemble vide.

On a alors $B_\rho(x) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$, en effet

si $\rho \geqslant r$:

$$B_\rho(x) \supset B_r(x) \Rightarrow B_\rho(x) \cap (A \cap B) \neq \emptyset;$$

si $\rho < r$:

$$B_\rho(x) \subset B_r(x),$$

donc $B_\rho(x) \cap A = B_\rho(x)$ et $B_\rho(x) \cap B \neq \emptyset$, puisque $x \in \bar{B}$.

On a donc bien $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$.

On sait d'autre part que $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$, donc $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$.

Ceci montre que si B *est quelconque et* A *fermé, l'inclusion précédente ne peut avoir lieu*, on a, au contraire,

$$\overline{A \cap B} \subset A \cap \bar{B}, \qquad \text{puisque ici } A = \bar{A}.$$

Illustrons les résultats dans les exemples suivants.

2° $\bar{A} = D_1 \cup \partial D_2$, $\bar{B} = D_2$, $A \cap \bar{B} = \partial D_2$, $\bar{A} \cap B = \emptyset$, $\bar{A} \cap \bar{B} = \partial D_2$, $A \cap B = \emptyset$ et $\overline{A \cap B} = \emptyset$.

Ici $\overline{A \cap B} \subset A \cap \bar{B}$, on n'a donc pas l'inclusion contraire, ce qui est prévisible, puisque A n'est pas ouvert.

Par contre, B est ouvert, on est donc sûr de l'inclusion $\bar{A} \cap B \subset \overline{A \cap B}$, on le vérifie trivialement.

Dans $\mathbb{R}$, muni de la distance naturelle, on peut prendre

$$A =]a, b], \ B =]b, c], \text{ avec } a<b<c,$$

on en déduit alors $\bar{A} = [a, b]$, $\bar{B} = [b, c]$, $A \cap B = \emptyset$, $\overline{A \cap B} = \emptyset$ et $A \cap \bar{B} = \{b\}$. On n'a donc pas $A \cap \bar{B} \subset \overline{A \cap B}$.

3° Toujours sur la droite réelle on considère les points tels que $a<a'<b'<b<c<d$ et les ensembles ouverts suivants :

$$A =]a, b'[\cup]b, c[\qquad \text{et} \qquad B =]a', b[\cup]c, d[.$$

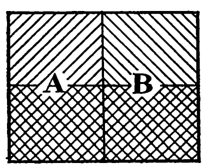
On peut alors écrire

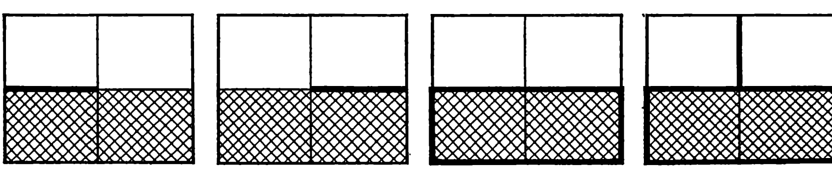
$$\bar{A} = [a, b']\cup[b, c], \ \ \bar{B} = [a', b]\cup[c, d],$$
$$\bar{A}\cup B =]a', b'] \ \text{ et } \ A\cap B =]a', b'[,$$

donc

$$\overline{A\cap B} = [a', b'] \qquad \text{et} \qquad \bar{A}\cap\bar{B} = [a', b']\cup\{c\}.$$

Les quatre exemples indiqués sont bien différents et l'on a les inclusions prévues, puisque A et B sont ouverts. Dans $\mathbb{R}^2$, les schémas suivants rendent compte également d'une telle situation.





$A\cap\bar{B}$ $\bar{A}\cap B$ $\overline{A\cap B}$ $\bar{A}\cap\bar{B}$

1.V.3.

1° Il résulte de la définition même que $\mathring{A}$ est un ouvert inclus dans A, alors

$$\mathring{A}\subset\cup O_i, \qquad O_i \text{ ouvert inclus dans } A.$$

Montrons que $\cup\, O_i \subset \mathring{A}$.

Soit $x\in\cup O_i$, $\exists O_j$ tel que $x\in O_j$, qui est un ouvert, donc $\exists\rho>0$, tel que $B_\rho(x)\subset O_j\subset A$ et, par suite, $x\in\mathring{A}$.

Finalement,

$$\mathring{A} = \cup O_i.$$

$\mathring{A}$ est donc le plus grand ensemble ouvert inclus dans A, d'où la condition nécessaire et suffisante pour que A soit ouvert : $A = \mathring{A}$.

2° $A \subset B \Rightarrow \mathring{A} \subset A \subset B$,
$\Rightarrow \mathring{A}$ est inclus dans la réunion des ouverts inclus dans B,

donc

$$\mathring{A} \subset \mathring{B}.$$

D'après ce qui précède, on déduit

$$A \cap B \subset A \qquad \text{et} \qquad A \cap B \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{A} \text{ et } \subset \mathring{B},$$

donc

$$\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}.$$

Par ailleurs,

$$\mathring{A} \subset A \text{ et } \mathring{B} \subset B \Rightarrow \mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B,$$

mais l'intersection des deux ouverts $\mathring{A}$ et $\mathring{B}$ est un ouvert, donc

$$\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}, \qquad \text{alors} \qquad \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \mathring{A} \cap \mathring{B}.$$

Autre démonstration.

On établit aisément que

$$\complement \mathring{A} = \overline{\complement A};$$

il suffit alors de *passer aux complémentaires* dans les formules concernant les fermés. Par exemple,

$$\overline{\complement A} \cup \overline{\complement B} = \overline{\complement A \cup \complement B} \Rightarrow \complement \mathring{A} \cup \complement \mathring{B} = \overline{\complement (A \cap B)} = \complement \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} \Rightarrow \complement (\mathring{A} \cap \mathring{B}) = \complement \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}},$$

donc

$$\mathring{A} \cap \mathring{B} = \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}.$$

3° *a*) Supposons $\alpha(A) = \mathring{\bar{A}}$, or $A \subset \bar{A} \Rightarrow \mathring{A} \subset \mathring{\bar{A}}$ (d'après la question 2°), donc $\mathring{A} \subset \alpha(A)$ et si A est ouvert $A = \mathring{A}$, on obtient la propriété demandée.

On a $\mathring{A} \subset A$, donc $\overline{\mathring{A}} \subset \bar{A}$.
Alors on a $\beta(A) \subset \bar{A}$ et si A est fermé $\bar{A} = A$, d'où l'on déduit la propriété cherchée.

b) $\alpha(A)$ est ouvert, donc, d'après la question *a*), $\underline{\alpha(A) \subset \alpha[\alpha(A)]}$; mais

$$\mathring{\bar{A}} \subset \bar{A} \Rightarrow \alpha(A) \subset \bar{A},$$

soit

$$\overline{\alpha(A)} \subset \bar{\bar{A}} = \bar{A},$$

ou encore

$$\overset{\circ}{\overline{\alpha(A)}} \subset \mathring{\bar{A}}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \underline{\alpha(\alpha(A)) \subset \alpha(A)}.$$

Donc

$$\forall A, \quad \underline{\alpha[\alpha(A)] = \alpha(A)}.$$

$\beta(A)$ est fermé, donc, d'après la question *a*), $\underline{\beta[\beta(A)] \subset \beta(A)}$; mais

$$\mathring{A} \subset \bar{A} \Rightarrow \mathring{A} \subset \beta(A) \qquad \text{et} \qquad \mathring{A} = \overset{\circ}{\widehat{\mathring{A}}} \subset \overset{\circ}{\widehat{\beta(A)}},$$

donc

$$\mathring{A} \subset \overset{\circ}{\widehat{\beta(A)}}.$$

Alors

$$\bar{A} \subset \overline{\overset{\circ}{\widehat{\beta(A)}}}, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \underline{\beta(A) \subset \beta[\beta(A)]}.$$

Donc

$$\forall A, \quad \underline{\beta[\beta(A)] = \beta(A)}.$$

Exemple (dans $\mathbb{R}$) : Les cinq ensembles $\mathring{A}$, A, $\bar{A}$, $\alpha(A)$ et $\beta(A)$ sont tous distincts.

a) $A =]1, 2[\cup]2, 3[\cup\{4\}$.
b) $\mathring{A} =]1, 2[\cup]2, 3[$.
c) $\bar{A} = [1, 3]\cup\{4\}$.
d) $\beta(A) = [1, 3]$.
e) $\alpha(A) =]1, 3[$.

On voit aussi que l'on a

$$\overset{\circ}{\widehat{\beta(A)}} =]1, 3[, \ \beta[\beta(A)] = [1, 3], \ \overline{\alpha(A)} = [1, 3] \text{ et } \alpha[\alpha(A)] =]1, 3[.$$

1.V.4.

1° $x \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, la boule $B_\varepsilon(x)$ est telle que $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$; donc

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists z \in A \qquad \text{tel que} \qquad d(x, z) < \varepsilon,$$

on en conclut que

$$\inf_{y \in A} d(x, y) = 0, \qquad \text{soit} \qquad d(x, A) = 0.$$

Réciproquement, soit $d(x, A) = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists y \in A \qquad \text{tel que} \qquad d(x, y) < \varepsilon;$$

donc la boule $B_\varepsilon(x)$ est telle que $B_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$, on en conclut que $x \in \bar{A}$.

2° Puisque $A \subset \bar{A}$, on a $d(x, \bar{A}) \leqslant d(x, A)$ (propriété de la borne inférieure). Soit

$$z \in \bar{A}, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists y \in A \qquad \text{tel que} \qquad d(y, z) < \varepsilon,$$

donc

$$d(x, y) \leqslant d(x, z)+\varepsilon,$$

a fortiori,

$$d(x, A) \leqslant d(x, z)+\varepsilon, \qquad \text{puis} \qquad d(x, A) \leqslant d(x, \bar{A})+\varepsilon, \ \forall \varepsilon>0.$$

On déduit alors

$$d(x, A) = d(x, \bar{A}).$$

1.V.5.

1° Par définition

$$d(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} d(x, y).$$

$$\forall x \in A \text{ et } \forall y \in B \ : \ d(A, B) \leqslant d(x, y),$$

donc

$$d(A, B) \leqslant \inf_{y \in B} (x, y) = d(x, B)$$

et, par suite,

$$d(A, B) \leqslant \inf_{x \in A} d(x, B).$$

Par ailleurs

$$\inf_{y \in A} d(x, y) = d(x, B) \leqslant d(x, y) \qquad \text{et} \qquad \inf_{x \in B} d(x, B) \leqslant d(x, B) \leqslant d(x, y),$$

donc

$$\inf_{x \in A} d(x, B) \leqslant d(A, B).$$

Ceci établit que

$$d(A, B) = \inf_{x \in A} d(x, B).$$

2° On rappelle que $d(x, A) = d(x, \bar{A})$ (exercice 1.V.4.), alors

$$d(A, B) = \inf_{x \in A} d(x, B) = \inf_{x \in A} d(x, \bar{B}) = d(A, \bar{B}) \ [= d(\bar{A}, B)], \ \forall A \text{ et } B.$$

En particulier,

$$d(C, B) = d(C, \bar{B}) \Rightarrow d(\bar{A}, B) = d(\bar{A}, \bar{B}), \text{ en posant } C = \bar{A},$$

et, par suite,

$$d(A, B) = d(\bar{A}, \bar{B}).$$

1.V.6.

1° Si $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$, on a immédiatement

$$\lambda(\{a\}, \{b\}) = \mu(\{a\}, \{b\}) = d(a, b),$$

donc

$$D(\{a\}, \{b\}) = d(a, b);$$

considérée sur les points de E, D se réduit à la distance d.

On remarque que l'on a $\mu(A, B) = \lambda(B, A)$, donc

$$D(A, B) = \sup [\lambda(A, B), \lambda(B, A)] = D(B, A).$$

2° Soit $D(A, B) = 0$, alors $\lambda(A, B) = 0$ et $\mu(A, B) = 0$ et l'on a

$$\lambda(A, B) = 0 \Leftrightarrow \forall a, d(a, B) = 0 \Leftrightarrow \forall a \in A, \text{ on a } a \in \bar{B}$$

(cf. exercice 1.V.4.); donc $A \subset \bar{B} = B$.

De même

$$\mu(A, B) = 0 \Leftrightarrow B \subset \bar{A} = A.$$

Finalement,

$$D(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B.$$

Soit $z \in C$, alors

$$d(a, C) \leqslant d(a, z),$$

donc

$$d(a, C) \leqslant d(a, b) + d(b, z), \text{ ceci } \forall b \in B;$$

a fortiori,

$$d(a, C) \leqslant d(a, b) + D(B, C),$$

donc

$$d(a, C) \leqslant \inf_{b \in B} d(a, b) + D(B, C),$$

soit

$$d(a, C) \leqslant d(a, B) + D(B, C).$$

3° Soit $D(A, B) \geqslant 0$, alors

$$D(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B, \text{ d'après la question 2°},$$

et

$$D(A, B) = D(B, A), \text{ d'après la question 1°}.$$

Il reste donc à vérifier l'inégalité triangulaire

$$D(A, C) \leqslant D(A, B) + D(B, C).$$

L'inégalité obtenue à la question 2°, $d(a, C) \leqslant d(a, B) + D(B, C)$, entraîne l'inégalité suivante :

$$\lambda(A, C) \leqslant \lambda(A, B) + D(B, C) \leqslant D(A, B) + D(B, C);$$

mais par raison de symétrie, on a aussi

$$\lambda(C, A) = \mu(A, C) \leqslant D(A, B) + D(B, C),$$

donc

$$D(A, C) = \sup\,[\lambda(A, C), \mu(A, C)] \leqslant D(A, B) + D(B, C).$$

D est donc bien une distance sur $\mathcal{F}$. On l'appelle distance de Hausdorff.

1.V.7.

Supposons que $\mathbb{R}$ ne soit pas connexe et que l'on ait $\mathbb{R} = O_1 \cup O_2$, O_1 et O_2 étant des ouverts disjoints.

Alors $O_2 = \complement O_1$, mais $\complement O_1$ ne peut être ouvert, si O_2 n'est pas vide.

En effet, *l'ouvert général de la droite réelle est une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts* (avec éventuellement une ou deux demi-droites). Soit $]a, b[$ un tel intervalle de la famille définissant O_1 (éventuellement $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, a[$).

Comme $a \notin O_1$, on a $a \in \complement O_1$; mais alors il ne peut exister un intervalle de centre a inclus dans $\complement O_1$ puisque $x > a \Rightarrow x \in O_1$. L'ensemble $\complement O_1$ n'est donc pas ouvert, d'où l'impossibilité de la décomposition envisagée.

Autrement dit : les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés dans $\mathbb{R}$ sont $\varnothing$ et $\mathbb{R}$.

1.V.8.

Supposons $\bar{A}$ non connexe. Alors, il existe deux ouverts O_1 et O_2 tels que

(1) $$\bar{A} \subset O_1 \cup O_2,\quad \bar{A} \cap O_1 \neq \varnothing,\quad \bar{A} \cap O_2 \neq \varnothing,\quad \bar{A} \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing,$$

ce qui entraîne

(2) $$A \subset O_1 \cup O_2,\quad A \cap O_1 \neq \varnothing,\quad A \cap O_2 \neq \varnothing,\quad A \cap O_1 \cap O_2 = \varnothing.$$

La première et la dernière affirmation sont évidentes.
Il reste à établir par exemple que $A \cap O_1 \neq \varnothing$.

Supposons que l'on ait $A \cap O_1 = \varnothing$, alors $A \subset \complement O_1$ et $\bar{A} \subset \overline{\complement O_1} = \complement O_1$, puisque $\complement O_1$ fermé, mais $\bar{A} \subset \complement O_1 \Rightarrow \bar{A} \cap O_1 = \varnothing$, ce qui est contradictoire.

Les propriétés de (2) montrent alors que A n'est pas connexe, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Donc $\bar{A}$ est connexe.

Remarque. — La démonstration précédente donne le résultat plus fort suivant : Si A est connexe, tout ensemble B tel que $A \subset B \subset \bar{A}$ est également connexe.

1.V.9.

1° ***Supposons que l'on ait $C = A \cup B$ non connexe*** alors il existe deux ouverts O_1 et O_2 tels que

$$C \subset O_1 \cup O_2, \; C \cap O_1 \neq \emptyset, \; C \cap O_2 \neq \emptyset \text{ et } C \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

a) On a, d'une part,

$$C \subset O_1 \cup O_2 \Rightarrow A \subset O_1 \cup O_2 \text{ et } B \subset O_1 \cup O_2$$

et

$$C \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset \Rightarrow A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset \text{ et } B \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset.$$

b) D'autre part, on a

$$C \cap O_1 \neq \emptyset \Rightarrow A \cap O_1 \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad B \cap O_1 \neq \emptyset$$

et

$$C \cap O_2 \neq \emptyset \Rightarrow A \cap O_2 \neq \emptyset \quad \text{ou} \quad B \cap O_2 \neq \emptyset.$$

Supposons donc que l'on ait $A \cap O_1 \neq \emptyset$, quitte à changer les notations, on ne peut avoir $A \cap O_2 \neq \emptyset$, sinon A ne serait pas connexe d'après la question *a*), *donc*

$$A \cap O_1 \neq \emptyset \Rightarrow A \cap O_2 = \emptyset, \quad \text{puis} \quad A \subset O_1$$

Finalement, on en déduit que

$$A \subset O_1 \quad \text{et} \quad B \subset O_2.$$

Mais alors

$$A \cap B \subset A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset,$$

ce qui est contradictoire.

2° Puisque A_1 et A_2 sont connexes et $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, on a $A_1 \cup A_2$ connexe, d'après le résultat précédent.

Raisonnons par récurrence. On suppose $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ connexe, on a alors

$$A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset \Rightarrow (A_1 \cup \ldots \cup A_k) \cap A_{k+1} \neq \emptyset,$$

donc $A_1 \cup \ldots \cup A_k \cup A_{k+1}$ est connexe, ce qui démontre la propriété.

3° ***Supposons $A_1 \cap A_k \neq \emptyset$, $k = 2, \ldots, n$.***

A_1 et A_k étant connexes, alors $B_k = A_1 \cup A_k$ est connexe et $B_k \cap B_{k+1} \neq \emptyset$, puisque l'on a $B_k \supset A_1$, $\forall k$; donc $B_1 \cup \ldots \cup B_n$ est connexe, on peut donc écrire que $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ est connexe.

2. ESPACES MÉTRIQUES

Compacts - Suites de Cauchy - Complets

I. — COMPACTS D'UN (E, d).

1° **Points d'accumulation de A ($A \subset E$). Ensemble dérivé A'.** — Tout point x de E tel que « $B_\rho(x)$ contient un élément de A autre que x, $\forall \rho > 0$ » est dit point d'**accumulation** de A.

L'ensemble des points d'accumulation de A est appelé dérivé de A. On le note A'.

On a $\bar{A} = A \cup A'$.

Exemples du paragraphe III, chapitre 1:

a) $A' = A$.
b) $A' = \{0\}$.

2° **Définition et propriétés élémentaires d'un compact.** — Soit A un sous-ensemble de E. Le sous-ensemble A est dit compact si toute partie infinie de A admet au moins un point d'accumulation **dans** A. Tout sous-ensemble fini est compact, par définition.

Thorème 2.I.1.

i) Tout compact est fermé et borné.

ii) Tout fermé F inclus dans un compact A est lui-même compact.

3° **Théorème de Borel-Lebesgue.** — Pour que A soit compact il faut, et il suffit, que de toute famille d'ouverts, constituant un recouvrement de A, on puisse extraire une famille **finie** ayant la même propriété.

On peut donc écrire : A compact et $A \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ (O_i ouverts) $\Rightarrow A \subset \bigcup_{i \in P} O_i$, où P est une partie finie de I, convenablement choisie.

4° **Théorème de Bolzano-Weierstrass.** — Toute partie infinie bornée de $\mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{C}^p$ admet au moins un point d'accumulation.

Corollaire. — Dans $\mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{C}^p$ on a l'équivalence suivante :

$$A \text{ compact} \Leftrightarrow A \text{ borné fermé.}$$

II. — SUITES DE CAUCHY DANS UN (E, d).

1° **Convergence d'une suite** $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$. — On dit qu'une suite $\{x_n\}$ converge vers x pour exprimer que l'on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \text{ tel que, } n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, x) \leqslant \varepsilon.$$

Conséquence : $\quad \forall n$ et $m \geqslant N\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, on a $d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$.

2° **Suites de Cauchy.** — Toute suite $\{x_n\}$ qui vérifie, pour chaque ε positif, la relation suivante :

$$d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon,\ \forall n \text{ et } \forall m \geqslant N(\varepsilon),$$

est dite suite de Cauchy.

Exemple :
Une suite convergente est une suite de Cauchy.

III. — SOUS-ENSEMBLE COMPLET D'UN (E, d).

1° On dit qu'une partie A d'un espace métrique est **complète** si toute suite de Cauchy définie sur A est convergente dans A.

Exemples :
a) $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets.
b) $A \subset E$, A compact $\Rightarrow$ A complet. En particulier (cf. Ex. **2.III.5.**).

$$(E, d) \text{ compact} \Rightarrow (E, d) \text{ complet}$$

c) $\mathbb{Q}$ sous-ensemble de $\mathbb{R}$ n'est pas complet, puisque $x_n = \sum_{p=0}^{n} \dfrac{1}{p!}$ est une suite de Cauchy sur $\mathbb{Q}$ qui ne converge pas dans $\mathbb{Q}$.

2° **Théorème 2.III.1.** — Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique **complet,** alors on a

$$A \text{ fermé} \Leftrightarrow A \text{ complet.}$$

3° **Théorème 2.III.2.** — Soit $A_1 \subset (E_1, d_1)$ et $A_2 \subset (E_2, d_2)$, avec A_1 et A_2 complets, alors $A_1 \times A_2$ *muni de la distance d d'espace produit est complet.*
Rappelons que l'on a

$$d(X, Y) = \sqrt{d_1^2(x_1, y_1) + d_2^2(x_2, y_2)}.$$

Corollaire. — $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ complets $\Rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ complets.

EXERCICES DU CHAPITRE 2

2.I.1. ◆◆ *Soit $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ muni de la distance naturelle.*

1° *E est-il fermé dans $\mathbb{R}$?*

2° *On considère un recouvrement de E par la famille $\mathfrak{J}$ des intervalles ouverts ainsi définis:*

$$I_l = \{y \in \mathbb{R}, |y-x| < l\}.$$

A tout $x \in E$, on associe l'intervalle ouvert $I_l(x)$ $(0 < l < 1)$.
Peut-on recouvrir E par un nombre fini d'intervalles de $\mathfrak{J}$? Cet exemple est-il contraire au théorème de Borel-Lebesgue?
(On pourra utiliser un recouvrement de E par les intervalles

$$I_{l'} = \{y \in \mathbb{R}, |y-x| < l'\}, \qquad \text{où} \qquad 0 < l' < l \text{ et } l' \in \mathbb{Q}.)$$

2.I.2. ◆ *Démontrer que toute réunion finie d'ensembles compacts est compacte, que toute intersection de compacts est compacte.*

2.I.3. ◆◆ **Propriété de l'intersection finie.**
On dit qu'une famille d'ensembles possède la propriété de l'intersection finie si toute intersection finie d'éléments de la famille est non vide.

1° *Montrer que si un espace métrique E est compact, toute famille de fermés de E possédant la propriété de l'intersection finie admet une intersection non vide.*

2° *Étudier la réciproque et énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace soit compact.*

2.I.4. ◆ *Dans un espace métrique (E, d), soit A un sous-ensemble compact et B un sous-ensemble fermé tels que $A \cap B = \emptyset$.*
Montrer que $d(A, B)$ est positive.

2.II.1. ◆◆ *Dans un espace métrique (E, d), montrer que si une suite de Cauchy a une valeur d'adhérence a, elle converge vers a.*
(On dit que a est valeur d'adhérence d'une suite $\{x_n\}$ lorsque toute boule $B_\rho(a)$ contient une infinité d'éléments de la suite, non nécessairement distincts.)

2.II.2. ◆◆ *Dans un espace ultramétrique (E, d), montrer qu'une suite $\{x_n\}$ est de Cauchy si, et seulement si, on a $\lim d(x_n, x_{n+1}) = 0$, lorsque n tend vers l'infini (revoir la définition d'une ultra-distance, exercice 1.I.7.).*

2.III.1. ◆

On considère la suite $\{a_n\}$ définie dans $\mathbb{Q}$ par

$$a_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p p!} = 1 + \frac{1}{2.1!} + \ldots + \frac{1}{2^n n!}.$$

1° *Établir que l'on a la relation* $|a_m - a_n| \leqslant \frac{1}{2^n(n+1)!}$, *pour* $m \geqslant n \geqslant 0$, *et en déduire que $\{a_n\}$ est une suite de Cauchy.*

2° *Montrer que $\{a_n\}$ ne peut converger vers un élément de $\mathbb{Q}$.*

[*En supposant que la suite $\{a_n\}$ converge vers un élément $\frac{p}{q}$ de $\mathbb{Q}$, on établira successivement les propriétés suivantes :*

a) la majoration $|2^n n! \frac{p}{q} - K_n| \leqslant \frac{1}{n+1}$, *où* $K_n = 2^n n!, \ a_n \in \mathbb{N}$;

b) l'égalité $K_n = 2^n n! \frac{p}{q}$, *pour* $n \geqslant q$;

c) la propriété contradictoire $a_n = \frac{p}{q}$, $\forall n \geqslant q$.]

2.III.2. ◆◆

Soit (E, d) un espace métrique complet et $\{F_n\}$ une suite décroissante de fermés $(F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \ldots)$ dont le diamètre tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Démontrer que l'intersection de ces fermés est un point.

2.III.3. ◆◆◆

Distances uniformément équivalentes et complétion.

1° *Montrer que si (E, d) est un espace métrique complet, (E, d') où d' est une distance uniformément équivalente à d, est également un espace complet. (Voir chapitre **1**. II, la définition des distances uniformément équivalentes.)*

2° *Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$x \mapsto f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

Montrer que $d'(x, y) = |f(x) - f(y)|$ est une distance sur $\mathbb{R}$.
Établir que d' est équivalente à la distance euclidienne.

3° *Dans l'espace métrique $(\mathbb{R}, d')$, trouver un exemple simple de suite de Cauchy non convergente.*
La distance d' est-elle uniformément équivalente à la distance euclidienne? Que peut-on en conclure?

2.III.4. ◆◆

Soit (E, d) un espace métrique et soit A une partie de E supposée dense dans E. Montrer que, pour que E soit complet, il faut et il suffit que toute suite de Cauchy dans A converge dans E.

2.III.5. ◆

Soit (E, d) un espace métrique et soit A un sous-espace. Établir les propriétés suivantes :

1° *A compact $\Rightarrow$ A complet ;*

2° *A complet $\Rightarrow$ A fermé dans E.*

2.III.6. ◆◆◆ **Complétion d'un espace métrique.**

Soit (E, d) un espace métrique et soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites de Cauchy de E. On note $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ un élément de $\mathcal{C}$.

1° *Soit $\mathfrak{R}$ la relation définie sur $\mathcal{C}$ par*

$$X \mathfrak{R} Y \Leftrightarrow \lim_{n \to +\infty} d(x_n, y_n) = 0.$$

Montrer que $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence. $\tilde{X}$ étant la classe d'équivalence de X, l'ensemble quotient $\mathcal{C}/\mathfrak{R}$ sera noté $\tilde{E}$.

2° *Montrer que $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, y_n)$ existe, $\{x_n\}_1^{\infty}$ et $\{y_n\}_1^{\infty}$ étant des éléments de $\mathcal{C}$ (*). Soit $\delta(X, Y)$ cette limite. Établir que $\delta(X, Y)$ ne dépend que de $\tilde{X}$ et de $\tilde{Y}$.*

3° *Démontrer que δ définie sur $\tilde{E} \times \tilde{E}$ par $\delta(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \delta(X, Y)$ est une distance sur $\tilde{E}$.*

(*) *On pourra utiliser la majoration*

$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leqslant d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m).$$

2.III.7. ◆◆◆ **Complétion d'un espace métrique** (*suite de l'exercice précédent*).

On considère l'espace métrique $(\tilde{E}, \delta)$ construit précédemment (exercice 2.III.6.).

1° *Montrer qu'il existe dans $\tilde{E}$ un ensemble E' isométrique à E, c'est-à-dire tel qu'il existe une application bijective de E' sur E conservant la distance.*

2° *Montrer que E' est dense dans $\tilde{E}$.*

3° *Établir que $\tilde{E}$ est complet (on pourra utiliser le résultat de l'exercice 2.III.4.). Si l'on identifie E et E', E est donc plongé dans l'espace métrique $(\tilde{E}, \delta)$, où $\delta(x, y) = d(x, y)$, $\forall x$ et $y \in E$.*

4° *Montrer que s'il existe un espace métrique complet (F, d) tel que $\overline{E} = F$, alors (F, d) est isométrique à $(\tilde{E}, \delta)$.*

SOLUTIONS

2.I.1.

1° On sait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc $Q \cap [0, 1]$ est dense dans $[0, 1]$. Par suite, $\bar{E} = [0, 1]$ et E n'est pas fermé.

2° E peut être recouvert par la famille finie suivante $\{I_{l'}(x_n)\}_{n=1}^{n_0}$ (qui n'est pas extraite de $\mathfrak{J}$ mais qui va servir à cette opération), où l' est choisi dans Q tel que

$$0 < l' < l \qquad \text{et} \qquad x_n = nl'$$

et où n prend les valeurs $n = 0, 1, 2, \ldots, n_0$, n_0 étant défini par

$$n_0 l' \leqslant 1 < (n_0 + 1) l'.$$

Puisque $l' \in Q$, les points x_n appartiennent à E. Il est alors clair que la famille $I_l(x_n)$ extraite de $\mathfrak{J}$ est une famille finie recouvrant E.

Cet exemple ne contredit en rien le théorème de Borel-Lebesgue; quand un ensemble n'est pas compact sur $\mathbb{R}$, il n'est pas exclu que, *d'un recouvrement* d'ouverts, on puisse extraire un recouvrement fini. Quand l'ensemble est compact, le théorème affirme une propriété plus forte : *de tout recouvrement* d'ouverts on peut extraire un recouvrement fini.

2.I.2.

Il s'agit toujours d'ensembles dans un espace métrique, mais, en fait, la propriété subsiste pour un espace topologique quelconque. Dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ munis de la distance naturelle, elle est immédiate puisque A compact $\Leftrightarrow$ A fermé et borné.

Dans le cas général, la propriété se démontre par application du théorème de Borel-Lebesgue.

a) Soit $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$; considérons un recouvrement ouvert quelconque de A. Ce recouvrement est *a fortiori* un recouvrement des A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. En tant que recouvrement de A_i on peut extraire un recouvrement fini, puisque A_i est compact et ceci pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

La réunion finie de ces recouvrements finis est un recouvrement fini de A, donc A est compact.

b) Soit $A = \bigcap_i A_i$; A_i compacts $\Rightarrow$ A_i fermés; donc $\bigcap_i A_i$ est fermé. Mais A est alors un fermé inclus dans le compact A_{i_0}, il est donc compact (théorème **2.I.1.**).

2.I.3.

1° Soit E compact et $\mathscr{F} = \{F_i, i\in I\}$ une famille convenable de fermés de E. Montrons que l'on a $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \phi$, en supposant le contraire. Si $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \phi$, la famille $O_i = \complement F_i$ est une famille d'ouverts recouvrant E, puisque

$$\bigcup_{i\in I} O_i = \bigcup_{i\in I} \complement F_i = \complement\Big(\bigcap_{i\in I} F_i\Big) = \complement\phi = E.$$

E étant compact, on peut extraire de ce recouvrement un recouvrement fini

$$E = \bigcup_{k=1}^{n} O_{i_k}.$$

Alors $\phi = \bigcap\limits_{k=1}^{n} F_{i_k}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de l'intersection finie, donc $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \phi$.

2° Réciproquement, montrons que si toute famille F_i de fermés de E, possédant la propriété de l'intersection finie, est telle que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \phi$, alors E est compact.

Supposons E non compact. Il existe alors un recouvrement d'ouverts $\cup O_j$ duquel on ne peut pas extraire un recouvrement fini. Soit $F_j = \complement O_j$; F_j est un fermé et l'on a

$$\cap F_j = \complement(\cup O_j) = \phi.$$

La famille $\{F_j\}$ possède la propriété d'intersection finie. En effet, s'il existait une intersection finie vide $\bigcap\limits_{k=1}^{n} F_{j_k}$, les ouverts O_{j_k} fourniraient un recouvrement fini de E, ce qui est contraire à l'hypothèse sur le recouvrement $\{O_j\}$.

En résumé, si E était non compact, il existerait donc une famille $\{F_j\}$ de fermés possédant la propriété de l'intersection finie et telle que $\cap F_j = \phi$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse faite, donc E est compact. **D'où l'énoncé suivant du résultat :** E compact $\Leftrightarrow$ toute famille $\{F_i\}_{i\in I}$ de fermés de E possédant la propriété de l'intersection finie est telle que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \phi$.

2.I.4.

On rappelle que $d(A, B) = \inf\limits_{\substack{x\in A\\ y\in B}} d(x, y)$. Supposons $d(A, B) = 0$. Alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists x_n \text{ et } y_n,\ x_n \in A \text{ et } y_n \in B, \text{ tels que } d(x_n, y_n) \leqslant \frac{1}{n}\cdot$$

Deux cas sont à étudier

1° $\{x_n\}$ est une suite admettant un nombre fini de valeurs distinctes;

2° $\{x_n\}$ est une suite admettant une infinité de valeurs distinctes.

Premier cas. — Soit alors x_0 un élément stationnaire de la suite $\{x_n\}$. Dans ce premier cas, $\{y_n\}$ ne peut être également une suite finie [sinon on aurait $d(A, B) > 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse]. Il existe donc une suite extraite $\{y_{np}\}$ telle que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \exists y_{np}, d(x_0, y_{np}) \leqslant \frac{1}{n_p}.$$

Mais ceci entraîne que $x_0 \in \bar{B} = B$, ce qui est impossible, puisque $A \cap B = \varnothing$.

Deuxième cas. — Puisque A est compact et que $\{x_n\}$ admet une infinité de valeurs distinctes dans A, il existe au moins un point d'accumulation, soit x, de l'ensemble des $\{x_n\}$ et $x \in A$.

Il existe alors une suite extraite $\{x_{n_p}\}$ telle que

$$\forall p \in \mathbb{N}, d(x, y_{n_p}) \leqslant \frac{1}{n_p}, \qquad \text{donc} \qquad d(x, x_{n_p}) \leqslant \frac{1}{n_p} + \frac{1}{n_p} = \frac{2}{n_p}.$$

Toute boule de centre x rencontre donc B.

Alors $x \in \bar{B} = B$, ce qui est impossible, puisque $A \cap B = \varnothing$.

Il est donc bien établi que $\underline{d(A, B) > 0.}$

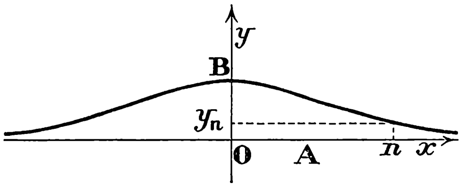
On voit dans le second cas l'importance de l'hypothèse: A est compact. Elle est encore mieux mise en évidence dans le contre-exemple suivant où l'on a la situation

A et B fermés, $A \cap B = \varnothing$, avec $d(A, B) = 0$;

A est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ (muni de la distance naturelle) défini par $\{(x, y), y = 0\}$;

B est défini par $\left\{(x, y); y = \dfrac{1}{1+x^2}\right\}$ (voir figure ci-dessous);

A et B sont bien fermés, sans être compacts.



On voit facilement que $d(A, B) = 0$, puisque l'on a

$$d(M_n, M'_n) = \frac{1}{1+n^2},$$

où

$$M_n(n, 0) \qquad \text{et} \qquad M'_n\left(n, \frac{1}{1+n^2}\right).$$

2.II.1.

Soit $\{x_n\}_1^\infty$ la suite donnée et $A_n = \{x_p, p \geqslant n\}$. Dire que a est valeur d'adhérence de la suite $\{x_n\}$ est équivalent à

$$\text{(1)} \qquad \forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N};\ A_n \cap B_\varepsilon(a) \neq \phi,$$

où $B_\varepsilon(a)$ est une boule de centre a et de rayon ε.

Supposons maintenant que $\{x_n\}$ soit une suite de Cauchy. Alors

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n, m \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon$,

donc

(3) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow d(a, x_n) \leqslant 2\varepsilon$.

[En effet, n_0 existe d'après (2), et d'après (1) il existe $p \geqslant n_0$ tel que $d(a, x_p) \leqslant \varepsilon$. Or, on a

$$d(a, x_n) \leqslant d(a, x_p) + d(x_p, x_n),$$

donc

$$d(a, x_n) \leqslant 2\varepsilon, \text{ pour tout } n \geqslant n_0.]$$

De (3), on déduit que la suite converge vers a.

Autrement dit, le comportement d'une suite de Cauchy est très simple : ou bien elle n'a pas de valeur d'adhérence, ou bien elle converge.

2.II.2.

La condition est nécessaire, puisque par définition même d'une suite de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \quad \text{tel que} \quad d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \varepsilon, \text{ pour tout } n \geqslant n_0.$$

En général, elle n'est pas suffisante. Ceci va cependant être vrai dans le cas d'une ultra-distance.

Supposons $\lim_{n \to \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$;

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \varepsilon.$$

Or, on a

$$d(x_n, x_{n+p}) \leqslant \sup [d(x_n, x_{n+1}), \ldots, d(x_{n+p-1}, x_{n+p})],$$

donc

$$d(x_n, x_{n+p}) \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \quad \text{tel que} \quad n, m \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon,$$

ce qui établit la réciproque.

2.III.1.

1° $a_m - a_n = \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} + \ldots + \frac{1}{2^{n+k}(n+k)!} \leqslant \frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}}\right]$,

en posant $m = n + k$, donc

(1) $$|a_m - a_n| \leqslant \frac{1}{2^n(n+1)!}.$$

On en déduit que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \quad \text{tel que} \quad \forall n \text{ et } m \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |a_m - a_n| \leqslant \varepsilon.$$

Il suffit de prendre, par exemple, $N_\varepsilon = 1 + \left[\dfrac{-\operatorname{Log} \varepsilon}{\operatorname{Log} 2}\right]$.

Autrement dit, la suite $\{a_n\}$ est une suite de Cauchy.

2° Supposons que $\{a_n\}$ ait une limite appartenant à $\mathbb{Q}$, soit $\dfrac{p}{q}$. Alors, la suite $\{a_m - a_n\}_{m=1}^{\infty}$ (n étant ici fixé) a pour limite $\dfrac{p}{q} - a_n$. L'inégalité (1) fournit alors, par passage à la limite sur m

$$\left|\frac{p}{q} - a_n\right| \leqslant \frac{1}{2^n(n+1)!}. \tag{2}$$

Mais a_n est de la forme $a_n = \dfrac{k_n}{2^n n!}$, où k_n est un entier positif, (2) entraîne donc

$$\left|2^n n! \frac{p}{q} - k_n\right| \leqslant \frac{1}{n+1}. \tag{3}$$

Si l'on prend $n \geqslant q$ on voit que $2^n \dfrac{n!p}{q} - k_n$ est un entier. On déduit alors de (3) que cet entier est nécessairement nul, puisque $\dfrac{1}{n+1} < 1$. Donc, on a

$$\frac{p}{q} = \frac{k_n}{2^n n!} = a_n.$$

Par suite, $a_n = \dfrac{p}{q}$, $\forall n \geqslant q$. La suite serait donc stationnaire à partir d'un certain entier, mais ceci est en contradiction avec le fait que $\{a_n\}$ est strictement croissante. On a donc ici un exemple de suite de Cauchy dans $\mathbb{Q}$, non convergente dans $\mathbb{Q}$, ce qui montre que $\mathbb{Q}$ n'est pas complet.

En anticipant sur l'étude des séries on peut remarquer que $\lim_{n \to \infty} a_n = \sqrt{e}$, nombre qui est irrationnel.

2.III.2.

Soit $x_n \in F_n$. La suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy, puisque $\lim \delta(F_n) = 0$:

$$n \text{ et } m \geqslant N \Rightarrow x_n \text{ et } x_m \in F_N \Rightarrow d(x_n, x_m) \leqslant \delta(F_N) \leqslant \varepsilon.$$

Puisque E est complet, *cette suite converge vers un point* $x \in E$.

Montrons que

$$x \in \bigcap_{1}^{\infty} F_n.$$

Pour tout n, F_n est un fermé inclus dans E; or, $x_p \in F_n$, $\forall p \geqslant n$, [puisque la suite des F_n est décroissante] donc $x \in F_n$ et ceci quel que soit n.

Alors

$$x \in \bigcap_{1}^{\infty} F_n.$$

Montrons que l'intersection des F_n se réduit au seul point x.

Supposons qu'il existe $x' \in \bigcap_{1}^{\infty} F_n$, $x' \neq x$, alors

$$d(x', x) > 0 \Rightarrow \delta(F_n) \geqslant d(x, x') > 0,$$

ce qui est contraire à l'hypothèse : $\delta(F_n)$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

En étudiant l'exemple suivant on verra pourquoi l'hypothèse $\delta(F_n) \to 0$ est essentielle.

Dans $\mathbb{R}^2(x, y)$ naturel, on prend $F_n = \{(x, y), x \geqslant n\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alors, on a

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$$

et cependant l'intersection est vide.

2.III.3.

1° Il suffit d'établir que toute suite de Cauchy $\{x_n\}$ dans (E, d') est une suite de Cauchy dans (E, d). Or, ceci va résulter de la définition même de l'uniforme équivalence (cf. chapitre I, § 0) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad d'(x_n, x_m) \leqslant \eta \Rightarrow d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon.$$

Puisque $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans (E, d'), on a aussi

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists N_{\varepsilon'} \quad \text{tel que} \quad n, m \geqslant N_{\varepsilon'} \Rightarrow d'(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon'.$$

En choisissant $\varepsilon' = \eta(\varepsilon)$, on a donc

$$n, m \geqslant N_\eta \Rightarrow d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon.$$

2° *a*) Remarquons que la fonction $x \to \dfrac{x}{1+|x|}$ est monotone et croissante de $-\infty$ à $+\infty$ et définit une bijection de $]-\infty, +\infty[$ sur $]-1, +1[$.

Alors,

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Évidemment

$$d(x, y) = |f(x) - f(y)| = d(y, x)$$

et l'inégalité triangulaire résulte de

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)|.$$

b) La distance d' est équivalente à la distance euclidienne, soit d sur $\mathbb{R}$. Il s'agit de démontrer que toute boule ouverte $B_{d,\varepsilon}(x_0)$ de $(\mathbb{R}, d)$ contient une boule ouverte

$B_{d',\varepsilon'}(x_0)$ de $(\mathbb{R}, d')$ et réciproquement, les boules $B_{d,\varepsilon}(x_0)$ et $B_{d',\varepsilon'}(x_0)$ étant respectivement définies par

$$B_{d,\varepsilon}(x_0) = \{x;\ |x-x_0|<\varepsilon\} \qquad \text{et} \qquad B_{d',\varepsilon'}(x_0) = \{x;\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon'\}.$$

Puisque f est croissante, on a

$$B_{d',\varepsilon'}(x_0)\subset B_{d,\varepsilon}(x_0),$$

où

$$\varepsilon' < \inf\{f(x_0)-f(x_0-\varepsilon), f(x_0+\varepsilon)-f(x_0)\},$$

et

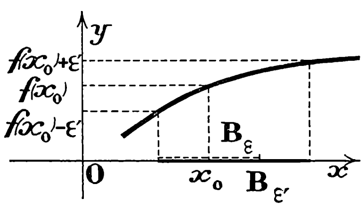
$$B_{d,\varepsilon}(x_0)\subset B_{d',\varepsilon'}(x_0),$$

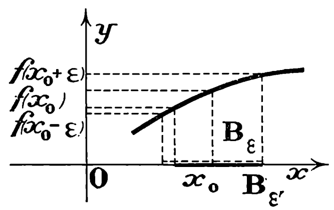
où

$$\varepsilon < \inf\{x_0-f^{-1}[f(x_0)-\varepsilon'], f^{-1}[f(x_0)+\varepsilon']-x_0\}.$$

La propriété est donc bien établie.

Les schémas ci-dessous illustrent concrètement ces deux inclusions :





Ce sont d'ailleurs les schémas qu'on utilise lors de l'étude des propriétés de la fonction réciproque d'une fonction donnée.

3° Prenons $x_n = n\in\mathbb{N}$, il vient

$$d(x_n, x_m) = \left|\frac{n}{1+n}-\frac{m}{1+m}\right| = \frac{m-n}{(1+m)(1+n)},\ \text{pour } m\geqslant n,$$

donc

$$d(x_n, x_m)\leqslant\frac{m}{(1+m)(1+n)}\leqslant\frac{1}{1+n},$$

et ceci montre que $\{n\}^\infty$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d')$ non convergente dans $(\mathbb{R}, d')$.

Autrement dit, $(\mathbb{R}, d')$ n'est pas complet.

On en déduit que d' n'est pas uniformément équivalente à d, sinon, d'après le 1°, puisque $(\mathbb{R}, d)$ étant complet $(\mathbb{R}, d')$ le serait.

Remarquons maintenant que d et d′ étant équivalentes, les topologies associées sont identiques. On peut donc conclure que le fait d'être complet pour un espace métrique est lié à la distance et non à la topologie qu'elle définit.

Une remarque analogue a déjà été faite au sujet des ensembles bornés (cf. exercice 1.IV.2.).

On voit aussi ici l'intérêt de l'équivalence uniforme qui entraîne la conservation des ensembles complets.

2.III.4.

Lorsque E est complet, toutes les suites de Cauchy dans E convergent et, donc, en particulier, les suites de Cauchy définies sur A.

Le problème est d'étudier la réciproque.

Supposons que toute suite de Cauchy dans A converge dans E et montrons alors que toute suite de Cauchy dans E converge.

Soit $\{x_n\}$ une suite de Cauchy dans E. Puisque l'on a $\bar{A} = E$, on peut affirmer que

$$\forall n, \exists y_n \in A \quad \text{tel que} \quad d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}.$$

La suite $\{y_n\}$ ainsi mise en évidence est une suite de Cauchy dans A. [En effet,

$$d(y_n, y_m) \leqslant d(x_n, y_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m);$$

Or $\forall \varepsilon > 0, \exists N_{1,\varepsilon}$, tel que $\forall n, m \in \mathbb{N};\ n, m > N_{1,\varepsilon} \Rightarrow d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_{2,\varepsilon}$, tel que $\forall n, m \in \mathbb{N};\ n$ et $m > N_{2,\varepsilon} \Rightarrow d(x_n, y_n) < \frac{\varepsilon}{4}$ et $d(x_m, y_m) < \frac{\varepsilon}{4}$.

Donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \quad \text{tel que} \quad \forall n, m \in \mathbb{N};\ n \text{ et } m \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow d(y_n, y_m) < \varepsilon.]$$

Par hypothèse, la suite $\{y_n\}$ est donc convergente vers un élément $a \in E$, alors $\{x_n\}$ converge également vers a, puisque

$$d(a, x_n) \leqslant d(a, y_n) + d(x_n, y_n) \leqslant d(a, y_n) + \frac{1}{n}.$$

On en déduit la condition nécessaire et suffisante.

2.III.5.

1° Il s'agit d'établir la propriété

$$A \text{ compact} \Rightarrow A \text{ complet}.$$

Considérons donc une suite de Cauchy $\{x_n\}$ dans A et montrons qu'elle converge dans A.

Premier cas. — La suite $\{x_n\}$ a un nombre fini d'éléments distincts

$$\bigcup_1^\infty x_n = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}.$$

La suite de Cauchy $\{x_n\}$ est alors nécessairement stationnaire.

En effet, il existe au moins un y_{i_0} qui coïncide avec une infinité de termes x_{n_p} :

$$\forall p, \exists n_{p_0} > p \quad \text{tel que} \quad x_{n_{p_0}} = y_{i_0}.$$

Il ne peut y avoir deux y_{i_0} et y_{j_0} distincts, sinon

$$\forall p, \exists n_{q_0} > p \quad \text{tel que} \quad x_{n_{q_0}} = y_{j_0}.$$

Donc

$$\forall p, \exists n_{p_0} \text{ et } n_{q_0} > p \quad \text{tels que} \quad d(x_{n_{p_0}}, x_{n_{q_0}}) = d(y_{i_0}, y_{j_0}) \neq 0.$$

Or, $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \quad \text{tel que} \quad m \text{ et } n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) \leqslant \varepsilon.$$

En prenant

$$2\varepsilon = d(y_{i_0}, y_{j_0}),\ p = N_\varepsilon,\ n = n_{p_0} \text{ et } m = n_{q_0},$$

on obtient le résultat contradictoire suivant :

$$d(y_{i_0}, y_{j_0}) \leqslant \varepsilon = \frac{1}{2} d(y_{i_0}, y_{j_0}).$$

En résumé, la suite $\{x_n\}$ est stationnaire : $x_n = y_{i_0}$, $\forall n \geqslant n_0$, donc converge vers l'élément $y_{i_0} \in A$.

Deuxième cas. — La suite $\{x_n\}$ a une infinité d'éléments distincts.

Puisque A est compact, l'ensemble des x_n admet donc, au moins, un point d'accumulation $a \in A$.

Le nombre a est la valeur d'adhérence de la suite $\{x_n\}$. En effet, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $B_{\frac{1}{p}}(a)$ contient un élément x_{n_p} de la suite, donc $B_\rho(a)$ contient une infinité d'éléments de la suite $\left(\text{l'ensemble des } x_{n_p} \text{ pour tous les entiers } p \text{ vérifiant } p \geqslant 1 + \left[\frac{1}{\rho}\right]\right)$.

En résumé, la suite de Cauchy $\{x_n\}$ admet une valeur d'adhérence $a \in A$. Elle converge donc vers a. (Voir la solution de l'exercice 2.II.1.)

2° Il s'agit maintenant d'établir la propriété : A complet $\Rightarrow$ A fermé dans (E, d).

Soit x un élément de $\bar{A}$. Il existe donc une suite $\{x_n\}$ d'éléments de A qui converge vers x. La suite $\{x_n\}$ est donc une suite de Cauchy. De plus, elle est définie dans A complet, il existe donc un élément $y \in A$ vers lequel $\{x_n\}$ converge. On a $x = y$, puisque

$$d(x, y) \leqslant d(x_n, x) + d(x_n, y) \leqslant 2\varepsilon, \text{ pour } n \geqslant N_\varepsilon,$$

donc $x \in A$.

2.III.6.

1° On vérifie les trois axiomes de l'équivalence.

$X \mathfrak{R} X$ est évidente;
$X \mathfrak{R} Y \Rightarrow Y \mathfrak{R} X$, puisque $d(x_n, y_n) = d(y_n, x_n)$;
$X \mathfrak{R} Y$ et $Y \mathfrak{R} Z \Rightarrow X \mathfrak{R} Z$, puisque $d(x_n, z_n) \leqslant d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$.

La relation $\mathfrak{R}$ est donc une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}$, d'où l'on déduit l'existence de l'ensemble-quotient $\tilde{E}$.

2° *Remarque:* Dans un espace métrique, on a toujours l'inégalité

(1) $$|d(a, b)-d(a', b')| \leqslant d(a, a')+d(b, b').$$

En effet, on a

$$d(a, b) \leqslant d(a, a')+d(a', b')+d(b', b),$$

donc aussi

$$d(a, b)-d(a', b') \leqslant d(a, a')+d(b, b').$$

En échangeant les rôles des couples (a, b) et (a', b'), on peut donc conclure que (1) a lieu.

Appliquons maintenant (1) aux couples (x_n, y_n) et (x_m, y_m), il vient

(2) $$|d(x_n, y_n)-d(x_m, y_m)| \leqslant d(x_n, x_m)+d(y_n, y_m).$$

Or, $\{x_n\}$ et $\{y_n\} \in \mathcal{C}$ entraînent que l'on a

$\forall\varepsilon>0, \exists N_\varepsilon$ tel que $\forall m$ et $n \in \mathbb{N}$; m et $n>N_\varepsilon \Rightarrow |d(x_n, y_n)-d(x_m, y_m)|<2\varepsilon$.

Autrement dit, $\{d(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ étant complet, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$ existe. On note cette limite $\delta(X, Y)$.

Soit X et X' (resp. Y et Y') deux représentants distincts de $\tilde{X}$ (resp. $\tilde{Y}$), montrons que $\delta(X, Y) = \delta(X', Y')$.

L'inégalité (1) appliquée aux couples (x_n, y_n) et (x'_n, y'_n) entraîne

(3) $$|d(x_n, y_n)-d(x'_n, y'_n)| \leqslant d(x_n, x'_n)+d(y_n, y'_n);$$

mais X et $X' \in \tilde{X}$ et Y, $Y' \in \tilde{Y}$; on déduit donc de (3) la relation

$$\lim_{n\to+\infty} |d(x_n, y_n)-d(x'_n, y'_n)| = 0,$$

donc

$$\delta(X, Y) = \delta(X', Y').$$

3° Il résulte de ce qui précède que l'on peut poser

$$\delta(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \delta(X, Y),$$

où X et Y sont des éléments quelconques respectivement de $\tilde{X}$ et de $\tilde{Y}$. Montrons que δ est une distance sur $\tilde{E}$.

$\delta(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0 \Leftrightarrow \tilde{X} = \tilde{Y}$, puisque $\delta(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X \mathcal{R} Y$;

$\delta(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \delta(\tilde{Y}, \tilde{X})$, égalité évidente;

$\delta(\tilde{X}, \tilde{Y}) \leqslant \delta(\tilde{X}, \tilde{Z})+\delta(\tilde{Z}, \tilde{Y})$, puisque $d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, z_n)+d(z_n, y_n)$ entraîne, par passage à la limite sur n,

$$\delta(X, Y) \leqslant \delta(X, Z)+\delta(Z, Y).$$

2.III.7.

1° Soit E' l'ensemble des classes correspondant aux suites de Cauchy de E qui sont convergentes dans E.

On établit alors la bijection $E' \leftrightarrow E$, $\tilde{A} \leftrightarrow a$, de la manière suivante.

A tout $a \in E$ on fait correspondre la classe $\tilde{A}$ des suites de Cauchy qui convergent vers a. Cette classe peut être définie par la suite stationnaire $A = \{a\}$.

Réciproquement, à tout élément $\tilde{A}$ de E' on fait correspondre l'élément a de E qui est la limite d'une suite de Cauchy de la classe $\tilde{A}$, ce qui est possible, d'après la définition même de E'.

Cette bijection est une isométrie, puisque l'on a

$$\delta(\tilde{A}, \tilde{B}) = \delta(A, B) = \lim_{n\to\infty} d(a, b) = d(a, b),$$

en prenant les suites stationnaires $\{a\}$ et $\{b\}$ pour définir $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$.

2° Soit $\tilde{X} \in \tilde{E}$, il s'agit d'établir qu'il existe une suite d'éléments de E', soit $\{\tilde{X}_p\}_{p=1}^{\infty}$ telle que

$$\lim_{p\to\infty} \delta(\tilde{X}, \tilde{X}_p) = 0,$$

où $\tilde{X}$ est défini par la suite de Cauchy $X = \{x_n\}_1^{\infty}$. Choisissons pour $\tilde{X}_p$ la classe définie par la suite stationnaire suivante :

$$X_p = \{x_{p,n}\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \text{où} \qquad x_{p,n} = x_p, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Nous l'écrirons pour simplifier ici $\{x_p\}$.

Démontrons alors que $\lim_{p\to\infty} \delta(\tilde{X}, \tilde{X}_p) = 0$.

Comme $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \quad \text{tel que,} \quad \forall n \text{ et } p \in \mathbb{N},\ n \text{ et } p > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_p) \leqslant \varepsilon,$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \quad \text{tel que} \quad \forall p \in \mathbb{N},\ p > N_\varepsilon \Rightarrow \delta(X, X_p) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n,p}) \leqslant \varepsilon,$$

on en déduit la propriété cherchée en passant aux classes d'équivalence.

3° Puisque E' est dense dans $\tilde{E}$ il suffit d'établir que les suites de Cauchy dans E' convergent dans $\tilde{E}$ (voir exercice 2.III.4.). Soit donc $\{\tilde{X}_p\}_{p=1}^{\infty}$ une suite de Cauchy dans E'. Par définition même de E', on peut prendre, pour caractériser $\tilde{X}_p$, la suite stationnaire $X_p = \{x_{p,n}\}_{p=1}^{\infty}$, $x_{p,n} = x_p$.

Alors

$$\delta(\tilde{X}_p, \tilde{X}_q) = \delta(X_p, X_q) = \lim_{n\to\infty} d(x_{p,n}, x_{q,n})$$

entraîne

$$\delta(\tilde{X}_p, \tilde{X}_q) = d(x_p, x_q).$$

Autrement dit,

$$\{\tilde{X}_p\}_{p=1}^{\infty} \text{ suite de Cauchy} \Leftrightarrow \{x_p\}_{p=1}^{\infty} \text{ suite de Cauchy.}$$

Soit X l'élément de $\mathcal{C}$ défini par $\{x_p\}_{p=1}^{\infty}$, il lui correspond $\tilde{X} \in \tilde{E}$. Par un raisonnement identique à celui qui a été exposé à la question 2°, on établit que la suite $\{\tilde{X}_p\}_{p=1}^{\infty}$ converge vers $\tilde{X}$ et ceci termine la démonstration.

On observera qu'à la question 2° on a défini X_p à partir de X alors qu'ici on a fait l'inverse. L'élément X est défini à partir de X_p, mais les situations sont identiques.

4° Unicité à une isométrie près de la complétion.

Soit x un élément de F, puisque E est dense dans F il existe une suite de Cauchy $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergeant vers x.

Soit $\tilde{X}$ la classe de X, $\tilde{X} \in \tilde{E}$.

A tout x correspond évidemment une classe et une seule $\tilde{X}$ de $\tilde{E}$, puisque toutes les suites de Cauchy convergeant vers x sont équivalentes.

Réciproquement, à tout $\tilde{Y}$ élément de $\tilde{E}$ correspond une suite de Cauchy

$$Y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad y_n \in E.$$

La suite $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ est donc une suite de Cauchy dans F puisque $E \subset F$. De plus, cette suite converge vers un élément y de F, puisque F est complet. A tout Y on fait donc correspondre un, et un seul, élément y de F, puisque les suites de Cauchy équivalentes ont même limite. Montrons que la bijection ainsi établie est une isométrie.

Soit x et $y \in F$, $\tilde{X}$ et $\tilde{Y} \in E$, avec $X = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $Y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, suites de Cauchy convergeant vers x et vers y.

Alors,

$$d(x, y) \leqslant d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y, y_n),$$

puisque la distance sur F induit la distance d sur E.

Donc, en passant à la limite en n, on a

$$d(x, y) \leqslant \lim_{n \to \infty} d(x_n, y_n) = \delta(X, Y) = \delta(\tilde{X}, \tilde{Y}),$$

puisque

$$\lim_{n \to \infty} d(x, x_n) = \lim_{n \to \infty} d(y, y_n) = 0.$$

De même,

$$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$$

entraîne la relation

$$\delta(X, Y) < d(x, y).$$

Donc, $\delta(\tilde{X}, \tilde{Y}) = d(x, y)$ et ceci termine la démonstration.

Commentaire :

Cette étude de complétion d'un espace métrique s'applique évidemment au cas particulier de $\mathbb{Q}$, corps totalement ordonné archimédien, muni de la distance naturelle, le complété étant alors $\mathbb{R}$. La théorie de cette complétion exposée en M.P.1, ou en classe de Mathématiques supérieures, suit exactement la théorie générale ci-dessus et l'étudiant pourra s'y reporter avec intérêt.

Si l'on considère $\mathbb{Q}$, muni de la distance p-adique (voir exercice 1.I.8.), le complété obtenu est appelé le corps des nombres p-adiques et est noté $\mathbb{Q}_p$.

3. APPLICATIONS CONTINUES

I. — GÉNÉRALITÉS.

Dans ce paragraphe, on considère deux espaces métriques (E, d), (F, δ) et une application $f : E \mapsto F$.

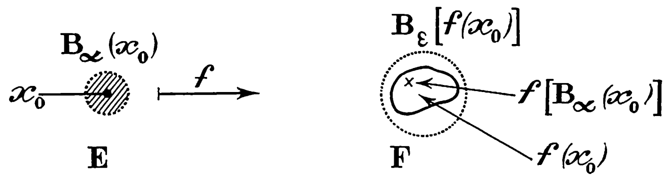
1° Continuité en un point. – On dit que f est continue en $x_0 (\in E)$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_{\varepsilon, x_0} > 0 \quad \text{tel que} \quad f[B_\alpha(x_0)] \subset B_\varepsilon[f(x_0)].$$

De façon équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_{\varepsilon, x_0} > 0 \quad \text{tel que} \quad d(x_0, x) < \alpha \Rightarrow \delta[f(x), f(x_0)] < \varepsilon.$$

Représentation concrète.



Remarque. – Dans le cas des espaces topologiques qui sont des métriques (c'est le cas qui nous intéresse ici), on a

$$f \text{ continue en } a \Leftrightarrow f(x_n) \to f(a),$$

pour toute suite $\{x_n\}$, $x_n \to a$, $(x_n \in E)$.

2° Continuité sur un sous-ensemble A de E. – L'application f est dite continue sur A si elle est continue en tout point de A, ceci entraîne la continuité de l'application $f_A : A \mapsto F$ (f_A étant la restriction de f à A considéré comme espace relatif de E).

Remarquons qu'étant donné une application continue $g : A \mapsto F$, il n'existe pas nécessairement de fonction continue $G : E \mapsto F$ telle que $G_A = g$. **(Sauf si A est fermé.)**

3° **Théorème 3.I.1.** – Pour que f soit continue sur E il faut, et il suffit, que l'image réciproque $f^{-1}(O)$ de tout ouvert O de F, soit un ouvert de E. (On rappelle que $f^{-1}(O)$ est l'ensemble $\{x \in E, f(x) \in O\}$.)
Énoncé analogue pour les fermés.

4° **Continuité dans des espaces produits.** – Considérons les espaces métriques (E_i, d_i), $i = 1, 2$, et (F_j, δ_j), $j = 1, 2, 3$, et l'application

$$f : E_1 \times E_2 \mapsto F_1 \times F_2 \times F_3,$$

caractérisée par $f(x_1, x_2) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, où $x_i \in E_i$ et $\xi_j \in F_j$.
Soit l'application $f_j : E_1 \times E_2 \mapsto F_j$, définie par $f_j(x_1, x_2) = \xi_j$; on a alors

$$f(x_1, x_2) = [f_1(x_1, x_2),\ f_2(x_1, x_2),\ f_3(x_1, x_2)]$$

et la *propriété* suivante :

$$f \text{ continue en } (x_1, x_2) \Leftrightarrow f_1,\ f_2 \text{ et } f_3 \text{ continues en } (x_1, x_2).$$

II. — CONTINUITÉ UNIFORME.

1° Soit $f : A \mapsto (F, \delta)$, où A est un sous-espace relatif de (E, d). L'application f est dite uniformément continue sur B (incluse dans A) si « pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_\varepsilon > 0$, tel que $d(x, x_0) < \alpha \Rightarrow \delta(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ » (x et x_0 étant des éléments de B).
Remarquons que l'on a les propriétés suivantes :
a) dans le cas de la continuité uniforme, α est indépendant de x_0;
b) la continuité uniforme sur B entraîne la continuité sur B. La réciproque est fausse, en général. Toutefois on a le théorème de Heine.

2° **Théorème de Heine.** – Soit A un **compact** de (E, d). Toute application $f : A \mapsto (F, \delta)$, continue sur A, est uniformément continue sur A.

3° **Théorème 3.II.1.** – Soit un compact A de (E, d) et une application continue $f : A \mapsto (F, \delta)$, alors $f(A)$ est un compact de (F, δ).
On dit encore que **l'image continue d'un compact est un compact.**

Application :
A compact de (E, d) et $F = \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).
Soit $f : A \mapsto \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) supposée continue, alors $f(A)$ compact $\Rightarrow f(A)$ borné dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) $\Rightarrow \exists M$ constante telle que $|f(x)| \leqslant M$, $\forall x \in A$.

4° **Distances équivalentes et continuité.** – Soit (E, d) et (F, δ) deux espaces métriques. Si à d (resp. δ) on substitue une distance équivalente d' (resp. δ')

la continuité des applications f de E dans F est une propriété invariante. Par contre, la continuité uniforme n'est invariante que si d et d' (resp. δ et δ') sont **uniformément équivalentes.**

III. — DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS DIVERSES.

1° **Homéomorphie.** – Une application $f : (E, d) \mapsto (F, \delta)$ biunivoque et bicontinue est appelée homéomorphie.

Lorsqu'une telle application existe, on dit que E et F sont homéomorphes. **Si de plus on a $\delta[f(x), f(y)] = d(x, y)$, on dit que E et F sont isométriques.**

2° **Théorème 3.III.1.** – L'image continue d'un connexe est connexe.

3° **Notion de chemin et application.** – Soit A un sous-ensemble de (E, d) et deux éléments x et y appartenant à A. Nous dirons que x et y sont reliés par un chemin appartenant à A, si il existe une application continue $f : [a, b] \mapsto E$, avec $[a, b] \subset \mathbb{R}$, telle que $f[a, b] \subset A$, $f(a) = x$, $f(b) = y$.

Théorème 3.III.2. – Si deux points quelconques de A sont reliés par un chemin appartenant à A, alors A est connexe.

EXERCICES DU CHAPITRE 3

3.I.1. ◆ *On considère deux espaces métriques* (E, d), (F, δ) *et une application continue* $f: E \mapsto F$.
a) Montrer que l'application surjective $f: E \mapsto f(E)$ *est continue.*
b) Soit A *un sous-ensemble de* E *et* f_A *la restriction de* f *à* A. *Montrer que* f_A *est continue sur* A.

3.I.2. ◆ (E, d) *et* (F, δ) *désignent deux espaces métriques. Soit une application* $f: (E, d) \mapsto (F, \delta)$ *qui est supposée continue.*
On munit E *d'une nouvelle distance* d' *vérifiant la relation suivante:*

$$d' \geqslant kd, \qquad k \text{ étant une constante positive}$$

(c'est-à-dire $d'(x, y) \geqslant kd(x, y)$, $\forall x$ *et* $y \in E$*).*
Montrer que f *est encore continue sur* E, *muni de la distance* d'.

3.I.3. ◆◆ 1° *Soit* (E, d) *un espace métrique, muni de la distance triviale* d

$$d(x, y) = 1, \text{ si } x \neq y, \; d(x, y) = 0, \text{ si } x = y,$$

et soit (E', d') *un second espace métrique.*
Montrer que toute application f *de* E *dans* E' *est continue.*

2° *Soit* $\mathbb{Z}$ *l'ensemble des entiers algébriques muni de la distance naturelle* $\delta(n, m) = |n-m|$, $\forall n$ *et* $m \in \mathbb{Z}$.
a) Montrer que toute application f *de* $\mathbb{Z}$ *dans* $\mathbb{R}$ *est continue.*
b) Montrer que d *(pour* $E = \mathbb{Z}$*) et* δ *sont des distances équivalentes et retrouver ainsi le résultat de la question a).*

3.I.4. ◆ *Soit* $\mathbb{R}$ *la droite réelle et* $\mathbb{R}_0$ *l'espace métrique obtenu quand on munit le corps des réels de la distance triviale* d_0. *Démontrer qu'il ne peut exister d'application bijective continue de* $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}_0$.
En particulier, l'application canonique de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_0$ *n'est pas continue.*

3.I.5. ◆ *Soit* (V, d) *et* (H, d') *deux espaces métriques tels que* $V \subseteq H$ *et* $d'(x, y) \leqslant ad(x, y)$, $\forall (x, y) \in V \times V$ *(a est une constante positive).*
f *étant une application de* H *dans* $\mathbb{R}$ *et* $\tilde{f}$ *sa restriction à* V, *montrer que si* f *est continue sur* (H, d') *alors* $\tilde{f}$ *est continue sur* (V, d).

3.I.6. ◆◆ *On considère une application* f *d'un espace métrique* (E, d) *dans un autre* (E', d'). *Montrer que* f *est continue si, et seulement si, pour tout sous-ensemble* A *de* E *on a* $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

3.I.7. ◆◆ *Soit (E, d) un espace métrique, A et B deux sous-ensembles fermés de E tels que $E = A \cup B$.*
On considère deux applications f et g continues respectivement de (A, d), dans (E', d') et de (B, d) dans (E', d'), où (E', d') est un espace métrique, telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A \cap B$.
On définit alors sur E l'application h suivante :

$$h : E \mapsto E' \begin{cases} x \in A, h(x) = f(x), \\ x \in B, h(x) = g(x). \end{cases}$$

1° *X étant un ensemble quelconque de E, on pose*

$$X_1 = X \cap A, \; X_2 = X \cap B.$$

Montrer que l'on a

$$\bar{X}_1 \subset A, \qquad \bar{X}_2 \subset B \qquad et \qquad h(\bar{X}) = f(\bar{X}_1) \cup g(\bar{X}_2).$$

2° *Déduire du résultat précédent que h est une fonction continue de E dans E'. (On pourra utiliser la propriété énoncée dans l'exercice 3.I.6.)*

3.I.8. ◆◆ **Prolongement des égalités.**
f et g sont deux applications continues d'un espace métrique (E, d) dans un autre (E', d').

1° *Démontrer que l'ensemble A des points x tels que $f(x) = g(x)$ est fermé dans E.*

2° *Établir que si $f(x) = g(x)$ pour tout x d'un sous-ensemble B dense dans E, alors $f = g$.*

3.I.9. ◆◆ **Prolongement des inégalités.**
f et g sont deux applications continues d'un espace métrique (E, d) dans la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

1° *Démontrer que l'ensemble A des points x tels que $f(x) \leqslant g(x)$ est fermé dans E.*

2° *En déduire que si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout x d'un sous-ensemble B dense dans E, alors $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in E$.*

3.II.1. ◆◆ *A étant une partie d'un espace métrique (E, d), démontrer que, pour tout couple (x, y) de points de E on a*

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y).$$

En déduire que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est uniformément continue sur (E, d).

3.II.2. ◆◆ *Soit F_1 et F_2 deux fermés disjoints d'un espace métrique (E, d). On considère (cf. exercice 3.II.1.) les ouverts suivants :*

$$O_1 = \{x \in E;\, d(x, F_1) < d(x, F_2)\}$$

et

$$O_2 = \{x \in E;\, d(x, F_1) > d(x, F_2)\}.$$

Démontrer que O_1 et O_2 sont des ouverts disjoints et que

$$O_1 \supset F_1 \qquad et \qquad O_2 \supset F_2.$$

3.II.3. ◆◆

1° *Soit (E, d') et (F, δ) deux espaces métriques, où d' est la distance triviale définie par*

$$d'(x, x) = 0 \text{ et } d'(x, y) = 1 \text{ pour } y \neq x.$$

a) Montrer que toute application $f : E \mapsto F$ est uniformément continue.
b) E est-il compact?
c) E est-il complet?

2° *Dans cette question, on désigne par E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par*

$$E = \left\{(x, y);\ x = \frac{1}{n} \text{ et } y = \frac{1}{m}\right\}, \text{ où } n \text{ et } m \in \mathbb{N}^*.$$

E est muni de la distance naturelle de $\mathbb{R}^2$ qui sera notée d.
Dans E on désigne par $B_\varepsilon(a)$ [resp. $B'_\varepsilon(a)$] la boule ouverte de centre a et de rayon ε positif pour la distance d [resp. pour la distance d'].
a) Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \alpha(\varepsilon, a) > 0;\ B_\varepsilon(a) \supset B'_\alpha(a)$$

et

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \beta(\varepsilon, a) > 0;\ B'_\varepsilon(a) \supset B_\beta(a)$$

En déduire que d et d' engendrent la même famille d'ouverts. (On rappelle que d et d' sont alors dites équivalentes.)
b) (E, d) est-il complet? Comparer ce résultat avec celui de la question 1°, *c.*

3° *a) Dans cette question, E désigne le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par*

$$E = \left\{(x, y);\ x = \frac{1}{n} \text{ et } y = \frac{1}{m}\right\} \cup \{(0, 0)\}.$$

Les distances d et d' sont-elles équivalentes?
b) Toute application $f : (E, d) \mapsto \mathbb{R}$ (muni de la distance naturelle) est-elle continue sur E?
c) En utilisant la question 1°, *a) retrouver le a) de la question* 3°.

3.II.4. ◆◆

Prolongement uniformément continu d'une application.

Soit (E, d) et (E', d') deux espaces métriques. L'espace (E', d') est supposé complet.
Soit F un sous-ensemble dense de E et f une application de F dans E' supposée uniformément continue sur (F, d).
1° *Montrer que pour toute suite de Cauchy $\{a_n\}$ de F, $\{f(a_n)\}$ est une suite de Cauchy de E'.*

2° *Montrer que f se prolonge de façon unique en une application $\tilde{f}$ de E dans E', uniformément continue sur E.*
[Pour $x \in E$, $\exists x_n \to x$, avec $x_n \in F$, et l'on justifiera la définition

$$\tilde{f} : x \mapsto \tilde{f}(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n).]$$

3.II.5. **Applications contractantes.**
◆◆◆
Une application f d'un espace métrique (E, d) dans lui-même est dite contractante de rapport k s'il existe une constante k vérifiant $0 \leqslant k < 1$ telle que

$$\forall x, y \in E : d[f(x), f(y)] \leqslant kd(x, y).$$

Dans tout ce qui suit on suppose (E, d) complet.

1° f est une application contractante; démontrer que si f possède un point fixe a [c'est-à-dire tel que $f(a) = a$], alors ce point est unique.

2° Soit x_0 quelconque, $x_0 \in E$ et la suite $\{x_n\}$ définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, où f est supposée contractante.
Montrer que $\{x_n\}$ est convergente vers un point a et que

$$d(a, x_n) \leqslant \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0).$$

En déduire que toute application contractante dans un espace métrique complet admet un point fixe et un seul.

3° Soit $\{f_n\}$ une suite d'applications contractantes de même rapport k de E dans lui-même et $\{a_n\}$ la suite des points fixes correspondants. Montrer que si la suite $\{f_n\}$ converge simplement dans E vers une application f contractante de rapport k alors la suite $\{a_n\}$ converge vers le point fixe a de f.

4° Soit f une application continue de E dans lui-même telle que f^r soit une application contractante dans E, r étant un entier fixé. Établir que f possède un point fixe et un seul.
(f^r signifie: f puissance r au sens de la composition des applications.)

3.II.6.
◆◆
Soit E un ensemble dénombrable dont les points sont notés a_n, $n = 1, 2, \ldots$ On munit E d'une distance en posant

$$d(a_p, a_p) = 0 \qquad et \qquad d(a_p, a_q) = 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, \text{ si } p \neq q.$$

1° Vérifier que d est bien une distance et que E muni de cette distance est complet.

2° Soit f l'application de E dans E telle que $f(a_p) = a_{p+1}$.
Montrer que f diminue strictement les distances et que cependant f n'a aucun point fixe.

3.III.1. **Exemple de fonction continue strictement croissante et dont la fonction réciproque n'est pas continue.**
◆◆
Soit

$$E = [-2, -1[\cup \{0\} \cup]+1, +2] \qquad et \qquad F = [-1, 1]$$

considérés comme sous-espaces relatifs de $\mathbb{R}$ (muni de la distance naturelle) et f l'application de E sur F définie par

$$f : x \mapsto f(x) \begin{cases} f(x) = x+1, & pour\ x \in [-2, -1[, \\ f(x) = 0, & pour\ x = 0, \\ f(x) = x-1, & pour\ x \in]1, 2]. \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue.
b) Montrer que f est bijective.
c) Montrer que f^{-1} n'est pas continue.

3.III.2. ◆ **Exemple simple d'application bijective continue qui n'est pas un homéomorphisme.**

On munit $\mathbb{R}^n$ de la distance naturelle d,

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}, \text{ si } x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \ldots, y_n),$$

et de la distance triviale δ,

$$\delta(x, y) = 0, \text{ si } x = y, \qquad \delta(x, y) = 1, \text{ si } x \neq y.$$

Montrer que l'application canonique $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = x$ de $(\mathbb{R}^n, \delta)$ sur $(\mathbb{R}^n, d)$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.
Montrer que φ^{-1} n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}^n$.

SOLUTIONS

3.I.1.

a) Soit a un élément quelconque de E. Puisque f, considérée comme application de E dans F, est supposée continue, il existe une boule $B_{\alpha(\varepsilon,a)}(a)$ telle que

(1) $$f[B_\alpha(a)] \subset B_\varepsilon[f(a)].$$

Désignons par $B_\varepsilon^1\ [f(a)]$ la boule du sous-espace relatif $f(E)$ (de F) qui a pour centre $f(a)$ et pour rayon ε :

$$B_\varepsilon^1(f(a)) = \{x \in f(E);\quad \delta(x, f(a)) < \varepsilon\} = B_\varepsilon(f(a)) \cap f(E).$$

On a évidemment $f(B_\alpha(a)) \subset f(E)$, donc, compte tenu de (1), on obtient

(2) $$f(B_\alpha(a)) \subset B_\varepsilon^1(f(a)) \cap f(E) = B_\varepsilon^1(f(a)).$$

La relation (2) exprime la continuité en a de la fonction f, considérée comme application de E sur le sous-espace relatif $f(E)$.
Plus généralement, on peut montrer que f, considérée comme application de E dans B ($f(E) \subset B \subset F$), est continue.

