PRINCIPES
MATHÉMATIQUES
DE LA
PHILOSOPHIE NATURELLE.



Isaac NEWTON
1642-1727

Isaac NEWTON

PRINCIPES MATHÉMATIQUES

DE LA

PHILOSOPHIE NATURELLE

TOME I



ÉDITIONS
JACQUES GABAY

© 1990, Éditions Jacques Gabay
25, rue du Dr Roux 92330 Sceaux

Tous droits réservés. Aucun extrait de ce livre ne peut-être reproduit, sous quelque forme ou quelque procédé que ce soit, sans le consentement préalable de l'Éditeur.

ISBN 2-87647-070-5

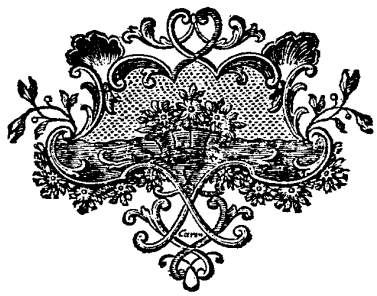
PRINCIPES MATHÉMATIQUES

DE LA

PHILOSOPHIE NATURELLE,

Par feue Madame la Marquiſe DU CHASTELLET.

TOME PREMIER.



A PARIS,

Chez { DESAINT & SAILLANT, rue S. Jean de Beauvais,
LAMBERT, Imprimeur-Libraire, rue & à côté de la Comédie Françoiſe, au Parnaſſe.

M. D. C C L I X.

AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.

AVERTISSEMENT DE L'ÉDITEUR.

CET Ouvrage eſt compoſé de deux Parties. La premiere eſt une traduction du texte littéral des *Principes Mathématiques de la Philoſophie Naturelle*. Il eſt preſque ſuperflu d'avertir qu'elle a été faite ſur la derniere édition de 1726, édition qui l'emporte ſur toutes les précédentes par rapport aux corrections ſuggerées par des idées poſtérieures, & par les remarques de quelques célebres Mathématiciens. L'illuſtre Interpréte, plus jalouſe de ſaiſir l'eſprit de l'Auteur, que ſes paroles, n'a pas craint en quelques endroits d'ajouter ou de tranſpoſer quelques idées pour donner au ſens plus de clarté. En conſéquence on trouvera ſouvent *Newton* plus intelligible dans cette traduction que dans l'original; & même que dans la traduction Angloiſe. En effet on s'eſt tellement attaché dans cette derniere au texte littéral de l'Auteur, que s'il y a quelque ambiguité dans le Latin, on la retrouve dans l'Anglois. Tant de timidité donneroit lieu de ſoupçonner l'Auteur d'avoir foiblement entendu ſon original, & d'avoir uſé de la reſſource ordinaire en pareil cas : c'eſt de rendre les mots quand on ne peut rendre les choſes. Nous

aimons pourtant mieux penſer que cette ſcrupuleuſe fidélité vient d'un autre motif, & l'attribuer à un certain reſpect ſi juſtement acquis à cet immortel Ouvrage, reſpect qui a engagé ſon Traducteur à le rendre trait pour trait.

A l'égard de la confiance que le Public doit avoir dans cette traduction, il ſuffit de dire qu'elle a été faite par feue Madame la Marquiſe *du Châtelet*, & qu'elle a été revûe par M. *Clairault*.

La ſeconde partie de l'Ouvrage eſt un Commentaire des endroits des principes, relatifs au ſyſtême du monde. Ce Commentaire eſt lui-même diviſé en deux parties, dans la premiere deſquelles on expoſe de la maniere la plus ſenſible, les principaux phénoménes dépendans de l'attraction : ces découvertes juſqu'à préſent hériſſées de tant d'épines, ſeront déſormais acceſſibles à tous les Lecteurs capables de quelque attention, & qui auront de légeres notions des Mathématiques.

A cette partie du Commentaire en ſuccéde une plus ſçavante. On y donne par analyſe la ſolution des plus beaux problêmes du ſyſtême du monde : on y examine la forme qu'ont réellement ou qu'auroient les orbites des planétes dans les différentes hypothéſes de peſanteur, l'attraction qu'exerceroient des corps de différentes figures, la réfraction de la lumiere, effet de l'attraction des parties inſenſibles des corps, la théorie de la figure de la terre & celle des marées. Toutes ces recherches ſont tirées pour la plupart ou des Ouvrages de M. *Clairault*, ou des cahiers qu'il donnoit en forme de leçons à M. le Comte *du*

Châtelet Lomont, fils de l'illuſtre Marquiſe. L'avant derniere ſection eſt un excellent précis de ſon Traité ſur la *figure de la terre*. La diſſertation du Sçavant M. *Daniel Bernoulli*, qui a remporté le prix propoſé pour la queſtion des marées forme le fond de la derniere : elle eſt de plus augmentée de diverſes notes & éclairciſſemens que l'Auteur a communiqués.

On s'étonnera ſans doute que ce Commentaire ne s'étende pas plus loin ; mais je l'ai déja dit, ſon Auteur a cru devoir ſe borner à ce qui concerne plus particulierement le ſyſtême du monde. Dans cette vûe, il n'a pas jugé néceſſaire de commenter la partie des Principes qui contient la théorie des fluides. D'ailleurs cette théorie a été traitée par tant de mains, & en particulier avec tant de ſuccès par MM. *Daniel Bernoulli* & *d'Alembert*, dont les écrits ſont entre les mains de tout le monde, qu'il devenoit ſuperflu d'y toucher. A l'égard de la théorie des Cometes, on trouve dans la premiere partie du Commentaire un article entier qui les concerne & qui doit ſuffire. La détermination géométrique de la forme de leurs orbites eſt contenue dans le problême général des trajectoires, & c'eſt dans les traités d'Aſtronomie qu'on doit chercher la maniere d'en déterminer la forme & la poſition d'après les obſervations. M. *le Monnier* a ſuffiſamment rempli cet objet dans ſes élémens d'Aſtronomie, & ceux qui ne trouveroient pas une clarté ſuffiſante dans le texte même du troiſiéme livre des Principes de *M. Newton*, peuvent recourir à ces élémens comme à un excellent Commentaire.

Il n'y a que la théorie des planétes ſecondaires dont

le manque dans cet Ouvrage ſembleroit plus difficile à juſtifier ; mais au tems où *M. Clairault* travailloit avec *Madame du Châtelet*, il étoit encore trop peu content, & de ce que *Newton* avoit fait ſur ce ſujet, & de ſes idées propres, pour lui en rien communiquer. Cette partie intéreſſante du ſyſtême du Monde n'a reçu que depuis peu cette perfection qui lui manquoit. Pour ſuppléer à ce défaut, on doit conſulter la piéce de *M. Clairault* qui a remporté le prix de l'Académie de Peterſbourg ſur la *théorie de la Lune*, & la premiere partie de l'Ouvrage que *M. d'Alembert* vient de publier ſous le titre de *Recherches ſur quelques points importans du ſyſtême du Monde.*

C'eſt-là tout ce qu'en qualité d'Editeurs nous avons à dire de cet Ouvrage. M. de Voltaire a pris la peine de tracer le caractere de la ſçavante Dame qui en eſt l'Auteur. La Préface Hiſtorique qu'on lit à la ſuite de cet Avertiſſement eſt de cet homme célebre.

PRÉFACE HISTORIQUE.

CETTE traduction que les plus ſavans Hommes de France devoient faire, & que les autres doivent étudier, une femme l'a entrepriſe & achevée à l'étonnement & à la gloire de ſon pays. Gabrielle-Emilie de Breteuil, Marquiſe du Châtelet, eſt l'Auteur de cette Traduction, devenue néceſſaire à tous ceux qui voudront acquérir ces profondes connoiſſances, dont le monde eſt redevable au grand Newton.

C'eût été beaucoup pour une femme de ſçavoir la Géométrie ordinaire, qui n'eſt pas même une introduction aux vérités ſublimes contenues dans cet Ouvrage immortel. On ſent aſſez qu'il falloit que Madame la Marquiſe du Chaſtelet fût entrée bien avant dans la carriére que Newton avoit ouverte, & qu'elle poſſédât ce que ce grand homme avoit enſeigné. On a vu deux prodiges : l'un, que Newton ait fait cet Ouvrage ; l'autre, qu'une Dame l'ait traduit & l'ait éclairci.

Ce n'étoit pas ſon coup d'eſſai, elle avoit auparavant donné au Public une explication de la Philoſophie de Léibnitz ſous le titre d'Inſtitutions de Phyſique, addreſſées à ſon fils, auquel elle avoit enſeigné elle-même la Géométrie.

Le Diſcours préliminaire qui eſt à la tête de ſes Inſtitutions eſt un chef d'œuvre de raiſon & d'élo-

quence : elle a répandu dans le reſte du Livre une méthode & une clarté que Léibnitz n'eut jamais, & dont ſes idées ont beſoin, ſoit qu'on veuille ſeulement les entendre, ſoit qu'on veuille les réfuter.

Après avoir rendu les imaginations de Léibnitz intelligibles, ſon eſprit qui avoit acquis encore de la force & de la maturité par ce travail même, comprit que cette Métaphyſique ſi hardie, mais ſi peu fondée, ne méritoit pas ſes recherches. Son ame étoit faite pour le ſublime, mais pour le vrai. Elle ſentit que les monades & l'harmonie préétablies devoient être miſes avec les trois élémens de Deſcartes, & que des ſyſtêmes qui n'étoient qu'ingénieux, n'étoient pas dignes de l'occuper. Ainſi, après avoir eu le courage d'embellir Léibnitz, elle eut celui de l'abandonner : courage bien rare dans quiconque a embraſſé une opinion, mais qui ne coûta guères d'efforts à une ame qui étoit paſſionnée pour la vérité.