Autre méthode. — Désignons par O_F un ouvert quelconque de F. On sait que

$$f \text{ continue sur } E \Leftrightarrow f^{-1}(O_F) \text{ ouvert de } E.$$

Soit A un sous-espace quelconque de F contenant $f(E)$ et O_A un ouvert de A. Il existe O_F tel que $O_A = O_F \cap A$ et tel que $f^{-1}(O_A) = f^{-1}(O_F)$ (puisque $A \supset f(E)$), donc $f^{-1}(O_A)$ est un ouvert de E et, par suite, f, considérée comme application de E dans A, est continue.
Ceci est vrai, en particulier, pour l'application surjective

$$f : E \mapsto f(E).$$

b) ***Première méthode.*** — Soit $a \in A$ et $B''_\alpha(a)$ la boule du sous-espace relatif A qui est de centre a et de rayon α, on a

$$B''_\alpha(a) = \{x \in A;\ d(a, x) < \alpha\} = B_\alpha(a) \cap A \subset B_\alpha(a).$$

Puisque f (considérée comme application de E dans F) est continue en a, on a la relation (1) et, par suite, la relation suivante :

$$f(B''_\alpha(a)) \subset f(B_\alpha(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)),$$

ou encore, puisque $f_A(x) = f(x)$, $\forall x \in A$,

(3) $$f_A(B''_\alpha(a)) = f(B''_\alpha(a)) \subset B_\varepsilon(f_A(a)).$$

La relation (3) exprime la continuité de f_A en $a \in A$.

Deuxième méthode. — Soit i (injection canonique) : $A \mapsto E$ qui à $x \in A$ fait correspondre $i(x) \in E$. Il est clair que *i est continue*, puisque

$$i(B''_\varepsilon(a)) = B_\varepsilon(a) \cap A \subset B_\varepsilon(a).$$

Or $f_A = f \circ i$, donc f_A, qui est la composée de deux fonctions continues, est continue.

Troisième méthode. — Désignons par O_E (resp. O_F ou O_A) un ouvert de E (resp. F ou A). Comme précédemment, on peut remarquer que

$$f \text{ continue sur } E \Leftrightarrow f^{-1}(O_F) \text{ ouvert de } E.$$

Or $f_A^{-1}(O_F) = f^{-1}(O_F) \cap A$, *donc* $f_A^{-1}(O_F)$ est la restriction à A d'un ouvert de E, c'est-à-dire *un ouvert de A*.

Il en résulte que f_A est bien continue sur A.

3.I.2.

Exprimons que f est continue sur E, muni de la métrique d.

Soit a un élément quelconque de E. L'application f est continue en a, donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha(\varepsilon, a) \qquad \text{tel que} \qquad f[B_\alpha(a)] \subset B_\varepsilon(f(a)),$$

où

$$B_\alpha(a) = \{x \in E; \quad d(a, x) < \alpha\}.$$

Soit $B'_\rho(a) = \{x \in E;\ d'(a, x) < \rho\}$. On a évidemment

$$B'_{k\alpha}(a) = \{x \in E;\ d'(a, x) < k\alpha\} \subset \{x \in E;\ d(a, x) < \alpha\} = B_\alpha(a).$$

Donc

$$f[B'_{k\alpha}(a)] \subset f[B_\alpha[f(a)]] \subset B_\varepsilon[f(a)],$$

d'où l'on déduit la continuité de f en a lorsque E est muni de la métrique d'.

3.I.3.

1° Il suffit de revenir à la définition de la continuité.

En choisissant $\alpha < 1$, on voit que

$$B^d_\alpha(x_0) = \{x_0\} \qquad \text{et, par suite,} \qquad f[B^d_\alpha(x_0)] = \{f(x_0)\} \subset B^{d'}_\varepsilon[f(x_0)],$$

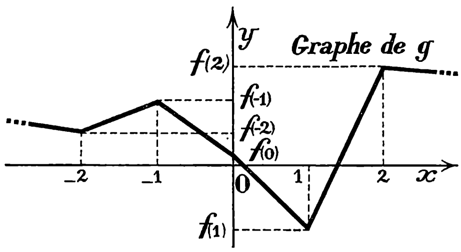
en notant B^d et $B^{d'}$ les boules ouvertes respectivement dans (E, d) et (E', d'); donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha : f[B^d_\alpha(x_0)] \subset B^{d'}_\varepsilon[f(x_0)] \quad \left(\text{par exemple, } \alpha = \frac{1}{2}\right).$$

Toutes les applications f de E dans E' sont donc continues.

2° *a*) La démonstration est analogue à la précédente.

Remarque. — Toute application, $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{R}$, peut être considérée comme la restriction à $\mathbb{Z}$ d'une *application continue* $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. De l'exercice 3.I.1., *b*, on déduit alors que f est continue.



b) Il faut établir que les topologies associées sont identiques, c'est-à-dire : toute boule ouverte B^d de $(\mathbb{Z}, d)$ contient une boule ouverte B^δ de $(\mathbb{Z}, \delta)$, et réciproquement. Or,

$$B^d_\rho(n) \supset B^\delta_{\frac{1}{2}}(n) = \{n\} \qquad \text{et} \qquad B^\delta_\rho(n) \supset B^d_{\frac{1}{2}}(n) = \{n\},$$

les topologies définies sur $\mathbb{Z}$ par d et δ sont identiques. Donc,

$$f : (\mathbb{Z}, d) \mapsto (E', d') \text{ continue} \Leftrightarrow f : (\mathbb{Z}, \delta) \mapsto (E', d') \text{ continue.}$$

Toute application de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ est continue pour $\mathbb{Z}$ muni de la distance d; elle est donc aussi continue pour $\mathbb{Z}$ muni de la distance δ.

3.I.4.

Supposons qu'il existe une bijection f continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_0$.
Alors, d'une part,

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$$

et d'autre part, pour x fixé,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0 \ : \ |x - y| < \rho \Rightarrow d_0(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

En particulier, il existe donc $\alpha > 0$ tel que

(1)
$$|x-y| < \alpha \ \Rightarrow \ d_0(f(x), f(y)) < 1 \ \Rightarrow \ d_0(f(x), f(y)) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(y) \ \Leftrightarrow \ y = x.$$

Si l'on choisit $y = x + \frac{\alpha}{2}$, on voit immédiatement la contradiction (puisque (1) est satisfait et qu'alors $y = x$, ce qui n'est pas).
Il y a donc impossibilité pour une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_0$ d'être continue. C'est le

cas pour l'application canonique $f(x) = x$. Cet exercice montre un aspect réciproque du résultat de la question 1° de l'exercice précédent 3.I.3.

Pour toutes les applications de $\mathbb{R}_0$ sur $\mathbb{R}$ il y a continuité et, en particulier, pour toutes les bijections alors que réciproquement aucune bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_0$ n'est continue. On voit ainsi apparaître concrètement comment la notion de continuité est liée aux topologies placées sur les espaces considérés et la nécessité de pouvoir comparer les topologies. La topologie définie par la distance d_0 est une topologie en quelque sorte extrémale.

Ces notions seront approfondies et développées dans les cours de topologie générale.

3.I.5.

f continue sur $(H, d') \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \rho' : f(B'_{\rho'}(x_0)) \subset B_{1,\varepsilon}(f(x_0))$.

Or l'inégalité $d'(x, y) \leqslant ad(x, y)$ entraîne que la boule ouverte $B_{\frac{\rho'}{a}}(x_0)$ de (V, d) est incluse dans $B'_{\rho'}(x_0)$, lorsque $x_0 \in V$; donc

$$\tilde{f}(B_{\frac{\rho'}{a}}(x_0)) \subset \tilde{f}(B'_{\rho'}(x_0)) \subset f(B'_{\rho'}(x_0)) \subset B_{1,\varepsilon}(f(x_0)) = B_{1,\varepsilon}(\tilde{f}(x_0)).$$

Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0 \; : \; \tilde{f}(B_\rho(x_0)) \subset B_{1,\varepsilon}(\tilde{f}(x_0)),$$

autrement dit, la restriction de f à V est continue sur (V, d).

3.I.6.

1° Supposons f continue de E dans E'. Montrons que l'on a $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, quel que soit $A \subset E$.

Soit $x_0 \in \bar{A}$, alors,

$$\forall \rho > 0, \; A \cap B_\rho(x_0) \neq \varnothing.$$

f étant continue au point x_0 on a, en posant $y_0 = f(x_0)$,

$$\forall \rho' > 0, \qquad \exists \rho > 0 \qquad \text{tel que} \qquad f(B_\rho(x_0)) \subset B'_{\rho'}(y_0);$$

donc

$$f(A) \cap B'_{\rho'}(y_0) \supset f(A) \cap f(B_\rho(x_0)) \supset f(A \cap B_\rho(x_0)).$$

Par suite,

$$\forall \rho' > 0, \qquad f(A) \cap B'_{\rho'}(y_0) \neq \varnothing,$$

ce qui revient à dire $y_0 \in \overline{f(A)}$. Donc $f(x_0) \in \overline{f(A)}$, $\forall x_0 \in \bar{A}$, soit $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

2° *Réciproquement*, supposons que $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, $\forall A \subset E$ et montrons que f est continue. Nous allons établir que l'image réciproque de tout fermé X de E est fermée.
Soit

$$Y = f^{-1}(X),\ Y \subset E \qquad \text{donc} \qquad f(\bar{Y}) \subset \overline{f(Y)} = \overline{f[f^{-1}(X)]} \subset \bar{X}.$$

Alors $f(\bar{Y}) \subset X$, puisque $\bar{X} = X$; ceci entraîne que l'on a $\bar{Y} \subset f^{-1}(X) = Y$, donc Y est fermé.

3.I.7.

1° Soit $X_1 = X \cap A$ et $X_2 = X \cap B$, alors $X = X_1 \cup X_2$, puisque $A \cup B = E$, et

$$\bar{X} = \bar{X}_1 \cup \bar{X}_2. \tag{1}$$

Puisque A est fermé, $X_1 \subset A \Rightarrow \bar{X}_1 \subset \bar{A} = A$, ainsi $\bar{X}_1 \subset A$ et de même $\bar{X}_2 \subset B$.
Donc

$$h(\bar{X}_1) = f(\bar{X}_1) \qquad \text{et} \qquad h(\bar{X}_2) = g(\bar{X}_2),$$

$$h(\bar{X}) = h(\bar{X}_1) \cup h(\bar{X}_2) = f(\bar{X}_1) \cup g(\bar{X}_2). \tag{2}$$

2° Puisque f et g sont continues respectivement sur A et B et que $\bar{X}_1 \subset A$ et $\bar{X}_2 \subset B$, on a (voir exercice 3.I.6.)

$$f(\bar{X}_1) \subset \overline{f(X_1)} \qquad \text{et} \qquad g(\bar{X}_2) \subset \overline{g(X_2)},$$

donc

$$f(\bar{X}_1) \cup g(\bar{X}_2) \subset \overline{f(X_1)} \cup \overline{g(X_2)} = \overline{h(X_1)} \cup \overline{h(X_2)},$$

alors

$$f(\bar{X}_1) \cup g(\bar{X}_2) \subset \overline{h(X_1) \cup h(X_2)} = \overline{h(X_1 \cup X_2)} = \overline{h(X)}.$$

On déduit alors de (2) que $h(\bar{X}) \subset \overline{h(X)}$, d'où la continuité de h sur E.

Remarque. — La condition $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A \cap B$, intervient uniquement pour que la définition de h ait un sens, mais elle n'est plus utilisée par la suite. Lorsque $A \cap B = \emptyset$, la propriété de h est immédiate.

3.I.8.

1° Il suffit de montrer que l'ensemble $\complement A$ des points tels que $f(x) \neq g(x)$ est ouvert dans E.
Soit

$$x_0 \in \complement A, \text{ ce qui nécessite } f(x_0) \neq g(x_0).$$

Posons

$$a = d'[f(x_0), g(x_0)].$$

Remarquons que l'on a toujours

(1) $$a \leqslant d'[f(x), f(x_0)] + d'[f(x), g(x)] + d'[g(x), g(x_0)].$$

Puisque f est continue en x_0, il existe une boule $B_{\rho_1}(x_0)$ telle que

$$x \in B_{\rho_1}(x_0) \Rightarrow f(x) \in B'_{\frac{a}{4}}(f(x_0)).$$

De même, puisque g est continue en x_0, il existe une boule $B_{\rho_2}(x_0)$ telle que

$$x \in B_{\rho_2}(x_0) \Rightarrow g(x) \in B'_{\frac{a}{4}}(g(x_0)).$$

Soit

$$\rho = \inf(\rho_1, \rho_2),$$

alors

$$x \in B_\rho(x_0) \Rightarrow \begin{cases} d'[f(x), f(x_0)] < \dfrac{a}{4}, \\ d'[g(x), g(x_0)] < \dfrac{a}{4}, \end{cases}$$

donc, d'après (1),

$$x \in B_\rho(x_0) \Rightarrow a \leqslant \frac{a}{2} + d'[f(x), g(x)],$$

soit

$$d'[f(x), g(x)] \geqslant \frac{a}{2}, \ \forall x \in B_\rho(x_0).$$

Il existe donc bien une boule ouverte de centre x_0 telle que l'on ait pour tous ses points $f(x) \neq g(x)$. Donc, $\complement A$ est un ouvert de E. Autrement dit, $A = \{x; f(x) = g(x)\}$ est fermé dans E.

En particulier, l'ensemble des zéros d'une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ est un ensemble fermé.

2° L'ensemble A des points x tels que $f(x) = g(x)$ est fermé dans E. Donc, $B \subset A$ et $E = \bar{B} \subset \bar{A} = A$ et, par suite, $A = E$, donc $f(x) = g(x)$, $\forall x \in E$.

3.I.9.

1° Comme dans l'exercice précédent, on va montrer que l'ensemble $\complement A$ des x tels que $f(x) > g(x)$ est ouvert dans E.

Soit $x_0 \in \complement A$, alors $f(x_0) > g(x_0)$, il existe donc $a \in \mathbb{R}$, tel que $f(x_0) > a > g(x_0)$. Puisque g est continue, l'image réciproque par g de l'ouvert $]-\infty, a[$ est un ouvert O_1 qui contient x_0, de même l'image réciproque par f de l'ouvert $]a, +\infty[$ est un ouvert O_2 qui contient x_0; donc $O_1 \cap O_2$ est un ouvert qui contient x_0, et pour tout x appartenant à $O_1 \cap O_2$ on a, simultanément,

$$g(x) < a \qquad \text{et} \qquad f(x) > a.$$

Nous avons trouvé un ouvert O contenant x_0 tel que

$$\forall x \in O, g(x) < f(x),$$

donc $\complement A$ est ouvert et A est fermé.

2° Si l'on a $f(x) \leqslant g(x)$, $\forall x \in B$, et si B est dense dans E, on a $B \subset A$, où A est l'ensemble des points tels que $f(x) \leqslant g(x)$.

Mais A est fermé d'après la question 1°, donc $E = \bar{B} \subset \bar{A} = A$ et, par suite, $A = E$.

3.II.1.

Soit $z \in A$, alors

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$$

entraîne *a fortiori*

$$d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, z), \ \forall z \in A,$$

d'où

$$d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A).$$

En échangeant le rôle de x et de y, on obtient

$$d(y, A) \leqslant d(x, y) + d(x, A),$$

donc

(1) $$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y).$$

Il résulte de cette inégalité que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \ : \ \forall x' \text{ et } x'' \in E, \ d(x', x'') < \eta \Rightarrow |d(x', A) - d(x'', A)| < \varepsilon,$$

ce qui traduit l'uniforme continuité de $x \mapsto d(x, A)$ sur (E, d).

3.II.2.

L'application $x \mapsto d(x, A)$, où A est un sous-ensemble quelconque de E est uniformément continue sur E (exercice 3.II.1.).

L'application $x \mapsto d(x, F_1) - d(x, F_2)$ est donc *a fortiori* continue sur E.

Les images réciproques des ouverts $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ sont alors des ouverts de E. Ceci établit que O_1 et O_2 sont des ouverts. Les ouverts O_1 et O_2 sont disjoints puisque l'on ne peut avoir à la fois

$$d(x, F_1) < d(x, F_2) \qquad \text{et} \qquad d(x, F_1) > d(x, F_2).$$

Montrons que $O_1 \supset F_1$. Soit $x_0 \in F_1$, alors $d(x_0, F_1) = 0$, mais

$$F_1 \cap F_2 = \varnothing \Rightarrow d(x_0, F_2) > 0$$

[car

$$d(x_1, F_2) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{F}_2 = F_2,$$

ce qui n'est pas].

Donc

$$d(x_0, F_1) < d(x_0, F_2), \qquad \text{soit} \qquad x_0 \in O_1.$$

Ainsi, on a $F_1 \subset O_1$ et de même $F_2 \subset O_2$.

3.II.3.

1° *a*) Dans E, on a, évidemment, $B_{\frac{1}{2}}(a) = \{a\}$, donc

$$f[B_{\frac{1}{2}}(a)] = \{f(a)\} \subset B_\varepsilon(f(a))$$

et, par suite, f est bien uniformément continue sur (E, d') :

$$\alpha(\varepsilon, a) = \frac{1}{2}.$$

b) $\{a\} = B_{\frac{1}{2}}(a)$ *est un ouvert donc* $\bigcup_{a \in E}\{a\}$ est un recouvrement ouvert de E.

Si E est compact, on peut alors extraire un recouvrement fini, donc, nécessairement, E doit être constitué *d'un nombre fini* d'éléments.

En résumé,

— E n'est pas compact lorsqu'il possède une infinité d'éléments distincts,

— E est compact, par définition, lorsqu'il est constitué par un nombre fini d'éléments.

c) E complet $\Leftrightarrow$ toute suite de Cauchy est convergente.

Soit $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ une suite de Cauchy.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \qquad \text{tel que} \qquad n \text{ et } m \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow d'(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon < 1$, on a, nécessairement,

$$x_m = x_n, \qquad \forall n \text{ et } m \geqslant N(\varepsilon),$$

donc, en particulier,

$$x_n = x_N, \qquad \forall n \geqslant N(\varepsilon).$$

La suite de Cauchy est donc stationnaire et, par suite, convergente.

2° *a*) Démontrons les deux inclusions indiquées dans le texte.

Nous avons

$$B'_{\frac{1}{2}}(a) = \{a\}$$

et, par suite,

$$B_\varepsilon(a) \supset B'_{\frac{1}{2}}(a) \qquad \left(\alpha(\varepsilon, a) = \frac{1}{2}\right),$$

puis, en considérant

$$a = \left(\frac{1}{n_0}, \frac{1}{m_0}\right) \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{1}{2}\operatorname{Inf}\left\{\frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{m_0} - \frac{1}{m_0+1}\right\},$$

on a

$$B_\beta(a) = \{x \in E;\, d(x, a) < \beta\} = \{a\}$$

et, par suite,

$$B'_\varepsilon(a) \supset B_\beta(a).$$

Désignons par $\mathcal{O}$ (resp. $\mathcal{O}'$) l'ensemble des ouverts de E pour la métrique d (resp. d').
Soit $O \in \mathcal{O}$ et a un point quelconque de O. L'ensemble O étant un ouvert de (E, d), il doit contenir non seulement a mais une certaine boule ouverte de centre a :

$$O \supset B_{\varepsilon_0}(a),$$

ce qui entraîne

$$O \supset B'_{\alpha(\varepsilon_0, a)}(a).$$

Pour chaque $a \in O$, O contient non seulement a, mais une boule ouverte de centre a pour la métrique d', ceci implique que O est un ouvert pour la métrique d' et, par suite, $O \in \mathcal{O}'$.

En résumé, $\mathcal{O} \subset \mathcal{O}'$.
Par un raisonnement analogue, on démontre l'inclusion $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ et, par suite, l'égalité $\mathcal{O} = \mathcal{O}'$.
Les métriques d et d' sont bien équivalentes.

b) $u_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ est une suite de Cauchy dans (E, d), non convergente dans E ($u_n \to (0, 0) \notin E$). Donc (E, d) n'est pas complet.

Remarque. — Les distances d et d' sont donc équivalentes mais, pas uniformément équivalentes : (E, d') complet, (E, d) n'est pas complet.

3° *a*) L'ensemble $\{(0, 0)\}$ est un ouvert de (E, d'), puisque $B'_{\frac{1}{2}}[(0, 0)] = \{(0, 0)\}$.
Est-ce un ouvert de (E, d)? *Si oui*,

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \qquad \text{tel que} \qquad \{(0, 0)\} \supset B_{\varepsilon_0}[(0, 0)],$$

c'est-à-dire

$$B_{\varepsilon_0}[(0, 0)] = \{(0, 0)\}.$$

Propriété évidemment *fausse*, puisque

$$\left(\frac{1}{n_0}, \frac{1}{n_0}\right) \in B_{\varepsilon_0}[(0, 0)],$$

$$\text{(si l'on choisit } n_0 = \left[\frac{1}{\varepsilon_0}\right] + 1).$$

En résumé, $\{(0, 0)\}$ appartient à $\mathcal{O}'$ et n'appartient pas à $\mathcal{O}$. Donc $\mathcal{O}' \neq \mathcal{O}$ et, par suite, d et d' ne sont pas équivalentes.
En fait, on peut vérifier aisément l'inclusion stricte suivante :

$$\mathcal{O} \subset \mathcal{O}' \qquad (\mathcal{O}' = \mathcal{O} \cup \{(0, 0)\}).$$

La topologie définie par d' est dite *plus fine* que celle définie par d.

b) Soit $f_0 : (E, d) \mapsto \mathbb{R}$, définie par

$$f_0 : a \mapsto f_0(a) = \begin{cases} n+m \text{ pour } a = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right), \\ 0 \text{ pour } a = (0, 0). \end{cases}$$

Supposons f continue à l'origine:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \alpha[\varepsilon, (0,0)] \quad \text{tel que} \quad f_0(B_\alpha[(0,0)]) \subset B_\varepsilon[(0,0)] =]-\varepsilon, \varepsilon[,$$

avec

$$B_\alpha[(0,0)] \ni \left(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_1}\right), \qquad \text{où} \qquad n_1 = \left[\frac{1}{\alpha}\right] + 1,$$

donc

$$f_0\left(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_1}\right) \in]-\varepsilon, \varepsilon[, \qquad \text{ou encore} \qquad 2n_1 \in]-\varepsilon, \varepsilon[.$$

Résultat évidemment faux, donc f_0 *ne peut être continue au point* $(0, 0)$.

c) Soit E un ensemble muni de deux distances d et d' telles que d soit *équivalente à* d'.

Soit une application $f : E \mapsto (F, \delta)$. On a alors.

f continue en a pour la métrique $d \Leftrightarrow f$ continue en a pour la métrique d'.

De la question 1°, *a*, on déduit que f_0 est continue sur (E, d').

En particulier, f_0 est continue au point $(0, 0)$ pour la métrique d'. N'étant pas continue en ce point pour la métrique d (cf. 3°, *a*), on ne peut avoir d et d' équivalentes.

3.II.4.

1° La continuité uniforme de f sur F permet d'écrire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad d(a_n, a_m) \leqslant \eta_\varepsilon \Rightarrow d'(f(a_n), f(a_m)) \leqslant \varepsilon.$$

La suite $\{a_n\}$ étant une suite de Cauchy

$$\exists N_{\eta_\varepsilon} \quad \text{tel que} \quad m \text{ et } n \geqslant N_{\eta_\varepsilon} \Rightarrow d(a_n, a_m) \leqslant \eta_\varepsilon$$

et, par suite,

$$d'[f(a_n), f(a_m)] \leqslant \varepsilon.$$

2° *a*) *Définition de* $\tilde{f}$.

Soit $x \in E$, puisque l'on a $\bar{F} = E$, il existe une suite $\{x_n\}$, $x_n \in F$, convergeant vers x. La suite $\{x_n\}$ étant convergente, est nécessairement de Cauchy et, par suite, $\{f(x_n)\}$ est une suite de Cauchy dans E' (d'après la question 1°). Mais E' est complet, donc $\{f(x_n)\}$ converge dans E' vers une limite l.

En résumé, $\{x_n\}$ convergeant vers x implique que $\{f(x_n)\}$ converge vers $l(x)$.

Montrons que $l(x)$ est *indépendant du choix de la suite* $\{x_n\}$ *convergeant vers* x.

Soit $\{x'_n\}$ une autre suite convergeant vers x, $x'_n \in F$, alors $\{f(x'_n)\}$ converge vers l'. Établissons que $l' = l$. La fonction f étant uniformément continue sur F

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad d(x_n, x'_n) \leqslant \eta_\varepsilon \Rightarrow d'(f(x_n), f(x'_n)) \leqslant \varepsilon.$$

Or, $\{x_n\}$ et $\{x'_n\}$ convergent vers x, donc

$$\exists N_1(\eta_\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N_1 \Rightarrow d(x_n, x'_n) \leqslant \eta_\varepsilon$$
$$[\text{écrire } d(x_n, x'_n) \leqslant d(x_n, x) + d(x'_n, x)]$$

et, par suite,

(1) $$n \geqslant N_1(\eta_\varepsilon) \Rightarrow d'[f(x_n), f(x'_n)] \leqslant \varepsilon.$$

Exprimons maintenant que $f(x_n)$ a pour limite l et $f(x'_n)$ a pour limite l'.

(2) $$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N_2 \Rightarrow d'[f(x_n), l] \leqslant \varepsilon,$$

(3) $$\forall \varepsilon > 0, \exists N_3(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N_3 \Rightarrow d'[f(x'_n), l'] \leqslant \varepsilon.$$

Pour $n \geqslant \sup(N_1, N_2, N_3)$, on déduit de (1), (2) et (3)

$$d'(l, l') \leqslant d'(l, f(x_n)) + d'(f(x_n), f(x'_n)) + d'(f(x'_n), l') \leqslant 3\varepsilon$$

et, puisque ε est arbitraire, nécessairement $d'(l, l') = 0$ et $l = l'$.

On considère maintenant la fonction $\tilde{f}$ définie sur E de la manière suivante :

$$\tilde{f} : x \mapsto \tilde{f}(x) = \lim_{x_n \to x} f(x_n) \qquad (\text{où } x_n \in F).$$

b) *$\tilde{f}$ est un prolongement de f.*

En effet, pour $x \in F$ on peut considérer la suite stationnaire

$$\{x_n\}, \text{ avec } x_n = x \qquad \text{et l'on a} \qquad \tilde{f}(x) = \lim_{x_n \to x} f(x_n) = f(x).$$

c) *$\tilde{f}$ est uniformément continue sur E.*

Soit x et y deux éléments de E tels que

$$x = \lim x_n \qquad \text{et} \qquad y = \lim y_n,$$

où x_n et $y_n \in F$. Alors

$$\lim f(x_n) = \tilde{f}(x) \qquad \text{et} \qquad \lim f(y_n) = f(y),$$

c'est-à-dire

(4) $$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N_1 \Rightarrow d'[f(x_n), \tilde{f}(x)] \leqslant \varepsilon,$$

(5) $$\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N_2 \Rightarrow d'[f(y_n), \tilde{f}(y)] \leqslant \varepsilon.$$

De plus, f étant uniformément continue sur F, on sait que

(6) $$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon \quad \text{tel que} \quad d(x_n, y_n) \leqslant \eta_\varepsilon \Rightarrow d'[f(x_n), f(y_n)] \leqslant \varepsilon.$$

Pour n assez grand, $n \geqslant N_3$, on a

(7) $$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) \leqslant \frac{\eta_\varepsilon}{3} + d(x, y) + \frac{\eta_\varepsilon}{3}.$$

Pour $n \geqslant \sup(N_1, N_2, N_3)$ on a, alors d'après (7), puis (6),

(8) $$d(x, y) \leqslant \frac{\eta_\varepsilon}{3} \Rightarrow d(x_n, y_n) \leqslant \eta_\varepsilon \Rightarrow d'[f(x_n), f(y_n)] \leqslant \varepsilon,$$

Or
$$d'[\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)] \leqslant d'[\tilde{f}(x), f(x_n)] + d'[f(x_n), f(y_n)] + d'[f(y_n), \tilde{f}(y)]$$
donc [voir (4), (5) et (8)]
$$d(x, y) \leqslant \frac{\eta_\varepsilon}{3} \Rightarrow d'[\tilde{f}(x), \tilde{f}(y)] \leqslant 3\varepsilon,$$

propriété qui exprime la continuité uniforme de $\tilde{f}$ sur E.

d) Unicité.

Soit $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ deux fonctions continues qui coïncident avec f sur F. Pour $x \in E$, $\exists \{x_n\}$, $x_n \in F$, avec $\lim x_n = x$. En raison de la continuité des applications $\tilde{f}_1$ et $\tilde{f}_2$ au point x, on a
$$\lim \tilde{f}_1(x_n) = \lim f(x_n) = \tilde{f}_1(x) \qquad \text{et} \qquad \lim \tilde{f}_2(x_n) = \lim f(x_n) = \tilde{f}_2(x),$$

d'où nécessairement $\tilde{f}_1(x) = \tilde{f}_2(x)$ et par suite l'unicité.

3.II.5.

1° Supposons qu'il existe deux points fixes a et b, alors
$$d[f(a), f(b)] = d(a, b) \leqslant kd(a, b),$$

par hypothèse; mais $0 \leqslant k < 1$, donc
$$d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b,$$
d'où l'unicité.

2° Pour tout $n > 0$, on a
$$d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1}) \leqslant kd(x_n, x_{n-1}),$$
donc
$$d(x_{n+1}, x_n) \leqslant k^n d(x_1, x_0)$$

$\forall p$ et $q \in \mathbb{N}^*$, on a, par suite,
$$d(x_q, x_p) \leqslant (k^{q-1} + k^{q-2} + \ldots + k^p) d(x_1, x_0), \qquad p \leqslant q,$$
soit

(1) $$d(x_q, x_p) \leqslant \frac{k^p}{1-k} d(x_1, x_0).$$

Puisque $0 \leqslant k < 1$, cette inégalité montre que la suite $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans E complet. Donc $\{x_n\}$ converge vers un point a de E. Par passage à la limite $(q \to \infty)$ on déduit de (1) la relation

(2) $$d(a, x_p) \leqslant \frac{k^p}{1-k} d(x_1, x_0).$$

La relation $x_{n+1} = f(x_n)$ permet aussi d'écrire par passage à la limite $a = f(a)$, puisque f est nécessairement continue sur E, d'où l'existence d'un point fixe, unique d'après la question 1°.

On remarquera l'importance de la condition suivante :

$$\text{il existe } k \in [0, 1[$$

(cf. exercice 3.II.6.).

3° L'inégalité (2) écrite pour $p = 0$ et pour chacune des applications f_n donne

$$d(a_n, x_0) \leqslant \frac{1}{1-k} d(f_n(x_0), x_0).$$

Posons $x_0 = a$ alors $f(a) = a$, donc

$$d(a_n, a) \leqslant \frac{1}{1-k} d[f_n(a), f(a)];$$

mais $d[f_n(a), f(a)]$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$, en vertu de la convergence simple, donc $d(a_n, a)$ tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$ et ceci établit la convergence de $\{a_n\}$ vers a.

4° D'après la question 2°, f^r possède un point fixe a, et un seul, et l'on a

$$a = \lim_{n \to \infty} [(f^r)^n(f(x_0))], \; x_0 \text{ quelconque et } x_0 \in E,$$

d'où

$$a = \lim_{n \to \infty} [f(f^r)^n](x_0),$$

ou

$$a = f[\lim_{n \to \infty} (f^r)^n(x_0)], \text{ puisque } f \text{ est continue,}$$

et enfin

$$a = f(a).$$

Alors, a est point fixe de l'application f. Un tel point fixe est unique car s'il en existait un second, il serait aussi point fixe de f^r, ce qui est impossible d'après le résultat de la question 2°.

3.II.6.

1° $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
$d(x, y) = d(y, x)$, cette égalité est évidente;

$d(a_p, a_q) \leqslant d(a_p, a_r) + d(a_r, a_q)$, puisque $1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leqslant 2 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{2}{r}$.

Soit $\{a_m\}$ une suite de Cauchy de (E, d), alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \quad \text{tel que} \quad m, m' \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow d(a_m, a_{m'}) \leqslant \varepsilon.$$

Les seules suites de Cauchy sont donc les suites stationnaires puisque

$$m \neq m' \Rightarrow d(a_m, a_m) > 1$$

est en contradiction avec la définition pour $\varepsilon \leq 1$. Or, les suites stationnaires sont évidemment convergentes; donc (E, d) est complet.

2° $$d(f(a_p), f(a_q)) = d(a_{p+1}, a_{q+1}) = 1 + \frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} < 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

donc $$d(f(a_p), f(a_q)) < d(a_p, a_q);$$

f est bien une application qui diminue strictement les distances et qui ne possède aucun point fixe par construction même.

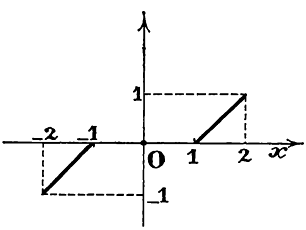
3.III.1.

a) ***Première méthode.***
Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, définie par

$$x \mapsto g(x) = \begin{cases} x+1 & \text{pour } x < -2, \\ 0 & \text{pour } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ x-1 & \text{pour } x > 2. \end{cases}$$

Il est clair que g est continue sur $\mathbb{R}$, donc *sa restriction* g_E *au sous-espace* E ($g_E : E \to \mathbb{R}$) *est continue* (voir la question *b* de l'exercice 3.I.1.).
L'application $g_E : E \mapsto g_E(E) = F$ est aussi continue (voir la question *a* de l'exercice 3.I.1.); donc $f = g_E$ est continue sur E.

Deuxième méthode. — Montrons, par exemple, que f est continue au point O. Pour cela, désignons par $B_\varepsilon^*(a)$ [resp. $B_\varepsilon^{**}(a)$] la boule dans E (resp. F) de centre a et de rayon ε.



Graphe de f

On a
$$B_\varepsilon^{**}(f(0)) = \{x \in F;\ |x - f(0)| < \varepsilon\} =]-\varepsilon, \varepsilon[, \text{ si } \varepsilon < 1$$
et
$$B_{\frac{1}{2}}^{*}(0) = \left\{ x \in E;\ |x - 0| < \frac{1}{2} \right\} = \{0\}.$$
Donc
$$f(B_{\frac{1}{2}}^{*}(0)) \subset B_\varepsilon^{**}(f(0)) \qquad \left(\alpha(\varepsilon, 0) = \frac{1}{2}\right)$$

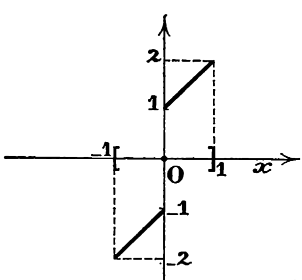
et, par suite, f est bien continue en O.
De même, on établit la continuité en 1 et -1, puis de manière classique la continuité en tout point des ouverts $]-2, -1[$ et $]1, 2[$.

b) L'application f de E sur $f(E) = F$ est strictement croissante, donc bijective.

c) $f^{-1} : F \mapsto E$ est définie par

$$x \mapsto f^{-1}(x) = \begin{cases} x+1 & \text{pour } x \in]0, 1], \\ 0 & \text{pour } x = 0, \\ x-1 & \text{pour } x \in [-1, 0[. \end{cases}$$

Il est clair que f^{-1} n'est pas continue en $x = 0$.



Graphe de f^{-1}

3.III.2.

a) Pour $\rho<1$, $B_\rho^\delta(a)=\{x;\delta(x,a)<\rho\}=\{a\}$, donc $\forall\varepsilon>0$, avec $\alpha=\frac{1}{2}$, on aura $\varphi(B_{\frac{1}{2}}^\delta(a))\subset B_\varepsilon^d(\varphi(a))$, $\alpha\left(=\frac{1}{2}\right)$ étant indépendant de $a\in\mathbb{R}^n$, la fonction φ est donc uniformément continue sur $\mathbb{R}^n$.

b) *Supposons φ^{-1} continue en un point a.*

$$\forall\varepsilon>0, \exists\alpha(\varepsilon,a) \quad \text{tel que} \quad \varphi^{-1}(B_\alpha^d(a))\subset B_\varepsilon^\delta(a),$$

ou encore, φ^{-1} étant l'application canonique

$$B_\alpha^d(a)=\{x;d(a,x)<\alpha\}\subset B_\varepsilon^\delta(a)=\{a\}, \text{ pour } \varepsilon<1.$$

Mais cette inclusion est impossible, puisque si l'on a

$$a=(a_1,a_2,\ldots,a_n),\ x=a_1,\ldots,a_{n-1},a_n+\frac{\alpha}{2}\neq a \quad \text{alors} \quad x\in B_\alpha^d(a).$$

La fonction φ^{-1} ne peut donc être continue en aucun point de $\mathbb{R}^n$.

Remarque. — Nous avons ici un exemple d'application bijective continue, qui n'est pas un homéomorphisme.

4. ESPACES VECTORIELS NORMÉS ESPACES DE BANACH – $\mathcal{L}_c$ (E,F) ESPACES DE HILBERT

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel défini sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. — ESPACES VECTORIELS NORMÉS (E.V.N.).

1° Norme. – Une norme est une application de E dans $\mathbb{R}_+$ qui associe à tout vecteur X de E un nombre réel positif ou nul noté $\|X\|$, les trois axiomes suivants étant satisfaits :

1. $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0$;
2. $\|\lambda X\| = |\lambda| \, \|X\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$);
3. $\|X+Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$.

Lorsque 1 est remplacé par 1′: $X = 0 \Rightarrow \|X\| = 0$, on dit qu'il s'agit d'une semi-norme.

Exemples :

a) $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) lorsqu'il est muni des lois suivantes :

$$\left.\begin{aligned} X &= (x_1, \ldots, x_n) \\ Y &= (y_1, \ldots, y_n) \end{aligned}\right\} \mapsto X+Y = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n),\ x_i \text{ et } y_j \in \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C});$$

$$\left.\begin{aligned} X &= (x_1, \ldots, x_n) \\ \lambda &\in \mathbb{R} \text{ (resp. } \mathbb{C}) \end{aligned}\right\} \mapsto \lambda X = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

On peut alors poser

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

et l'on définit ainsi une norme sur $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$).

On peut aussi définir les normes suivantes :

$$\|X\|_\infty = \sup_{i=1,\ldots,n} |x_i| \qquad \text{et} \qquad \|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.$$

b) Soit $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions définies sur E, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et qui sont bornées sur E. L'application

$$f \mapsto \|f\| = \sup_{x \in E} |f(x)|$$

est une norme sur $\mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ qui est ainsi un E.V.N.

2° Normes équivalentes. – Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ définies sur E sont dites équivalentes lorsqu'il existe deux constantes λ et μ strictement positives telles que l'on a

$$\mu\|X\|_1 \leqslant \|X\|_2 \leqslant \lambda\|X\|_1, \ \forall X \in E.$$

Les trois normes ci-dessus définies sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ sont équivalentes.

Plus généralement, sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

3° Définition d'un E.V.N. – Un espace vectoriel muni d'une norme $\|.\|$ est appelé espace vectoriel normé (en abrégé E.V.N.). On munit un E.V.N. d'une distance en posant

$$d(X, Y) = \|X - Y\|.$$

Ainsi, on définit sur un E.V.N. une structure topologique d'espace métrique. A deux normes équivalentes sont associées deux distances uniformément équivalentes.

4° Produit d'E.V.N. – Soit n E.V.N., $E_1, \ldots, E_n$, définis sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$). L'E.V.N. E_i est muni de la norme $\|.\|_i$; alors $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ est un E.V.N. défini sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) lorsqu'on le munit des lois de compositions usuelles suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{X} = (X_1, \ldots, X_n) \\ \widehat{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n) \end{array}\right\} \mapsto \widehat{X} + \widehat{Y} = (X_1 + Y_1, \ldots, X_n + Y_n), \ X_i \text{ et } Y_i \in E_i;$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{X} = (X_1, \ldots, X_n) \\ \lambda \in \mathbb{R} (\text{resp. } \mathbb{C}) \end{array}\right\} \mapsto \lambda\widehat{X} = (\lambda X_1, \ldots, \lambda X_n),$$

et de la norme

$$\|\widehat{X}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|X_i\|_i^2}.$$

On peut aussi considérer les normes équivalentes suivantes :

$$\|\widehat{X}\|_\infty = \sup_{i=1,\ldots,n} \|X_i\|_i \qquad \text{ou} \qquad \|\widehat{X}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} \|X_i\|_i.$$

II. — ESPACES DE BANACH.

1° Espace de Banach. – Un espace de Banach ou, plus simplement, un Banach, est un *E.V.N. complet* pour la distance associée à la norme.

Propriété importante. – Si E est un espace de Banach pour deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ et si

$$\forall X, \qquad \|X\|_1 \leqslant M\, \|X\|_2 \qquad (M \text{ étant une constante positive}),$$

alors les deux normes sont équivalentes.

2° Produit de Banachs. – Soit n Banachs, $E_1, \ldots, E_n$, définis sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), alors $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$ est un Banach défini sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$).

En bref, on dit qu'**un produit de Banachs est un Banach.**

Application :

$\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des Banachs, donc $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ sont des Banachs.

III. — ESPACE $\mathcal{L}_c(E, F)$.

1° Définition. – Les espaces E et F étant deux E.V.N. définis sur le même corps, on note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

2° Propriétés. – On munit $\mathcal{L}_c(E, F)$ de la norme $|||\cdot|||$ suivante :

$$|||L||| = \sup_{X \in E - \{0\}} \frac{\|LX\|_F}{\|X\|_E} = \sup_{\{X ; \|X\|_E = 1\}} \|LX\|_F$$

[L est un élément de $\mathcal{L}_c(E, F)$], d'où l'on déduit

$$\|LX\|_F \leqslant |||L||| \cdot \|X\|_E.$$

Lorsque $F = E$ nous avons, de plus, $|||L_1 \circ L_2||| \leqslant |||L_1||| \cdot |||L_2|||$.

Théorème 4.III.1.

i) $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$, lorsque E est de dimension finie.

ii) $\mathcal{L}_c(E, F)$ muni de la norme $|||\cdot|||$ est un Banach lorsque E est un E.V.N. et F un Banach.

3° Dual topologique E'. – Lorsque $F = \mathbb{K}$ (corps des scalaires de E), l'espace $\mathcal{L}_c(E, \mathbb{K})$ est appelé dual topologique de E, et se note E'.

D'après le théorème **4**.III.1. ii) E' est un Banach.

IV. — ESPACES DE HILBERT.

1° Produit scalaire. – Un produit scalaire sur l'espace vectoriel E est une application

$$(X, Y) \mapsto \langle X, Y \rangle, \quad E \times E \mapsto \mathbb{K},$$

qui satisfait aux trois axiomes suivants :

1. $\langle X, X \rangle \geqslant 0$; $\langle X, X \rangle = 0 \Leftrightarrow X = 0$;
2. $\langle X, Y \rangle = \overline{\langle Y, X \rangle}$ (symétrie hermitique);
3. pour Y fixé, l'application $X \mapsto \langle X, Y \rangle$ est linéaire.

Remarquons que, pour X fixé, l'application $Y \mapsto \langle X, Y \rangle$ est anti-linéaire. Lorsque $\langle X, Y \rangle = 0$, on dit que **les vecteurs X et Y sont orthogonaux.**

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé **préhilbertien.**

Exemples d'espaces préhilbertiens:

a) On munit $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ du produit scalaire

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i, \quad \text{où} \quad X = (x_1, \ldots, x_n) \text{ et } Y = (y_1, \ldots, y_n).$$

b) Soit l^2 l'ensemble des suites $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ vérifiant $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty (x_i \in \mathbb{K})$.

On le munit du produit scalaire

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i, \quad \text{où } X = (x_1, \ldots, x_n, \ldots) \text{ et } Y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots).$$

c) Soit $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ l'ensemble des applications définies, continues sur $[a, b]$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On peut le munir du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

2° Norme associée au produit scalaire. – La norme associée au produit scalaire est la norme définie par $\|X\| = \sqrt{\langle X, X \rangle}$.

Un préhilbertien est donc un E.V.N.

Dans les trois exemples ci-dessus, les normes associées sont respectivement

$$\|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}, \quad \|X\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}, \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle X, Y \rangle| \leqslant \|X\| . \|Y\|.$$

3° **Espace de Hilbert.** — Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, **complet** pour la norme associée, est appelé espace de Hilbert (ou hilbertien). Un hilbertien est donc un Banach.

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, l^2 sont des espaces de Hilbert. L'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ n'est pas hilbertien.

Théorème fondamental 4.IV.1.

Soit L une forme linéaire continue sur H, espace de Hilbert ($L \in H'$). Il existe un vecteur unique $Y_L \in H$ tel que

j) $LX = <X, Y_L>, \ \forall X \in H$;

jj) $|||L||| = ||Y_L||$ ($||.||$ désignant la norme de H associée à $<, >$).

On peut donc identifier algébriquement et topologiquement H et H'.

EXERCICES DU CHAPITRE 4

4.I.1. ◆ 1° *Démontrer que les applications suivantes sont des normes sur* $\mathbb{C}^n$ *:*

$$X \mapsto \|X\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \quad X = (x_1, \ldots, x_n),$$
$$X \mapsto \|X\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$X \mapsto \|X\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \ p \geqslant 1,$$
$$X \mapsto \|X\|_\infty = \sup_k |x_k|.$$

[*Pour les exemples 2 et 3 on pourra utiliser l'inégalité de Minkowski:*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

a_k *et* b_k *sont des constantes positives ou nulles et* p *est une constante supérieure ou égale à* 1.]

2° *Établir que ces normes sont équivalentes.*

4.I.2. ◆ *Soit* $\{p_k\}_{k=1}^n$ *une famille finie de semi-normes sur un espace vectoriel E. Démontrer que*

$$x \mapsto \rho(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x) \qquad et \qquad x \mapsto \pi(x) = \sup_k p_k(x)$$

sont également des semi-normes sur E.
Déterminer dans $\mathbb{C}^n$ *une famille de semi-normes telle que* ρ *et* π *soient des normes.*

4.I.3. ◆◆ 1° *Soit E l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur* [0, 1] *et à valeurs dans* $\mathbb{C}$*. Démontrer que les applications suivantes de E dans* $\mathbb{R}_+$ *sont des normes sur E:*

$$f \mapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx,$$
$$f \mapsto \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{[0,1]} |f(x)|.$$

Établir que l'on a la relation suivante:

$$\|f\|_1 \leqslant \lambda \|f\|_2 \leqslant \mu \|f\|_\infty, \ \lambda \text{ et } \mu \text{ sont des constantes positives.}$$

2° *On considère la suite de fonctions* $\{f_n\}$ *définies sur* $[0, 1]$ *par*

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \text{ pour } x \in \left[\dfrac{1}{n}, 1\right], \\ 1-nx, \text{ pour } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right]. \end{cases}$$

a) Calculer $||f_n||_1$, $||f_n||_2$ *et* $||f_n||_\infty$.
b) En déduire que deux quelconques des trois normes $||f_n||_1$, $||f_n||_2$ *et* $||f_n||_\infty$ *ne sont pas équivalentes.*

4.I.4. ◆◆ *Soit* M *un sous-espace vectoriel de* E, *E.V.N. sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *A l'aide de la relation d'équivalence*

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x-y \in M,$$

on définit l'espace quotient noté $\dfrac{E}{M}$.
Soit X *un élément de* $\dfrac{E}{M}$, *classe d'équivalence de* x *appartenant à* E. *On considère les relations suivantes :*

$$||X|| = \inf_{y \in X} ||y|| = \inf_{u \in M} ||x+u||.$$

Montrer que si M *est un sous-espace fermé de* E, *l'application* $X \longmapsto ||X||$ *est une norme sur* $\dfrac{E}{M}$.

4.I.5. ◆ *Montrer que, dans un E.V.N., les boules ouvertes et fermées* $B_\rho(a)$ *et* $B'_\rho(a)$ *sont des sous-ensembles convexes.*

4.I.6. ◆ **Fermeture de la boule ouverte.**
Montrer que, dans un E.V.N., la fermeture d'une boule ouverte $B_\rho(a)$ *est la boule fermée* $B'_\rho(a)$ *et que l'intérieur de la boule fermée* $B'_\rho(a)$ *est la boule ouverte* $B_\rho(a)$.

4.I.7. ◆ *Soit* C *un sous-ensemble convexe d'un E.V.N. ; montrer que* $\bar{C}$ *est également un convexe.*

4.I.8. ◆ 1° *Soit* M *un sous-espace vectoriel d'un E.V.N. ; montrer que* $\overline{M}$ *est également un sous-espace vectoriel.*

2° *Établir que le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant un sous-ensemble* A *de* E *est la fermeture du sous-espace engendré par* A.

4.I.9. ◆ *Soit* E *un E.V.N.,* x_0 *étant un vecteur fixé de* E *et* a *un scalaire fixé différent de zéro ; montrer que les applications suivantes :*

$$x \mapsto x_0 + x \qquad \text{et} \qquad x \mapsto ax$$

sont des homéomorphismes de E *sur lui-même.*

4.I.10. ◆◆◆ *Soit A et B deux sous-ensembles d'un espace vectoriel normé E. On pose*

$$A+B=\{x+y;\ x\in A, y\in B\}.$$

Démontrer que l'on a les implications suivantes:

a) A ou B ouvert $\Rightarrow (A+B)$ ouvert.
[On pourra remarquer que A ouvert $\Rightarrow A+y_0$ ouvert, $\forall y_0\in E$.]

b) A et B compacts $\Rightarrow (A+B)$ compact.
[Utiliser, C compact $\Leftrightarrow$ toute suite $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ à valeurs dans C admet, au moins, une sous-suite $\{z_{n_p}\}_{p=1}^{\infty}$ qui converge dans C.]

c) A compact et B fermé $\Rightarrow (A+B)$ fermé.
Donner un exemple où A et B sont fermés et où $(A+B)$ n'est pas fermé.

4.I.11. *Soit E un E.V.N. défini sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit $E\times E$ et $E\times\mathbb{K}$ d'une norme d'espace produit (par exemple, la somme des normes). Montrer que*

a) $\varphi:(x,y)\mapsto x+y$, $(E\times E\mapsto E)$ est uniformément continue sur $E\times E$;
b) $\psi:(x,\lambda)\mapsto\lambda x$, $(E\times\mathbb{K}\mapsto E)$ est continue sur $E\times\mathbb{K}$, mais ne peut être uniformément continue sur $E\times\mathbb{K}$;
c) $p_1:(x,y)\mapsto x$ est uniformément continue.

4.II.1. ◆ *$\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ est l'espace vectoriel des applications $[a,b]\mapsto\mathbb{C}$ qui sont continues sur le compact $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.*
Montrer que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})$ muni de la norme, $\|\cdot\|_\infty$, suivante:

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|,$$

est un Banach.

4.II.2. ◆ *Soit $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[-1,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On le munit de la norme $\|\cdot\|_2$ suivante:*

$$\|f\|_2=\left(\int_{-1}^{+1}|f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On considère la suite de fonctions f_n définies par

$$f_n(x)=\begin{cases}0, & si\ x\in[-1,0],\\ nx, & si\ x\in\left]0,\frac{1}{n}\right],\\ 1, & si\ x\in\left]\frac{1}{n},1\right].\end{cases}$$

Démontrer que f_n est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$.
L'espace $\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ est-il complet pour la norme $\|\cdot\|_2$?

4.II.3. ◆◆

Soit l^∞ l'ensemble des suites bornées de nombres réels (ou complexes) $X = \{x_n\}_1^\infty$.

1° *Montrer que l^∞ est un espace vectoriel, que $||X||_\infty = \sup_n |x_n|$ est une norme sur l^∞ et que l^∞ est un espace de Banach pour cette norme.*

2° *Soit l_0^∞ l'ensemble de toutes les suites infinies de nombres réels (ou complexes) convergeant vers 0. Montrer que l_0^∞ est un sous-espace vectoriel fermé de l^∞.*

4.II.4. ◆◆◆

Soit A un ensemble quelconque, F un E.V.N. sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère $\mathcal{B}(A, F)$ l'ensemble des applications bornées de A dans F, qui est un espace vectoriel normé pour la norme $||f|| = \sup_{t\in A} ||f(t)||_F$.

1° *Montrer que si F est un Banach, il en est de même de $\mathcal{B}(A, F)$.*

2° *Soit E un espace métrique. On appelle $\mathcal{C}_0(E, F)$ le sous-ensemble de $\mathcal{B}(E, F)$ formé des fonctions continues sur E. Établir que $\mathcal{C}_0(E, F)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{B}(E, F)$. En déduire que $\mathcal{C}_0(E, F)$ est un Banach si F l'est aussi.*

4.III.1. ◆

Soit E un E.V.N. défini sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Démontrer que E est homéomorphe à la boule ouverte $B_\rho(0)$, pour ρ donné positif. (On considérera l'application $x \mapsto \dfrac{\rho x}{1+||x||}$.)

4.III.2. ◆◆

Soit E et F deux espaces vectoriels normés définis sur un même corps, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une application linéaire f de E dans F est dite bornée, lorsqu'il existe une constante $K>0$ telle que

$$||f(x)||_F \leqslant K||x||_E, \qquad \forall x \in E.$$

Établir l'équivalence des propriétés suivantes:

i) *f est bornée;*
ii) *f est uniformément continue sur E;*
iii) *f est continue sur E;*
iv) *f est continue en un point x_0 de E.*

4.III.3. ◆◆

Application bilinéaire continue.

a) Soit f une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F, où E_1, E_2 et F sont trois E.V.N. définis sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que

$$f \text{ continue} \Leftrightarrow \exists K \quad \text{tel que} \quad ||f(x_1, x_2)|| \leqslant K||x_1||.||x_2||.$$

b) On pose

$$|||f||| = \sup_{\substack{||x_1|| \leqslant 1 \\ ||x_2|| \leqslant 1}} ||f(x_1, x_2)||.$$

Vérifier que l'on a

$$||f(x_1, x_2)|| \leqslant |||f|||.||x_1||.||x_2||.$$

4.III.4. ◆◆◆

1° *On munit* $\mathbb{C}^n$ *de la norme euclidienne* $||\,.\,||$ *et d'une autre norme* ρ. *Montrer qu'il existe deux constantes m et M strictement positives telles que*

$$X \in S_1(0) = \{X;\ ||X|| = 1\} \quad \Rightarrow \quad m \leqslant \rho(X) \leqslant M.$$

En déduire que l'on a les inégalités suivantes :

$$m||X|| \leqslant \rho(X) \leqslant M||X||, \qquad \forall X \in \mathbb{C}^n,$$

puis la propriété suivante :

« *toutes les normes définies sur* $\mathbb{C}^n$ *sont équivalentes* ».

2° *Soit F un E.V.N. défini sur* $\mathbb{C}$ *et muni de la norme* $||\,.\,||_F$. *Montrer que*

$$\mathfrak{L}_c(\mathbb{C}^n, F) = \mathfrak{L}(\mathbb{C}^n, F).$$

4.IV.1. ◆

Normes caractérisant un produit scalaire.

Soit E un espace vectoriel défini sur $\mathbb{R}$, *muni du produit scalaire* $<,>$ *et de la norme associée* $||\,.\,||$. *L'espace E est donc un préhilbertien.*

Exprimer $<X, Y>$ *en fonction de*

$$||X||, \ ||Y|| \ \text{et} \ ||X+Y||,$$

puis en fonction de

$$||X||, \ ||Y|| \ \text{et} \ ||X-Y||.$$

En déduire la relation suivante :

$$||X||^2+||Y||^2 = \frac{1}{2}(||X+Y||^2+||X-Y||^2).$$

[*Cette relation caractérise les normes associées à un produit scalaire. On pose, dans ce cas*

$$<X, Y> = \frac{1}{4}(||X+Y||^2-||X-Y||^2).]$$

4.IV.2. ◆

Normes caractérisant un produit scalaire.

Soit E un espace vectoriel défini sur $\mathbb{C}$, *muni du produit scalaire* $<,>$ *et de la norme associée* $||\,.\,||$.

Exprimer $\mathfrak{Re}<X, Y>$ *(*$\mathfrak{Re}$ *partie réelle) en fonction de*

$$||X||, \ ||Y|| \ \text{et} \ ||X+Y||,$$

puis en fonction de

$$||X||, \ ||Y|| \ \text{et} \ ||X-Y||.$$

En déduire la relation suivante :

$$||X||^2+||Y||^2 = \frac{1}{2}(||X+Y||^2+||X-Y||^2).$$

[*Cette relation caractérise les normes associées à un produit scalaire. On pose, dans ce cas,*

$$4<X, Y> = ||X+Y||^2-||X-Y||^2+i||X+iY||^2-i||X-iY||^2.]$$

4.IV.3. ◆◆ *Soit E un préhilbertien défini sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'espace E est donc muni du produit scalaire $<,>$ et de la norme associée $\|\,.\,\|$.*

a) Montrer que les applications suivantes:

$$\varphi_X : Y \mapsto <X, Y> \qquad et \qquad \psi_Y : X \mapsto <X, Y>,$$

sont uniformément continues sur E.

b) On munit $E \times E$ de la norme d'espace produit. Montrer que l'application $h : (X, Y) \mapsto <X, Y>$ est continue sur $E \times E$. Vérifier qu'elle ne peut être uniformément continue sur $E \times E$.

4.IV.4. ◆◆ **Produit d'Hilberts.**

Soit H_1 et H_2 deux Hilberts définis sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On munit $H = H_1 \times H_2$ du produit scalaire tel que

$$<X, Y>_H = <x_1, y_1>_{H1} + <x_2, y_2>_{H2},\ où\ X = (x_1, x_2)\ et\ Y = (y_1, y_2).$$

Montrer que H est un Hilbert.

Plus généralement, montrer qu'un produit fini d'Hilberts est un Hilbert.

4.IV.5. ◆◆◆ **Opérateur adjoint A^*.**

Soit H un Hilbert, défini sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et A un endomorphisme de H qui est continu ($A \in \mathcal{L}_c(H) \Leftrightarrow |||A||| < \infty$).

1° *a) Montrer que la forme linéaire $\varphi_Y : X \mapsto <AX, Y>$ est continue (Y étant fixé).*

En déduire (cf. théorème 4.IV.1.) qu'il existe un vecteur noté A^*Y tel que

$$<AX, Y> = <X, A^*Y>, \qquad \forall X \in H.$$

b) Montrer que $A^* \in \mathcal{L}_c(H)$.

c) Vérifier que l'on a

$$(A^*)^* = A \qquad et \qquad |||A^*||| = |||A|||.$$

2° *On pose $H = \mathbb{C}^n$. On sait qu'il est muni du produit scalaire suivant:*

$$<X, Y> = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i, \quad où \quad X = (x_1, \ldots, x_n) \quad et \quad Y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Soit $A \in \mathcal{L}_c(\mathbb{C}^n) = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. L'endomorphisme A est alors caractérisé par une matrice carrée $\tilde{A} = (a_{ij})$ dans la base canonique. Déterminer la matrice $\tilde{A}^*$ qui caractérise A^* dans cette base.

4.IV.6. ◆◆ **Propriétés des matrices hermitiennes et *symétriques réelles*.**

Soit A un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ caractérisé par la matrice carrée $\tilde{A} = (a_{ij})$ dans la base canonique. On appelle opérateur adjoint A^* l'opérateur caractérisé dans cette base par la matrice $\tilde{A}^* = a^*_{ij}$, où $a^*_{ij} = \bar{a}_{ji}$. Lorsque $\bar{a}_{ji} = a_{ij}$, on a $\tilde{A} = \tilde{A}^*$ et $A = A^*$. On dit alors que $\tilde{A}$ est une matrice *hermitienne et A un opérateur hermitien. L'ensemble $\mathbb{C}^n$ est muni du produit scalaire suivant :*

$$<X, Y> = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i, \text{ où } X = (x_1, \ldots, x_n) \text{ et } Y = (y_1, \ldots, y_n).$$

1° *Vérifier que l'on a*

$$<AX, Y> = <X, A^*Y>, \ \forall X \text{ et } Y \in E.$$

Déterminer le polynôme caractéristique de A^*, connaissant celui de A.

2° *Dans cette question on suppose que A est hermitien : $\bar{a}_{ji} = a_{ij}$. Montrer que*

a) les valeurs propres sont réelles [considérer $<AV_i, V_i>$, où V_i est un vecteur propre],

b) les vecteurs propres V_i et V_j correspondants à deux valeurs propres distinctes ($\lambda_i \neq \lambda_j$) sont orthogonaux [considérer $<AV_i, V_j>$].

3° *Que peut-on dire dans le cas où (a_{ij}) est une matrice carrée symétrique réelle ?*

4.IV.7. **Matrices du groupe unitaire.**
◆◆

On appelle opérateur du groupe unitaire tout endomorphisme, P, de $\mathbb{C}^n$ vérifiant la relation suivante :

$$<X, Y> = <PX, PY>, \qquad \forall X \text{ et } Y \in \mathbb{C}^n.$$

a) Montrer qu'il transforme une base orthonormée en une base orthonormée.

b) Montrer que l'on a $PP^* = P^*P = I$ et en déduire que $|\text{dét } \tilde{P}| = 1$. [Pour la définition de l'opérateur ( ), voir l'exercice 4.IV.6.]*

4.IV.8. **Étude de $V_1 \wedge V_2 \wedge \ldots \wedge V_{n-1}$ dans $\mathbb{C}^n$.**
◆◆

Dans $\mathbb{R}^n$, on se donne $n-1$ vecteurs $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$ et l'on considère la forme linéaire suivante :

$$X \mapsto \text{dét}\,(V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}, X).$$

a) Montrer qu'il existe V_n unique tel que

$$\text{dét}\,(V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}, X) = <X, V_n>, \ \forall X \in \mathbb{R}^n,$$

V_n est appelé produit vectoriel de $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}$ et on le note

$$V = V_1 \wedge V_2 \wedge \ldots \wedge V_{n-1}.$$

b) Si $V_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,n})$, pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, caractériser $V_1 \wedge V_2 \wedge \ldots \wedge V_{n-1}$.

4.IV.9. *Soit H un Hilbert et A un sous-ensemble dense dans H : $\bar{A} = H$.*
◆◆

Établir les propriétés suivantes :

i) *X_0 orthogonal à tout vecteur de $H \Rightarrow X_0 = 0$ ($X_0 \in H$);*

ii) *X_0 orthogonal à tout vecteur appartenant à $A \Rightarrow X_0 = 0$.*

4.IV.10. ◆◆ **Convergence faible, convergence forte.**

Soit H un Hilbert et $\{X_n\}_1^\infty$ une suite à valeurs dans H. On dit que X_n converge faiblement vers Y_0 appartenant à H lorsque l'on a

$$<X_n, X> \underset{n\to\infty}{\to} <Y_0, X>, \ \forall X \in H.$$

On écrit alors $$X_n \underset{n\to\infty}{\rightharpoonup} Y_0.$$

On dit que X_n converge fortement vers Y_0 lorsque

$$d(X_n, Y_0) = ||X_n - Y_0|| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Établir que l'équivalence suivante est vérifiée :

$$\left.\begin{array}{l} X_n \rightharpoonup Y_0 \\ ||X_n|| \underset{n\to\infty}{\to} ||Y_0|| \end{array}\right\} \Leftrightarrow X_n \underset{n\to\infty}{\to} Y \text{ (convergence forte).}$$

SOLUTIONS

4.I.1.

1° Pour les quatre exemples proposés il est immédiat que les axiomes 1 et 2 des normes sont satisfaits. Il reste à vérifier l'axiome 3.

Soit $X=(x_1, \ldots, x_n)$ et $Y=(y_1, \ldots, y_n)$, donc $X+Y=(x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n)$.
Pour la norme $||.||_1$, on aura

$$||X+Y||_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k| = ||X||_1 + ||Y||_1.$$

Pour la norme $||.||_p$ (en utilisant successivement la majoration $|x_k+y_k| \leqslant |x_k|+|y_k|$, puis l'inégalité de Minkowski avec $a_k = |x_k|$ et $b_k = |y_k|$), on aura

$$||X+Y||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} (|x_k|+|y_k|)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} = ||X||_p + ||Y||_p.$$

Pour la norme $||.||_2$, faisons $p=2$ dans la majoration ci-dessus. Remarquons que cette majoration pourrait aussi être utilisée avec $p=1$.
Pour la norme $||.||_\infty$, on aura

$$||X+Y||_\infty = \sup_k |x_k+y_k| \leqslant \sup_k |x_k| + \sup_k |y_k| = ||X||_\infty + ||Y||_\infty.$$

2° Il existe au moins un indice i_0 tel que $\sup\limits_k |x_k| = |x_{i_0}|$. Donc

$$\left(\sup_k |x_k|\right)^p = |x_{i_0}|^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p.$$

De plus, $|x_i| \leqslant \sup\limits_k |x_k|$, $\forall i$, donc

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leqslant n\left(\sup_k |x_k|\right)^p.$$

En résumé, on obtient

$$\left(\sup_k |x_k|\right)^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leqslant n\left(\sup_k |x_k|\right)^p,$$

ou encore

$$\sup_k |x_k| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant n^{\frac{1}{p}} \sup_k |x_k|,$$

c'est-à-dire

$$||X||_\infty \leqslant ||X||_p \leqslant n^{\frac{1}{p}} ||X||_\infty, \quad \forall p \geqslant 1.$$

Les normes $||.||_p$ sont donc équivalentes à $||.||_\infty$, $\forall p \geqslant 1$, et, par suite, sont équivalentes entre elles.

4.I.2.

Vérifions les trois axiomes des semi-normes.

a) Pour $\rho(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x)$.

On a
$$x = 0 \Rightarrow p_k(x) = 0,$$
donc
$$\rho(0) = \sum_{k=1}^{n} p_k(0) = 0;$$
puis,
$$p_k(\lambda x) = |\lambda| p_k(x),$$
donc
$$\rho(\lambda x) = \sum_{k=1}^{n} p_k(\lambda x) = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} p_k(x) = |\lambda| \rho(x);$$
enfin
$$p_k(x+y) \leqslant p_k(x)+p_k(y),$$
donc
$$\rho(x+y) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x+y) \leqslant \sum_{k=1}^{n} p_k(x)+p_k(y) = \rho(x)+\rho(y).$$

b) Pour $\pi(x) = \sup_k p_k(x)$.

On a
$$x = 0 \Rightarrow p_k(x) = 0,$$
donc
$$\pi(0) = \sup_k p_K(0) = 0;$$
puis
$$p_k(\lambda x) = |\lambda| p_k(x),$$
donc
$$\pi(\lambda x) = \sup_k p_k(\lambda x) = |\lambda| \sup_k p_k(x) = |\lambda| \pi(x);$$
enfin
$$p_k(x+y) \leqslant p_k(x)+p_k(y),$$
donc
$$\pi(x+y) = \sup_k p_k(x+y) \leqslant \sup_k (p_k(x)+p_k(y)) \leqslant \sup_k p_k(x) + \sup_k p_k(y) = \pi(x) + \pi(y).$$

Soit $X = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{C}^n$ et p_k la semi-norme
$$X \mapsto p_k(X) = |x_k|.$$

Nous obtenons ainsi une famille de semi-normes pour $k = 1, 2, \ldots, n$.
Il est clair que ρ et π sont ici des normes. (Voir l'exercice précédent : $\rho = ||.||_1$ et $\pi = ||.||_\infty$.)

4.I.3.

1° La structure d'espace vectoriel de E est celle définie par les deux lois de composition suivante :

$$f+g : x \mapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x),$$
$$\lambda f : x \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x),\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Nous allons vérifier que chacune des trois applications considérées est une norme sur E.

a) Les axiomes 1 et 2 sont immédiats à vérifier. On notera qu'il s'agit d'une norme et non d'une semi-norme parce que f étant continue sur $[0, 1]$, $|f|$ l'est également. Alors

$$\int_0^1 |f(x)|dx = 0 \Rightarrow f = 0, \text{ sur } [0, 1].$$

La vérification de l'axiome 3 en ce qui concerne $||.||_1$ et $||.||_\infty$ provient évidemment de l'inégalité

$$|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)|+|g(x)|.$$

Par contre, la démonstration de l'axiome 3 pour $||.||_2$ utilise l'inégalité de Schwarz, c'est-à-dire ici

$$\int_0^1 |f(x)|.|g(x)|dx \leqslant \left(\int_0^1 |f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |g(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

A partir de

$$\int_0^1 |f+g|^2dx \leqslant \int_0^1 (|f|^2+2|f|.|g|+|g|^2)dx,$$

on obtient

$$\int_0^1 |f+g|^2dx \leqslant \int_0^1 |f|^2dx+2\left(\int_0^1 |f|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |g|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+\int_0^1 |g|^2dx,$$

d'où

$$||f+g||_2 \leqslant ||f||_2+||g||_2.$$

b) Puisque l'on a $|f(x)| \leqslant ||f||_\infty$ ($||f||_\infty$ est une constante), on en déduit immédiatement

$$||f||_2^2 = \int_0^1 |f(x)|^2dx \leqslant ||f||_\infty^2\int_0^1 dx = ||f||_\infty^2,$$

ou encore

$$||f||_2 \leqslant ||f||_\infty.$$

En utilisant à nouveau l'inégalité de Schwarz, on peut écrire

$$\left(\int_0^1 |f(x)|.1dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 |f(x)|^2dx.\int_0^1 1^2dx,$$

d'où

$$||f||_1 \leqslant ||f||_2.$$

En résumé,

$$||f||_1 \leqslant ||f||_2 \leqslant ||f||_\infty, \quad \lambda = \mu = 1.$$

2° *a*) Calculons les trois expressions demandées. On a

$$\begin{aligned}
||f_n||_1 &= \int_0^{\frac{1}{n}} (1-nx)dx &&\Rightarrow ||f_n||_1 = \frac{1}{2n};\\
||f_n||_2 &= \left(\int_0^{\frac{1}{n}} (1-nx)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} &&\Rightarrow ||f_n||_2 = \frac{1}{\sqrt{3n}};\\
||f_n||_\infty &= \sup_{[0,1]} |f_n(x)| &&\Rightarrow ||f_n||_\infty = 1.
\end{aligned}$$

b) Supposons qu'il existe une constante positive, A, telle que

$$||f||_2 \leqslant A||f||_1, \quad \forall f \in E.$$

Prenons $f = f_n$, alors $||f_n||_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}.\sqrt{n}}$ et $||f_n||_1 = \dfrac{1}{2n}$ entraîneraient $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{3}} \leqslant \dfrac{A}{2}$, $\forall n$, ce qui est impossible.

De même, supposons qu'il existe une constante positive, B, telle que

$$||f||_\infty \leqslant B||f||_1, \quad \forall f \in E.$$

Prenons alors $f = f_n$, il vient $1 \leqslant \dfrac{B}{2n}$, $\forall n$, ce qui est impossible.

Enfin, il n'existe pas de constante positive C, telle que

$$||f||_\infty \leqslant C||f||_2,$$

il suffit de prendre $f = f_n$ pour constater que $1 \leqslant \dfrac{C}{\sqrt{3n}}$, $\forall n$, est impossible à réaliser.

Autrement dit, deux quelconques des trois normes $||.||_1$, $||.||_2$ et $||.||_\infty$ ne sont pas équivalentes entre elles.

4.I.4.

Notons $X = \dot{x}$ la classe d'équivalence de x et vérifions que la norme $||.||$, définie par $||X|| = \inf\limits_{u \in M} ||x+u||$, satisfait bien aux trois axiomes des normes.

a)
$$||X|| = 0 \Leftrightarrow \inf_{u \in M} ||x+u|| = 0,$$

$$\exists u_n \in M \quad \text{tel que} \quad ||x+u_n|| \underset{n \to \infty}{\to} \inf_{u \in M} ||x+u|| = 0,$$

c'est-à-dire

$$u_n + x \underset{n\to\infty}{\to} 0, \quad \text{ou encore} \quad u_n \underset{n\to\infty}{\to} -x.$$

Or, $u_n \in M$ qui est fermé, donc $-x \in M$, *et, par suite,* $x \in M$ (M est un sous-espace vectoriel). Le sous-espace M contient aussi le vecteur nul 0, donc $x \equiv 0$, c'est-à-dire $X = \dot{x} = \dot{0}$.

X est bien le vecteur nul de $\frac{E}{M}$.

Réciproquement,

$$X = \dot{0} \Rightarrow \|X\| = \inf_{u \in M} \|0+u\| \leqslant \|0+0\| = 0$$

(puisque M contient le vecteur $u = 0$).

b) $$X+Y = \dot{\widehat{x+y}}, \text{ si } X = \dot{x} \text{ et } Y = \dot{y}.$$

Donc on a

$$\|X+Y\| = \inf_{u \in M} \|x+y+u\|.$$

Or

$$\|x+y+u\| \leqslant \left\|x+\frac{u}{2}\right\| + \left\|y+\frac{u}{2}\right\|,$$

donc

$$\inf_{u \in M} \|x+y+u\| \leqslant \left\|x+\frac{u}{2}\right\| + \left\|y+\frac{u}{2}\right\|$$

et, par suite,

$$\inf_{u \in M} \|x+y+u\| \leqslant \inf_{u \in M} \left\|x+\frac{u}{2}\right\| + \inf_{u \in M} \left\|y+\frac{u}{2}\right\|.$$

Il est clair que

$$\inf_{u \in M} \left\|x+\frac{u}{2}\right\| = \inf_{u \in M} \|x+u\| \qquad \left(\text{puisque } \frac{u}{2} \in M \Leftrightarrow u \in M\right).$$

La majoration précédente entraîne alors

$$\inf_{u \in M} \|x+y+u\| \leqslant \inf_{u \in M} \|x+u\| + \inf_{u \in M} \|y+u\|,$$

ou encore

$$\|X+Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|.$$

c) $\lambda X = \dot{\widehat{\lambda x}}$. Alors,

$$\|\lambda X\| = \inf_{u \in M} \|\lambda x+u\| = |\lambda| \inf_{u \in M} \left\|x+\frac{u}{\lambda}\right\| = |\lambda| \inf_{u \in M} \|x+u\|$$

$$\left(\text{puisque } u \in M \Leftrightarrow \frac{u}{\lambda} \in M \text{ pour } \lambda \neq 0\right)$$

et, par suite, $\|\lambda X\| = |\lambda| . \|X\|$.

4.I.5.

Soit X et $Y \in B_\rho(a)$, c'est-à-dire
$$\|X-a\|<\rho \quad \text{et} \quad \|Y-a\|<\rho.$$

Pour montrer que $B_\rho(a)$ est convexe, il suffit de s'assurer que
$$X+\lambda(Y-X) = (1-\lambda)X+\lambda Y \in B_\rho(a), \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$
Or,
$$(1-\lambda)X+\lambda Y-a = (1-\lambda)(X-a)+\lambda(Y-a),$$
donc
$$\|[(1-\lambda)X+\lambda Y]-a\| \leqslant (1-\lambda)\|X-a\|+\lambda\|Y-a\|<(1-\lambda)\rho+\lambda\rho = \rho$$
et, par suite,
$$(1-\lambda)X+\lambda Y \in B_\rho(a).$$

De même, on peut vérifier que les boules fermées $B'_\rho(a) = \{X; \|X-a\| \leqslant \rho\}$ sont convexes.

4.I.6.

a) De l'inclusion $B_\rho(0) \subset B'_\rho(0)$, on déduit
$$\overline{B_\rho(0)} \subset B'_\rho(0) \ (= \overline{B'_\rho(0)}).$$

Montrons que tout point x de $B'_\rho(0)$ tel que $\|x\| = \rho$ est un point adhérent à $B_\rho(0)$. Soit x_n la suite définie par $x_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)x$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, on a
$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} x \qquad \left[\text{en effet, } \|x_n-x\| = \frac{1}{n}\|x\| = \frac{\rho}{n}\right]$$
et
$$x_n \in B_\rho(0) \qquad \left[\text{en effet, } \|x_n\| = \left(1-\frac{1}{n}\right)\|x\| = \rho\left(1-\frac{1}{n}\right)<\rho\right],$$
donc $x \in \overline{B_\rho(0)}$.

b) Un ouvert coïncide avec son intérieur, donc $\mathring{B}_\rho(0) = B_\rho(0)$.
De l'inclusion $B_\rho(0)\subset B'_\rho(0)$, on déduit $\mathring{B}_\rho(0)\subset\mathring{B}'_\rho(0)$ et, par suite,

(1) $$B_\rho(0) \subset \mathring{B}'_\rho(0).$$

Montrons que tout point x de $\mathring{B}'_\rho(0)$ est tel que $\|x\|<\rho$ [c'est-à-dire $\mathring{B}'_\rho(0)\subset B_\rho(0)$].
Sinon, il existe x_0 vérifiant $\|x_0\| \geqslant \rho$ et $B_r(x_0)\subset B'_\rho(0)$.

Soit

$$x_n = x_0\left(1+\frac{1}{n}\right),\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

on a alors

$$x_n \in B_r(x_0) \subset B'_\rho(0), \text{pour } n \geqslant N = \left[\frac{\|x_0\|}{r}\right]+1 \left(\text{en effet, } \|x_n - x_0\| = \frac{\|x_0\|}{n} \leqslant \frac{\|x_0\|}{N} < r\right),$$

donc

$$\|x_n\| \leqslant \rho,\ \forall n \geqslant N.$$

De plus,

$$\|x_n\| = \|x_0\|\left(1+\frac{1}{n}\right) \geqslant \rho\left(1+\frac{1}{n}\right) > \rho.$$

Ces deux majorations, $\|x_n\| \leqslant \rho$ et $\|x_n\| > \rho$, étant simultanément impossibles, on ne pourra donc avoir $\|x_0\| \geqslant \rho$.