Défaite de tout eſprit de ſyſtême, elle prit pour ſa régle celle de la Société Royale de Londres, *Nullius in verba* ; & c'eſt parce que la bonté de ſon eſprit l'avoit rendue ennemie des partis & des ſyſtêmes, qu'elle ſe donna toute entiére à Newton. En effet Newton ne fit jamais de ſyſtême, ne ſuppoſa jamais rien, n'enſeigna aucune vérité qui ne fût fondée ſur la plus ſublime Géométrie ou ſur des expériences inconteſtables. Les conjectures qu'il a hazardées à la fin de ſon Livre ſous le nom de Recherches, ne ſont que des doutes, il ne les donne que pour tels ; & il ſeroit preſque impoſſible que celui qui n'avoit jamais affirmé que des vérités évidentes, n'eût pas douté de tout le reſte.

Tout ce qui eſt donné ici pour principe, eſt en effet digne de ce nom, ce ſont les premiers reſſorts de la nature, inconnus avant lui : & il n'eſt plus permis de prétendre à être Phyſicien ſans les connoître.

Il faut donc bien ſe garder d'enviſager ce Livre comme un ſyſtême, c'eſt-à-dire comme un amas de probabilités qui peuvent ſervir à expliquer bien ou mal quelques effets de la Nature.

S'il y avoit encore quelqu'un d'aſſez abſurde pour ſoutenir la matiére ſubtile & la matiére cannellée, pour dire que la terre eſt un ſoleil encrouté, que la lune a été entraînée dans le tourbillon de la terre, que la matiére ſubtile fait la peſanteur, & toutes ces autres opinions romaneſques ſubſtituées à l'ignorance des Anciens, on diroit : Cet homme eſt Cartéſien. S'il croyoit aux monades, on diroit : Il eſt Léibnitien ; mais on ne dira pas de celui qui ſçait les élémens d'Euclide, Qu'il eſt Euclidien : ni de celui qui ſçait d'après Galilée en quelle proportion les corps tombent, Qu'il eſt Galiléiſte. Auſſi en Angleterre ceux qui ont appris le calcul infinitéſimal, qui ont fait les expériences de la lumiére, qui ont appris les loix de la gravitation, ne ſont point appellés Newtoniens : c'eſt le privilége de l'erreur de donner ſon nom à une Secte.

Si Platon avoit trouvé des vérités, il n'y eût point eu de Platoniciens, & tous les hommes auroient appris peu à peu ce que Platon avoit enſeigné ; mais parce que dans l'ignorance qui couvre la terre, les uns s'attachoient à une erreur, les autres à une autre, on combatoit ſous différents étendards : il y avoit

des Péripatéticiens, des Platoniciens, des Épicuriens, des Zénoniſtes, en attendant qu'il y eût des Sages.

Si on appelle encore en France Newtoniens les Philoſophes qui ont joint leurs connoiſſances à celles dont Newton a gratifié le genre humain, ce n'eſt que par un reſte d'ignorance & de préjugé. Ceux qui ſçavent peu & ceux qui ſçavent mal, ce qui compoſe une multitude prodigieuſe, s'imaginérent que Newton n'avoit fait autre choſe que combattre Deſcartes, à peu près comme avoit fait Gaſſendi : ils entendirent parler de ſes découvertes, & ils les prirent pour un ſyſtême nouveau. C'eſt ainſi que quand Harvée eut rendu palpable la circulation du ſang, on s'éleva en France contre lui : on appella Harvéiſtes & Circulateurs ceux qui oſoient embraſſer la vérité nouvelle que le Public ne prenoit que pour une opinion. Il le faut avouer, toutes les découvertes nous ſont venues d'ailleurs, & toutes ont été combatues. Il n'y a pas juſqu'aux expériences que Newton avoit faites ſur la lumiere, qui n'ayent eſſuyé parmi nous de violentes contradictions. Il n'eſt pas ſurprenant après cela que la gravitation univerſelle de la matiere ayant été démontrée, ait été auſſi combatue.

Il a fallu, pour établir en France toutes les ſublimes vérités que nous devons à Newton, laiſſer paſſer la génération de ceux qui ayant vieilli dans les erreurs de Deſcartes, *turpè putaverunt parere minoribus, & quæ imberbes didicêre, ſenes perdenda fateri.*

Madame du Châtelet a rendu un double ſervice à la poſtérité en traduiſant le Livre des Principes, & en l'enrichiſſant d'un Commentaire. Il eſt vrai

que

que la Langue Latine dans laquelle il eſt écrit, eſt entendue de tous les ſçavans ; mais il en coute toujours quelques fatigues à lire des choſes abſtraites dans une Langue étrangere : d'ailleurs le Latin n'a pas de termes pour exprimer les vérités mathématiques & Phyſiques qui manquoient aux anciens.

Il a fallu que les modernes créaſſent des mots nouveaux pour rendre ces nouvelles idées. C'eſt un grand inconvénient dans les Livres de ſciences, & il faut avouer que ce n'eſt plus gueres la peine d'écrire ces Livres dans une Langue morte, à laquelle il faut toujours ajouter des expreſſions inconnues à l'antiquité, & qui peuvent cauſer de l'embarras. Le Français qui eſt la Langue courante de l'Europe, & qui s'eſt enrichi de toutes ces expreſſions nouvelles & néceſſaires, eſt beaucoup plus propre que le Latin à répandre dans le monde toutes ces connoiſſances nouvelles.

A l'égard du Commentaire Algébrique, c'eſt un Ouvrage au deſſus de la traduction. Madame du Châtelet y travailla ſur les idées de M. Clairaut : elle fit tous les calculs elle-même, & quand elle avoit achevé un Chapitre, M. Clairaut l'examinoit & le corrigeoit. Ce n'eſt pas tout, il peut dans un travail ſi pénible échaper quelque mépriſe ; il eſt très-aiſé de ſubſtituer en écrivant un ſigne à un autre ; M. Clairaut faiſoit encore revoir par un tiers les calculs, quand ils étoient mis au net, de ſorte qu'il eſt moralement impoſſible qu'il ſe ſoit gliſſé dans cet Ouvrage une erreur d'inattention ; & ce qui le feroit du moins autant, c'eſt qu'un Ouvrage où M. Clai-

raut a mis la main, ne fût pas excellent en ſon genre.

Autant qu'on doit s'étonner qu'une femme ait été capable d'une entrepriſe qui demandoit de ſi grandes lumieres & un travail ſi obſtiné, autant doit-on déplorer ſa perte prématurée. Elle n'avoit pas encore entierement terminé le Commentaire, lorſqu'elle prévit que la mort pouvoit l'enlever; elle étoit jalouſe de ſa gloire & n'avoit point cet orgueil de la fauſſe modeſtie, qui conſiſte à paroître mépriſer ce qu'on ſouhaite, & à vouloir paroître ſupérieure à cette gloire véritable, la ſeule récompenſe de ceux qui ſervent le Public, la ſeule digne des grandes ames, qu'il eſt beau de rechercher, & qu'on n'affecte de dédaigner que quand on eſt incapable d'y atteindre.

Elle joignit à ce goût pour la gloire, une ſimplicité qui ne l'accompagne pas toujours, mais qui eſt ſouvent le fruit des études ſérieuſes. Jamais femme ne fut ſi ſavante qu'elle, & jamais perſonne ne mérita moins qu'on dît d'elle, C'eſt une femme ſavante: elle ne parloit jamais de ſcience qu'à ceux avec qui elle croyoit pouvoir s'inſtruire, & jamais n'en parla pour ſe faire remarquer. On ne la vit point raſſembler de ces Cercles où il ſe fait une guerre d'eſprit, où l'on établit une eſpéce de tribunal, où l'on juge ſon ſiecle, par lequel, en récompenſe, on eſt jugé très-ſéverement. Elle a vécu longtems dans des ſociétés où l'on ignoroit ce qu'elle étoit, & elle ne prenoit pas garde à cette ignorance.

Née avec une éloquence ſinguliere, cette élo-

quence ne ſe déployoit que quand elle avoit des objets dignes d'elle. Ces Lettres où il ne s'agit que de montrer de l'eſprit, les petites fineſſes, ces tours délicats que l'on donne à des choſes ordinaires, n'entroient point dans l'immenſité de ſes talents; le mot propre, la préciſion, la juſteſſe & la force étoient le caractère de ſon éloquence; elle eût plûtôt écrit comme Paſcal & Nicole, que comme Madame de Sevigné. Mais cette fermeté ſévère & cette trempe vigoureuſe de ſon eſprit ne le rendoient pas inacceſſible aux beautés de ſentiments: les charmes de la Poëſie & de l'Eloquence la pénétroient, & jamais oreille ne fut plus ſenſible à l'harmonie. Elle ſavoit par cœur les meilleurs vers, & ne pouvoit ſouffrir les médiocres. C'étoit un avantage qu'elle eut ſur Newton, d'unir à la profondeur de la Philoſophie, le goût le plus vif & le plus délicat pour les Belles Lettres.

On ne peut que plaindre un Philoſophe réduit à la ſéchereſſe des vérités, & pour qui les beautés de l'imagination & du ſentiment ſont perdues.

Dès ſa tendre jeuneſſe elle avoit nourri ſon eſprit de la lecture des bons Auteurs, en plus d'une Langue; elle avoit commencé une traduction de l'Enéïde dont j'ai vû pluſieurs morceaux remplis de l'ame de ſon Auteur: elle apprit depuis l'Italien & l'Anglais. Le Taſſe & Milton lui étoient auſſi familiers que Virgile: elle fit moins de progrès dans l'Eſpagnol, parce qu'on lui dit qu'il n'y a gueres, dans cette Langue, qu'un Livre célébre, & que ce Livre eſt frivole.

L'étude de ſa Langue fut une de ſes principales occupations : il y a d'elle des remarques manuſcrites, dans leſquelles on découvre, au milieu de l'incertitude de la Grammaire, cet eſprit philoſophique qui doit dominer par tout, & qui eſt le fil de tous les labyrinthes.

Parmi tant de travaux que le ſavant le plus laborieux eût à peine entrepris, qui croiroit qu'elle trouvât du tems, non ſeulement pour remplir tous les devoirs de la ſociété, mais pour en rechercher avec avidité tous les amuſemens ? Elle ſe livroit au plus grand monde comme à l'étude : tout ce qui occupe la ſociété étoit de ſon reſſort, hors la médiſance. Jamais on ne l'entendit relever un ridicule, elle n'avoit ni le tems, ni la volonté de s'en appercevoir ; & quand on lui diſoit que quelques perſonnes ne lui avoient pas rendu juſtice, elle répondoit qu'elle vouloit l'ignorer. On lui montra un jour je ne ſais quelle miſérable brochure dans laquelle un auteur, qui n'étoit pas à portée de la connoître, avoit oſé mal parler d'elle. Elle dit que ſi l'auteur avoit perdu ſon tems à écrire ces inutilités, elle ne vouloit pas perdre le ſien à les lire, & le lendemain ayant ſçu qu'on avoit renfermé l'auteur de ce libelle, elle écrivit en ſa faveur, ſans qu'il l'ait jamais ſçu.

Elle fut regrettée à la Cour de France, autant qu'on peut l'être dans un pays où les intérêts perſonnels font ſi aiſément oublier tout le reſte. Sa mémoire a été précieuſe à tous ceux qui l'ont connue particuliérement, & qui ont été à portée de voir l'étendue de ſon eſprit & la grandeur de ſon ame.

Il eût été heureux pour ſes amis qu'elle n'eût pas entrepris cet ouvrage dont les ſavants vont jouir. On peut dire d'elle, en déplorant ſa deſtinée, *periit arte ſua.*

Elle ſe crut frappée à mort long-tems avant le coup qui nous l'a enlevée : dès lors elle ne ſongea plus qu'à employer le peu de tems qu'elle prévoioit lui reſter à finir ce qu'elle avoit entrepris, & à dérober à la mort ce qu'elle regardoit comme la plus belle partie d'elle même. L'ardeur & l'opiniatreté du travail, des veilles continuelles, dans un tems où le repos l'auroit ſauvée, amenerent enfin cette mort qu'elle avoit prévue. Elle ſentit ſa fin approcher, & par un mélange ſingulier de ſentiments qui ſembloient ſe combattre, on la vit regretter la vie, & regarder la mort avec intrépidité : la douleur d'une ſéparation éternelle affligeoit ſenſiblement ſon ame, & la Philoſophie dont cette ame étoit remplie lui laiſſoit tout ſon courage. Un homme qui s'arrachant triſtement à ſa famille qui le pleure, & qui fait tranquillement les préparatifs d'un long voyage, n'eſt que le faible portrait de ſa douleur & de ſa fermeté : de ſorte que ceux qui furent les témoins de ſes derniers momens ſentoient doublement ſa perte par leur propre affliction & par ſes regrets, & admiroient en même tems la force de ſon eſprit, qui mêloit à des regrets ſi touchans une conſtance ſi inébranlable.

PRÉFACE
DE MONSIEUR NEWTON
à la premiere édition des Principes en 1686.

LES Anciens, comme nous l'apprend Pappus,* firent beaucoup de cas de la Méchanique dans l'interprétation de la nature, & les modernes ont enfin, depuis quelque tems, rejetté les formes ſubſtantielles & les qualités occultes, pour rappeller les Phénomenes naturels à des loix mathématiques. On s'eſt propoſé dans ce Traité de contribuer à cet objet, en cultivant les Mathématiques en ce qu'elles ont de rapport avec la Philoſophie naturelle.

Les anciens partagerent la Méchanique en deux claſſes; l'une théorique, qui procéde par des démonſtrations exactes; l'autre pratique. De cette derniere reſſortiſſent tous les Arts qu'on nomme Méchaniques, dont cette ſcience a tiré ſa dénomination: mais comme les Artiſans ont coutume d'opérer peu exactement, de là eſt venu qu'on a tellement diſtingué la Méchanique de la Géométrie, que tout ce qui eſt exact, s'eſt rapporté à celle-ci, & ce qui l'étoit moins, à la premiere. Cependant les erreurs que commet celui qui exerce un art, ſont de l'artiſte

* *Coll. Math. Liv. 8. proœm.*

& non de l'art. Celui qui opere moins exactement eſt un Méchanicien moins parfait, & conſéquemment celui qui opérera parfaitement, ſera le meilleur.

La Géométrie appartient en quelque choſe à la Méchanique; car c'eſt de cette derniere que dépend la deſcription des lignes droites & des cercles ſur leſquels elle eſt fondée. Il eſt effectivement néceſſaire que celui qui veut s'inſtruire dans la Géométrie ſache décrire ces lignes avant de prendre les premieres leçons de cette ſcience: après quoi on lui apprend comment les problèmes ſe réſolvent par le moyen de ces opérations. On emprunte de la Méchanique leur ſolution: la Géométrie enſeigne leur uſage, & ſe glorifie du magnifique édifice qu'elle éleve en empruntant ſi peu d'ailleurs. La Géométrie eſt donc fondée ſur une pratique méchanique, & elle n'eſt autre choſe qu'une branche de la Méchanique univerſelle qui traite & qui démontre l'art de meſurer. Mais comme les Arts uſuels s'occupent principalement à remuer les corps, de-là il eſt arrivé que l'on a aſſigné à la Géométrie, la grandeur pour objet, & à la Méchanique, le mouvement: ainſi la Méchanique théorique ſera la ſcience démonſtrative des mouvemens qui réſultent des forces quelconques, des forces néceſſaires pour engendrer des mouvemens quelconques.

Les anciens qui ne conſidérerent gueres autrement la peſanteur que dans le poids à remuer, cultiverent cette partie de la Méchanique dans leurs cinq puiſſances qui regardent les arts manuels; mais nous qui avons pour objet, non les Arts, mais l'avan-

cement de la Philoſophie, ne nous bornant pas à conſidérer ſeulement les puiſſances manuelles, mais celles que la nature employe dans ſes opérations, nous traitons principalement de la peſanteur, la légéreté, la force électrique, la réſiſtance des fluides & les autres forces de cette eſpéce, ſoit attractives, ſoit répulſives: c'eſt pourquoi nous propoſons ce que nous donnons ici comme les principes Mathématiques de la Philoſophie naturelle. En effet toute la difficulté de la Philoſophie paroit conſiſter à trouver les forces qu'employe la nature, par les Phénomenes du mouvement que nous connoiſſons, & à démontrer enſuite, par là, les autres Phénomenes. C'eſt l'objet qu'on a eu en vue dans les propoſitions générales du I. & II. Livre, & on en donne un exemple dans le III. en expliquant le ſyſtème de l'Univers: car on y détermine par les propoſitions Mathématiques démontrées dans les deux premiers Livres, les forces avec leſquelles les corps tendent vers le Soleil & les Planetes; après quoi, à l'aide des mêmes propoſitions Mathématiques, on déduit de ces forces, les mouvemens des Planetes, des Cometes, de la Lune & de la Mer. Il ſeroit à deſirer que les autres Phénomenes que nous préſente la nature, puſſent ſe dériver auſſi heureuſement des principes méchaniques: car pluſieurs raiſons me portent à ſoupçonner qu'ils dépendent tous de quelques forces dont les cauſes ſont inconnues, & par leſquelles les particules des corps ſont pouſſées les unes vers les autres, & s'uniſſent en figures régulières, ou ſont repouſſées & ſe fuyent mutuellement; & c'eſt l'ignorance

rance où l'on a été juſques ici de ces forces, qui a empêché les Philoſophes de tenter l'explication de la nature avec ſuccès. J'eſpére que les principes que j'ai poſés dans cet Ouvrage pourront être de quelque utilité à cette maniere de philoſopher, ou à quelque autre plus véritable, ſi je n'ai pas touché au but.

L'ingénieux M. Halley, dont le ſçavoir s'étend à tous les genres de littérature, a non ſeulement donné ſes ſoins à cette Edition, en corrigeant les fautes de l'impreſſion, & en faiſant graver les figures: mais il eſt celui qui m'a engagé à la donner. Car après avoir obtenu de moi ce que j'avois démontré ſur la forme des orbites planétaires, il ne ceſſa de me prier d'en faire part à la Société Royale, dont les inſtances & les exhortations gracieuſes me déterminèrent à ſonger à publier quelque choſe ſur ce ſujet. J'y travaillai; mais après avoir entamé la queſtion des irrégularités de la Lune, & diverſes autres concernant les loix & la meſure de la peſanteur & des autres forces, les figures que décriroient les corps attirés par des forces quelconques, les mouvemens de pluſieurs corps entre eux, ceux qui ſe font dans des milieux réſiſtans, les forces, les denſités & les mouvemens de ces milieux, les orbes enfin des Cométes; je penſai qu'il étoit à propos d'en différer l'édition juſques à un autre tems, afin d'avoir le loiſir de méditer ſur ce qu'il reſtoit à trouver, & de donner un ouvrage complet au public: ce que je fais à préſent. A l'égard des mouvemens lunaires, ce que j'en dis étant encore imparfait, je l'ai renfermé dans les corrolaires de la propoſition LXVI. du I. Livre, de crainte d'être

obligé d'expoſer & de démontrer chaque point en particulier : ce qui m'auroit engagé dans une prolixité ſuperflue, & auroit troublé la ſuite des propoſitions.