Autrement dit,

(2) $\qquad x \in \mathring{B}'_\rho(0) \Rightarrow \|x\| < \rho$ [c'est-à-dire $\mathring{B}'_\rho(0) \subset B_\rho(0)$].

Des relations (1) et (2) on déduit $\mathring{B}'_\rho(0) = B_\rho(0)$.

4.I.7.

Soit x et $y \in \overline{C}$, $\exists x_n$ et $y_n \in C$, tels que l'on ait

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} x \qquad \text{et} \qquad y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y.$$

Puisque C est convexe

$$(1-\lambda)x_n + \lambda y_n \in C,\ \forall \lambda \in [0, 1].$$

Or,

$$(1-\lambda)x_n + \lambda y_n \underset{n\to\infty}{\to} (1-\lambda)x + \lambda y,$$

[en effet,

$$x_n \underset{n\to\infty}{\to} x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N_1 \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon,$$

$$y_n \underset{n\to\infty}{\to} y \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_2(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N_2 \Rightarrow \|y_n - y\| < \varepsilon,$$

donc

$$\|[(1-\lambda)x_n + \lambda y_n] - [(1-\lambda)x + \lambda y]\| \leqslant (1-\lambda)\|x_n - x\| + \lambda\|y_n - y\| < \varepsilon];$$

donc

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in \overline{C}, \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

4.I.8.

1° Pour montrer que $\overline{M}$ est un sous-espace vectoriel de E (E.V.N. défini sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), il suffit de s'assurer que

i) x et $y \in \overline{M} \Rightarrow x+y \in \overline{M}$;

ii) $x \in \overline{M} \qquad \Rightarrow \lambda x \in \overline{M}, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Démonstration de i).
On peut écrire :

$$x \text{ et } y \in \overline{M} \Rightarrow \exists x_n \text{ et } y_n \in M, \text{ tels que } x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \text{ et } y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y.$$

Or, $x_n+y_n \in M$ (sous-espace vectoriel) et $x_n+y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x+y$; [en effet, on a

$$||(x_n+y_n)-(x+y)|| \leqslant ||x_n-x||+||y_n-y|| < 2\varepsilon, \text{ pour } n \text{ assez grand}],$$

donc $x+y \in \overline{M}$.

Démonstration de ii).
On peut écrire

$$x \in \overline{M} \Rightarrow \exists x_n \in M \qquad \text{tel que} \qquad x_n \underset{\to\infty}{\longrightarrow} x.$$

Or,
$\lambda x_n \in M$ et $\lambda x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda x$, [en effet, $||\lambda x_n - \lambda x|| = |\lambda|\,||x_n-x|| < |\lambda|\varepsilon$ pour n assez grand],
donc $\lambda x \in \overline{M}$.

2° Soit $(M_i)_{i\in I}$ la famille des sous-espaces vectoriels contenant A et Π_0 le sous-espace vectoriel engendré par A. On sait que l'égalité suivante est vérifiée :

$$\Pi_0 = \bigcap_{i\in I} M_i.$$

Soit $(M_j)_{j\in J}$ la famille des sous-espaces vectoriels *fermés* contenant A ($J \subset I$) et Π_1 le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant A. Il est clair que l'on a

$$\Pi_1 = \bigcap_{j\in J} M_j, \text{ où } \overline{M_j} = M_j.$$

Par définition, on a $\Pi_1 \supset A$, donc $\exists i_0$ tel que $\Pi_1 = M_{i_0}$ et, par suite,

(1) $$\Pi_0 \subset \Pi_1.$$

De l'inclusion $\Pi_0 \supset A$, on déduit $\overline{\Pi_0} \supset A$, $\exists j_0$ tel que donc $\overline{\Pi_0} = M_{j_0}$ et, par suite,

(2) $$\Pi_1 \subset \overline{\Pi_0}.$$

En comparant (1) et (2), on obtient

$$\Pi_0 \subset \Pi_1 \subset \overline{\Pi_0},$$

puis, en passant à la fermeture,

$$\overline{\Pi}_0 \subset \overline{\Pi}_1 = \Pi_1 \subset \overline{\Pi}_0,$$

c'est-à-dire $\Pi_1 = \overline{\Pi}_0$.

4.I.9.

Soit $\varphi_{x_0} : x \mapsto x_0 + x$ et $\psi_a : x \mapsto ax$, $a \in \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $a \neq 0$.

a) Il est clair que φ_{x_0} est injective et surjective $(\forall y \in E : \varphi_x\,(y - x_0) = y)$.
De plus, $\varphi_{x_0} \cdot \varphi_{-x_0} = \varphi_{-x_0} \cdot \varphi_{x_0} = i$, opérateur identique, donc

$$(\varphi_{x_0})^{-1} = \varphi_{-x_0}.$$

De même, ψ_a est bijective et $(\psi_a)^{-1} = \psi_{a^{-1}}$.

b) φ_{x_0} homéomorphisme $\Leftrightarrow$ φ_{x_0} et $(\varphi_{x_0})^{-1}$ continues.

φ_{x_0} **est continue.** — Quelque soit le choix de x_0, φ_{x_0} est continue; en effet, on a

$$\|x' - x\| < \varepsilon \Rightarrow \|\varphi_{x_0}(x') - \varphi_{x_0}(x)\| = \|(x' + x_0) - (x + x_0)\| = \|x' - x\| < \varepsilon$$

(en fait on constate que φ_{x_0} est uniformément continue sur E).
Puisque φ_{x_0} est continue, $\forall x_0$, $(\varphi_{x_0})^{-1} = \varphi_{-x_0}$ **est aussi continue.**
Autrement dit, φ_{x_0} est un homéomorphisme.
De manière analogue, on s'assure d'abord que ψ_a est continue, $\forall a \neq 0$, puis on en déduit la continuité de $(\psi_a)^{-1} = \psi_{a^{-1}}$.

4.I.10.

a) **A ouvert, B quelconque.**
Montrons que $A + y_0$ est ouvert, $\forall y_0 \in E$. Pour cela, on considère un élément quelconque $z_0 \in A + y_0$: $z_0 = x_0 + y_0$, où $x_0 \in A$.
Puisque A est ouvert, il existe une boule $B_\rho(x_0) \subset A$ et, par suite, on a

$$B_\rho(x_0) + y_0 \subset A + y_0.$$

Or,

$$B_\rho(x_0) + y_0 = \{z;\, z = x + y_0,\text{ où } \|x - x_0\| < \rho\} = \{z;\, \|(z - y_0) - x_0\| < \rho\} = B_\rho(z_0),$$

donc

$$B_\rho(z_0) \subset A + y_0.$$

Tout point z_0 de $A+y_0$ est centre d'une boule incluse dans $A+y_0$; autrement dit, $A+y_0$ est un ouvert de E.

L'ensemble $A+B$,

$$A+B = \bigcup_{y_0 \in B} (A+y_0),$$

est donc un ouvert de E.

Remarque. — Pour montrer que $A+y_0$ est un ouvert, on peut aussi considérer l'homéomorphisme $\varphi_{y_0} : x \mapsto x+y_0$

$$A \text{ ouvert} \Rightarrow \varphi(A) = A+y_0 \text{ ouvert.}$$

b) **A et B compacts.**

$A+B$ compact $\Leftrightarrow$ toute suite $\{z_n\}_1^\infty$ à valeurs dans $A+B$ admet une sous-suite $\{z_{n_p}\}_{p=1}^\infty$ convergente dans $A+B$.

Soit $\{z_n\}$ une suite à valeurs dans $A+B$: $z_n = x_n+y_n$, où $x_n \in A$ et $y_n \in B$.

$\{x_n\}$ admet une sous-suite $\{x_{n_p}\}$ qui converge vers $x \in A$ (compact).

$\{y_{n_p}\}$ admet une sous-suite $\{y_{n_{p_q}}\}$ qui converge vers $y \in B$ (qui est compact).

Donc

$$z_{n_{p_q}} = x_{n_{p_q}} + y_{n_{p_q}} \xrightarrow[q\to\infty]{} x+y \in A+B.$$

De la suite $\{z_n\}$ à valeurs dans $A+B$, on a pu extraire une sous-suite $\{z_{n_{p_q}}\}$ qui converge vers $z = x+y \in A+B$. Donc $A+B$ est compact.

Remarque. — Dans $E \times E$ muni de la norme d'espace produit, l'application $\psi : (x, y) \mapsto x+y$ est continue.

Alors,

$$A \times B \text{ compact} \Rightarrow \psi(A \times B) = A+B \text{ compact.}$$

c) **A compact, B fermé.**

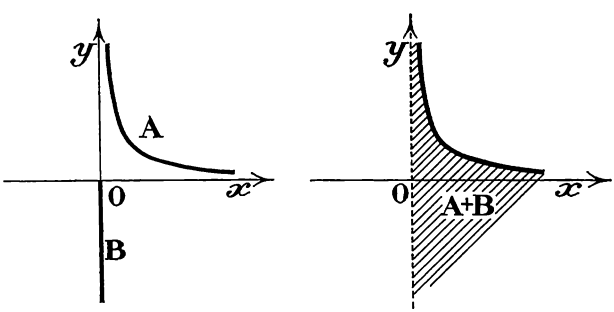
Soit $z \in \overline{A+B}$, il existe $z_n \in A+B$ tels que

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z.$$

Puisque $z_n \in A+B$, on peut écrire $z_n = x_n+y_n$, où $x_n \in A$ et $y_n \in B$.

La suite $\{x_n\}$ est à valeurs dans A compact, donc admet une sous-suite $\{x_{n_p}\}$ qui converge dans A

$$x_{n_p} \xrightarrow[p\to\infty]{} x \in A.$$



Alors

$$y_{n_p} = z_{n_p} - x_{n_p} \xrightarrow[n\to\infty]{} z-x \text{ (noté } y).$$

Or, $y_{n_p} \in B$ fermé, donc $y \in B$ et, par suite, $z = x+y \in A+B$.

Donnons un exemple où A et B fermé $\not\Rightarrow$ A + B fermé.
Dans $\mathbb{R}^2$, on a

$$A = \{x, y;\ xy = 1\} \qquad \text{et} \qquad B = \{x, y;\ x = 0, y \leqslant 0\},$$

alors

$$A+B = \{x, y;\ x>0, xy \leqslant 1\}.$$

4.I.11.

La norme de E sera notée $||.||$.
Munissons $E\times E$ de la norme définie par

$$||(x, y)||_{E\times E} = ||x||+||y||$$

et $E\times \mathbb{K}$ de la norme définie par

$$||(x, \lambda)||_{E\times K} = ||x||+|\lambda|.$$

1° Soit $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$ deux vecteurs de $E\times E$. On aura alors

$$z-z' = (x-x', y-y') \qquad \text{et} \qquad ||z-z'||_{E\times E} = ||x-x'||+||y-y'||.$$

Par suite,

$$||z-z'||_{E\times E} \leqslant \varepsilon \Rightarrow ||\varphi(z)-\varphi(z')|| = ||(x+y)-(x'+y')||$$
$$= ||(x-x')+(y-y')|| \leqslant ||x-x'||+||y-y'|| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, φ est uniformément continue sur $E\times E$.

2° De même, soit $Z = (x, \lambda)$ et $Z' = (x', \lambda')$ deux vecteurs de $E\times \mathbb{K}$ vérifiant $||Z-Z'||_{E\times K}\leqslant\varepsilon$, c'est-à-dire

(1) $\quad ||x-x'||+|\lambda-\lambda'| \leqslant \varepsilon$ [puisque $||Z-Z'||_{E\times K} = ||x-x'||+|\lambda-\lambda'|$].

La majoration (1) entraîne de façon évidente les inégalités (2), (3) et (4) suivantes:

(2) $$|\lambda-\lambda'| \leqslant \varepsilon,$$

(3) $$||x-x'|| \leqslant \varepsilon,$$

(4) $$||x'|| \leqslant ||x||+\varepsilon \leqslant ||x||+1 \qquad \text{si} \qquad 0<\varepsilon \leqslant 1.$$

On a, alors,

$$||\psi(Z)-\psi(Z')|| = ||\lambda x-\lambda' x'|| = ||\lambda(x-x')+(\lambda-\lambda')x'||$$
$$\leqslant |\lambda|\,||x-x'||+|\lambda-\lambda'|\,||x'|| \leqslant |\lambda|\varepsilon+\varepsilon(||x||+1) = \varepsilon[|\lambda|+||x||+1]$$

et, par suite, φ est continue en Z, $\forall Z \in E\times \mathbb{K}$.
Supposons que φ soit uniformément continue sur $E \times \mathbb{K}$, alors,

$$\forall\varepsilon>0, \quad \exists\eta(\varepsilon)>0$$

tel que

$$||Z-Z'||_{E\times E} = ||x-x'||+|\lambda-\lambda'| \leqslant \eta \Rightarrow ||\varphi(Z)-\varphi(Z')|| = ||\lambda x-\lambda' x'|| \leqslant \varepsilon.$$

En particulier, pour $x = x'$,

$$|\lambda-\lambda'| \leqslant \eta \Rightarrow ||\lambda x-\lambda' x|| = |\lambda-\lambda'|\,||x|| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui est évidemment *faux* pour $||x|| > \frac{\varepsilon}{\eta}$.

ψ ne peut donc être uniformément continue sur $E\times \mathbb{K}$.

3° Les notations sont celles de la question 1°, $p_1(z) = x$ ($z = (x, y)$) et $p_1(z') = x'$,

$$||z-z'||_{E\times E} = ||x-x'||+||y-y'|| \leqslant \varepsilon \Rightarrow ||p_1(z)-p_1(z')|| = ||x-x'|| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, p_1 est uniformément continue sur $E\times E$.

4.II.1.

a) On sait que $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, lorsqu'on le munit des lois suivantes :

$$f+g : x \mapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x),$$
$$\lambda f : x \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

b) Vérifions que $||.||_\infty$ est bien définie sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ [c'est-à-dire que l'on a $||f||_\infty < \infty$].

Soit $f \in \mathcal{C}$, la fonction f est continue, donc

$[a, b]$ compact $\Rightarrow f([a, b])$ compact dans $\mathbb{C}$
$\Rightarrow f([a, b])$ borné dans $\mathbb{C}$: $|f(x)| \leqslant M, \forall x \in [a, b]$

et, par suite,

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \leqslant M$$

est bien un nombre fini.

Il est aisé de vérifier que cette application $||.||_\infty$ satisfait aux axiomes des normes.

c) $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$est complet, donc est un Banach.

Soit $\{f_n\}_1^\infty$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } m > n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow ||f_n-f_m|| = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f_m(x)| \leqslant \varepsilon,$$

ou encore

(1) $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ tel que $m > n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x)-f_m(x)| \leqslant \varepsilon, \forall x \in [a, b]$.

Pour chaque x fixé, la suite numérique complexe $\{f_n(x)\}_1^\infty$ est donc de Cauchy, par suite elle converge, et l'on a

$$f_n(x) \underset{m\to\infty}{\to} l(x).$$

En faisant tendre m vers l'infini : $f_m(x) \underset{n\to\infty}{\to} l(x)$, et l'on obtient

$$|f_n(x)-f_m(x)| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |f_n(x)-l(x)| \leqslant \varepsilon,$$

donc [cf. (1)] :

$$n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x)-l(x)| \leqslant \varepsilon, \forall x \in [a, b]. \tag{2}$$

On s'assurera que $l \in \mathcal{C}$ *en vérifiant qu'elle est continue sur* $[a, b]$.

On a

$$l(x')-l(x) = (l(x')-f_N(x'))+(f_N(x')-f_N(x))+(f_N(x)-l(x)),$$

donc [cf. (2) avec $n = N$], on obtient

$$|l(x')-l(x)| \leqslant \varepsilon + |f_N(x')-f_N(x)|+\varepsilon.$$

La fonction f_N étant continue sur le compact $[a, b]$, on peut écrire

$$|x'-x| \leqslant \alpha(\varepsilon) \Rightarrow |f_N(x')-f_N(x)| \leqslant \varepsilon$$

et, par suite,

$$|x'-x| \leqslant \alpha(\varepsilon) \Rightarrow |l(x')-l(x)| \leqslant 3\,\varepsilon.$$

Autrement dit, l est uniformément continue sur $[a, b]$.

De la relation (2) on déduit

$$n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow ||f_n-l||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-l(x)| \leqslant \varepsilon,$$

c'est-à-dire

$$f_n \underset{n\to\infty}{\to} l \in \mathcal{C}.$$

La suite de Cauchy $\{f_n\}$ définie dans $\mathcal{C}$ converge vers $l \in \mathcal{C}$. L'espace vectoriel $\mathcal{C}$ est bien complet.

4.II.2.

1° Faire le graphe de f_n et f_m $(m > n)$.

Il est clair que l'on a

$$f_m(x)-f_n(x) = 0, \qquad \text{pour} \qquad x \in [-1, 0],$$
$$0 \leqslant f_m(x)-f_n(x) \leqslant 1-f_n(x), \qquad \text{pour} \qquad x \in [0, 1],$$

donc

$$||f_m-f_n||_2^2 = \int_{-1}^{+1} |f_m(x)-f_n(x)|^2 dx = \int_0^1 (f_m(x)-f_n(x)^2 dx$$
$$\leqslant \int_0^1 (1-f_n(x))^2 dx = \int_0^{\frac{1}{n}} (1-nx)^2 dx \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} 1.dx = \frac{1}{n}$$

et, par suite,

$$||f_m-f_n||_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}, \text{ pour } m > n.$$

Alors on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ m > n \geqslant N(\varepsilon)\left(= \left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1\right) \Rightarrow \|f_m - f_n\| \leqslant \varepsilon,$$

donc $\{f_n\}$ *est bien une suite de Cauchy dans* $\mathcal{C}$.

2° **Supposons que $\mathcal{C}$ est complet.**
On a nécessairement $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f \in \mathcal{C}$, autrement dit,

$$\exists f \text{ continue telle que } n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f\|_2 \leqslant \varepsilon.$$

a) **Soit** $\alpha \in]-1, 0[$.
La fonction $(f_n - f)^2$ étant positive on aura

$$\int_{-1}^{\alpha} (f_n(x) - f(x))^2 dx \leqslant \int_{-1}^{1} (f_n(x) - f(x))^2 dx = \|f_n - f\|_2^2 \leqslant \varepsilon^2, \text{ pour } n \geqslant N(\varepsilon),$$

ou encore

$$\int_{-1}^{\alpha} f^2(x) dx \leqslant \varepsilon^2 \text{ (puisque } f_n(x) = 0 \text{ sur } [-1, \alpha]),\ \forall \varepsilon > 0,$$

et, par suite,

$$\text{(1)} \qquad \int_{-1}^{\alpha} f^2(x) dx = 0.$$

L'application $x \mapsto f^2(x)$ est positive et continue sur $[-1, \alpha]$ (puisque $f \in \mathcal{C}$), donc

$$\text{(1)} \Rightarrow f^2(x) = 0 \text{ sur } [-1, \alpha].$$

Conséquence. — On a

$$f(x) = 0 \text{ sur } [-1, \alpha], \text{ avec } -1 < \alpha < 0.$$

b) **Soit** $\beta \in]0, 1[$.
Définissons N_1 par $N_1 = \left[\frac{1}{\beta}\right] + 1$.
Pour $n \geqslant \nu = \sup(N(\varepsilon), N_1)$ nous aurons
 i) $f_n(x) = 1$, pour $x \in [\beta, 1]$;
 ii) $\|f_n - f\|_2 \leqslant \varepsilon$.
Alors

$$\int_{\beta}^{1} (1 - f(x)^2 dx = \int_{\beta}^{1} (f_n(x) - f(x))^2 dx \leqslant \int_{-1}^{+1} (f_n(x) - f(x))^2 dx \leqslant \varepsilon^2,\ \forall \varepsilon$$

et, par suite,

$$\text{(2)} \qquad \int_{\beta}^{1} (1 - f(x))^2 dx = 0.$$

La fonction $x \mapsto (1 - f(x))^2$ est positive et continue sur $[\beta, 1]$ (puisque f est continue sur $[-1, 1]$), donc

$$\text{(2)} \Rightarrow [1 - f(x)]^2 = 0,\ \forall x \in [\beta, 1].$$

Conséquence. — On a

$$f(x) = 1 \text{ sur } [\beta, 1], \text{ avec } 0 < \beta < 1.$$

c) **En résumé :**
On a

$$f(x) = 0, \text{ sur } [-1, 0[,$$
$$f(x) = 1, \text{ sur }]0, 1],$$
$$f \text{ continue sur } [-1, 1] \text{ (par hypothèse).}$$

Ceci est contradictoire (la fonction f ne pouvant être continue à l'origine), donc $\mathcal{C}$ *ne peut être complet.*

4.II.3.

1° *a*) Soit E un ensemble quelconque et F un *espace vectoriel* sur un corps valué $\mathbb{K}$. On sait que l'ensemble F^E des applications, $f : E \mapsto F$, muni des lois de composition suivantes :

$$f+g : x \mapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$

et

$$\lambda f : x \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

En particulier, *l'ensemble $\mathbb{R}^{N^*}$ des suites est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$* et $l^\infty \subset \mathbb{R}^{N^*}$.

Pour montrer que l^∞ est un sous-espace vectoriel, il suffit de s'assurer que l'on a

$$\begin{cases} X = \{x_n\}_1^\infty \text{ et } Y = \{y_n\}_1^\infty \in l^\infty \Rightarrow X+Y = \{x_n+y_n\}_1^\infty \in l^\infty, \\ X = \{x_n\}_1^\infty \in l^\infty \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \quad\quad \Rightarrow \lambda X = \{\lambda x_n\}_1^\infty \in l^\infty. \end{cases}$$

Il est clair que l'on a

$$\sup_n |x_n| \text{ et } \sup_n |y_n| \text{ bornés} \Rightarrow \sup_n |x_n+y_n| \text{ bornés}$$

et, par suite, $X+Y \in l^\infty$.

De même,

$$\sup_n |x_n| \text{ borné} \Rightarrow \sup_n |\lambda x_n| \text{ borné}$$

et, par suite, $\lambda X \in l^\infty$.

b) $||.||_\infty$ **est une norme.**

Vérifions les axiomes 1, 2 et 3 des normes.

(1) $\quad 0 = \{x_n\}_1^\infty$, où $x_n = 0$, $\forall n$, $\quad$ donc $\quad ||0||_\infty = \sup\limits_n |x_n| = 0.$

Réciproquement,

$$||X||_\infty = \sup_n |x_n| = 0 \Rightarrow x_n = 0, \forall n.$$

(2)
$$\sup_n |x_n+y_n| \leqslant \sup_n |x_n| + \sup_n |y_n|,$$

donc

$$||X+Y||_\infty \leqslant ||X||_\infty + ||Y||_\infty$$

(3) $$\sup_n |\lambda x_n| = |\lambda| \sup_n |x_n|,$$

donc

$$||\lambda X||_\infty = |\lambda| \, ||X||_\infty.$$

c) **l^∞ est un Banach.**

Soit $X^{(n)}$ une suite de Cauchy dans l^∞, on peut écrire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad m > n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow ||X^{(n)} - X^{(m)}||_\infty \leqslant \varepsilon,$$

avec

$$X^{(n)} = \{x_p^{(n)}\}_1^\infty \text{ et } X^{(m)} = \{x_p^{(m)}\}_1^\infty; \quad \text{donc } X^{(n)} - X^{(m)} = \{x_p^{(n)} - x_p^{(m)}\}_1^\infty$$

et, par suite, on en déduit

(1) $$\underline{m > n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow} \sup_p |x_p^{(n)} - x_p^{(m)}| \leqslant \varepsilon \; (\Leftrightarrow \underline{|x_p^{(n)} - x_p^{(m)}| \leqslant \varepsilon}, \forall p).$$

Il en résulte que $\{x_p^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ (p fixé) est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet, donc convergente: $x_p^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} x_p$.

Alors, en faisant tendre m vers l'infini ($x_p^{(m)} \underset{m\to\infty}{\to} x_p$), on a [cf. (1)]

$$|x_p^{(n)} - x_p^{(m)}| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |x_p^{(n)} - x_p| \leqslant \varepsilon$$

et ceci quelque soit le choix de p.

En résumé, on a

(2) $$n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |x_p^{(n)} - x_p| \leqslant \varepsilon, \forall p.$$

Soit $X_0 = \{x_p\}_{p=1}^\infty$ [$|x_p|$ borné car $|x_p| \leqslant |x_p^N| + \varepsilon \leqslant ||X^{(N)}||_\infty + \varepsilon$, donc $X_0 \in l^\infty$]. Alors,

$$X^{(n)} - X_0 = \{x_p^{(n)} - x_p\}_{p=1}^\infty$$

et, par suite,

$$||X^{(n)} - X_0||_\infty = \sup_p |x_p^{(n)} - x_p| \leqslant \varepsilon, \text{ pour } n \geqslant N_N \qquad \text{[cf. (2)].}$$

Autrement dit,

$$X^{(n)} \underset{n\to\infty}{\to} X_0 \in l^\infty.$$

Toute suite de Cauchy dans l^∞ converge dans l^∞. L'ensemble l^∞ est complet.

2° **l_0^∞ est un sous-espace vectoriel de l^∞.**

En effet, on a

$$X = \{x_n\}_1^\infty \text{ et } Y = \{y_n\}_1^\infty \in l_0^\infty \Leftrightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ et } y_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$$
$$\Rightarrow x_n + y_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Leftrightarrow X + Y = \{x_n + y_n\}_1^\infty \in l_0^\infty$$

et

$$X = \{x_n\}_1^\infty \in l_0^\infty \Leftrightarrow x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \lambda x_n \underset{n\to\infty}{\to} 0, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lambda X = \{\lambda x_n\}_1^\infty \in l_0^\infty.$$

Montrons que l_0^∞ est fermé.

Soit $Z = \{z_p\}_{p=1}^\infty$ un élément quelconque de $\overline{l_0^\infty}$. Il existe alors

$$Z^{(n)} = \{z_p^{(n)}\}^\infty{}_{p=1} \in l_0^\infty \qquad \text{tel que} \qquad Z^{(n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Z,$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \qquad \text{tel que} \qquad n \geqslant N \Rightarrow ||Z^{(n)} - Z||_\infty = \sup_p |z_p^{(n)} - z_p| \leqslant \varepsilon.$$

En particulier, pour $n = N$, on a

$$\sup_p |z_p^{(N)} - z_p| \leqslant \varepsilon,$$

ou encore

$$(1) \qquad |z_p^{(N)} - z_p| \leqslant \varepsilon, \quad \forall p.$$

Puisque $Z^{(N)} = \{z_p^{(N)}\}_{p=1}^\infty \in l_0^\infty$, on a $z_p^{(N)} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$, autrement dit,

$$(2) \qquad \exists P(N, \varepsilon) \qquad \text{tel que} \qquad p \geqslant P \Rightarrow |z_p^{(N)}| \leqslant \varepsilon.$$

De (1) et (2), on déduit alors

$$|z_p| \leqslant 2\,\varepsilon, \forall p \geqslant P.$$

Autrement dit, $z_p \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et, par suite, $Z \in l_0^\infty$.

En résumé, on a $Z \in \overline{l_0^\infty} \Rightarrow Z \in l_0^\infty$. L'ensemble l_0^∞ est bien fermé.

4.II.4.

1° On sait que $\mathcal{B}$ possède une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, si on le munit des lois suivantes :

$$f+g : x \mapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x)$$
$$\lambda f : x \mapsto (\lambda f)(x) = \lambda.f(x), \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

Supposons que F soit un Banach, et soit $\{f_n\}_1^\infty$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{B}$. On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \qquad \text{tel que} \qquad m > n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow ||f_n - f_m|| \leqslant \varepsilon,$$

donc

$$(1) \qquad m > n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow ||f_n(t) - f_m(t)||_F \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \in A.$$

Pour chaque *t fixé*, $\{f_n(t)\}_1^\infty$ est une suite de Cauchy dans F complet, donc

$$f_n(t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l(t) \in F.$$

Alors, (1) entraîne (m tendant vers $+\infty$)

$$(2) \qquad n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow ||f_n(t) - l(t)||_F \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \in A.$$

Remarquons que *l appartient à* $\mathcal{B}$ [en effet, on a

$$||l(t)||_F \leqslant ||f_N(t)||_F + ||l(t)-f_N(t)||_F \leqslant ||f_N||+\varepsilon].$$

De (2) nous déduisons

(3) $$n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow ||f_n - l|| \leqslant \varepsilon,$$

c'est-à-dire $f_n \underset{n\to\infty}{\to} l \in \mathcal{B}$. L'ensemble $\mathcal{B}$ est complet; c'est un Banach.

2° $\mathcal{C}_0$ est évidemment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}$.

a) Montrons qu'il est fermé dans $\mathcal{B}$.

Soit $f \in \overline{\mathcal{C}_0}$, $\exists f_n \in \mathcal{C}_0$ tel que $f_n \underset{n\to\infty}{\to} f$;

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow ||f_n - f|| \leqslant \varepsilon,$$

ou encore

(4) $$n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow ||f_n(t) - f(t)||_F \leqslant \varepsilon, \ \forall t \in E.$$

Nous en déduisons que f est continue. En effet, on a

$$f(t')-f(t) = (f(t')-f_N(t'))+(f_N(t')-f_N(t))+(f_N(t)-f(t)),$$

donc

(5) $$||f(t')-f(t)||_F \leqslant \varepsilon + ||f_N(t')-f_N(t)||_F + \varepsilon,$$
[utiliser (4) avec $n = N$]

f_N étant continue, il existe $\alpha(t, \varepsilon) > 0$ tel que

(6) $$d(t', t) \leqslant \alpha \Rightarrow ||f_N(t')-f_N(t)||_F \leqslant \varepsilon \ (d \text{ distance dans } E).$$

De (5) et (6) on déduit alors

$$d(t', t) \leqslant \alpha \Rightarrow ||f(t')-f(t)|| \leqslant 3\,\varepsilon,$$

c'est-à-dire f continue en t, $\forall t \in E$.
Autrement dit, $f \in \mathcal{C}_0$.
En résumé, on a $f \in \overline{\mathcal{C}_0} \Rightarrow f \in \mathcal{C}_0$. L'ensemble $\mathcal{C}_0$ est bien fermé.

b) Conséquence.

$$F \text{ Banach} \Rightarrow \mathcal{B}(E, F) \text{ Banach, donc complet}$$

(d'après la question 1°, avec $A = E$).

$$\mathcal{C}_0(E, F) \text{ fermé dans } \mathcal{B}(E, F) \text{ complet} \Rightarrow \mathcal{C}_0(E, F) \text{ complet.}$$

L'ensemble $\mathcal{C}_0(E, F)$ est bien un Banach.

4.III.1.

On considère l'application $\varphi : x \mapsto \dfrac{\rho x}{1+||x||}$ définie sur E et à valeurs dans $B_\rho(0) = \{x \in E;\ ||x||<\rho\}$.

1° Montrons que φ est bijective.

a) Injection.

$$\varphi(x) = \varphi(x') \Rightarrow ||\varphi(x)|| = ||\varphi(x')||,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\rho x}{1+||x||} = \frac{\rho x'}{1+||x'||} \Rightarrow \frac{\rho||x||}{1+||x||} = \frac{\rho||x'||}{1+||x'||}$$

et, par suite, $||x|| = ||x'||$.
Alors

$$\frac{\rho x}{1+||x||} = \frac{\rho x'}{1+||x'||} \Rightarrow x = x'.$$

b) Surjection.
Formellement,

$$y = \frac{\rho x}{1+||x||} \Rightarrow ||y|| = \frac{\rho||x||}{1+||x||} \Rightarrow ||x|| = \frac{||y||}{\rho-||y||}$$

et, par suite,

$$x = \frac{1+||x||}{\rho}\, y = \frac{y}{\rho-||y||}.$$

Alors, soit y un vecteur quelconque de $B_\rho(0)$ ($\Leftrightarrow ||y||<\rho$). Il est aisé de vérifier que $\varphi\left(\dfrac{y}{\rho-||y||}\right) = y$. L'application φ est bien surjective.

2° Montrons que φ est continue.

Première méthode. — On a

(1) $$||\varphi(x)-\varphi(x')|| = \left\|\frac{\rho x}{1+||x||} - \frac{\rho x'}{1+||x'||}\right\| = \frac{\rho\ ||X||}{(1+||x||)(1+||x'||)} \leqslant \rho||X||,$$

où

$$X = (x-x')+(||x'||x-||x||x').$$

Il est clair que l'on a aussi

$$X = (x-x')+(||x'||-||x||)x+||x||(x-x')$$

donc

(2) $$||x'-x|| \leqslant \varepsilon \Rightarrow ||X|| \leqslant \varepsilon+\varepsilon||x||+||x||\varepsilon$$

$$\left[\text{puisque } \big|\,||x'||-||x||\,\big| \leqslant ||x'-x|| \leqslant \varepsilon\right].$$

Par suite, [cf (1) et (2)]

$$\|x'-x\| \leqslant \varepsilon \Rightarrow \|\varphi(x')-\varphi(x)\| \leqslant \rho(1+2\|x\|)\varepsilon.$$

Autrement dit, φ est continue en x ($\forall x \in E$).

Deuxième méthode. — Soit $\wedge$ une application continue définie par

$$\begin{cases} E \mapsto \mathbb{R}, \\ x \mapsto \wedge(x). \end{cases}$$

Il est clair que la fonction $\begin{cases} E \mapsto E \\ x \mapsto \wedge(x)x \end{cases}$ est continue.

[Écrire $\|x'\wedge(x')-x\wedge(x)\| = \|(\wedge(x')-\wedge(x))x'+\wedge(x)(x'-x)\|$
$\leqslant |\wedge(x')-\wedge(x)|(1+\|x\|)+|\wedge(x)|\|x'-x\|$, pour $\|x'-x\|<1$.]

Ici, la fonction $\wedge : x \mapsto \dfrac{\rho}{1+\|x\|}$ est continue puisqu'elle est le produit de composition des applications continues suivantes :

$$x \mapsto \|x\| \; (E \mapsto \mathbb{R}^+) \qquad \text{et} \qquad u \mapsto \frac{\rho}{1+u} (\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R});$$

donc

$$x \mapsto x\wedge(x) = \frac{\rho x}{1+\|x\|} = \varphi(x)$$

est continue.

3° Montrons que $\varphi^{-1} : x \mapsto \dfrac{x}{\rho-\|x\|}$ (cf. la question 1°) est continue sur son domaine de définition $B_\rho(0)$.

Pour cela, on pourra utiliser l'une ou l'autre des méthodes précédentes. Par exemple, on pourra remarquer que l'application

$$\wedge : x \mapsto \frac{1}{\rho-\|x\|} \qquad (x \in B_\rho(0) \Leftrightarrow \|x\|<\rho)$$

est continue, puisqu'elle est le produit de composition des applications continues

$$x \mapsto \|x\| \; (E \mapsto [0, \rho[) \qquad \text{et} \qquad u \mapsto \frac{1}{\rho-u} ([0, \rho[\mapsto \mathbb{R}).$$

Conclusion.

φ et φ^{-1} continues $\Leftrightarrow$ φ homéomorphisme de E sur $B_\rho(0)$.

4.III.2.

a) i) $\Rightarrow$ ii). — Par hypothèse,

$$\|f(x)\|_F \leqslant K\|x\|_E, \ \forall x \in E.$$

On a évidemment

$$\|f(x)-f(x')\|_F = \|f(x-x')\|_F \leqslant K\|x-x'\|_E,$$

donc

$$||x-x'||_E \leqslant \frac{\varepsilon}{K} \Rightarrow ||f(x)-f(x')||_F \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, f est uniformément continue sur E.

b) ii) $\Rightarrow$ iii). — Évident (l'uniforme continuité entraînant la continuité).

c) iii) $\Rightarrow$ iv). — Évident.

d) iv) $\Rightarrow$ i). — Par hypothèse, f est continue en x_0,
$\forall\varepsilon>0, \exists\alpha(\varepsilon, x_0)>0$ tel que $||x-x_0||_E \leqslant \alpha \Rightarrow ||f(x)-f(x_0)||_F = ||f(x-x_0)||_F \leqslant \varepsilon$,

ou encore (en posant $y = x-x_0$)

$$(1) \qquad ||y||_E \leqslant \alpha \Rightarrow ||f(y)||_F \leqslant \varepsilon.$$

Soit X un vecteur quelconque de E et $Y = \dfrac{\alpha}{||X||_E}X$.
Il est clair que $||Y||_E = \alpha$, donc, d'après (1), on a $||f(Y)||_F \leqslant \varepsilon$,

ou $$\left\|f\left(\frac{\alpha}{||X||_E}X\right)\right\|_F = \left\|\frac{\alpha}{||X||_E}f(X)\right\|_F = \frac{\alpha}{||X||_E}||f(X)||_F \leqslant \varepsilon$$

ou encore

$$||f(X)||_F \leqslant \frac{\varepsilon}{\alpha}||X||_E, \quad \forall X \in E.$$

On peut alors poser $K = \dfrac{\varepsilon}{\alpha}$.

4.III.3.

1° f est une application bilinéaire, donc

$$f(x_1, 0) = f(0, x_2) = f(0, 0) = 0.$$

***a*) Supposons f continue sur $E_1 \times E_2$, donc en (0, 0).**
On peut alors écrire
$\forall\varepsilon>0, \exists\alpha_\varepsilon>0$ tel que $||(x_1, x_2)|| = ||x_1||+||x_2|| \leqslant \alpha \Rightarrow ||f(x_1, x_2)-f(0, 0)|| \leqslant \varepsilon$.

En particulier, on aura

$$||x_1|| \leqslant \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad ||x_2|| \leqslant \frac{\alpha}{2} \Rightarrow ||f(x_1, x_2)|| \leqslant \varepsilon.$$

Soit (y_1, y_2) un élément quelconque de $E_1 \times E_2$, **vérifiant y_1 et y_2 différents de zéro.**

$z_1 = \dfrac{y_1}{||y_1||}\cdot\dfrac{\alpha}{4}$ et $z_2 = \dfrac{y_2}{||y_2||}\cdot\dfrac{\alpha}{4}$ vérifient $||z_1|| \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$ et $||z_2|| \leqslant \dfrac{\alpha}{2}$,

donc

$$||f(z_1, z_2)|| \leqslant \varepsilon,$$

ou encore

$$\frac{\alpha}{4||y_1||}\cdot\frac{\alpha}{4||y_2||}\cdot||f(y_1, y_2)|| \leqslant \varepsilon.$$

De cette dernière inégalité on déduit, en posant $K = \dfrac{16\,\varepsilon}{\alpha^2}$,

$$||f(y_1, y_2)|| \leqslant K||y_1||.||y_2||$$

(majoration qui reste évidemment valable lorsque y_1 ou y_2 vaut 0).

b) **Supposons que** $||f(x_1, x_2)|| \leqslant K||x_1||.||x_2||$.
Soit $a = (a_1, a_2)$ et $h = (h_1, h_2)$, avec $||h_1||$ et $||h_2|| \leqslant 1$. Alors

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) = f(a_1, a_2)+f(a_1, h_2)+f(h_1, a_2)+f(h_1, h_2).$$

Donc

$$||f(a_1+h_1, a_2+h_2)-f(a_1, a_2)|| \leqslant ||f(a_1, h_1)||+||f(h_1, a_2)||+f||(h_1, h_2)||,$$

a fortiori (par hypothèse), nous avons

$$\begin{aligned}||f(a+h)-f(a)|| \leqslant K||a_1||.||h_2||+K||h_1||.||a_2||+K||h_1||\ ||h_2||\\ \leqslant H(||h_1||+||h_2||) = H||h||,\end{aligned}$$

en posant $H = K(||a_1||+||a_2||+1)$.
Autrement dit, f est continu en a, $\forall a \in E_1\times E_2$.

2° Nous avons

$$||f(x_1, x_2)|| \leqslant |||f|||,\ \forall x_1 \text{ et } x_2 \text{ vérifiant } ||x_1|| = ||x_2|| = 1.$$

Soit (y_1, y_2) un élément quelconque de $E_1\times E_2$ **vérifiant y_1 et y_2 différent de zéro.** Alors,

$$z_1 = \frac{y_1}{||y_1||} \text{ et } z_2 = \frac{y_2}{||y_2||} \qquad \text{sont tels que} \qquad ||z_1|| = ||z_2|| = 1$$

et, par suite,

$$||f(z_1, z_2)|| = \frac{1}{||y_1||}\cdot\frac{1}{||y_2||}||f(y_1, y_2)|| \leqslant |||f|||,$$

ou encore

$$||f(y_1, y_2)|| \leqslant |||f|||.||y_1||.||y_2||.$$

(Pour y_1 ou y_2 nul, cette majoration reste évidemment valable.)

4.III.4.

1° *a)* L'application $\rho : x \mapsto \rho(x)$ est continue sur $\mathbb{C}^n$ muni de la norme $||\cdot||$. En effet, soit X et Y tels que

$$X = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \qquad \text{et} \qquad Y = (y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i,$$

où $e_1, e_2, \ldots, e_n$ désigne la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

On a $||X-Y|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$, [ce qui entraîne $|x_i - y_i| \leqslant ||X-Y||$, $\forall i$]

et
$$|\rho(X) - \rho(Y)| \leqslant \rho(X-Y).$$

(Plus usuellement pour une norme notée $||.||_0$, on écrit $\big|\,||a||_0 - ||b||_0\big| \leqslant ||a+b||_0$.)

Alors

$$|\rho(X)-\rho(Y)| \leqslant \rho(X-Y) = \rho\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)e_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \rho[(x_i-y_i)e_i]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \rho(e_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} ||X-Y|| \rho(e_i) = ||X-Y|| \sum_{i=1}^{n} \rho(e_i).$$

L'application est donc bien uniformément continue sur $\mathbb{C}^n$, puisque

$$||X-Y|| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \rho(e_i)}} \Rightarrow |\rho(X) - \rho(Y)| \leqslant \varepsilon.$$

b) $S = \{X \in \mathbb{C}^n ;\ ||X|| = 1\}$ est un *compact*. De plus, il est *connexe* [deux points quelconques de S peuvent être reliés par un chemin appartenant à S].

L'image continue d'un compact est un compact, donc $\rho(S)$ est un compact.

L'image continue d'un connexe est un connexe, donc $\rho(S)$ est un connexe.

En bref, $\rho(S) = [m, M]$ (avec $m \geqslant 0$, puisque ρ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$). Il existe donc

$$X_0 \text{ et } X_1 \in S \qquad \text{tels que} \qquad \rho(X_0) = m \text{ et } \rho(X_1) = M.$$

Si $m = 0$, on aurait $\rho(X_0) = 0$, avec $X_0 \neq 0$ (puisque $||X_0|| = 1$), donc $m > 0$. Par suite, on a

$$0 < m \leqslant \rho(Y) \leqslant M, \qquad \forall Y \in S.$$

Soit $X \in \mathbb{C}^n - \{0\}$, alors $\dfrac{X}{||X||} \in S$,

donc

$$m \leqslant \rho\left(\frac{X}{||X||}\right) = \frac{1}{||X||}\rho(X) \leqslant M,$$

ou encore

$$(1) \qquad m||X|| \leqslant \rho(X) \leqslant M||X||,\ \forall X \in \mathbb{C}^n,$$

m et M étant des constantes strictement positives (pour $X = 0$, cette inégalité restant évidemment valable).

c) La relation (1) exprime que ρ et $||.||$ sont des normes équivalentes. Autrement dit, toute norme définie sur $\mathbb{C}^n$ est équivalente à $||.||$.

2° Soit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, F)$, il faut montrer que L est continue. Ce qui revient à démontrer que l'on a

$$|||L||| = \sup_{X \in C^n - \{0\}} \left\{ \frac{||LX||_F}{||X||} \right\} < \infty.$$

Soit $X = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On aura $||X||^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$, [ce qui nécessite $|x_i| \leqslant ||X||, \forall i$]

et
$$LX = \sum_{i=1}^{n} x_i L e_i.$$

Par suite, on en déduit

$$||LX||_F \leqslant \sum_{i=1}^{n} ||x_i L e_i||_F = \sum_{i=1}^{n} |x_i|.||Le_i||_F \leqslant \sum_{i=1}^{n} ||X||.||Le_i||_F = K||X||,$$

(en posant $K = \sum_{i=1}^{n} ||Le_i||_F$),

ou encore
$$|||L||| \leqslant K.$$

On a bien $|||L||| < \infty$, *c'est-à-dire que L est continue.*
En résumé, on a
$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^n, F) = \mathcal{L}_c(\mathbb{C}^n, F).$$

4.IV.1.

L'espace E étant défini sur $\mathbb{R}$, le produit scalaire est à valeurs dans $\mathbb{R}$; par suite,
$$<X, Y> = \overline{<Y, X>} = <Y, X>.$$

On a alors
$$||X+Y||^2 = <X+Y, X+Y> = <X, X> + <X, Y> + <Y, X> + <Y, Y>,$$

ou encore

(1) $$||X+Y||^2 = ||X||^2 + 2<X, Y> + ||Y||^2.$$

En changeant Y en $-Y$ dans (1), on obtient la relation

(2) $$||X-Y||^2 = ||X||^2 - 2<X, Y> + ||Y||^2.$$

Les relations (1) et (2) entraînent alors la relation suivante :
$$||X+Y||^2 + ||X-Y||^2 = 2||X||^2 + 2||Y||^2.$$

(Relation qui caractérise les normes associées à un produit scalaire.)

4.IV.2.

Formons $||X+Y||^2$, on obtient

$$||X+Y||^2 = <X+Y, X+Y> = <X, X>+<X, Y>+<Y, X>+<Y, Y>,$$

ou

$$||X+Y||^2 = ||X||^2+<X, Y>+\overline{<X, Y>}+||Y||^2,$$

ou encore

$$(1) \qquad ||X+Y||^2 = ||X||^2+2\,\mathfrak{Re}<X, Y>+||Y||^2.$$

Il est clair que l'on a

$$<X, -Y> = \overline{(-1)}<X, Y> = -<X, Y>,$$

donc

$$\mathfrak{Re}<X, -Y> = -\mathfrak{Re}<X, Y>.$$

Si l'on change Y en $-Y$ dans (1), on obtient alors

$$(2) \qquad ||X-Y||^2 = ||X||^2-2\,\mathfrak{Re}<X, Y>+||Y||^2.$$

Les relations (1) et (2) entraînent alors la relation suivante :

$$||X+Y||^2+||X-Y||^2 = 2||X||^2+2||Y||^2,$$

relation qui caractérise les normes associées aux produits scalaires.

4.IV.3.

1° Rappelons l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|<X, Y>| \leqslant ||X||.||Y||.$$

On a

$$\varphi_X(Y')-\varphi_X(Y) = <X, Y'>-<X, Y> = <X, Y'-Y>$$

et, par suite,

$$|\varphi_X(Y')-\varphi_X(Y)| = |<X, Y'-Y>| \leqslant ||X||.||Y'-Y||.$$

Alors,

$$||Y'-Y|| \leqslant \varepsilon \Rightarrow |\varphi_X(Y')-\varphi_X(Y)| \leqslant \varepsilon\, ||X||.$$

La fonction φ_X est bien uniformément continue sur E. On fera le même raisonnement pour ψ_Y.

2° Soit $Z = (X, Y)$ et $Z' = (X', Y')$ deux vecteurs de $E \times E$, formons la différence de Z et de Z' :

$$Z' - Z = (X' - X, Y' - Y) \qquad \text{et} \qquad \|Z' - Z\|_{E\times E} = \|X' - X\| + \|Y' - Y\|.$$

On a

$$h(Z') - h(Z) = \langle X', Y'\rangle - \langle X, Y\rangle = \langle X', Y'\rangle - \langle X', Y\rangle + \langle X', Y\rangle - \langle X, Y\rangle,$$

ou encore

$$h(Z') - h(Z) = \langle X', Y' - Y\rangle + \langle X' - X, Y\rangle.$$

Par suite, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit

$$|h(Z') - h(Z)| \leqslant \|X'\|.\|Y' - Y\| + \|X' - X\|.\|Y\|.$$

Alors, pour

$$\|Z' - Z\|_{E\times E} = \|X' - X\| + \|Y' - Y\| \leqslant \varepsilon$$

on a

$$|h(Z') - h(Z)| \leqslant (\|X\| + \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon\|Y\| \leqslant \varepsilon(\|X\| + \|Y\| + 1), \text{ si } 0 < \varepsilon < 1.$$

Autrement dit, h est continue en Z, $\forall Z \in E \times E$.

Supposons h uniformément continue sur $E \times E$.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha(\varepsilon) \text{ tel que } \|Z' - Z\|_{E\times E} = \|X' - X\| + \|Y' - Y\| \leqslant \alpha$$
$$\Rightarrow |h(Z') - h(Z)| = |\langle X', Y'\rangle - \langle X, Y\rangle| \leqslant \varepsilon.$$

En particulier, pour $Y' = Y$, on a

(1) $$\|X' - X\| \leqslant \alpha \Rightarrow |\langle X' - X, Y\rangle| \leqslant \varepsilon, \ \forall Y \in E.$$

Soit Y_0, choisi arbitrairement dans E, la relation (1) entraîne donc

$$\|X' - X\| \leqslant \alpha \Rightarrow |\langle X' - X, \lambda Y_0\rangle| = \lambda|\langle X' - X, Y_0\rangle| \leqslant \varepsilon, \ \forall \lambda \text{ réel } > 0.$$

Ceci n'est possible que si l'on a $\langle X' - X, Y_0\rangle = 0$, et cela quel que soit le choix de Y_0 dans E. Le vecteur $X' - X$, étant orthogonal à tout vecteur de E, est nécessairement nul.

En résumé, $\|X' - X\| \leqslant \alpha \Rightarrow X' = X$, propriété évidemment *fausse* dans un E.V.N.

$$\left(X' = X + \alpha\frac{u}{2\|u\|} \text{ vérifie } \|X' - X\| \leqslant \alpha, \ \forall u \in E\right).$$

La fonction h ne peut donc être uniformément continue sur $E \times E$.

4.IV.4.

Il faut s'assurer que $\langle\,,\,\rangle_H$ satisfait bien aux axiomes des produits scalaires. Ceci est aisé à vérifier.

La norme associée est alors donnée par la relation suivante :

$$\|X\|_H^2 = \langle X, X\rangle = \|x_1\|_{H_1}^2 + \|x_2\|_{H_2}^2, \qquad X = (x_1, x_2).$$

Nous constatons que la norme associée $||.||_H$ est la norme usuelle de l'espace produit $H_1 \times H_2$, où H_i $(i = 1, 2)$ est un Hilbert, (donc un Banach) pour la norme $||.||_{Hi}$ associée à $< , >_{Hi}$.
Un produit fini de Banach est un Banach, donc $H = H_1 \times H_1$ est un Banach pour cette norme $||.||_H$.

En résumé, l'espace H muni du produit scalaire $< , >_H$ est complet pour la norme associée $||.||_H$; c'est donc un Hilbert.
Ceci se généralise évidemment à un produit fini d'Hilbert $H = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_n$, où

$$<X, Y>_H = \sum_{i=1}^{n} <x_i, y_i>_{Hi}.$$

4.IV.5.

1° *a*) Si l'on a $\varphi_Y(X) = <AX, Y>$, on a donc

$$\varphi_Y(X') - \varphi_Y(X) = <A(X'-X), Y>$$

et, par suite,

$$|\varphi_Y(X') - \varphi_Y(X)| \leqslant ||A(X'-X)||.||Y|| \leqslant |||A|||.||X'-X||.||Y||.$$

Alors, si $||X'-X|| \leqslant \varepsilon$, on en déduit

$$||\varphi_Y(X') - \varphi_Y(X)|| \leqslant |||A|||.||Y||\varepsilon.$$

Autrement dit, la forme linéaire φ_Y est continue : $\varphi \in H'$.
Du théorème fondamental, on déduit l'existence d'un vecteur Z tel que l'on a

$$\varphi_Y(X) = <X, Z>,$$

Z dépendant du choix de Y, on le notera A^*Y et, par suite,

$$<AX, Y> = <X, A^*Y>, \ \forall X \in H.$$

***b*) Soit Y_1 et Y_2 deux vecteurs donnés.**
On aura

$$<AX, Y_1 + Y_2> = <X, A^*(Y_1 + Y_2)>, \ \forall X \in H.$$

Or

$$<AX, Y_1 + Y_2> = <AX, Y_1> + <AX, Y_2> = <X, A^*Y_1> + <X, A^*Y_2>,$$

donc

$$<X, A^*(Y_1 + Y_2)> = <X, A^*Y_1> + <X, A^*Y_2>, \ \forall X \in H.$$

Soit $Z = A^*(Y_1 + Y_2) - A^*Y_1 - A^*Y_2$, de la relation précédente on déduit

$$<X, Z> = 0, \ \forall X \in H.$$

En particulier, pour $X = Z$, on a
$$<Z, Z> = ||Z||^2 = 0 \Leftrightarrow Z = 0,$$
ou encore
$$A^*(Y_1 + Y_2) = A^*Y_1 + A^*Y_2.$$

Soit Y un vecteur donné et λ un scalaire donné.
Par définition, on a
$$<AX, \lambda Y> = <X, A^*(\lambda Y)>, \ \forall X \in H.$$
Or
$$<AX, \lambda Y> = \overline{\lambda}<AX, Y> = \overline{\lambda}<X, A^*Y> = <X, \lambda A^*Y>,$$
donc
$$<X, A^*(\lambda Y)> = <X, \lambda A^*Y>, \ \forall X \in H.$$

Soit $Z = A^*(\lambda Y) - \lambda A^*Y$, on déduit, alors, de la relation précédente,
$$<X, Z> = 0, \ \forall X \in H,$$
et, par suite (en faisant $X = Z$),
$$Z = A^*(\lambda Y) - \lambda A^*Y = 0.$$

Nous venons de vérifier que $A^* \in \mathfrak{L}(H)$, ensemble des endomorphismes de H.

Montrons que A^* est continue. ($\Leftrightarrow |||A^*||| < \infty$).
Sachant que l'on a
$$<AX, Y> = <X, A^*Y>, \ \forall X \text{ et } Y \in H,$$
pour $X = A^*Y$ on aura
$$<AA^*Y, Y> = <A^*Y, A^*Y> = ||A^*Y||^2, \ \forall Y \in H,$$
et, par suite (inégalité de Cauchy-Schwarz),
$$||A^*Y||^2 = |<AA^*Y, Y>| \leqslant ||A(A^*Y)||.||Y|| \leqslant |||A|||.||A^*Y||.||Y||.$$

Ceci entraîne que l'on a
$$||A^*Y|| \leqslant |||A|||.||Y||, \ \forall Y \in H,$$
et, par suite, la relation

(1) $$|||A^*||| = \sup_{y \in H - \{0\}} \left\{ \frac{||A^*Y||}{||Y||} \right\} \leqslant |||A|||,$$

$|||A^*|||$ étant borné, A^* est donc continue.

c) Il résulte de la définition de l'opérateur adjoint que l'on a
$$<A^*X, Y> = <X, (A^*)^*Y>, \ \forall X \text{ et } Y \in H.$$

En utilisant la propriété de la symétrie hermitique des produits scalaires, on obtient
$$<A^*X, Y> = \overline{<(A^*)^*Y, X>}, \ \forall X \text{ et } Y \in H.$$
Or
$$<A^*X, Y> = \overline{<Y, A^*X>} = \overline{<AY, X>}, \ \forall X \text{ et } Y \in H;$$

[la première égalité résulte de la propriété de symétrie hermitique des produits scalaires, la seconde résulte du fait que

$$<AY, X> = <Y, A^*X>, \ \forall X \text{ et } Y \in H].$$

On déduit

$$<(A^*)^*Y, X> = <AY, X>, \ \forall X \text{ et } Y \in H,$$

ou encore

$$<(A^*)^*Y - AY, X> = 0, \ \forall X \text{ et } Y \in H.$$

Pour $X = (A^*)^*Y - AY$, on obtient $||(A^*)^*Y - AY|| = 0$ et, par suite,

$$(A^*)^*Y = AY, \ \forall Y \in H,$$

c'est-à-dire $(A^*)^* = A$.

D'après la relation (1), on a $|||A^*||| \leqslant |||A|||$. En appliquant cette majoration à l'opérateur A^* on obtient

$$|||(A^*)^*||| \leqslant |||A^*|||,$$

ou encore la relation

(2) $$|||A||| \leqslant |||A^*||| \text{ (puisque } (A^*)^* = A).$$

En associant (1) et (2), on obtient bien $|||A^*||| = |||A|||$.

2° Puisque l'opérateur A est caractérisé par la matrice carrée (a_{ij}) dans la base canonique, on aura

$$AX = (x'_1, \ldots, x'_n), \qquad \text{où} \qquad x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,$$

et, par suite, on en déduit

$$<AX, Y> = \sum_{i=1}^{n} x'_i\bar{y}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\bar{y}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\bar{y}_i.$$

Soit $\tilde{B} = (a^*_{ij})$, où $a^*_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

Cette matrice $\tilde{B}$ caractérise un opérateur B dans la base canonique et l'on a

$$<X, BY> = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{\left(\sum_{j=1}^{n} a^*_{ij}y_j\right)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \overline{a^*_{ij}}x_i\bar{y}_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_i\bar{y}_j,$$

ou encore (i et j étant des indices muets de sommation, i sera noté j et j sera noté i)

$$<X, BY> = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\bar{y}_i.$$

On constate que

$$<AX, Y> = <X, BY>, \ \forall X \text{ et } Y \in \mathbb{C}^n = H, \text{ donc } B = A^*.$$

En résumé, l'opérateur A^* est caractérisé par la matrice a^*_{ij} (où $a^*_{ij} = \bar{a}_{ji}$) dans la base canonique.

4.IV.6.

1° Soit $X=(x_1, \ldots, x_n)$ et $Y=(y_1, \ldots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{C}^n$, alors

$$AX = (x'_1, \ldots, x'_n), \qquad \text{où} \qquad x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,$$

et, par suite,

$$<AX, Y> = \sum_{i=1}^{n} x'_i\bar{y}_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)\bar{y}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\bar{y}_i.$$

De même, on a

$$A^*Y = (y'_1, \ldots, y'_n), \qquad \text{où} \qquad y'_i = \sum_{j=1}^{n} a^*_{ij}y_j,$$

donc on peut écrire

$$<X, A^*Y> = \sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}'_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\overline{\left(\sum_{j=1}^{n} a^*_{ij}y_j\right)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ji}x_i\bar{y}_j$$

(puisque $\overline{a^*_{ij}} = a_{ji}$).

i et j étant des indices muets de sommation, i sera noté j et j sera noté i dans cette dernière relation. Donc on obtient

$$<X, A^*Y> = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\bar{y}_i$$

et, par suite, on en déduit

$$<X, A^*Y> = <AX, Y>, \quad \forall X \text{ et } Y \in \mathbb{C}^n.$$

On a

$$(A-\bar{\lambda}I)^* = A^*-(\bar{\lambda}I)^* = A^*-\lambda I^* = A^*-\lambda I,$$

donc

$$\mathcal{P}_{A^*}(\lambda) = \text{dét}\,[A^*-\lambda I] = \text{dét}\,[(A-\bar{\lambda}I)^*] = \text{dét}\,\overline{[A-\bar{\lambda}I]} = \overline{\mathcal{P}_A(\bar{\lambda})}.$$

2° On suppose maintenant que $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$, donc $a_{ij} = a^*_{ij}$ et, par suite, $A = A^*$.

a) Puisque $A = A^*$, on aura

$$<AX, Y> = <X, A^*Y> = <X, AY>,$$

ou

(1) $$<AX, Y> = <X, AY>, \quad \forall X \text{ et } Y \in \mathbb{C}^n.$$

Donc, on en déduit la relation

(2) $$<AV_i, V_i> = <V_i, AV_i> \qquad (V_i \text{ est vecteur propre}),$$

V_i étant vecteur propre, on aura $AV_i = \lambda_i V_i$, avec $V_i \neq 0$.

La relation (2) entraîne alors

$$<\lambda_i V_i, V_i> = <V_i, \lambda_i V_i>,$$

ou encore

$$\lambda_i<V_i, V_i> = \bar{\lambda_i}<V_i, V_i> \quad (\Leftrightarrow \lambda_i||V_i||^2 = \bar{\lambda}_i||V_i||^2).$$

De cette relation, on déduit que l'on a $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$, c'est-à-dire que λ_i est réel.

b) Compte tenu de la relation (1) (puisque A est hermitien), on a

$$<AV_i, V_j> = <V_i, AV_j>.$$

Or $AV_i = \lambda_i V_i$ et $AV_j = \lambda_j V_j$, donc

$$<\lambda_i V_i, V_j> = <V_i, \lambda_j V_j>.$$

Puisque λ_i et λ_j sont réels (cf. la question 2°, *a*), on déduit de la relation précédente

$$(\lambda_i - \bar{\lambda}_j)<V_i, V_j> = (\lambda_i - \lambda_j)<V_i, V_j> = 0$$

et, par suite,

$$\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow <V_i, V_j> = 0,$$

c'est-à-dire que V_i et V_j sont orthogonaux.

c) Supposons que (a_{ij}) soit réelle et symétrique ($a_{ij} = a_{ji}$).

Si a_{ij} est réelle et symétrique, on a alors

$$a_{ij}^* = \bar{a}_{ji} = a_{ji} = a_{ij},$$

donc $A^* = A$. L'opérateur A est hermitien. Ses valeurs propres sont donc réelles et ses vecteurs propres orthogonaux.

4.IV.7.

a) Soit e_i et e_j deux vecteurs orthogonaux de $\mathbb{C}^n$: $<e_i, e_j> = 0$.

Donc $<Pe_i, Pe_j> = <e_i, e_j> = 0$. Les vecteurs $\varepsilon_1 = P(e_1)$ et $\varepsilon_2 = P(e_2)$ sont bien orthogonaux.

b) On a

$$<X, Y> = <PX, PY> = <X, P^*(PY)>, \qquad \forall X \text{ et } Y \in \mathbb{C}^n,$$

donc, en posant $Z = P^*PY - Y$, on obtient

$$<X, Z> = 0, \qquad \forall X \in \mathbb{C}^n.$$

Pour $X = Z$, on obtient $||Z|| = 0 \Leftrightarrow Z = 0$, et, par suite,

$$PP^*Y = Y, \qquad \forall Y \in \mathbb{C}^n.$$

Autrement dit, $PP^* = I$.

P est donc inversible et $P^{-1} = P^*$.

De la relation $I = PP^*$, on déduit

$$\text{dét}\,(I) = \text{dét}\,(P)\,\text{dét}\,(P^*) = \text{dét}\,(P)\,\overline{\text{dét}\,(P)} = |\text{dét}\,P|^2$$

et, par suite, $|\text{dét}\,(P)| = 1$.

4.IV.8.

a) L'application $\varphi : X \to \text{dét}\,(V_1, V_2, \ldots, V_{n-1}, X)$ est une forme linéaire et continue sur $\mathbb{R}^n$ [la continuité peut se déduire de la majoration suivante :

$$|\varphi(X)| = |\text{dét}\,(V_1, \ldots, V_{n-1}, X)| \leqslant ||V_1|| \ldots ||V_{n-1}|| . ||X||,$$

où

$$||(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2}].$$

Du théorème fondamental 4.IV.1., on déduit l'existence d'un vecteur unique V_n tel que

$$\varphi(X) = \text{dét}\,(V_1, \ldots, V_{n-1}, X) = <X, V_n>, \qquad \forall X \in \mathbb{R}^n.$$

b) Soit les vecteurs V_p suivants :

$$V_1 = (a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}),\ V_2 = (a_{2,1}, \ldots, a_{2,n}), \ldots, V_{n-1} = (a_{n-1,1}, \ldots, a_{n-1,n}).$$

On aura

$$\text{dét}\,(V_1, \ldots, V_{n-1}, X) = \begin{bmatrix} a_{1,1}, & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n-1,1}, & \ldots & a_{n-1,n} \\ x_1 & \ldots\ldots\ldots & x_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i A_{i,n}$$

(en développant le déterminant suivant sa dernière ligne).

On obtient donc

$$\text{dét}\,(V_1, \ldots, V_{n-1}, X) = <X, V_n>, \text{ si } V_n = (A_{1,n}, \ldots, A_{n,n}).$$

Conséquence. — Les composantes de $V_n = V_1 \wedge V_2 \wedge \ldots \wedge V_{n-1}$, dans la base canonique, sont les mineurs du déterminant relatifs à la dernière ligne.

4.IV.9.

a) Supposons que X_0 soit orthogonal à tout vecteur Y de H, on a donc

$$<X_0, Y> = 0, \qquad \forall Y \in H.$$

En particulier, pour $Y = X_0$, on obtient

$$<X_0, X_0> = ||X_0||^2 = 0 \Leftrightarrow X_0 = 0.$$

b) Supposons que

$$<X_0, Y> = 0, \qquad \forall Y \in A.$$

Soit un vecteur Z tel que $Z \in H$. Puisque
$$\bar{A} = H, \exists Y_n \in A \quad \text{tel que} \quad Y_n \underset{n\to\infty}{\to} Z,$$
on en déduit que l'on a
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow \|Y_n - Z\| \leqslant \varepsilon.$$

Alors (puisque $<X_0, Y_n> = 0$),
$$<X_0, Z> = <X_0, Y_n> + <X_0, Z-Y_n> = <X_0, Z-Y_n>$$
et, par suite,
$$|<X_0, Z>| = |<X_0, Z-Y_n>| \leqslant \|X_0\| . \|Z-Y_n\| \leqslant \varepsilon\|X_0\|$$
[prendre $n \geqslant N(\varepsilon)$].

ε étant arbitraire, on a nécessairement $<X_0, Z> = 0$.

En résumé,
$$<X_0, Z> = 0, \qquad \forall Z \in H.$$

De la question *a*, on déduit que l'on a $X_0 = 0$.

4.IV.10.

a) Supposons que l'on ait
$$<X_n, X> \underset{n\to\infty}{\to} <Y_0, X>, \qquad \forall X \in H \qquad \textit{et} \qquad \|X_n\| \underset{n\to\infty}{\to} \|Y_0\|.$$
On a
$$\|X_n - Y_0\|^2 = <X_n - Y_0, \quad X_n - Y_0> = \|X_n\|^2 + \|Y_0\|^2 - <X_n, Y_0> - <Y_0, X_n>.$$

Étudions successivement la limite de chacun des termes figurant au second membre de cette relation; on obtient
$$\|X_n\|^2 \underset{n\to\infty}{\to} \|Y_0\|^2 \text{ (puisque } \|X_n\| \underset{n\to\infty}{\to} \|Y_0\|),$$
$$<X_n, Y_0> \underset{n\to\infty}{\to} <Y_0, Y_0> = \|Y_0\|^2,$$
$$<Y_0, X_n> = <X_n, Y_0> \underset{n\to\infty}{\to} <Y_0, Y_0> = \|Y_0\|^2.$$
On en déduit donc que l'on a
$$\|X_n - Y_0\|^2 \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

b) Supposons que l'on a *it* $X_n \underset{n\to\infty}{\to} Y_0$, c'est-à-dire $\|X_n - Y_0\| \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

D'une part, on a
$$\Big| \|X_n\| - \|Y_0\| \Big| \leqslant \|X_n - Y_0\| \text{ (puisque } \Big| \|a\| - \|b\| \Big| \leqslant \|a+b\|),$$
donc
$$\Big| \|X_n\| - \|Y_0\| \Big| \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

ou encore

$$||X_n|| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} ||Y_0||;$$

d'autre part,

$$|<X_n, X> - <Y_0, X>| = |<X_n - Y_0, X>| \leqslant ||X_n - Y_0||.||X||$$

et, par suite,

$$\Big|<X_n, X> - <Y_0, X>\Big| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0,$$

ou encore

$$<X_n, X> \underset{n\to\infty}{\rightarrow} <Y_0, X>, \qquad \forall X \in H.$$

5. SÉRIES NUMÉRIQUES

I. — GÉNÉRALITÉS SUR LES SÉRIES.

1° Définition d'une série. – Soit $\{u_n\}_0^\infty$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le tableau formel qui s'en déduit,

$$u_0 \boldsymbol{+} u_1 \boldsymbol{+} u_2 \boldsymbol{+} \dots \boldsymbol{+} u_n \boldsymbol{+} \dots,$$

est appelé série de terme général u_n et sera noté $(u_n)_0$.

(On fera la distinction entre le symbole $\boldsymbol{+}$ employé ici et le symbole $+$ de l'addition usuelle!)

A partir de ce tableau on définit la **suite des sommes partielles**

$$S_0 = u_0, \quad S_1 = u_0 + u_1, \quad \dots, \quad S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p.$$

Deux cas sont à envisager :

i) La suite $\{S_n\}_0^\infty$ converge

$$S_n \underset{n\to\infty}{\to} S.$$

On dit alors que la série $(u_n)_0$ est convergente et a pour somme S.
On note

$$S = \sum_{p=0}^{\infty} u_p, \qquad \text{ou encore} \qquad S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

ii) La suite $\{S_n\}_0^\infty$ diverge.

On dit alors que la série $(u_n)_0$ est divergente.

Plus généralement, on peut définir la série

$$u_\nu \boldsymbol{+} u_{\nu+1} \boldsymbol{+} \cdots \boldsymbol{+} u_n \boldsymbol{+} \cdots$$

que l'on notera $(u_n)_\nu$, ainsi que la suite $\{S_n\}_\nu^\infty$ associée : $S_n = \sum_{p=\nu}^{n} u_p$, et s'il y a lieu la somme S notée $S = \sum_{\nu}^{\infty} u_n$.

2° Premiers exemples.

a) Série géométrique $a+aq+aq^2+\ldots+aq^n+\ldots$ $(a \neq 0)$. — La suite associée des sommes partielles s'écrit $S_n = a\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Suivant la valeur de q on obtient les deux cas suivants :

i) $|q|<1$. — La série est convergente car on a

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

Autrement dit,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a+aq+\ldots+aq^n+\ldots = \frac{a}{1-q}.$$

ii) $|q| \geqslant 1$. — La série est divergente.

b) Série de terme général $u_n = \varphi_{n+1}-\varphi_n$ $(n \geqslant 0)$. — Alors $S_n = \varphi_{n+1}-\varphi_0$. La suite $\{\varphi_n\}_0^\infty$ et la série $(u_n)_0$ sont donc de même nature.

De plus

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n = l \Leftrightarrow (u_n)_0 \text{ est convergente et } S = l - \varphi_0.$$

On écrit alors

$$l-\varphi_0 = u_0+u_1+\ldots+u_n+\ldots = \sum_0^\infty u_n.$$

3° Cas d'une somme finie. — Une somme finie $u_0+u_1+u_2+\ldots+u_{n_0}$ peut toujours être considérée comme la somme de la série convergente suivante :

$$u_0+u_1+\ldots+u_{n_0}+0+\ldots+0+\ldots$$

4° Premiers critères de convergence.

i) *Condition nécessaire*

$$(u_n)_\nu \text{ convergente} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

ii) *Condition nécessaire et suffisante*

$$(u_n)_\nu \text{ convergente} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \forall \varepsilon>0,\ \exists N(\varepsilon) \text{ tels que } m \geqslant n \geqslant N(\varepsilon) \\ \Rightarrow \left|u_n+u_{n+1}+\ldots+u_m\right| \leqslant \varepsilon. \end{array}\right.$$

5° Remarque. — Pour étudier la nature d'une série on peut *négliger un nombre fini* de termes. Autrement dit, les deux séries $(u_n)_\nu$ et $(u_n)_\mu$ sont simultanément convergentes ou divergentes.

Ceci justifie la notation (u_n) au lieu de $(u_n)_0$ ou $(u_n)_\nu$ lorsqu'il s'agit d'étudier la nature d'une série.

En posant

$$S = \sum_{p=0}^{\infty} u_p, \qquad S_m = \sum_{p=0}^{m} u_p, \qquad R_m = \sum_{p=m+1}^{\infty} u_p,$$

on aura pour une série convergente

$$S = S_m + R_m.$$

II. — SÉRIES A TERMES POSITIFS.

1° Définition. — Une série de terme général u_n est dite à termes positifs lorsque $u_n \geqslant 0$, $\forall n \geqslant \nu$. Alors la suite associée $\{S_n\}$ est nécessairement une suite croissante et l'on en déduit

$$S_n \text{ borné} \Leftrightarrow (u_n) \text{ convergente.}$$

2° Théorème 5.II.1. (Théorème de comparaison). — Soit $(u_n)_\nu$ et $(v_n)_\nu$ deux séries à termes positifs.

i) Si $\forall n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant K v_n$ (K est une constante positive), alors

$$(v_n) \text{ convergente} \Rightarrow (u_n) \text{ convergente}$$

$$\text{et } (u_n) \text{ divergente} \Rightarrow (v_n) \text{ convergente.}$$

ii) Si $\forall n \geqslant n_0$, $\exists a$ et b, constantes positives, telles que $a \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant b$, alors

$$(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont de même nature.}$$

iii) Si $u_n \sim v_n$, alors

$$(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont de même nature.}$$

Conséquence de i)*:*

Si $\forall n \geqslant n_0 : \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ les résultats de i) s'appliquent.

3° Règle de d'Alembert. — Soit (u_n) une série à termes positifs; on considère le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Lorsque celui-ci satisfait à l'une des conditions indiquées ci-dessous, on peut connaître la nature de la série (u_n).

a) Utilisation de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

i) $\forall n \geqslant n_0, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant K$, avec $K<1$, $\Rightarrow (u_n)$ convergente.

Dans ce cas, on a

$$0 \leqslant R_n \leqslant \frac{Ku_n}{1-K}.$$

ii) $\forall n \geqslant n_0, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \Rightarrow (u_n)$ divergente.

b) Utilisation de $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ***(lorsqu'elle existe).***

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, avec $l<1$, $\Rightarrow (u_n)$ convergente.

jj) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, avec $l>1$, $\Rightarrow (u_n)$ divergente.

Dans le cas où $l = 1$ on ne peut conclure.

Exemple : Considérons la série $\left(\dfrac{1}{n!}\right)_0$.

On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0, \text{ donc } l = 0;$$

La série est convergente. Sa somme vaut e.

La règle de d'Alembert est surtout utile lorsque u_n se présente sous forme d'un produit, sinon son intérêt est limité.

4° Règle de Cauchy. — Soit (u_n) une série à termes positifs, on considère l'expression $\sqrt[n]{u_n}$. Lorsque celle-ci satisfait à l'une des conditions indiquées ci-dessous, on peut connaître la nature de la série (u_n).

a) Utilisation de $\sqrt[n]{u_n}$.

i) $\forall n \geqslant n_0, \sqrt[n]{u_n} \leqslant K, \quad K<1, \Rightarrow (u_n)$ convergente.

Dans ce cas on a

$$0 \leqslant R_n \leqslant \frac{K^{n+1}}{1-K}.$$

ii) $\forall n \geqslant n_0, \sqrt[n]{u_n} \geqslant 1 \Rightarrow (u_n)$ divergente.

b) Utilisation de **lim** $\sqrt[n]{u_n}$ *(quand elle existe).*

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, avec $l<1 \Rightarrow (u_n)$ convergente.

jj) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, avec $l>1 \Rightarrow (u_n)$ divergente.

Dans le cas où $l = 1$ on ne peut conclure.

Remarque. — Lorsque $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite l, pour $n\to+\infty$, alors $\sqrt[n]{u_n}$ admet la même limite. (Comparer II, 3°, *b* et II, 4°, *b*.)

Exemple :

Série de terme général $u_n = \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{-n^2}, n \geqslant 1.$

Dans ce cas, $\sqrt[n]{u_n} = \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{-n} = e^{-n\,\mathrm{Log}\left(\frac{1+a}{n}\right)},$

donc

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = e^{-a}.$$

— Pour $a>0$, on a $l<1$, donc (u_n) convergente.
— Pour $a<0$, on a $l>1$, donc (u_n) divergente.
— Pour $a = 0$, $u_n = 1$, ne tend donc pas vers 0 : (u_n) divergente.

5° Nature comparée d'une série à termes positifs et d'une intégrale.

a) Soit une application $g : (a, \infty) \mapsto \mathbb{R}_+$ supposée intégrable dans tout intervalle (a, X) où $X \geqslant a$. L'expression $\int_a^X g(x)dx$ est positive et croît avec X. Elle admet donc une limite λ (éventuellement égale à $+\infty$) que nous noterons $\overset{*}{\int_a^{+\infty}} g(x)dx \left[\text{ou} \int_a^{+\infty} g(x)dx\right]$.

Lorsque $\lambda < \infty$ on dit que l'intégrale $\overset{*}{\int_a^{+\infty}} g(x)dx$ est convergente; si $\lambda = \infty$ l'intégrale $\overset{*}{\int_a^{+\infty}} g(x)dx$ est dite divergente.

b) Considérons maintenant une série à termes positifs (u_n). — Supposons qu'il existe une application $f : (a, \infty) \mapsto \mathbb{R}_+$ *décroissante* et telle que, $\forall \boldsymbol{n} \geqslant \boldsymbol{n}_0$, $\boldsymbol{f(n) = u_n}$. Alors la série (u_n) et l'intégrale $\overset{*}{\int_a^{+\infty}} f(x)dx$ sont de même nature.

c) Application. — La série

$$1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\dots+\frac{1}{n^\alpha}+\dots$$

converge pour $\alpha>1$, diverge pour $\alpha \leqslant 1$. En effet, si $\alpha \leqslant 0$, u_n ne tend pas vers 0, d'où la divergence; si $\alpha>0$, on peut comparer la nature de $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ et celle de * $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}$, d'où le résultat.

En particulier, la série harmonique ($\alpha = 1$) est divergente.

III. — SÉRIES A TERMES RÉELS, DE SIGNE QUELCONQUE, OU A TERMES COMPLEXES.

1° Convergence absolue.

a) Définition. — A la série

$$u_0+u_1+\dots+u_n+\dots$$

on associe la série

$$|u_0|+|u_1|+\dots+|u_n|+\dots$$

Lorsque la série $(|u_n|)$ converge, on dit que la série (u_n) est absolument convergente. (En abrégé A.C.)

b) Théorème 5.III.1. $(|u_n|)$ ***convergente*** $\Rightarrow$ (u_n) ***convergente.*** — L'absolue convergence entraîne la convergence. *L'intérêt fondamental* de ce théorème réside dans le fait que l'on peut appliquer les propriétés du paragraphe 2. à la série $(|u_n|)$ qui est à termes positifs.

c) Propriété. — Une série absolument convergente est commutativement convergente, c'est-à-dire que toute série obtenue à partir de la série donnée par une permutation quelconque des termes est A.C. et a la même somme.

(Cette propriété est vraie, en particulier, pour une série à termes positifs convergente.)

Exemple :

Soit la série

$$\sin 1+\frac{\sin 2}{2^2}+\dots+\frac{\sin n}{n^2}+\dots$$

On a

$$|u_n| = \frac{|\sin n|}{n^2}\leqslant\frac{1}{n^2} = v_n.$$

(v_n) converge (utiliser II, 5°, avec $\alpha = 2$), donc $(|u_n|)$ converge (théorème **5.II.1.**), alors (u_n) est absolument convergente, donc convergente.

2° Critères de convergence.

a) Critères de convergence absolue. — Les critères de convergence absolue sont ceux des séries à termes positifs, appliqués à $(|u_n|)$.

Dans le cas où *la série* $(|u_n|)$ *diverge la recherche de la nature de* (u_n) *peut se faire en utilisant l'une des méthodes suivantes.*

b) Règle d'Abel.

Théorème 5.III.2. — La série

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \dots + \alpha_n\beta_n + \dots$$

converge sous la condition suffisante suivante :

$$\begin{cases} \text{i)} & \{\alpha_n\} \text{ est une suite réelle positive décroissante,} \\ \text{ii)} & \left|\sum_{p=n}^{m} \beta_p\right| \leqslant K, \text{ où } K \text{ est une constante, et ceci } \forall n \text{ et } \forall m \geqslant n_0. \end{cases}$$

Application :

$\alpha_n = \dfrac{1}{n^\lambda}$ (λ est une constante positive) et $\beta_n = \cos nx$ (resp. $\sin nx$).

On vérifie que $\left|\sum_{p=n}^{m} \beta_p\right| \leqslant \dfrac{1}{\left|\sin \dfrac{x}{2}\right|}$, pour $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

La série $\left(\dfrac{\cos nx}{n^\lambda}\right)$ est donc convergente pour $x \neq 2k\pi$.

De même, la série $\left(\dfrac{\sin nx}{n^\lambda}\right)$ est convergente pour tout x. (Pour $x = 2k\pi$ le résultat est évident.)

c) Série alternée. — On dit qu'une série est alternée si pour tout $n, n \geqslant n_0$, u_n et u_{n+1} sont des réels de signes contraires.

Par exemple,

$$1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$

que l'on pourra noter

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2p+1} - \frac{1}{2p+2} + \dots$$

Théorème 5.III.3. — Pour qu'une série alternée (u_n) converge, il suffit que la suite $\{|u_n|\}$ tende vers 0 en décroissant lorsque $n \to +\infty$. On a alors **$0 \leqslant |R_p| \leqslant |u_{p+1}|$, avec R_p du signe de u_{p+1}.**

Ce théorème se déduit du précédent en posant $\alpha_n = |u_n|$ et $\beta_n = (-1)^n$ lorsque $u_n = (-1)^n|u_n|$.

Exemples :

$$\left((-1)^n \sin\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad \left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right), \qquad \alpha > 0.$$

d) Méthode par groupement des termes. — On considère la série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

et une série

$$v_0 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots,$$

qui se déduit de la précédente en regroupant *au plus* k_0 *termes consécutifs.*

Par exemple (avec $k_0 = 2$)

$$u_0 + (u_1 + u_2) + (u_3 + u_4) + u_5 + \ldots$$

qui correspond à

$$v_0 = u_0, \quad v_1 = u_1 + u_2, \quad v_2 = u_3 + u_4, \quad v_3 = u_5, \text{ etc.}$$

Théorème 5.III.4. — Sous la condition suffisante $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, les deux séries (u_n) et (v_n) sont de même nature. De plus, dans le cas de convergence, elles ont même somme.

Exemple :

$u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$ est de même nature que la série (v_p) de terme général

$v_p = u_{2p-1} + u_{2p} = \dfrac{1}{2p(2p-1)}$, puisque $\lim u_n = 0$. Comme (v_p) est convergente, $\left[v_p \sim \dfrac{1}{4p^2}\right]$, la série (u_n) l'est également.

e) Méthode par décomposition du terme général. — En relation avec la notion de somme de plusieurs séries. (Voir ci-dessous : Opérations sur les séries. Applications IV, 3°, *a.*)

IV. — OPÉRATIONS SUR LES SÉRIES.

1° Définitions. — L'ensemble $\mathcal{S}$ des séries (u_n) est muni des trois lois suivantes :

α) *Loi additive.* — On a

$$(u_n)+(v_n) = (u_n+v_n).$$

β) *Loi externe.* — Multiplication par un scalaire, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\lambda(u_n) = (\lambda u_n).$$

γ) *Loi multiplicative.* — On pose

$$(u_n)\circ(v_n) = (u_n \circ v_n),$$

où

$$u_n \circ v_n = u_0 v_n + u_1 v_{n-1} + \ldots + u_n v_0.$$

(Cette définition généralise le résultat du produit de deux sommes finies.)
On remarque que α) et β) définissent sur $\mathcal{S}$ une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

2° Théorème 5.IV.1.

i) Si (u_n) et (v_n) sont convergentes, alors $(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \mu \sum_{0}^{\infty} v_n.$$

ii) Si (u_n) et (v_n) sont *absolument convergentes*, alors $(u_n \circ v_n)$ est *absolument convergente* et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \circ v_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n\right).$$

iii) Si (u_n) est convergente et (v_n) divergente, alors $(\lambda u_n + \mu v_n)$, $(\mu \neq 0)$ est divergente.

Remarques :

— L'ensemble des séries convergentes forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

— ii) énonce une condition suffisante de convergence de $(u_n \circ v_n)$; il en existe d'autres moins exigeantes, mais *a priori* on ne peut rien dire de la série $(u_n \circ v_n)$ lorsque l'on sait seulement que (u_n) et (v_n) sont convergentes sans l'être absolument.

Conclusion pratique pour les séries A.C. — Les séries absolument convergentes se comportent, du point de vue algébrique, comme des sommes finies. Autrement dit, les propriétés des opérations habituelles sur de telles sommes s'appliquent encore aux séries absolument convergentes. Par contre, ces propriétés ne subsistent pas pour des séries convergentes sans l'être absolument, en particulier, de telles séries ne sont pas commutativement convergentes. (Voir exercice 5.IV.3.)

3° Applications.

a) Nature d'une série par décomposition de terme général. — Si u_n se met sous la forme $u_n = v_n + w_n$ et si l'on connaît la nature de (v_n) et (w_n), on peut en déduire la nature de (u_n) dans les cas i) et iii) du théorème 5.IV.1.

Exemple :

$$u_n = \frac{1+(-1)^n\sqrt{n}}{n}, \qquad \text{ou} \qquad u_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},$$

donc $v_n = \dfrac{1}{n}$ et $w_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Comme (v_n) est divergente et (w_n) convergente, on en déduit que (u_n) est divergente.

b) Série définissant e^z, $z \in \mathbb{C}$. — On considère la série

$$1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \ldots + \frac{a^n}{n!} + \ldots,$$

où $a \in \mathbb{C}$.

On constate, en utilisant, par exemple, la règle de d'Alembert, que cette série est absolument convergente, quel que soit a. Soit $f(a)$ sa somme.

La série

$$1 + \frac{b}{1!} + \ldots + \frac{b^n}{n!} + \ldots,$$

où $b \in \mathbb{C}$, est absolument convergente et a pour somme $f(b)$.

La série produit

$$\left(\frac{a^n}{n!}\right) \circ \left(\frac{b^n}{n!}\right) = \left(\frac{a^n}{n!} \circ \frac{b^n}{n!}\right) = \left(\frac{(a+b)^n}{n!}\right),$$

est donc absolument convergente, et l'on a

$$\sum_0^\infty \frac{(a+b)^n}{n!} = \left(\sum_0^\infty \frac{a^n}{n!}\right)\left(\sum_0^\infty \frac{b^n}{n!}\right),$$

soit

$$f(a+b) = f(a)f(b).$$

Cette propriété, caractéristique de la fonction exponentielle pour une variable réelle, nous amène à poser $f(z) = e^z$, donc

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

EXERCICES DU CHAPITRE 5

5.I.1. ◆ *Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leur somme :*

$$\text{Arctg}\,1+\text{Arctg}\,\frac{1}{3}+\ldots+\text{Arctg}\,\frac{1}{n^2+n+1}+\ldots,$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots,$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\ldots+\frac{2}{(n-1)n(n+1)}+\ldots$$

(Remarquer que $\text{Arctg}\,\dfrac{1}{n^2+n+1}=\text{Arctg}\,\dfrac{1}{n}-\text{Arctg}\,\dfrac{1}{n+1}$, *etc.)*

5.I.2. ◆ *Établir la divergence des séries dont les termes généraux sont définis ci-dessous :*

$$n\,!\,; \qquad n\,\text{Log}\left(1+\frac{1}{n}\right) \quad (n\geqslant 1)\,; \qquad (-1)^n\,; \qquad \text{sh}\,n\,; \qquad \sin n.$$

5.II.1. ◆ *Donner la nature des séries de termes généraux suivants :*

$$\frac{n!}{n^n}\,; \quad \frac{n!}{a^n} \text{ (a est une constante positive donnée)}\,; \quad \frac{2n}{n+2^n}\,;$$

$$\left(\frac{n+a}{n+b}\right)^{n^2} \text{ (a et b sont des constantes positives)}\,; \quad \left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}.$$

5.II.2. ◆ *Donner la nature des séries de termes généraux suivants :*

$\dfrac{1}{n^{\alpha}(\text{Log}\,n)^{\beta}}$, *α et β sont des constantes réelles données (cf. § II, 5°) ;*

$\dfrac{1+\text{Log}\,n}{n\sqrt{n}}\,;$ $\quad \text{Log}\,\dfrac{n^2+an+1}{n^2+bn+2}$, *a et b sont des constantes réelles ;*

$$\frac{1}{n\cos^2 n}\,; \quad \text{Arc sin}\,\frac{2n}{4n^2+1}\,; \quad \text{Arc cos}\,\frac{n^3+1}{n^3+2}\,;$$

$$\frac{\sin\dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos\dfrac{1}{n}.\cos\dfrac{1}{n+1}}\,; \quad \frac{\text{Arg sh}\,n}{n[\text{Log}\,n]^2}.$$

5.II.3. ◆

Donner la nature des séries suivantes:

$$\frac{\sin^2 n}{n^2};\quad \frac{ch\frac{1}{n}}{n};\quad \frac{a^n}{2-\sin n}\ (a\ \text{constante positive});\ \frac{1}{ch\, n};$$
$$\frac{3}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n}};\quad \frac{th\, n}{n};\quad e^{\sin n};\quad \frac{1}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n}n}\ (\blacklozenge\blacklozenge).$$

5.II.4. ◆◆

On considère la série $(u_n)_0$ *définie par* $u_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{n!}$.
Montrer qu'elle est convergente et trouver sa somme (cf. § II, 3°, exemple).

5.II.5. ◆◆

Soit $\{u_n\}_\nu^\infty$ *une suite de termes positifs. Comparer la nature des séries*

$$(u_n)_\nu \qquad et \qquad \left(\frac{u_n}{1+u_n}\right)_\nu .$$

5.II.6. ◆◆

Soit $(u_n)_\nu$ *et* $(v_n)_\nu$ *deux séries positives convergentes. Montrer que la série* $(\sqrt{u_n v_n})_\nu$ *est convergente.*
Généraliser pour $\left(u_n^{\frac{1}{p}} v_n^{\frac{1}{q}}\right)_\nu$*, où* $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$.

5.II.7. ◆◆

Soit $\{a_n\}_1^\infty$ *une suite de termes réels et* $b_n = \dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$.
Établir la propriété suivante:

$$(a_n^2)_1\ \text{convergente} \ \Rightarrow\ b_n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

5.II.8. ◆◆

Soit $(a_n)_1$ *une série à termes positifs, convergente et telle que la suite* $\{a_n\}_1^\infty$ *soit décroissante. Montrer que* $na_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
[Pour cela on pourra étudier la série $(n[a_n-a_{n+1}])_1$.*]*

5.II.9. ◆◆◆

Soit une série à termes positifs $(u_n)_1$ *qui est supposée convergente.*

a) Établir simplement que la série $\left(\dfrac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}\right)_1$ *est convergente pour* $\alpha>1$.

b) Montrer que $S_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \sqrt{u_p} \leqslant K\sqrt{n}$*, K étant une constante convenable.*
A partir de la relation

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\sqrt{u_p}}{p^\alpha} = \left(1-\frac{1}{2^\alpha}\right) S_1+\ldots+\left(\frac{1}{(n-1)^\alpha}-\frac{1}{n^\alpha}\right) S_{n-1}+\frac{S_n}{n^\alpha},$$

montrer que la série $\left(\dfrac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}\right)_1$ *est convergente pour* $\alpha>\dfrac{1}{2}$.

c) **Cas de $\alpha = \frac{1}{2}$.** — *Donner un exemple de série, $(u_n)_1$, convergente et telle que* $\left(\frac{\sqrt{u_n}}{n^{\frac{1}{2}}}\right)_1$ *soit divergente.*

5.III.1. ◆◆ *Donner la nature des séries de termes généraux suivants:*

$$\frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}\,;\qquad \frac{(1+i)^n}{(n^2+1)a^n}\ (a \text{ est une constante positive})\,;\qquad \frac{(-1)^n}{n^2+\sin n^2}.$$

5.III.2. ◆◆ *Donner la nature des séries suivantes (cf. § III, 2°, application):*

$$\frac{\cos na \operatorname{Log} n}{\sqrt{n}}\ (a \text{ est une constante réelle})\,;\qquad \frac{\cos 2n}{n \operatorname{Log} n}\,;\qquad (-1)^n\frac{\cos n}{\sqrt{n}}.$$

5.III.3. ◆◆ *Donner la nature des séries alternées suivantes:*

$$\frac{(-1)^n(\operatorname{Log} n)^2}{\sqrt{n}}\,;\qquad \sin\pi\sqrt{n^2+1}\,;\qquad \frac{(-1)^n}{\operatorname{th} n}.$$

5.IV.1. ◆◆ *Quelle est la nature des séries ci-dessous:*

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n+(-1)^n}\,;\qquad \frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}\,;\qquad \frac{\sin^3 n(\operatorname{Log} n)^3}{n^{\frac{1}{3}}}\,;\qquad \frac{\cos^2 n}{n}\,?$$

5.IV.2. ◆◆◆ *Soit une suite $\{z_n\}_0^\infty$ telle que $\Re z_n \geqslant 0$ (ou $\Im z_n \geqslant 0$). On suppose que les séries $(z_n)_0$ et $(z_n^2)_0$ sont convergentes. Montrer que la série $(|z_n|^2)_0$ est convergente.*

5.IV.3. ◆◆ 1° *On considère la série harmonique alternée:*

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\dots$$

Vérifier que cette série est convergente sans l'être absolument. A l'aide de la formule de Mac-Laurin appliquée à $\operatorname{Log}(1+x)$, pour $x=0$ et pour $x=1$, trouver la valeur de la somme de cette série.

2° *On considère maintenant la série dont les termes sont ceux de la série précédente écrits dans l'ordre suivant:*

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2(2n+1)}-\frac{1}{2(2n+2)}+\dots$$

Établir que cette série est convergente et que sa somme est la moitié de la somme de la série alternée précédente.

5.I.1.

a) Établissons la relation $\operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{n^2+n+1} = \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{n} - \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{n+1}$.

Pour cela, il suffit de poser

$$a = \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad b = \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{n+1}.$$

Alors on a

$$\operatorname{tg}(a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} = \frac{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}}{1+\dfrac{1}{n(n+1)}} = \frac{1}{n^2+n+1},$$

de plus, on a l'implication suivante :

$$0<a<\frac{\pi}{2} \text{ et } 0<b<\frac{\pi}{2} \left(\text{puisque } \frac{1}{n} \text{ et } \frac{1}{n+1}>0\right) \Rightarrow -\frac{\pi}{2}<a-b<\frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$a-b = \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{n^2+n+1}.$$

[*Autre procédé.* — Soit

$$y = \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{x^2+x+1} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{x} + \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{x+1};$$

la dérivée y' étant nulle, y est constant, $y = K_i$ $(i = 1, 2, 3)$ dans chacun des intervalles de continuité $]-\infty, -1[$, $]-1, 0[$, $]0, +\infty[$.

Pour $x \in]0, +\infty[$, on obtient $y = K_3 = 0$ (faire tendre x vers $+\infty$, ou bien x vers 0^+), d'où l'on déduit la relation demandée.]

Calcul de la somme partielle S_n.

$$S_n = \operatorname{Arc\,tg} 1 + \left(\operatorname{Arc\,tg} 1 - \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{2}\right) + \left(\operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{2} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{n} - \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{n+1},\right)$$

donc

$$S_n = 2 \operatorname{Arc\,tg} 1 - \operatorname{Arc\,tg} \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} 2 \operatorname{Arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{2}.$$

La série $\left(\text{Arc tg}\,\dfrac{1}{n^2+n+1}\right)_0$ est donc *convergente* et a pour somme $\dfrac{\pi}{2}$, d'où l'on déduit

$$\frac{\pi}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\text{Arc tg}\,\frac{1}{n^2+n+1}=\text{Arc tg}\,1+\text{Arc tg}\,\frac{1}{3}+\ldots+\text{Arc tg}\,\frac{1}{n^2+n+1}+\ldots$$

b) A partir de la décomposition de l'expression $\dfrac{1}{n(n+1)}$: $\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, nous déduisons

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\underset{n\to\infty}{\to}1.$$

La série $\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)_1$ est donc convergente et a pour somme 1; d'où

$$1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

c) Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{2}{(x^2-1)x}$; nous obtenons

$$\frac{2}{(x-1)x(x+1)}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}.$$

Donc

$$S_n=\sum_{p=2}^{n}\left(\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+1}-\frac{2}{p}\right)=\sum_{p_1=1}^{n-1}\frac{1}{p_1}+\sum_{p_2=3}^{n+1}\frac{1}{p_2}-2\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}$$

(poser $p_1=p-1$ et $p_2=p+1$).

L'intervalle « commun » des indices des trois sommes étant $[3,\ n-1]$, nous pouvons écrire S_n ainsi :

$$S_n=\left(1+\frac{1}{2}+\sum_{p=3}^{n-1}\frac{1}{p}\right)+\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\sum_{p=3}^{n-1}\frac{1}{p}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\sum_{p=3}^{n-1}\frac{1}{p}+\frac{1}{n}\right),$$

ou encore

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\to}\frac{1}{2}.$$

La série $\left(\dfrac{2}{(n^2-1)n}\right)_2$ est donc convergente et a pour somme $\dfrac{1}{2}$.

5.I.2.

La notation $-\!\!/\!\!\to 0$ employée ici signifie : ne tend pas vers 0.

a) $n!\,-\!\!/\!\!\to 0$ lorsque $n\to\infty$, donc $(n!)_1$ diverge.

b) $n\,\text{Log}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)=n\left[\dfrac{1}{n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)\right]\sim 1$, donc $n\,\text{Log}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-\!\!/\!\!\to 0$ lorsque $n\to\infty$ et, par suite, $\left(n\,\text{Log}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right)_1$ diverge.

c) $(-1)^n \not\to 0$, donc $((-1)^n)_1$ diverge.

d) $\operatorname{sh} n \sim \frac{1}{2} e^n$, donc $\operatorname{sh} n \not\to 0$ et, par suite, $(\operatorname{sh} n)_1$ diverge.

e) *Montrons que* $\sin n \not\to 0$ *lorsque* $n \to \infty$ en montrant que l'hypothèse $\sin n \to 0$ entraîne une contradiction. Si $\sin n \to 0$, on a

$$\sin(n+2) - \sin n = 2 \sin 1 \cos(n+1) \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

ce qui entraîne $\cos n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. Alors, $\sin^2 n + \cos^2 n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, propriété évidemment *contradictoire*, puisque $\sin^2 n + \cos^2 n = 1$, $\forall n$. Donc, $\sin n \not\to 0$ et la série $(\sin n)_0$ diverge.

5.II.1.

Toutes les séries proposées sont à termes positifs.

a) $u_n = \dfrac{n!}{n^n} \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} l = \dfrac{1}{e}$ (inférieur à 1).

La série $\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)_1$ est donc convergente (règle de d'Alembert).

b) $u_n = \dfrac{n!}{a^n} \Rightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{a} \geqslant 1$ pour $n > a-1$.

La série $\left(\dfrac{n!}{a^n}\right)$ est donc divergente (règle de d'Alembert).

c) Soit $u_n = \dfrac{2n}{n+2^n}$. Alors $u_n \sim \dfrac{2n}{2^n} = v_n$, d'où l'on déduit

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+1}{2n} \underset{n\to\infty}{\to} l = \frac{1}{2} \text{ (inférieur à 1).}$$

La série $(v_n)_1$ est convergente, donc la série $(u_n)_1 = \left(\dfrac{2n}{n+2^n}\right)_1$ est convergente (les termes u_n et v_n étant *positifs*, on peut utiliser le théorème de comparaison 5.II.1.).

d) Soit $u_n = \left(\dfrac{n+a}{n+b}\right)^{n2}$, on a alors

$$\sqrt[n]{u_n} = \left(\frac{n+a}{n+b}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{b}{n}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\to} \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} = l,$$

on en déduit alors les résultats suivants :

$b>a \Rightarrow \quad l<1$, donc $(u_n)_1$ converge;

$b<a \Rightarrow \quad l>1$, donc $(u_n)_1$ diverge;

$b = a \Rightarrow u_n\,(=1) \not\to 0$ lorsque $n \to \infty$, donc $(u_n)_1$ diverge.

e) Soit $u_n = \left(\dfrac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$, on a alors

$$\sqrt[n]{u_n} = \frac{\left(1-\dfrac{5}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)^n}{\left(1-\dfrac{4}{n}+\dfrac{2}{n^2}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{-5}}{e^{-4}} = e^{-1}(\text{inférieur à } 1), \text{ donc } (u_n)_1 \text{ converge.}$$

5.II.2.

a) Soit la série $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha(\operatorname{Log} n)^p}$ expression qui est positive.

Premier cas : $\alpha \geqslant 0$. — La fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha(\operatorname{Log} x)^p}$ est décroissante dans $[a, \infty[$, (*a assez grand* dépendant du choix de α et de p) et $f(n) = u_n$.

Donc, (u_n) *est de même nature que l'intégrale*

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha(\operatorname{Log} x)^p}$$

(dans tous les cas, prendre $a>1$).

— *Si* $\alpha>1$ *et* $p \geqslant 0$. — On aura

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha(\operatorname{Log} x)^p} \leqslant \int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} < \infty,$$

donc (u_n) converge.

— *Si* $\alpha>1$ *et* $p<0$. — Posons $\varepsilon_0 = \dfrac{\alpha-1}{2}$, donc $\beta = \alpha-\varepsilon_0>1$.

Pour x assez grand : $x \geqslant b$, on aura $(\operatorname{Log} x)^{|p|} \leqslant x^{\varepsilon_0}$, donc

$$\frac{1}{x^\alpha(\operatorname{Log} x)^p} \leqslant \frac{x^{\varepsilon_0}}{x^\alpha} = \frac{1}{x^\beta}, \ \forall x \in [c, \infty[, \text{ où } c = \sup(a, b).$$

Par suite,

$$\int_c^\infty \frac{dx}{x^\alpha(\operatorname{Log} x)^p} \leqslant \int_c^\infty \frac{dx}{x^\beta} = \frac{c^{1-\beta}}{\beta-1} < \infty,$$

d'où l'on déduit la convergence de la série (u_n).

— *Si* $\alpha<1$ *et* $p \leqslant 0$. — On aura

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(\operatorname{Log} x)^p} \geqslant \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = +\infty,$$

donc (u_n) diverge.

— *Si* $\alpha<1$ *et* $p>0$. — Posons $\varepsilon_0 = \dfrac{1-\alpha}{2}$, donc $\beta = \alpha+\varepsilon_0<1$.

Nous aurons alors

$$\int_c^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(\operatorname{Log} x)^p} \geqslant \int_c^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha+\varepsilon_0}} = +\infty,$$

d'où l'on déduit la divergence de (u_n).

— *Si* $\alpha = 1$. — On peut écrire

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x(\operatorname{Log} x)^p} = \begin{cases} +\infty \text{ si } p \leqslant 1, \text{ donc } (u_n) \text{ diverge,} \\ \dfrac{(\operatorname{Log} a)^{-p+1}}{p-1} \text{ si } p>1, \text{ donc } (u_n) \text{ converge.} \end{cases}$$

Deuxième cas : $\alpha < 0$. — La suite $u_n \not\to 0$ lorsque $n \to \infty$, donc (u_n) diverge.

En résumé, on a

$\alpha > 1$, p quelconque $\Rightarrow$ (u_n) est convergente;
$\alpha < 1$, p quelconque $\Rightarrow$ (u_n) est divergente;
$\alpha = 1$, $p > 1$ $\Rightarrow$ (u_n) est convergente;
$\alpha = 1$, $p \leqslant 1$ $\Rightarrow$ (u_n) est divergente.

b) Soit $u_n = \dfrac{1+\operatorname{Log} n}{n\sqrt{n}}$ qui est positif. On a $u_n \sim \dfrac{\operatorname{Log} n}{n^{3/2}} = v_n$; la série $(v_n)_1$ converge, puisque $\alpha = \dfrac{3}{2}$ et $p = -1$ (cf. question *a*), donc $(u_n)_1$ converge.

c) Soit

$$u_n = \operatorname{Log} \frac{n^2+an+1}{n^2+bn+2} = \operatorname{Log}\left(1+\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}\right) - \operatorname{Log}\left(1+\frac{b}{n}+\frac{2}{n^2}\right).$$

On écrit alors

$$u_n = \frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{a^2}{2n^2}-\left[\frac{b}{n}+\frac{2}{n^2}-\frac{b^2}{2n^2}\right]+o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{a-b}{n}+\frac{b^2-a^2-2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

— *Si* $b \neq a$. — Le terme u_n est de *signe constant* pour n assez grand, d'où $u_n \sim \dfrac{a-b}{n}$, qui est le terme général d'une série divergente, donc (u_n) diverge.

— *Si* $b = a$. — Le terme u_n est de *signe constant* (négatif) pour n assez grand; on a $u_n \sim -\dfrac{1}{n^2}$, qui est le terme général d'une série convergente $\left(\dfrac{K}{n^{\alpha}}, \text{ avec } \alpha = 2>1\right)$, donc (u_n) converge.

d) Remarquons que l'on a nécessairement $\cos n \neq 0$, sinon π serait un nombre rationnel.

Nous avons $u_n = \dfrac{1}{n\cos^2 n} \geqslant \dfrac{1}{n} = v_n$, qui est le terme général d'une série divergente, donc (u_n) diverge (cf. théorème de comparaison).

e) $u_n = \operatorname{Arc\,sin} \dfrac{2n}{4n^2+1} \sim \dfrac{2n}{4n^2+1} \sim \dfrac{1}{2n} = v_n$, terme général d'une série divergente, donc (u_n) diverge.

f) Soit $u_n = \operatorname{Arc\,cos} \dfrac{n^3+1}{n^3+2} = \operatorname{Arc\,cos}\left(1-\dfrac{1}{n^3+2}\right) = \operatorname{Arc\,cos}(1-x_n)$.

Il est clair que $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc de la relation $\cos u_n = 1-x_n$, on déduit

$1-\dfrac{u_n^2}{2!}+o(u_n^2) = 1-x_n$ (développement limité de $\cos y$ autour de $y=0$),

ou encore

$$u_n \sim \sqrt{2x_n} \sim \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}} = v_n \text{ terme général d'une série convergente.}$$

Donc (u_n) est convergent.

g) Il est clair que $u_n = \dfrac{\sin \dfrac{1}{n(n+1)}}{\cos \dfrac{1}{n} \cdot \cos \dfrac{1}{n+1}}$ est positif, puisque $\dfrac{1}{n(n+1)}$, $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{n+1}$ appartiennent à $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

$u_n \sim \dfrac{1}{n(n+1)} \sim \dfrac{1}{n^2} = v_n$, terme général d'une série convergente $\left(\dfrac{1}{n^\alpha}, \text{ avec } \alpha = 2 > 1\right)$, donc (u_n) converge.

On peut remarquer aussi que $u_n = \operatorname{tg}\dfrac{1}{n} - \operatorname{tg}\dfrac{1}{n+1}$. On en déduit la convergence de $(u_n)_1$ et la somme égale à tg 1.

h) On sait que $\operatorname{Arg\,sh} x = \operatorname{Log}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, on en déduit

$$u_n = \frac{\operatorname{Arg\,sh} n}{n(\operatorname{Log} n)^2} = \frac{\operatorname{Log}\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}{n(\operatorname{Log} n)^2} \sim \frac{\operatorname{Log} 2n}{n(\operatorname{Log} n)^2} \sim \frac{1}{n \operatorname{Log} n} = v_n.$$

$$v_n \text{ est du type } \frac{1}{n^\alpha (\operatorname{Log} n)^p}, \text{ avec } \alpha = 1 \text{ et } p = 1.$$

Du paragraphe *a*), l'on déduit (v_n) divergente, donc (u_n) divergente.

5.II.3.

a) Le terme $u_n = \frac{\sin^2 n}{n^2}$ est positif, donc $u_n \leqslant \frac{1}{n^2} = v_n$, qui est le terme général d'une série convergente, donc (cf. théorème 5.II.1.) (u_n) converge.

b) Le terme $u_n = \frac{\operatorname{ch}\frac{1}{n}}{n}$ est positif et $u_n \sim \frac{1}{n} = v_n$ qui est le terme général d'une série divergente, donc (u_n) diverge.

c) *Supposons* $a<1$. — Nous avons $u_n = \frac{a^n}{2-\sin n} \leqslant a^n = v_n$.

(a^n) converge (série géométrique), donc (u_n) converge.

Supposons $a \geqslant 1$. — Nous avons $u_n \geqslant \frac{a^n}{3}$, donc $u_n \not\to 0$ lorsque $n \to \infty$. Par suite (u_n) diverge.

d) Le terme $u_n = \frac{1}{\operatorname{ch} n}$ est positif, et $u_n \sim \frac{2}{e^n} = v_n$; (v_n) converge $\left(\text{former } \frac{v_n+1}{v_n}\right)$, donc (u_n) converge.

e) $u_n = \frac{3}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n}}$ est positif. Le terme $2^{(-1)^n}$ vaut 2 ou $\frac{1}{2}$, donc $u_n \sim \frac{3}{\sqrt{n}} = v_n$, la série (v_n) divergente entraîne que la série (u_n) est aussi divergente.

f) $u_n = \frac{\operatorname{th} n}{n}$ est positif. On sait que $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{th} x = 1$, donc $u_n \sim \frac{1}{n}$ et, par suite, (u_n) est divergente.

g) $u_n = e^{\sin n} \geqslant e^{-1}$, donc $u_n \not\to 0$, lorsque $n \to \infty$. Par suite, (u_n) diverge.

h) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}+2^{(-1)^n n}}$ est positif. On a donc

$$u_{2p+1} = \frac{1}{\sqrt{2p+1}+\frac{1}{2^{2p+1}}} \sim \frac{1}{\sqrt{2p+1}} \sim \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{p}} = v_p.$$

La série $(u_{2p+1})_1$, « extraite » de la série *positive* $(u_n)_1$, est divergente. Ceci entraîne que $(u_n)_1$ diverge. [En effet, $(u_{2p+1})_1$, série positive divergente, est équivalente à $\sigma_n = \sum\limits_{p=1}^{n} u_{2p+1} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ en croissant (σ_n suite des sommes partielles).]

Soit S_n la suite des sommes partielles de la série $(u_n)_1$

$$S_{2n+1} = \sum_{K=1}^{2n+1} u_K \geqslant \sum_{p=1}^{n} u_{2p+1} = \sigma_n,$$

donc $S_{2n+1} \underset{n\to\infty}{\to} \infty$ et, par suite, $(u_n)_1$ diverge.]

5.II.4.

Rappelons que $0! = 1$.

Le terme $u_n = \dfrac{n^2(n+1)^2}{n!}$ est positif. De plus, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l = 0\ (<1)$, donc $(u_n)_0$ converge.

Calculons sa somme. — Nous indiquons ici une méthode générale applicable à $u_n = \dfrac{P(n)}{n!}$, où $P(n)$ est un polynôme de la variable n de degré fixe.

Il existe cinq constantes A, B, ..., E, déterminées de façon unique et telles que l'on a *it*

$$n^2(n+1)^2 = An(n-1)(n-2)(n-3)+Bn(n-1)(n-2)+Cn(n-1)+Dn+E.$$

[En effet, les polynômes $x(x-1)(x-2)(x-3)$, $x(x-1)(x-2)$, $x(x-1)$, x et 1 constituant une base de l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 le produit $x^2(x+1)^2$ se décompose de façon unique suivant cette base.]

Par identification, on obtient

$$A = 1,\ B = 8,\ C = 14,\ D = 4,\ E = 0$$

et, par suite,

$$u_n = \frac{1}{(n-4)!}+\frac{8}{(n-3)!}+\frac{14}{(n-2)!}+\frac{4}{(n-1)!} \quad (\text{pour } n \geqslant 4).$$

Alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{3} u_n + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-4)!} + 8\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!} + 14\sum_{n=4}^{8}\frac{1}{(n-2)!} + 4\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}$$

ou encore

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 4+18+24+e+8[e-1]+14\left[e-1-\frac{1}{1!}\right]+4\left[e-1-\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}\right] = 27\,e.$$

Autre procédé. — En convenant d'écrire $\dfrac{1}{(-n)!} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on obtient la décomposition suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-4)!} + 8\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!} + 14\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!} = 27\,e$$

[par exemple :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-4)!} = \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n-4)!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!} = e, \text{ en posant } m = n-4,$$

ou encore

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n-4)!} = \left\{\frac{1}{(-4)!}+\frac{1}{(-3)!}+\frac{1}{(-2)!}+\frac{1}{(-1)!}\right\} + 1 + \frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{m!}+\ldots = e.$$
]

5.II.5.

***a*) Supposons que la série $(u_n)_\nu$ soit convergente.**

La majoration

$$\frac{u_n}{1+u_n} \leqslant u_n,$$

entraîne la convergence de la série $\left(\dfrac{u_n}{1+u_n}\right)_\nu$.

***b*) Supposons maintenant que $(u_n)_\nu$ diverge.**

Si $u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$, alors $\dfrac{u_n}{1+u_n} \sim u_n$ et, par suite, $\left(\dfrac{u_n}{1+u_n}\right)_\nu$ diverge.

Si $u_n \not\to 0$, alors $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n} \not\to 0 \left[\text{sinon } u_n = \dfrac{v_n}{1-v_n} \to 0\right]$ et, par suite, $\left(\dfrac{u_n}{1+u_n}\right)$ diverge.

5.II.6.

Soit S_n [resp. σ_n, resp. $\mathcal{T}_n$] la suite des sommes partielles de la série $(u_n)_\nu$ [resp. $(v_n)_\nu$, resp. $(\sqrt{u_n v_n})_\nu$]. Nous avons $\sqrt{u_n v_n} \leqslant u_n + v_n$ et, par suite,

$$\mathcal{T}_n = \sum_{p=\nu}^{n} \sqrt{u_p v_p} \leqslant \sum_{p=\nu}^{n} (u_p + v_p) = S_n + \sigma_n.$$

La suite S_n tend en croissant vers $S = \sum_{p=\nu}^{\infty} u_p$, puisque $(u_n)_\nu$ est une série *positive* convergente.

De même,

$$\sigma_n \leqslant \sigma = \sum_{p=\nu}^{\infty} v_p.$$

Il en résulte que la suite croissante $\{\mathcal{T}_n\}$ est bornée supérieurement par $S+\sigma$. De la convergence de la suite $\{\mathcal{T}_n\}$, on déduit alors la convergence de la série $(\sqrt{u_n v_n})_\nu$.

Généralisation. — De l'inégalité de Young,

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \text{ où } a \text{ et } b \geqslant 0 \text{ et } p \text{ et } q > 1, \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

on déduit

$$\alpha^{\frac{1}{p}} \beta^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{q}, \ \alpha \text{ et } \beta \geqslant 0.$$

La suite croissante $\hat{\mathcal{C}}_n = \sum_{k=\nu}^{n} u_k^{\frac{1}{p}} v_k^{\frac{1}{q}}$ est donc bornée supérieurement par $\frac{S}{p}+\frac{\sigma}{q}$, et l'on en déduit la convergence de la série $\left(u_n^{\frac{1}{p}} v_n^{\frac{1}{q}}\right)_\nu$.

5.II.7.

$(a_n^2)_1$ est une série *positive convergente*, donc la suite $S_n \left(= \sum_{p=1}^{n} a_p^2\right)$ des sommes partielles tend en croissant vers une limite $S \left(\text{notée } \sum_{p=1}^{\infty} a_p^2\right)$:

$$S_n \leqslant S; \qquad \forall n.$$

On a alors

$$b_n^2 = \frac{(a_1+\ldots+a_n)^2}{n^2} \leqslant \frac{n(a_1^2+\ldots+a_n^2)}{n^2} \leqslant \frac{S}{n},$$

d'où l'on déduit $|b_n| \leqslant \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{n}}$ et, par suite, $b_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

5.II.8.

$(a_n)_1$ positive et convergente, donc $S_n = a_1+\ldots+a_n$ tend en croissant vers $S \left(= \sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)$:

$$S_n \leqslant S, \qquad \forall n.$$

Étudions la nature de la série *positive* $(n[a_n-a_{n+1}])_1$. Pour cela on considère la suite σ_n de ses sommes partielles :

$$\text{(1)} \qquad \sigma_n = (a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+\ldots+n(a_n-a_{n+1}) = S_n-na_{n+1} \leqslant S.$$

La suite σ_k est croissante [puisque la série $(n[a_n-a_{n+1}])_1$ est positive] et bornée supérieurement par S, donc convergente :

$$\sigma_n \underset{n\to\infty}{\to} \sigma.$$

De (1) on déduit $na_{n+1} \underset{n\to\infty}{\to} S-\sigma = \lambda$, ou encore

$$(n-1)a_n \underset{n\to\infty}{\to} \lambda.$$

— *Si* $\lambda > 0$. — On a $a_n \sim \frac{\lambda}{n-1} \sim \frac{\lambda}{n}$, donc $(a_n)_1$ diverge, propriété contradictoire.

On a nécessairement $\lambda = 0$ et par suite

$$(n-1)a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

ce qui entraîne [puisque $a_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$]

$$na_n \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

5.II.9.

a) $(u_n)_1$ convergente $\Rightarrow u_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \{u_n\}$ est bornée, c'est-à-dire que l'on a

$$0 \leqslant u_n \leqslant K, \forall n, \text{ où } K \text{ est une constante.}$$

On en déduit $\frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha} \leqslant \frac{\sqrt{K}}{n^\alpha}$ qui est le terme général d'une série convergente si $\alpha > 1$.

Donc $\left(\frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}\right)_1$ est une série convergente si $\alpha > 1$.

b) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left[\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right]^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right),$$

avec $a_i = \sqrt{u_i}$ et $b_i = 1$, nous obtenons

$$S_n^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{u_i}\right)^2 \leqslant n \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

A fortiori, on a

$$S_n^2 \leqslant n\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i\right), \qquad \forall n,$$

ou encore

$$S_n \leqslant K\sqrt{n}, \qquad \text{avec} \qquad K = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} u_i}.$$

Soit σ_n *la suite des sommes partielles* de la série à termes positifs $\left(\frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}\right)$. On sait que l'on a l'équivalence suivante :

$$\left(\frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}\right)_1 \text{ convergente} \Leftrightarrow \sigma_n \text{ bornée supérieurement.}$$

Or (poser $\sqrt{u_p} = S_p - S_{p-1}$)

$$\frac{\sigma_n}{K} \leqslant \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right)\sqrt{n} + \frac{\sqrt{n}}{n^\alpha} = \mathcal{C}_n + \frac{\sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

La série $(v_n)_2 = \left(\left[\frac{1}{(n-1)^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha}\right]\sqrt{n}\right)_2$ est convergente pour $\alpha > \frac{1}{2}$, puisque $v_n \sim \frac{\alpha}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}}$.
Donc $\{\mathcal{T}_n\}$, suite des sommes partielles de $(v_n)_2$, est bornée :

$$\mathcal{T}_n \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} v_n = K_1, \text{ où } K_1 \text{ est une constante,}$$

et, par suite, on a

$$\sigma_n \leqslant K\left[K_1 + \frac{\sqrt{n}}{n^\alpha}\right] \leqslant K(K_1+1), \ \forall n, \ (K(K_1+1) \text{ est une constante}).$$

La série $\left(\frac{\sqrt{u_n}}{n^\alpha}\right)_1$ est donc bien convergente pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

c) La série $(u_n)_1$ définie par $u_1 = 0$ et $u_n = \frac{1}{n\,[\operatorname{Log} n]^2}$ pour $n > 1$ est convergente (voir exercice 5.II.2.). La série $\left(\frac{\sqrt{u_n}}{n^{\frac{1}{2}}}\right)_1$ qui correspond au cas $\alpha = \frac{1}{2}$ est divergente, puisque $\left(\frac{1}{n \operatorname{Log} n}\right)_2$ est divergente.

5.III.1.

a) Soit $u_n = \frac{\cos\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$. Nous avons alors

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = v_n,$$

qui est le terme général d'une série convergente.

La série *positive* $(|u_n|)$ est donc convergente, ou encore de façon équivalente on peut dire que (u_n) est absolument convergente.

b) En posant $u_n = \frac{(1+i)^n}{(n^2+1)a^n}$, nous avons

$$|u_n| = \frac{(\sqrt{2})^n}{(n^2+1)a^n} \sim \frac{(\sqrt{2})^n}{n^2 a^n} = v_n.$$

De plus, $\frac{v_{n+1}}{v_n} \underset{n\to\infty}{\to} l = \frac{\sqrt{2}}{a}$,

— *pour* $a > \sqrt{2}$, nous aurons $l < 1$, donc

(v_n) convergente $\Rightarrow$ $(|u_n|)$ convergente $\Leftrightarrow$ (u_n) absolument convergente;

— *pour* $a < \sqrt{2}$,

$|u_n| \not\to 0$ pour $n \to \infty$, donc (u_n) est divergente;

— *pour* $a = \sqrt{2}$,

$$u_n = \frac{\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n}{n^2+1} = \frac{\cos n\frac{\pi}{4} + i\sin n\frac{\pi}{4}}{n^2+1}.$$

En utilisant le théorème 5.III.2. (règle d'Abel) avec

$$\alpha_n = \frac{1}{n^2+1} \qquad \text{et} \qquad \beta_n = \cos n\frac{\pi}{4} + i \sin n\frac{\pi}{4},$$

nous en déduisons la convergence de (u_n).

c) En posant $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+\sin n^2}$, nous avons la majoration suivante :

$$|u_n| \leqslant \frac{1}{n^2-1} = v_n,$$

(v_n) étant une série convergente, il en résulte que $(|u_n|)$ est convergente, ou encore la série (u_n) est absolument convergente.

5.III.2.

a) Pour montrer que la série $\left(\dfrac{\cos na \operatorname{Log} n}{\sqrt{n}}\right)$ est convergente *lorsque* $a \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, il suffit d'appliquer le théorème 5.III.2., avec $\alpha_n = \dfrac{\operatorname{Log} n}{\sqrt{n}}$ [la fonction $\dfrac{\operatorname{Log} x}{\sqrt{x}}$ est décroissante pour x assez grand : $x \geqslant X_0$] et $\beta_n = \cos na$.

Pour $a = 2k\pi$, la série $\left(\dfrac{\operatorname{Log} n}{\sqrt{n}}\right)$ est divergente. En effet, on a $\dfrac{\operatorname{Log} n}{\sqrt{n}} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, qui est le terme général d'une série divergente.

b) Pour montrer que la série $\left(\dfrac{\cos 2n}{n \operatorname{Log} n}\right)$ est convergente, il suffit d'appliquer le théorème 5.III.2., avec $\alpha_n = \dfrac{1}{n \operatorname{Log} n}$ et $\beta_n = \cos nx$, où $x = 2 (\neq 2k\pi)$.

c) Considérons l'égalité suivante :

$$\frac{(-1)^n \cos n}{\sqrt{n}} = \frac{\cos n(1+\pi)}{\sqrt{n}}.$$

En utilisant le théorème 5.III.2., avec $\alpha_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et $\beta_n = \cos nx$ (cf. § III, 2°, *b*), où $x = 1+\pi$ ($\neq 2k\pi$) nous en déduisons la convergence de la série $\dfrac{(-1)^n \cos n}{\sqrt{n}}$.

5.III.3.

a) La fonction $x \mapsto \dfrac{[\operatorname{Log} x]^2}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur l'intervalle $]A, +\infty[$ (A est une constante positive convenablement choisie). La série alternée $(u_n)_\nu$ (où $\nu = [A]+1$) satisfait donc aux conditions du théorème 5.III.3. et, par suite, elle est convergente.

b) $\pi\sqrt{n^2+1} \sim n\pi$, expression que nous allons faire apparaître en écrivant les égalités suivantes :

$$u_n = \sin[(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi)+n\pi] = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi) = (-1)^n \sin\alpha_n.$$

Il est clair que la suite $\alpha_n = \dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ est décroissante, avec $\alpha_n \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ pour $n \geqslant 1$. Donc $\sin\alpha_n$ tend, en décroissant, vers zéro et, par suite, la série (u_n) est convergente (cf. théorème **5**.III.3.).

c) Le terme $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\operatorname{th} n}$ ne tend pas vers zéro lorsque $n \to \infty$, donc la série (u_n) est divergente.

5.IV.1.

a) Nous avons

$$(u_n)_2 = -\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\ldots-\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p}-\ldots$$

La série $(v_p)_1$, qui se déduit de la précédente par regroupement de termes consécutifs deux à deux

$$(v_p)_1 = \left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(-\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p}\right)+\ldots,$$

est convergente, puisque $v_p = \dfrac{1}{2p(2p+1)} \sim \dfrac{1}{4p^2}$.

Donc la série $(u_n)_2$ est convergente.

b)
$$u_n = \frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n} = v_n+w_n.$$

la série $(v_n)_1$ est convergente (cf. théorème **5**.III.3.) et la série $(w_n)_1$ est divergente. On en conclut donc que la série $(u_n)_1$ est divergente.

c) A partir de la formule trigonométrique $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, nous déduisons

$$4u_n = \frac{4\sin^3 n(\operatorname{Log} n)^3}{n^{\frac{1}{3}}} = \frac{3\sin n(\operatorname{Log} n)^3}{n^{\frac{1}{3}}} - \frac{\sin 3n(\operatorname{Log} n)^3}{n^{\frac{1}{3}}} = 3v_n - w_n.$$

En utilisant le théorème **5**.III.2. avec $\alpha_n = \dfrac{(\operatorname{Log} n)^3}{n^{\frac{1}{3}}}$ et $\beta_n = \sin n$ [remarquer que la fonction $x \mapsto \dfrac{(\operatorname{Log} x)^3}{x^{\frac{1}{3}}}$ est décroissante sur $]A, \infty[$, pour A positif choisi suffisamment grand], on constate que $(v_n)_1$ est convergente. De même $(w_n)_1$ est convergente. Donc $(4u_n)_1$ et, par suite, $(u_n)_1$ sont convergentes.

d)
$$2u_n = \frac{2\cos^2 n}{n} = \frac{\cos 2n}{n}+\frac{1}{n} = v_n+w_n.$$

La série $(v_n)_1$ est convergente et la série $(w_n)_1$ est divergente. Donc $(2u_n)_1$ et, par suite, $(u_n)_1$ sont divergentes.

5.IV.2.

1° Soit $z_n = x_n + iy_n$. Par hypothèse x_n est positif ou nul.
On a
$$(z_n)_0 \text{ convergente} \Leftrightarrow (x_n)_0 \text{ et } (y_n)_0 \text{ convergentes}$$

ce qui entraîne que l'on a x_n et $y_n \to 0$, lorsque $n \to \infty$.
Puisque la suite $\{x_n\}_0$ tend vers zéro, on aura
$$0 \leqslant x_n \leqslant 1, \qquad \forall n \geqslant n_0, \qquad n_0 \text{ étant entier convenablement choisi,}$$

et, par suite,
$$0 \leqslant x_n^2 \leqslant x_n \leqslant 1, \qquad \forall n \geqslant n_0.$$

La série à termes positifs $(x_n^2)_{n_0}$ est convergente, puisque la série majorante $(x_n)_{n_0}$ est convergente. Donc la série $(x_n^2)_0$ *est convergente.*

2° On a
$$(z_n^2)_0 \text{ convergente} \Leftrightarrow (x_n^2 - y_n^2)_0 \text{ et } (2x_n y_n)_0 \text{ convergentes.}$$

Puisque les séries $(x_n^2)_0$ et $(x_n^2 - y_n^2)_0$ sont convergentes, nous en déduisons que la série $(y_n^2)_0$ est convergente.

3° On a aussi
$$(x_n^2)_0 \text{ et } (y_n^2)_0 \text{ convergentes} \Leftrightarrow (|z_n|^2)_0 = (x_n^2 + y_n^2)_0 \text{ convergente.}$$

5.IV.3.

1° La série des valeurs absolues est divergente (série harmonique), mais la série proposée converge d'après le critère des séries alternées.
En posant $y = \operatorname{Log}(1+x)$, on a
$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n},$$

d'où l'on déduit la formule de Mac-Laurin pour $\operatorname{Log}(1+x)$:
$$\operatorname{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n + \frac{(-1)^{n+2} x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}, \quad 0<\theta<1,$$

et en faisant $x = 1$ on obtient
$$\operatorname{Log} 2 = 1 - \frac{1}{2} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}}.$$

Soit S_n la somme partielle d'ordre n de la série étudiée, on a alors

$$S_n - \text{Log } 2 = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}},$$

mais

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta)^{n+1}}\right| \leqslant \frac{1}{n+1}, \text{ puisque } \frac{1}{1+\theta} < 1.$$

On en conclut que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \text{Log } 2$$

et aussi

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots = \text{Log } 2.$$

2° En appliquant la méthode de groupement des termes consécutifs, légitime ici (théorème **5**.III.4.), on vérifie la convergence de la série, puisque l'on a

$$\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} - \frac{1}{2(2n+2)} = \frac{1}{4(2n+1)(n+1)} \sim \frac{1}{8n^2}.$$

En tenant compte de $\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2(2n+1)} = \frac{1}{2(2n+1)}$ la série peut aussi s'écrire

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \ldots\right)$$

et, d'après la question 1°, la somme de cette série est $\frac{1}{2}$ Log 2. Ce résultat illustre bien la conclusion du paragraphe IV, 2°.

6. SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

A. — Suites de fonctions

Soit une suite de fonctions

$$f_n : (a, b) \mapsto \mathbb{R}$$

(éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$); (α, β) désignera un intervalle inclus dans (a, b) avec $\alpha \leqslant \beta$.

I. — CONVERGENCE SIMPLE ET CONVERGENCE UNIFORME D'UNE SUITE DE FONCTIONS.

1° Convergence simple. — Supposons que pour chaque $x \in (\alpha, \beta)$, la suite numérique $\{f_n(x)\}$ admette une limite. Cette limite est donc une fonction f définie sur (α, β). On dit alors que la suite de fonctions $\{f_n\}$ converge simplement (en abrégé C.S.) vers f sur (α, β). Ceci se traduit par

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon, x) \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad [x \in (\alpha, \beta)].$$

Exemples :

a) Soit $f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$x \mapsto f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx^2},\ n \in \mathbb{N}.$$

— Pour $x \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1.$$

— Pour $x = 0$,

$$f_n(0) = 0, \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0.$$

$\{f_n\}$ converge donc simplement vers la fonction f définie par

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

b) Soit $f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$x \mapsto f_n(x) = nxe^{-nx^2} + x.$$

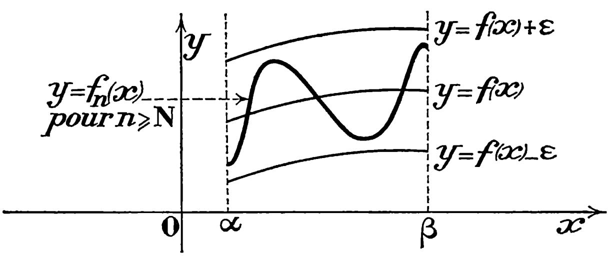
Pour chaque x on a $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$, donc $\{f_n\}$ converge simplement vers la fonction f telle que $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2° Convergence uniforme.

Définition. — On dit que la suite de fonctions $\{f_n\}$ converge uniformément (en abrégé C.U.) sur (α, β) vers la fonction f pour exprimer que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$, *indépendant de* $x \in (\alpha, \beta)$, tel que

$$n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Interprétation géométrique. — Voir graphe ci-dessous :



Remarquons que

$$\text{C.U. sur } (\alpha, \beta) \Rightarrow \text{C.S. sur } (\alpha, \beta).$$

Exemple :

Reprenons l'exemple *a*) du paragraphe 1°.

α) **On a la convergence uniforme de f_n vers f sur** $[\omega, \infty[$, où ω est une constante donnée positive. En effet, sur cet intervalle

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \left|1 - \frac{nx^2}{1+nx^2}\right| = \frac{1}{1+nx^2}.$$

Pour

$$n \geqslant N = \left[\frac{1-\varepsilon}{\omega^2 \varepsilon}\right] + 1, \qquad \text{on a} \qquad \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon.$$

β) **Peut-on avoir la convergence uniforme sur** $[0, \omega[$ **?** (Auquel cas il y aura convergence uniforme sur $[0, \infty[$.)
Supposons qu'il en soit ainsi, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N(\varepsilon) \text{ tel que l'on a } \left|f_n(x) - f(x)\right| \leqslant \varepsilon, \ \forall n \geqslant N \text{ et } \forall x \in [0, \omega[.$$

Choisissons $n > \dfrac{1}{\omega^2}$, alors $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \in [0, \omega[$, et, par suite,

$$\left|f_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right| = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Pour $n > \sup\left\{\dfrac{1}{\omega^2}, N(\varepsilon)\right\}$, on aurait donc $\dfrac{1}{2} \leqslant \varepsilon$, d'où la contradiction. Ainsi, $\{f_n\}$ ne converge pas uniformément vers f sur $[0, \omega[$.

Remarque. — Dans la définition de la convergence uniforme, il est précisé que N est indépendant de $x \in (\alpha, \beta)$, mais N dépend évidemment de l'intervalle (α, β) lui-même.

3° Critère de convergence uniforme. — Dire que la suite $\{f_n\}$ converge uniformément vers f sur (α, β) équivaut à dire que

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ indépendant de $x \in (\alpha, \beta)$ tel que m et $n \geqslant N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon$.

4° Interprétation de la convergence uniforme à l'aide d'une norme (MP_2). — Soit $\mathcal{B}[(a, b), \mathbb{R}]$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions définies sur (a, b) à valeurs dans $\mathbb{R}$ et *bornées* sur (a, b). On vérifie que l'expression $\sup\limits_{(a,b)} |f(x)|$ pour $f \in \mathcal{B}$ définit une norme sur $\mathcal{B}$ que l'on notera $\|f\|_\infty$.

Dire qu'*une suite* $\{f_n\}$ *converge uniformément vers* f *sur* (α, β), c'est dire que $\{f_n - f\}$ *tend vers zéro dans* $\mathcal{B}$ *muni de la norme* $\|.\|$.

Le critère de convergence uniforme ci-dessus montre que $\mathcal{B}$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ est un Banach.

II. — THÉORÈMES FONDAMENTAUX SUR LES SUITES DE FONCTIONS.

Ces théorèmes donnent une réponse au problème suivant :

Problème. — Étant donné une suite de fonctions $\{f_n\}$ dont on connaît les propriétés : f_n continue ou f_n dérivable, $\forall n$, peut-on affirmer que la fonction limite f est elle-même continue ou dérivable?

L'exemple I, *a*) montre qu'il n'en est rien, en général, pour la seule convergence simple, puisque la fonction limite n'est pas continue. On voit dans les théorèmes suivants l'intérêt de la convergence uniforme.

1° Théorème 6.II.1. (Concernant la continuité en un point). — Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers f sur $]\alpha, \beta[$ et telle que $\forall n, f_n$ est continue en $x_0 \in]\alpha, \beta[$, alors f est continue au point x_0.

Remarque. — Si f_n converge uniformément vers f sur $[\alpha, \beta[$ et si $\forall n, f_n$ est semi-continue à droite en α, alors f est semi-continue à droite en α.

Corollaire. (Concernant la continuité sur un intervalle). — Si f_n converge uniformément vers f sur (α, β) et si $\forall n, f_n$ est continue sur (α, β), alors la restriction de f à (α, β) est continue. [Si $(\alpha, \beta) = [\alpha, \beta)$, la fonction f est donc semi-continue à droite en α.]

On traduit ces résultats en disant que « la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue ».

2° Théorème 6.II.2. (Intégration). — Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions convergeant uniformément vers f sur $[\alpha, \beta]$ telle que

$$\forall n, f_n \text{ est intégrable sur } [\alpha, \beta],$$

alors

i) f est intégrable sur $[\alpha, \beta]$;

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{x_0}^{x_1} f_n(t)dt = \int_{x_0}^{x_1} f(t)dt,\ \forall x_0$ et $\forall x_1 \in [\alpha, \beta]$;

iii) $g_n(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$ vers $\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)dt$.

En fait, la propriété ii) « passage à la limite sous le signe $\int$ » peut être obtenu sous des conditions *bien moins restrictives*. (Voir Tome II. Intégration.)

3° Théorème 6.II.3. (Dérivation.) — Soit $\{f_n\}$ une suite de fonctions telle que

a) $\forall n, f'_n$ est définie et continue sur $[\alpha, \beta]$;

b) la suite $\{f'_n\}$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$ vers une fonction g;

c) $\exists x_0 \in [\alpha, \beta]$ tel que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0) = l$.

Alors,

i) f_n converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$ vers la fonction f définie par

$$f(x) = l + \int_{x_0}^{x} g(t)dt;$$

ii) f est dérivable sur $[\alpha, \beta]$ et l'on a $f' = g$.

Remarque. — Il s'agit de la semi-dérivabilité aux extrémités α et β (si $\alpha > a$ et $\beta < b$).

B. — Séries de fonctions

Soit une suite de fonctions $u_n\ :\ (a, b) \mapsto \mathbb{R}$ (éventuellement $a = -\infty$ ou $b = +\infty$).

On considère alors la série

$$u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

et la suite des sommes partielles associées

$$S_0(x) = u_0(x),\ \ \ldots,\ \ S_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x).$$

Soit Δ l'ensemble des x appartenant à (a, b) et tels que la série numérique $(u_n(x))$ soit convergente. L'ensemble Δ est appelé *domaine de définition* de la fonction $F\ :\ x \mapsto F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$. En tout point x de Δ on aura donc

$$S_n(x) \underset{n \to \infty}{\to} F(x).$$

(α, β) désignera un intervalle inclus dans Δ, avec $\alpha < \beta$, lorsqu'il en existe.

III. — CONVERGENCE SIMPLE ET CONVERGENCE UNIFORME D'UNE SÉRIE DE FONCTIONS.

1° Définitions.

a) On dit que la série de fonctions $(u_n(x))$ *converge simplement* vers sa somme sur un intervalle (α, β), pour exprimer que la série numérique $(u_n(x))$ est convergente, $\forall x \in (\alpha, \beta)$

$$S_n(x) \underset{n \to \infty}{\to} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \forall x \in (\alpha, \beta).$$

[Autrement dit, $\{S_n\}$ C. S. vers F sur (α, β).]

On a évidemment $(\alpha, \beta) \subset \Delta$.

b) On dit que la série de fonctions $(u_n(x))$ *converge uniformément* sur (α, β) vers sa somme lorsque la suite $\{S_n\}$ des sommes partielles converge uniformément sur (α, β) vers la fonction F :

$$x \mapsto F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

2° Critère de convergence uniforme. — Dire que la série (u_n) converge uniformément vers sa somme F sur (α, β) équivaut à dire que $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ *indépendant de* $x \in (\alpha, \beta)$ tel que

$$m \text{ et } n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow \left|u_n(x) + u_{n+1}(x) + \ldots + u_m(x)\right| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

3° Condition suffisante de convergence uniforme : convergence normale. — On dit que la série de terme général $u_n(x)$ *converge normalement sur* (α, β) lorsqu'il existe une série *numérique convergente* (v_n) telle que

$$|u_n(x)| \leqslant v_n, \qquad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Théorème 6.III.1. (Convergence normale.) — Si la série de terme général $u_n(x)$ converge normalement sur (α, β), alors elle converge uniformément sur (α, β).

Cette condition suffisante de convergence uniforme est *souvent utilisée.*

IV. — THÉORÈMES FONDAMENTAUX SUR LES SÉRIES DE FONCTIONS.

Ils sont relatifs aux propriétés de continuité, d'intégrabilité et de dérivabilité de la fonction limite

$$F : x \mapsto F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

1° Théorème 6.IV.1. (Continuité en un point.) — Soit $(u_n(x))$ une série convergeant uniformément vers sa somme sur (α, β) et telle que $\forall n, u_n$ est continue en $x_0 \in]\alpha, \beta[$.

Alors, sa somme F :

$$F : x \mapsto F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

est continue en x_0.

Remarque. — Si $(u_n(x))$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta[$ et si $\forall n$ la suite u_n est semi-continue à droite en α, alors F est semi-continue à droite en α.

Corollaire. (Continuité sur un intervalle). — Si $(u_n(x))$ converge uniformément sur (α, β) et si $\forall n$ la fonction u_n est continue sur (α, β), alors la restriction de F à (α, β) est continue [si $(\alpha, \beta) = [\alpha, \beta)$, F est semi-continue à droite en α].

2° Théorème 6.IV.2. (Intégration). — Soit $(u_n(x))$ une série convergeant uniformément vers sa somme sur $[\alpha, \beta]$ telle que

$$\forall n, u_n \text{ est intégrable sur } [\alpha, \beta],$$

alors

i) F définie par $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est intégrable sur $[\alpha, \beta]$;

ii) la série de terme général v_n défini par $v_n = \int_{x_0}^{x_1} u_n(t)dt$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x_1} u_n(t)dt = \int_{x_0}^{x_1} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right\} dt, \ \forall x_0 \text{ et } x_1 \in [\alpha, \beta];$$

iii) la série de terme général $U_n(x)$ défini par $U_n(x) = \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$ vers sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt$ et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_n(t)dt = \int_{x_0}^{x} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right\} dt.$$

On traduit ii) et iii) en disant que « l'intégrale de la somme est la somme des intégrales ».

3° **Théorème 6.IV.3. (Dérivation).** – Soit $(u_n(x))$ une série de fonctions telles que

a) $\forall n, u'_n$ est définie et continue sur $[\alpha, \beta]$;

b) la série $(u'_n(x))$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$;

c) $\exists x_0 \in [\alpha, \beta]$ tel que la série $(u_n(x_0))$ converge;

alors

i) $(u_n(x))$ converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$;

ii) $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ est dérivable sur $[\alpha, \beta]$ et l'on a

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x).$$

On traduit ii) en disant que « la dérivée de la somme est la somme des dérivées ».

En α et β il s'agit évidemment de la semi-dérivabilité.

EXERCICES DU CHAPITRE 6

6.I.1. ◆

On considère la suite de fonctions $f_n : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$, définie par

$$x \mapsto f_n(x) = \sin nxe^{-nx^2} + \sqrt{1-x^2}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

1° *Montrer que la suite de fonctions f_n converge simplement sur $[-1, 1]$ vers une fonction F, que l'on déterminera.*

2° *Montrer que f_n converge uniformément vers F sur $[\omega, 1]$, ω étant une constante positive.*

3° *Montrer que f_n ne converge pas uniformément vers F sur $[0, 1]$.*

6.I.2. ◆

On considère la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$x \mapsto f_n(x) = nxe^{-nx} + \sin x, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

1° *Quel est le domaine de convergence, Δ, de la suite de fonctions f_n?*

2° *Quelle est la nature de la convergence sur les intervalles, I, inclus dans Δ?*

6.I.3. ◆◆

1° *Montrer que la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, définie par*

$$f_n : x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{nx} + 1, \text{ pour } x \neq 0, \\ 1, \text{ pour } x = 0, \end{cases}$$

converge uniformément vers $f : x \mapsto f(x) = 1$ sur tout compact de $\mathbb{R}$.

2° *A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?*

6.I.4. ◆◆

On considère

a) une suite $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ qui converge vers une limite l; la limite l et la suite $u_n (\forall n \in \mathbb{N})$ sont supposées appartenir à un intervalle (a, b);

b) une suite de fonctions continues S_n: $x \mapsto S_n(x)$ convergeant uniformément sur (a, b) vers une fonction $S : x \mapsto S(x)$, lorsque $n \to +\infty$.

1° *Montrer que la suite $\{S_n(u_n)\}$ converge vers $S(l)$ pour $n \to +\infty$.*

2° *Étudier la suite $S_n(u_n)$, où $S_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$ et $u_n = \dfrac{1}{n}$.*

Comparer avec $S(l)$. Commenter le résultat.

6.I.5. ◆◆◆

Théorème de Dini.

Soit une suite de fonctions continues f_n: $[a, b] \mapsto \mathbb{R}$.

Pour chaque $x \in [a, b]$, la suite numérique $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ est supposée décroissante et bornée inférieurement.

1° *a) Montrer que la suite de fonctions* $f_n : x \mapsto f_n(x)$ *converge simplement sur* $[a, b]$ *vers une fonction* f.
b) Démontrer que l'on a

$$f \text{ continue sur } [a, b] \Rightarrow f_n \text{ converge uniformément sur } [a, b] \text{ vers } f.$$

c) Que peut-on dire lorsque la suite $\{f_n(x)\}$ *est croissante et majorée?*

2° *Application : On considère la suite de polynômes définie par la relation récurrente suivante :*

$$P_0 = 0,$$
$$2\,P_{n+1}(x) = x + 2\,P_n(x) - P_n^2(x).$$

a) Vérifier que, pour tout $x \in [0, 1]$, *on a* $0 \leqslant P_n < \sqrt{x}$.
[Pour cela on pourra considérer la relation

$$2(\sqrt{x} - P_{n+1}(x)) = (\sqrt{x} - P_n(x))(2 - \sqrt{x} - P_n(x).]$$

b) Montrer que la suite numérique $\{P_n(x)\}_0^\infty$ *est croissante, lorsque* $x \in [0, 1]$, *et en déduire que la suite de fonctions* P_n *converge uniformément sur* $[0, 1]$ *vers la fonction* $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

6.I.6. ◆◆◆

On considère une fonction continue $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *vérifiant* $|f(x)| < |x|$, $\forall x \neq 0$, *et soit A une constante positive donnée.*

1° *Démontrer que* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha(\varepsilon) > 0$ *tel que*

$$|x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon.$$

2° *Soit* $k = \sup\limits_{[\alpha, A] \cup [-A, -\alpha]} \left\{ \left| \dfrac{f(x)}{x} \right| \right\}$. *Vérifier que l'on a* $k < 1$.

3° *Déduire de ce qui précède la convergence uniforme sur* $[-A, A]$ *(et par suite sur tout compact de* $\mathbb{R}$*) de la suite* $f^n (= f \circ f \circ \ldots \circ f)$ *vers zéro.*

6.II.1. ◆

On considère la suite de fonctions $f_n : [0, 2] \mapsto \mathbb{R}$ *définie par*

$$x \mapsto f_n(x) = n^2 x(1-x)^n + \operatorname{Arc\,sin}(x-1), \quad n \text{ entier positif.}$$

1° *Quel est le domaine de convergence,* Δ, *de la suite de fonctions* $\{f_n\}$?

2° *Montrer que la suite* $\{f_n\}$ *converge uniformément sur* $[\alpha, 2-\alpha]$ *(*α *constante positive) vers sa fonction limite* f.

3° *Évaluer* $\displaystyle\int_0^1 [f_n(x) - f(x)]\,dx$ *et en déduire que l'on ne peut avoir convergence uniforme sur* $[0, 1]$.

6.II.2. ◆

1° *Montrer que la suite* $\{f_n\}$ *de fonctions réelles, définies sur* $[0, 1]$ *par*

$$f_n : x \mapsto f_n(x) = \frac{ne^{-x} + x^2}{n + x}, \quad n \geqslant 1,$$

converge uniformément sur $[0, 1]$ *vers une fonction limite* f, *que l'on déterminera.*

2° *En déduire la nature de la suite numérique* $\{u_n\}$ *telle que*

$$u_n = \int_0^1 \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}\,dx,$$

lorsque $n \to +\infty$.

6.II.3. ◆◆

1° *Montrer que la suite* $\{f_n\}$ *de fonctions réelles, définies sur* [0, 1] *par*

$$f_n : x \mapsto f_n(x) = \frac{n(x^3+x)e^{-x}}{nx+1}, \qquad n \geqslant 0,$$

converge simplement sur [0, 1] *vers une fonction* f, *que l'on déterminera.*

2° *Montrer que l'on a convergence uniforme sur tout intervalle* $[\varepsilon_0, 1]$ *(*ε_0 *est une constante positive). A-t-on convergence uniforme sur* [0, 1]*?*

3° *Montrer que* $|f_n(x)-f(x)|$ *est bornée sur* [0, 1].

4° *Déduire des questions 2° et 3° la nature de la suite:* $u_n = \int_0^1 f_n(t)dt$, *lorsque* $n \to +\infty$. [*Pour cela écrire* $u_n = \int_0^\alpha f_n(t)dt + \int_\alpha^1 f_n(t)dt$.]

6.II.4. ◆◆◆

On considère la suite $\{f_n\}$ *de fonctions réelles,* $f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ $(n>0)$ *définies comme suit*

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n \operatorname{Log}\left(1-\dfrac{1}{nx}\right)}, & si\ x<0\ ou\ x>\dfrac{1}{n}, \\ 0 & , si\ 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

1° *Vérifier que* f_n *est continue sur* $\mathbb{R}$.

2° *Montrer que la suite* $\{f_n\}$ *converge simplement sur* $\mathbb{R}$ *vers une fonction* f, *que l'on déterminera.*

3° *En majorant convenablement* $|f_n(x)-f(x)|$, *montrer que la convergence établie à la question 2° est uniforme sur* $\mathbb{R}$. *(*$\varepsilon>0$ *étant donné, on pourra distinguer les trois cas suivants:* $x<0$, $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon$, $x>\varepsilon$.*)*

4° *Construire le graphe de la fonction* f_n. *Points remarquables. Branches infinies. Montrer que le maximum de* $|f_n-f|$ *a lieu pour* $x = \dfrac{1}{n}$ *et vaut* $\dfrac{1}{n}$. *Retrouver ainsi le résultat précédent.*

6.III.1. ◆

On considère la série de fonctions de terme général u_n,

$$u_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ u_n(x) = (-1)^n \frac{e^{-nx^2}}{n^2+1}, \qquad u_0(x) = 1.$$

1° *Déterminer le domaine de convergence* Δ.

2° *Montrer que la série converge uniformément sur* Δ.

6.III.2. ◆

1° *On considère la série de fonctions suivantes :*

$$\frac{\sin x}{x^2+1}+\frac{\sin 2x}{x^2+2^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{x^2+n^2}+\ldots$$

Déterminer le domaine de convergence Δ *et étudier la convergence uniforme sur* Δ.

2° *Mêmes questions pour la série de fonctions,*

$$\frac{x^2 \sin x}{x^2+1}+\frac{x^2 \sin 2x}{x^2+2^2}+\ldots+\frac{x^2 \sin nx}{x^2+n^2}+\ldots$$

6.IV.1. ◆

Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+\sin nx}$ *est définie sur* $\mathbb{R}$.

Étudier la périodicité et la continuité de cette fonction.

6.IV.2. ◆◆

1° *Quel est le domaine de définition,* Δ, *de la fonction*

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1} \,?$$

Montrer que f *est continue sur* Δ.

2° *Quel est le domaine de définition,* Δ_1, *de la fonction*

$$g : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1} \,?$$

Montrer que g *est de classe* C^1 *sur* Δ_1.

6.IV.3. ◆◆

On considère la série de terme général $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^x}$ $(x \in \mathbb{R})$.

1° *Pour quelles valeurs de* x *cette série est-elle convergente ; absolument convergente ?*

2° *Soit* $S_n(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{p^x}$ *et* $S(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p^x}$ *lorsque la série est convergente. Montrer que l'on a*

$$|S_n(x)-S(x)| < \frac{1}{(n+1)^x}$$

et en déduire que la série $\left(\frac{(-1)^n}{n^x}\right)$ *converge uniformément sur* $[x_0, +\infty[$ *(*x_0 *étant une constante positive).*

En déduire que S *est continue sur* $]0, \infty[$.

6.IV.4. ◆◆◆

On considère l'équation (de ***Fredholm****)*

$$(F): \qquad \varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds + f(x),$$

où K (resp. f) est une fonction réelle donnée définie et continue sur $[a, b]\times[a, b]$ (resp. sur $[a, b]$), λ est un nombre réel et φ une fonction inconnue, **supposée intégrable sur (a, b).**

1° *a) On pose $\varphi_0(x) = f_0(x)$ et $\varphi_n(x) = \int_a^b K(x, s)\varphi_{n-1}(s)ds$, pour $n\geqslant 1$. Montrer que φ_n est définie, continue sur $[a, b]$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).*

b) Établir que la fonction $\psi : x \mapsto \psi(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p\varphi_p(x)$ est définie et continue sur $[a, b]$, $\forall\lambda$ vérifiant la relation suivante:

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}, \text{ où } M = \sup_{[a, b]\times[a, b]} |K(x, y)|.$$

c) Vérifier que ψ est solution de (F).

2° *a) Montrer que (F) ne peut admettre que des solutions φ continues.*

b) En déduire que ψ est la seule solution de (F) pour $|\lambda|<\dfrac{1}{M(b-a)}$.

6.IV.5. ◆◆◆ *On considère la suite récurrente de fonctions g_n définies sur $[0, 1]$ comme suit*

$$g_0(x) = 1, \; g_n(x) = 1+ \int_0^x g_{n-1}(t-t^2)dt.$$

1° *Montrer que g_n est une fonction polynomiale qui vérifie*

$$g_n(x)+g_n(1-x) = k, \qquad k \text{ est une constante.}$$

2° *a) Vérifier que l'on a*

$$0 \leqslant g_n(x)-g_{n-1}(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

b) En considérant la série

$$g_0(x) + [g_1(x)-g_0(x)] + \dots + (g_n(x)-g_{n-1}(x)) + \dots,$$

montrer que la suite $\{g_n\}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction g, qui est dérivable, et qu'elle vérifie la relation

$$g'(x) = g(x-x^2), \quad \forall x \in [0, 1].$$

6.I.1.

1° Pour chaque x *fixé*, on a $e^{-nx^2} \sin nx \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (puisque $|\sin nx| e^{-nx^2} \leqslant e^{-nx^2}$ pour $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$), donc $F(x) = \sqrt{1-x^2}$.

2° On a, évidemment,

$$|f_n(x) - F(x)| = e^{-nx^2} |\sin nx| \leqslant e^{-nx^2} \leqslant e^{-n\omega^2}, \text{ pour } x \in [\omega, 1].$$

Puisque

$$e^{-n\omega^2} \underset{n\to\infty}{\to} 0, \ \exists N(\varepsilon), \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow e^{-n\bar{\omega}^2} < \varepsilon.$$

Donc, on a

$$n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in [\omega, 1].$$

3° Supposons que l'on ait la convergence uniforme sur [0, 1]. Alors, on a aussi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad \left.\begin{matrix} n \geqslant N(\varepsilon) \\ x \in [0, 1] \end{matrix}\right\} \Rightarrow |f_n(x) - F(x)| < \varepsilon$$

et, en particulier,

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - F\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \sin(1) e^{-\frac{1}{n}} < \varepsilon, \ \forall n \geqslant N(\varepsilon).$$

Ceci étant impossible, on ne pourra donc avoir la convergence uniforme sur [0, 1].

6.I.2.

1° Pour $x \geqslant 0$ (resp. $x < 0$), on a $nxe^{-nx} \underset{n\to\infty}{\to} 0$ (resp. $-\infty$); donc f_n converge simplement vers $F : x \mapsto F(x) = \sin x$ sur $[0, \infty[$ et $\Delta = [0, \infty[$.