J'ai mieux aimé placer dans quelques endroits, quoique peu convenables, des choſes que j'ai trouvées trop tard, plûtôt que de changer les numero des oppoſitions & des citations qui s'y rapportoient.

Je prie les ſçavans de lire cet Ouvrage avec indulgence, & de regarder les défauts qu'ils y trouveront, moins comme dignes de blame, que comme des objets qui méritent une recherche plus approfondie & de nouveaux efforts.

A Cambridge, du Collége de la Trinité, le 8. Mai 1686.

IS. NEWTON.

PRÉFACE DE L'AUTEUR

à la tête de la ſeconde Edition.

CETTE ſeconde Edition paroit corrigée dans pluſieurs Articles & avec quelques additions. Dans la ſeconde Section du premier Livre on a rendu plus facile la maniere de trouver les forces néceſſaires pour faire mouvoir un corps dans des orbites données; & dans la Section VII. du ſecond Livre, on a recherché avec plus de ſoin, la théorie de la réſiſtance des fluides, qu'on confirme par de nouvelles expériences. Dans le III. Livre, on déduit d'une façon plus complette, la théorie de la Lune & la préceſſion des Equinoxes, & l'on a ajouté à la théorie des Cometes un plus grand nombre d'exemples d'orbites calculées, & avec plus de ſoin: ce qui lui donne une nouvelle confirmation.

A Londres, ce 28. Mars 1713.

I S. NEWTON.

PRÉFACE DE L'AUTEUR

à la troiſiéme édition.

DANS cette troiſiéme Edition, dont a eu ſoin M. Camberton, Docteur en médecine, très-habile dans ces matieres; on explique plus au long quelques points concernant la réſiſtance des milieux, & on a ajouté quelques nouvelles expériences ſur la chute des graves dans l'air. On explique auſſi avec plus de détail dans le Livre troiſiéme, la démonſtration qui prouve que la Lune eſt retenue dans ſon orbite par la force de la gravité. Le même Livre eſt augmenté des Obſervations nouvelles faites par M. Pound ſur la proportion des axes de Jupiter entre eux, de même que de quelques autres concernant la Comete de 1680, faites en Allemagne par M. Kirch, & qui ne nous ſont parvenues que depuis peu. Elles montrent de nouveau combien les orbites paraboliques approchent de celles des Cometes. On détermine avec plus d'exactitude l'orbite de cette Comete fameuſe, ſuivant les calculs de M. Halley, & cela dans l'ellipſe; d'où l'on fait voir que cette Comete ſe mouvant dans une orbite de cette forme, eut pendant neuf ſignes, un cours qui ne fut pas moins régulier que celui des Planetes dans leurs orbites propres. On y a enfin ajouté la détermination de l'orbite de la Cométe de 1723, calculée par M. Bradley, Profeſſeur d'Aſtronomie à Oxford.

A Londres le 12 *Janvier* 1725-6.

IS. NEWTON.

PREFACE DE M. CÔTES

Sur la préſente Edition des Principes mathématiques de la Philoſophie Naturelle de M. NEWTON.

NOUS DONNONS enfin au Public une nouvelle Édition de la Philoſophie de M. de Newton, déſirée depuis long-tems, & ſupérieure aux précédentes, par les corrections & les augmentations que l'Auteur y a faites. La Table des Matières eſt ſuffiſante pour faire connoître au Lecteur tout ce que renferme cet excellent Ouvrage; & la Préface de M. Newton l'inſtruira pareillement des additions & des changemens qu'il a jugé néceſſaires & convenables. Nous n'avons donc ici qu'à expoſer en peu de mots quelle eſt la méthode dont il fait uſage dans cette nouvelle Philoſophie.

On peut rapporter à trois différentes claſſes tous les Auteurs qui ont entrepris de traiter la Phyſique. On a vu d'abord des Philoſophes qui ont donné à chaque eſpéce particulière de corps des qualités occultes & propres à chacun, d'où ils ont enſuite fait dépendre d'une manière encore plus occulte les Phénomenes dont nous ſommes témoins. C'eſt-là le fondement de la Philoſophie de l'Ecole, enſeignée par *Ariſtote* & par les Péripatéticiens. Selon eux, chaque effet particulier dépend abſolument d'une certaine Nature propre à chacun des corps qui en eſt le ſujet ou la cauſe; mais ils gardent un profond ſilence ſur la cauſe & le principe de cette Nature. Puis donc qu'ils ont laiſſé les choſes pour ne s'occuper que des mots; on ne doit les regarder tout au plus que comme les inventeurs d'une eſpèce de jargon philoſophique, & non comme les auteurs d'une véritable Philoſophie.

D'autres ont pris le parti d'abandonner des mots vuides de ſens, & ſe ſont flattés d'acquérir une gloire plus ſolide par des travaux plus réels. Ils ont donc poſé pour principe, que toute la matière en général eſt de même nature ou homogêne; & que la variété que l'on rémarque dans tout corps en particulier par ſa configuration extérieure, ne dépend que de quelques affections très-ſimples en elles-mêmes, & très-faciles à concevoir. Rien de mieux que de procéder ainſi du plus ſimple au plus compoſé; pourvu néanmoins que l'on ne donne pas à ces propriétés primitives & primordiales d'autres modes ni d'autres bornes que celles que la Nature a préſcrites elle-même. Mais bientôt ces derniers Philoſophes admîrent à leur gré telles grandeurs & telles figures qu'ils jugerent à-propos; ima-

ginerent au beſoin des mouvemens & des poſitions reſpectives dans les parties compoſantes des corps : enfin ils forgerent des fluides inviſibles, doués d'une ſubtilité miraculeuſe, agités par des mouvemens ſécrets, capables de pénétrer les pores de tous les Corps, comme ſi la matiere n'oppoſoit aucune réſiſtance ; & par-là ils tomberent dans des réveries auſſi ridicules que celles des Anciens, en négligeant de s'inſtruire & d'examiner la véritable conſtitution de la nature ; connoiſſance qu'on ne doit pas aſſurément chercher dans des conjectures trompeuſes, puiſque les obſervations les plus inconteſtables ont encore bien de la peine à nous la procurer.

Venons à la troiſiéme claſſe, à ceux qui dans leur Philoſophie ne réconnoiſſent d'autre regle que l'expérience. Ces derniers, bien convaincus que l'on doit, autant qu'il eſt poſſible, faire dépendre les effets des cauſes les plus ſimples, n'admettent cependant aucun principe qui ne ſoit prouvé par des obſervations conſtantes. Ils ne font point d'hypotèſes, & n'en reçoivent aucunes en phyſique, ſi ce n'eſt pour les ſoumettre à l'examen & reconnoître leur vérité ou leur fauſſeté par une diſcuſſion éxacte & rigoureuſe. Ils employent dans cette recherche les deux méthodes connues de tout le monde, l'Analyſe & la Synthèſe. Avec le ſecours de la premiére, de quelques Phénomenes choiſis adroitement, ils déduiſent les forces de la Nature, & les loix les plus ſimples qui dérivent de ces mêmes forces ; ils expoſent enſuite ſynthétiquement l'ordre & la diſpoſition des autres qui dépendent immédiatement de ces premieres. C'eſt-là ſans doute la meilleure Philoſophie, & c'eſt auſſi celle qu'a choiſie notre illuſtre Auteur & qu'il a cru juſtement préférable à toute autre. C'eſt la ſeule qu'il ait jugée digne de ſes ſoins & de ſes travaux, & qu'il ait cru devoir perfectionner & embellir. L'explication du ſyſtème du Monde qui ſe déduit ſi facilement de ſa Théorie de la gravité, eſt à la fois une heureuſe application de cette nouvelle philoſophie, & un modèle que l'on ne peut trop imiter. Quelques Philoſophes, avant M. Newton, ont ſoupçonné que la peſanteur pouvoit être une propriété commune à tous les corps ; d'autres l'ont imaginé gratuitement : notre Philoſophe eſt le premier & le ſeul qui ait pu le démontrer par les Phénomenes, & en faire le fondement inébranlable des Théories les plus brillantes.

Je n'ignore pas que des perſonnages illuſtres & de grand nom dans les Sciences n'ont accordé qu'avec peine leur ſuffrage à ce nouveau principe ; peut-être par un effet de certains préjugés, qui faiſoient une impreſſion trop forte ſur leur eſprit : je ſçais même, qu'ils ont quelquefois préféré des conjectures vagues à des vérités certaines. Mon deſſein n'eſt point d'attaquer ici leur réputation, mais ſeulement de mettre mon Lecteur en état de porter un jugement équi-

table, par une expoſition abrégée des découvertes du Chevalier Newton, ſur la matière dont il eſt queſtion.

Commençons donc d'abord par ce qu'il y a de plus ſimple & de plus à notre portée : jettons les yeux ſur notre globe, & voyons quelle eſt la nature de la gravité dans les Corps ſublunaires ; afin d'être plus aſſurés dans nos recherches, lorſque nous en ſerons aux Corps céleſtes qui ſe trouvent ſi éloignés de notre habitation. Tous les Philoſophes ſont d'accord pour admettre une gravitation générale de tous les Corps terreſtres vers notre globe. On eſt convaincu par un grand nombre d'expériences, qu'il n'y a pas de Corps vraiment léger. Ce que l'on appelle légereté n'eſt qu'une propriété relative & apparente ; ce n'eſt pas une légereté abſolue & véritable ; on ſçait qu'elle dépend d'une gravité plus puiſſante des Corps environnants.