2° *a*) **Convergence uniforme sur $[\omega, A]$. (ω et A sont des constantes positives, avec $\omega < A$).**
En effet,

$$|f_n(x) - F(x)| = |nxe^{-nx}| \leqslant nAe^{-n\omega}, \ \forall x \in [\omega, A].$$

Or, $nAe^{-n\omega} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, donc il existe $N(\varepsilon)$, tel que $n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow nAe^{-n\omega} < \varepsilon$ et, par suite,

$$n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x)-F(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in [\omega, A].$$

***b*) Convergence uniforme sur (ω, ∞).**
En effet,

$$nxe^{-nx} = ye^{-y} \underset{y\to+\infty}{\to} 0,$$

c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon, \exists K(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad y \geqslant K(\varepsilon) \Rightarrow |ye^{-y}| < \varepsilon.$$

Pour $x \in [\omega, \infty[$ ***et*** $n \geqslant N_1(\varepsilon) = \left[\frac{K(\varepsilon)}{\omega}\right] + 1$ ([.] désignant la partie entière), on aura

$$nx \geqslant K(\varepsilon) \quad \text{et, par suite,} \quad |nxe^{-nx}| < \varepsilon,$$

ou encore

$$x \in [\omega, \infty[\text{ et } n \geqslant N_1(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x)-F(x)| < \varepsilon.$$

***c*) On n'a pas convergence uniforme sur [0, ω].**
En effet, *supposons* que l'on ait convergence uniforme, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x)-F(x)| = |nxe^{-nx}| < \varepsilon, \ \forall x \in [0, \omega].$$

Pour $x = \frac{1}{n}$, ***avec*** $n > \frac{1}{\omega}$, on obtient $\left(\text{puisque } \frac{1}{n} \in [0, \omega]\right)$

$$\left|f_n\left(\frac{1}{n}\right) - F\left(\frac{1}{n}\right)\right| = e^{-1} < \varepsilon,$$

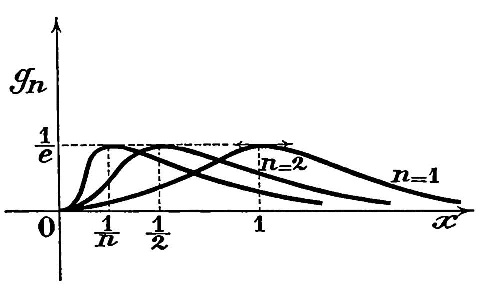
ce qui est contradictoire.

Interprétation graphique.

Soit

$$g_n(x) = f_n(x) - \sin x = nxe^{-nx}.$$

Le faisceau des graphes G_n des fonctions g_n est représenté ci-dessous sur $[0, \infty[$. On constate que les g_n ont un maximum pour $x = \frac{1}{n}$ et que ce maximum vaut $\frac{1}{e}$.



Alors, $\sup\limits_{]0,\infty[} |g_n(x)| = \frac{1}{e}$ et la suite $\{g_n\}$ ne peut converger uniformément vers 0 sur $[0, \infty[$. [Voir l'interprétation géométrique au paragraphe I.2.]

6.I.3.

1° Soit $f : x \mapsto f(x) = 1$ et K un compact de $\mathbb{R}$. Il existe une constante A positive telle que $K \subset [-A, A]$.

Compte tenu de la majoration $|\sin X| \leqslant |X|$, $\forall X \in \mathbb{R}$, on obtient sur $[-A, A]$,

— *pour* $x \neq 0$:

$$|f_n(x) - f(x)| = x^2 \left|\sin \frac{1}{nx}\right| \leqslant \frac{|x|}{n} \leqslant \frac{A}{n};$$

— *pour* $x = 0$:

$$|f_n(0) - f(0)| = 0 \leqslant \frac{A}{n}.$$

Donc

$$n \geqslant N(\varepsilon) = \left[\frac{A}{\varepsilon}\right] + 1 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall x \in [-A, A].$$

Nous avons bien convergence uniforme sur $[-A, A]$ (et, par suite, sur K) de f_n vers f, lorsque $n \to \infty$.

2° Supposons que f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particulier, on aurait

$$|f_N(x) - f(x)| = x^2 \left|\sin \frac{1}{Nx}\right| \leqslant \varepsilon, \ \forall x \neq 0,$$

ou encore, en posant $y = \dfrac{1}{Nx}$,

$$\left|\frac{\sin y}{y}\right| \leqslant N^2 |y|, \ \forall y \neq 0,$$

ce qui entraînerait que le rapport $\dfrac{\sin y}{y} \to 0$, lorsque $y \to 0$.

Nous ne pouvons donc avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}$, de f_n vers f.

6.I.4.

1° *a*) S_n converge uniformément vers S sur (a, b), donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall x \in (a, b).$$

En particulier,

$$(1) \qquad n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |S_n(u_n) - S(u_n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

b) Exprimons le fait que S est continue au point l :

$$(2) \qquad \exists\alpha(\varepsilon) > 0 \quad \text{tel que} \quad |x - l| \leqslant \alpha \Rightarrow |S(x) - S(l)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

c) $u_n \underset{n\to\infty}{\to} l$, donc il existe un entier $\nu(\alpha)$ tel que

$$(3) \qquad n \geqslant \nu(\alpha) \Rightarrow |u_n - l| \leqslant \alpha.$$

On déduit alors de (2) la relation

$$(4) \qquad n \geqslant \nu \Rightarrow |S(u_n) - S(l)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

d) **En résumé** : Des relations (1) et (4) on déduit

$$n \geqslant \sup\{N(\varepsilon), \nu\} \Rightarrow |S_n(u_n) - S(l)| \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, $S_n(u_n) \to S(l)$, lorsque $n \to \infty$.

2° La fonction limite, S, est définie par

$$S : x \mapsto S(x) = \begin{cases} 1 \text{ pour } x \neq 0, \\ 0 \text{ pour } x = 0, \end{cases}$$

donc

$$S(l) = S(0) = 0.$$

Nous constatons que $S_n(u_n) = \frac{1}{2} \not\to S(l) = 0$, lorsque $n \to \infty$, et nous en déduisons que l'on ne peut avoir convergence uniforme de S_n vers S dans tout intervalle (a, b) contenant $l = 0$ et les u_n (à partir d'un certain rang).

6.I.5.

1° *a*) Pour chaque $x \in [a, b]$, la suite numérique $\{f_n(x)\}$ est décroissante et bornée inférieurement, donc elle converge vers une limite finie, que l'on notera $f(x)$. De façon équivalente, on peut dire que la suite de fonctions f_n converge simplement vers f.

b) Soit ε un nombre réel positif.
Pour chaque $x_0 \in [a, b]$, il existe un entier $N(\varepsilon, x_0)$ tel que

$$n \geqslant N(\varepsilon, x_0) \Rightarrow |f_n(x_0) - f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

En particulier,

$$(1) \qquad |f_N(x_0) - f(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, la fonction $(f_N - f)$ est continue sur le compact $[a, b]$, donc uniformément continue :

(2) $\exists \alpha(\varepsilon, N) > 0$ tel que $|x - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |(f_N(x) - f(x)) - (f_N(x_0) - f(x_0))| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

De (1) et de (2) nous déduisons

$$|x - x_0| \leqslant \alpha(\varepsilon, N(\varepsilon, x_0)) \Rightarrow |f_N(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

ou encore

(3) $x \in O_{x_0} = \{x \in [a, b]; |x - x_0| < \alpha(\varepsilon, N(\varepsilon, x_0))\} \Rightarrow |f_N(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Du recouvrement du compact $[a, b]$ par les ouverts O_{x_0} $\left[[a, b] = \bigcup_{x_0 \in [a,b]} O_{x_0}\right]$, on peut extraire un recouvrement fini numéroté $O_{x_0^1}, \ldots, O_{x_0^p}$.

Soit alors $N_0(\varepsilon) = \sup \{N(\varepsilon, x_0^h)\}$ pour $h = 1, 2, \ldots, p$ et x un point quelconque de $[a, b]$.

Le point x appartient à un ouvert $O_{x_0^h}$, donc la relation (3) entraîne que l'on a

$$|f_{N(\varepsilon, x_0^h)}(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon,$$

$\forall n \geqslant N_0(\varepsilon)$, on aura alors

$$0 \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant f_{N_0(\varepsilon)}(x) - f(x) \leqslant f_{N(\varepsilon, x_0^h)}(x) - f(x) \leqslant \varepsilon$$

[puisque la suite $\{f_n(x)\}_1^\infty$ tend en décroissant vers $f(x)$].

En résumé, on a

$$n \geqslant N_0(\varepsilon) \Rightarrow 0 \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

Autrement dit, $\{f_n\}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

c) Considérer la suite $\{-f_n\}$ pour se ramener au cas étudié.

2° *a*) $0 \leqslant P_n(x) < \sqrt{x}$.

Cette double inégalité est vérifiée pour le polynôme P_0.

Supposons-la satisfaite pour P_n, nous allons montrer qu'elle est vraie pour P_{n+1}.

Puisque l'on a $2 P_{n+1}(x) = (x - P_n^2(x)) + 2 P_n(x)$, le polynôme $2 P_{n+1}(x)$, qui est la somme de deux termes positifs ou nuls, est nécessairement positif ou nul.

En considérant la relation suivante :

$$2\left(\sqrt{x} - P_{n+1}(x)\right) = \left(\sqrt{x} - P_n(x)\right)\left(2 - \sqrt{x} - P_n(x)\right),$$

on constate que $\sqrt{x} - P_{n+1}(x)$ sera positif si $2 - \sqrt{x} - P_n(x)$ est positif; or on sait que

$$2 - \sqrt{x} - P_n(x) > 2 - 2\sqrt{x} > 0,$$

donc

$$\sqrt{x} - P_{n+1}(x) > 0.$$

b) $\{P_n\}$ croissante.

En effet, $2(P_{n+1}(x) - P_n(x)) = x - P_n^2(x) > 0$, d'après la question 2°, *a*).

La suite $\{P_n(x)\}$, étant croissante et bornée supérieurement par $\sqrt{x}$, admet donc une limite $f(x)$ qui doit vérifier la relation

$$2f(x) = x + 2f(x) - f^2(x),$$

c'est-à-dire $f(x) = \sqrt{x}$.

La fonction limite f est continue sur $[0, 1]$.
Nous sommes bien placés dans les conditions permettant l'application du 1° et, par suite, P_n converge uniformément sur $[0, 1]$ vers $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

6.I.6.

1° En exprimant le fait que f est continue à l'origine, avec $f(0) = 0$, on obtient bien la propriété indiquée au 1°.

2° Soit K_0 le compact $[-A, -\alpha] \cup [\alpha, A]$,

$$\frac{f(x)}{x} \text{ continue sur } K_0 \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| \text{ continue sur } K_0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| \text{ atteint son maximum sur ce compact}$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in K_0 \quad \text{tel que} \quad \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \left|\frac{f(x_0)}{x_0}\right| = k, \ \forall x \in K_0.$$

Si $k \geqslant 1$, on aurait $|f(x_0)| \geqslant |x_0|$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $|f(x_0)| < |x_0|$.
On a donc nécessairement $k < 1$.

3° Convergence uniforme de f^n vers zéro sur $[-A, A]$.
Il est clair que la suite $\{|f^n(x)|\}_{n=1}^{\infty}$ est décroissante [en effet,

$$|f^{n+1}(x)| = |f(f^n(x))| \leqslant |f^n(x)|].$$

De plus, on sait que l'on a

$$\begin{aligned} x \in]-\alpha, \alpha[&\Rightarrow |f(x)| < \varepsilon \qquad \text{(cf. question 1°)}, \\ x \in K_0 &\Rightarrow |f(x)| \leqslant k|x| \qquad \text{(cf. question 2°)}. \end{aligned}$$

Soit N l'entier vérifiant l'inégalité suivante :

$$k^N A < \alpha \leqslant k^{N-1}.A.$$

Supposons que $|f^N(x)| \geqslant \alpha$ pour un choix convenable de x.
Alors

$$|f(x)| \geqslant |f^2(x)| \geqslant \ldots \geqslant |f^N(x)| \geqslant \alpha.$$

Puisque $f(x), f\,(x), \ldots, f^N(x)$ appartiennent à K_0, on aura

$$\begin{aligned} &|f(x)| \leqslant k|x|, \\ &|f^2(x)| = |f(f(x))| \leqslant k|f(x)| \leqslant k^2|x| \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &|f^N(x)| \leqslant k^N|x| \leqslant k^N.A < \alpha. \end{aligned}$$

Ceci est en *contradiction* avec l'hypothèse : $|f^N(x)| \geqslant \alpha$.

En résumé :

$$|f^N(x)| < \alpha, \ \forall x \in [-A, A].$$

On a donc

$$n > N \Rightarrow |f^n(x)| \leqslant |f^{N+1}(x)| = |f(f^N(x))| \leqslant \varepsilon \text{ (cf. la question 1°).}$$

6.II.1.

1° Étudions la convergence de la suite $\{f_n(x)\}$.

— **Pour** $x \in]0, 2[$, on a $|x-1| < 1$, donc

$$n^2x(1-x)^n \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty$$

et, par suite,

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\to} \operatorname{Arc\,sin}(x-1).$$

— **Pour** $x = 0$, on a $n^2x(1-x)^n = 0 \underset{n\to\infty}{\to} 0$, donc

$$f_n(0) \underset{n\to\infty}{\to} \operatorname{Arc\,sin}(-1).$$

— **Pour** $x = 2$, on a $n^2x(1-x)^n = 2n^2(-1)^n$ qui est le terme général d'une suite divergente, donc la suite $\{f_n(2)\}$ diverge.

En résumé, le domaine Δ de convergence sera $[0, 2[$ et la fonction limite sera $\operatorname{Arc\,sin}(x-1)$.

2° Sur $[\alpha, 2-\alpha]$ (α constante vérifiant $0 < \alpha < 1$) on aura $|1-x| \leqslant 1-\alpha$, donc

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2n^2|1-\alpha|^n < \varepsilon \text{ dès que } n \text{ est « assez grand »}$$

[c'est-à-dire $\forall n \geqslant N(\varepsilon)$, puisque $n^2(1-\alpha)^n \to 0$ lorsque $n \to \infty$].
Il en résulte que l'on a bien convergence uniforme de f_n vers f sur $[\alpha, 2-\alpha]$.

3° Calculons $\int_0^1 [f_n(x) - f(x)]\, dx = \int_0^1 n^2x(1-x)^n dx$.
On a, en posant $X = 1-x$,

$$n^2 \int_0^1 x(1-x)^n dx = n^2 \int_0^1 X^n(1-X)dX = n^2 \left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right] \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

En conséquence, l'intégrale $\int_0^1 f_n(x)dx$ ne tend pas vers $\int_0^1 f(x)dx$ (lorsque $n \to \infty$) et, par suite, on ne peut avoir convergence uniforme de f_n vers f sur $[0, 1]$ (cf. théorème **6.II.2.**).

6.II.2.

Il est clair que, pour chaque $x \in [0, 1]$, on a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x} = f(x).$$

De plus,

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x^2 - xe^{-x}|}{n + x} \leqslant \frac{2}{n},$$

donc

$$n \geqslant N(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\varepsilon}\right] + 1 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \ \forall x \in [0, 1],$$

propriété qui caractérise la convergence uniforme de f_n vers f sur $[0, 1]$.
Le théorème **6**.II.2 nous permet alors d'affirmer que

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^1 f(x)dx,$$

c'est-à-dire que l'on a $u_n \to 1 - e^{-1}$ lorsque $n \to \infty$.

6.II.3.

1° Pour x fixé et appartenant à l'intervalle $]0, 1]$, il est clair que l'on a

$$f_n(x) = \frac{(x^3 + x)ne^{-x}}{nx + 1} \underset{n\to\infty}{\to} (x^2+1)e^{-x}.$$

Pour $x = 0$,

$$f_n(0) = 0 \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

En résumé, on constate que la suite de fonctions $\{f_n\}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction f définie par

$$f : x \mapsto f(x) = \begin{cases} (x^2 + 1)e^{-x} & \text{pour } x \in]0, 1], \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

2° La fonction f_n est continue sur son domaine de définition $[0, 1]$, $\forall n$.
Si l'on avait convergence uniforme de f_n vers f sur $[0, 1]$, la fonction limite, f, serait nécessairement continue sur $[0, 1]$ et, en particulier, à l'origine. Ceci est visiblement faux $[f(x) \underset{x\to 0}{\to} 1 \neq f(0)]$. Nous n'avons donc pas convergence uniforme sur $[0, 1]$.

En fait, f_n converge uniformément vers f sur tout intervalle $[\alpha, 1]$ (α étant une constante appartenant à l'intervalle $]0, 1[$). En effet, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{(x^2+1)e^{-x}}{nx+1} \leqslant \frac{2}{nx} \leqslant \frac{2}{n\alpha}, \text{ pour } x \in [\alpha, 1],$$

donc $\forall \varepsilon > 0$, on a aussi

$$n \geqslant N(\varepsilon) = \left[\frac{2}{\alpha\varepsilon}\right] + 1 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \ \forall x \in [\alpha, 1],$$

propriété qui exprime la convergence uniforme de f_n vers f sur $[\alpha, 1]$.

3° **Pour $x \in]0, 1]$** on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant (x^2+1)e^{-x} \leqslant 2.$$

— **Pour $x = 0$,** on a

$$|f_n(0) - f(0)| = 0 \leqslant 2.$$

On en déduit que l'on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant 2, \ \forall x \in [0, 1].$$

4° De la convergence uniforme sur $[\alpha, 1]$ de f_n vers f, on déduit

$$\int_\alpha^1 f_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\to} \int_\alpha^1 f(x)dx.$$

Donc, $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$ tel que

$$n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow \left|\int_\alpha^1 f_n(x)dx - \int_\alpha^1 f(x)dx\right| \leqslant \varepsilon.$$

En particulier, pour $\varepsilon = \alpha, \exists N(\alpha)$ tel que

(1) $$n \geqslant N(\alpha) \Rightarrow \left|\int_\alpha^1 f_n(x)dx - \int_\alpha^1 f(x)dx\right| \leqslant \alpha.$$

De la question 3°, on déduit que l'on a

(2) $$\left|\int_0^\alpha f_n(x)dx - \int_0^\alpha f(x)dx\right| = \left|\int_0^\alpha [f_n(x) - f(x)]dx\right| \leqslant \int_0^\alpha \left|f_n(x) - f(x)\right| dx \leqslant 2\alpha.$$

En résumé, en utilisant les relations (1) et (2), on déduit que l'on a

$$n \geqslant N(\alpha) \Rightarrow \left|\int_0^1 f_n dx - \int_0^1 f(x)dx\right| \leqslant 3\alpha.$$

Autrement dit,

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)dx \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^1 f(x)dx = 3 - 6e^{-1}.$$

6.II.4.

1° La fonction f_n est évidemment continue pour $x \in \mathbb{R} - \{0\} - \left\{\frac{1}{n}\right\}$.

— **Pour $x \to 0_-$**, on a

$$f_n(x) = \frac{1}{n \operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{nx}\right)} \to 0 = f_n(0).$$

— **Pour $x \to 0_+$**, on a

$$f_n(x) = 0 \to 0 = f_n(0).$$

La fonction f_n est bien continue au point $x = 0$.

De la même façon, on peut établir sa continuité au point $x = \frac{1}{n}$.

2° Montrons que la suite de fonctions f_n converge simplement, sur $\mathbb{R}$, vers la fonction $f : x \mapsto f(x) = -x$.

— **Pour $x < 0$**, on a

$$f_n(x) = \frac{1}{n \operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{nx}\right)} \sim \frac{1}{n\left(-\frac{1}{nx}\right)} = -x \; [n \to +\infty],$$

donc $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = -x$.

— **Pour $x = 0$**, on a

$$f_n(0) = 0 \underset{n \to \infty}{\to} 0 = f(0).$$

— **Pour $x > 0$**, il existe un entier $N_x = \left[\frac{1}{x}\right] + 1$ tel que

$$n \geqslant N_x \Rightarrow x > \frac{1}{n} \Rightarrow f_n(x) = \frac{1}{n \operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{nx}\right)} \underset{n \to \infty}{\to} -x = f(x).$$

On constate ainsi que l'on a bien la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de f_n vers f.

3° Soit ε positif, choisi arbitrairement.

— **Pour $x < 0$**, on a $\left(\text{en posant } y = \frac{1}{nx}\right)$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{n \operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{nx}\right)} + x \right| = \frac{1}{n} \left| \frac{1}{y} + \frac{1}{\operatorname{Log}(1 - y)} \right|.$$

La fonction $\varphi : y \mapsto \varphi(y) = \left| \frac{1}{y} + \frac{1}{\operatorname{Log}(1 - y)} \right|$ est définie continue et bornée sur $[-\infty, 1]$ (cf. note ((1)) à la fin de cet exercice) :

$$\varphi(y) \leqslant M, \; \forall y \in]-\infty, 1], \; M \text{ étant une constante.}$$

Donc
$$n \geqslant N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{M}{n} \leqslant M\varepsilon, \ \forall x < 0.$$

— **Pour $x \geqslant \epsilon$,** on a
$$n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow x \geqslant \varepsilon \geqslant \frac{1}{n} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \frac{\varphi(y)}{n} \leqslant M\varepsilon, \ \forall x \geqslant \varepsilon.$$

— **Pour $0 \leqslant x \leqslant \epsilon$,** on a
$$f_n(x) = 0, \text{ ou } \frac{1}{n \operatorname{Log}\left(1 - \dfrac{1}{nx}\right)},$$
donc
$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \begin{cases} |x| \\ \text{ou} \\ \dfrac{\varphi(y)}{n}. \end{cases}$$

A fortiori,
$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varphi(y)}{n} + |x| \leqslant \frac{M}{n} + \varepsilon.$$

Pour $n \geqslant N(\varepsilon)$, on aura donc
$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant (M+1)\varepsilon, \ \forall x \in [0, \varepsilon].$$

En résumé, on a
$$n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant (M+1)\varepsilon, \ \forall x \in \mathbb{R},$$
propriété qui traduit la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de f_n vers f.

4° Le graphe de f_n se construit à partir de l'étude de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{n \operatorname{Log}\left(1 - \dfrac{1}{nx}\right)}$ (n étant fixé).

Posons $x = \dfrac{1}{2n} + X$, alors $\dfrac{1}{n \operatorname{Log}\left(1 - \dfrac{1}{nx}\right)} = y$ devient $\dfrac{1}{n \operatorname{Log}\left(\dfrac{X - \frac{1}{2n}}{X + \frac{1}{2n}}\right)} = Y,$
d'où l'on déduit le centre de symétrie : le point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2n}, 0\right)$. Il suffit d'étudier les variations de la fonction précédente pour $X \geqslant \dfrac{1}{2n}$.

Ces variations sont immédiates, le calcul de la dérivée donne
$$Y' = -\frac{1}{\left(n^2X^2 - \dfrac{1}{4}\right) \operatorname{Log}^2 \dfrac{2nX - 1}{2nX + 1}}.$$

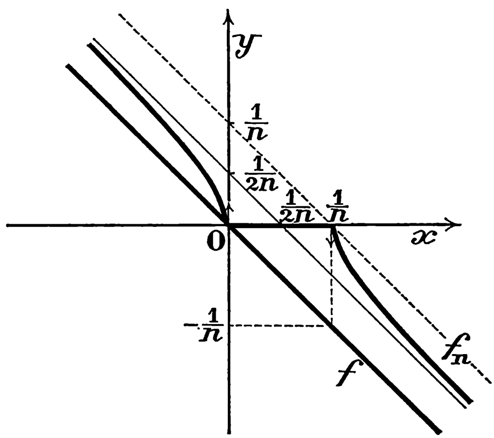
Étude des branches infinies. — Pour $X \to +\infty$, y admet un développement limité à partie polaire qui s'obtient à partir du développement de $\operatorname{Log}\left(1 - \dfrac{1}{nx}\right)$:
$$\operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{nx}\right) = -\frac{1}{nx} - \frac{1}{2n^2x^2} - \frac{1}{3n^3x^3} + \frac{1}{x^3} 0\left(\frac{1}{x}\right).$$

On trouve alors

$$y = -x + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2x} + \frac{1}{x}0\frac{1}{x},$$

d'où l'asymptote d'équation $y = -x + \frac{1}{2n}$ et la position par rapport à l'asymptote.

Ces résultats justifient le graphique suivant :



Pour étudier $f_n - f$ il suffit d'étudier

$$g_n : x \mapsto g_n(x) = f_n(x) + x - \frac{1}{2n}, \quad \text{pour } x \geqslant \frac{1}{2n},$$

à cause de la symétrie, l'étude de $f_n(x) + x$ s'en déduisant immédiatement.

Entre $\frac{1}{2n}$ et $\frac{1}{n}$ le maximum de g_n est atteint au point $\frac{1}{n}$ et vaut $\frac{1}{2n}$.

Il reste à étudier g_n, pour $x \geqslant \frac{1}{n}$, c'est-à-dire

$$Z(X) = X + \frac{1}{n \operatorname{Log} \dfrac{nX - \frac{1}{2}}{nX + \frac{1}{2}}} \quad \left(\text{en posant } x - \frac{1}{2n} = X\right) \text{ pour } X \geqslant \frac{1}{2n},$$

Z admet pour dérivée

$$Z' = 1 - \frac{1}{\left(u^2 - \frac{1}{4}\right) \operatorname{Log}^2 \dfrac{u - \frac{1}{2}}{u + \frac{1}{2}}} \qquad (nX = u).$$

Pour $u > \frac{1}{2}$, on vérifie que l'on a

$$-\operatorname{Log}\frac{u-\frac{1}{2}}{u+\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{u^2-\frac{1}{4}}},$$

$\left(\text{on étudiera les variations de } u \mapsto \frac{1}{\sqrt{u^2-\frac{1}{4}}} + \operatorname{Log}\frac{u-\frac{1}{2}}{u+\frac{1}{2}}\right)$ alors $Z' \leqslant 0$, pour $u \geqslant \frac{1}{2}$ et g_n décroît à partir de $x = \frac{1}{n}$, donc $g_n(x) \leqslant g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n}$, pour $x \geqslant \frac{1}{n}$. On en déduit alors que $|g_n(x)|$ admet son maximum pour $x = \frac{1}{n}$ et $x = 0$ et que ce maximum vaut $\frac{1}{2n}$.

En revenant à $f_n - f$ $\left(\text{deux cas suivant que l'on a } x \leqslant \frac{1}{2n} \text{ ou } x \geqslant \frac{1}{2n}\right)$ on voit que

$$\sup_{x\in R} |f_n(x)-f(x)| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n},$$

ceci établit *directement la convergence uniforme de f_n vers f sur $\mathbb{R}$.*

((1)) *) $\varphi(y) \to 0$ pour $y \to -\infty$. Donc $\forall k > 0$, il existe une constante $A(k)$ positive telle que

$$y \in]-\infty, -A[\Rightarrow \varphi(y) \leqslant k.$$

**) Sur le compact $[-A, 1]$, la fonction continue φ est nécessairement bornée

$$\varphi(y) \leqslant k', \ \forall y \in [-A, 1].$$

***) *En résumé,* $\varphi(y) \leqslant k + k' = M, \ \forall y \in]-\infty, 1]$.

6.III.1.

Nous avons évidemment

$$\left|\frac{(-1)^n e^{-nx^2}}{n^2+1}\right| \leqslant \frac{1}{n^2+1}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

ce qui entraîne la convergence normale de la série, puisque la série numérique de terme général $v_n = \frac{1}{n^2+1}$ est convergente.

On en déduit (théorème **6**.III.1.) que la série $\left(\frac{(-1)^n e^{-nx^2}}{1+n^2}\right)$ est absolument et uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

6.III.2.

a) Nous avons $\left|\dfrac{\sin nx}{x^2+n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, d'où la convergence normale de la série (théorème **6**.III.1.) sur $\Delta = \mathbb{R}$ et, par suite, la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

b) Cette série se déduit de la précédente en multipliant chaque terme par x^2. Elle a donc même domaine de convergence : $\Delta = \mathbb{R}$.

La fonction multiplicative, $x \mapsto x^2$, *n'étant pas bornée sur* Δ, la propriété de convergence uniforme sur $\Delta = \mathbb{R}$ n'est pas nécessairement conservée.

Supposons que la série $\left(\dfrac{x^2 \sin nx}{x^2+n^2}\right)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Alors (voir paragraphe III, 2° le critère) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que}$$

$$m \geqslant n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{x^2 \sin nx}{x^2+n^2} + \frac{x^2 \sin (n+1)x}{x^2+(n+1)^2} + \dots + \frac{x^2 \sin mx}{x^2+m^2}\right| \leqslant \varepsilon, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particulier, pour $m = n = N(\varepsilon)$, on a

$$\frac{x^2 |\sin Nx|}{x^2+N^2} \leqslant \varepsilon, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donc, pour $x = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2N} (k \in \mathbb{N})$, on aura

$$u_k = \frac{\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2N}\right)^2 \sin\dfrac{\pi}{2}}{\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{2N}\right)^2 + N^2} \leqslant \varepsilon, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

propriété évidemment *fausse*, puisque $u_k \to 1$ lorsque $k \to \infty$.

On ne peut donc avoir convergence uniforme de la série sur $\mathbb{R} = \Delta$. Par contre, on vérifiera facilement que la série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.

6.VI.1.

a) Nous avons la majoration

$$\left|\frac{1}{n^2+\sin nx}\right| \leqslant \frac{1}{n^2-1}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

$\dfrac{1}{n^2-1}$ étant le terme général d'une série numérique convergente, nous en déduisons (théorème **6**.III.1.) que la série de fonctions de terme général $\dfrac{1}{n^2+\sin nx}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout n ($n \geqslant 2$), la fonction $\dfrac{1}{n^2 + \sin nx}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, de plus, la série $\left(\dfrac{1}{n^2 + \sin nx}\right)_2$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Donc (théorème **6**.IV.1.), la somme de la série $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + \sin nx}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

c) Chaque fonction $\dfrac{1}{n^2 + \sin nx}$ admet pour période 2π, donc la somme de la série $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 + \sin nx}$ admet pour période 2π.

6.IV.2.

1° *a*) — **Pour $x < 0$,** le terme général de la série $u_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n+1}$ ne tend pas vers zéro lorsque $n \to \infty [|u_n(x)| \underset{n\to\infty}{\to} \infty]$. Donc la série $(u_n(x))_0$ est divergente et la fonction $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n+1}$ ne peut être définie pour x négatif.

— **Pour $x \geqslant 0$,** $u_n(x)$ est le terme général d'une série alternée et $|u_n(x)|$ tend en décroissant vers zéro, lorsque $n \to \infty$.

La série $(u_n(x))_0$ est donc convergente pour $x \geqslant 0$ [théorème des séries numériques alternées] et, par suite, *la fonction*

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{-nx}}{n+1}$$

est définie sur $[0, \infty[= \Delta$.

b) Posons

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{e^{-px}}{p+1} = S_n + R_n, \text{ où } S_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{e^{-px}}{p+1}.$$

Du théorème des séries numériques alternées, on déduit que l'on a

$$|R_n(x)| \leqslant |u_{n+1}(x)| = \frac{e^{-(n+1)x}}{n+2} \leqslant \frac{1}{n+2}, \ \forall x \in \Delta.$$

et, $\forall \varepsilon > 0$, on aura donc

$$n \geqslant N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \Rightarrow |f(x) - S_n(x)| = |R_n(x)| \leqslant \varepsilon, \ \forall x \in \Delta,$$

propriété qui exprime la convergence uniforme de S_n vers f sur Δ, c'est-à-dire la convergence uniforme de la série sur Δ.

Pour tout n, la fonction $x \mapsto (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n+1}$ est continue sur Δ et, de plus, la série $\left((-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n+1}\right)_0$ converge uniformément sur Δ.

Donc, la somme de la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n+1}$ est continue sur son domaine de définition Δ (cf. théorème **6**.IV.1.).

2° Il est clair que $\Delta_1 = [0, \infty[$. En effet, on a

$$\frac{e^{-nx}}{n^2+1} \underset{n\to\infty}{\to} \infty, \text{ lorsque } x \text{ est négatif}$$

et

$$\left|(-1)^n \frac{e^{-nx}}{n^2+1}\right| \leqslant \frac{1}{n^2+1}, \text{ lorsque } x \in [0, \infty[.$$

Comme à la question 1°, on montre que la série *dérivée terme à terme*

$$\left((-1)^{n+1} \frac{ne^{-nx}}{n^2+1}\right)_1$$

est uniformément convergente sur Δ_1; on en déduit donc la propriété suivante : g est de classe C^1 sur Δ_1 [dérivée première g' définie et continue sur Δ_1].

6.IV.3.

1° Étude de la convergence.

— **Pour $x > 0$,** la série alternée est convergente car $|u_n(x)| = \frac{1}{n^x}$ tend en décroissant vers zéro lorsque $n \to \infty$.

— **Pour $x \leqslant 0$,** $u_n(x)$ ne tend pas vers zéro lorsque $n \to \infty$, donc la série est divergente.

Le domaine de définition de $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ est donc $]0, \infty[$.

Étude de la convergence absolue.

Il s'agit ici d'étudier la convergence de la série $(|u_n(x)|)_1 = \left(\frac{1}{n^x}\right)_1$, qui est bien connue. Elle converge pour $x > 1$ et diverge pour $x \leqslant 1$. On aura donc convergence absolue de la série si, et seulement si, $x > 1$.

2° La série $(u_n(x))_1$ satisfaisant au théorème des séries numériques alternées, on sait que le reste $R_n(x)$ défini par

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x)$$

est majoré en valeur absolue par le premier terme négligé, c'est-à-dire que l'on a

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x} = |u_{n+1}(x)|,$$

donc

$$|S(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{(n+1)^{x_0}},$$

pour tout x vérifiant l'inégalité $x \geqslant x_0$.

On aura donc

$$n \geqslant N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{x_0}}}\right] \Rightarrow |S_n(x) - S(x)| \leqslant \varepsilon, \ \forall x \in [x_0, \infty[,$$

propriété qui exprime la convergence uniforme de la série sur $[x_0, \infty[$.

De plus, les fonctions $x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ étant continues, on peut déduire du théorème 6.IV.1. que la somme $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ est continue sur $[x_0, \infty[$ (semi-continuité à droite en x_0).

Soit x un nombre réel positif, *choisi arbitrairement*. Il s'agit de montrer que la fonction S est continue en x. Pour cela, on choisit $x_0 > 0$ tel que $x \in]x_0, \infty[$ (par exemple, $x_0 = \frac{x}{2}$). La fonction S étant continue sur $]x_0, \infty[$, elle est évidemment continue en x.

6.IV.4.

1° *a*) La fonction $\varphi_0 = f_0$ est définie et continue sur $[a, b]$.

Supposons que φ_{n-1} soit définie et continue sur $[a, b]$.

Alors φ_n est définie et continue sur $[a, b]$. *En effet*, l'application $s \mapsto K(x, s)\varphi_{n-1}(s)$ est définie et continue sur $[a, b]$ (pour chaque $x \in [a, b]$), donc intégrable sur $[a, b]$ et, par suite, φ_n est bien définie sur $[a, b]$. Montrons maintenant qu'elle est continue.

Pour cela formons l'expression

$$\varphi_n(x') - \varphi_n(x) = \int_a^b [K(x', s) - K(x, s)]\varphi_{n-1}(s)ds. \tag{1}$$

La fonction K est définie et continue sur le compact $[a, b] \times [a, b]$. D'après le théorème de Heine, elle est donc uniformément continue, c'est-à-dire que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} |x' - x| \leqslant \alpha \\ |y' - y| \leqslant \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow |K(x', y') - K(x, y)| \leqslant \varepsilon.$$

En particulier, pour $y' = y$, on a

$$|x' - x| \leqslant \alpha(\varepsilon) \Rightarrow |K(x', y) - K(x, y)| \leqslant \varepsilon.$$

De l'expression (1) on déduit alors, pour x et x' vérifiant $|x' - x| \leqslant \alpha(\varepsilon)$,

$$|\varphi_n(x') - \varphi_n(x)| \leqslant \int_a^b |K(x', s) - K(x, s)||\varphi_{n-1}(s)|ds \leqslant \varepsilon \int_a^b |\varphi_{n-1}(s)|ds,$$

d'où la continuité de la fonction φ_n.

b) Soit $h = \sup_{[a,b]} |f(x)|$; on a $|\varphi_0(x)| \leqslant h$, puis

$$|\varphi_1(x)| \leqslant \int_a^b |K(x, s)||\varphi_0(s)|ds \leqslant M|b - a|h$$

et, plus généralement,

$$|\varphi_n(x)| \leqslant M^n|b - a|^n h, \text{ sur } [a, b].$$

La série $(\lambda^n\varphi_n(x))$ est donc majorée en valeur absolue sur $[a, b]$ par la série numérique convergente $(|\lambda|^n M^n |b-a|^n h)$. Compte tenu de la continuité des fonctions : $x \mapsto \lambda^n\varphi_n(x)$, *on déduit alors* du théorème **6**.IV.1. *la continuité de la fonction* ψ *sur* $[a, b]$.

c) **Montrons que ψ est solution de (F).**

Les fonctions $s \mapsto \lambda^n K(x, s)\varphi_n(s)$ sont continues sur $[a, b]$, donc intégrables sur $[a, b]$ (pour chaque x fixé $\in [a, b]$). En raison de la convergence uniforme sur $[a, b]$ de la série $(\lambda^n K(x, s)\varphi_n(s))$ « x fixé $\in [a, b]$ », on déduit du théorème **6**.IV.2. que l'on a

$$\begin{aligned}\lambda \int_a^b K(x, s)\psi(s)ds &= \int_a^b \lambda K(x, s) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n\varphi_n(s)\right] ds \\ &= \int_a^b \left[\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1}K(x, s)\varphi_n(s)\right] ds \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \int_a^b K(x, s)\varphi_n(s)ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n+1}\varphi_{n+1}(x) = \psi(x) - \varphi_0(x) = \psi(x) - f(x).\end{aligned}$$

2° *a*) **Montrons que toute solution de (F) est nécessairement continue.**

Soit φ une solution de (F), qui est donc supposée intégrable sur $[a, b]$.

Pour montrer que φ est continue, il suffira d'établir que la fonction

$$g : x \mapsto g(x) = \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds$$

est continue, puisqu'alors

$$\varphi(x) = \lambda g(x) + f(x).$$

On sait que l'on a (cf. la question 1°, *a*)

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha(\varepsilon) > 0$ tel que $|x'-x| \leqslant \alpha(\varepsilon) \Rightarrow |K(x', y) - K(x, y)| \leqslant \varepsilon, \forall y \in [a, b]$.

Donc

$$|x'-x| \leqslant \alpha(\varepsilon) \Rightarrow |g(x') - g(x)| = \left|\int_a^b [K(x', s) - K(x, s)]\varphi(s)ds\right| \leqslant \varepsilon \int_a^b |\varphi(s)|ds,$$

ce qui établit la continuité de la fonction g et, par suite, celle de φ.

b) **Montrons que (F) admet une solution unique, qui sera donc φ.**

Soit ψ_1 et ψ_2 deux solutions de (F) qui seront nécessairement continues et soit $m = \sup\limits_{[a,b]} |\psi_1(x) - \psi_2(x)|$. On aura

$$\begin{aligned}\psi_1(x) - \psi_2(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)[\psi_1(s) - \psi_2(s)]ds \\ \Rightarrow |\psi_1(x) - \psi_2(x)| \leqslant |\lambda||b-a|Mm, \ \forall x \in [a, b] \\ \Rightarrow m \leqslant |\lambda||b-a|Mm,\end{aligned}$$

donc $m = 0$ et, par suite,

$$\psi_1 = \psi_2, \text{ pour } |\lambda| < \frac{1}{(b-a)M}.$$

6.IV.5.

1° *a*) Supposons que g_{n-1} soit un polynôme

$$\left.\begin{matrix} g_{n-1}(x) \\ \text{polynôme} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} g_{n-1}(t-t^2) \\ \text{polynôme} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \int_0^x g_{n-1}(t-t^2)dt \\ \text{polynôme} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} g_n(x) \\ \text{polynôme;} \end{matrix}$$

g_0 étant un polynôme, on en déduit bien que g_n est un polynôme.

b) De la relation de récurrence, on déduit, en dérivant

$$g_n'(x) = g_{n-1}(x - x^2),$$

et, par suite,

$$g_n'(1 - x) = g_{n-1}[(1 - x) - (1 - x)^2],$$

ou encore

$$-[g_n(1 - x)]' = g_{n-1}(x - x^2) = g_n'(x).$$

Ceci entraîne que l'on a

$$g_n(1-x) + g_n(x) = \text{Cte}.$$

2° *a*) On a évidemment

$$0 \leqslant g_1(x) - g_0(x) = x \leqslant \frac{x}{1!}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Supposons que l'on ait

$$0 \leqslant g_n(x) - g_{n-1}(x) \leqslant \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Pour chaque $t \in [0, 1]$, on aura $(t-t^2) \in [0, 1]$ et, par suite,

$$0 \leqslant g_n(t - t^2) - g_{n-1}(t - t^2) \leqslant \frac{(t-t^2)^n}{n!} \quad \forall t \in [0, 1].$$

En intégrant entre 0 et x ($x \in [0, 1]$), on obtient

$$0 \leqslant \int_0^x [g_n(t - t^2) - g_{n-1}(t - t^2)]dt \leqslant \int_0^x \frac{(t-t^2)^n}{n!}\, dt \leqslant \int_0^x \frac{t^n}{n!} dt,$$

ou encore

$$0 \leqslant g_{n+1}(x) - g_n(x) \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

La propriété est donc établie, par récurrence.

b) Considérons la série

$$g_0(x) + (g_1(x) - g_0(x)) + \dots + (g_n(x) - g_{n-1}(x)) + \dots$$

Elle est uniformément convergente sur [0, 1] puisque l'on a

$$|g_n(x) - g_{n-1}(x)| \leqslant \frac{1}{n!}, \quad \forall x \in [0, 1]$$

$\left[\frac{1}{n!}\right.$ étant le terme général d'une série numérique convergente$\left.\right]$.

Donc, la suite des sommes partielles,

$$S_n(x) = g_0(x) + \sum_{p=1}^{n} (g_p(x) - g_{p-1}(x)) = g_n(x),$$

converge uniformément sur [0, 1] vers la somme $g(x)$ de la série.

Ceci peut se traduire par

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |g_n(x) - g(x)| \leqslant \varepsilon, \ \forall x \in [0, 1].$$

Soit $t \in [0, 1]$; on a alors $(t - t^2) \in [0, 1]$ et, par suite,

$$n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow |g_n(t - t^2) - g(t - t^2)| \leqslant \varepsilon, \ \forall t \in [0, 1].$$

De la convergence uniforme de $g_n(t-t^2)$ vers $g(t-t^2)$ sur [0, 1], on déduit (théorème 6.IV.2.) que l'intégrale $\int_0^x g_n(t-t^2)dt$ tend uniformément sur [0, 1] vers $\int_0^x g(t-t^2)dt$, lorsque n tend vers l'infini.

Considérons la relation de récurrence suivante :

$$g_n(x) = 1 + \int_0^x g_n(t - t^2)dt.$$

Par passage à la limite, pour $n \to \infty$, on obtient, alors,

(1) $$g(x) = 1 + \int_0^x g(t-t^2)dt, \ \forall x \in [0, 1].$$

c) La fonction $x \mapsto \int_0^x g(t - t^2)dt$ est dérivable [propriété de l'intégrale]. De la relation (1), on déduit alors que g est dérivable et que

$$g'(x) = g(x - x^2), \ \forall x \in [0, 1].$$

7. SÉRIES ENTIÈRES D'UNE VARIABLE RÉELLE OU COMPLEXE

I. — PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES.

1° Les séries entières de la variable $z(\in \mathbb{C})$ sont les séries du type suivant :

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots,$$

où les constantes a_n appartiennent à $\mathbb{C}$.
Les polynômes sont des séries entières d'un type particulier: $a_n = 0$, $\forall n > p$, p degré du polynôme.

2° Théorème 7.I.1. — A toute série entière $(a_n z^n)$ on peut associer un nombre réel positif R (éventuellement nul ou infini) tel que

i) la série $(a_n z^n)$ converge absolument pour tout z tel que $|z| < R$;

ii) la série $(a_n z^n)$ diverge pour tout z tel que $|z| > R$.

3° Rayon de convergence. — Le nombre R est appelé rayon de convergence de la série.

Exemples :

$$(x^n) \rightsquigarrow R = 1; \quad \left(\frac{x^n}{n!}\right) \rightsquigarrow R = \infty; \quad (n!x^n) \rightsquigarrow R = 0.$$

Techniques de calcul de R.

α) $\left.\begin{array}{l} (|a_n x^n|) \text{ converge pour } |x| < \lambda \\ (|a_n x^n|) \text{ diverge pour } |x| > \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow R = \lambda.$

β) $$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{l}.$$

γ) $$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1}{l}.$$

δ) *Utilisation de la notion de limite supérieure d'une suite.*
Soit une suite numérique (v_n); on dit qu'elle admet une valeur d'accumulation finie, l, si $\forall \varepsilon > 0$ il existe une infinité de v_n dans $]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

De même, on dit qu'elle admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour valeur d'accumulation si $\forall A>0$ il existe une infinité de v_n dans $]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, -A[$).
La plus grande des valeurs d'accumulation de la suite $\{v_n\}$ (notée L) est appelée limite supérieure de la suite. On écrit

$$L=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n.$$

En considérant la suite $\left\{\sqrt[n]{|a_n|}\right\}$ on a alors la propriété générale suivante :

$$R=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

4° Théorème 7.I.2. (Série dérivée et série primitive.)
i) La série $(a_n z^n)$ converge absolument et uniformément vers sa somme sur tout disque fermé $D_\rho=\{z, |z|\leqslant\rho\}$, où $\rho<R$.
ii) La « série dérivée » $(na_n z^{n-1})$ et la « série primitive formelle » $\left(a_n\dfrac{z^{n+1}}{n+1}\right)$ ont même rayon de convergence, R, que la série $(a_n z^n)$.

II. — OPÉRATIONS ALGÉBRIQUES SUR LES SÉRIES ENTIÈRES.

Théorème 7.II.1. — Soit deux séries $(a_n z^n)$ et $(b_n z^n)$ ayant respectivement R_1 et R_2 pour rayons de convergence. Alors
i) la série somme $((a_n+b_n)z^n)$ a un rayon de convergence R qui satisfait aux relations suivantes :

$$R=\inf(R_1,R_2)\quad\text{si}\quad R_1\neq R_2,$$
$$R\geqslant R_1=R_2\quad\text{si}\quad R_1=R_2$$

et l'on a

$$\sum_0^\infty(a_n+b_n)z^n=\sum_0^\infty a_n z^n+\sum_0^\infty b_n z^n,\qquad\forall z\ \text{tel que}\ |z|<\inf(R_1,R_2);$$

ii) la série produit $((a_0b_n+a_1b_{n-1}+\ldots+a_nb_0)z^n)$ a un rayon de convergence R' qui satisfait à la relation suivante :

$$R'\geqslant\inf(R_1,R_2)$$

et l'on a

$$\sum_0^\infty(a_0b_n+\ldots+a_nb_0)z^n=\left(\sum_0^\infty a_nz^n\right)\left(\sum_0^\infty b_nz^n\right),\ \forall z\ \text{tel que}\ |z|<R.$$

III. — SÉRIES ENTIÈRES RÉELLES. FONCTIONS DÉVELOPPABLES EN SÉRIES ENTIÈRES.

1° Séries entières réelles. — Les séries entières réelles sont du type

(1) $$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots,$$

où $a_n \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.

On peut évidemment associer à une telle série la série entière complexe

(2) $$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots, \quad \text{avec } z = x + iy,$$

qui est une extension de (1) à $\mathbb{C}$.

Des théorèmes précédents appliqués à (2) on déduit les propriétés des séries entières réelles par restriction à $\mathbb{R}$.

Par exemple, la convergence de (2) étant assurée pour $|z| < R$, celle de (1) l'est pour $-R < x < R$, etc.

On peut appliquer à ces séries entières réelles les résultats généraux (chapitre **6**, paragraphe IV) sur les séries de fonctions. Ainsi, on établit le théorème suivant.

Théorème 7.III.1. — La fonction $x \mapsto S(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ est de classe C^∞ dans $]-R, R[$ et l'on a

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{et} \qquad \int_0^x S(t)\,dt = \sum_0^\infty a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Exemples :

$$a)\ \frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^n, \text{ dans }]-1,1[\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \text{ dans }]-1,1[, \\ \mathrm{Log}(1-x) = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}, \text{ dans }]-1,1[. \end{cases}$$

$$b)\ \frac{1}{1+x^2} = \sum_0^\infty (-1)^n x^{2n}, \text{ dans }]-1,1[$$

$$\Rightarrow \mathrm{Arc\,tg}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \text{ dans }]-1,1[.$$

2° Fonctions développables en série entière, autour de $x = x_0$.

a) La somme d'une série entière est une fonction de classe C^∞ sur $]-R, R[$. Réciproquement, peut-on considérer qu'une fonction de classe C^∞ est la somme d'une série entière?

Cette question justifie l'étude suivante.

Soit $f :]\alpha, \beta[\mapsto \mathbb{R}$. Lorsqu'à f on peut associer une série entière de la variable $x-x_0$ $(a_n(x-x_0)^n)$ (x_0 et $a_n \in \mathbb{R}$, x variable réelle) telle que l'on ait

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \ \forall x \in]-a+x_0, \ x_0+a[\subset]\alpha, \beta[.$$

on dit que f est développable en série entière dans $]-a+x_0, \ a+x_0[$, autour de x_0. La somme

$$a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots$$

est alors appelée développement de f en série entière.

Ce développement, quand il existe, est unique puisque

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

b) Conditions d'existence.

Condition nécessaire.

f développable en série entière dans $]-a+x_0, \ a+x_0[$ $\Rightarrow \begin{cases} f \text{ de classe } C^\infty \text{ dans }]-a+x_0, \ a+x_0[\\ \text{et } a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \end{cases}$

Condition suffisante.

f de classe C^∞ dans $]-a+x_0, \ a+x_0[$, il existe une constante M telle que

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant \frac{Mn!}{a^n} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0), \\ \forall x \in]-a+x_0, \ a+x_0[\end{cases}$$

c) Exemples. — Développement en série entière autour de l'origine ($x_0 = 0$).

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x; \qquad \sin x = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}, \forall x;$$

$$\cos x = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!}, \forall x; \ \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \forall x \in]-1, 1[;$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \forall x \in]-1, 1[, \ \alpha \text{ réel } \notin \mathbb{N}.$$

d) Méthodes d'obtention du développement.

— Méthode directe : formule de Taylor ou de Mac-Laurin. (Voir exemples ci-dessus.)

— Par dérivation et intégration : si l'on sait développer la fonction dérivée.

— Utilisation d'une équation différentielle : voir les exercices 7.III.9. et 7.III.10.

— Cas des fractions rationnelles : décomposition en éléments simples, puis sommation des séries entières obtenues. (Une fraction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle est développable en série entière autour de 0, le rayon de convergence est le plus petit des modules de ses pôles.)

IV. — FONCTIONS $z \mapsto e^z$, ch z, sh z, sin z, cos z.

1° Fonction $z \mapsto e^z$. — La série $\left(\frac{z^n}{n!}\right)$ a un rayon de convergence infini, elle est donc convergente pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$. On pose, par définition,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

(cf. chapitre 5, paragraphe IV, 3°).

L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto e^x$ est donc la restriction à $\mathbb{R}$ de $z \mapsto e^z$.

De plus, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, $\forall z$ et $\forall z' \in \mathbb{C}$ (chapitre 5, paragraphe IV, 3°).

On définit alors

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

2° Fonctions $z \mapsto \sin z$ et $z \mapsto \cos z$. — La série $\left((-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!}\right)$ converge pour tout z et l'on pose, par définition,

$$\sin z = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Il en résulte que l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \sin x$ est la restriction à $\mathbb{R}$ de $z \mapsto \sin z$.

De même, on définit

$$\cos z = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

et l'on pose

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

3° Formules trigonométriques usuelles. — Elles restent valables pour $\sin z$, $\cos z$, etc.

Ainsi,

$$\sin(z+z') = \sin z \cos z' + \sin z' \cos z.$$

Par ailleurs, les formules telles que

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z, \qquad \cos iz = \operatorname{ch} z, \text{ etc.}$$

permettent le passage de la trigonométrie circulaire à la trigonométrie hyperbolique.

V. — APPLICATIONS.

1° Calcul approché de la valeur d'une intégrale définie. — Voir les exercices 7.V.1. et 7.V.2.

2° Recherche de solutions d'une équation différentielle sous forme de série entière. (Exercices 7.V.3. et 7.V.4.). — On cherche une solution sous forme d'une série entière à coefficients indéterminés. Par identification, on obtient ces coefficients. Il suffit d'étudier la convergence de cette série pour obtenir une solution de l'équation dans l'intervalle de convergence $(-R, R)$.

La connaissance d'une telle solution (si elle existe!) permet alors de déterminer l'intégrale générale dans certains cas.

3° Introduction et étude de nouvelles fonctions. — De nouvelles fonctions peuvent être introduites en tant que solutions d'équations différentielles d'un type donné. On peut expliciter ces solutions à l'aide de séries entières pour en étudier les propriétés. (Exercice 7.V.5.)

Exemple :

Les fonctions de Bessel, couramment utilisées en Physique, sont solutions de l'équation différentielle, dite de Bessel,

$$(B_\nu) \qquad y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0,$$

où ν est une constante et $\nu \in \mathbb{R}$.

Dans le cas de $\nu = n$ entier, on obtient la fonction $\mathfrak{J}_n$ définie par

$$x \mapsto \mathfrak{J}_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}.$$

EXERCICES DU CHAPITRE 7

7.I.1. ◆ *Déterminer le rayon de convergence des séries entières dont les termes généraux sont les suivants :*

a) $u_n = \dfrac{z^n}{\sqrt{n}}$; b) $u_n = \dfrac{n^n}{n!} z^n$; c) $u_n = \dfrac{(-1)^n z^n}{n^n}$;

d) $u_n = (-2)^n \dfrac{z^{3n+1}}{n+1}$; e) $u_n = a^n z^{2n+1}$ *(a est une constante appartenant à* $\mathbb{C}$*).*

7.I.2. ◆ *Utiliser la méthode du paragraphe I, 3°, δ, pour déterminer le rayon de convergence des séries*

$$\left(\frac{a^n z^n}{Log\,(n+2)}\right) \quad et \quad \left(\frac{(-2)^p z^{2p}}{p^2+1} + \frac{z^{2p+1}}{p^4+1}\right)$$

(a est une constante appartenant à $\mathbb{C}$*).*
Même question pour les séries d) et e) de l'exercice précédent.

7.I.3. ◆◆ *Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :*

a) $z + z^2 + z^3 + z^7 + z^{11} + z^{13} + \dots + z^p + \dots$, *p nombre premier ;*

b) $\dfrac{z^2}{2-\sin a} + \dfrac{z^4}{2-\sin 2a} + \dots + \dfrac{z^{2n}}{2-\sin na} + \dots$, *a est une constante appartenant à* $\mathbb{R}$ *;*

c) $(1-e^{\sin a})z^2 + (2-e^{\sin 2a})z^3 + \dots + (n-e^{\sin na})z^{n+1} + \dots$.

7.I.4. ◆◆ *On considère la suite* $\{\lambda_n\}$ *définie par*

$$\lambda_n = \begin{cases} \dfrac{1}{p+\sqrt{p}}, \text{ si } n = 3p, \\ \dfrac{1}{p^p}, \text{ si } n = 3p+1, \\ (-a)^p, \text{ si } n = 3p+2, \ a = Cte \text{ et } a \in \mathbb{R}_+^*. \end{cases}$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $\lambda_n z^n$.

7.I.5. ◆ *Montrer que les séries* $(a_n z^n)$ *et* $(\alpha_n z^n)$, *où* $\alpha_n = |a_n|$ *ont même rayon de convergence.*

7.II.1. ◆ *Montrer que si* $(a^n z^n)$, $(b^n z^n)$, $((a_n+b_n)z^n)$ *ont respectivement pour rayon de convergence* R_1, R_2 *et* R, *alors on a nécessairement*

$$R_1 < R_2 \quad \Rightarrow \quad R = R_1.$$

7.II.2. ◆ *Quel est le rayon de convergence,* R, *de la série*

$$\left((1+a^n)\frac{z^n}{n}\right), \text{ où } a \in \mathbb{C} \text{ et } a = Cte?$$

7.II.3. ◆◆ *Soit* $(a_n z^n)$ *et* $(b_n z^n)$ *deux séries entières ayant respectivement* R_1 *et* R_2 *pour rayons de convergence.*
R *désigne le rayon de convergence de* $((a_n+b_n)z^n)$ *et* R' *celui de*

$$((a_n b_0 + \ldots + a_0 b_n)z^n).$$

1° *Donner des exemples de séries telles que* R *soit supérieur à* $\inf(R_1, R_2)$.

2° *Donner des exemples de séries telles que* R' *soit supérieur à* $\inf(R_1, R_2)$.

7.III.1. ◆◆ *Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières réelles suivantes :*

1° $\quad x \sin\theta + x^2 \sin 2\theta + \ldots + x^n \sin n\theta + \ldots;$

2° $\quad x \sin\theta + \dfrac{x^2}{2}\sin 2\theta + \ldots + \dfrac{x^n}{n}\sin n\theta + \ldots,$ *où* θ *est une constante réelle différente de* $k\pi$.

7.III.2. ◆◆ *Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières réelles suivantes :*

a) $\quad x + \dfrac{2^3}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{n^3}{n!}x^n + \ldots,$

b) $\quad x + \dfrac{x^5}{5!} + \ldots + \dfrac{x^{4p+1}}{(4p+1)!} + \ldots,$

c) $\quad (1+a)x + \ldots + \dfrac{(1+a^n)}{n}x^n + \ldots,$ *où a est une constante réelle,* $|a| \neq 1$,

d) $\quad \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3}x + \ldots + \dfrac{n+1}{n+2}x^n + \ldots$

7.III.3. ◆◆ *Montrer que la fonction*

$$x \mapsto \frac{Log\,(1-x)}{x-1}$$

peut être développée en série entière autour de l'origine. Déterminer le terme général de cette série ainsi que son rayon de convergence.

7.III.4. ◆

Montrer que les fonctions suivantes:

a) $\operatorname{Log}\dfrac{1+x}{1-x}$; *b)* $\displaystyle\int_0^x \frac{e^t-1}{t}\,dt$: *c)* $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$; *d)* $\dfrac{1}{1-x+x^2}$;

e) $\operatorname{Arc\,sin} x$; *f)* $\sin^2 x$; *g)* $\dfrac{x^2}{(x-1)(2-x)^2}$; *h)* $\operatorname{Arc\,tg} x$,

sont développables en série entière autour de l'origine.
Déterminer leur développement, ainsi que le rayon de convergence correspondant.

7.III.5. ◆◆

Fonction C^∞ non développable en série entière.
On considère la fonction f: $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} e^x + e^{-\frac{1}{x^2}}, & si\ x \neq 0, \\ 1, & si\ x = 0. \end{cases}$$

1° *Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.*

2° *Calculer $f^n(0)$, puis déterminer la série entière $(a_n x^n)$ engendrée par f.*

3° *f est-elle développable en série entière autour de l'origine?*

7.III.6. ◆◆◆

1° *Calculer le rayon de convergence R_y de la série entière de la variable x qui a pour terme général*

$$\frac{x^n \cos ny}{\sqrt{n}}$$

(en utilisant la relation $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, on pourra remarquer que $\cos na$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \to \infty$ et considérer la série dérivée).

2° *Déterminer le domaine de définition, Δ, de la fonction*

$$F(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos ny}{\sqrt{n}},$$

c'est-à-dire l'ensemble des (x, y) de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels la série $\left(\dfrac{x^n \cos ny}{\sqrt{n}}\right)$ est convergente.

3° *Soit $\mathring{\Delta}$ l'intérieur de Δ.*

Montrer que les dérivées partielles $\dfrac{\delta F}{\delta x}$ et $\dfrac{\delta F}{\delta y}$ sont définies dans $\mathring{\Delta}$. Que peut-on dire pour les dérivées secondes?

7.III.7. ◆◆◆

Dans $\mathbb{R}^2(x, y)$ déterminer le domaine de définition, Δ, de la fonction

$$f : (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+y^{2n}}.$$

Montrer que $\dfrac{\delta f}{\delta x}$ et $\dfrac{\delta f}{\delta y}$ sont définies dans l'intérieur $\mathring{\Delta}$ de Δ.

7.III.8. ◆◆ *Quel est le domaine de convergence de la série de terme général*

$$u_n(z) = \frac{1}{n}\left(\frac{z}{z-1}\right)^n, \; z \in \mathbb{C}?$$

7.III.9. ◆ 1° *Chercher les solutions de l'équation différentielle*

(1) $\qquad (1+x)y' - \alpha y = 0$, *où α est une constante réelle,*

qui sont développables en série entière autour de l'origine.

2° *Intégrer* (1).

3° *En déduire que la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière. Déterminer son développement ainsi que le rayon de convergence correspondant.*

7.III.10. ◆◆ *Former des équations différentielles simples du second ordre auxquelles les fonctions suivantes satisfont :*

$$x \mapsto [\mathrm{Log}\,(1+x)]^2 \qquad \text{et} \qquad x \mapsto [\mathrm{Arc}\sin x]^2.$$

En déduire que ces fonctions sont développables en série entière autour de l'origine. Trouver leurs développements ainsi que le rayon de convergence de ces développements.

7.III.11. ◆◆ *Développer en série entière autour de l'origine la fonction*

$$x \mapsto y = \mathrm{Log}\,(1 - 2x\cos\alpha + x^2), \text{ où } \alpha \text{ est une constante réelle.}$$

7.IV.1. ◆ *Montrer que la fonction $f\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par*

$$x \mapsto \cos x \,\mathrm{ch}\, x$$

est développable en série entière autour de l'origine. Déterminer son développement ainsi que le rayon de convergence correspondant.

7.IV.2. ◆◆ *Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière réelle suivante :*

$$1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^{3p}}{(3p)!} + \dots$$

En déduire la somme de la série :

$$1 + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(3p)!} + \dots$$

[*On formera $e^z + e^{jz} + e^{j^2 z}$, où $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z \in \mathbb{C}$.*]

7.IV.3. ◆ *Développer en série entière, autour de $x = 1$, la fonction réelle de la variable réelle x : $x \mapsto \text{Arc tg } x$.*
Qu'en déduit-on pour $x = 0$?

7.IV.4. ◆ *Démontrer les inégalités suivantes :*

a) $|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1 \leqslant |z| e^{|z|}, \ \forall z \in \mathbb{C}$;

b) $|\cos z| \leqslant \text{ch } |z|$.

7.IV.5. ◆ *Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes :*

$$e^z = 3, \qquad e^z = -2 \qquad \text{et} \qquad e^z = i.$$

7.IV.6. ◆ *Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes :*

$$\sin z = 0, \qquad \text{sh } z = 0, \qquad \cos z = 2, \qquad e^{\frac{z}{1+z}} = 1 - i, \ \cos z = \text{ch } z.$$

7.V.1. ◆ *Développer en série entière la fonction de Gauss*

$$x \mapsto \text{Ⓗ}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Calculer Ⓗ(1), à 10^{-3} près.

7.V.2. ◆◆ 1° *On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$. Montrer que I est la somme de la série de terme général*

$$u_p = (-1)^p \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p(3p+1)2^{3p+1}}, \ p \geqslant 1, \ \text{avec } u_0 = \frac{1}{2}.$$

2° *Vérifier que le terme général de cette série tend vers 0 en décroissant en valeur absolue.*

3° *En écrivant $I = S_p + R_p$, avec*

$$S_p = u_0 + u_1 + \ldots + u_p \qquad \text{et} \qquad R_p = u_{p+1} + \ldots,$$

montrer que $|R_4| \leqslant 3.10^{-7}$ et calculer S_4 à 2.10^{-7} près.
En déduire une valeur approchée de I_1, à 10^{-6} près.

7.V.3. ◆◆ *On considère l'équation différentielle*

$$(E) \qquad xy'' + 3y' - 4x^3 y = 0.$$

Montrer qu'il existe une solution et une seule de (E), soit F, développable en série entière autour de l'origine telle que $F(0) = 1$. On recherchera cette solution sous la forme

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

et l'on justifiera les opérations effectuées.
Reconnaître F comme expression de fonctions élémentaires.

7.V.4. ◆◆

1° *Rechercher une solution, sous forme de série entière, de l'équation différentielle*

(E) $\quad xy''+2y'+\omega^2 xy = 0$, *où* ω *est une constante réelle.*

2° *Utiliser le résultat du 1° pour obtenir l'expression de la solution générale de* (E).

7.V.5. ◆◆

Fonctions de Bessel d'ordre entier.

On considère l'équation différentielle de Bessel

(E_n) $\quad x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y = 0$, *où* n *est un entier positif ou nul.*

1° *En effectuant le changement de fonction*

$$y = x^n u,$$

montrer que u *satisfait à l'équation différentielle*

$$(E'_n) \qquad xu''+(2n+1)u'+xu = 0.$$

2° *Rechercher les solutions de* (E'_n) *développables en série entière autour de l'origine. Rayon de convergence du développement trouvé? On notera* u_n *la solution telle que* $u_n(0) = 1$.

3° *On appelle fonction de Bessel d'ordre* n *la fonction* $\mathfrak{J}_n$ *définie par*

$$x \mapsto \mathfrak{J}_n(x) = \frac{1}{2^n n!} x^n u_n(x),$$

$\mathfrak{J}_n$ *est donc solution de* (E_n).

A l'aide des développements en série des fonctions $\mathfrak{J}_n$, *établir les relations suivantes:*

$$\mathfrak{J}_{n-1}(x)+\mathfrak{J}_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}\mathfrak{J}_n(x) \qquad \textit{et} \qquad \mathfrak{J}_{n-1}(x)-\mathfrak{J}_{n+1}(x) = 2\mathfrak{J}'_n(x)$$

et en déduire les formules suivantes:

$$\mathfrak{J}_{n+1}(x) = -x^n \frac{d}{dx}\left(\frac{\mathfrak{J}_n(x)}{x^n}\right) \qquad \textit{et} \qquad \mathfrak{J}_{n-1}(x) = \frac{1}{x^n}\frac{d}{dx}(x^n\mathfrak{J}_n(x)).$$

7.I.1.

Pour déterminer le rayon de convergence R nous utiliserons l'une des méthodes α), β) ou γ) énoncées au paragraphe I, 3°.

a) Pour $\left(\dfrac{z^n}{\sqrt{n}}\right)$, on a $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \to 1 = l \Rightarrow R = \dfrac{1}{l} = 1$ (cf. β).

b) Pour $\left(\dfrac{n^n}{n!}z^n\right)$, on a $a_n = \dfrac{n^n}{n!} \Rightarrow \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n \to e = l \Rightarrow R = e^{-1}$ (cf. β).

c) Pour $\left((-1)^n\dfrac{z^n}{n^n}\right)$, on a $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^n} \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{n} \to 0 = l \Rightarrow R = \infty$ (cf. γ).

d) Ici

$$a_n = \begin{cases} 0 \text{ pour } n = 3p \text{ ou } n = 3p+2, \\ \dfrac{(-2)^p}{p+1} \text{ pour } n = 3p+1, \end{cases}$$

puisque la série s'écrit

$$0 + z + 0.z^2 + 0.z^3 + 0.z^4 + 0.z^5 + 0.z^6 + \frac{4}{3}.z^7 + \ldots$$

On ne peut donc utiliser β) ou γ), puisque $\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ n'est pas défini et $\sqrt[n]{|a_n|}$ n'admet pas de limite.

Utilisons la méthode du paragraphe I, 3°, α).

Soit

$$V_n = \left|(-2)^n\frac{z^{3n+1}}{n+1}\right|.$$

On a donc

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 2|z|^3\,\frac{n+1}{n+2} \underset{n\to\infty}{\to} 2|z^3|,$$

d'où l'on déduit que

$$\left.\begin{array}{l} \left(\left|(-2)^n\dfrac{z^{3n+1}}{n+1}\right|\right) \text{ converge pour } |z| < \dfrac{1}{2^{1/3}} \;(\Leftrightarrow 2|z|^3 < 1) \\ \text{et} \\ \left(\left|(-2)^n\dfrac{z^{3n+1}}{n+1}\right|\right) \text{ diverge pour } |z| > \dfrac{1}{2^{1/3}} \;(\Leftrightarrow 2|z|^3 > 1) \end{array}\right\} \Rightarrow R = \frac{1}{2^{1/3}}.$$

e) Ici aussi on ne peut utiliser β) ou γ), puisque

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2p \\ a^p & \text{si } n = 2p+1. \end{cases}$$

Utilisons α).

Soit alors $V_n = |a^n z^{2n+1}|$; on a $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = |a||z|^2$, d'où l'on déduit que

$$\left.\begin{array}{l} (|a^n z^{2n+1}|) \text{ converge pour } |z| < \dfrac{1}{\sqrt{|a|}} \\ \text{et} \\ (|a^n z^{2n+1}|) \text{ diverge pour } |z| > \dfrac{1}{\sqrt{|a|}} \end{array}\right\} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{|a|}}.$$

Autre façon de procéder.

La série $(|a^n z^{2n+1}|)$ a même rayon de convergence que $(a^n z^{2n})$, puisqu'il suffit de mettre z en facteur dans la première

$$z + az^3 + a^2 z^5 + \dots$$

En posant $Z = az^2$, on obtient (Z^n), qui admet $R_1 = 1$ pour rayon de convergence et l'on a

$$R_1 = |a_1|\, R^2 \Leftrightarrow R = \frac{1}{\sqrt{|a|}}.$$

7.1.2.

a) Pour la première série il est clair que l'on a

$$a_n = \begin{cases} 0, \text{ pour } n = 3p+1 \text{ ou } 3p+2, \\ \dfrac{a^p}{\log(p+2)}, \text{ pour } n = 3p. \end{cases}$$

Donc, la suite

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0, \text{ pour } n = 3p+1 \text{ ou } 3p+2, \\ \dfrac{|a|^{1/3}}{(\log(p+2))^{1/3p}}, \text{ pour } n = 3p, \end{cases}$$

admet deux valeurs d'accumulation qui sont 0 et $|a|^{1/3}$ (puisque $\log^{1/3p}(p+2) \underset{p\to\infty}{\to} 1$) et l'on en déduit que

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} = |a|^{1/3}, \qquad \text{d'où} \qquad R = |a|^{-1/3}.$$

b) Pour la seconde, on aura

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{(-2)^p}{p^2+1}, \text{ pour } n = 2p, \\ \dfrac{1}{p^4+1}, \text{ pour } n = 2p+1, \end{cases}$$

donc la suite

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{(p^2+1)^{\frac{1}{2p}}}, \text{ pour } n = 2p, \\ \dfrac{1}{(p^4+1)^{\frac{1}{2p+1}}}, \text{ pour } n = 2p+1, \end{cases}$$

admet deux valeurs d'accumulation qui sont $\sqrt{2}$ et 1 (puisque $(p^2+1)^{\frac{1}{2p}} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et $(p^4+1)^{\frac{1}{2p+1}} \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} 1$). On en déduit alors $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt{2}$ et $R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Étude analogue pour les séries *d*) et *e*) de l'exercice précédent. Comparer avec les résultats déjà obtenus : $2^{-\frac{1}{3}}$ et $|a|^{-\frac{1}{2}}$.

7.1.3.

***a*) Première méthode utilisant le paragraphe I, 3°, δ).**
Ici

$$a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ non premier,} \\ 1 \text{ si } n \text{ premier,} \end{cases}$$

donc

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ non premier,} \\ 1 \text{ si } n \text{ premier.} \end{cases}$$

Il est clair que la suite $\sqrt[n]{|a_n|}$ admet deux valeurs d'accumulation qui sont 0 et 1. Donc $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$ et, par suite, $R = 1$.

Deuxième méthode utilisant le paragraphe I, 3°, α).
Puisque $a_n = 0$ ou 1, dans tous les cas $|a_n z^n| \leqslant |z|^n = V_n$.

***Pour* $z < 1$.**

$$(V_n) \text{ converge} \Rightarrow (|a_n z^n|) \text{ converge.}$$

***Pour* $z \geqslant 1$.**

$$|a_n z^n| = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ non premier} \\ |z|^n \text{ si } n \text{ premier} \end{cases} \Rightarrow |a_n z^n| \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0 \Rightarrow (|a_n z^n|) \text{ diverge.}$$

On en déduit $R = 1$.

b) Soit $u_n(z) = \dfrac{z^{2n}}{2 - \sin na}$; on aura alors $|u_n(z)| \leqslant |z|^{2n} = V_n$.

La série (V_n) converge pour $|z| < 1$ $\left(\dfrac{V_{n+1}}{V_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |z|^2\right)$, donc la série $(|u_n(z)|)$ converge absolument pour $|z| < 1$ et, par suite, $R \geqslant 1$.

Pour z vérifiant la propriété $|z| > 1$, on a $|u_n(z)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ $\left(\text{puisque } |u_n(z)| \geqslant \dfrac{|z|^{2n}}{3}\right)$, donc la série $(u_n(z))$ diverge et, par suite, $R = 1$.

c) Comme ci-dessus, on peut montrer que $R = 1$, en considérant la double inégalité suivante :

$$|z|^{n+1}(n - e) \leqslant |u_n(z)| = |z^{n+1}(n - e^{\sin na})| \leqslant |z|^{n+1}(n - e^{-1}),$$

d'où l'on déduit que la série $(u_n(z))$ converge absolument pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$.

7.I.4.

Il est clair que l'on a

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|\lambda_n|} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt[3p]{p+\sqrt{p}}} \text{ si } n = 3p, \\ \dfrac{1}{p^{\frac{p}{3p+1}}} \text{ si } n = 3p+1, \\ a^{\frac{p}{3p+2}} \text{ si } n = 3p+2. \end{cases}$$

Chacune des expressions tend respectivement vers 1, 0 et $a^{\frac{1}{3}}$ lorsque $p \to +\infty$; donc la suite $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ admet 1, 0 et $a^{\frac{1}{3}}$ pour valeur d'accumulation et l'on aura

$$R = \frac{1}{\sup(1, a^{\frac{1}{3}})}.$$

7.I.5.

Ceci résulte immédiatement du paragraphe I, 3°, δ), puisque $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|\alpha_n|}$.

7.II.1.

Il s'agit ici de démontrer une propriété déjà énoncée (cf. théorème 7.II.1.). Puisque $(a_n z^n)$ et $(b_n z^n)$ convergent simultanément pour $|z| < R_1$, on en déduit que $((a_n + b_n)z^n)$ converge pour $|z| < R_1$; donc $R \geqslant R_1$.

Supposons que l'on ait $R > R_1$.
Il est alors possible de choisir z_0 tel que

$$R_1 < |z_0| < \operatorname{Inf}(R, R_2)$$

et l'on aura

(1) $(a_n z_0^n)$ divergent, (2) $(b_n z_0^n)$ convergent

et

(3) $((a_n+b_n))z_0^n$ convergent.

Ceci est contradictoire, donc on ne peut avoir $R > R_1$.

7.II.2.

Il revient au même de chercher le rayon de convergence de la série « dérivée » : $((1+a^n)z^{n-1})$, ou encore de $((1+a^n)z^n)$ (puisqu'elle se déduit de la précédente en multipliant par z).

a) On a alors *la somme de deux séries* (z^n) et $(a^n z^n)$ ayant respectivement $R_1 = 1$ et $R_2 = \dfrac{1}{|a|}$ pour rayon de convergence.

Si $R_1 \neq R_2$, c'est-à-dire $|a| \neq 1$, on aura donc $R = \operatorname{Inf}(R_1, R_2) = \operatorname{Inf}\left(1, \dfrac{1}{|a|}\right)$.

b) Pour $|a| = 1$, on aura $R_1 = R_2 = 1$, donc $R \geqslant 1$. En posant $a = e^{i\theta}$ (θ réel), on obtient

$$(1 + a^n)z^n = (1 + e^{in\theta})z^n.$$

Supposons $R > 1$.

Il existera alors z_0 vérifiant $1 < |z_0| < R$ pour lequel la série

$$(|(1 + a^n)z_0^n|) = \left(|2e^{i\frac{n\theta}{2}} \cos n\frac{\theta}{2} z_0^n|\right) = \left(2\left|\cos n\frac{\theta}{2}\right| |z_0|^n\right)$$

converge. Ceci entraîne que l'on a

$$2\left|\cos n\frac{\theta}{2}\right| |z_0|^n < \varepsilon, \quad \text{pour} \quad n \geqslant N(\varepsilon),$$

et, par suite,

$$\left|\cos n\frac{\theta}{2}\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0, \text{ puisque } |z_0| > 1.$$

Or *ceci est faux* pour $\theta \neq 2k\pi$ (c'est-à-dire $a \neq 1$).

Donc $R = 1$ pour $|a| = 1$, avec $a \neq 1$.

c) Pour $a = 1$, on s'assure immédiatement que $R = 1$.

d) *En conclusion*, on voit que dans tous les cas $R = \operatorname{Inf}\left(1, \dfrac{1}{|a|}\right)$.

7.II.3.

1° Nécessairement $R_1 = R_2$ (cf. théorème 7.II.1.).