Cela poſé, puiſque les Corps gravitent vers la terre, il faut auſſi que la terre gravite également vers les Corps ; car il eſt aiſé de prouver, comme on va le faire tout à l'heure, que l'action de la gravité eſt égale & réciproque. Imaginons la maſſe de la terre partagée en deux parties quelconques, égales ou inégales. Si les efforts ou les poids de chaque partie l'une vers l'autre n'étoient pas égaux, la plus foible céderoit néceſſairement à la plus forte, & les deux parties ainſi unies continueroient de ſe mouvoir à l'infini vers le point du ciel oppoſé à la direction de la plus péſante ; ce qui eſt abſolument contraire à l'expérience ; il faut donc dire que les poids des parties ſont dans un parfait équilibre, c'eſt-à-dire, que l'action de la gravité eſt égale & réciproque.

Les poids des corps également éloignés du centre de la terre ſont comme les quantités de matiére qu'ils renferment. C'eſt une ſuite néceſſaire de l'égalité d'accélération des corps qui tombent par la ſeule force de leur peſanteur ; car il eſt évident que des forces qui impriment à des corps inégaux des dégrès égaux de viteſſe, doivent être proportionelles à la quantité de matiére qu'il faut mettre en mouvement. D'ailleurs on eſt maintenant aſſuré que tous les corps reçoivent une égale accélération ; puiſque, dans le vuide de Boile, ils décrivent tous des eſpaces égaux en tems égaux ; n'étant plus différemment arrêtés par la réſiſtance de l'air. La même vérité eſt encore prouvée avec plus d'exactitude par l'expérience des pendules.

Les forces attractives * des corps à diſtances égales ſont comme les quantités de matiére contenues dans ces mêmes corps. Car puiſ-

* On remarquera ici que M. Côtes employe le mot de force attractive pour exprimer la peſanteur, comme a fait M. Newton. En général, toutes ces expreſſions, force attractive, attraction, gravité, gravitation, peſanteur, ne ſignifient rien autre choſe que cette tendance de tous les corps vers un centre commun de peſanteur, ſoit que cette tendance qui produit réellement une force, ſoit occaſionnée dans les corps par un méchaniſme que nous ignorons ; ſoit que

que les corps gravitent vers la terre, & que celle-ci gravite vers les corps avec des momens égaux, le poids de la terre ſur un corps quelconque, ou, ce qui eſt la même choſe, la force avec laquelle un corps attire la terre, ſera égale à la peſanteur de ce même corps vers la terre. Mais dans chaque corps, le poids eſt proportionel à la quantité de matiére: donc la force avec laquelle un corps attire la terre, ou, ce qui revient au même, la force abſolue de ce corps ſera comme la même quantité de matiére qu'il renferme.

Il ſuit de-là que la force attractive (ou la peſanteur) des corps réſulte des forces attractives (ou des peſanteurs) de chaque partie qui les compoſent; puiſque cette force de gravitation augmente ou diminue ſelon que la quantité de matière augmente ou diminue. Il faut regarder l'action de la terre comme le réſultat des actions réunies de toutes ſes parties; & par conſéquent il faut que tous les corps terreſtres s'attirent avec des forces abſolues qui ſoient en raiſon de la matiére attirante. Telle eſt la nature de la gravité ſur la terre: voyons maintenant ce qu'elle eſt dans les cieux.

C'eſt une loi de la Nature reçue de tous les Philoſophes, qu'un corps reſtera toujours en repos, ou continuera de ſe mouvoir en ligne droite, tant qu'il ne ſera point ſoumis à l'action de forces étrangeres qui l'obligent de changer de ſituation. Il ſuit de-là que les corps qui ſe meuvent dans des courbes, & qui par conſéquent s'écartent continuellement des lignes droites qui touchent leurs orbites, ſont auſſi continuellement retenus dans cette route curviligne par l'action d'une force qui leur eſt perpétuellement appliquée. Donc, pendant que les planetes décrivent leurs trajectoires, elles ſeront continuellement détournées des tangentes à chaque point de la courbe, par l'action répetée d'une force toujours préſente.

Il y encore un principe qu'il faut accorder, & que l'on démontre géométriquement, c'eſt que lorſque des corps mus dans une courbe qui ſe trouve ſur un même plan décrivent autour d'un point fixe ou mobile des aires proportionelles aux tems, ils ſont pouſſés par des forces qui tendent vers ce même point: donc puiſque tous les Aſtronômes conviennent que les Planetes principales décrivent autour du ſoleil des aires proportionelles aux tems, de même que les ſatellites de chacune de ces Planetes du premier ordre autour de ces mêmes Planetes; il faut conclure que la force qui les détourne continuellement des tangentes de leurs orbites pour les faire circu-

plutôt elle ſoit une propriété continuellement imprimée à la matiére par un pur effet de la volonté du Créateur, qui veut produire par-là tous les Phénomenes dont nous ſommes témoins. Il ne s'agit ici que du fait; les noms ſont indifférens & préſenteroient tous les mêmes difficultés pour quiconque n'entreroit pas bien dans l'eſprit de l'Auteur. Voyez à ce ſujet le Chapitre II. des Diſcours de M. de Mauperruis, ſur la Fig. des Aſtres, pag. 16 de la nouvelle édition. On ne peut rien de plus lumineux que cette excellent morceau, qui eſt une diſcuſſion [vraiement] métaphyſique ſur l'attraction, comme ſon titre l'annonce.

ler dans ces mêmes courbes, eſt auſſi continuellement dirigée vers les corps qui ſe trouvent aux foyers de ces orbites. C'eſt donc avec raiſon que l'on peut appeller cette force une force *centripete* à l'égard du corps *circulant*; & une force *attractive* à l'égard du corps *central*, quelle que ſoit la cauſe qui produit cette force.

De plus, il eſt pareillement démontré géométriquement que ſi pluſieurs corps ſe meuvent uniformément dans des cercles concentriques, de maniére que les quarrés des temps périodiques ſoient entr'eux comme les cubes des diſtances au centre commun; les forces de chacun de ces corps ſeront réciproquement comme les quarrés des mêmes diſtances. On démontre avec la même facilité que, ſi des corps font leurs révolutions dans des orbites qui ne différent preſque pas du cercle, & dont les abſides ſoient fixes; les forces centripetes de ces corps ſeront comme les quarrés des diſtances. Or de l'aveu conſtant de tous les Aſtronomes toutes les planetes ſe trouvent dans l'un ou l'autre cas; donc leurs forces centripetes ſont réciproquement comme les quarrés de leurs diſtances au centre. Si l'on nous objecte que les abſides des orbites de chaque Planete, & particuliérement de la Lune, ne ſont pas dans un repos parfait; mais qu'ils ont un mouvement fort lent ſuivant l'ordre des ſignes; on peut répondre que, quand même nous accorderions que cette erreur vient de ce que la loi de la force centripete s'éloigne tant ſoit peu de la raiſon doublée inverſe des diſtances; néanmoins il eſt aiſé de calculer juſqu'où peut aller l'erreur qui ſuit de cette fauſſe ſuppoſition, & de faire voir qu'elle eſt abſolument inſenſible. En effet, quoique la loi de la force centripete de la Lune qui eſt la plus ſujette à être troublée dans ſes mouvemens, ſurpaſſe un peu le rapport de la raiſon doublée; néanmoins elle en approche ſoixante fois davantage que de la raiſon triplée. On peut encore réfuter cette objection plus ſolidement en ſoutenant, comme il eſt démontré dans cet Ouvrage, que ce mouvement des abſides ne vient pas de ce que l'intenſité des forces centripetes s'éloigne de la raiſon doublée, mais qu'il dépend réellement d'une cauſe totalement différente: ainſi il faudra toujours admettre comme un principe inconteſtable, que les Planetes principales tournent autour du Soleil, & les ſecondaires autour des premieres, par l'action de forces centripetes qui ſuivent préciſément la raiſon inverſe des quarrés des diſtances.

De ce que l'on vient de dire, il ſuit évidemment que les Planetes ſont rétenues dans leurs orbites par une force qui agit continuellement ſur elles; que cette force eſt toujours dirigée vers le centre de ces orbites; qu'elle augmente à meſure que les Planetes approchent du centre, & qu'elle diminue à meſure qu'elles s'en éloignent;

que l'augmentation croît comme le quarré de la diſtance décroît. Examinons préſentement par une comparaiſon bien établie, ſi la peſanteur qui fait tomber les corps ſur notre globe n'eſt pas de même nature que les forces centripetes qui rétiennent les Planetes dans leurs orbites. Le moyen de s'en aſſurer, c'eſt de voir ſi l'on ne pourra pas trouver de part & d'autre les mêmes loix & les mêmes propriétés : pour y parvenir, commençons par chercher quelle eſt la force centripete de la lune qui eſt le corps le plus proche de notre globe.