Si $(a_n z^n) = \left(\left(\dfrac{1}{2^n} - 1\right) z^n\right)$ et $(b_n z^n) = (z^n)$, on aura $R_1 = R_2 = 1$ (utiliser la méthode β du paragraphe I, 3°).

On aura alors $((a_n + b_n)z^n) = \left(\dfrac{z^n}{2^n}\right)$ et, par suite, $R = 2 > \operatorname{Inf}(R_1, R_2) = 1$.

2° Considérons la série réduite à un polynôme

$$1-z+z^2-z^3 \ (a_n = 0 \text{ pour } n \geqslant 4), \ R_1 = \infty,$$

ainsi que la série

$$1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots \ (b_n = 1), \ R_2 = 1.$$

Alors la série produit se réduit à $1+z$, donc $R' = \infty > \operatorname{Inf}(R_1, R_2)$.

Autre exemple :
Soit

$$1-z+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{2!}+\ldots+\frac{z^{2p}}{(2p)!}-\frac{z^{2p+1}}{(2p)!}+\ldots \rightsquigarrow R_1 = \infty,$$

et

$$1+z+z^2+\ldots+z^n+\ldots \rightsquigarrow R_2 = 1.$$

La série produit est alors

$$1+\frac{z^2}{2!}+\ldots+\frac{z^{2p}}{(2p)!}\ldots \rightsquigarrow R' = \infty > \operatorname{Inf}(R_1, R_2).$$

7.III.1.

a) Remarquons que $\left\{\frac{x^n}{n}\sin n\theta\right\}$ a même rayon de convergence que sa série dérivée $\{x^{n-1}\sin n\theta\}$, qui elle-même a même rayon de convergence que $\{x^n \sin n\theta\}$ (puisque ces deux dernières ne diffèrent que par le facteur multiplicatif x). Il nous suffira donc de déterminer le rayon R de convergence de (1), qui sera aussi celui de (2).

On a

$$|a_n x^n| = |\sin n\theta x^n| \leqslant |x|^n,$$

donc on en déduit que la série $(|a_n x^n|)$ *converge pour* $|x|<1$.

De plus, $(|a_n x^n|)$ *diverge pour* $|x| = 1$, puisque $\sin n\theta \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ (cf. remarque 2 ci-dessous).

Nous déduisons alors du paragraphe I, 3°, α) que $R = 1$.

Remarques :

1. Du paragraphe I, 3°, δ) on déduit que $\overline{\lim}\sqrt[n]{|\sin n\theta|} = 1$.
2. Si la suite $u_n = \sin n\theta$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, on déduit de $\sin(n+1)\theta = \sin n\theta\cos\theta + \sin\theta\cos n\theta$ que $\cos n\theta$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini; ceci est absurde puisque $\sin^2 n\theta + \cos^2 n\theta = 1$.

b) Soit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin n\theta, \ \text{pour } x \in]-1, 1[.$$

Il est clair que $(x^n \cos n\theta)$ converge pour $|x| < 1$ et l'on peut poser

$$\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos n\theta, \ \text{pour } x \in]-1, 1[.$$

Alors,

$$\sigma(x)+iS(x)=\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{in\theta}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \text{ en posant } z=xe^{i\theta}.$$

Donc

$$\sigma(x)+iS(x)=\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-xe^{i\theta}}=\frac{1-xe^{-i\theta}}{1-2x\cos\theta+x^2}=\frac{1-x(\cos\theta-i\sin\theta)}{1-2x\cos\theta+x^2},$$

d'où l'on déduit, en séparant parties réelles et imaginaires (x et θ réels),

$$S(x)=\frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}.$$

c) Soit

$$T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\sin n\theta, \text{ pour } x\in]-1,1[\qquad \text{(ce qui implique que } T(0)=0),$$

donc

$$T'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\sin n\theta, \text{ pour } x\in]-1,1[\qquad \text{(cf. théorème 7.III.1.)}$$

et, par suite,

$$xT'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} x^n\sin n\theta=S(x).$$

Compte tenu de $T(0)=0$, on a, alors,

$$T(x)=\text{Arc tg}\left(\frac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}\right).$$

7.III.2.

a) En utilisant la méthode β) du paragraphe I, 3°, on obtient $R_1=\infty$.

Remarquons que $n^3=A_1n(n-1)(n-2)+A_2n(n-1)+A_3n+A_4$ (A_i est une constante), puisque $X(X-1)(X-2)$, $X(X-1)$, X, X^0 est une base pour les polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Par identification, on obtient

$$A_1=1, \qquad A_2=3, \qquad A_3=1 \qquad \text{et} \qquad A_4=0.$$

On aura donc, en posant par convention $\frac{1}{(-n)!}=0$, pour $n\in N-\{0\}$,

$$\frac{n^3}{n!}=\frac{1}{(n-3)!}+\frac{3}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)!}, \ \forall n\geqslant 0,$$

et, par suite,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n-3)!}+3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n-2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n-1)!}, \qquad \forall x\in I\!R$$

(chacune des séries considérées convergeant $\forall x$).

Il est clair que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n-3)!} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} = x^3 e^x, \ \ldots$$

Donc, finalement,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{n!} x^n = (x^3 + 3x^2 + x)e^x = S_1.$$

b) **Calcul de R_2** (rayon de convergence).
On a

$$|a^n x^n| \leqslant \frac{|x|^n}{n!}, \ \forall n, \text{ puisque } a_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n = 4p,\ 4p+2 \text{ ou } 4p+3, \\ \dfrac{1}{n!} \text{ si } n = 4p+1. \end{cases}$$

Donc, on peut écrire,

$$\left(\frac{|x|^n}{n!}\right) \text{ converge, } \forall x, \Rightarrow (|a_n x^n|) \text{ converge, } \forall x, \Leftrightarrow R_2 = \infty.$$

Autre méthode.
La série peut s'écrire

$$V_0 + V_1 + \ldots + V_p + \ldots, \text{ où } V_p = \frac{x^{4p+1}}{(4p+1)!}.$$

On a

$$\frac{|V_{p+1}|}{|V_p|} = \frac{|x|^4}{(4p+2)(4p+3)(4p+4)(4p+5)} \to 0 = l \ (\forall x \in \mathbb{R}),$$

donc, la série converge absolument $\forall x$, ce qui équivaut à $R_2 = \infty$.

Calcul de $S_2 = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{4p+1}}{(4p+1)!}$.
On a

$$\operatorname{sh} x = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!}, \ \forall x, \text{ et } \sin x = \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!}, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

donc

$$\frac{\operatorname{sh} x + \sin x}{2} = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(1 + (-1)^q)}{2} \frac{x^{2q+1}}{(2q+1)!} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{4p+1}}{(4p+1)!} = S_2.$$

c) **Calcul de R_3.**

La série $\left(\frac{x^n}{n}\right)$ admet $R_1 = 1$ pour rayon de convergence et la série $\left(\frac{a^n x^n}{n}\right)$ admet $R_2 = \frac{1}{|a|}$. Puisque $R_1 \neq R_2$, la série somme $\left((1+a^n)\frac{x^n}{n}\right)$ aura pour rayon de convergence

$$R_3 = \operatorname{Inf}(R_1, R_2) = \operatorname{Inf}\left(1, \frac{1}{|a|}\right).$$

Calcul de $S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} (1 + a^n) \frac{x^n}{n}$ dans $]-R_3, R_3[$.

On a

$$- \operatorname{Log}(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \text{ pour } x \text{ vérifiant } |x| < 1,$$

donc

$$- \operatorname{Log}(1-ax) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n x^n}{n}, \text{ pour } x \text{ vérifiant } |x| < \frac{1}{|a|},$$

et, par suite,

$$- \operatorname{Log}(1-x)(1-ax) = \sum_{n=1}^{\infty} (1+a^n)\frac{x^n}{n} = S_3, \text{ pour } |x| < \operatorname{Inf}\left(1, \frac{1}{|a|}\right)$$

(c'est-à-dire $x \in]-R_3, R_3[$).

d) **Calcul de R_4.**

Utilisons la méthode β) du paragraphe I, 3°

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)} \to 1 = l, \text{ donc } R_4 = \frac{1}{l} = 1.$$

Calcul de $S_4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} x^n$.

On a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}, \ \forall x \in]-1, 1[,$$

puisque chacune des séries considérées converge pour $|x| < 1$.

Dans l'intervalle $]-1, 1[$ on aura donc

$$S_4(x) = \frac{1}{1-x} - T(x), \qquad \text{avec} \qquad T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2},$$

$$x^2 T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} \Rightarrow (x^2 T)' = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}.$$

Compte tenu de $x^2 T(x)|_{x=0} = 0$, on obtient alors

$$x^2 T(x) = -x - \log(1-x)$$

et, par suite,

$$S_4(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \text{ si } x = 0, \\ \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{\operatorname{Log}(1-x)}{x^2} + \dfrac{1}{x}, \text{ si } x \neq 0 \text{ et } |x| < 1. \end{cases}$$

7.III.3.

On sait que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est développable en série entière autour de l'origine et que l'on a

$$\frac{1}{x-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ dans }]-1, 1[\ (R_1 = 1).$$

De même

$$\operatorname{Log}(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x^n}{n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \text{ dans }]-1, 1[\ (R_2 = 1).$$

Donc (cf. théorème 5.IV.1.), $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Log}(1-x)}{x-1}$ est développable en série entière autour de l'origine dans $]-1, 1[$ et l'on a

$$\frac{\operatorname{Log}(1-x)}{x-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n b_0 + \dots + a_0 b_n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)x^n, \text{ dans }]-1, 1[.$$

Soit R' le rayon de convergence de la série produit $\left(\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)x^n\right)$.

On a évidemment R supérieur ou égal à $\operatorname{Inf}(R_1, R_2) = 1$.

Montrons que l'on a aussi $R \leqslant 1$.

Première méthode.

La fonction $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Log}(1-x)}{x-1}$, qui devient infinie pour $x \to 1-0$, ne peut être prolongée par continuité à $x = 1$.

— *Si R était supérieur à* 1, la fonction $x \mapsto \dfrac{\operatorname{Log}(1-x)}{x-1}$ serait de classe C^{∞} dans un voisinage de $x = 1$ et, en particulier, continue en ce point, ce qui n'est pas.

Deuxième méthode.

Pour $x = 1$, la série $\left(\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right)x^n\right)$ diverge $\left(\text{car } \left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}\right) \not\to 0 \text{ pour } n \to \infty\right)$ donc $R \leqslant 1$.

7.III.4.

a) On sait que $\operatorname{Log}(1+x)$ et $\operatorname{Log}(1-x)$ sont développables en séries entières autour de l'origine. Plus précisément, on a

$$\operatorname{Log}(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}, \text{ pour } x \in]-1, 1[,$$

et

$$-\operatorname{Log}(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}, \text{ pour } x \in]-1, 1[.$$

Donc

$$\operatorname{Log}\frac{1+x}{1-x} = 2\sum_{p=0}^{\infty}\frac{x^{2p+1}}{2p+1}, \text{ pour } x \in]-1, 1[,$$

et le rayon de convergence, R, de $\left(2\dfrac{x^{2p+1}}{2p+1}\right)$ *vérifie* $R \geqslant 1$.

La fonction $x \mapsto \operatorname{Log}\dfrac{1+x}{1-x}$ ne pouvant être prolongée par continuité à $x = 1$ (puisque $x \to 1 - 0 \Rightarrow \operatorname{Log}\dfrac{1+x}{1-x} \to \infty$), on a *nécessairement* (voir exercice précédent) $R \leqslant 1$.

Finalement, on voit que $R = 1$.

b) On sait que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad \forall x,$$

donc

$$\frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}, \qquad \forall x.$$

Du théorème **7.III.1.**, on déduit alors que l'on a

$$\int_0^x \frac{e^t - 1}{t}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n.n!}.$$

c) De $\sin x = \sum\limits_{p=0}^{\infty} (-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}$, $\forall x$, on déduit que l'on a

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)(2p)!}, \quad \forall x.$$

d) On a

$$\frac{1}{1-x+x^2} = \frac{1-x}{1-x^3} = (1-x)\sum_{p=0}^{\infty} x^{3p} = \sum_{p=0}^{\infty} x^{3p} - x^{3p+1}, \quad \forall x \in]-1, 1[.$$

Donc

$$\frac{1}{1-x+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \ \forall x \in]-1, 1[, \text{ avec } a_n = \begin{cases} \ \ 1 \text{ si } n = 3p, \\ -1 \text{ si } n = 3p+1, \\ \ \ 0 \text{ si } n = 3p+2. \end{cases}$$

e) On sait que la fonction $(1+X)^\alpha$ (α réel $\in \mathbb{N}$) est développable en série entière autour de l'origine, dans $]-1, 1[$. Plus précisément,

$$(1 + X)^\alpha = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-p+1)}{p!} X^n, \ \forall X \in]-1, 1[$$

(cf. le paragraphe III, 2°).

Donc (poser $X = - x^2$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$)

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-p+1\right)}{p!}(-1)^p x^{2p}, \ \forall x \in]-1, 1[,$$

ou encore

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} x^{2p}, \text{ dans }]-R, R[, \text{ avec } R = 1.$$

En intégrant, on obtient, alors (cf. théorème 7.III.1.),

$$\operatorname{Arc\,sin} x = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \cdot \frac{x^{2p+1}}{2p+1},$$

avec un rayon de convergence qui vaut 1.

f) On a

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x,$$

donc

$$2 \sin^2 x = 1 - \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(2x)^{2p}}{(2p)!} = \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p+1} \frac{(2x)^{2p}}{(2p)!}, \quad \forall x \qquad (R = \infty).$$

g) En décomposant en éléments simples, on obtient

$$\frac{x^2}{(x-1)(2-x)^2} = \frac{4}{(2-x)^2} - \frac{1}{1-x}.$$

Chacune des fonctions considérées au second membre étant développables en série entière autour de l'origine, on en déduit que la fonction considérée est elle-même développable en série entière. On peut écrire $\dfrac{4}{(2-x)^2} = \dfrac{1}{\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^2}$.

Or, on a

$$\frac{1}{1 - \dfrac{x}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}, \quad \forall x \in]-2, 2[\qquad (R_1 = 2),$$

donc, en dérivant, on obtient

$$\frac{1}{\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{2^n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{x^n}{2^{n+1}}, \quad \forall x \in]-2, 2[.$$

De plus,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ pour } x \in]-1, 1[\qquad (R_2 = 1).$$

Finalement, on obtient, en regroupant,

$$\frac{x^2}{(x-1)(2-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2^n} - 1 \right) x^n, \text{ dans }]-R, R[, \text{ avec } R = \operatorname{Inf}(R_1, R_2) = 1.$$

h) On a

$$\frac{1}{1+X} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p X^p \text{ dans }]-R_1, R_1[, \text{ avec } R_1 = 1.$$

Donc

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p x^{2p}, \text{ dans }]-R, R[, \text{ avec } R^2 = R_1$$

(puisque l'on a posé $x^2 = X$), c'est-à-dire $R = 1$.

En intégrant, on obtient

$$\operatorname{Arc\,tg} x = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1}, \text{ dans }]-1, 1[,$$

le rayon de convergence de la série $\left((-1)^p \dfrac{x^{2p+1}}{2p+1}\right)$ étant 1 (cf. théorème 7.III.1.).

7.III.5.

1° Soit g l'application définie par

$$x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

et h l'application définie par

$$x \mapsto e^x.$$

Il est clair que $f = g + h$.

De plus, h est de classe C^∞ dans $\mathbb{R}$. Il suffit donc de s'assurer que g est de classe C^∞.

Elle est évidemment continue en tout point $x \neq 0$. Elle l'est aussi en $x = 0$. En effet,

$$\text{pour } x \to 0, \text{ on a } g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \to 0 = g(0),$$

g est dérivable en tout point $x \neq 0$:

$$g'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

A l'origine, on a

$$\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} \text{limite } 0, \text{ donc } g'(0) \text{ existe et est égale à } 0.$$

En résumé, on a

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pour } x \neq 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0. \end{cases}$$

Il est clair que g' est continue pour tout x (même raisonnement que pour l'étude de la continuité de g). On s'assure aussi qu'elle est dérivable en procédant comme ci-dessus. On peut alors faire un raisonnement par récurrence en supposant que $g^{(n)}$ est définie par une expression de la forme suivante :

$$x \mapsto g^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{P_n(x)}{x^{3n}} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

où $P_n(x)$ est un polynôme.

2° On a évidemment $h^{(n)}(0) = 1$, donc

$$f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0) + h^{(n)}(0) = 1.$$

On peut écrire

$$f \rightsquigarrow f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \ldots,$$

donc

$$f \rightsquigarrow 1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \text{ avec } R = \infty.$$

3° Si f était développable en série entière, on aurait, dans un voisinage de l'origine,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x = h(x),$$

ce qui est évidemment faux, puisque $f(x) = g(x) + h(x)$.

7.III.6.

1° $R_y \geqslant 1$.

Nous avons $\dfrac{|x^n \cos ny|}{\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{|x|^n}{\sqrt{n}} = V_n$. La série (V_n) converge pour $|x|<1$ $\left(\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = |x| \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} |x|\right)$, donc la série $\left(\dfrac{x^n \cos ny}{\sqrt{n}}\right)$ converge absolument pour $|x|<1$ et, par suite, R_y est supérieur ou égal à 1.

$R_y \leqslant 1$.
Remarquons que $\cos ny \not\to 0$ lorsque $n \to +\infty$. (Sinon, de la relation

$$\cos 2ny = 2\cos^2 ny - 1,$$

on déduirait, par passage à la limite, que l'on a $0 = -1$.)

Considérons la série entière dérivée $\left(\sqrt{n}x^{n-1} \cos ny\right)$. Pour $x = 1$, cette série ne peut converger (sinon $\sqrt{n} \cos ny \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$, donc $\cos ny \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$; propriété *fausse*), donc R_y, qui est le rayon de convergence de la série dérivée, est inférieur ou égal à 1.

En résumé, on en conclut que l'on a bien $R_y = 1$.

2° Domaine de définition de $F(x, y)$.

Compte tenu de la question 1°, il est clair que $\left(\dfrac{x^n}{\sqrt{n}} \cos ny\right)$ converge pour $|x|<1$ et diverge pour $|x|>1$. Étudions la nature de la série pour $x = 1$ et pour $x = -1$.

— ***Pour*** $x = 1$, nous obtenons la série $\left(\dfrac{\cos ny}{\sqrt{n}}\right)$ qui est la partie réelle de $\dfrac{e^{iny}}{\sqrt{n}}$, série convergente pour $y \neq 2k\pi$. Donc $\left(\dfrac{\cos ny}{\sqrt{n}}\right)$ converge pour $y \neq 2k\pi$.

Pour $y = 2k\pi$, elle est évidemment divergente.

— ***Pour*** $x = -1$, on doit étudier la série $\left(\dfrac{(-1)^n \cos ny}{\sqrt{n}}\right) = \left(\dfrac{\cos n(y+\pi)}{\sqrt{n}}\right)$ qui converge pour $y \neq 2k\pi-\pi$, diverge pour $y = 2k\pi-\pi$.

En résumé, si $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\Delta = \{(x, y);\ |x| < 1 \text{ ou } x = 1 \text{ et } y \neq 2k\pi \text{ ou } x = -1 \text{ et } y \neq 2k\pi - \pi\}$$

et

$$\mathring{\Delta} = \{x, y;\ |x| < 1\}.$$

3° *a*) ***Pour*** y ***fixé,*** la série $\left(\dfrac{x^n \cos ny}{\sqrt{n}}\right)$ est une série entière en x dont le rayon de convergence est égal à 1. La somme $F(x, y)$ est donc dérivable dans $]-1, 1[$ et l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^{n-1} \cos ny \quad \text{(voir théorème 7.III.1.).}$$

b) ***Pour*** x ***fixé vérifiant*** $|x| < 1$, puisque $(x, y) \in \mathring{\Delta}$, la série $\left(\dfrac{x^n \cos ny}{\sqrt{n}}\right)$ converge évidemment en la variable y sur $]-\infty, +\infty[$. La série dérivée $(-\sqrt{n}x^n \sin ny)$ converge uniformément en la variable y sur $]-\infty, +\infty[$ (puisque $|-\sqrt{n}x^n \sin ny| \leqslant \sqrt{n}|x|^n$).

Donc, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ est définie et l'on a

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} x^n \sin ny \quad \text{(voir théorème 6.IV.3.).}$$

De même, on pourrait démontrer l'existence dans $\mathring{\Delta}$ des dérivées partielles du second ordre (et, plus généralement, d'ordre n) de la fonction F.

Pour justifier l'existence de $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, par exemple, il suffit de s'assurer de la convergence uniforme en y sur $]-\infty, \infty[$ de la série $(-n\sqrt{n}x^n \cos ny)$.

7.III.7.

a) Il est clair que si f est définie en (x_0, y_0), elle sera définie en $(x_0, -y_0)$. Pour la recherche de Δ, on pourra donc limiter l'étude à $y \geqslant 0$.

Pour chaque y fixé positif ou nul, nous avons une série entière $(a_n(y)x^n)$ en la variable x de rayon de convergence R_y.

Calcul de R_y.
Il est clair que l'on a

$$\frac{|a_{n+1}(y)|}{|a_n(y)|} = \frac{1+y^{2n}}{1+y^{2n+2}} \underset{n\to\infty}{\to} l(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} \text{ si } y > 1, \\ 1 \text{ si } 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Donc

$$R_y = \frac{1}{l_y} = \begin{cases} y^2 \text{ si } y > 1, \\ 1 \text{ si } 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases} = \text{Sup}\,(y^2, 1).$$

Nous avons donc convergence de la série $(a_n(y)x^n)$ pour

$$-y^2 < x < y^2, \text{ si } y > 1, \quad \text{et} \quad -1 < x < 1, \text{ si } 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

La série $(a_n(y)x^n)$ est divergente pour $x = \pm R_y$.
La série est divergente car son terme général ne tend pas vers zéro. Par exemple, pour $x = y^2$ avec $y > 1$, on a

$$a_n(y)y^{2n} = \frac{y^{2n}}{1+y^{2n}} \underset{n\to\infty}{\to} 1.$$

En résumé, on a

$$\Delta = \mathring{\Delta} = \{(x, y);\ |x| < R_y\} = \{(x, y);\ |x| < \text{Sup}\,(y^2, 1)\}.$$

b) Puisque f est la somme d'une série entière en la variable x, elle est donc dérivable par rapport à x dans $]-R_y, R_y[$ et l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}}.$$

Montrons maintenant que $\frac{\delta f}{\delta y}$ est définie en tout point $(x_0, y_0) \in \mathring{\Delta}$.
Pour cela considérons la série dérivée $\left(-\frac{2ny^{2n-1}x^n{}_0}{(1+y^{2n})^2}\right)$, dont le terme général est évidemment continu pour tout y. Si l'on établit la convergence uniforme de cette série dans un intervalle $]y_0-\alpha_1, y_0+\alpha_2[$ nous en déduirons que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ est définie (et continue en la variable y) dans cet intervalle, donc en particulier au point y_0.
Il reste donc à établir la convergence uniforme dans de tels intervalles.

— ***Pour $y_0 \leqslant 1$,*** on a $|x_0| < 1$, donc

$$\left|\frac{2ny^{2n-1}x_0^n}{(1+y^{2n})^2}\right| \leqslant \frac{2}{1+\alpha} n(1+\alpha)^{2n}|x_0|^n = \frac{2}{1+\alpha} nk^n, \ \forall y \in]-1-\alpha, 1+\alpha[.$$

On peut choisir α assez petit pour que $k = (1+\alpha)^2|x_0| < 1$.
Il en résulte alors la convergence uniforme dans $]-1-\alpha, 1+\alpha[$, intervalle ouvert contenant y_0.

— ***Pour $y_0 > 1$,*** on a $|x_0| < y_0^2$, donc

$$\left|\frac{2ny^{2n-1}x_0^n}{(1+y^{2n})^2}\right| \leqslant \frac{2n|x_0|^n}{|y|^{2n+1}} \leqslant \frac{2}{y_0-\alpha'} n \left[\frac{x_0}{(y_0-\alpha')^2}\right]^n, \ \forall y \in]y_0-\alpha', +\infty[.$$

On peut choisir α' assez petit pour que $k' = \dfrac{x_0}{(y_0-\alpha')^2} < 1$.

Il en résulte alors la convergence uniforme dans $]y_0-\alpha', +\infty[$ intervalle ouvert contenant y_0.

— ***Pour*** $y_0 < -1$, le raisonnement est analogue au précédent.

7.III.8.

En posant $Z = \dfrac{z}{z-1}$, nous sommes ramenés à l'étude de la série entière de terme général $V_n(Z) = \dfrac{Z^n}{n}$ qui admet $R = 1$ pour rayon de convergence.

$$\left(\frac{|V_{n+1}(Z)|}{|V_n(Z)|} = \frac{n}{n+1}|Z| \underset{\to\infty}{\to} |Z|.\right)$$

Étude de la convergence ou de la divergence de $u_n(z)$.

Nous avons convergence pour

$$|Z| = \frac{|z|}{|z-1|} < 1 \Leftrightarrow |z|^2 < |z-1|^2 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2},$$

(en posant $z = x+iy$) et nous aurons divergence pour $x > \dfrac{1}{2}$.

Étude de la nature de la série $(u_n(z))$ pour $x = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire $|Z| = 1$.

Sur la circonférence $|Z| = 1$, on peut poser $Z = e^{i\theta}$, où $\theta = \operatorname{Arg} Z$.

On sait que la série $\left(\dfrac{Z^n}{n}\right) = \left(\dfrac{e^{in\theta}}{n}\right)$ converge pour $\theta \neq 2k\pi$ (c'est-à-dire $|Z| = 1$ avec $Z \neq 1$) et diverge pour $\theta = 2k\pi$ (c'est-à-dire $Z = 1$).

Pour tout z vérifiant $\left|\dfrac{z}{z-1}\right| = 1$ $\left(\Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\right)$, nous avons $|Z| = 1$, avec $Z \neq 1$ donc convergence de la série $u_n(z)$.

En résumé, la série $(u_n(z))$ converge pour $x \leqslant \dfrac{1}{2}$ et diverge pour $x > \dfrac{1}{2}$.

7.III.9.

1° Il s'agit de chercher les solutions de (1) qui sont de la forme

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad \text{pour} \quad x \in]-R, R[$$

[R désignant le rayon de convergence de $(a_n x^n)$].

Nécessairement, on doit avoir (cf. théorème 7.III.1.)

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n, \quad \forall x \in]-R, R[.$$

Donc

$$0 = (1+x)y' - \alpha y = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

ou encore $\forall x \in]-R, R[$,

$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)a_{n+1} + (n-\alpha)a_n]x^n \Leftrightarrow (n+1)a_{n+1} = (\alpha-n)a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

On en déduit, évidemment, que l'on a

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\, a_0$$

et, par suite,

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots\alpha(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n, \quad \forall x \in]-R, R[.$$

Calcul de R.
Si $\alpha \in \mathbb{N}$, on a $a_n = 0$, pour $n \geqslant \alpha+1$, donc la série entière se réduit à un polynôme et R est infini, $R = \infty$.
Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, on peut utiliser ici la méthode β du paragraphe I, 3°, et l'on obtient $R = 1$.

Condition suffisante.
Les fonctions $a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, qui sont définies dans $]-R, R[$, sont évidemment solutions de (1).

2° La solution générale de cette équation différentielle linéaire homogène du premier ordre est donnée par $y(x) = K(1+x)^\alpha$, K étant une constante quelconque.

3° Il existe donc une constante K_0 telle que l'on ait

$$a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n = K_0(1+x)^\alpha, \quad \text{dans }]-R, R[.$$

— ***Pour* $x = 0$,** on obtient $a_0 = K_0$ et, par suite,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n, \quad \text{dans }]-R, R[, \text{ avec } R = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha \in N, \\ 1 & \text{si } \alpha \notin N. \end{cases}$$

7.III.10.

1° Soit

$$x \mapsto y = [\text{Log}\,(1+x)]^2, \qquad \text{alors} \qquad y' = 2\frac{\text{Log}\,(1+x)}{1+x},$$

soit

$$(1) \qquad y'(1+x) = 2\,\text{Log}\,(1+x).$$

Par dérivation de (1), on obtient une équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait y

$$(E) \qquad (1+x)^2u'' + (1+x)u' - 2 = 0.$$

On trouve facilement la solution générale de cette équation (E) en posant $u' = U$. Cette solution s'écrit

$$u = [\text{Log}\,(|1+x|)]^2 + A\,\text{Log}\,(|1+x|) + B,$$

où A et B sont des constantes.

On en déduit que la fonction $x \mapsto [\text{Log}\,(1+x)]^2$ est la *seule solution de* (E) *telle que* $u(0) = 0$ (ce qui implique que l'on ait $B = 0$) *et* $u'(0) = 0$ (ce qui implique que l'on ait $A = 0$).

Recherchons maintenant les solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0 sous la forme

$$u' = \sum_0^\infty a_n x^n,$$

valable dans $[-R, R]$.

Par application du théorème sur la dérivation terme à terme on écrit

$$u'' = \sum_1^\infty (n+1)a_{n+1}x^n.$$

Le développement du premier membre de (E) a donc la forme suivante :

$$a_1 + a_0 - 2 + \sum_0^\infty [(n+1)a_{n+1} + (2n+1)a_n + na_{n-1}]x^n.$$

On en déduit les relations vérifiées par les a_n :

$$a_1 + a_0 = 2, \qquad (n+1)a_{n+1} + (2n+1)a_n + na_{n-1} = 0.$$

Cette dernière relation de récurrence s'écrit aussi de la façon suivante :

$$(n+1)(a_{n+1} + a_n) = -n(a_n + a_{n-1}),$$

d'où l'on conclut

$$(n+1)(a_{n+1} + a_n) = (-1)^n(a_1 + a_0) = 2(-1)^n,$$

[puisque

$$-n(a_n + a_{n-1}) = +(n-1)(a_{n-1} + a_{n-2}) = \dots = (-1)^n(a_1 + a_0)]$$

d'où l'on déduit la relation

$$(2) \qquad a_{n+1} + a_n = \frac{2(-1)^n}{n+1}.$$

A partir de $n = 0$ on a donc les relations suivantes :

$$\begin{aligned} a_1 + a_0 &= 2, \\ a_2 + a_1 &= 2\left(\frac{-1}{2}\right), \\ a_3 + a_2 &= 2 \cdot \frac{1}{3}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ a_{p+1} + a_p &= 2\frac{(-1)^p}{p+1}, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ a_{n+1} + a_n &= 2\frac{(-1)^n}{n+1}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en multipliant les deux membres de la relation $a_{p+1} + a_p$ par $(-1)^p$ et en ajoutant toutes les égalités obtenues :

$$(-1)^n a_{n+1} + a_0 = 2\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}\right].$$

Puisque nous recherchons la solution telle que $u(0) = u'(0) = 0$, alors $a_0 = 0$. Le rayon de convergence de la série ainsi obtenue est égal à 1, car

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{(n+1)\left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right]}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1.$$

On en déduit l'expression de u telle que $u(0) = u'(0) = 0$,

$$u = 2\sum_0^\infty (-1)^n \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\right] \frac{x^{n+2}}{n+2}.$$

En vertu de l'unicité de la solution de (E), on a donc

$$[\operatorname{Log}(1+x)]^2 = 2\sum_0^\infty (-1)^n \left[1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+1}\right] \frac{x^{n+2}}{n+2}, \quad -1 < x < 1.$$

Remarque.

A partir de l'expression (1) et de $y' = \sum_0^\infty a_n x^n$, on obtenait immédiatement

$$a_0 + \sum_0^\infty (a_n + a_{n-1}) x^n = 2\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

d'où

$$a_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad a_n + a_{n-1} = 2\frac{(-1)^{n-1}}{n},$$

ce qui n'est autre que l'expression (2).

2° Soit $x \mapsto y = (\text{Arc}\sin x)^2$; on obtient l'équation différentielle

$$(E) \qquad u''(1-x^2) - xu' = 2,$$

dont la solution générale sur l'intervalle $(-1, 1)$ est

$$u = (\text{Arc}\sin x)^2 + C_1 \text{Arc}\sin x + C_2,$$

C_1 et C_2 étant des constantes.

La solution $x \mapsto (\text{Arc}\sin x)^2$ est donc la seule solution de (E) telle que $u(0) = u'(0) = 0$.

A partir de $u' = \sum_0^\infty a_n x^n$ on recherche les solutions de (E) développables en série entière. La relation de récurrence obtenue est la suivante :

$$(3) \qquad na_n = (n-1)a_{n-2}, \qquad \text{avec} \qquad a_1 = 2,\ 2a_2 - a_0 = 0, \dots$$

Avec $a_0 = 0$ l'expression des coefficients est

$$a_{2p} = 0, \qquad a_{2p+1} = \frac{2^{2p+1}(p!)^2}{(2p+1)!}.$$

En vertu de l'unicité de la solution de (E) telle que $u(0) = u'(0) = 0$ on peut donc conclure que

$$(\text{Arc}\sin x)^2 = \sum_{n=0}^\infty \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n+2}.$$

D'après la relation (3) appliquée à $n = 2p+1$, on a $\lim \dfrac{a_{2p-1}}{a_{2p+1}} = 1$ et le rayon de convergence de la série est égal à 1.

7.III.11.

On remarque que l'on a

$$y' = \frac{2(x-\cos\alpha)}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1} = -\left(\frac{e^{i\alpha}}{1-xe^{i\alpha}} + \frac{e^{-i\alpha}}{1-xe^{-i\alpha}}\right),$$

On peut écrire

$$\frac{1}{1-xe^{i\alpha}} = \sum_0^\infty x^n e^{in\alpha} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1-xe^{-i\alpha}} = \sum_0^\infty x^n e^{-in\alpha},$$

ces développements étant valables pour $|x| < 1$, puisqu'il s'agit de progressions géométriques de raisons respectives $xe^{i\alpha}$ et $xe^{-i\alpha}$.

On en déduit donc

$$y' = -\sum_{n=1}^\infty (e^{in\alpha} + e^{-in\alpha})x^{n-1}, \qquad R = 1,$$

soit

$$y' = -2\sum_{1}^{\infty} x^{n-1} \cos n\alpha, \qquad R = 1,$$

et, par application du théorème 7.III.1. (intégration terme à terme) puisque $y(0) = 0$, on obtient enfin

$$\text{Log}\,(1-2x\cos\alpha+x^2) = -2\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n} x^n, \qquad R = 1.$$

7.IV.1.

Considérons la fonction $F : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ définie par

$$z \mapsto \cos z \operatorname{ch} z.$$

La fonction f est évidemment la restriction de F à $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).
On a

$$F(z) = \cos z \cos iz = \frac{1}{2}\big[\cos[z(1+i)] + \cos[z(1-i)]\big].$$

Or,

$$\cos Z = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{Z^{2p}}{(2p)!}, \qquad \forall Z,$$

donc

$$2F(z) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p z^{2p} \frac{(1+i)^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p z^{2p} \frac{(1-i)^{2p}}{(2p)!}, \qquad \forall z,$$

et

$$2F(z) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} [(1+i)^{2p} + (1-i)^{2p}], \qquad \forall z.$$

En écrivant $1+i$ et $1-i$ sous la forme suivante :

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad \text{et} \qquad 1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

on obtient

$$2F(z) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} (2)^p \big(e^{ip\frac{\pi}{2}} + e^{-ip\frac{\pi}{2}}\big), \qquad \forall z,$$

ou encore

$$F(z) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p}}{(2p)!} \cos p\frac{\pi}{2}, \qquad \forall z = x+iy.$$

Pour $y = 0$, c'est-à-dire $z = x$, on a alors

$$F(x) = f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} \cos p\frac{\pi}{2}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En résumé, la fonction f est bien développable en série entière et le rayon de convergence de cette série est ∞.

7.IV.2.

Soit $j = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$; on sait que

$$(1) \quad 1+j+j^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad (2) \quad j^3 = 1.$$

On a évidemment pour tout z

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$e^{jz} = \sum_{n=0}^{\infty} j^n \frac{z^n}{n!},$$

$$e^{j^2 z} = \sum_{n=0}^{\infty} j^{2n} \frac{z^n}{n!}.$$

On en déduit

$$(3) \qquad e^z + e^{jz} + e^{j^2 z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}(1+j^n+j^{2n}), \qquad \forall z.$$

Compte tenu des relations (1) et (2), on peut écrire

$$1+j^n+j^{2n} = \begin{cases} 0 \text{ pour } n = 3p+1 \text{ ou } 3p+2, \\ 3 \text{ pour } n = 3p. \end{cases}$$

L'expression (3) devient alors

$$e^z + e^{jz} + e^{j^2 z} = 3\sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{3p}}{(3p)!}, \qquad \forall z = x+iy.$$

On en déduit, pour $y = 0$, c'est-à-dire pour $z = x$ réel, que l'on a

$$\frac{e^x + e^{jx} + e^{j^2 x}}{3} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{3p}}{(3p)!}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En résumé, le rayon de convergence et la somme de la série donnée sont les suivants :

$$R = \infty \qquad \text{et} \qquad S(x) = \frac{e^x + e^{jx} + e^{j^2 x}}{3}.$$

Remarquons que $S(x)$ doit nécessairement être réel, ce qui n'apparaît pas dans cette expression. Toutefois, on a

$$e^{jx} + e^{j^2 x} = e^{-\frac{x}{2}}\left(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x}\right) = 2e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right),$$

donc

$$3S(x) = e^x + 2e^{-\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

En faisant $x = 1$, on a enfin

$$\frac{e + 2e^{-\frac{1}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(3p)!}.$$

7.IV.3.

Nous allons chercher le développement en série entière de sa dérivée $\frac{1}{1+x^2}$ autour de $x = 1$; pour cela posons $X = x - 1$, on obtient

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{X^2+2X+2} = \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{X-1-i} - \frac{1}{X-1+i}\right\}.$$

En posant $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, on peut encore écrire

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2i}\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}\cdot\frac{1}{1-\frac{X}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}} + \frac{1}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}\cdot\frac{1}{1-\frac{X}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}}\right\}.$$

Compte tenu de $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ pour $|z| < 1$, on obtient

$$\frac{1}{1-\frac{X}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{2^{\frac{n}{2}}}e^{-in\frac{\pi}{4}}, \qquad \forall X \text{ vérifiant } \frac{|X|}{\sqrt{2}} < 1,$$

et

$$\frac{1}{1-\frac{X}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{2^{\frac{n}{2}}}e^{in\frac{\pi}{4}}, \qquad \forall X \text{ vérifiant } \frac{|X|}{\sqrt{2}} < 1.$$

Donc

$$\frac{1}{X^2+2X+2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}\left[\frac{e^{i(n+1)\frac{\pi}{4}} - e^{-i(n+1)\frac{\pi}{4}}}{2i}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}\sin(n+1)\frac{\pi}{4},$$

$$\text{pour } |X| < \sqrt{2}.$$

En résumé, si R est le rayon de convergence de $\left(\frac{X^n}{2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}\sin(n+1)\frac{\pi}{4}\right)$, on doit nécessairement avoir $R \geqslant \sqrt{2}$.

La série $\left\{\frac{X^n}{2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}\sin(n+1)\frac{\pi}{4}\right\}$ diverge pour $X = \sqrt{2}$ (puisque $\frac{\sin(n+1)\pi}{\sqrt{2}\quad 2} \not\to 0$ pour $n \to \infty$), donc $R \leqslant \sqrt{2}$.

On a donc nécessairement $R = \sqrt{2}$ et, puisque $X = x - 1$,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}\sin\left(n+1\right)\frac{\pi}{4}, \text{ dans }]1-R, 1+R[\text{ avec } R = \sqrt{2}.$$

En intégrant entre 1 et x appartenant à l'intervalle $]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}[$ (cf. théorème 7.III.1.), on aura

$$\text{Arc tg } x - \text{Arc tg } 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+1)2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}\sin(n+1)\frac{\pi}{4}, \qquad \forall x \in]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}[.$$

Puisque $0 \in]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}[$, on peut faire $x = 0$ dans la relation précédente et l'on obtient

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin (n+1)\frac{\pi}{4}}{(n+1)2^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}.$$

7.IV.4.

a) On a $e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, donc

$$|e^z - 1| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = e^{|z|} - 1.$$

d'où un premier résultat.

De plus, on a

$$e^{|z|} - 1 = |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n+1)!} \leqslant |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z|e^{|z|},$$

donc

$$e^{|z|} - 1 \leqslant |z|e^{|z|}.$$

b) On a l'implication suivante :

$$\cos z = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p z^{2p}}{(2p)!} \Rightarrow |\cos z| \leqslant \sum_{2p=0}^{\infty} \frac{|z|^{2p}}{(2p)!} = \text{ch } |z|.$$

7.IV.5.

a) Nous avons $e^z = 3 = e^{\text{Log} 3}$, équation du type $e^{z_1} = e^{z_2}$ ($\Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2ik\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$), donc $z = \text{Log } 3 + 2ik\pi$.

b) Tout nombre complexe Z pouvant se mettre sous la forme

$$Z = \rho e^{i\theta}, \text{ où } \rho = |Z| \text{ et } \theta = \text{Arg } Z,$$

on écrit

$$-2 = 2e^{i\pi}.$$

Nous avons donc à résoudre l'équation

$$e^z = 2e^{i\pi} = e^{\text{Log} 2} \cdot e^{i\pi} = e^{\text{Log} 2 + i\pi},$$

d'où l'on déduit

$$z = \text{Log } 2 + i\pi + 2ik\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) De même, on a

$$e^z = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow z = i\frac{\pi}{2} + 2ik\pi.$$

7.IV.6.

a) Posons $z = x + iy$; nous avons alors

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \sin iy \cos x = \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \quad \begin{cases} \sin x \operatorname{ch} y = 0, \\ \operatorname{sh} y \cos x = 0. \end{cases}$$

Il est clair que l'on a

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi \text{ (puisque } \operatorname{ch} y \neq 0)$$

puis

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{sh} y \cos(k\pi) = \operatorname{sh} y(-1)^k = 0 \Leftrightarrow y = 0;$$

donc

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi + i0 = k\pi.$$

En résumé, on a

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

b) En utilisant la relation $\sin iz = i \operatorname{sh} z$, nous constatons que

$$\operatorname{sh} z = 0 \Leftrightarrow \sin iz = 0 \Leftrightarrow iz = k\pi \Leftrightarrow z = ik'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}).$$

c) Nous avons

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2,$$

donc

$$e^{iz} - 4 + e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 = 0,$$

ou encore, en posant $X = e^{iz}$,

$$X^2 - 4X + 1 = 0 \Leftrightarrow X = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Nous avons à résoudre les équations suivantes :

$$e^{iz} = 2 + \sqrt{3} = e^{\operatorname{Log}(2+\sqrt{3})}, \quad e^{iz} = 2 - \sqrt{3} = e^{\operatorname{Log}(2-\sqrt{3})}$$

qui sont du type $e^{z_1} = e^{z_2} (\Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z})$.

Donc,

$$iz = \operatorname{Log}(2+\sqrt{3}) + 2ik\pi, \quad iz = \operatorname{Log}(2-\sqrt{3}) + 2ik\pi,$$

ou encore,

$$z = 2k\pi - i \operatorname{Log}(2+\sqrt{3}) \qquad \text{et} \qquad z = 2k\pi - i \operatorname{Log}(2-\sqrt{3}).$$

d) Tout nombre complexe Z peut s'écrire sous la forme

$$Z = \rho e^{i\theta}, \text{ où } \rho = |Z| \text{ et } \theta = \operatorname{Arg} Z.$$

Donc $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et, par suite,

$$e^{\frac{z}{z+1}} = 1-i \Leftrightarrow e^{\frac{z}{z+1}} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{\operatorname{Log}\sqrt{2}}.e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{\operatorname{Log}\sqrt{2}-i\frac{\pi}{4}}$$

équation qui est du type $e^{z_1} = e^{z_2}(\Leftrightarrow z_1 = z_2 + 2ik\pi$ où $k \in \mathbb{Z})$.

Nous avons alors $\dfrac{z}{z+1} = \operatorname{Log}\sqrt{2} - i\dfrac{\pi}{4} + 2ik\pi$, d'où l'on déduit z.

e) Nous avons $\cos z = \operatorname{ch} z = \cos iz$, donc $z = \pm iz + 2k\pi$, d'où l'on déduit z.

7.V.1.

On écrit

$$\Theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \left(\sum_0^\infty \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}\right) dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!},$$

puisque l'intégration terme à terme est légitime, le rayon de convergence de la série utilisée étant infini.

Alors
$$\Theta(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!},$$

ou

$$\Theta(1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(n-1)!}\right] + \frac{2}{\sqrt{\pi}} R_{n-1}$$

et l'on sait que l'inégalité suivante : $|R_{n-1}| \leqslant \dfrac{1}{(2n+1)n!}$ est vérifiée, puisque la série est une série alternée. Pour $n = 6$, on a $0 < \dfrac{2R_5}{\sqrt{\pi}} < 2.10^{-4}$, d'où

$$S_5' \leqslant \Theta(1) \leqslant S_5'' + 2.10^{-4},$$

où S_5' et S_5'' sont des valeurs approchées respectivement par défaut et par excès de

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5.2!} - \frac{1}{7.3!} + \frac{1}{9.4!} - \frac{1}{11.5!}\right].$$

Le calcul numérique donne

$$\Theta(1) = 0{,}881\,6 \pm 6.10^{-4},$$

résultat légèrement meilleur que celui demandé par le texte.

7.V.2.

1° On a le développement suivant :

$$(1+X)^\alpha = 1+\alpha X+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}X^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-p+1)}{p!}X^p+\ldots$$

(rayon de convergence égal à l'unité), d'où l'on déduit

$$(1+x^3)^{-\frac{1}{2}} = 1-\frac{x^3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}x^6+\ldots+(-1)^p\frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p}x^{3p}+\ldots$$

le rayon de convergence étant égal à l'unité.

L'intervalle d'intégration est contenu dans l'intervalle de convergence de la série donc l'intégration terme à terme est légitime.

Comme on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^{3p}dx = \frac{1}{(3p+1)2^{3p+1}}$$

il vient alors

$$I_1 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\ldots(-1)^p.\frac{1.3.\ldots(2p-1)}{2.4.\ldots 2p}\times\frac{1}{(3p+1)2^{3p+1}}+\ldots$$

2° La série définissant I_1 étant convergente, on sait déjà que u_p tend vers 0.

Vérifions-le directement

$$\left|\frac{u_{p+1}}{u_p}\right| = \frac{2p+1}{2p+2}\times\frac{3p+1}{3p+4}\times\frac{1}{2^3} \Rightarrow \left|\frac{u_{p+1}}{u_p}\right| < \frac{1}{8},$$

puisque $\frac{2p+1}{2p+2}$ et $\frac{3p+1}{3p+4}$ sont inférieurs à 1.

Puisque $\left|\frac{u_{p+1}}{u_p}\right| < \frac{1}{8}$, cela implique que la valeur absolue de $|u_{p+1}|$ décroît en tendant vers 0 $\left(\text{car } |u_p| < \frac{u_0}{8^p}\right)$.

3° Cette série alternée, dont le terme général tend vers 0 en décroissant en valeur absolue, admet un reste R_p majoré en valeur absolue par la valeur absolue du premier terme négligé, soit $|R_p| \leqslant |u_{p+1}|$.

On a donc

$$|R_4| \leqslant |u_5|,$$

mais on sait que

$$|u_5| = \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}\times\frac{1}{16}\times\frac{1}{2^{16}}$$

ce qui implique que l'on a

$$|R_4| \leqslant \frac{63}{2^{28}} < \frac{2^6}{2^{28}} = \frac{1}{4.2^{20}} < \frac{1}{4.10^6},$$

donc

$$|R_4| < 3.10^{-7}.$$

Pour calculer S_4 à 2.10^{-7} près, il suffit de calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 à 5.10^{-8} près.

p	u_p	u'_p	ε
0	$\frac{1}{2}$	0,5	0
1	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^4} = -\frac{1}{128}$	−0,007 812 5	0
2	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2^7} = \frac{3}{7\,168}$	0,000 418 5	5.10^{-8}
3	$-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{2^{10}} = \frac{-1}{32\,768}$	−0,000 030 5	5.10^{-8}
4	$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{2^{13}} = \frac{35}{13\,631\,488}$	−0,000 002 6	5.10^{-8}

On en déduit alors

$$S_4 = 0{,}500\,421\,1 - 0{,}007\,843\,0 \pm 1{,}5.10^{-7},$$

soit, enfin,

$$S_4 = 0{,}492\,578\,1 \pm 1{,}5.10^{-7}.$$

On en conclut la valeur de I_1

$$I_1 = 0{,}492\,578 \pm 10^{-6}.$$

7.V.3.

Soit $F(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n x^n$; on suppose l'existence d'une telle solution de E, le rayon de convergence R de la série étant non nul. Sur $]-R, R[$ les opérations de dérivation terme à terme sont justifiées (théorème 7.III.1.).

Alors on a

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \qquad \text{et} \qquad F''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$$

et l'expression $xF'' + 3F' - 4x^3F$ se développe sous la forme

$$\sum_{2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{1}^{\infty} 3na_n x^{n-1} - \sum_{4}^{\infty} 4a_{n-4}x^{n-1}.$$

En identifiant à zéro, on obtient les relations

$$a_1 = 0,\ 2a_2 + 6a_2 = 0,\ 6a_3 + 9a_3 = 0$$

ainsi que la relation générale suivante :

$$n(n-1)a_n + 3na_n - 4a_{n-4} = 0, \qquad n \geqslant 4.$$

Comme $a_0 = F(0) = 1$, on a donc

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = 0,\ a_3 = 0$$

et

$$n(n+2)a_n = 4a_{n-4}.$$

On en déduit immédiatement que les seuls coefficients non nuls sont les coefficients a_{4p}, et la relation

$$a_{4p} = \frac{4a_{4(p-1)}}{4p(4p+2)} = \frac{a_{4p-4}}{2p(2p+1)}$$

donne

$$a_{4p} = \frac{a_0}{(2p+1)!} = \frac{1}{(2p+1)!}.$$

$F(x)$ a nécessairement la forme suivante :

$$F(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{x^{4p}}{(2p+1)!}.$$

Comme le rayon de convergence de cette série est infini, on peut donc affirmer l'existence d'une solution et d'une seule développable en série entière autour de l'origine telle que $F(0) = 1$.

En écrivant que l'on a

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{x^{4p}}{(2p+1)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{0}^{\infty} \frac{(x^2)^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

on reconnaît que $F(x)$ a pour expression

$$F(x) = \frac{\operatorname{sh} x^2}{x^2}.$$

7.V.4.

1° En écrivant $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ le premier membre de (E) prend la forme suivante :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \omega^2 \sum_{0}^{\infty} a_n x^{n+1},$$

les dérivations terme à terme étant justifiées dans $[-R, R]$, R étant supposé non nul.
En identifiant il vient

$$2a_1 = 0, \quad 2a_2 + a_0\omega^2 = 0, \quad (n+2)(n+1)a_{n+1} + \omega^2 a_{n-1} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = -\frac{\omega^2}{2}$$

et, plus généralement,

$$a_{n+1} = -\frac{\omega^2}{(n+1)(n+2)} a_{n-1}, \qquad n \geqslant 2.$$

Donc

$$a_{2p+1} = 0, \qquad \forall p \in \mathbb{N}$$

et

$$a_{2p+2} = -\frac{\omega^2}{(2p+2)(2p+3)} a_{2p}.$$

Alors,

$$a_{2p+2} = (-1)^{p+1} \frac{\omega^{2p+2}}{(2p+3)!} a_0.$$

Puisque le rayon de convergence de $(a_n\, x^n)$ est infini

$$\left(\left|\frac{a_{2p}}{a_{2p+2}}\right| = \frac{(2p+2)(2p+3)}{\omega^2} \text{ tend vers } +\infty \text{ lorsque } p \text{ tend vers } +\infty\right),$$

on obtient donc une famille de solutions de (E) :

$$y = a_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \omega^{2p}}{(2p+1)!} x^{2p}, \ a_0 \text{ étant une constante quelconque.}$$

On reconnaît la fonction élémentaire $\dfrac{\sin \omega x}{x}$, donc

$$y = a_0 \frac{\sin \omega x}{x}.$$

2° On cherche la solution générale de (E) en effectuant le changement de fonction inconnue suivant :

$$y = u y_1, \quad \text{où } y_1 = \frac{\sin \omega x}{x}.$$

(E) devient alors

(E_1) $$xy_1u'' + 2u'(xy_1' + y_1) = 0.$$

On intègre (E_1) en l'écrivant sous la forme

$$\frac{u''}{u'} = -2\left[\frac{y_1'}{y_1} + \frac{1}{x}\right],$$

d'où

$$\mathrm{Log}\,|u'| = -2\,\mathrm{Log}\,|y_1| - 2\,\mathrm{Log}\,|x| + C,$$

où C est une constante, soit alors

$$u' = \frac{K_1}{x^2y_1^2} = \frac{K_1}{\sin^2 \omega x}, \text{ où } K_1 \text{ est une constante.}$$

Donc

$$u = K_1 \int \frac{dt}{\sin^2 \omega t}$$

et finalement

$$y = \frac{A \sin \omega x + B \cos \omega x}{x}.$$

7.V.5.

Fonctions de Bessel d'ordre entier.

1° On a

$$y = x^n u \Rightarrow \begin{cases} y' = nx^{n-1}u + x^nu', \\ y'' = n(n-1)x^{n-2}u + 2nx^{n-1}u' + x^nu''. \end{cases}$$

Le premier membre de (E_n) devient alors

$$x^{n+2}u'' + (2nx^{n+1} + x^{n+1})u' + [(x^2 - n^2)x^n + nx^n + n(n-1)x^n]u,$$

soit, après réduction,

$$x^{n+1}[xu'' + (2n+1)u' + xu],$$

d'où l'équation (E_n')

(E_n') $$xu'' + (2n+1)u' + xu = 0.$$

2° Soit $u(x) = \sum_0^\infty a_px^p$, avec pour rayon de convergence R non nul; en dérivant terme à terme on obtient u' et u'', c'est-à-dire

$$u'(x) = \sum_1^\infty pa_px^{p-1} \quad \text{et} \quad u''(x) = \sum_2^\infty p(p-1)a_px^{p-2}.$$

En reportant ces développements dans (E'_n) et en identifiant il vient

$$a_1 = 0, \quad a_0 + 2(2n+2)a_2 = 0. \quad \ldots, \quad a_{p-2} + p(p+2n)a_p = 0.$$

On en déduit

$$a_p = -\frac{a_{p-2}}{p(2n+p)}$$

(puisque n n'est pas un entier négatif) et, par suite, pour tout k on a

$$a_{2k+1} = 0 \qquad \text{et} \qquad a_{2k} = -\frac{a_{2k-2}}{4k(n+k)}.$$

Cette dernière relation permet d'obtenir a_{2k} :

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}k!} \frac{1}{(n+1)\ldots(n+k)} a_0 = \frac{(-1)^k n!}{2^{2k}k!(n+k)!} a_0,$$

Comme on a l'égalité suivante :

$$\left| \frac{a_{2k}}{a_{2k-2}} \right| = \frac{1}{4k(n+k)},$$

le rayon de convergence de la série trouvée est infini.

Les solutions de (E'_n) développables en série entière autour de l'origine sont donc données par

$$u(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n!}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Et, en particulier,

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k n!}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

3° On a donc

$$\mathfrak{J}_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

le rayon de convergence de la série étant infini.

On en déduit

$$\mathfrak{J}_{n+1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+1+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

$$\text{(1)} \qquad \mathfrak{J}_{n-1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n-1+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

La première série s'écrit, en posant $k = k'-1$,

$$\text{(2)} \qquad \mathfrak{J}_{n+1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} \sum_{k'=1}^{\infty} -\frac{(-1)^{k'}}{(k'-1)!(n+k')!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k'}.$$

Alors on en déduit

$$\mathfrak{J}_{n-1}(x)+\mathfrak{J}_{n+1}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!(n-1+k)!}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\right],$$

soit

$$\mathfrak{J}_{n-1}(x)+\mathfrak{J}_{n+1}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\right]$$

$$=n\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

ou encore

(3) $$\mathfrak{J}_{n-1}(x)+\mathfrak{J}_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}\,\mathfrak{J}_n(x).$$

En reprenant les expressions (1) et (2) on trouve pour la différence $\mathfrak{J}_{n-1}(x)-\mathfrak{J}_{n+1}(x)$

$$\mathfrak{J}_{n-1}(x)-\mathfrak{J}_{n+1}(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{(n-1)!}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(n+2k)}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}\right]$$

$$=2\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\right)'$$

la dérivation terme à terme étant légitime. On obtient donc

(4) $$\mathfrak{J}_{n-1}(x)-\mathfrak{J}_{n+1}(x)=2\mathfrak{J}_n'(x).$$

En effectuant la somme, puis la différence des expressions (3) et (4), il vient

$$\mathfrak{J}_{n-1}(x)=\mathfrak{J}_n'(x)+\frac{n}{x}\mathfrak{J}_n(x)$$

et

$$\mathfrak{J}_{n+1}(x)=\frac{n}{x}\mathfrak{J}_n(x)-\mathfrak{J}_n'(x).$$

On en déduit

$$\mathfrak{J}_{n-1}(x)=\frac{1}{x^n}\frac{d}{dx}\,[x^n\mathfrak{J}_n(x)] \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{J}_{n+1}(x)=-x^n\left[\frac{d}{dx}\frac{\mathfrak{J}_n(x)}{x^n}\right].$$

8. SÉRIES DE FOURIER

Les séries du type

$$\frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \ldots + \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx + \ldots,$$

[α_n et β_n étant des constantes réelles] sont dites séries trigonométriques. Les séries de Fourier entrent dans la famille des séries trigonométriques.

I. — NOTIONS GÉNÉRALES RELATIVES AUX SÉRIES DE FOURIER.

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui satisfait aux propriétés suivantes :

$\mathcal{T}$ $\begin{cases} \text{être de période } 2\pi, \\ \text{être intégrable dans un intervalle } (a, a+2\pi) \text{ (donc dans tout intervalle} \\ \text{de longueur } 2\pi). \end{cases}$

1° Coefficients de Fourier de *f*. — Les termes

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x) \cos nx dx \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(x) \sin nx dx$$

sont appelés coefficients de Fourier de f.

Remarquons que

a) a_n et b_n sont indépendants du choix de α;

b) $a_n = 0$ si f est impaire et $b_n = 0$ si f est paire.

2° Série de Fourier associée à *f*. — C'est la série trigonométrique

$$\frac{a_0}{2}(f) + a_1(f) \cos x + b_1(f) \sin x + \ldots + a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx + \ldots$$

A toute fonction f, satisfaisant aux conditions $\mathcal{T}$, on peut faire correspondre sa série de Fourier. Symboliquement, on écrira

$$f \rightsquigarrow \frac{a_0}{2}(f) + a_1(f) \cos x + b_1(f) \sin x + \ldots$$

3° Fonction développable en série de Fourier. — Nous dirons qu'une fonction f satisfaisant à $\mathcal{T}$ est développable en série de Fourier lorsque f est la somme de la série de Fourier qu'elle engendre, c'est-à-dire

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \cos nx + b_n(f) \sin nx, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

II. — RECHERCHE DE FONCTIONS DÉVELOPPABLES EN SÉRIE DE FOURIER.

1° Théorème 8.II.1. — Soit une série trigonométrique

$$\frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x + \ldots + \alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx + \ldots$$

qui converge uniformément vers sa somme $S(x)$ dans $\mathbb{R}$. Alors, $S(x)$ est développable en série de Fourier et l'on a $a_n(S) = \alpha_n$ et $b_n(S) = \beta_n$.

2° Rappelons que toute fonction g monotone sur un segment $[a, b]$ n'admet que des discontinuités de première espèce, c'est-à-dire :

$$g(x) \to \text{ limite notée } g(x_0+0) \text{ si } x \to x_0+0,$$

$$g(x) \to \text{ limite notée } g(x_0-0) \text{ si } x \to x_0-0.$$

De plus, l'ensemble des points de discontinuités est dénombrable.

Lorsque l'on a $g(x_0) = \dfrac{g(x_0+0)+g(x_0-0)}{2}$ en tout point x_0 de discontinuité, on dit que la fonction g est *régulière*. On a alors

$$g(x) = \frac{g(x+0)+g(x-0)}{2}, \qquad \forall x \in [a, b].$$

Théorème de Jordan. — Si f est périodique, de période 2π, et est la différence de deux fonctions non décroissantes dans un intervalle $[\alpha, \alpha+2\pi]$, sa série de Fourier converge pour tout x et a pour somme

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

En outre, la convergence vers $f(x)$ est uniforme sur tout segment sur lequel f est continue, extrémités comprises.

Remarques.

a) f n'admet évidemment que des discontinuités de première espèce, puisque $f = g_1 - g_2$, où g_1 et g_2 sont monotones dans $[\alpha, \alpha+2\pi]$.

b) Toute fonction f, différence de deux fonctions non décroissantes sur $[a, b]$, est dite à *variation bornée* sur $[a, b]$.

c) Si f satisfait aux hypothèses du théorème de Jordan et si elle est régulière, alors elle est développable en série de Fourier.

3° Théorème de Dirichlet. — Soit une fonction f de période 2π et bornée en valeur absolue.

Supposons que l'on puisse partager l'intervalle $[\alpha, \alpha+2\pi]$ en un nombre fini d'intervalles $[\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ $(\alpha_i < \alpha_{i+1},\ \alpha_1 = \alpha,\ \alpha_n = \alpha+2\pi)$ de façon que f soit monotone et continue dans chaque ouvert $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$; alors la série de Fourier associée à f converge pour tout x et a pour somme

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

De plus, la convergence vers $f(x)$ est uniforme sur tout segment sur lequel $f(x)$ est continue, extrémités comprises.

Corollaire. — Si $f(x)$ satisfait aux hypothèses du théorème de Dirichlet et si elle est régulière, alors elle est développable en série de Fourier.

III. — ÉGALITÉ DE PARSEVAL.

Soit une fonction $f : [a, a+2\pi] \to \mathbb{R}$ et intégrable sur $[a, a+2\pi]$. Posons

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\cos nx dx \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Si f^2 est intégrable sur $[a, a+2\pi]$, alors la série de terme général $(a_n^2+b_n^2)$ est convergente. Plus précisément, on a

$$\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2+b_n^2).$$

Remarque.

f intégrable et bornée sur $[a, a+2\pi] \Rightarrow f^2$ intégrable sur $[a, a+2\pi]$.

IV. — FONCTIONS DE PÉRIODE $T \neq 2\pi$.

Soit une fonction f définie et intégrable sur $[a, a+T]$ et de période T.

1° On peut lui associer la série de Fourier suivante :

$$f \rightsquigarrow \frac{a_0}{2} + a_1\cos(\omega x) + b_1\sin(\omega x) + \ldots + a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x) + \ldots \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right),$$

où $$a_n = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\cos(n\omega x)dx \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(x)\sin(n\omega x)dx.$$

2° On peut aussi lui associer sa série de Fourier écrite sous forme complexe :

$$f \rightsquigarrow \ldots + C_{-n}e^{-in\omega x} + \ldots + C_{-1}e^{-i\omega x} + C_0 + C_1 e^{i\omega x} + \ldots + C_n e^{in\omega x} + \ldots,$$

où
$$C_p = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)e^{-ip\omega x}dx \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right).$$

Pour $T = 2\pi$,

$$f \rightsquigarrow \ldots + C_{-n}e^{-inx} + \ldots + C_{-1}e^{-ix} + C_0 + C_1 e^{ix} + \ldots + C_n e^{inx} + \ldots$$

et lorsque f est développable en série de Fourier, on aura donc

$$f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{inx}.$$

V. — BASE ORTHOGONALE (M.P.2).

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications : $[a, b] \to \mathbb{R}$, muni de la structure usuelle. Supposons qu'à deux éléments quelconques f et g de $\mathcal{F}$ on puisse faire correspondre un nombre réel noté (f, g) (par exemple, $\int_a^b f(x)g(x)dx$ si f et g sont continues) tel que

1. $(f,f) \geqslant 0$; $(f,f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$,
2. $(f, g) = (g, f)$ (symétrie),
3. $f \mapsto (f, g)$ est linéaire.

On dit que (,) est un produit scalaire sur $\mathcal{F}$ et $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ définit une norme sur $\mathcal{F}$ (appelée norme associée au produit scalaire)

Si $(f, g) = 0$, on dit que f et g sont orthogonaux.

Exemple : $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ définit un produit scalaire sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{C}$ des applications : $[a, b] \mapsto \mathbb{R}$ qui sont continues.

Base. — Soit $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}$, linéairement indépendantes $\left(\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \lambda_i\varphi_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0, \forall N\right)$ et Φ le sous-espace vectoriel engendré par $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$:

$$\Phi = \left\{\psi ; \psi = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i\varphi_i, \ \begin{array}{l}\text{où toutes les constantes réelles } \lambda_i \\ \text{sont nulles, sauf un nombre fini}\end{array}\right\}.$$

On dit que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ est une base de $\mathcal{F}$ si pour tout $f \in \mathcal{F}$ il existe une suite $f_n \in \Phi$ telle que $f_n \to f$ lorsque $n \to \infty$ $(\Leftrightarrow \|f_n - f\| \to 0)$.

Autrement dit, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ est une base de $\mathcal{F} \Leftrightarrow \Phi$ est dense dans $\mathcal{F}$.

Théorème des bases orthogonales. — Soit une suite $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$, orthogonale c'est-à-dire telle que $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$, pour $i \neq j$.

Alors $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ sont linéairement indépendants et de plus on a

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_n \ldots \text{ base de } \mathcal{F} \Leftrightarrow \|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2(f)\|\varphi_n\|^{-2}, \text{ où } c_n(f) = (f, \varphi_n), \forall f \in \mathcal{F}.$$

Exemple :

Lorsque $b = a + 2\pi$, le sous-espace vectoriel $\mathcal{C}$ admet pour base les fonctions

$$x \mapsto \sin px, \qquad x \mapsto \cos qx, \qquad p \text{ et } q \in \mathbb{N}.$$

EXERCICES DU CHAPITRE 8

8.II.1. ◆

1° *Représenter graphiquement* $f\colon x \mapsto f(x) = \sup(\sin x, 0)$.
Déterminer la série de Fourier associée à cette fonction.

2° *Montrer que f est développable en série de Fourier, cette série convergeant uniformément sur* $\mathbb{R}$ *vers f.*

3° *Calculer*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1}.$$

8.II.2. ◆

On considère la fonction f de période 2π *et qui est définie dans* $[-\pi, \pi[$ *par*

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} x & si \quad |x| < \pi, \\ 0 & si \quad x = -\pi. \end{cases}$$

1° *Montrer que f est développable en série de Fourier et déterminer cette série.*

2° *a) Montrer que cette série converge uniformément dans tout fermé* $[\alpha, \beta]$ *inclus dans* $]-\pi, \pi[$.
b) Montrer que l'on ne peut avoir la convergence uniforme sur $[-\pi, \pi[$ *(donc* a fortiori *sur* $[-\pi, \pi]$*).*

8.II.3. ◆◆

Soit α *un réel,* $\alpha \notin \mathbb{Z}$, *et f la fonction de période* 2π *définie dans* $[-\pi, \pi[$ *par*

$$x \mapsto f(x) = \cos \alpha x.$$

1° *Vérifier que f est continue pour tout x. Montrer qu'elle est développable en série de Fourier et déterminer cette série.*

2° *Montrer que cette série converge uniformément sur* $\mathbb{R}$, *en utilisant*
   a) une étude directe ;
   b) le théorème de Dirichlet.

3° *Vérifier que l'on a*

$$\frac{\pi}{\sin \alpha\pi} = \frac{1}{\alpha} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

4° *Déterminer la somme de la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - b_n \frac{\cos nx}{n} \right),$$

a_n *et* b_n *étant les coefficients de Fourier de f, et en donner une représentation graphique.*

8.II.4. ◆◆

On considère la série de terme général

$$\frac{\sin^3 nx}{n!} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

a) Vérifier que cette série est convergente $\forall x \in \mathbb{R}$. *Soit* S *sa somme. Montrer que* S *est de classe* C^∞.

b) Montrer que S *est développable en série de Fourier et trouver son développement.*

c) Expliciter S.

8.II.5. ◆

1° *Montrer que la fonction* $F: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *de période* 2π, *définie dans* $[0, 2\pi[$ *par*

$$x \mapsto F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-\pi}{2} & si \quad x \in]0, 2\pi[, \\ 0 & si \quad x = 0, \end{cases}$$

est développable en série de Fourier. Déterminer cette série ainsi que les domaines de convergence uniforme.

2° *Soit* $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *de période* 2π, *intégrable sur* $[0, 2\pi]$, *nulle au voisinage de* 0 *et de* 2π.

A f *on associe sa série de Fourier*

$$\frac{a_0(f)}{2} + a_1(f) \cos x + b_1(f) \sin x + \ldots$$

Montrer que l'on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\pi - t}{2} \, dt.$$

8.II.6. ◆◆

On considère une fonction définie, continue et à variation bornée sur $[0, \pi]$.

1° *Montrer que l'on peut trouver de plusieurs façons deux suites numériques réelles* $\{a_n\}$ *et* $\{b_n\} (n \in \mathbb{N})$ *telles que*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \ \forall x \in [0, \pi],$$

la série étant uniformément convergente sur $[0, \pi]$.

2° *Montrer qu'il existe une suite* $\{a_n\}$ *et une seule telle que*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \ \forall x \in [0, \pi],$$

la série étant uniformément convergente sur $[0, \pi]$.

3° *Montrer qu'on ne peut, en général, trouver une suite* $\{b_n\}$ *telle que*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \ \forall x \in [0, \pi],$$

la série étant uniformément convergente sur $[0, \pi]$.

Condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi?

8.III.1. ◆ *Montrer que la fonction f de période 2π, définie sur $[-\pi, \pi[$ par*

$$x \mapsto f(x) = x^2$$

est développable en série de Fourier. Calculer cette série et en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

8.IV.1. ◆◆ **Formule de Poisson.**

Soit une fonction $g: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ qui est supposée

— *monotone, continue et bornée dans $]-a, a[$, a est une constante positive $\notin \mathbb{N}$,*

— *nulle dans $]-\infty, -a[$ et $]a, \infty[$.*

1° *a) Montrer que la fonction $G(x) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} g(x+K)$ est définie pour tout x.*

b) Montrer que G est de période 1 et est développable en série de Fourier.

2° *Déduire de la question 1° la formule suivante:*

$$(1) \quad \sum_{K=-\infty}^{+\infty} g(K) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int_{-a}^{+a} g(x)e^{-2i\pi\nu x}\, dx \text{ (formule de Poisson).}$$

3° **Généralisation.**

Soit une fonction $g_1: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, qui est supposée

— *décroissante, continue et bornée dans $]0, \infty[$,*

— *nulle dans $]-\infty, 0[$,*

— *régulière, c'est-à-dire ici*

$$g(0) = \frac{g(0_+)}{2}.$$

De plus, on impose

$g_1(x) < kx^{-2}$ pour $x > X_0$ (k et X_0 sont des constantes).

Montrer que l'on a

$$(2) \qquad \sum_{K=0}^{\infty} g_1(K) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} g_1(x)e^{-2i\pi\nu x}\, dx.$$

8.V.1. ◆◆ **Théorème des bases orthogonales.**

On considère l'ensemble E des applications $[a, b] \mapsto \mathbb{R}$ qui sont intégrables et bornées sur $[a, b]$.

1° *Soit $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions de E, vérifiant*

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = 0, \text{ si } i \neq j \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \varphi_i^2(x)dx = 1, \text{ si } i = j.$$

On pose

$$\alpha_n = \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \qquad (f \in E).$$

Démontrer que la série (α_n^2) est convergente et que l'on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx.$$

2° *On munit E d'une semi-distance en posant*

$$d(f,g) = \int_a^b (f-g)^2 dx.$$

Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par la suite $\{\varphi_n\}_1^\infty$, *c'est-à-dire que l'on a*

$$g \in F \Leftrightarrow \exists \{\lambda_k\} \quad \text{telle que} \quad g = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_k \varphi,$$

(un nombre fini de λ_k *étant non nuls).*
Montrer que

$$\int_a^b f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 \Leftrightarrow f \in \bar{F},$$

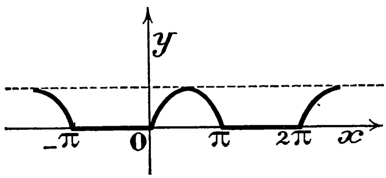
$\bar{F}$ *étant la fermeture de F dans E.*

3° *En déduire le théorème des bases orthogonales.*

8.II.1.

1° Représentation graphique de f.
La fonction f est évidemment de *période* 2π et *continue* $\forall x \in \mathbb{R}$.
Ici

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{si } \sin x \geqslant 0, \\ 0, & \text{si } \sin x \leqslant 0. \end{cases}$$



On obtient le graphique ci-dessus.

Série de Fourier associée à cette fonction.
On a

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1+(-1)^n}{1-n^2}, & \text{si } n \neq 1, \\ 0, & \text{si } n = 1; \end{cases}$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \sin nx dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq 1, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

On obtient donc

$$f(x) \rightsquigarrow \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\left\{ \frac{\cos 2x}{4-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \dots + \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} + \dots \right\}.$$

2° Développement en série de Fourier.
Pour montrer que $f(x)$ est développable en série de Fourier il suffit de s'assurer (cf. corollaire du paragraphe II, 3°)

α) qu'elle satisfait aux hypothèses du théorème de Dirichlet;

β) qu'elle est régulière, c'est-à-dire que l'on a

$$f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, \qquad \forall x.$$

Cette dernière condition est évidemment satisfaite, puisque f est continue pour tout x.

Justifions α). — On a évidemment $|f(x)| \leqslant 1$ *(bornage)* pour tout x.
Considérons maintenant l'intervalle $[-\pi, \pi[$ que l'on peut partager en trois intervalles :

$$[-\pi, 0[, \qquad \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\quad \text{et} \quad \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[.$$

Dans chacun des ouverts $]-\pi, 0[$, $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ la fonction f est bien continue et monotone.

α) et β) étant vérifiées par *f*, cette fonction sera développable en série de Fourier, c'est-à-dire que l'on aura

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De plus $f(x)$ étant continue sur $[0, 2\pi]$, extrémités comprises (puisqu'elle est continue $\forall x$), on est assuré que la série de Fourier *converge uniformément* vers sa somme $f(x)$ sur $[0, 2\pi]$. Ceci entraîne la convergence uniforme, $\forall x \in \mathbb{R}$, en raison de la périodicité 2π de cette série.

3° Calcul de $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1}$.

Pour calculer $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1}$ il suffit de faire $x = \frac{\pi}{2}$ dans (1), ce qui entraîne

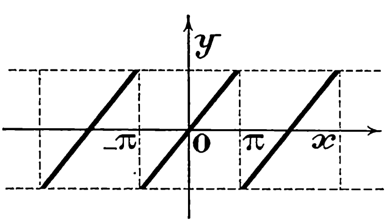
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$$

et, par suite,

$$S = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

8.II.2.

Remarquons d'abord que f est régulière.



En effet, elle n'admet que $-\pi$ comme point de discontinuité dans l'intervalle $[-\pi, \pi[$ et l'on a, en ce point,

$$\frac{f(-\pi+0)+f(-\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0 = f(-\pi).$$

1° *a*) **Déterminons la série de Fourier associée à f.**
On a

$$a_n = 0,$$

puisque f est une fonction impaire, et

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

puisque $f(x)\sin nx$ est paire.
Donc

$$f(x) \rightsquigarrow 2\left\{\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n} + \dots\right\}.$$

b) **Développement en série de Fourier.**
Pour montrer que f est développable en série de Fourier, il suffit de s'assurer que :
α) f satisfait aux hypothèses du théorème de Dirichlet;
β) f est régulière.
Nous avons vu que cette dernière condition est vérifiée.

Justifions α).

$$\begin{cases} |f(x)| \leqslant \pi, \quad \forall x \text{ (bornage)} \\ \text{en considérant } [-\pi, \pi[, \text{ la fonction } f \text{ est monotone et continue dans }]-\pi, \pi[. \end{cases}$$

Donc f est développable en série de Fourier, c'est-à-dire que l'on a

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2° *a*) **La série converge sur tout fermé $[\alpha, \beta]$ inclus dans $]-\pi, \pi[$.**
On déduit du théorème de Dirichlet que la série de Fourier converge uniformément sur tout intervalle, où f est continue, *extrémités comprises.*
Donc elle converge uniformément sur tout fermé $[\alpha, \beta]$ inclus dans $]-\pi, \pi[$.

b) **Elle ne converge pas uniformément sur $]-\pi, \pi[$.**
Supposons que l'on ait convergence uniforme sur $[-\pi, \pi[$.
Alors

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to-\pi+0}\left\{(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right\} = \lim_{x\to-\pi+0}\left\{2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right\}$$

$$\left(= \lim_{x\to-\pi+0}\{f(x)\}\right)$$

donc $0 = f(-\pi+0) = -\pi$, ce qui est contradictoire.

8.II.3.

1° *a*) Dans $[-\pi, \pi[$ le seul point de discontinuité ne peut être que $-\pi$.