Les eſpaces rectilignes parcourus en tombant par des corps quelconques depuis le point de répos, pendant un tems donné, ſont proportionels aux forces qui les pouſſent; c'eſt une propoſition démontrée dans toute la rigueur géométrique : donc la force centripete de la Lune parcourant ſon orbite, ſera à la force de la peſanteur ſur la ſurface de la terre, comme l'eſpace que la lune décriroit en deſcendant vers la terre, dans un temps infiniment petit en vertu de ſa force centripete, ſi elle n'avoit point de mouvement de révolution, eſt à l'éſpace que parcourt dans le même tems un corps près de la ſurface de la terre par la ſeule force de la peſanteur. Le premier des eſpaces dont on vient de parler eſt égal au ſinuſ-verſe de l'arc décrit par la lune, pendant le même tems; puiſque ce ſinuſ-verſe meſure la quantité dont la force centripete a écarté la lune de la tangente; cet eſpace peut ſe calculer par la connoiſſance du tems périodique de la lune & de ſa diſtance au centre. L'autre eſpace dont nous avons parlé, ſe déduit de la théorie des pendules, ſuivant les expériences de M. *Huyghens*. Si l'on fait le calcul on trouvera que le premier eſpace eſt au ſecond, ou, ce qui revient au même, que la force centripete qui retient la lune dans ſon orbite eſt à la force de la peſanteur ſur la ſurface de la terre, comme le quarré du demi diamétre de la terre eſt au quarré du demi diamétre de l'orbite de la lune. D'ailleurs, ſuivant ce qui précéde, la force centripete de la lune dans ſon orbite eſt à la force centripete de la lune auprès de la ſurface de la terre dans la même raiſon; donc la force centripete de la lune & la force de la peſanteur ſur la ſurface de la terre ſont entierement égales. Ce ne ſont donc point deux forces diſtinctes & différentes, mais préciſément une ſeule & même force; car ſi ces deux forces avoient lieu en même tems & ſe trouvoient néanmoins diſtinguées l'une de l'autre près de la ſurface de la terre, les corps tomberoient deux fois plus vîte que par la ſeule force de la peſanteur. Il eſt donc certain que cette force centripete qui retient la lune dans ſon orbite en l'écartant de la tangente, par attraction ou par impulſion, n'eſt autre choſe que la force de la peſanteur terreſtre qui s'étend juſques à la lune; & la raiſon ſeule nous fait voir

que cette force peut avoir ſon effet à des diſtances encore plus grandes, puiſque nous ne pouvons pas obſerver la moindre diminution ſenſible au ſommet des plus hautes montagnes. La lune gravite donc vers la terre, & par une action réciproque la terre gravite vers la lune : on verra cette propoſition confirmée dans cet Ouvrage, lorſqu'il eſt queſtion du flux & reflux de la mer & de la préceſſion des Équinoxes, Phénomenes qui dépendent tous deux de l'action combinée de la lune & du ſoleil ſur la terre. Cette même comparaiſon que l'on vient de faire nous apprend en même tems la loi ſuivant laquelle décroît la force de la peſanteur dans les grandes diſtances de la terre ; car puiſque la peſanteur des corps terreſtres ne différe pas de la force centripete de la lune, qui décroît en raiſon des quarrés des diſtances ; la peſanteur ſuivra donc auſſi la même loi, & diminuera dans la même proportion.

Venons préſentement aux autres planetes. Puiſque les révolutions des planetes principales autour du ſoleil, celles des Satellites de Jupiter & de Saturne, autour de ces deux Planetes ſont des phénomenes de même nature que la révolution de la lune autour de la terre ; puiſqu'il eſt démontré de plus que les forces centripetes de ces planetes ſont dirigées vers le centre du ſoleil, & que celles des Satellites de Jupiter & de Saturne ſont pareillement dirigées vers le centre de chacune de ces deux planetes, comme la force centripete de la lune eſt elle-même dirigée vers le centre de la terre ; enfin puiſque toutes ces forces ſont réciproquement proportionelles aux quarrés de leurs diſtances, de même que la force de la lune (comparée à celle des corps terreſtres) eſt réciproquement comme le quarré de ſa diſtance : il faudra donc conclure que toutes ces forces ſont de même eſpèce. Ainſi de même que la lune gravite ſur la terre, & la terre ſur la lune ; de même auſſi toutes les planetes ſécondaires graviteront vers les planetes principales, & celles-ci graviteront toutes vers leurs Satellites ; de même enfin toutes les planetes graviteront vers le ſoleil, & le ſoleil gravitera vers toutes les planetes.

Il faut donc reconnoître que le ſoleil gravite ſur toutes les planetes, & que toutes les planetes péſent réciproquement ſur celui-ci. Car pendant que les Satellites accompagnent leur planete principale, ils font en même tems leurs révolutions autour du ſoleil, ainſi que cette même planete : donc il eſt prouvé par le même raiſonnement que les planetes principales & ſécondaires péſent vers le ſoleil, & que le ſoleil péſe vers elles. On a encore outre cela d'autres preuves de la peſanteur des planetes ſécondaires vers le ſoleil, déduites des inégalités du mouvement de la lune, dont on trouvera une théorie exacte expoſée avec toute la ſagacité poſſible dans la troiſiéme partie de cet Ouvrage.

On peut encore déduire du mouvement des Cometes que la force attractive du ſoleil ſe fait ſentir à des diſtances énormes dans toutes les parties de l'étendue. En effet ces corps, après avoir parcouru un intervalle immenſe, s'approchent continuellement du ſoleil; & quelquefois ils ſont ſi près de ce globe qu'ils paroiſſent preſque le toucher lorſqu'ils ſe trouvent dans leur périhélie. C'eſt envain que les Aſtronômes des ſiécles précédents ont cherché à établir une théorie de ces nouvelles planetes; cette découverte étoit réſervée à notre ſiécle, & à notre illuſtre Auteur, qui nous a donné des méthodes auſſi faciles dans la pratique quelles ſont conformes aux obſervations. Il eſt donc évident que les Cometes ſe meuvent dans des ſections coniques qui ont leur foyer au centre du ſoleil; & que les rayons menés du ſoleil aux différents points de leurs trajectoires décrivent des aires proportionelles aux tems. Il ſuit encore évidemment de ces Phénomenes, & l'on peut auſſi le démontrer géométriquement, que les forces qui rétiennent les Cometes dans leurs orbites ſont dirigées vers le ſoleil, & que leur intenſité eſt en raiſon inverſe des quarrés de leurs diſtances au centre de ce même aſtre. Donc les Cometes gravitent vers le ſoleil, & par conſéquent la force attractive du ſoleil s'étend non-ſeulement aux différentes planetes qui ſe trouvent à des diſtances finies, & qui ſont preſque toutes dans un même plan; mais elle agit encore ſur les Cometes qui ſe trouvent placées dans toutes les différentes parties du Ciel, & à toutes ſortes de diſtances. Telle eſt donc la nature des corps peſants, qu'ils font ſentir leur action à toutes les diſtances imaginables ſur tous les autres corps peſants. Il ſuit encore de-là que les Planetes & les Cometes s'attirent mutuellement, & que tous ces corps gravitent réciproquement les uns vers les autres; & cette conſéquence ſe trouve confirmée par les inégalités des mouvemens de Jupiter & de Saturne, connues des Aſtronomes, & cauſées par les actions réciproques de ces planetes les unes ſur les autres. Le mouvement ſi lent des apſides, & dont on a parlé ci-devant, vient encore à l'appui de cette vérité, & dépend de cauſes entierement ſemblables.

Il faut reconnoître maintenant d'après tout ce que l'on vient de voir, que la terre, le ſoleil & tous les corps céleſtes qui accompagnent le ſoleil ont une gravitation réciproque les uns vers les autres, par laquelle ils paroiſſent s'attirer. Donc chacune de leurs parties, ſi petite qu'elle ſoit, a pareillement une force d'attraction proportionelle à ſa maſſe, ſuivant ce que l'on a dit plus haut ſur les corps terreſtres: à différentes diſtances, les forces de ces mêmes parties ſeront réciproquement comme les quarrés des diſtances; car il eſt encore démontré que les globes qui attirent, ſuivant cette loi, doivent être

compoſés de parties attirantes dans la même raiſon.

Les conſéquences que l'on vient de déduire, ſont fondées ſur cet axiome reçu de tous les Philoſophes, que les effets de même genre dont les propriétés connues ſont les mêmes, ont auſſi les mêmes cauſes, d'où naiſſent les mêmes propriétés, quoique ces cauſes ne ſoient pas encore connues. Qui doute en effet, ſi c'eſt la peſanteur qui fait tomber les pierres en Europe, que ce ne ſoit auſſi la même peſanteur qui les faſſe tomber en Amérique ? Si la peſanteur eſt réciproque entre la terre & les pierres en Europe, qui pourra nier qu'elle ait la même propriété en Amérique ? Si la force attractive de la terre ou d'une pierre eſt le réſultat des forces attractives des parties dans l'Europe ; ne faut-il pas auſſi qu'en Amérique elle réſulte d'une pareille combinaiſon ? Si la force de la peſanteur ſe trouve dans toutes les eſpéces de corps, & ſe fait ſentir à toutes ſortes de diſtances en Europe, pourquoi voudrions-nous ſoutenir qu'elle n'auroit pas auſſi les mêmes propriétés en Amérique ? Cette regle eſt la baſe de toute la Philoſophie ; ſupprimez la & vous ne pourrez plus rien établir d'univerſel. On ne connoît la nature de chaque choſe que par les obſervations & les expériences, & de-là il ſuit que nous ne jugeons que par cette régle d'analogie.

Puis donc que tous les corps terreſtres & céleſtes que nous pouvons obſerver, ou ſur leſquels nous pouvons faire des expériences, ſont des corps peſants ; il faudra dire que la peſanteur eſt une propriété qui convient à tous les corps ; & de même que nous n'en pouvons concevoir aucuns qui ne ſoient étendus, mobiles & impénétrables, nous ne pouvons pas non plus en concevoir qui ne ſoient peſants. C'eſt par l'expérience que nous connoiſſons l'étendue, la mobilité & l'impénétrabilité des corps, & c'eſt auſſi par l'expérience que nous connoiſſons leur gravité. Tous les corps que nous avons pu obſerver ſont étendus, mobiles & impénétrables ; & nous en concluons que tous, ceux même ſur leſquels nous n'avons pas pu faire d'obſervations, ſont pareillement étendus, mobiles & impénétrables. Tous les corps que nous avons pu obſerver ſont peſants, & nous concluons légitimement de même que ceux ſur leſquels nous n'avons point fait d'expériences, ſont auſſi des corps peſants. Si l'on nous dit que les corps des étoiles fixes n'ont point de gravité, parce que l'on n'a pas encore pu l'obſerver, on pourra nous prouver auſſi par le même raiſonnement que ces corps ne ſont ni étendus, ni mobiles, ni impénétrables ; car on n'a pas encore obſervé ces propriétés dans les fixes. Mais à quoi bon m'arrêter plus long-temps ? il faut que la peſanteur ſoit une des propriétés primitives de tous les corps, ou que l'on ceſſe de regarder comme telle leur étendue,

leur mobilité, leur impénétrabilité; il faut que l'on puiſſe expliquer éxactement les phénomenes de la nature par la loi de la peſanteur, ou que l'on renonce à en donner une explication raiſonnable en faiſant uſage de l'étendue, de la mobilité & de l'impénétrabilité des corps.

Je ne doute pas qu'on ne déſaprouve cette concluſion, & qu'on ne me reproche de ramener les qualités occultes. On ne ceſſe de nous objecter que la gravité eſt une qualité de cette eſpèce, & qu'on doit bannir abſolument de la philoſophie toutes les explications fondées ſur de pareilles cauſes: mais nous pouvons répondre que l'on ne doit pas appeller occultes des qualités dont l'exiſtence eſt évidemment démontrée par l'expérience; mais celles-là ſeulement qui n'en ont qu'une imaginaire, & qui ne ſont prouvées en aucune maniére. Ceux qui ont réellement recours aux qualités occultes ſont ceux qui, pour expliquer les mouvemens de la nature, ont imaginé des tourbillons d'une matière qu'ils forgent à plaiſir, & qui ne tombe ſous aucun ſens.

Faudra-t-il donc rejetter la gravité de tous les ouvrages philoſophiques, comme une qualité occulte, par ce que l'on ignore juſqu'à préſent la cauſe de cette même gravité? En établiſſant de pareils principes, que l'on prenne garde de donner dans des abſurdités manifeſtes, & de ruiner par-là tous les fondemens de la Philoſophie. En effet toutes les cauſes ſont liées les unes aux autres par une chaîne non interrompue, & ſe déduiſent les unes des autres en allant du plus ſimple au plus compoſé. Si vous arrivez une fois à la cauſe la plus ſimple, il ne vous ſera pas poſſible de remonter plus haut; car on ne peut pas donner une explication méchanique de la cauſe la plus ſimple; & ſi cela ſe pouvoit, dès-lors elle ceſſeroit d'être telle. Il faudra donc traiter de qualités occultes les cauſes de cette nature, & les bannir de la Philoſophie; ce qui ne peut avoir lieu, que l'on n'éxclue pareillement toutes celles qui dépendent immédiatement des premieres, & celles qui ſe déduiſent des ſecondes, & ainſi de ſuite juſqu'à ce que l'on ait abſolument ſupprimé toutes les cauſes des phénomenes qu'il faut expliquer.

D'autres regardent la gravité comme un effet ſurnaturel, & veulent que ce ſoit un miracle perpétuel, d'où ils concluent qu'il faut la rejetter, puiſque les cauſes ſurnaturelles ne doivent point avoir lieu en phyſique. Une objection ſi miſérable, & qui renverſe toute philoſophie, mérite à peine que l'on y réponde; car ſuivant cette idée, ils ſe trouvent réduits à l'une de ces deux extrémités, ou de ſoutenir, contre toute évidence, que la péſanteur n'eſt pas une propriété commune à tous les corps; ou de regarder comme ſurnaturel tout ce qui ne dépend pas des autres propriétés des corps, ou d'une cauſe

méchanique. Il eſt cependant conſtant qu'il y a dans les corps des propriétés primitives, & qui par cette raiſon ne peuvent dépendre d'autres propriétés : que l'on examine donc ſi ces propriétés ne ſont pas ſurnaturelles, & par conſéquent dans le cas d'être réjettées ; qu'on voye enfin ce que deviendroit la Philoſophie avec de tels raiſonnemens.

Il a encore une autre eſpèce de Philoſophes qui ne rejettent la Phyſique céleſte de M. Newton que parce qu'elle eſt oppoſée au ſyſtème de Deſcartes, & ne paroît pas pouvoir s'accorder avec les principes de ce Philoſophe. Nous ne pouvons pas les empécher de ſuivre leur ſentiment ; mais il faut qu'ils ſe conduiſent de même à notre égard, & qu'ils ne refuſent pas aux autres une liberté qu'ils veulent qu'on leur accorde. Qu'il nous ſoit donc permis d'embraſſer la Philoſophie de Newton, & de nous y attacher, parce qu'elle nous paroît plus véritable ; qu'il nous ſoit permis de préférer des cauſes prouvées par les phénomenes à des cauſes fictices, & qui ne ſont confirmées par aucune expérience. Une vraie Philoſophie ne doit employer dans l'explication de la nature que des cauſes vraiment exiſtantes ; elle ne doit point chercher les loix par leſquelles le Tout-puiſſant auroit pu produire l'ordre admirable qui regne dans cet univers, s'il avoit jugé à-propos de les employer ; mais ſeulement celles qu'il a réellement établies par un acte libre de ſa volonté. En effet, nous pouvons croire raiſonnablement qu'un même effet peut être produit par pluſieurs cauſes différentes ; mais la vraie cauſe pour un Philoſophe, eſt celle qui produit actuellement l'effet dont il eſt queſtion : la bonne Philoſophie n'en réconnoît point d'autres. Dans les pendules, le même mouvement de l'éguille qui marque les heures peut dépendre également d'un poids ſuſpendu, ou d'un reſſort enfermé dans la machine. Si l'on a devant ſoi une horloge miſe en mouvement par un poids, ce ſeroit une choſe ridicule d'imaginer un reſſort, & de vouloir expliquer le mouvement de l'éguille par cette hypotèſe faite avec trop de précipitation ; car il falloit d'abord conſidérer attentivement la conſtruction intérieure de la machine, afin de reconnoître par expérience le vrai principe du mouvement propoſé : on peut porter à-peu-près le même jugement de ces Philoſophes qui commencent par établir que l'eſpace immenſe des Cieux eſt rempli d'une matière extrêmement ſubtile, & veulent enſuite que cette même matière ſoit miſe dans un mouvement continuel par les tourbillons qu'elle a formés ; car il pourroit arriver qu'ils expliquaſſent tous les Phénomenes par leurs hypotèſes, & l'on ne pourroit pas dire pour cela qu'ils nous euſſent donné une vraie Philoſophie, ni qu'ils euſſent découvert les vraies cauſes des mouvemens céleſtes ; à moins qu'ils ne nous ayent démontré l'une

de ces deux propoſitions, ou que les cauſes qu'ils nous donnent exiſtent réellement, ou qu'il n'en pourroit éxiſter d'autres.

Si donc nous faiſons voir que l'attraction des corps a réellement lieu dans la nature; ſi nous montrons de plus comment on peut expliquer tous les mouvemens céleſtes par cette propriété; dès-lors c'eſt nous faire une objection ridicule & ſans force, que de vouloir nous prouver que l'on doit expliquer ces mêmes mouvemens par les tourbillons, quand même nous aurions accordé la poſſibilité d'une telle explication. Mais il s'en faut de beaucoup, car on ne peut expliquer ces phénomenes en aucune manière par le moyen des tourbillons, c'eſt une choſe ſi bien prouvée par notre Auteur, démontrée par des raiſons ſi ſolides, que ce ſeroit vouloir s'occuper ſérieuſement de rêveries que de conſacrer ſans aucun fruit ſon tems & ſes travaux, à rétablir un édifice miſérable & chimérique par des éclairciſſemens ou des commentaires également inutiles.

En effet, ſi les corps des Planetes & des Cometes ſont emportés autour du Soleil par des tourbillons; il faut que les corps emportés & les parties du tourbillon voiſines de ces corps ayent la même viteſſe & la même direction; il faut par conſéquent qu'elles ayent la même denſité ou une même force directement proportionelle à la quantité de matiere. Or il eſt conſtant que les Planetes & les Cometes, lorſqu'elles ſe trouvent dans la même partie du Ciel, ont néanmoins des viteſſes & des directions différentes. Il eſt donc néceſſaire que les mêmes parties du fluide céleſte, qui ſont à égales diſtances du ſoleil tournent dans le même tems avec des directions & des viteſſes différentes; car il faut une direction & une viteſſe déterminée pour le paſſage des Planetes; & il faut dans le même tems une autre viteſſe & une autre direction pour le paſſage des Cometes. Comme ce Phénomene eſt abſolument inexplicable, de deux choſes l'une, ou il faudra convenir que tous les corps céleſtes ne ſont pas emportés par un tourbillon; ou il faudra dire que ce n'eſt pas un ſeul tourbillon qui produit tous ces mouvemens; mais pluſieurs qui ſont différents les uns des autres, & qui occupent le même eſpace du Ciel, qu'ils parcourent dans le même tems avec des viteſſes & des directions différentes.