— ***Pour $x \to -\pi + 0$,***

$$f(x) = \cos\alpha x \to \cos(-\alpha\pi) = \cos\alpha\pi = f(-\pi).$$

— ***Pour*** $x \to -\pi - 0$, on a

$$x \in [-3\pi, -\pi[\iff x + 2\pi \in [-\pi, +\pi[,$$

ce qui implique que l'on a

$$f(x) = f(x + 2\pi) = \cos \alpha(x + 2\pi).$$

Donc

$$f(x) \to \cos \alpha\pi = f(-\pi).$$

Il en résulte que $-\pi$ est point de continuité de la fonction f, donc f est continue en tout point de $[-\pi, \pi[$, par suite f est continue pour tout x (en raison de la périodicité 2π).

b) On s'assure aisément que f satisfait aux hypothèses du théorème de Dirichlet. De plus, elle est régulière (puisque continue pour tout x). Donc f est développable en série de Fourier, c'est-à-dire que l'on a

$$(1) \qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad \forall x,$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x \cos nx dx = (-1)^n \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2},$$

puisque $f(x) \cos nx$ est paire, et $b_n = 0$ puisque f est une fonction paire.

Finalement, on obtient

$$(2) \qquad f(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} + 2 \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha}{\alpha^2 - n^2} \cos nx, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

2° *a*) La série de terme général $a_n \cos nx$ est uniformément convergente pour tout x car $|a_n \cos nx|$ est majoré pour tout x par le terme général d'une série numérique convergente. Plus précisément, on a

$$|a_n \cos nx| \leqslant \frac{2|\alpha|}{\pi} \cdot \frac{1}{|\alpha^2 - n^2|} = \frac{2|\alpha|}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2 - \alpha^2} \text{ (pour tout } n \text{ vérifiant } n > |\alpha|).$$

b) Nous venons de voir (cf. la question 1°) que f satisfait aux hypothèses du théorème de Dirichlet. De plus, elle est continue en tout point de $[-\pi, \pi]$ *(extrémités comprises)*, donc la série $\{a_n \cos nx\}$ converge uniformément sur $[-\pi, \pi]$.

En raison de la *périodicité* 2π *de cette série*, on en déduit qu'elle converge uniformément pour tout x.

3° Pour obtenir la relation demandée à la question 3°, il suffit de faire $x = 0$ dans l'égalité (2). Remarquons que l'on obtient ainsi un développement de la fonction $z \mapsto \dfrac{1}{\sin \pi z}$, qui met en évidence les pôles de cette fonction.

4° En raison de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la série $(a_n \cos nx)$, on déduit de l'égalité (1) (puisque $b_n = 0$)

$$\int_0^x f(t)\,dt = \frac{a_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_0}{n} \sin nx, \qquad \forall x,$$

ou encore

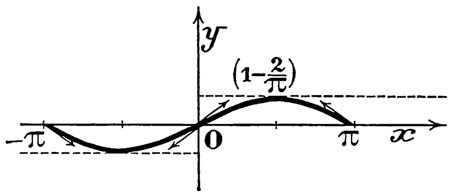
$$\frac{\sin \alpha x}{\alpha} - \frac{a_0}{2} x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sin nx, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

La somme de la série $\left(\frac{a_n}{n} \sin nx\right)$ est donc la fonction $F(x)$ de période 2π et qui, dans $[-\pi, \pi[$, est définie par

$$x \mapsto F(x) = \frac{\sin \alpha x}{\alpha} - \frac{\sin \alpha\pi}{\alpha\pi} x.$$

Représentation graphique.

Le graphique ci-dessous a été fait pour $\alpha = \frac{1}{2}$.



8.II.4.

a) On a évidemment

$$\left|\frac{\sin^3 nx}{n!}\right| \leqslant \frac{1}{n!}, \qquad \forall x,$$

donc la série $\left(\frac{\sin^3 nx}{n!}\right)$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$, vers sa somme $S(x)$.

On peut écrire

$$4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3 nx}{n!} = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3nx}{n!},$$

puisque chacune des séries considérées est convergente.

Soit $\quad \sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}; \quad$ on a alors $\quad 4S(x) = 3\sigma(x) - \sigma(3x).$

Pour montrer que $S(x)$ est de classe C^∞, il suffit donc de montrer que $\sigma(x)$ est de classe C^∞.

Or, la série $\left(\frac{d^p}{dx^p} \frac{\sin nx}{n!}\right)$ $(p \in N)$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$, donc $\sigma^{(p)}$ est définie $(\forall p)$ et, par suite, S est de classe C^p $(\forall p)$.

b) En raison de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2!} + \frac{\sin 3x}{3!} + \ldots$$

il est clair que *cette série est le développement en série de Fourier de* $\sigma(x)$ (cf. théorème **8**.II.1.). Donc $S(x)$ est développable en série de Fourier et compte tenu de la relation suivante :

$$4S(x) = 3\sigma(x) - \sigma(3x),$$

on obtient

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad \forall x,$$

avec

$$b_{3p} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(3p)!} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{p!}, \quad b_{3p+1} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(3p+1)!}, \quad b_{3p+2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{(3p+2)!}.$$

c) **Explicitons d'abord** $\sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$.

Pour cela on lui associe $\tau(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$ et l'on obtient

$$\tau + i\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

en posant $z = e^{ix}$.

Donc

$$\tau + i\sigma = e^z = e^{\cos x + i \sin x} = e^{\cos x}[\cos(\sin x) + i \sin(\sin x)]$$

et, par suite,

$$\sigma(x) = \sin(\sin x)\, e^{\cos x}.$$

On obtient alors

$$S(x) = \frac{3}{4}\sin(\sin x)\, e^{\cos x} - \frac{1}{4}\sin(\sin 3x)\, e^{\cos 3x}.$$

8.II.5.

1° La fonction *F est régulière*. En effet, elle n'admet que 0 comme point de discontinuité dans $[0, 2\pi[$ et l'on a

$$\frac{F(0_+) + F(0_-)}{2} = \frac{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = 0 = F(0).$$

De plus, elle satisfait aux hypothèses du théorème de Dirichlet, car

$$\begin{cases} |F(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ F(x) \text{ monotone et continue dans }]0, 2\pi[, \end{cases}$$

donc elle est développable en série de Fourier. On a alors

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad \forall x,$$

avec $a_n = 0$, car F est impaire (faire une représentation graphique de F), et

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx = -\frac{1}{n}.$$

Donc $F(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $\forall x$, avec convergence uniforme de $\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$ sur tout fermé $[\alpha_K, \beta_K]$ inclus dans $]2K\pi, (2K+2)\pi[$ $(K \in \mathbb{Z})$.

2° Soit $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx$. Il est clair que l'on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \left\{ \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n} \right\} dx = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(x) \left\{ \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin nx}{n} \right\} dx,$$

si f est nul sur $[0, \alpha_0]$ et $[\beta_0, 2\pi]$.

En raison de la convergence uniforme de la série $\left(\frac{\sin nx}{n}\right)$ sur $[\alpha_0, \beta_0]$, on aura

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(x) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \right\} dx = \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(x) \frac{\pi - x}{2} dx.$$

f étant nul sur $[0, \alpha_0]$ et $[\beta_0, 2\pi]$, on peut encore écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x) \frac{\pi - x}{2} dx.$$

8.II.6.

Soit $\widehat{f_\alpha}$ $\left(\alpha \text{ est une constante, } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ la fonction *de période* 2π définie, sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, par

$$x \to \widehat{f_\alpha}(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\alpha\right[, \\ f(0)\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) \text{ si } x \in [-\alpha, 0[, \\ f(x) \text{ si } x \in [0, \pi[, \\ f(\pi) - \frac{f(\pi)}{\alpha}(x - \pi) \text{ si } x \in [\pi, \pi + \alpha[, \\ 0 \text{ si } x \in \left[\pi + \alpha, \frac{3\pi}{2}\right[. \end{cases}$$

Il est clair que cette fonction $\widehat{f_\alpha}(x)$ est continue $\forall x$ et satisfait aux hypothèses du théorème de Dirichlet. Elle est donc développable en série de Fourier et l'on a

$$\widehat{f_\alpha}(x) = \frac{a_0(\alpha)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha) \cos nx + b_n(\alpha) \sin nx, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

avec

$$a_n(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \widehat{f_\alpha}(x) \cos nx dx \text{ et } b_n(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \widehat{f_\alpha}(x) \sin nx dx;$$

la série $(a_n(\alpha) \cos nx + b_n(\alpha) \sin nx)$ convergeant uniformément dans $\mathbb{R}$ (puisque $\widehat{f_\alpha}$ est continue pour tout x).

En particulier, on a la convergence uniforme sur $[0, \pi]$ de $(a_n(\alpha) \cos nx + b_n(\alpha) \sin nx)$ ainsi que celle de

$$\widehat{f_\alpha}(x) = f(x) = \frac{a_0(\alpha)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha) \cos nx + b_n(\alpha) \sin nx, \qquad \forall x \in [0, \pi].$$

A chaque valeur de α correspond donc sur $[0, \pi]$ un développement trigonométrique de f, avec convergence uniforme.

Remarque. — Tout prolongement de f par une fonction $\widehat{f}$,
- de période 2π,
- continue, $\forall x$,
- satisfaisant aux hypothèses du théorème de Dirichlet,

fournira évidemment un développement trigonométrique de f sur $[0, \pi]$, avec convergence uniforme.

2° Si l'on a simultanément

$$\begin{cases} (a_n \cos nx) \text{ converge uniformément sur } [0, \pi], \\ f(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad \forall x \in [0, \pi], \end{cases}$$

on en déduit que l'on a

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{p=1}^{\infty} a_n \cos px \right\} \cos nx dx = a_n,$$

et il en résulte l'unicité.

Soit $\widehat{f}$ la fonction de période 2π, qui est définie, dans $]-\pi, \pi]$, par

$$x \mapsto \widehat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in [0, \pi], \\ f(-x) & \text{pour } x \in]-\pi, 0]. \end{cases}$$

Il est clair qu'elle est continue pour tout x et, de plus, développable en série de Fourier.

On a alors

$$\widehat{f}(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos nx + \tilde{b}_n \sin nx, \qquad \forall x,$$

avec

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \widehat{f}(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = a_n$$

et $\tilde{b}_n = 0$, car $\widehat{f}$ est une fonction paire.

Donc $\widehat{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$, $\forall x \in \mathbb{R}$, avec convergence uniforme dans $\mathbb{R}$ de $(a_n \cos nx)$.

En particulier, on a

$$\widehat{f}(x) = f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad \text{pour } x \in [0, \pi],$$

avec convergence uniforme sur $[0, \pi]$.

3° *a*) Supposons que l'on ait simultanément

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

avec convergence uniforme de $(b_n \sin nx)$ sur $[0, \pi]$.

La fonction $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ est donc continue et l'*on doit avoir*

$$f(0) = f(\pi) = 0.$$

b) *Cette condition est suffisante.* Pour s'en assurer il suffit de considérer la fonction g impaire, de période 2π, et qui coïncide avec f sur $[0, \pi]$.

Il est clair que cette fonction est continue pour tout x et qu'elle est développable en série de Fourier, avec $a_n(g) = 0$.

Alors $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(g) \sin nx$, pour tout x, avec convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de $(b_n(g) \sin nx)$.

En particulier, on a $g(x) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(g) \sin nx$, pour tout $x \in [0, \pi]$, avec convergence uniforme sur $[0, \pi]$.

8.III.1.

Cette fonction est régulière (puisque continue $\forall x$) et satisfait aux hypothèses du théorème de Dirichlet. Elle est donc développable en série de Fourier.

On a ici

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx = \begin{cases} \dfrac{4(-1)^n}{n^2} & \text{si } n \neq 0, \\[2mm] \dfrac{2\pi^2}{3} & \text{si } n = 0, \end{cases}$$

et $b_n(f) = 0$, car f est une fonction paire; donc

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2}, \qquad \forall x.$$

a) ***Pour* $x = 0$,** on obtient alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.$$

b) ***Pour* $x = \pi$,** on obtient alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

c) La fonction f est intégrable et bornée, on peut donc utiliser l'égalité de Parseval et l'on obtient enfin

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4},$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

8.IV.1.

1° *a*) Il est clair que la série $(g(x+k))$ n'est composée que d'un nombre fini de termes non nuls, puisque $g(x+k) = 0$ pour $|x+k| > a$.

Ceci sera vérifié, en particulier, si $|k| \geqslant a+|x|$, puisqu'alors on aura

$$|k+x| \geqslant ||k|-|x|| = |k|-|x| \geqslant a.$$

De plus, chaque fonction $g(x+k)$ est continue pour $x = 0$, donc *G est continue à l'origine.*

b) G est évidemment de période 1.

De plus, dans $[0, 1[$, G est la somme de, au plus, $2N+1$ fonctions monotones — toutes croissantes ou toutes décroissantes —. Plus précisément, on a

$$G(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{N} g(x+k) + \sum_{k=1}^{N} g(x-k), \qquad \forall x \in [0, 1[,$$

avec $N = 2+[a]$ ($[a]$ désignant la partie entière de a).

Sa série de Fourier est donc convergente pour tout x (cf. théorème de Jordan) et l'on a

$$\text{(3)} \qquad \frac{G(x+0)+G(x-0)}{2} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} C_\nu e^{2i\pi\nu x},$$

avec

$$C_\nu = \int_0^1 G(x)e^{-2i\pi\nu x}dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 g(x+k)e^{-2i\pi\nu x}dx$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_k^{k+1} g(x)e^{-2i\pi\nu x}dx = \int_{-a}^{a} g(x)e^{-2i\pi\nu x}dx.$$

2° La fonction G est conttnue à l'origine.
En faisant $x = 0$, on déduit alors de la relation (3) que l'on a

$$G(0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(k) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \int_{-a}^{a} g(x)e^{-2i\pi\nu x}dx.$$

3° **La méthode utilisée sera celle développée ci-dessus.**

α) ***G est définie.***
En effet, la série $g(x-1)+g(x-2)+\ldots$ n'admet qu'un nombre fini de terme non nuls, la série $g(x)+g(x+1)+g(x+2)+\ldots$ a son terme général qui est majorés par le terme général d'une série convergente $\left(|g(x+k)| < \dfrac{K}{(x+k)^2} \text{ pour } k \text{ assez grand}\right)$.

β) $\dfrac{G(x+0)+G(x-0)}{2} = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} C_\nu e^{2i\pi\nu x}$, $\forall x$, avec $C_\nu = \int_0^1 G(x)e^{-2i\pi\nu x}dx$.
En effet (théorème de Jordan) :
— G, qui est décroissante dans $]0, 1[$ $(G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g(x+k))$, est donc la différence de deux fonctions croissantes : $G = 0-(-G)$;
— G est bornée dans $]0, 1[$. Plus précisément,

$$|G(x)| = \sum_{k=0}^{+\infty} g(x+k) \leqslant [X_0]g(0_+) + \sum_{k=[X_0]+1}^{+\infty} \frac{K}{k^2}.$$

γ) $C_\nu = \int_0^{\infty} g(x)e^{-2i\pi\nu x}dx.$
En effet,
— $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g(x+k)$, pour $x \in]0, 1[$, puisque $g(x-1) = g(x-2) = \ldots = 0$;
— $\int_0^1 G(x)e^{-2i\pi\nu x}dx = \int_0^1 \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} g(x+k) \right\} e^{-2i\pi\nu x}dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 g(x+k)e^{-2i\nu\pi x}dx$,
car la série $g(x)+g(x+1)+g(x+2)+\ldots$ est uniformément convergente sur $[0, 1]$ $\left(|g(x+k)| \leqslant \dfrac{K}{k^2} \text{ pour } k > [X_0]+1\right)$.
Donc

$$C_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 g(x+k)e^{-2i\nu\pi x}dx = \int_0^{\infty} g(x)e^{-2i\pi\nu x}dx.$$

δ) $\dfrac{G(0_+)+G(0_-)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} g(k).$
En effet, on a

$$g(k+0) = g(k-0) = g(k), \qquad \text{pour} \qquad K \in \mathbb{N}-\{0\}$$

et $\qquad g(0_-) = 0 \qquad \text{et} \qquad g(0_+) = 2g(0) \qquad (g \text{ est régulière}).$

On a donc bien

$$G(0_+) = 2g(0) + \sum_{k=0}^{\infty} g(k) \qquad \text{et} \qquad G(0_-) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k).$$

ε) ***On fait $x = 0$ en β).***
En faisant $x = 0$ en β) et en tenant compte de γ), on déduit bien la relation (2).

8.V.1.

1° En développant l'expression suivante :

$$\int_a^b [f(x) - \sum_{n=1}^N \alpha_n \varphi_n(x)]^2 dx$$

on obtient

$$\int_a^b f^2(x)dx - \sum_{n=1}^N \alpha_n^2 = \int_a^b [f(x) - \sum_{n=1}^N \alpha_n \varphi_n(x)]^2 dx.$$

Donc, on a

$$\sum_{n=1}^N \alpha_n^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx,$$

d'où l'on déduit la convergence de la série (α_n^2) et l'on a, de plus,

$$\sum_1^\infty \alpha_n^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx.$$

2° Soit $f_N = \sum\limits_{n=1}^N \alpha_n \varphi_n$; il est clair que l'on a

$$d^2(f, f_N) = \int_a^b f^2(x)dx - \sum_{n=1}^N \alpha_n^2.$$

Puisque $\int_a^b f^2(x)dx = \sum\limits_{n=1}^\infty \alpha_n^2$, $\forall \varepsilon > 0$, il existe N_0 tel que l'on ait

$$\int_a^b f^2(x)dx - \sum_{n=1}^\infty \alpha_n^2 \leqslant \varepsilon, \text{ pour } N \geqslant N_0,$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \quad \text{tel que} \quad N \geqslant N_0 \Rightarrow d(f, f_N) \leqslant \sqrt{\varepsilon},$$

c'est-à-dire enfin : $f \in \bar{F}$.

Réciproquement, soit $f \in \bar{F}$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists g_N = \sum_{n=1}^N \lambda_n \varphi_n \quad \text{tel que}$$

$$d^2(f, g_N) = \int_a^b \left(f(x) - g_N(x)\right)^2 dx \leqslant \varepsilon,$$

ou

$$\int_a^b f^2(x)dx + \sum_1^N (\alpha_n - \lambda_n)^2 \leqslant \sum_1^N \alpha_n^2 + \varepsilon;$$

donc
$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \sum_1^\infty \alpha_n^2 + \varepsilon$$

et, par suite,
$$\int_a^b f^2(x) \leqslant \sum_1^\infty \alpha_n^2.$$

Compte tenu de la première question, on a bien
$$\int_a^b f^2(x) = \sum_1^\infty \alpha_n^2.$$

3° ***Toujours sous la condition*** $||\varphi_n|| = 1$, $\forall n$, on a $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ base de $E \Leftrightarrow \bar{F} = E$ (cf. page 260)
$$\Leftrightarrow \int_a^b f^2\, dx = \sum_1^\infty \alpha_n^2 = \sum_1^\infty \left(\int_a^b f\, \varphi_n\, dx\right)^2,$$
$\forall\, f \in E$ (cf. question 2°).

Pour une suite orthogonale quelconque, il suffit de remplacer φ_n par $\dfrac{\varphi_n}{||\varphi_n||}$, car alors $\left\|\dfrac{\varphi_n}{||\varphi_n||}\right\| = 1$.

9. A. — SUITES ET SÉRIES DANS UN E.V.N. e^A, e^L

I. — SUITES DANS UN E.V.N.

1° Soit une suite $\{X_n\}^\infty$ à valeurs dans un espace vectoriel E muni de la norme $\|.\|$. On dit que la suite $\{X_n\}^\infty$ a pour limite X lorsque $n \to \infty$ pour exprimer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow \|X_n - X\| \leqslant \varepsilon$$

[en abrégé, $X_n \underset{n\to\infty}{\to} X$].

(Cette définition résulte évidemment de la structure d'espace métrique associée à la norme $\|.\|$.)

2° Propriétés.

a) $X_n \underset{n\to\infty}{\to} X \quad \Rightarrow \|X_n\| \underset{n\to\infty}{\to} \|X\|$.

b) $X_n \underset{n\to\infty}{\to} X \Big\} \Rightarrow$ $\{X_n\}^\infty$ suite de Cauchy, c'est-à-dire
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon$ tel que $m \geqslant n \geqslant N \Rightarrow \|X_m - X_n\| \leqslant \varepsilon$.

3° Théorème 9.I.1. — Lorsque *E est un Banach*

$$\{X_n\}^\infty \text{ suite convergente} \Leftrightarrow \{X_n\}^\infty \text{ suite de Cauchy.}$$

II. — SÉRIES DANS UN E.V.N.

1° Soit une suite, $\{u_n\}_0^\infty$, d'éléments de E. Le tableau formel qui s'en déduit,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

est appelé série de terme général u_n et sera notée $(u_n)_0$.

A partir de ce tableau, on définit la suite des sommes partielles suivantes :

$$S_0 = u_0, \quad S_1 = u_0 + u_1, \quad \dots, \quad S_n = \sum_{p=0}^{n} u_p.$$

Lorsque la suite $\{S_n\}$ converge vers une limite S, on dit que la série $(u_n)_0$ est convergente et a pour somme S. On écrit alors

$$S = \sum_{p=0}^{\infty} u_p, \qquad \text{ou encore} \qquad S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

2° Propriétés.

a) (u_n) série convergente $\Rightarrow \|u_n\| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$

b) (u_n) série convergente $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (u_n) \text{ « série de Cauchy », c'est-à-dire} \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ tel que} \\ \quad m \geqslant n \geqslant N \Rightarrow \|u_n + u_{n+1} + \ldots + u_m\| \leqslant \varepsilon. \end{array}\right.$

3° Théorème 9.II.1. – Lorsque *E est un Banach*, on a les propriétés suivantes :

i) (u_n) « série de Cauchy » $\Leftrightarrow$ (u_n) série convergente;

ii) $(\|u_n\|)$ série convergente $\Rightarrow$ (u_n) série convergente.

[On dit alors que la série (u_n) est normalement convergente.]

III. — e^A ET e^L.

1° *a*) L'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,n}$ des matrices carrées d'ordre n, définies sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est de dimension n^2. On le munit généralement de la norme $|||\cdot|||$:

$$|||A||| = n \sup_{i,j} |a_{i,j}| \qquad \left(\text{où} \qquad A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}\right),$$

qui vérifie la relation

$$|||A \cdot B||| \leqslant |||A||| \cdot |||B|||.$$

Remarquons que $\mathcal{M}_{n,n}$ étant « identifiable » à $\mathbb{K}^{n^2}$, on peut aussi considérer les normes équivalentes

$$|||A|||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2}, \qquad |||A|||_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.$$

b) Considérons la série

$$I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots$$

La série des normes associées

$$1 + \frac{|||A|||}{1!} + \frac{|||A^2|||}{2!} + \ldots + \frac{|||A^n|||}{n!} + \ldots$$

est convergente, puisque $\dfrac{|||A^n|||}{n!} \leqslant \dfrac{|||A|||^n}{n!}$ qui est le terme général d'une série numérique convergente (de somme $e^{|||A|||}$).

Donc [cf. théorème **9**.II.1., ii)] la série

$$I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n}{n!} + \ldots$$

est convergente. Sa somme est notée e^A, donc, par définition,

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

2° *a*) Soit *E* un Banach et $\mathfrak{L}_c(E)$ l'ensemble des endomorphismes *continus* définis sur E. [On sait que $\mathfrak{L}_c(E) = \mathfrak{L}(E)$ lorsque la dimension de E est finie.]

$\mathfrak{L}_c(E)$ muni de la norme $|||.|||$ définie par

$$|||L||| = \sup_{X \in E - \{0\}} \left\{ \frac{\|LX\|_E}{\|X\|_E} \right\}$$

est un Banach.

Remarquons que

j) $$\|LX\|_E \leqslant |||L|||.\|X\|_E;$$

jj) $$|||L_1 . L_2||| \leqslant |||L_1|||.|||L_2|||.$$

b) La série

$$I + \frac{L}{1!} + \frac{L^2}{2!} + \ldots + \frac{L^n}{n!} + \ldots$$

est normalement convergente.

Sa somme est notée e^L. Donc, par définition,

$$e^L = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n}{n}.$$

Propriétés.

i) $$L_1 . L_2 = L_2 . L_1 \Rightarrow e^{L_1} . e^{L_2} = e^{L_2} . e^{L_1} = e^{L_1 + L_2}.$$

ii) e^L est inversible $\forall L$ et $(e^L)^{-1} = e^{-L}$.

iii) $$e^L = e^{L-I} . e^I = e . e^{L-I},$$
où I est l'application identique.

B. — SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS : $(a, b) \longmapsto E$ BANACH

APPLICATION A LA RÉSOLUTION DE $\dfrac{dX}{dt} = AX$

IV. — DÉFINITIONS DIVERSES.

Soit $f : (a, b) \mapsto E$ Banach muni de la norme $\|.\|$.

1° Continuité en $t_0 \in (a, b)$. — La fonction f est dite continue en t_0 lorsque $f(t) \underset{t \to t_0}{\to} f(t_0)$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha(\varepsilon, t_0) \quad \text{tel que} \quad |t - t_0| \leqslant \alpha \Rightarrow \|f(t) - f(t_0)\| \leqslant \varepsilon.$$

2° Dérivabilité en t_0. — La fonction f est dite dérivable en t_0 lorsqu'il existe un vecteur noté $f'(t_0)$ appartenant à E tel que l'on a

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \underset{h \to 0}{\to} f'(t_0),$$

c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha(\varepsilon, t_0) > 0 \quad \text{tel que} \quad 0 < |h| \leqslant \alpha \Rightarrow \left\| \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} - f'(t_0) \right\| \leqslant \varepsilon.$$

3° Intégration sur $[a_1, b_1]$. — Soit $\displaystyle\int_{a_1}^{b_1} f(u)du$ la limite (si elle existe!) de $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(\theta_i)$ au sens suivant :

« $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha(\varepsilon) > 0$ tel que, pour toute partition $\{t_0 = a_1 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b_1\}$ de $[a_1, b_1]$ vérifiant $t_{i+1} - t_i \leqslant \alpha$, on a

$$\left\| \int_{a_1}^{b_1} f(u)du - \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) f(\theta_i) \right\| \leqslant \varepsilon, \qquad \theta_i \in [t_i, t_{i+1}] \text{».}$$

On a alors les propriétés suivantes :

i) $$\left\|\int_{a_1}^{b_1} f(u)du\right\| \leqslant \int_{a_1}^{b_1} \|f(u)\| du;$$

ii) $$F(t) = \int_{a_1}^{t} f(u)du \text{ est dérivable et } F'(t) = f(t).$$

V. — SUITES DE FONCTIONS $f_n : (a, b) \mapsto E$ BANACH.

On dit que la suite de fonctions $\{f_n(t)\}$ converge *simplement* vers $f(t)$ sur (α, β) lorsque $f_n(t) \underset{n\to\infty}{\to} f(t)$ pour chaque $t \in (\alpha, \beta)$.

On dit que $\{f_n\}$ converge *uniformément* vers f sur (α, β) lorsque

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ tel que $n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n(t) - f(t)\| \leqslant \varepsilon$ quel que soit $t \in (\alpha, \beta)$.

Les propriétés de la fonction limite f sont déterminées par les théorèmes classiques du chapitre 6, paragraphe II.

VI. — SÉRIES DE FONCTIONS (u_n), OÙ $u_n : (a, b) \mapsto E$ BANACH.

On dit que la série de fonction $u_0(t) + u_1(t) + \ldots + u_n(t) + \ldots$ converge *simplement* (resp. *uniformément*) sur (α, β) vers sa somme lorsque la suite

$$S_0(t) = u_0(t), \quad S_1(t) = u_0(t) + u_1(t), \quad \ldots, \quad S_n(t) = \sum_{p=0}^{n} u_p(t), \ldots$$

converge simplement (resp. uniformément) sur (α, β) vers une fonction limite $S(t)$, que l'on notera alors

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t), \qquad \text{ou} \qquad u_0(t) + u_1(t) + \ldots + u_n(t) + \ldots$$

Les propriétés de la fonction limite,

$$t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) = u_0(t) + u_1(t) + \ldots + u_n(t) + \ldots$$

peuvent être déterminées par les théorèmes classiques du chapitre 6, paragraphe IV.

VII. — RÉSOLUTION DU SYSTÈME DIFFÉRENTIEL $X = AX$.

a) Problème. — Il s'agit de chercher n fonctions $x_1, \dots, x_n : (a,b) \mapsto \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ qui vérifient les relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\[2mm] \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{array}\right\} \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$

où les a_{ij} sont des constantes appartenant à $\mathbb{K}$.

Introduisons la fonction à valeurs vectorielles $X : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_{n,1}$,

$$t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{M}_{n,1}$ est l'espace vectoriel des matrices à n lignes et 1 colonne, muni de la norme $\left\| \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\| = \sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i|$ qui en fait un Banach.

Compte tenu de la propriété suivante :

$$x_1, x_2, \dots, x_n \text{ de classe } C^1 \text{ sur } (a,b) \Leftrightarrow X \text{ de classe } C^1 \text{ sur } (a,b)$$
$$\text{et } X'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)),$$

on a donc à résoudre

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t), \ \forall t \in (a,b),$$

où $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,n}$ peut être considéré comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}$.

b) Résolution. — Soit X_0 un élément de $\mathcal{M}_{n,1}$, la fonction $\mathbb{R} \mapsto \mathcal{M}_{n,1}$ définie par $t \mapsto e^{tA}X_0$ est de classe C^∞ et vérifie

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}X_0) = A(e^{tA}X_0) \qquad \text{(cf. exercice 9.VI.1.).}$$

Donc $t \mapsto e^{tA}X_0$ *est bien une solution.*

c) Système fondamental de solutions. — Si $X_1, \dots, X_n$ représentent une base de $\mathcal{M}_{n,1}$, on a donc n solutions

$$X_{Xi} : t \mapsto e^{tA}X_i, \qquad \text{où} \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Puisque e^{tA} est inversible, il en résulte que, pour chaque t, les vecteurs $X_{X_1}(t), \ldots, X_{X_n}(t)$ forment une base de $\mathcal{M}_{n,1}$.

Définition. — Soit n solutions $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ telles que $X^{(1)}(t), \ldots, X^{(n)}(t)$, soit une base de $\mathcal{M}_{n,1}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, On dit que $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ forme un système fondamental de solutions. (Par exemple, $X_{X1}, \ldots, X_{Xn}$.)

On a alors le théorème 9.VII.1.

Théorème 9.VII.1. — Soit $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ n solutions. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}$ système fondamental de solutions;

ii) $X^{(1)}(t), \ldots, X^{(n)}(t)$ base de $\mathcal{M}_{n,1}$, $\forall t \in \mathbb{R}$;

iii) $\exists t_0$ tel que $X^{(1)}(t_0), \ldots, X^{(n)}(t_0)$ base de $\mathcal{M}_{n,1}$;

iv) $\text{dét}\, x_j^i(t) \neq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$ si $X^{(i)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^i(t) \\ \vdots \\ x_n^i(t) \end{pmatrix}$;

v) $\text{dét}\, x_j^i(t_0) \neq 0$;

vi) Toute solution $t \mapsto X(t)$ se décompose de façon unique sous la forme

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X^{(i)}(t), \ \forall t \in \mathbb{R} \quad (\lambda_i \text{ Ctes } \in \mathbb{K}).$$

Remarquons enfin que le Wronskien $W(t) = \text{dét}\,(x_j^i(t))$ vérifie la relation

$$W(t) = W(t_0) e^{(t-t_0)\sum_{p=1}^{n} a_{pp}}.$$

9.I.1. ◆

Dans un E.V.N., E, on considère une suite $\{u_n\}_1^\infty$ *qui converge vers* l ($u_n \underset{n\to\infty}{\to} l$). *Montrer que*

a) $\quad ||u_n|| \underset{n\to\infty}{\to} ||\,l\,||$, $||\,.\,||$ *désignant la norme de E,*

b) $$v_n = \frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n} \underset{n\to\infty}{\to} l.$$

9.I.2. ◆◆◆

Opérateur translation.

1° *Soit* $\mathcal{C}$ *l'espace des applications* $x \to f(x)$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui sont continues et bornées. On pose* $||f|| = \sup |f(x)|$.
Montrer que $\mathcal{C}$ *est un Banach après avoir vérifié que* $||f||$ *satisfait aux axiomes des normes.*

2° *On considère l'opérateur translation* T_h *qui est défini comme suit,*

$$T_h f(x) = f(x+h), \qquad h \text{ est une constante réelle donnée.}$$

Montrer que T_h *appartient à* $\mathcal{L}_c(\mathcal{C}, \mathcal{C})$, *espace des applications linéaires et continues de* $\mathcal{C}$ *dans* $\mathcal{C}$, *et que l'on a* $|||T_h||| = 1$.

3° *Vérifier que la famille,* $\mathcal{T}$, *des opérateurs translations est muni d'une loi de groupe abélien pour le produit de composition.*

9.II.1. ◆

Dans $\mathbb{R}^3$, *on considère une suite de vecteurs* $V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots$ *qui est bornée, c'est-à-dire telle que*

$$|V_n| = \sqrt{x_{1,n}^2+x_{2,n}^2+x_{3,n}^2} \leqslant K, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

où

$$V_n = (x_{1,n}, x_{2,n}, x_{3,n}) \qquad \text{et} \qquad K = Cte.$$

Montrer que
a) la série

$$V_0 + \frac{V_1}{1!} + \frac{V_2}{2!} + \ldots + \frac{V_n}{n!} + \ldots$$

est convergente,

b) $$\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{V_n}{n!}\right| \leqslant Ke.$$

9.II.2. ◆◆

Rotation.

Soit $\vec{\omega}$ *et* $\vec{V}$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^3$. *On forme la suite*

$$\vec{V}_0 = \vec{V}, \qquad \vec{V}_1 = \vec{\omega} \wedge \vec{V}_0, \qquad \vec{V}_2 = \vec{\omega} \wedge \vec{V}_1, \ldots, V_{n+1} = \vec{\omega} \wedge \vec{V}_n, \ldots$$

a) Montrer que la série

$$\vec{V}_0 + \frac{\vec{V}_1}{1!} + \frac{\vec{V}_2}{2!} + \dots + \frac{\vec{V}_n}{n!} + \dots$$

est convergente.

b) Soit $\overrightarrow{W}$ la somme de cette série. Préciser la nature de la transformation

$$\vec{V} \mapsto \overrightarrow{W}.$$

9.III.1. ◆ **sin A, cos A.**

Soit A une matrice carrée d'ordre n ($A \in \mathcal{M}_{n,n}$).

a) Définir « de façon naturelle » $\sin A$ et $\cos A$.

b) Calculer $\sin A$, pour $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

9.III.2. ◆◆ **$(I+A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n$.**

a) Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n vérifiant

$$\sup_{i,j} |a_{ij}| < \frac{1}{n} \qquad (a_{ij} \in \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}).$$

Montrer que $(I+A)$ est inversible.

[Pour cela on pourra considérer la série $I - A + A^2 - A^3 + \dots$]

b) Soit $B = (b_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n vérifiant les relations

$$\sup_{\substack{i,j \\ (i \neq j)}} |b_{ij}| < \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \sup_{i} |b_{ii} - 1| < \frac{1}{n}.$$

Montrer que B est inversible.

9.IV.1. ◆◆ **Dérivation de $A(t)X(t)$.**

E désigne un E.V.N. et $]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Soit deux applications de classe C^1 définies par

$$X :]a, b[\mapsto E,\ t \mapsto X(t) \quad \text{et} \quad A :]a, b[\mapsto \mathcal{L}_c(E),\ t \mapsto A(t)$$ *(muni de la norme $|||\,.\,|||$).*

Montrer que l'application

$$]a, b[\mapsto E,\quad t \mapsto A(t).X(t)$$

est de classe C^1.

Calculer sa dérivée.

9.IV.2. ◆◆ **Dérivation de $A(t)B(t)$.**

E désigne un E.V.N. et $]a, b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Soit

$$A :]a, b[\mapsto \mathcal{L}_c(E),\ t \mapsto A(t) \quad \text{et} \quad B :]a, b[\mapsto \mathcal{L}_c(E),\ t \mapsto B(t)$$

applications de classe C^1 [$\mathcal{L}_c(E)$ *est muni de la norme* $|||\,.\,|||$].

1° *Montrer que l'application définie par*

$$\begin{aligned}]a, b[&\mapsto \mathcal{L}_c(E) \\ t &\mapsto A(t)B(t) \end{aligned}$$

est de classe C^1.
Calculer sa dérivée.

2° Application. — *Vérifier que*

a) $t \mapsto A^n(t)$ *est de classe* C^1, $\forall n \in \mathbb{N}$;

b) $[A^2(t)]' = A(t)A'(t)+A'(t)A(t)$,
$[A^3(t)]' = A(t)A(t)A'(t)+A(t)A'(t)A(t)+A'(t)A(t)A(t)$,
$[A^n(t)]' = \sum\limits_{p=1}^{n} \prod\limits_{q=1}^{n} A_{p,q}(t)$, *où* $A_{p,p}(t) = A'(t)$ *et* $A_{p,q}(t) = A(t)$ *pour* $q \neq p$.

9.IV.3. ◆ *E désigne un E.V.N. et* $]a, b[$ *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$.
Soit

$$A :]a, b[\mapsto \mathcal{L}_c(E),\ t \mapsto A(t) \qquad et \qquad B :]a, b[\mapsto \mathcal{L}_c(E),\ t \mapsto B(t)$$

deux applications de classe C^1 *vérifiant la condition*

$$A(t_1)B(t_2) = B(t_2)A(t_1), \ \forall t_1 \text{ et } t_2 \in]a, b[.$$

Montrer que l'on a

$$\begin{aligned} A(t_1)B'(t_2) &= B'(t_2)A(t_1), \quad \forall t_1 \text{ et } t_2 \in]a, b[, \\ A'(t_1)B(t_2) &= B(t_2)A'(t_1), \quad \forall t_1 \text{ et } t_2 \in]a, b[, \\ A'(t_1)B'(t_2) &= B'(t_2)A'(t_1), \quad \forall t_1 \text{ et } t_2 \in]a, b[. \end{aligned}$$

9.IV.4. ◆ *Soit*

$$\begin{aligned} A :]a, b[&\mapsto \mathcal{M}_{n,n}, \\ t &\mapsto A(t) = \big(a_{ij}(t)\big)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}. \end{aligned}$$

Établir les propriétés suivantes :

a) $t \mapsto A(t)$ *de classe* $C^0 \Leftrightarrow t \mapsto a_{ij}(t)$ *de classe* C^0, $\forall i$ *et* j,

b) $t \mapsto A(t)$ *de classe* $C^1 \Leftrightarrow t \mapsto a_{ij}(t)$ *de classe* C^1, $\forall i$ *et* j.

9.V.1. ◆ *Soit E un E.V.N. défini sur* $\mathbb{R}$ *et X un vecteur* non nul *de E.*

1° *On considère les suites suivantes :*

$$f_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R},\ t \mapsto f_n(t) \qquad et \qquad \psi_n : \mathbb{R} \mapsto E,\ t \mapsto f_n(t)X. \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Établir la propriété suivante :
$\{f_n\}^\infty$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R} \Leftrightarrow \{\psi_n\}^\infty$ *converge uniformément sur* $\mathbb{R}$.

2° *F désigne une application :* $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *et* $\{X_n\}^\infty$ *une suite de vecteurs de E, convergente, mais* non stationnaire. *On considère alors la suite* ϕ_n *définie par*

$$\begin{aligned} \phi_n : \mathbb{R} &\mapsto E \\ t &\mapsto F(t)X_n. \end{aligned}$$

Établir la propriété suivante :

$$\{\phi_n\}^\infty \text{ uniformément convergente sur } \mathbb{R} \Leftrightarrow F \text{ borné.}$$

9.VI.1. **Dérivée de $e^{L(t)}$.**

◆◆ *E désigne un Banach et L une application*

$$\begin{aligned}]a, b[&\mapsto \mathcal{L}_c(E) \\ t &\mapsto L(t), \end{aligned}$$

qui est supposée de classe C^1.

1° *Montrer que*

a) $t \mapsto L^n(t)$ *est de classe* C^1 $(n \in \mathbb{N})$;

b) $[L^2(t)]' = L'(t)L(t)+L(t)L'(t)$,
$[L^3(t)]' = L(t)L(t)L'(t)+L(t)L'(t)L(t)+L'(t)L(t)L(t)$;

c) $t \mapsto e^{L(t)}$ *est de classe* C^1. [*On limitera d'abord l'étude à un compact* $[\alpha, \beta]$ *inclus dans* $]a, b[$.]

2° *Donner une expression simple de* $[L^n(t)]'$, *puis de* $[e^{L(t)}]'$ *lorsque* $L(t_1)L(t_2) = L(t_2)L(t_1)$, $\forall t_1$ *et* $t_2 \in]a, b[$.

3° Application. — *Soit* L_0 *un élément de* $\mathcal{L}_c(E)$ *et L tels que*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\mapsto \mathcal{L}_c(E) \\ t &\mapsto L(t) = tL_0. \end{aligned}$$

Calculer $(e^{tL_0})'$.

9.VI.2. **Opérateur B^α.**

◆◆◆ *Soit E un Banach et A un élément de* $\mathcal{L}_c(E)$ [*qui est muni de la norme* $|||\,.\,|||$]. *On considère une série entière réelle* $(a_n x^n)_0$ *ayant* $R(>0)$ *pour rayon de convergence. Soit* $f(x)$ *sa somme pour* $x \in]-R, R[$. *Autrement dit*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{pour} \qquad |x| < R.$$

1° *Montrer que la série* $(a_n A^n)_0$ *est convergente si* $|||A||| < R$. *Définir alors* $f(A)$.

2° *a) Par analogie avec un résultat connu, énoncer le théorème relatif au produit de deux séries* $(u_n)_0$ *et* $(v_n)_0$ *à valeurs dans* $\mathcal{L}_c(E)$.

b) Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ *définie dans* $]-R_1, R_1[$ $(R_1 > 0)$.
Montrer que la série de terme général

$$(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0)A^n$$

est convergente pour $|||A||| \leqslant Inf(R, R_1)$. *Déterminer sa somme.*

3° *Soit* B *un élément de* $\mathfrak{L}_c(E)$ *et* α *une constante réelle.*
On pose

$$B^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} (B-I)^n,$$

lorsque $|||B-I|||<1$. *(I est l'application identique.)*
Vérifier que $B^\alpha . B^\beta = B^{\alpha+\beta}$, *et en déduire que* B^α *est inversible.* [*Dans cette question, on posera* $A = B-I$.]

SOLUTIONS

9.I.1.

$$u_n \underset{n\to\infty}{\to} l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N \Rightarrow ||u_n - l|| \leqslant \varepsilon.$$

a) La minoration $\big|||a|| - ||b||\big| \leqslant ||a+b||$ implique que l'on a

$$\big|||u_n|| - ||l||\big| \leqslant ||u_n - l||.$$

Donc

$$n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow \big|||u_n|| - ||l||\big| \leqslant \varepsilon,$$

ou encore

$$||u_n|| \underset{n\to\infty}{\to} ||l||.$$

b) $$V_n - l = \frac{(u_1 - l) + (u_2 - l) + \dots + (u_N - l)}{n} + \frac{(u_{N+1} - l) + \dots + (u_n - l)}{n}$$

pour $n > N_\varepsilon$.

Donc

$$||V_n - l|| \leqslant \frac{||u_1 - l|| + \dots + ||u_N - l||}{n} + \frac{||u_{N+1} - l|| + \dots + ||u_n - l||}{n}$$

$$\leqslant \frac{||u_1 - l|| + \dots + ||u_N - l||}{n} + \frac{(n-N)\varepsilon}{n}.$$

Pour n assez grand, $n \geqslant N_1(\varepsilon) > N(\varepsilon)$, on aura

$$\frac{||u_1 - l|| + \dots + ||u_N - l||}{n} \leqslant \varepsilon$$

et, par suite,

$$||V_n - l|| \leqslant \varepsilon + \frac{(n-N)\varepsilon}{n} \leqslant 2\varepsilon,$$

ou encore,

$$V_n \underset{n\to\infty}{\to} l.$$

9.I.2.

1° La norme $||.||$ satisfait de façon évidente aux axiomes des normes (cf. chapitre 4, I).

Soit $\{f_n\}^\infty$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}$, on a

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \quad \text{tel que} \quad m \geqslant n \geqslant N(\varepsilon) \Rightarrow ||f_m - f_n|| \leqslant \varepsilon.$$

Nous allons montrer que l'on a $f_n \underset{n\to\infty}{\to} l \in \mathcal{C}$ ($\Leftrightarrow$ $\mathcal{C}$ complet).

Soit x fixé, on en déduit

(1) $|f_m(x)-f_n(x)| \leqslant \sup_{x\in R} |f_m(x)-f_n(x)| = ||f_m-f_n|| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall m \geqslant n \geqslant N_\varepsilon.$

Donc $u_n = f_n(x)$ est une suite de Cauchy dans $I\!R$, qui est complet, et l'on peut écrire

$$f_m(x) \underset{m\to\infty}{\to} l(x).$$

Par passage à la limite ($m \to \infty$), on déduit de (1) l'expression

(2) $$|l(x)-f_n(x)| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall n \geqslant N_\varepsilon.$$

La relation (2) exprime le fait que la suite de fonctions f_n *converge uniformément* sur $I\!R$ vers l. La fonction f_n étant continue sur $I\!R$, pour tout n, on en déduit que la fonction limite l est continue sur $I\!R$.

De plus,

$$|l(x)| = |(l(x)-f_N(x))+f_N(x)| \leqslant \varepsilon + |f_N(x)| \leqslant \varepsilon + ||f_N||,$$

donc l est bornée.

En résumé, on a $l \in \mathcal{C}$.

La relation (2) entraîne alors

$$||f_n - l|| = \sup_{x\in R} |f_n(x) - l(x)| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall n \geqslant N_\varepsilon,$$

ou encore

$$f_n \underset{n\to\infty}{\to} l \in \mathcal{C}.$$

Toute suite de Cauchy $\{f_n\}^\infty$ converge dans $\mathcal{C}$. Donc $\mathcal{C}$ est un Banach. (Voir exercice 4,II.4.)

2° Soit $f \in \mathcal{C}$; l'application $T_h[f] : x \mapsto T_h[f](x) = f(x+h)$ est bornée et continue sur $I\!R$. Donc $T_h[f] \in \mathcal{C}$.

a) **T_h est linéaire.** — En effet, on a $\forall x \in I\!R$,

$$T_h[f+g](x) = (f+g)(x+h) = f(x+h)+g(x+h) = T_h[f](x) + T_h[g](x)$$
$$\Leftrightarrow T_h[f+g] = T_h[f] + T_h[g].$$

De façon analogue, on a $\forall x \in I\!R$,

$$T_h[\lambda f](x) = (\lambda f)(x+h) = \lambda f(x+h) = \lambda T_h[f](x)$$
$$\Leftrightarrow T_h[\lambda f] = \lambda T_h[f] \text{ (λ étant un scalaire).}$$

b) Puisque T_h est linéaire, on a l'équivalence suivante :

T_h continue $\Leftrightarrow$ $\exists$ une constante K telle que $||T_h[f]|| \leqslant K||f||$.

Or

$$||T_h[f]|| = \sup_{x\in R} |T_h[f](x)| = \sup_{x\in R} |f(x+h)| = \sup_{y\in R} |f(y)| = ||f||,$$

donc T_h est continue ($K = 1$). De plus, on a

$$|||T_h||| = \sup_{f\in\mathcal{C}-\{0\}} \left\{ \frac{||T_h[f]||}{||f||} \right\} = 1.$$

3° **a) Montrons que l'on a $T_{h+h'} = T_h \circ T_{h'}$.**
Soit $f \in \mathcal{C}$, on a

$$T_{h'}[f] : x \mapsto f(x+h') = T_{h'}[f](x)$$

et

$$T_h\,[T_{h'}[f]] : x \mapsto T_{h'}[f](x+h) = f(x+h+h') = T_{h+h'}[f](x).$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall f \in \mathcal{C}$,

$$T_h[T_{h'}[f]](x) = T_{h+h'}[f](x) \Leftrightarrow T_h[T_{h'}[f]] = T_{h+h'}[f] \Leftrightarrow T_h \circ T_{h'} = T_{h+h}.$$

b) On a $h+h' = h'+h$, on en déduit donc

$$T_h \circ T_{h'} = T_{h+h'} = T_{h'+h} = T_{h'} \circ T_h.$$

De plus, $T_h \circ T_{-h} = T_0 = \mathrm{I}$ opérateur identique.
On vérifie alors que $\mathcal{T}$ est bien muni d'une loi de groupe abélien.

9.II.1.

a) La série $\left(\dfrac{|V_n|}{n!}\right)_0$ est une série numérique à termes positifs. Elle est convergente car on a $\dfrac{|V_n|}{n!} \leqslant \dfrac{K}{n!}$, qui est le terme général d'une série convergente (de somme Ke).

La série $\left(\dfrac{V_n}{n!}\right)_0$ est normalement convergente dans $\mathbb{R}^3$ complet, donc $\left(\dfrac{V_n}{n!}\right)_0$ est une série convergente dans $\mathbb{R}^3$.

b) La somme $\sum\limits_{p=0}^{\infty} \dfrac{V_n}{n!}$ étant définie (cf. *a*), on aura

$$\left| \sum_{p=0}^{\infty} \frac{V_n}{n!} \right| \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \frac{|V_n|}{n!} \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \frac{K}{n!} = Ke.$$

9.II.2.

a) Munissons $\mathbb{R}^3$ de la norme $|.|$ définie par

$$|\vec{V}| = \text{longueur } (\vec{V}), \qquad \vec{V} \in \mathbb{R}^3,$$

et posons

$$|\vec{V}| = v \qquad \text{et} \qquad |\vec{\omega}| = \omega;$$

on aura alors

$$\begin{aligned}
&|\vec{V}_0| = |\vec{V}| = v,\\
&|\vec{V}_1| = |\vec{\omega}\wedge \vec{V}_0| = |\vec{\omega}|.|\vec{V}_0||\sin\theta| \leqslant |\vec{\omega}|.|\vec{V}_0| = \omega v,\\
&|\vec{V}_2| \leqslant |\vec{\omega}|.|\vec{V}_1| \leqslant \omega^2 v,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&|\vec{V}_n| \leqslant \omega^n v.
\end{aligned}$$

La série à termes positifs $\left(\frac{|\vec{V}_n|}{n!}\right)$ est convergente, puisque l'on a $\frac{|\vec{V}_n|}{n!} \leqslant v\frac{\omega^n}{n!}$, qui est le terme général d'une série convergente (de somme ve^{ω}).

La série $\left(\frac{\vec{V}_n}{n!}\right)_0$ est normalement convergente dans $\mathbb{R}^3$ qui est un Banach, donc $\left(\frac{\vec{V}_n}{n!}\right)_0$ est une série convergente dans $\mathbb{R}^3$. Soit $\vec{W}$ sa somme

$$\vec{W} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\vec{V}_n}{n!}.$$

b) Décomposons $\vec{V}$ sous la forme $\vec{V} = \alpha\vec{\omega} + \beta\vec{i}$, où $\vec{i}$ est un vecteur *unitaire* orthogonal *à* $\vec{\omega}$. Soit $\vec{K} = \frac{\vec{\omega}}{\omega}$ et $\vec{j} = \vec{K}\wedge\vec{i}$.

$$\begin{aligned}
\vec{V}_1 &= \vec{\omega}\wedge \vec{V}_0 = \vec{\omega}\wedge(\alpha\vec{\omega}+\beta\vec{i}) = \omega\vec{K}\wedge\beta\vec{i} = \beta\omega\vec{j},\\
\vec{V}_2 &= \vec{\omega}\wedge \vec{V}_1 = \omega\vec{K}\wedge\beta\omega\vec{j} = -\beta\omega^2\vec{i},\\
\vec{V}_3 &= \vec{\omega}\wedge \vec{V}_2 = \omega\vec{K}\wedge(-\beta\omega^2\vec{i}) = -\beta\omega^3\vec{j},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\vec{V}_{2p} &= (-1)^p\beta\omega^{2p}\vec{i}, \qquad \vec{V}_{2p+1} = (-1)^p\beta\omega^{2p+1}\vec{j}.
\end{aligned}$$

Compte tenu du fait que la série $\left(\frac{\vec{V}_n}{n!}\right)$ est *normalement convergente*, on peut décomposer $\vec{W} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\vec{V}_n}{n!}$ sous la forme suivante :

$$\vec{W} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\vec{V}_{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\vec{V}_{2p+1}}{(2p+1)!} = \alpha\vec{\omega} + \beta\vec{i}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{\omega^{2p}}{(2p)!} + \beta\vec{j}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{\omega^{2p+1}}{(2p+1)!}$$

ou encore
$$\vec{W} = \alpha\vec{\omega} + \beta(\vec{i}\cos\omega + \vec{j}\sin\omega).$$

Donc, $\vec{W}$ se déduit de $\vec{V}$ par une rotation d'axe $\vec{\omega}$ et d'angle ω.

•

9.III.1.

a) Munissons $\mathcal{M}_{n,n}$ de la norme usuelle $|||.|||$, définie par

$$|||A||| = n \sup_{i,j} |a_{ij}|, \quad \text{où} \quad A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}.$$

Considérons la série

$$A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \dots + (-1)^p\frac{A^{2p+1}}{(2p+1)!} + \dots$$

La série des normes associée est convergente car on a

$$\left|\left|\left|(-1)^p \frac{A^{2p+1}}{(2p+1)!}\right|\right|\right| = \frac{1}{(2p+1)!}\ |||A^{2p+1}||| \leqslant \frac{(|||A|||)^{2p+1}}{(2p+1)!},$$

qui est le terme général d'une série convergente (de somme sh $|||A|||$).

La série $\left((-1)^p \dfrac{A^{2p+1}}{(2p+1)!}\right)_0$ est normalement convergente dans le Banach $\mathcal{M}_{n,n}$; elle est donc convergente dans $\mathcal{M}_{n,n}$.

Sa somme sera notée $\sin A$:

$$\sin A = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{A^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

De même, on pourrait définir $\cos A$, $\operatorname{ch} A$, $\operatorname{sh} A$, ...

Remarquons que l'on a

$$|||\sin A||| = \left|\left|\left|\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{A^{2p+1}}{(2p+1)!}\right|\right|\right| \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \frac{|||A^{2p+1}|||}{(2p+1)!} \leqslant \sum_{p=0}^{\infty} \frac{|||A|||^{2p+1}}{(2p+1)!},$$

ou encore

$$|||\sin A||| \leqslant \operatorname{sh} |||A|||.$$

b) On vérifie que l'on a

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}$$

et, plus généralement,

$$A^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}.$$

Cette propriété résulte du fait que A_θ caractérise la rotation plane, R_θ de centre O et d'angle θ et que

$$R_\theta . R_\theta = R_{2\theta} \Leftrightarrow A_\theta . A_\theta = A_{2\theta}.$$

Soit $S_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \dfrac{A^{2p+1}}{(2p+1)}$ **la suite des sommes partielles** de la série convergente

$$A - \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} - \ldots,$$

dont la somme est notée $\sin A$,

$$S_n = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{\cos (2p+1)\theta}{(2p+1)!} & \displaystyle -\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{\sin (2p+1)\theta}{(2p+1)!} \\ \displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{\sin (2p+1)\theta}{(2p+1)!} & \displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \frac{\cos (2p+1)\theta}{(2p+1)!} \end{pmatrix}.$$

On a nécessairement

$$\sin A = \lim_{n\to\infty} S_n = \begin{pmatrix} \sigma & -\tau \\ \tau & \sigma \end{pmatrix},$$

où

$$\sigma = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\cos (2p+1)\theta}{(2p+1)!} \qquad \text{et} \qquad \tau = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\sin (2p+1)\theta}{(2p+1)!}.$$

Il reste donc à calculer σ et τ.
Posons $z = e^{i\theta}$. On en déduit que l'on a

$$\sigma + i\tau = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{e^{i(2p+1)\theta}}{(2p+1)!} = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sin z.$$

Alors

$$\sigma + i\tau = \sin z = \sin(\cos\theta + i\sin\theta) = \sin(\cos\theta)\cos(i\sin\theta) + \sin(i\sin\theta)\cos(\cos\theta)$$

ou encore

$$\sigma + i\tau = \sin(\cos\theta)\,\mathrm{ch}\,(\sin\theta) + i\,\mathrm{sh}\,(\sin\theta)\cos(\cos\theta) \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma = \sin(\cos\theta)\,\mathrm{ch}\,(\sin\theta), \\ \tau = \mathrm{sh}\,(\sin\theta)\cos(\cos\theta). \end{cases}$$

En résumé, on a

$$\sin A = \begin{pmatrix} \sin(\cos\theta)\,\mathrm{ch}\,(\sin\theta) & -\mathrm{sh}\,(\sin\theta)\cos(\cos\theta) \\ \mathrm{sh}\,(\sin\theta)\cos(\cos\theta) & \sin(\cos\theta)\,\mathrm{ch}\,(\sin\theta) \end{pmatrix}.$$

9.III.2.

a) Considérons la série $I - A + A^2 - A^3 + \ldots$.

On a $|||A^n||| \leqslant |||A|||^n$ qui est le terme général d'une série convergente [puisque $|||A||| = n \sup_{i,j} |a_{ij}| < 1$].

La série $I - A + A^2 - A^3 + \ldots$ est normalement convergente. Comme elle est définie dans le Banach $\mathcal{M}_{n,n}$, on en déduit qu'elle est convergente. Soit S sa somme :

$$S = I - A + A^2 - A^3 - \ldots$$

Nous avons, alors

$$(I + A)S = (I + A)(I - A + A^2 - A^3 + \ldots) = I,$$

donc $I + A$ est inversible, et

$$(I + A)^{-1} = S = I - A + A^2 - A^3 + \ldots$$

[Remarquer l'analogie avec $(1 + x)^{-1} = \dfrac{1}{1 + x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$]

b) Posons $A = B - I$. Alors, $\sup_{i,j} |a_{ij}| < \dfrac{1}{n}$.

Il résulte de *a*) que $I + A = B$ est inversible, et

$$(I + A)^{-1} = B^{-1} = I - A + A^2 - A^3 + \ldots = I - (B - I) + (B - I)^2 - (B - I)^3 + \ldots$$

En résumé, B est inversible et $B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (B - I)^n$.

9.IV.1.

1° Formellement, on a

$$(A(t).X(t))' = A'(t).X(t) + A(t).X'(t);$$

c'est cette formule que nous allons justifier.

Considérons pour cela l'expression ($h \neq 0$) suivante :

$$e = \frac{A(t+h).X(t+h) - A(t).X(t)}{h} - A'(t).X(t) - A(t).X'(t)$$

que l'on décompose classiquement sous la forme

$$e = e_1 + e_2 + e_3,$$

où

$$e_1 = \frac{A(t+h).[X(t+h) - X(t)]}{h} - A(t+h).X'(t),$$
$$e_2 = [A(t+h) - A(t)].X'(t),$$
$$e_3 = \frac{[A(t+h) - A(t)].X(t)}{h} - A'(t).X(t).$$

a) Puisque $t \mapsto A(t)$ est continue en t, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \alpha_1(\varepsilon, t) > 0 \quad \text{tel que} \quad |h| \leqslant \alpha_1 \Rightarrow |||A(t+h) - A(t)||| \leqslant \varepsilon,$$

et *a fortiori*

$$|||A(t+h)||| \leqslant |||A(t)||| + \varepsilon.$$

Puisque $t \mapsto X(t)$ est dérivable en t, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\, \alpha_2(\varepsilon, t) \quad \text{tel que} \quad |h| \leqslant \alpha_2 \Rightarrow \left\| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t) \right\| \leqslant \varepsilon.$$

La majoration suivante :

$$||e_1|| = \left\| A(t+h).\left[\frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t)\right] \right\|$$
$$\leqslant |||A(t+h)|||.\left\| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - X'(t) \right\|,$$

entraîne alors que l'on a

(1) $\quad ||e_1|| \leqslant (|||A(t)||| + \varepsilon)\varepsilon$, pour tout h vérifiant $|h| \leqslant \operatorname{Inf}(\alpha_1, \alpha_2)$.

b) Puisque $t \mapsto A(t)$ est continue en t, on peut écrire

$$|h| \leqslant \alpha_1 \Rightarrow |||A(t+h) - A(t)||| \leqslant \varepsilon.$$

Compte tenu de la majoration suivante :

$$||e_2|| = ||[A(t+h) - A(t)].X'(t)|| \leqslant |||A(t+h) - A(t)|||.||X'(t)||,$$

on obtient alors

(2) $\quad ||e_2|| \leqslant \varepsilon ||X'(t)||$, pour tout h vérifiant $|h| \leqslant \alpha_1$.

c) Puisque $t \mapsto A(t)$ est dérivable en t, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha_3(\varepsilon, t) > 0 \quad \text{tel que} \quad |h| \leqslant \alpha_3 \Rightarrow \left|\left|\left| \frac{A(t+h) - A(t)}{h} - A'(t) \right|\right|\right| \leqslant \varepsilon.$$

Compte tenu de la majoration suivante :

$$||e_3|| = \left\| \left[\frac{A(t+h) - A(t)}{h} - A'(t)\right] . X(t) \right\| \leqslant \left|\left|\left| \frac{A(t+h) - A(t)}{h} - A'(t) \right|\right|\right| . ||X(t)||,$$

on obtient alors

$$(3) \qquad ||e_3|| \leqslant \varepsilon . ||X(t)||, \quad \text{pour tout } h \text{ vérifiant} \quad |h| \leqslant \alpha_3.$$

En résumé, compte tenu de (1), (2) et (3), on conclut que

$$||e|| \leqslant ||e_1|| + ||e_2|| + ||e_3|| \leqslant K\varepsilon,$$
$$\text{pour tout } h \text{ non nul, vérifiant} \quad |h| \leqslant \operatorname{Inf}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

où

$$K = |||A(t)||| + 1 + ||X'(t)|| + ||X(t)||, \quad \text{si} \quad \varepsilon \leqslant 1.$$

Autrement dit, l'application $t \mapsto A(t)X(t)$ est dérivable en t et

$$(A(t) . X(t))' = A'(t) . X(t) + A(t) . X'(t).$$

2° Si les applications $t \mapsto A'(t)X(t)$ et $t \mapsto A(t)X'(t)$ sont continues, la dérivée de l'application $t \mapsto A(t)X(t)$ sera continue. Autrement dit, $t \mapsto A(t)X(t)$ sera de classe C^1.

Établissons, par exemple, la continuité de l'application $t \mapsto A'(t)\, X(t)$.
Pour cela considérons l'expression $u = A'(t) . X(t) - A'(t_0) . X(t_0)$ que l'on décompose classiquement sous la forme $u = u_1 + u_2$, où

$$u_1 = (A'(t) . X(t) - A'(t) . X(t_0)) \text{ et } u_2 = (A'(t) . X(t_0) - A'(t_0) . X(t_0)).$$

a) Puisque $t \mapsto A'(t)$ est continue en t_0, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1(\varepsilon) > 0 \qquad \text{tel que} \qquad |t - t_0| \leqslant \eta_1 \Rightarrow |||A'(t) - A'(t_0)||| \leqslant \varepsilon,$$

et *a fortiori*

$$|||A'(t)||| \leqslant |||A'(t_0)||| + \varepsilon.$$

Puisque $t \mapsto X(t)$ est continue en t_0, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_2(\varepsilon) > 0 \qquad \text{tel que} \qquad |t - t_0| \leqslant \eta_2 \Rightarrow ||X(t) - X(t_0)|| \leqslant \varepsilon.$$

Compte tenu de la majoration suivante :

$$(4) \qquad ||u_1|| = ||A'(t)[X(t) - X(t_0)]|| \leqslant |||A'(t)||| . ||X(t) - X(t_0)||,$$

on obtient alors

$$||u_1|| \leqslant (|||A'(t_0)||| + \varepsilon)\varepsilon, \qquad \text{pour tout } t \text{ vérifiant } |t - t_0| \leqslant \operatorname{Inf}(\eta_1, \eta_2).$$

b) Puisque $t \mapsto A'(t)$ est continue en t_0, on a

$$(5) \quad ||u_2|| = ||[A'(t) - A'(t_0)] . X(t_0)|| \leqslant |||A'(t) - A'(t_0)||| . ||X(t_0)|| \leqslant \varepsilon ||X(t_0)||,$$

pour tout t appartenant à $]a, b[$ et vérifiant $|t - t_0| \leqslant \eta_1$.

En résumé, compte tenu des relations (4) et (5), on peut écrire

$$||u|| \leqslant ||u_1|| + ||u_2|| \leqslant K_0 \varepsilon,$$

pour tout t appartenant à $]a, b[$ et vérifiant $|t - t_0| \leqslant \operatorname{Inf}(\eta_1, \eta_2)$, avec

$$K_0 = |||A'(t_0)||| + 1 + ||X(t_0)||, \text{ si } \varepsilon \leqslant 1.$$

Autrement dit, $t \mapsto A'(t).X(t)$ est bien continue en tout point t_0 de $]a, b[$.

9.IV.2.

1° Démonstration analogue à celle de l'exercice précédent.

Il suffit de substituer B à X et la norme $|||.|||$ à la norme $||.||$, tout en conservant la norme $|||.|||$ déjà rencontrée.

Par exemple, on a

$$|||e_1||| = \left|\left|\left| A(t+h)\left[\frac{B(t+h)-B(t)}{h} - B'(t)\right]\right|\right|\right|$$

$$\leqslant |||A(t+h)|||.\left|\left|\left|\frac{B(t+h)-B(t)}{h} - B'(t)\right|\right|\right|,$$

d'où l'on déduit

$$|||e_1||| \leqslant (|||A(t)||| + \varepsilon)\varepsilon, \text{ pour } h \textit{ assez petit.}$$

2° *a*) En posant $B(t) = A(t)$, on déduit de la question précédente que

$$t \mapsto A(t).A(t) = A^2(t)$$

est de classe C^1.

Puis, en posant $B(t) = A^2(t)$, on déduit encore que

$$t \mapsto A(t).A^2(t) = A^3(t)$$

est de classe C^1.

Plus généralement, $t \mapsto A^n(t)$ est de classe C^1 (faire un raisonnement par récurrence).

b) On obtient successivement

i) pour $B(t) = A(t)$,

$$(A^2(t))' = (A(t)B(t))' = A'(t)B(t) + A(t)B'(t) = A'(t)A(t) + A(t)A'(t);$$

ii) pour $B(t) = A^2(t)$,

$$(A^3(t))' = (A(t)B(t))' = A'(t).A^2(t) + A(t)(A^2(t))',$$

ou encore, compte tenu de i),

$$(A^3(t))' = A'(t)A^2(t) + A(t)A'(t)A(t) + A^2(t)A'(t).$$

Faire un raisonnement par récurrence pour établir la formule générale.

9.IV.3.

On a évidemment

$$A(t_1)B(t_2+h) = B(t_2+h)A(t_1), \text{ pour tout } h \text{ tel que } (t_2+h) \in]a, b[,$$

donc on a aussi

$$A(t_1)\frac{B(t_2+h)-B(t_2)}{h} = \frac{B(t_2+h)-B(t_2)}{h}A(t_1)$$

et, par passage à la limite pour $h \to 0$,

$$A(t_1)B'(t_2) = B(t_2)A'(t_1).$$

Même raisonnement pour montrer que l'on a

$$A'(t_1)B(t_2) = B(t_2)A'(t_1), \qquad \forall t_1 \text{ et } t_2.$$

Compte tenu de cette dernière relation, on conclut que l'on a

$$A'(t_1)\frac{B(t_2+h)-B(t_2)}{h} = \frac{B(t_2+h)-B(t_2)}{h}A'(t_1)$$

et, par passage à la limite, on obtient enfin

$$A'(t_1)B'(t_2) = B'(t_2)A'(t_1).$$

9.IV.4.

Munissons $\mathcal{M}_{nn}$ de la norme usuelle $||\,.\,||$ définie par $||A|| = n \sup\limits_{i,j} |a_{ij}|$, où $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

a) Supposons que $t \mapsto A(t)$ soit continue en t_0.
Si $t \to A(t)$ est continue en t_0, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad \text{tel que} \quad |t-t_0| \leqslant \alpha \Rightarrow ||A(t)-A(t_0)|| \leqslant \varepsilon.$$

On a évidemment

$$A(t)-A(t_0) = (a_{ij}(t)-a_{ij}(t_0)),$$

donc

$$||A(t)-A(t_0)|| = n \sup_{i,j}\{|a_{ij}(t)-a_{ij}(t_0)|\}$$

et, par suite, pour tout i et pour tout j,

$$|t-t_0| \leqslant \alpha \Rightarrow n\sup_{i,j}\{|a_{ij}(t)-a_{ij}(t_0)|\} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow |a_{ij}(t)-a_{ij}(t_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{n},$$

Autrement dit, $t \mapsto a_{ij}(t)$ est continue en t_0 ($\forall i$ et j).

Supposons que toutes les applications $t \mapsto a_{ij}(t)$ soient continues en t_0.
Si toutes les applications $t \mapsto a_{ij}(t)$ sont continues en t_0, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_{ij} > 0 \quad \text{tel que} \quad |t - t_0| \leqslant \eta_{ij} \Rightarrow |a_{ij}(t) - a_{ij}(t_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Donc, pour tout i et pour tout j,

$$|t - t_0| \leqslant \eta = \operatorname*{Inf}_{ij} \{\eta_{ij}\} \Rightarrow |a_{ij}(t) - a_{ij}(t_0)| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \|A(t) - A(t_0)\| \leqslant n\varepsilon.$$

Autrement dit, $t \mapsto A(t)$ est continue en t_0.

b) **Supposons $t \mapsto A(t)$ dérivable en t_0.**
Si $t \to A(t)$ est dérivable en t_0, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists A'(t_0) = (\alpha_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \qquad \text{et } \alpha > 0$$

tel que $$0 < |h| \leqslant \alpha \Rightarrow \left\| \frac{A(t_0 + h) - A(t_0)}{h} - A'(t_0) \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Donc

$$0 < |h| \leqslant \alpha \Rightarrow \left| \frac{a_{ij}(t_0 + h) - a_{ij}(t_0)}{h} - \alpha_{ij} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{n}, \qquad \forall i \text{ et } j.$$

Autrement dit, a_{ij} est dérivable en t_0 et $a'_{ij}(t_0) = \alpha_{ij}$.
De plus,

$$A'(t_0) = (a'_{ij}(t_0))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}.$$

Supposons que toutes les applications a_{ij} soient dérivables en t_0.
Si toutes les applications a_{ij} sont dérivables en t_0, on a alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_{ij} > 0 \quad \text{tel que} \quad 0 < |h| \leqslant \eta_{ij} \Rightarrow \left| \frac{a_{ij}(t_0 + h) - a_{ij}(t_0)}{h} - a'_{ij}(t_0) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit

$$B = (a'_{ij}(t_0))_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}};$$

on a alors

$$0 < |h| \leqslant \eta = \operatorname*{Inf}_{ij} \{\eta_{ij}\} \Rightarrow \left| \frac{a_{ij}(t_0 + h) - a_{ij}(t_0)}{h} - a'_{ij}(t_0) \right| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall i \text{ et } j,$$

ou encore

$$0 < |h| \leqslant \eta \Rightarrow \sup_{i,j} \left| \frac{a_{ij}(t_0 + h) - a_{ij}(t_0)}{h} - a'_{ij}(t_0) \right| = \frac{1}{n} \left\| \frac{A(t_0 + h) - A(t_0)}{h} - B \right\| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci exprime que A est dérivable en t_0 et que l'on a

$$A'(t_0) = B = (a'_{ij}(t_0)).$$

De plus, on a [cf. *a*)]

$$A'(t) = (a'_{ij}(t)) \text{ continue sur }]a, b[\Leftrightarrow a'_{ij} \text{ continue sur }]a, b[, \ \forall i \text{ et } j.$$

Donc,

$$A \text{ de classe } C^1 \Leftrightarrow a_{ij} \text{ de classe } C^1, \ \forall i \text{ et } j.$$

9.V.1.

1° Supposons que $\{f_n\}^\infty$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.
On a alors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N \Rightarrow |f_n(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Soit $\psi : t \mapsto f(t)X$, on a alors, pour $n \geqslant N$,

$$||\psi_n(t) - \psi(t)|| = ||f_n(t)X - f(t)X|| = |f_n(t) - f(t)|\,||X|| \leqslant \varepsilon ||X||, \quad \forall t.$$

Autrement dit, $\{\psi_n\}^\infty$ converge uniformément vers ψ sur $\mathbb{R}$.

Supposons que $(\Psi_n)^\infty$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
La suite $\{\psi_n\}^\infty$ satisfait donc à la condition de Cauchy,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \quad \text{tel que} \quad m \geqslant n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow ||\psi_m(t) - \psi_n(t)|| \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Par suite,

$$m \geqslant n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow ||f_m(t)X - f_n(t)X|| = |f_m(t) - f_n(t)|\,||X|| \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ou encore

$$m \geqslant n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow |f_m(t) - f_n(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{||X||}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ceci signifie que $\{f_n\}^\infty$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. (Condition de Cauchy pour les fonctions à valeurs réelles.)

2° Supposons que F soit borné : $|F(t)| \leqslant K$, K Cte, $\forall t \in \mathbb{R}$.
Exprimons le fait que $\{X_n\}^\infty$ converge vers X par l'implication suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \quad \text{tel que} \quad n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow ||X_n - X|| \leqslant \varepsilon.$$

En posant $\phi : t \mapsto F(t)X$, on aura alors

$$n \geqslant N_\varepsilon \Rightarrow ||\phi_n(t) - \phi(t)|| = ||F(t)X_n - F(t)X|| = |F(t)|\,||X_n - X|| \leqslant K\varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, $\{\phi_n\}^\infty$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers ϕ.

Supposons que $(\phi_n)^\infty$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
Elle satisfait donc à la condition de Cauchy,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \quad \text{tel que} \quad m \geqslant n \geqslant N \Rightarrow ||\phi_m(t) - \phi_n(t)|| \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En particulier, pour $n = N$ et $m = M$ (premier entier supérieur à N tel que $X_M \neq X_N$), on aura

$$||\phi_M(t) - \phi_N(t)|| = ||F(t)X_M - F(t)X_N|| = |F(t)|\,.\,||X_M - X_N|| \leqslant \varepsilon, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ou encore

$$|F(t)| \leqslant K = \frac{\varepsilon}{||X_M - X_N||}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La fonction F est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

9.VI.1.

1° *a*) et *b*) Pour justifier *a*) et *b*), il suffit d'utiliser une méthode analogue à celle développée dans la résolution de l'exercice **9**.IV.2.

Remarquons que l'on a

$$|||(L^2(t))'||| \leqslant |||L'(t) \,.\, L(t)||| + |||L(t)\, L'(t)||| \leqslant 2|||L(t)|||\ |||L'(t)|||$$

(puisque $|||A \,.\, B||| \leqslant |||A||| \,.\, |||B||| = |||B||| \,.\, |||A|||$),
de même $|||(L^3(t))'||| \leqslant |||L^2(t)L'(t)||| + |||L(t)L'(t)L(t)||| + |||L'(t)L^2(t)|||$,
donc $|||L^3(t)'||| \leqslant 3|||L(t)|||^2 \,.\, |||L(t)|||$,
(puisque $|||A \,.\, B \,.\, C||| \leqslant |||A||| \,.\, |||B||| \,.\, |||C|||$)

et plus généralement

(1) $$|||(L^n(t))'||| \leqslant n|||L'(t)||| \,.\, |||L(t)|||^{n-1}.$$

c) Soit $[\alpha, \beta]$ un intervalle compact inclus dans $]a, b[$.
Pour s'assurer que l'application

$$[\alpha, \beta] \mapsto \mathfrak{L}_c(E)$$
$$t \mapsto e^{L(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L^n(t)}{n!}$$

est de classe C^1, *il suffit de vérifier les conditions suivantes :*

i) $L^n(t)$ est de classe C^1;

ii) la série « dérivée »,

$$\frac{L'(t)}{1!} + \frac{(L^2(t))'}{2!} + \dots + \frac{(L^n(t))'}{n!} + \dots,$$

converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$.

La condition i) résulte de la question 2°, *a*, exercice **9**.IV.2.

Il reste à vérifier que la condition ii) est vraie. Compte tenu de la majoration (1), on a

$$\frac{|||(L^n(t))'|||}{n!} \leqslant \frac{n|||L'(t)|||(|||L(t)|||)^{n-1}}{n!}.$$

Sur le compact $[\alpha, \beta]$, $t \mapsto L(t)$ est continue, donc bornée,

$$|||L(t)||| \leqslant K, \quad \forall t \in [\alpha, \beta] \quad \text{où } K \text{ est une constante.}$$

De même,

$$|||L'(t)||| \leqslant K', \quad \forall t \in [\alpha, \beta] \quad \text{où } K' \text{ est une constante.}$$

On aura alors

$$\frac{|||(L^n(t))'|||}{n!} \leqslant K' \frac{K^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad \forall t \in [\alpha, \beta].$$

Pour $t \in [\alpha, \beta]$, $\frac{(L^n(t))'}{n!}$ est majoré, en norme, par le terme général d'une série numérique convergente. Donc la série $L'(t) + \frac{(L^2(t))'}{2!} + \dots$ est bien uniformément convergente sur $[\alpha, \beta]$.

En résumé, les conditions i) et ii) étant satisfaites, on peut affirmer que l'application $t \mapsto e^{L(t)}$ est de classe C^1 sur $[\alpha, \beta]$. De plus, on a

$$(e^{L(t)})' = L'(t) + \frac{L(t)L'(t) + L'(t)L(t)}{2!} + \dots.$$

L'intervalle $[\alpha, \beta]$ est un compact choisi arbitrairement dans $]a, b[$, donc la propriét: énoncée ci-dessus reste valable dans tout l'ouvert $]a, b[$.

2° Puisque $L(t_2+h)L(t_1) = L(t_1)L(t_2+h)$, on peut écrire

$$\frac{L(t_2+h) - L(t_2)}{h} L(t_1) = L(t_1) \frac{L(t_2+h) - L(t_2)}{h} \quad (h \neq 0)$$

et, par passage à la limite, pour $h \to 0$,

$$L'(t_2)L(t_1) = L(t_1)L'(t_2), \qquad \forall t_1 \quad \text{et} \quad t_2 \in]a, b[.$$

En particulier, pour $t_2 = t_1 = t$, on a

$$L'(t)L(t) = L(t)L'(t), \qquad \forall t \in]a, b[.$$

Donc

$$(L^2(t))' = 2L'(t)L(t) \qquad \text{et} \qquad (L^3(t))' = 3L'(t)L^2(t)$$

et, plus généralement,

$$(L^n(t))' = nL'(t)L^{n-1}(t).$$

Par suite,

$$\begin{aligned}(e^{L(t)})' \\ &= L'(t) + \frac{L(t)L'(t) + L'(t)L(t)}{2!} + \frac{L(t)L(t)L'(t) + L(t)L'(t)L(t) + L'(t)L(t)L(t)}{3!} + \dots \\ &= \mathrm{L}'(t) + \frac{2L'(t)L(t)}{2!} + \frac{3L'(t)L^2(t)}{3!} + \dots = L'(t)e^{L(t)}.\end{aligned}$$

3° L'application $L : t \mapsto tL_0$ satisfait évidemment à la condition énoncée dans la question 2°. De plus, $L'(t) = L_0$. L'égalité suivante :

$$(e^{L(t)})' = L'(t)e^{L(t)}$$

s'écrit alors

$$(e^{tL_0})' = L_0e^{tL_0}.$$

9.VI.2.

1° La série $(a_n x^n)_0$ est absolument convergente pour x vérifiant la relation $|x| < R$:

$$(|a_n|\,|x|^n) \quad \text{converge pour} \quad x \in]-R, R[.$$

En particulier, $(|a_n|(|||A|||)^n)$ converge si $|||A||| < R$ (faire $x = |||A|||$).
Considérons la série

$$a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n + \dots$$

et la série des normes associée

$$|a_0| + |a_1| \,.\, |||A||| + |a_2|\, |||A^2||| + \dots.$$

La série des normes est une série à termes positifs convergente car on a

$$|a_n|\, |||A^n||| \leqslant |a_n|\, |||A|||^n,$$

qui est le terme général d'une série convergente.
La série $(a_n A^n)$ est normalement convergente dans $\mathfrak{L}_c(E)$ qui est un Banach. Donc, $(a_n A^n)$ est convergente.

2° *a*) « Si $(u_n)_0$ et $(V_n)_0$ sont deux séries numériques *absolument convergentes*, alors la série produit $(W_n)_0$ [où $W_n = u_0 V_n + u_1 V_{n-1} + \dots + u_n V_0$] est absolument convergente et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} V_n\right). \text{ »}$$

Pour des séries $(u_n)_0$ et $(V_n)_0$ à valeurs dans un Banach (sur lequel est définie une algèbre), on substitue la notion de série normalement convergente, à celle de série absolument convergente, d'où l'énoncé suivant :
« Si $(u_n)_0$ et $(V_n)_0$ sont deux séries *normalement convergentes* dans un Banach, alors la série produit $(W_n)_0$ est normalement convergente et l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} V_n\right). \text{ »}$$

b) *Application :*

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (rayon de convergence R) et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ (rayon de convergence R_1).
Soit A tel que $|||A||| < \text{Inf}\,(R, R_1)$. La série $(a_n x^n)$ est absolument convergente pour $|x| < R$, donc $(|a_n|\, |||A|||^n)$ est convergente (puisque $|||A||| < R$) et, par suite, $(a_n A^n)_0$ est normalement convergente.
De même, $(b_n A^n)_0$ est normalement convergente. **Donc,** la série produit $(c_n A^n)_0$, où $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$, est normalement convergente.
[Poser $u_n = a_n A^n$; $V_n = b_n A^n$, donc

$$W_n = (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0) A^n.]$$

3° Appliquons le résultat précédent aux séries entières suivantes :

$$(S_1) \qquad 1 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

$$(S_2) \qquad 1 + \frac{\beta x}{1!} + \frac{\beta(\beta-1)x^2}{2!} + \dots + \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)x^n}{n!} + \dots.$$

Ici on a, d'une part

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} \qquad \text{et} \qquad b_n = \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)}{n!},$$

et, d'autre part,

$$R = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \notin \mathbb{N}, \\ \infty & \text{si } \alpha \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad R_1 = \begin{cases} 1 & \text{si } \beta \notin \mathbb{N}, \\ \infty & \text{si } \beta \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

On a $|||A||| < \operatorname{Inf}(R, R_1)$ (puisque $|||A||| < 1$), donc

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n A^n\right) \\ &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}A^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)}{n!}A^n\right). \end{aligned}$$

Notons A^α la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}A^n,$$

on en déduit alors

$$A^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)}{n!}A^n$$

et, par suite,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n = A^\alpha . A^\beta, \quad \text{où} \quad c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0.$$

Supposons établi le résultat suivant :

$$c_n = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\dots(\alpha+\beta-n+1)}{n!}.$$

Alors, on en conclut que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n = A^{\alpha+\beta}$$

et, par suite,

$$A^{\alpha+\beta} = A^\alpha . A^\beta.$$

Reste à établir la propriété $c_n = \dfrac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\dots(\alpha+\beta-n+1)}{n!}$.

Pour $|x| < 1$, on a

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{et} \qquad (1+x)^{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

on en déduit donc

$$(1) \qquad (1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

De plus, on a la relation suivante :

$$(2) \quad (1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} = (1+x)^{\alpha+\beta} = 1 + (\alpha+\beta)x + \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}{2!}x^2 + \dots$$

(valable dans tous les cas pour $|x| < 1$).

Par identification, on déduit alors de (1) et de (2) que l'on a

$$c_n = \frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)\dots(\alpha+\beta-n+1)}{n!}.$$

10. SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS A COEFFICIENTS CONSTANTS : $\dfrac{dX}{dt} = AX + Y$. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES A COEFFICIENTS CONSTANTS. MÉTHODES TECHNIQUES

I. — INTRODUCTION.

Soit $]a, b[$ un ouvert de $\mathbb{R}$. On se propose de déterminer les systèmes de n fonctions

$$x_j :]a, b[\mapsto \mathbb{C},\ t \mapsto x_j(t)$$

qui vérifient

$$(S)\left\{\begin{array}{l} x_1'(t) = a_{1,1}x_1(t) + \ldots + a_{1,n}x_n(t) + y_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n'(t) = a_{n,1}x_1(t) + \ldots + a_{n,n}x_n(t) + y_n(t), \end{array}\right.$$

où $a_{l,k}$ Cte $\in \mathbb{C}$ et où $y_j :]a, b[\mapsto \mathbb{C}$ est continue.

On considère $\mathbb{C}^n$, espace des vecteurs $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_j \in \mathbb{C}$, muni de la base canonique

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1).$$

Aucune confusion n'étant possible A désignera la matrice carrée $(a_{l,k})$ ou l'endomorphisme qu'elle caractérise dans la base canonique. De même, X désigne la matrice-colonne (x_j) ou le vecteur $X = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ et Y la matrice-colonne (y_j) ou le vecteur $Y = (y_1, \ldots, y_n)$.

Le système (S) s'écrit donc, matriciellement ou vectoriellement

$$\frac{dX}{dt} = AX + Y. \tag{1}$$

On associe à (1) l'équation homogène suivante :

$$\frac{dX}{dt} = AX. \tag{2}$$

II. — PROPRIÉTÉS ÉLÉMENTAIRES ET EXISTENCE DES SOLUTIONS.

1° Système fondamental de solutions de (2).

Définition. — Considérons n solutions,

$$X_j(t) = (x_{1,j}(t), \dots, x_{n,j}(t)), \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

On dit que $\{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$ constitue un système fondamental de solutions de (2) si, et seulement si,

$$\text{dét}(\{X_1(t), \dots, X_n(t)\}) = \text{dét}(x_{k,j}(t)) \neq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Théorème 10.II.1. — On a les propriétés suivantes :

a) $\text{dét}(x_{k,j}(t)) = \text{dét}(x_{k,j}(t_0))e^{(t-t_0)\sum_{j=1}^{n} a_{j,j}}$;

b) $\exists t_0$ tel que $\text{dét}(x_{k,j}(t_0)) \neq 0 \Leftrightarrow \text{dét}(x_{k,j}(t)) \neq 0, \forall t$;

c) $\{X_1(t), \dots, X_n(t)\}$ système fondamental de solutions $\Leftrightarrow \exists t_0$ tel que $\{X_1(t_0), \dots, X_n(t_0)\}$ constitue une base de $\mathbb{C}^n$.

Théorème 10.II.2. — Il existe toujours un système fondamental de solutions

$$\{X_1(t), \dots, X_n(t)\} \qquad \text{et} \qquad X(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j(t), \quad c_j \,\text{Cte} \in \mathbb{C},$$

est solution de (2).

Réciproquement, toute solution $X(t)$ de (2) se décompose de façon unique sous la forme $X(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j(t)$, $c_j \in \mathbb{C}$.

On dit que $X = \sum_{j=1}^{n} c_j X_j$ est la solution générale de (2).

2° Système non homogène : $\dfrac{dX}{dt} = AX+Y$. — Si Y est continu sur $]a, b[$ $[\Leftrightarrow y_j$ continu sur $]a, b[, j = 1, \ldots, n]$, alors il existe $\widehat{X}$ continûment dérivable sur $]a, b[$ tel que

$$\frac{d\widehat{X}}{dt} = A\widehat{X} + Y.$$

La solution générale de (1) est donnée alors par

$$t \mapsto X(t) = \sum_{i=1}^{n} c_j X_j(t) + \widehat{X}(t),$$

où $\{X_1, \ldots, X_n\}$ est un système fondamental de solutions de (2). ($\widehat{X}$ n'est pas unique, évidemment.)

3° Système non homogène avec donnée initiale. — Le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = AX + Y, \\ X(t_0) = Z_0, \text{ où } t_0 \in]a, b[\text{ et } Z_0 \in \mathbb{C}^n \text{ donné,} \end{cases}$$

admet une solution unique (non nulle si $Y \neq 0$) définie et continûment dérivable sur $]a, b[$.

III. — MÉTHODES PRATIQUES : SYSTÈME HOMOGÈNE.

Elles sont basées sur la recherche de solutions particulières du type $e^{r_k t} V_k$.

1° La matrice A a ses valeurs propres $r_1, \ldots, r_n$ distinctes. — A r_k correspond un vecteur propre V_k. Alors $X_k(t) = e^{r_k t} V_k$ est solution de l'équation homogène et la solution générale s'écrit

$$X(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k V_k e^{r_k t}, \qquad c_k \,\text{Cte} \in \mathbb{C}.$$

2° La matrice A a p valeurs propres distinctes ($1 \leqslant p < n$).

a) Utilisation du noyau de $(A - r_k I)^{m_k}$. — r_k est valeur propre d'ordre m_k (donc $\sum_{k=1}^{p} m_k = n$).

Soit N_k le noyau de l'endomorphisme $(A - r_k I)^{m_k}$,

$$N_k = \{X \in \mathbb{C}^n;\ (A - r_k I)^{m_k} X = 0\},$$

on sait que N_k est de dimension m_k et l'on en considère une base $Z_{k,1}, \ldots, Z_{k,m_k}$.

Au vecteur $Z_{k,1}$, par exemple, correspond la solution

$$X_{k,1}(t) = e^{r_k t}\left[I + \frac{t}{1!}(A - r_k I) + \frac{t^2}{2!}(A - r_k I)^2 + \ldots + \frac{t^{m_k - 1}}{(m_k - 1)!}(A - r_k I)^{m_k - 1}\right] Z_{k,1}.$$

Ainsi, à la valeur propre r_k d'ordre m_k on fait correspondre m_k solutions $X_{k,1}, \ldots, X_{k,m_k}$. On obtient bien, en tout, $\sum_{k=1}^{p} m_k = n$ solutions qui forment un système fondamental puisque $X_{k,j}(0) = Z_{k,j}$ et $\{Z_{k,j}\}$ *constitue une base de* $\mathbb{C}^n$.

b) Triangularisation. – On cherche une base $\{\varepsilon_p\}$ telle que l'opérateur A soit représenté par une matrice triangulaire $B = (b_{i,j})$, $b_{i,j} = 0$ si $i<j$.

Soit P la matrice de passage

$$(e_1, e_2, \ldots, e_n) \mapsto (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n).$$

Si l'on a

$$\varepsilon_q = \sum_{p=1}^{n} \alpha_{p,q} e_p, \qquad \text{alors } P = (\alpha_{p,q}) \text{ et } B = P^{-1}AP.$$

Dans cette nouvelle base le vecteur $X(t)$ *est représenté par la matrice-colonne* $U(t) = (u_j(t))$ et l'on aura $\dfrac{dU}{dt} = BU$.

Par exemple, pour $n = 3$, on a

$$\begin{cases} u_1' = b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + b_{13}u_3, \\ u_2' = \qquad\quad\ b_{22}u_2 + b_{23}u_3, \\ u_3' = \qquad\qquad\qquad\quad b_{33}u_3. \end{cases}$$

On résout la dernière équation différentielle, qui est à coefficients constants, puis on remonte de proche en proche.

Enfin, la relation $X(t) = PU(t)$ détermine $X(t)$.

3° Remarques. – *a*) On peut aussi appliquer directement le résultat théorique suivant :

$$\frac{dX}{dt} = AX \Leftrightarrow X = e^{tA}C,$$

où C est la matrice-colonne, $C = (c_j)$, $c_j \in \mathbb{C}$.

Ceci suppose que l'on sache calculer facilement e^{tA} à partir de A, c'est le cas, par exemple, lorsque A est diagonale, mais dans un tel cas le système est immédiat à résoudre.

b) Lorsqu'il se présente des intégrales premières simples, combinaisons linéaires des fonctions inconnues par exemple, on peut avoir intérêt à les utiliser pour abaisser l'ordre du système. (Cf. Exercice **10.III.2.**)

IV. — RECHERCHE DE SOLUTIONS RÉELLES LORSQUE $a_{l,k} \in \mathbb{R}$.

Soit à résoudre $X' = AX$ dans $\mathbb{R}^n$ ($a_{l,k} \in \mathbb{R}$).

Si $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $x_j \in \mathbb{C}$, on note $\bar{X}$ le vecteur $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ appelé conjugué de X.

Si la valeur propre $r_k \in \mathbb{C}$ sans être réelle, $\bar{r}_k$ est aussi valeur propre de même ordre de multiplicité m_k.

A r_k correspondent m_k solutions $X_{k,1}, \ldots, X_{k,m_k}$ (paragraphe III, 2°) et à $\bar{r}_k$ on peut faire correspondre les solutions $\bar{X}_{k,1}, \ldots, \bar{X}_{k,m_k}$.

Au système de ces $2m_k$ solutions on substitue les $2m_k$ solutions suivantes :

$$\mathfrak{Re}X_{k,1}, \quad \mathfrak{Re}X_{k,2}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{Re}X_{k,m_k}, \quad \mathfrak{Im}X_{k,1}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{Im}X_{k,m_k}.$$

En procédant ainsi pour $k = 1, 2, \ldots, p$ on obtient un système fondamental de solutions dans $\mathbb{R}^n$, d'où la solution générale à coefficients constants réels.

V. — MÉTHODES PRATIQUES : SYSTÈME $\frac{dX}{dt} = AX+Y$

(où $Y : t \mapsto Y(t)$ est de classe C^0 sur $]a, b[$.)

1° Cas général. Méthode de Lagrange. — Soit $\{X_1, \ldots, X_n\}$ un système fondamental de solutions de l'équation homogène associée :

$$X_i(t) = \big(x_{1,1}(t), x_{2,1}(t), \ldots, x_{n,1}(t)\big)$$

[qui vérifie $M' = AM$].

On considère alors la matrice

$$M(t) = \begin{pmatrix} x_{1,1}(t) & \ldots & x_{1,n}(t) \\ x_{2,1}(t) & \ldots & x_{2,n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1}(t) & \ldots & x_{n,n}(t) \end{pmatrix}$$

et la matrice-colonne suivante :

$$\Lambda = (\lambda_j), \qquad \lambda_j \in \mathbb{C}.$$

On montre alors que l'on a

$$X(t) = M(t)\Lambda + M(t)\int_{t_0}^{t} M^{-1}(u)Y(u)du.$$

Cette solution s'obtient pratiquement par la méthode de Lagrange dite « variation des constantes ».

A partir de la solution générale de l'équation homogène

$$X(t) = \lambda_1 X_1(t) + \ldots + \lambda_n X_n(t) = M(t)\Lambda,$$

on considère

$$X(t) = u_1(t)X_1(t) + \ldots + u_n(t)X_n(t) = M(t)U(t)$$

et l'on substitue dans l'équation complète pour obtenir les $u_j(t)$.

2° Cas d'un second membre du type particulier $Y = t^n e^{\alpha t} Y_0$ (α Cte $\in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $Y_0 \in \mathbb{C}^n$ constant). — Si α est racine d'ordre p du polynôme caractéristique dét $(A - \lambda I)$, il existe une solution particulière de la forme

$$\widehat{X}(t) = e^{\alpha t}(t^{m+p} Z_{m+p} + \ldots + t Z_1 + Z_0).$$

Il faut cependant remarquer que, contrairement au cas des équations différentielles, le vecteur constant Z_{m+p} peut être nul.

Lorsque le second membre Y est une combinaison de termes $t^{m_K} e^{\alpha_K t} Y_K$ il suffit de chercher les solutions particulières $\widehat{X}_m$ correspondantes. Alors,

$$\widehat{X} = \sum_K \widehat{X}_K.$$

VI. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS.

1° Généralités. — Soit l'équation

$$(E) \qquad y^{(n)} = a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y + f.$$

Les a_k, avec $k = 0, 1, \ldots, n—1$, sont des constantes et f est une fonction continue de la variable réelle $x \in]a, b[$.

En posant

$$y = z_1, \quad y' = z_1' = z_2, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)} = z_n,$$

on vérifie que (E) se met sous la forme équivalente d'un système

$$Z' = AZ + F,$$

où Z est la matrice-colonne (z_j), et A et F sont définies respectivement par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \ \ldots & 0 \\ \hline 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \ldots\ldots & a_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{pmatrix}.$$

Les théorèmes d'existence et d'unicité des solutions d'un système différentiel s'appliquent donc immédiatement ici.

2° Recherche pratique des solutions. — On peut utiliser toutes les techniques relatives aux systèmes différentiels en les adaptant à ce cas particulier.

On cherche des solutions particulières de l'équation homogène du type e^{rx}, r est alors solution de l'équation caractéristique

$$r^n - a_{n-1} r^{n-1} - \ldots - a_0 = 0.$$

Si toutes les racines sont distinctes, $y = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{r_k x}$ est la solution générale.

Si r_k est racine d'ordre m_k, on obtient une solution du type suivant :

$$y_{m_k} = \sum_{j=1}^{m_k} (C_{k,j} x^j) e^{r_k x},$$

alors $\sum_{k=1}^{p} y_{m_k}$ est la solution générale.

Pour l'équation complète, on utilisera la méthode de variation des constantes ou un procédé d'identification à coefficients indéterminés dans le cas de seconds membres du type $x^m e^{\alpha x}$.

EXERCICES DU CHAPITRE 10

10.II.1. **Résolvant $M(t)$.**
◆ *Soit* $X_1(t) = (x_{1,1}(t), \dots, x_{n,1}(t)), \dots, X_n(t) = (x_{1,n}(t), \dots, x_{n,n}(t))$ *un système fondamental de solutions de* $X' = AX$.

1° *Montrer que la solution générale* X *peut s'écrire*

$$X(t) = M(t)\wedge,$$

où $M(t)$ *est l'opérateur caractérisé par la matrice* $M(t) = (x_{i,j}(t))$ *dans la base canonique de* $\mathbb{C}^n$ *et* $\wedge = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *est un vecteur constant de* $\mathbb{C}^n$.

2° *En déduire que* M *satisfait à* $M' = AM$. *L'opérateur* M *est appelé résolvant du système.*

3° *Montrer que la donnée d'un système fondamental de solutions caractérise* A *et cela de façon unique.*

10.III.1. *Déterminer les fonctions* x, y *et* z *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$, *qui vérifient*
◆
(1) $$x' = x+y, \quad y' = -x+2y+z \quad \text{et} \quad z' = x+z.$$

10.III.2. *Déterminer dans* $\mathbb{R}^3$ *la solution générale du système différentiel*
◆
(1) $$x' = 2x+y, \quad y' = y+z \quad \text{et} \quad z' = y+z,$$

en utilisant la méthode du paragraphe III, 2°, a.

10.III.3. *Intégrer le système différentiel*
◆
$$x' = x-2y-2z, \quad y' = 2y+z \quad \text{et} \quad z' = x+y.$$

10.III.4. *En utilisant la méthode exposée au paragraphe III, 2°, a, intégrer le système différentiel*
◆
$$x' = 3x+z, \quad y' = 2x+y+z \quad \text{et} \quad z' = -x+y+z.$$

10.IV.1. *Déterminer les fonctions à valeurs réelles qui vérifient*
◆
$$x' = x+y, \quad y' = -x+2y+z \quad \text{et} \quad z' = x+z.$$

(Voir l'exercice ***10.III.1.****)*

10.V.1. ◆◆◆ *On considère le système différentiel suivant :*

$$(S)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x+z+\sin t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x+y+(1-a^2)z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -x+y+z, \end{cases}$$

où a désigne une constante réelle positive ou nulle.

1° *Trouver la solution générale (sous forme réelle) du système homogène associé à* (S) *pour* $a \neq 0$.

2° *Même question pour* $a = 0$.

3° *Trouver la solution générale de* (S) *pour* $a = 1$.
(Concours E.S.E.R.B., partiel.)

10.V.2. ◆◆ **Problème du double pendule.**
Pour résoudre le problème du double pendule, cas des petites oscillations, on est amené à intégrer le système différentiel suivant :

$$(1) \qquad \begin{cases} 2\alpha''+\beta''+2\mu\alpha = 0, \\ \alpha''+\beta''+\mu\beta \quad = 0, \end{cases}$$

où α et β sont des fonctions inconnues de t et μ est une constante réelle positive ou nulle.

1° *En posant* $\alpha' = \gamma$, $\beta' = \delta$, *ramener* (1) *à un système différentiel du premier ordre à coefficients constants.*

2° *Résoudre le système* (1) *en* α'' *et* β'' *pour le mettre sous la forme* $X'' = AX$ *et intégrer cette équation vectorielle.*

10.V.3. ◆ *Intégrer le système différentiel*

$$(S) \qquad x' = x+e^t, \ y' = y+e^{2t} \ \text{et} \ z' = z+e^{3t},$$

puis le système

$$(S_1) \qquad x' = x+e^t, \ y' = y+x+e^{2t} \ \text{et} \ z' = z+x+e^{3t}.$$

10.V.4. ◆ *Chercher une solution particulière du système différentiel*

$$x' = 3x+z+te^{3t}, \ y' = 2x+y+z \ \text{et} \ z' = -x+y+z.$$

(Pour le système homogène, on se reportera à l'exercice ***10.III.4.****)*

10.V.5. ◆◆ *Intégrer le système différentiel*

$$(S) \qquad \begin{cases} (1) \qquad \dfrac{d^2x}{dt^2}-x+\dfrac{15}{4}\cdot\dfrac{dx}{dt} = e^{2t}, \\ (2) \qquad \dfrac{dx}{dt}+\dfrac{d^2y}{dt^2}+y = 0, \end{cases}$$

1° *en se ramenant dans* $\mathbb{R}^4$ *à un système différentiel du type*

$$\frac{dZ}{dt} = \tilde{A}Z + e^{2t}Z_0 \, ;$$

2° *en cherchant des solutions de l'équation homogène associée sous la forme* $X(t) = e^{rt}V$ *(*V *vecteur constant de* $\mathbb{R}^2$*) ;*

3° *en éliminant* x *(et ses dérivées) entre (1) et (2) pour obtenir une équation différentielle du 4*^e^ *ordre en* y.

10.VI.1. ◆ *Intégrer l'équation différentielle suivante :*

$$y''' - 2y'' + y' - 2y = \sin x.$$

10.VI.2. ◆ *Intégrer l'équation différentielle suivante :*

$$y^{\mathrm{IV}} + 5y'' + 4y = \cos 3x.$$

10.VI.3. ◆◆ *Intégrer l'équation différentielle suivante :*

$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = -(2x-5)\,\mathrm{Log}\, x - \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x}.$$

On utilisera la méthode de variation des constantes.

SOLUTIONS

10.II.1.

1° Puisque l'écriture $X(t) = M(t)\Lambda$ est équivalente à

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda_1 x_{11} + \ldots + \lambda_n x_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \lambda_1 x_{n1} + \ldots + \lambda_n x_{nn} \end{array}\right\} \Leftrightarrow X(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(t),$$

la propriété demandée est immédiate.

2° On a évidemment

$$\frac{dX}{dt} = AX(t), \qquad \text{donc} \qquad M'(t)\Lambda = AM(t)\Lambda, \qquad \forall\Lambda \in \mathbb{C}^n.$$

Donc

$$M'(t) = AM(t).$$

3° A la donnée du système fondamental,

$$X_1(t) = (x_{11}(t), \ldots, x_{n1}(t)), \ \ldots, \ X_n(t) = (x_{n1}(t), \ldots, x_{nn}(t))$$

correspond $M(t) = (x_{ij}(t))$ et, par suite, on en déduit que l'on a $A = M'(t)M^{-1}(t)$, puisque $M^{-1}(t)$ existe. A est donc défini de manière unique.

10.III.1.

Soit

$$X(t) = (x(t), y(t), z(t)) \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit de déterminer la solution générale de

$$\text{(2)} \qquad \frac{dX}{dt} = AX.$$

Les valeurs propres de A sont données par

$$\mathcal{T}(\lambda) \equiv \text{dét}\,(A - \lambda I) = (2 - \lambda)[(1 - \lambda)^2 + 1] = 0,$$

c'est-à-dire

$$r_1 = 2, \qquad r_2 = 1 + i \qquad \text{et} \qquad r_3 = \overline{r_2} = 1 - i.$$

Les valeurs propres étant distinctes, nous utiliserons la méthode indiquée au paragraphe III, 1°. A r_k correspond le vecteur propre $V_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ défini par $(A-r_kI)V_k = 0$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} (1-r_k)\alpha_k + \beta_k = 0, \\ -\alpha_k + (2-r_k)\beta_k + \gamma_k = 0, \\ \alpha_k + (1-r_k)\gamma_k = 0, \end{cases}$$

ce qui donne, par exemple,

$$V_1 = (1, 1, 1), \qquad V_2 = (i, -1, 1), \qquad V_3 = \bar{V}_2 = (-i, -1, 1).$$

On a alors les trois solutions particulières suivantes :

$$X_1(t) = e^{2t}V_1, \qquad X_2(t) = e^{(1+i)t}V_2 \qquad \text{et} \qquad X_3(t) = \bar{X}_2(t) = e^{(1-i)t}V_3,$$

qui forment un *système fondamental de solutions.* (Indépendamment de la théorie, on peut s'assurer que $X_1(t)$, $X_2(t)$ et $X_3(t)$ forment bien une base de $\mathbb{C}^3$. En effet, dét $[X_1(t), X_2(t), X_3(t)] = e^{4t}$ dét $[V_1, V_2, V_3] \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$.)

La solution générale $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de (2) dans $\mathbb{C}^3$ s'écrit donc

$$X(t) = \lambda_1 e^{2t}V_1 + \lambda_2 e^{(1+i)t}V_2 + \lambda_3 e^{(1-i)t}V_3, \tag{3}$$

où les λ_i sont des constantes quelconques $\in C$.

En considérant les composantes, la relation vectorielle (3) nous donne finalement les valeurs suivantes :

$$\begin{cases} x(t) = \lambda_1 e^{2t} + \lambda_2 i e^{(1+i)t} - \lambda_3 i e^{(1-i)t}, \\ y(t) = \lambda_1 e^{2t} - \lambda_2 e^{(1+i)t} - \lambda_3 e^{(1-i)t}, \\ z(t) = \lambda_1 e^{2t} + \lambda_2 e^{(1+i)t} + \lambda_3 e^{(1-i)t}. \end{cases}$$

10.III.2.

Il s'agit de déterminer dans $\mathbb{R}^3$ la solution générale $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de l'équation

$$\frac{dX}{dt} = AX, \qquad \text{où} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) **Méthode générale.**

Ici l'on a

$$\mathcal{P}(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda - 2)^2;$$

$r_1 = 0$ est donc racine simple du polynôme caractéristique de A, tandis que $r_2 = 2$ est racine double.

— **A $r_1 = 0$** correspond en particulier le vecteur propre $V_1 = \left(\frac{1}{2}, -1, 1\right)$ et, par suite, la solution $X_1(t) = V_1 e^{0t} = V_1$.

— **A partir de $r_2 = 2$,** il faut déterminer deux solutions particulières convenables.

Pour ce faire, nous utiliserons la première méthode développée au paragraphe III, 2°.

Il faut déterminer le noyau N de $(A-2I)^2$. Celui-ci est engendré par l'ensemble des $Z = (\alpha, \beta, \gamma)$ tels que $(A-2I)^2 Z = 0$. Il vient alors

$$\left.\begin{aligned} -\beta+\gamma &= 0 \\ 2\beta-2\gamma &= 0 \\ -2\beta+2\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \beta = \gamma.$$

Donc

$$Z = (\alpha, \beta, \gamma) \in N \Leftrightarrow Z = (\alpha, \beta, \beta) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 1);$$

N est bien de dimension 2 et l'on prendra pour base $Z_1 = (1, 0, 0)$ et $Z_2 = (0, 1, 1)$.

Au vecteur Z_1 correspond la solution suivante:

$$X_{2,1}(t) = e^{2t}\left[I + t\frac{(A-2I)}{1!}\right] Z_1 = e^{2t} Z_1.$$

(puisque $(A-2I)Z_1 = 0$).

Au vecteur Z_2 correspond la solution suivante:

$$X_{2,2}(t) = e^{2t}\left[I + t\frac{(A-2I)}{1!}\right] Z_2 = e^{2t} Z_2 + te^{2t} Z_1,$$

car le calcul montre que l'on a

$$(A-2I)Z_2 = Z_1.$$

Finalement, la solution générale est donnée par

$$X(t) = \mu_1 X_1(t) + \mu_2 X_{2,1}(t) + \mu_3 X_{2.2}(t),$$

c'est-à-dire

$$X(t) = \mu_1 V_1 + \mu_2 e^{2t} Z_1 + \mu_3 e^{2t} Z_2 + \mu_3 te^{2t} Z_1.$$

En utilisant les composantes, on obtient

$$\begin{aligned} x &= \frac{\mu_1}{2} + \mu_2 e^{2t} + \mu_3 te^{2t}, \\ y &= -\mu_1 \qquad\qquad + \mu_3 e^{2t} \end{aligned}$$

et

$$z = \mu_1 \qquad\qquad + \mu_3 e^{2t}.$$

b) **Méthode particulière s'adaptant au système considéré.** — (Utilisation d'intégrales premières.)

De (1), on déduit que l'on a

$$y' + z' = 2(y+z) \qquad \text{et} \qquad y' = z'$$

et, par suite,

$$\left\{\begin{aligned} & y'+z' = 2(y+z) \Leftrightarrow [y+z]' = 2[y+z] \Leftrightarrow y+z = \lambda_1 e^{2t}, \\ & y' = z' \Leftrightarrow y-z = \lambda_2, \end{aligned}\right.$$

où λ_1 et λ_2 sont des constantes réelles.

Donc

$$y = \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1}{2} e^{2t} \qquad \text{et} \qquad z = \frac{\lambda_1}{2} e^{2t} - \frac{\lambda_2}{2}.$$

Pour déterminer la fonction x il suffit alors de remarquer qu'elle est solution de l'équation différentielle suivante :

$$x' = 2x + \frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_1}{2} e^{2t},$$

et l'on obtient

$$x = \lambda_3 e^{2t} + \frac{\lambda_1}{2} te^{2t} - \frac{\lambda_2}{4}.$$

On retrouve bien la solution générale précédente en posant

$$\lambda_1 = 2\mu_3, \qquad \lambda_2 = -2\mu_1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_3 = \mu_2.$$

10.III.3.

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

on en déduit que l'on a

$$\mathcal{P}(\lambda) \equiv \text{dét}\,(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)^3,$$

donc $r_1 = 1$ est *racine triple.*

Utilisons la première méthode indiquée au paragraphe III, 2°.

Soit N le noyau de l'opérateur $(A-I)^3$. Pour déterminer N, on pourrait chercher les vecteurs $Z = (\alpha, \beta, \gamma)$ vérifiant $(A-I)^3 Z = 0$. En fait, ici cela est inutile. En effet, on a

$$\text{dimension de } N = \text{ordre de multiplicité de } r_1 = 3;$$

N est un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{R}^3$ et, par suite, $N = \mathbb{R}^3$.

Pour avoir une base de N, il suffit donc de prendre la base canonique de $\mathbb{R}^3$ ainsi définie :

$$Z_1 = (1, 0, 0), \qquad Z_2 = (0, 1, 0) \qquad \text{et} \qquad Z_3 = (0, 0, 1).$$

A chaque vecteur Z_i correspond une solution définie par

$$X_i(t) = e^t \left[I + t\frac{A-I}{1!} + t^2 \frac{(A-I)^2}{2!} \right] Z_i.$$

La solution générale $X(t) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i X_i(t)$ (λ_i est une constante) peut donc s'écrire ainsi :

$$X(t) = e^t \left[I + t\frac{A-I}{1!} + t^2 \frac{(A-I)^2}{2!} \right] (\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3).$$

Or

$$\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3 = \Lambda, \qquad \text{ou} \qquad \Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3),$$

donc

$$X(t) = e^t \left[I + t\,\frac{A-I}{1!} + t^2\,\frac{(A-I)^2}{2!} \right] \Lambda,$$

ou encore, matriciellement,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} 1-t^2, & -2t+t^2, & -2t \\ \dfrac{t^2}{2}, & 1+t+t^2, & t \\ t-\dfrac{t^2}{2}, & t-t^2, & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix},$$

d'où l'on déduit évidemment

$$\begin{cases} x = \lambda_1 e^t\,(1-t^2) + \lambda_2 e^t(-2t+t^2) + \lambda_3 e^t(-2t), \\ y = \lambda_1 e^t \left(\dfrac{t^2}{2}\right) + \lambda_2 e^t(1+t+t^2) + \lambda_3 e^t(1-t), \\ z = \lambda_1 e^t \left(t - \dfrac{t^2}{2}\right) + \lambda_2 e^t(t-t^2) + \lambda_3 e^t(1-t), \end{cases}$$

avec

$$\lambda_k \in \mathbb{C} \quad \text{si} \quad x,\ y \text{ et } z \text{ appliquent } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{C}$$

et

$$\lambda_k \in \mathbb{R} \quad \text{si} \quad x,\ y \text{ et } z \text{ appliquent } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}.$$

10.III.4.

Soit A la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

alors

$$\mathcal{T}(\lambda) \equiv \text{dét}\,(A - \lambda I) = (3-\lambda)(1-\lambda)^2$$

et l'on a deux valeurs propres : $r_1 = 3$ et $r_2 = 1$, cette dernière étant racine double du polynôme caractéristique.

— **A** $r_1 = 3$ correspond le vecteur propre $V_1 = (1, 1, 0)$.

— **A** $r_2 = 1$ correspond le vecteur propre $V_2 = (1, 1, -2)$.

Complétons la base de $\mathbb{C}^3$ (ou $\mathbb{R}^3$) avec $W_3 = (1, 0, 0)$, ce qui est licite puisque dét $(V_1, V_2, W_3) \neq 0$. On a alors

$$A(V_1) = 3\,V_1, \qquad A(V_2) = V_2 \qquad \text{et} \qquad A(W_3) = (3, 2, -1) = \frac{3}{2} V_1 + \frac{V_2}{2} + W_3.$$

Dans la nouvelle base V_1, V_2, W_3, l'*opérateur* A est donc représenté par la matrice

$$B = \begin{array}{c} \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A(V_1) & A(V_2) & A(W_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Remarque. — On peut aussi déterminer B en écrivant $B = P^{-1}AP$, où P est la matrice de passage telle que $(e_1, e_2, e_3) \to (V_1, V_2, W_3)$, e_1, e_2, e_3 désignant la base canonique

$$e_1 = (1, 0, 0), \qquad e_2 = (0, 1, 0) \qquad \text{et} \qquad e_3 = (0, 0, 1).$$

Ici l'on a donc

$$P = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} V_1 & V_2 & W_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

Le vecteur $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$ étant représenté par la matrice colonne $\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}(t) \\ \tilde{y}(t) \\ \tilde{z}(t) \end{pmatrix}$ dans la nouvelle base V_1, V_2, W_3, on a la relation matricielle

$$\tilde{X}' = B\tilde{X},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \tilde{x}' = 3\tilde{x} + \frac{3}{2}\tilde{z}, \\ \tilde{y}' = \tilde{y} + \frac{1}{2}\tilde{z}, \\ \tilde{z}' = \tilde{z}. \end{cases}$$

La dernière relation entraîne que l'on a

$$\tilde{z} = \lambda_1 e^t$$

(λ_1 étant une constante).

La seconde relation s'écrit alors

$$\tilde{y}' = \tilde{y} + \frac{\lambda_1}{2} e^t \Leftrightarrow \tilde{y} = \lambda_2 e^t + \frac{\lambda_1}{2} te^t$$

(λ_2 étant une constante).

Enfin, la première égalité donne

$$\tilde{x}' = 3\tilde{x} + \frac{3}{2}\lambda_1 e^t \Leftrightarrow \tilde{x} = \lambda_3 e^{3t} - \frac{3}{4}\lambda_1 e^t$$

(λ_3 étant une constante).

De la relation matricielle suivante :

$$X = P\tilde{X} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix},$$

on déduit alors x, y et z :

$$\begin{cases} x = +\dfrac{\lambda_1}{4}e^t + \dfrac{\lambda_1}{2}te^t + \lambda_2 e^t + \lambda_3 e^{3t}, \\ y = -\dfrac{3\lambda_1}{4}e^t + \dfrac{\lambda_1}{2}te^t + \lambda_2 e^t + \lambda_3 e^{3t}, \\ z = -\lambda_1 te^t - 2\lambda_2 e^t. \end{cases}$$

10.IV.1.

a) **Plaçons-nous d'abord dans $\mathbb{C}^3$.**

Compte tenu de l'exercice **10.III.1.**, on sait que les vecteurs

$$X_1(t) = e^{2t}V_1, \qquad X_2(t) = e^{(1+i)t}V_2 \qquad \text{et} \qquad X_3(t) = \bar{X}_2(t) = e^{(1-i)t}V_3$$

où

$$V_1 = (1, 1, 1), \qquad V_2 = (i, -1, 1) \qquad \text{et} \qquad V_3 = \bar{V}_2 = (-i, -1, 1).$$

constituent un système fondamental de solutions dans $\mathbb{C}^3$.

b) Pour obtenir un système fondamental de solutions dans $\mathbb{R}^3$ il suffit de substituer aux solutions $X_2(t)$ et $X_3(t)(= \bar{X}_2(t))$ les solutions $\mathfrak{Re}X_2(t)$ et $\mathfrak{I}X_2(t)$.

Calcul de $\mathrm{R_e}X_2(t)$ et $\mathfrak{I}X_2(t)$.

V_2 peut s'écrire

$$V_2 = W_1 + iW_2, \qquad \text{où} \qquad W_1 \quad \text{et} \quad W_2 \in \mathbb{R}^3.$$

Plus précisément, $W_1 = (0, -1, 1)$ et $W_2 = (1, 0, 0)$.
Donc

$$X_2(t) = e^t(\cos t + i\sin t)(W_1 + iW_2)$$

et, par suite, on en déduit

$$\begin{cases} \mathfrak{Re}X_2(t) = e^t\cos tW_1 - e^t\sin tW_2, \\ \mathfrak{I}X_2(t) = e^t\sin tW_1 + e^t\cos tW_2. \end{cases}$$

La solution générale de (2) *dans* $\mathbb{R}^3$ *s'écrit donc*

(3) $\quad X(t) = \mu_1 e^{2t}V_1 + \mu_2(e^t\cos tW_1 - e^t\sin tW_2) + \mu_3(e^t\sin tW_1 + e^t\cos tW_2),$

où les μ_i sont des constantes quelconques $\in \mathbb{R}$.

En considérant les composantes, la relation vectorielle (3) nous donne finalement

$$\begin{cases} x(t) = \mu_1 e^{2t} - \mu_2 e^t\sin t + \mu_3 e^t\cos t, \\ y(t) = \mu_1 e^{2t} - \mu_2 e^t\cos t - \mu_3 e^t\sin t, \\ z(t) = \mu_1 e^{2t} + \mu_2 e^t\cos t + \mu_3 e^t\sin t. \end{cases}$$

10.V.1.

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1-a^2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

on a alors

$$\mathcal{J}(\lambda) = \text{dét}\,(A-\lambda I) = (3-\lambda)[(1-\lambda)^2+a^2].$$

1° **Pour** $a \neq 0$, les valeurs propres sont distinctes et l'on a

$$r_1 = 3, \qquad r_2 = 1+ia \qquad \text{et} \qquad r_3 = \bar{r}_2 = 1-ia.$$

— **A** $r_1 = 3$ correspond le vecteur propre $V_1 = (1, 1, 0)$.
— **A** $r_2 = 1+ia$ correspond le vecteur propre $V_2 = (1, 1-a^2-2ia, ia-2)$.
Enfin, à r_3 $(= \bar{r}_2)$ on peut faire correspondre $V_3 = \bar{V}_2$.
On obtient ainsi dans $\mathbb{C}^3$ le système fondamental de solutions suivant :

$$X_1(t) = e^{3t}V_1, \qquad X_2(t) = e^{(1+ia)t}V_2 \qquad \text{et} \qquad X_3(t) = \bar{X}_2(t) = e^{(1-ia)t}\bar{V}_2.$$

A $X_2(t)$ et $X_3(t)$, *substituons* $\mathcal{R}_eX_2(t)$ et $\mathfrak{I}X_2(t)$. On obtient alors dans $\mathbb{R}^3$ le système fondamental de solutions suivant :

$$X_1(t), \qquad \mathcal{R}_eX_2(t), \qquad \mathfrak{I}X_2(t).$$

Calcul de $\mathcal{R}eX_2(t)$ et $\mathfrak{I}X_2(t)$.
On a

$$V_2 = W_1 + iaW_2 = (1, 1-a^2, -2) + ia(0, -2, 1), \quad \text{où} \quad W_1 \text{ et } W_2 \in \mathbb{R}^3.$$

Donc

$$X_2(t) = e^t(\cos at + i\sin at)(W_1 + iaW_2),$$

d'où l'on déduit

$$\begin{cases} \mathcal{R}_eX_2(t) = e^t(\cos at\, W_1 - a\sin at\, W_2), \\ \mathfrak{I}X_2(t) = e^t(\sin at\, W_1 + a\cos at\, W_2). \end{cases}$$

En écrivant la solution générale $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$, de l'équation homogène associée à (S) sous la forme

$$X(t) = \mu_1X_1(t) + \mu_2\mathcal{R}_eX_2(t) + \mu_3\mathfrak{I}X_2(t),$$

où les μ_i sont des constantes réelles, on obtient les composantes suivantes :

$$\begin{cases} x = \mu_1e^{3t} + e^t(\mu_2\cos at + \mu_3\sin at), \\ y = \mu_1e^{3t} + (1-a^2)e^t(\mu_2\cos at + \mu_3\sin at) - 2ae^t(-\mu_2\sin at + \mu_3\cos at), \\ z = -2e^t(\mu_2\cos at + \mu_3\sin at) + ae^t(-\mu_2\sin at + \mu_3\cos at). \end{cases}$$

2° Pour $a = 0$, on a toujours $r_1 = 3$, mais $r_2 = 1$ est racine double du polynôme caractéristique.

— **A** $r_1 = 3$ correspond la solution $X_1(t) = e^{3t}V_1$, avec $V_1 = (1, 1, 0)$.

— **A** $r_2 = 1$, nous devons faire correspondre deux solutions convenables.

Pour cela, utilisons, par exemple, la première méthode exposée au paragraphe III, 2°.

Soit N le noyau de l'opérateur $(A-I)^2$, on a

$$Z = (\alpha, \beta, \gamma) \in N \Leftrightarrow 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0;$$

$Z \in N$ est donc de la forme

$$(\alpha, -3\alpha - 2\gamma, \gamma) = \alpha(1, -3, 0) + \gamma(0, -2, 1).$$

et l'on peut prendre pour base de N

$$Z_1 = (1, -3, 0) \qquad \text{et} \qquad Z_2 = (0, -2, 1).$$

— A Z_i $(i = 1, 2)$ correspond alors la solution suivante :

$$X_i(t) = e^t \left[I + t\frac{A-I}{1!}\right] Z_i.$$

La solution générale $X(t)$, mise sous la forme $X(t) = \sum_{i=1}^{3} \nu_i X_i(t)$, s'écrit

$$X(t) = \nu_1 X_1(t) + e^t \left[I + t\frac{A-I}{1!}\right] (\nu_2 Z_1 + \nu_3 Z_2),$$

c'est-à-dire matriciellement

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \nu_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1+2t & 0 & t \\ 2t & 1 & t \\ -t & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_2 \\ -3\nu_2 - 2\nu_3 \\ \nu_3 \end{pmatrix},$$

d'où résultent les expressions de x, y et z.

Remarque. — Revenons à l'étude de la question 1° qui correspond à $a \neq 0$.

On sait que $X_1(t)$, $\mathcal{R}_e X_2(t)$ et $\frac{1}{a}\mathcal{I} X_2(t)$ forment un système fondamental de solutions et l'on obtient par passage à la limite, pour $a \to 0_+$,

$$X_1(t), \; e^t W_1(0) \qquad \text{et} \qquad e^t(tW_1 + W_2)$$

qui constituent un système fondamental de solutions pour $a = 0$.

On voit là apparaître une méthode de résolution dans le cas de racines multiples par l'introduction d'un petit paramètre.

Si l'on écrit la solution générale $X(t)$ sous la forme suivante :

$$X(t) = \mu_1 X_1(t) + \mu_2 e^t W(0) + \mu_3 e^t (tW(0) + W_2),$$

on a évidemment

$$\mu_1 = \nu_1, \qquad \mu_2 = \nu_2, \qquad \mu_3 = 2\nu_2 + \nu_3.$$

(*Voir aussi exercice III*, 4., avec $\lambda_1 = 4\nu_2 + 2\nu_3$, $\lambda_2 = -\frac{\nu_3}{2}$ et $\lambda_3 = \nu_1$.)

3° Recherche de la solution de l'équation non homogène.
Il suffit de chercher une solution particulière du système

$$(S_1) \qquad \begin{cases} x' = 3x+z-ie^{it}, \\ y' = 2x+y, \\ z' = -x+y+z. \end{cases}$$

En prenant la partie réelle des solutions trouvées on aura alors une solution particulière du système (S) pour $a = 1$.
La solution particulière est de la forme

$$x = \lambda e^{it}, \qquad y = \mu e^{it} \qquad \text{et} \qquad z = \gamma e^{it}.$$

Dans ces conditions, le système (S_1) entraîne que l'on a

$$\begin{cases} (3-i)\lambda + \nu = i, \\ 2\lambda + (1-i)\mu = 0, \\ -\lambda + \mu + (1-i)\nu = 0, \end{cases}$$

d'où l'on obtient, par des calculs élémentaires,

$$\lambda = \frac{1+7i}{25}, \qquad \mu = \frac{6-8i}{25} \qquad \text{et} \qquad \nu = \frac{i-2}{5}.$$

Alors,

$$\begin{cases} x = \mathfrak{R}_e\left(\dfrac{1+7i}{25}e^{it}\right) = \dfrac{\cos t - 7\sin t}{25}, \\ y = \mathfrak{R}_e\left(\dfrac{6-8i}{25}e^{it}\right) = \dfrac{6\cos t + 8\sin t}{25}, \\ z = \mathfrak{R}_e\left(\dfrac{i-2}{5}e^{it}\right) = \dfrac{-2\cos t - \sin t}{5}, \end{cases}$$

est une solution particulière de (S), d'où l'on déduit la solution générale de (S) en ajoutant cette solution à la solution générale du système homogène.

10.V.2.

1° En posant $\alpha' = \gamma$ et $\beta' = \delta$, on obtient

$$\begin{cases} \alpha' = 0+0+\gamma+0, \\ \beta' = 0+0+0+\delta, \\ \gamma' = -2\mu\alpha + \mu\beta + 0 + 0, \\ \delta' = 2\mu\alpha - 2\mu\beta + 0 + 0. \end{cases}$$

Dans $\mathbb{C}^4$, on a donc $\tilde{X}' = \tilde{A}\tilde{X}$, avec

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2\mu & \mu & 0 & 0 \\ 2\mu & -2\mu & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \tilde{X} = (\alpha, \beta, \gamma, \delta).$$

2° En résolvant (1) on obtient

$$\alpha'' = -2\mu\alpha + \mu\beta, \qquad \beta'' = 2\mu\alpha - 2\mu\beta$$

et par suite, dans $\mathbb{C}^2$,

$$(2) \qquad X'' = -\mu AX, \qquad \text{avec} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad X = (\alpha, \beta).$$

A admet deux valeurs propres $r_1 = 2 + \sqrt{2}$ et $r_2 = 2 - \sqrt{2}$.

— **A** r_1 correspond le vecteur propre $V_1 = (1, -\sqrt{2})$.

— **A** r_2 correspond le vecteur propre $V_2 = (1, \sqrt{2})$.

On cherche alors des solutions de la forme $e^{at}V_i$ (a est une constante $\in \mathbb{C}$).
On obtient alors en reportant dans (2),

$$a^2 = -\mu r_i = -\omega^2 r_i, \qquad i = 1, 2$$

ce qui donne les quatre solutions suivantes :

$$X_1(t) = e^{i\omega\sqrt{2+\sqrt{2}}t}\, V_1, \qquad X_2(t) = \bar{X}_1(t) = e^{-i\omega\sqrt{2+\sqrt{2}}t}\, V_1,$$
$$X_3(t) = e^{i\omega\sqrt{2-\sqrt{2}}t}\, V_2 \quad \text{et} \quad X_4(t) = \bar{X}_3(t) = e^{-i\omega\sqrt{2-\sqrt{2}}t}\, V_2.$$

La solution générale dans $\mathbb{C}^2$ est alors donnée par

$$X(t) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i X_i(t) \quad (\lambda_i \text{ sont des constantes} \in \mathbb{C}).$$

Pour obtenir la solution générale dans $\mathbb{R}^2$ on substitue à

$X_1(t)$ et $X_2(t) = \bar{X}_1(t)$ les deux solutions $\mathfrak{R}_e X_1(t)$ et $\mathfrak{I} X_1(t)$

et à

$X_3(t)$ et $X_4(t) = \bar{X}_3(t)$ les deux solutions $\mathfrak{R}_e X_3(t)$ et $\mathfrak{I} X_3(t)$.

La solution générale est alors donnée par

$$X(t) = \mu_1 \cos\left(\omega\sqrt{2+\sqrt{2}}t\right) V_1 + \mu_2 \sin\left(\omega\sqrt{2+\sqrt{2}}t\right) V_1$$
$$+ \mu_3 \cos\left(\omega\sqrt{2-\sqrt{2}}t\right) V_2 + \mu_4 \sin\left(\omega\sqrt{2-\sqrt{2}}t\right) V_2,$$

où les μ_i sont des constantes réelles, c'est-à-dire que l'on a

$$x = \mu_1 \cos\left(\omega\sqrt{2+\sqrt{2}}t\right) + \mu_2 \sin\left(\omega\sqrt{2+\sqrt{2}}t\right)$$
$$+ \mu_3 \cos\left(\omega\sqrt{2-\sqrt{2}}t\right) + \mu_4 \sin\left(\omega\sqrt{2-\sqrt{2}}t\right)$$

et

$$y = -\sqrt{2}\mu_1 \cos\left(\omega\sqrt{2+\sqrt{2}}t\right) - \sqrt{2}\mu_2 \sin\left(\omega\sqrt{2+\sqrt{2}}t\right)$$
$$+ \sqrt{2}\mu_3 \cos\left(\omega\sqrt{2-\sqrt{2}}t\right) + \sqrt{2}\mu_4 \sin\left(\omega\sqrt{2-\sqrt{2}}t\right).$$

Remarque. — Le problème se pose de savoir si l'on avait bien, avec $X_1(t), \ldots, X_4(t)$, un système fondamental de solutions. Pour cela on fait correspondre (cf. la question 1°) à $X_i(t) = (\alpha_i(t), \beta_i(t))$ le vecteur $Z_i(t) = (\alpha_i(t), \beta_i(t), \gamma_i(t), \delta_i(t)) = (\alpha_i, \beta_i, \alpha_i', \beta_i')$ et il reste à s'assurer que les vecteurs $Z_i(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$, sont linéairement indépendants. (Prendre $t = 0$, par exemple.)

10.V.3.

1° Le système (S) n'est en fait que trois équations différentielles linéaires indépendantes.

Elles s'intègrent immédiatement. On obtient

$$\begin{cases} x = \lambda_1 e^t + te^t, \\ y = \lambda_2 e^t + e^{2t}, \\ z = \lambda_3 e^t + \dfrac{1}{2} e^{3t}. \end{cases}$$

On remarque que 1 est valeur propre triple de la matrice I; cependant on n'obtient pas de solutions particulières en $(at^3 + bt^2 + ct)e^t$, et ceci illustre la remarque du paragraphe V, 2°.

Dans le cas d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, lorsque le second membre comporte un terme du type $e^{\alpha t}$, où α est racine d'ordre p de l'équation caractéristique, il se produit, suivant la terminologie employée en Physique, un *phénomène de résonance*. Ce phénomène est caractérisé par l'existence d'une solution particulière du type

$$(a_p t^p + \dots)e^{\alpha t}, \qquad a_p \neq 0.$$

On constate qu'il n'en est pas nécessairement de même pour un système différentiel, qui traduit en général des propriétés de *couplage* et le phénomène de résonance qui a toujours lieu n'entraîne cependant pas $a_p \neq 0$, précisément à cause de la manière dont ce couplage intervient.

Ainsi le système (S) composé de trois équations indépendantes n'est pas un système d'équations couplées, d'où l'explication du résultat.

2° La première équation de (S_1) est identique à la première équation de (S), d'où la solution suivante :

$$x = \lambda_1 e^t + te^t.$$

On obtient donc le système de deux équations :

(1) $$y' = y + e^{2t} + te^t + \lambda_1 e^t,$$

(2) $$z' = z + e^{3t} + te^t + \lambda_1 e^t.$$

Alors

$$y = \lambda_2 e^t + u \qquad \text{et} \qquad z = \lambda_3 e^t + v,$$

où u et v sont des solutions particulières respectives de (1) et de (2).

Cherchons u et v sous la forme suivante :

$$\begin{cases} u = e^{2t} + (at^2 + bt)e^t, \\ v = \dfrac{1}{2} e^{3t} + (a't^2 + b't)e^t. \end{cases}$$

En reportant dans (1) et (2) et en identifiant on trouve

$$a = \frac{1}{2}, \qquad b = \lambda_1 \qquad \text{et} \qquad a' = \frac{1}{2}, \qquad b' = \lambda_1,$$

résultat prévisible puisque les deux équations ne diffèrent que par les termes e^{2t} et e^{3t}, d'où la solution

$$\begin{cases} x = \lambda_1 e^t + te^t, \\ y = \lambda_1 te^t + \lambda_2 e^t + \dfrac{t^2}{2} e^t + e^{2t}, \\ z = \lambda_1 te^t + \lambda_3 e^t + \dfrac{t^2}{2} e^t + \dfrac{1}{2} e^{3t}. \end{cases}$$

La présence de x dans les deux dernières équations du système traduit la propriété de couplage et l'on voit le terme en $t^2 e^t$ du phénomène de résonance correspondant.

10.V.4.

Le système s'écrit

(1) $$X' = AX + te^{3t} Y,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nous emploierons successivement la méthode d'identification, puis celle de variation des constantes.

Méthode d'identification.

Puisque 3 est racine simple du polynôme caractéristique, on sait qu'il existe une solution particulière $\widehat{X}$ de la forme

$$\widehat{X}(t) = e^{3t}(Z_0 + tZ_1 + t^2 Z_2).$$

En reportant dans (1), on obtient

(2) $$\begin{cases} Z_1 = (A - 3I)Z_0, \\ 2Z_2 = (A - 3I)Z_1 + Y, \\ (A - 3I)Z_2 = 0 \end{cases}$$

ceci en identifiant respectivement les coefficients constants, ceux de t et de t^2.

On déduit de (2) la relation suivante :

$$(A - 3I)^3 Z_0 + (A - 3I)Y = 0,$$

avec

$$(A - 3I)Y = (0, 2, -1).$$

Posons $Z_0 = (\alpha, \beta, \gamma)$; on vérifie que l'on a

$$(A - 3I)^3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ 12 & -12 & 4 \\ -12 & 12 & -8 \end{pmatrix}.$$

On en déduit alors

$$\begin{cases} \alpha-\beta+\gamma=0, \\ 6\alpha-6\beta+2\gamma=-1, \\ -12\alpha+12\beta-8\gamma=1. \end{cases}$$

(Système d'équations compatibles, d'après la théorie.)

On peut choisir $\alpha=0$, $\beta=\frac{1}{4}$ et $\gamma=\frac{1}{4}$, puisque $\beta=\alpha+\frac{1}{4}$ et $\gamma=\frac{1}{4}$ d'où l'on déduit

$$\begin{cases} Z_0=\frac{1}{4}(0, 1, 1), \\ Z_1=\frac{1}{4}(1, -1, -1), \\ Z_2=\frac{1}{8}(3, 3, 0). \end{cases}$$

On a donc la solution particulière suivante :

$$\begin{cases} \widehat{x}=\left(\frac{t}{4}+\frac{3t^2}{8}\right)e^{3t}, \\ \widehat{y}=\left(\frac{1}{4}-\frac{t}{4}+\frac{3t^2}{8}\right)e^{3t}, \\ \widehat{z}=\left(\frac{1}{4}-\frac{t}{4}\right)e^{3t}. \end{cases}$$

Méthode de variation des constantes.

En se reportant à l'exercice **10.III.4.** on voit que la solution générale de l'équation homogène s'écrit

$$\begin{cases} x=\lambda_1\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\right)e^t+\lambda_2e^t+\lambda_3e^{3t}, \\ y=\lambda_1\left(\frac{t}{2}-\frac{3}{4}\right)e^t+\lambda_2e^t+\lambda_3e^{3t}, \\ z=-\lambda_1te^t-2\lambda_2e^t, \end{cases}$$

soit $X=M(t)\Lambda$, avec

$$M(t)=e^t\begin{pmatrix} \frac{t}{2}+\frac{1}{4} & 1 & e^{2t} \\ \frac{t}{2}-\frac{3}{4} & 1 & e^{2t} \\ -t & -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

On considère maintenant Λ comme une fonction U de la variable t, alors

$$X'=M(t)U'+M'(t)U$$

d'où, en reportant dans (1), on déduit (cf. § V, 1°)

$$M(t)U'=te^{3t}Y,$$

soit

$$\begin{pmatrix} \frac{t}{2}+\frac{1}{4} & 1 & e^{2t} \\ \frac{t}{2}-\frac{3}{4} & 1 & e^{2t} \\ -t & -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix}=te^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{4}\right) u_1' + u_2' + e^{2t}u_3' = te^{2t}, \\ \left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{3}{4}\right) u_1' + u_2' + e^{2t}u_3' = 0, \\ -tu_1' - 2u_2' = 0. \end{cases}$$

Les deux premières équations donnent

$u_1' = te^{2t}$, soit $u_1 = \left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{4}\right) e^{2t} + \text{Cte} = u(t) + \lambda_1$, avec $u(t) = \left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{4}\right) e^{2t}$,

puis $u_2' = -\dfrac{t}{2}u_1' = -\dfrac{t^2}{2}e^{2t}$ entraîne que l'on a

$$u_2 = v(t) + \lambda_2, \qquad \text{avec} \qquad v(t) = -\frac{2t^2-2t+1}{8}e^{2t}.$$

Enfin,

$$u_3' = \frac{3}{4}e^{-2t}u_1' = \frac{3}{4}t \Rightarrow u_3 = w(t) + \lambda_3, \qquad \text{avec} \qquad w(t) = \frac{3t^2}{8}.$$

On obtient donc la solution particulière suivante :

$$\widehat{X} = M(t)\,U(t), \text{ où } U(t) = (u(t), v(t), w(t)),$$

c'est-à-dire

$$\widehat{X} = e^{3t} \begin{pmatrix} \dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{4} & 1 & e^{2t} \\ \dfrac{t}{2}-\dfrac{3}{4} & 1 & e^{2t} \\ -t & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{4} \\ -\dfrac{2t^2-2t+1}{8} \\ \dfrac{3}{8}t^2e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Le calcul de ce produit donne alors

$$\begin{cases} \widehat{x} = \left(\dfrac{3}{8}t^2 + \dfrac{t}{4} - \dfrac{3}{16}\right) e^{3t}, \\ \widehat{y} = \left(\dfrac{3}{8}t^2 - \dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{16}\right) e^{3t}, \\ \widehat{z} = \left(-\dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{4}\right) e^{3t}. \end{cases}$$

On remarque que cette solution se déduit de la solution trouvée par la première méthode en ajoutant le vecteur $\dfrac{3}{16}e^{3t}$ (1, 1, 0), qui est une solution de l'équation homogène.

10.V.5.

1° A $X(t) = (x(t), y(t))$, faisons correspondre $Z(t) = (x(t), y(t), z(t), u(t)) \in \mathbb{R}^4$, avec $z(t) = x'(t)$ et $u(t) = y'(t)$. On a alors

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = . \quad\quad z \quad . \\ y' = . \quad\quad . \quad u, \\ z' = x \quad . \quad . \quad -\dfrac{15}{4}u + e^{2t} \\ u' = . \quad -y - z \quad . \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dZ}{dt} = \tilde{A}Z + e^{2t}Z_0, \qquad \text{si} \qquad Z_0 = (0, 0, 1, 0).$$

Pour intégrer cette équation il suffit de déterminer la solution générale de $\dfrac{dZ}{dt} = \tilde{A}Z$, puis de chercher une solution particulière $\widehat{Z}$, sous la forme

$$\widehat{Z}(t) = e^{2t}(t\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_0),$$

(où $\tilde{Z}_1$ et $\tilde{Z}_0$ sont des constantes $\in \mathbb{R}^4$) en procédant par identification.

Remarquons qu'un système fondamental de solutions de l'équation homogène $\dfrac{dZ}{dt} = \tilde{A}Z$ sera composé de quatre solutions $Z_i(t)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, donc

$$(3) \qquad Z(t) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i Z_i(t) + \widehat{Z}(t),$$

où les λ_i sont des constantes réelles.

– A $Z(t) = (x, y, x', y')$ correspond $X(t) = (x, y)$.
– A $Z_i(t) = (x_i, y_i, x_i', y_i')$ correspond $X_i(t) = (x_i, y_i)$.
– A $\widehat{Z}(t) = (\widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{x'}, \widehat{y'})$ correspond $\widehat{X}(t) = (\widehat{x}, \widehat{y})$.

Donc, on a l'équivalence suivante :

$$(3) \Leftrightarrow X(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i(t) + \widehat{X}(t)$$

qui détermine la solution générale de (S).
Les calculs ne seront pas développés ici.

2° Le système (S) peut s'écrire

$$(4) \qquad X'' + BX' + CX = e^{2t}Y_0,$$

où

$$X = (x(t), y(t)), \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{15}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il existe donc des solutions de l'équation homogène associée à (4) sous la forme $X = e^{rt}V$, où $V = (a, b)$ est une constante appartenant à $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire

$$x = e^{rt}a \qquad \text{et} \qquad y = e^{rt}b.$$

a) **Déterminons la solution générale de l'équation homogène associée à (S).**

Par identification, on obtient

$$\begin{cases} a(r^2-1)+b\dfrac{15}{4}r = 0, \\ ar+b(r^2+1) = 0. \end{cases}$$

On aura donc des solutions non nulles pour

$$\begin{vmatrix} r^2-1 & \dfrac{15}{4}r \\ r & r^2+1 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire

$$r_1 = 2, \qquad r_2 = -2, \qquad r_3 = \frac{i}{2} \qquad \text{et} \qquad r_4 = -\frac{i}{2}.$$

— A r_1 correspond la solution $X_1(t) = e^{2t}V_1$, où $V_1 = (5, -2)$.
— A r_2 correspond la solution $X_2(t) = e^{-2t}V_2$, où $V_2 = (5, 2)$.
— A r_3 correspond la solution $X_3(t) = e^{i\frac{t}{2}}V_3$, où $V_3 = (3, -2i)$.
— A $r_4 = \bar{r}_3$ correspond la solution $X_4(t) = \bar{X}_3(t) = e^{-i\frac{t}{2}}V_4$, avec $V_4 = \bar{V}_3 = (3, 2i)$.

Dans $\mathbb{C}^2$ la solution générale $X(t) = (x(t), y(t))$ du système homogène associé à (S) est donc de la forme

$$X(t) = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i X_i(t),$$

où les λ_i sont des constantes appartenant à $\mathbb{C}$.

Pour obtenir la solution générale dans $\mathbb{R}^2$, il suffit de substituer $\mathfrak{R}_e X_3(t)$ et $\mathfrak{I} X_3(t)$ à $X_3(t)$ et $X_4(t) = \bar{X}_3(t)$; on obtient alors

$$X(t) = \mu_1 X_1(t) + \mu_2 X_2(t) + \mu_3 \mathfrak{R}_e X_3(t) + \mu_4\, \mathfrak{I} X_3(t).$$

Calcul de $\mathfrak{R}$e X_3 et $\mathfrak{I}X_3(t)$.

On a
$$X_3(t) = \left(\cos\frac{t}{2} + i\sin\frac{t}{2}\right)(W_1 + iW_2),$$

si l'on pose $\qquad W_1 = (3, 0) \qquad$ et $\qquad W_2 = (0, -2)$.

Donc

$$\begin{cases} \mathfrak{R}_e X_3(t) = \cos\dfrac{t}{2}W_1 - \sin\dfrac{t}{2}W_2, \\[2mm] \mathfrak{I} X_3(t) = \sin\dfrac{t}{2}W_1 + \cos\dfrac{t}{2}W_2. \end{cases}$$

b) **Il reste à déterminer une solution particulière $\widehat{X}$ de (S) c'est-à-dire de (4).**

Cette solution particulière doit être de la forme

$$\widehat{X}(t) = e^{rt}(t\tilde{X}_1 + \tilde{X}_0)$$

($\tilde{X}_1$ et $\tilde{X}_0$ sont des constantes réelles) puisque 2 est racine simple du polynôme caractéristique $\mathfrak{T}(\lambda)$. Elle s'obtient par identification.

3° *a*) $(2) \Rightarrow x'' = -y^{(3)} - y'$,

$$(1) \Rightarrow (5)\ (-y^{(3)} - y') + \frac{15}{4} y' - x = e^{2t}.$$

En dérivant (5) et compte tenu de (2), on obtient

$$(6) \qquad y^{(4)} - \frac{15}{4} y'' - y = -2e^{2t}.$$

b) L'équation caractéristique associée à (6), $r^4 - \frac{15}{4} r^2 - 1 = 0$, admet pour racines $2, -2, \frac{i}{2}, -\frac{i}{2}$. La solution générale de l'équation homogène associée à (4) est donc

$$y(t) = \lambda_1 e^{2t} + \lambda_2 e^{-it} + \lambda_3 \cos \frac{t}{2} + \lambda_3 \sin \frac{t}{2}.$$

2 étant racine simple de l'équation caractéristique, (4) admet une solution particulière de la forme kte^{2t}. Par identification on obtient $k = -\frac{2}{17}$.

Finalement, (4) admet pour solution générale

$$y(t) = \lambda_1 e^{2t} + \lambda_2 e^{-2t} + \lambda_3 \cos \frac{t}{2} + \lambda_4 \sin \frac{t}{2} - \frac{2}{17} te^{2t}.$$

c) $x(t)$ se déduit alors de (1).

10.VI.1.

L'équation caractéristique s'écrit

$$r^3 - 2r^2 + r - 2 = 0,$$

d'où

$$(r-2)(r^2+1) = 0, \qquad \text{soit} \qquad r_1 = 2, \qquad r_2 = i \quad \text{et} \quad r_3 = -i.$$

La solution générale de l'équation homogène, sous forme réelle, est donc

$$y = Ae^{2x} + B \sin x + C \cos x.$$

Cherchons une solution particulière u, de l'équation

$$(E) \qquad y''' - 2y'' + y' - 2y = \frac{e^{ix}}{2i}.$$

Puisque i est solution de l'équation caractéristique, nous chercherons u sous la forme $u = \lambda xe^{ix}$, alors on a

$$u' = \lambda(1+ix)e^{ix}, \qquad u'' = \lambda(2i - x)e^{ix} \qquad \text{et} \qquad u''' = \lambda(-3 - ix)e^{ix}.$$

En reportant ces valeurs dans (E) on obtient

$$\lambda = \frac{2+i}{20}.$$

Donc, $\left(\frac{2+i}{20}e^{ix}+\frac{2-i}{20}e^{-ix}\right)x$ est solution particulière de l'équation proposée, c'est-à-dire, sous forme réelle $\left(\frac{1}{5}\cos x-\frac{1}{10}\sin x\right)x$.

D'où la solution générale :

$$y = Ae^{2x}+B\sin x+C\cos x+\frac{x}{10}(2\cos x-\sin x).$$

10.VI.2.

L'équation caractéristique s'écrit

$$r^4+5r^2+4=0, \qquad \text{soit} \qquad (r^2+1)(r^2+4)=0$$

d'où les quatre racines suivantes :

$$r=\pm i \qquad \text{et} \qquad r=\pm 2i.$$

La solution générale de l'équation homogène sous forme réelle est donc

$$y = A\cos x+B\sin x+C\cos 2x+D\sin 2x,$$

on obtiendra une solution particulière de l'équation complète sous la forme $u=\lambda\cos 3x$ puisque le premier membre ne fait intervenir que des dérivées d'ordre pair. Donc

$$\lambda[3^4-5\times 3^2+4]=1, \qquad \text{soit} \qquad \lambda=\frac{1}{40},$$

d'où l'on déduit la solution générale.

10.VI.3.

La solution générale de l'équation homogène est

$$y = Ae^{2x}+(Bx+C)e^x.$$

On suppose maintenant que A, B et C sont des fonctions de x; alors on a

$$y' = A'e^{2x}+(B'x+C')e^x+2Ae^{2x}+(Bx+C+B)e^x$$

et

$$y'' = 2A'e^{2x}+(B'x+B'+C')e^x+4Ae^{2x}+(Bx+2B+C)e^x,$$

en tenant compte de la condition

(1) $$A'e^{2x}+(B'x+C')e^x=0.$$

De même, en posant

(2) $$2A'e^{2x} + (B'x + B' + C')e^{x} = 0,$$

il vient

$$y''^{v} = 4A'e^{2x} + (B'x + 2B' + C')e^{x} + 8Ae^{2x} + (Bx + 3B + C)e^{x}$$

et en reportant dans l'équation complète, on obtient l'équation

(3) $$4A'e^{2x} + (B'x + 2B' + C')e^{x} = -(2x - 5)\,\mathrm{Log}\,|x| - \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x},$$

d'où le système définissant A', B' et C'

$$\begin{cases} A'e^{x} + B'x + C' = 0, \\ 2A'e^{x} + B'x + B' + C' = 0, \\ 4A'e^{x} + B'x + 2B' + C' = -e^{-x}(2x - 5)\,\mathrm{Log}\,|x| - \dfrac{e^{-x}}{x^2} - 4\dfrac{e^{-x}}{x}. \end{cases}$$

Des deux premières équations, on tire

$$B' = -A'e^{x} \qquad \text{et} \qquad C' = (x - 1)e^{x}A'$$

et de la troisième

$$A'e^{x} = -e^{-x}(2x - 5)\,\mathrm{Log}\,|x| - \frac{e^{-x}}{x^2} - \frac{4}{x}e^{-x},$$

soit

$$A' = -e^{-2x}(2x - 5)\,\mathrm{Log}\,|x| - \frac{e^{-2x}}{x^2} - \frac{4}{x}e^{-2x}.$$

Calcul de A.

Calculons $\int e^{-2x}(5-2x)\,\mathrm{Log}\,|x|dx$, en intégrant par parties et en remarquant que l'on a

$$\int (5 - 2x)e^{-2x}dx = (x - 2)e^{-2x} + \text{Cte}.$$

Alors

$$\int e^{-2x}(5 - 2x)\,\mathrm{Log}\,|x|dx = (x - 2)e^{-2x}\,\mathrm{Log}\,|x| - \int \left(1 - \frac{2}{x}\right) e^{-2x}dx$$
$$= (x - 2)e^{-2x}\,\mathrm{Log}\,|x| + \frac{1}{2}e^{-2x} + 2\int \frac{e^{-2x}}{x}dx,$$

d'où

$$A = (x - 2)e^{-2x}\,\mathrm{Log}\,|x| + \frac{1}{2}e^{-2x} - \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\right) e^{-2x}dx,$$

soit, enfin,

$$A = (x - 2)e^{-2x}\,\mathrm{Log}\,|x| + \frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{x}e^{-2x} + \text{Cte},$$

ou

$$A = u(x) + A_0.$$

Calcul de B.

On a

$$B' = (2x-5)e^{-x}\,\mathrm{Log}\,|x| + \left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}\right)e^{-x},$$

on en déduit

$$\int (2x-5)e^{-x}dx = (3-2x)e^{-x} + \mathrm{Cte}.$$

Donc

$$\int (2x-5)e^{-x}\,\mathrm{Log}\,|x| = (3-2x)e^{-x}\,\mathrm{Log}\,|x| - \int\left(\frac{3}{x}-2\right)e^{-x}dx$$
$$= (3-2x)e^{-x}\,\mathrm{Log}\,|x| - 2e^{-x} - 3\int\frac{e^{-x}}{x}dx.$$

On en conclut que

$$B = (3-2x)e^{-x}\,\mathrm{Log}\,|x| - 2e^{-x} + \int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\right)e^{-x}dx,$$

ou

$$B = (3-2x)e^{-x}\,\mathrm{Log}\,|x| - 2e^{-x} - \frac{1}{x}e^{-x} + \mathrm{Cte},$$

soit, enfin,

$$B = v(x) + B_0.$$

Calcul de C.

On a
$$C' = B' + xe^{x}A',$$

donc
$$C = B + \int xe^{x}A'dx;$$

mais on sait que $\quad xe^{x}A' = x(5-2x)e^{-x}\,\mathrm{Log}\,|x| - \dfrac{e^{-x}}{x} - 4e^{-x},$

donc

$$\int xe^{x}A'\,dx = \int x(5-2x)e^{-x}\,\mathrm{Log}\,|x|dx - \int\frac{e^{-x}}{x}dx + 4e^{-x}.$$

Comme on a

$$\int x(5-2x)e^{-x}\,\mathrm{Log}\,|x|dx = (2x^2-x-1)e^{-x}\,\mathrm{Log}\,|x| - \int\left(2x-1-\frac{1}{x}\right)e^{-x}dx,$$

on obtient

$$\int xe^{x}A' = (2x^2-x-1)e^{-x}\,\mathrm{Log}\,|x| + 4e^{-x} + \int(1-2x)e^{-x}dx,$$

soit

$$\int xe^{x}A'\,dx = (2x^2-x-1)e^{-x}\mathrm{Log}\,|x| + (2x+5)e^{-x}.$$

Finalement, on obtient

$$C = (2x^2 - 3x + 2)e^{-x} \operatorname{Log}|x| + (2x + 3)e^{-x} - \frac{1}{x}e^{-x} + \text{Cte},$$

soit, enfin,

$$C = w(x) + C_0.$$

D'où la solution générale

$$y = A_0e^{2x} + (B_0x + C_0)e^x + y_1,$$

avec

$$y_1 = e^{2x}u(x) + [xv(x) + w(x)]e^x.$$

On obtient, toutes réductions faites,

$$y_1 = x \operatorname{Log}|x| + \frac{5}{2}$$

et finalement

$$y = A_0e^{2x} + (B_0x + C_0)e^x + x \operatorname{Log}|x| + \frac{5}{2}.$$

(On vérifie immédiatement que y_1 est bien solution particulière de l'équation. Une méthode d'identification à partir de $y = (ax+b) \operatorname{Log} x+c$ aurait évidemment réussi beaucoup plus rapidement, mais encore faut-il connaître d'avance la forme d'une solution particulière!)

LIBRAIRIE-VUIBERT, dépôt légal : 3 294, 4e trimestre 1971

FD - Imprimerie Alençonnaise - 2, rue Édouard-Belin, 61 - Alençon - B. P. : 57

Dépôt légal : 9.241, 4e trim. 1971

LIBRAIRIE
VUIBERT
FONDÉE EN 1877