Si l'on ſuppoſe qu'un même eſpace contient différents tourbillons, qui ſe pénétrent mutuellement & font leurs révolutions avec des mouvemens différents; comme d'ailleurs tous les mouvemens doivent être parfaitement analogues à ceux des corps qu'ils entraînent, leſquels font leurs révolutions avec une régularité ſurprenante dans des ſections coniques tantôt fort excentriques, tantôt preſque circulaires; on peut demander avec raiſon comment il peut ſe faire que ces mouvemens ſe conſervent en entier ſans jamais avoir été

troublés depuis tant de ſiécles par les actions diverſes de la matiere qu'ils rencontrent ſans ceſſe. Si de plus on fait attention que ces mouvemens imaginaires ſont plus compoſés & plus difficiles à expliquer que les mouvemens réels & véritables des Planetes & des Cometes; on ſera bientôt convaincu, ainſi que nous, qu'ils ont été gratuitement introduits dans la Philoſophie; car toute cauſe doit être plus ſimple que ſon effet. Si l'on accorde une fois la liberté d'imaginer tout ce que l'on voudra, on verra bientôt quelqu'un nous aſſurer que toutes les Planetes & les Cometes ſont ainſi que notre terre environnées d'atmoſpheres; & d'abord cette hypothèſe paroît plus conforme à la raiſon. On nous dira enſuite que ces atmoſpheres, par leur nature, ſe meuvent autour du ſoleil & décrivent des ſections coniques; & ce mouvement peut encore ſe concevoir plus facilement qu'un ſemblable mouvement propre à divers tourbillons qui ſe pénétrent mutuellement: enfin on établira bientôt, comme une choſe abſolument hors de doute, que les Planetes & les Cometes ſont emportées autour du ſoleil par leurs atmoſphéres, & l'on triomphera d'avoir ainſi découvert les cauſes des mouvemens céleſtes. Mais quiconque rejette une pareille fiction doit auſſi à plus forte raiſon rejetter la premiere; car ces deux hypothèſes n'en font abſolument qu'une ſeule.

Galilée a démontré qu'une pierre jettée & mue dans une parabole ne quitte la ligne droite que par la force de la peſanteur, qui eſt pourtant une qualité occulte. Mais il faut eſpérer que quelque Philoſophe plus fin & plus adroit imaginera un jour une autre cauſe; il ſuppoſera quelque matiere ſubtile, inviſible, inpalpable, qui ne peut tomber ſous aucun ſens, mais qui ſe trouve dans les environs de la ſurface de la terre; il ſoutiendra que cette matiere ſe meut dans toutes ſortes de directions, qu'elle obeit à toutes ſortes de mouvemens différents & même oppoſés, & enfin qu'elle décrit toutes ſortes de lignes paraboliques; enſuite il aura bientôt expliqué d'une maniere brillante pourquoi la pierre quitte la ligne droite; & par-là s'attirera l'approbation d'un vulgaire ignorant. Cette pierre, nous dira-t-il, nage dans un fluide ſubtil, & en ſuivant ſon cours, elle doit néceſſairement ſe conformer au mouvement du milieu dans lequel elle ſe trouve. Or ce fluide ſe meut dans des lignes paraboliques; donc il faut abſolument que la pierre décrive une parabole. Qui n'admirera un ſi grand Philoſophe, un génie ſi perçant? eſt-il poſſible d'expliquer les Phénomenes de la nature d'une maniere plus claire, plus à la portée même du commun, & enfin par des cauſes plus méchaniques, la matière & le mouvement? Qui ne rira au contraire de ce pauvre *Galilée*, qui employe le plus grand appareil de Géométrie pour ramener de nouveau des qualités occultes que

l'on avoit ſi ſagement bannies de la Philoſophie : mais rougiſſons de nous amuſer à des puerilités de cette nature, & parlons enfin ſérieuſement.

Tout ſe réduit à ce qui ſuit : il y a un nombre infini de Cometes, leurs mouvemens ſont extremement réguliers, & elles ſuivent préciſément les mêmes loix que les Planetes ; elles ſe meuvent dans des ſections coniques ; leurs trajectoires ſont extrêmement excentriques ; il y en a dans toutes les parties du Ciel ; elles parcourent les eſpaces céleſtes, & paſſent auprès des Planetes avec la plus grande facilité ; ſouvent même elles marchent contre l'ordre des ſignes : tous ces Phénomenes ſont confirmés par les obſervations aſtronomiques, & ne peuvent s'expliquer par les tourbillons. Bien plus ils ne peuvent pas même exiſter ſi les Planetes ſe trouvent entraînées par des tourbillons ; enfin le mouvement des Cometes devient abſolument impoſſible, ſi l'on ne bannit de l'univers, cette matière ſubtile qui ne doit ſon éxiſtence qu'à l'imagination, & ſi on ne la fait rentrer dans le néant dont on l'avoit tirée.

Examinons encore cette matière & voyons plus en détail ce qui ſuit de l'hypothèſe des tourbillons. Si les Planetes ſont ainſi emportées autour du ſoleil ; ſuivant ce que l'on a déja dit, les parties du tourbillon qui environnent la Planete doivent être de même denſité qu'elle ; ainſi toute la matière qui environne le périmétre du grand orbe ſera auſſi denſe que la terre, & celle qui ſe trouve entre ce grand orbe & celui de Saturne aura autant ou plus de denſité ; car pour qu'un tourbillon puiſſe ſubſiſter, il faut que les parties les moins denſes ſoient vers le centre & que les plus denſes s'en éloignent. En effet, puiſque les quarrés des tems périodiques des Planetes ſont comme les cubes des diſtances au Soleil, il faut que les tems périodiques des parties de chaque tourbillon voiſines de la Planete ſuivent à-peu-près le même rapport : or il ſuit de la que les forces centrifuges de ces mêmes parties ſont en raiſon inverſe des quarrés des diſtances. Donc celles qui ſont plus éloignées ont moins de force centrifuge, & par conſéquent ſi elles ont moins de denſité elles céderont à la plus grande force avec laquelle les parties plus voiſines du centre tâchent de s'en écarter ; donc les plus denſes monteront tandis que les moins denſes deſcendront : il y aura ainſi un changement continuel de lieu juſqu'à ce que toute la matiére du tourbillon ſe trouve tellement diſpoſée qu'elle puiſſe demeurer en équilibre. Si deux fluides de différente peſanteur ſpécifique ſont contenus dans un même vaſe, on ſçait que le plus peſant va toujours au fond ; & c'eſt par une raiſon preſque toute ſemblable que les parties les plus denſes d'un tourbillon s'écartent du centre en vertu d'une plus grande force centrifuge. Il faut donc réconnoître que

toute la partie du tourbillon qui ſe trouve au-dehors de l'orbe de la terre, par rapport au ſoleil, aura une denſité & par conſéquent une force d'inertie proportionnée à la quantité de matiére, laquelle denſité ſera au moins égale à la denſité & à l'inertie de notre terre; d'où il ſuit que les Cometes éprouveront une réſiſtance conſidérable & très-ſenſible dans leur mouvement, pour ne pas dire capable de le détruire abſolument, comme cela eſt plus que probable. Il eſt néanmoins certain par la régularité des mouvemens de ces mêmes Cometes, qu'elles n'éprouvent pas la moindre réſiſtance ſenſible, & par conſéquent qu'elles ne trouvent nulle part aucune matiére qui puiſſe leur réſiſter, ou ce qui revient au même, qui ait quelque denſité ou quelque force d'inertie. Car la réſiſtance des milieux ne vient que de l'inertie de la matiére fluide, ou de la viſcoſité ou ténacité des parties de ce même fluide. Celle qui vient de cette derniere cauſe eſt très-petite & peut à peine être obſervée dans les fluides connus, à moins que le dégré de viſcoſité ou ténacité ne ſe trouve très-conſidérable, comme cela ſe voit dans l'huile ou le miel. La réſiſtance que l'on éprouve dans l'eau, dans l'air, dans le vif-argent & autres fluides de cette eſpéce qui n'ont point de viſcoſité eſt preſque toute de même nature que celle dont nous avons parlé d'abord, & ne peut pas être diminuée par de nouveaux dégrés de ſubtilité, tant que la denſité à laquelle elle eſt toujours proportionelle, reſte la même. Tout ceci eſt démontré par notre illuſtre Auteur avec toute la clarté poſſible, dans ſa belle Théorie de la réſiſtance des milieux; Théorie qui ſe trouve expoſée avec beaucoup plus de préciſion dans cette nouvelle Edition, & qui eſt encore confirmée davantage par les expériences ſur la chute des corps.

On ſait que les corps en mouvement le communiquent peu à peu au fluide environnant; cette communication produit une perte, & cette perte rallentit néceſſairement la viteſſe. La diminution de viteſſe eſt donc proportionelle au mouvement communiqué, lequel eſt lui-même comme la denſité du fluide lorſque la viteſſe eſt connue: donc la diminution de mouvement ou la réſiſtance ſera auſſi comme la même denſité du fluide, & rien ne peut la ſupprimer, à moins que le fluide qui vient choquer les parties poſtérieures du corps en mouvement ne lui rende ce qu'il a perdu par la réſiſtance du milieu. Mais c'eſt ce que l'on ne peut dire, à moins que l'impreſſion du fluide ſur les parties poſtérieures du corps ne ſoit égale à celle que le même corps éxerce ſur les parties du fluide qui lui ſont directement oppoſées; c'eſt-à-dire, à moins que la viteſſe relative avec laquelle le fluide revient frapper le corps par derriere ne ſoit égale à celle avec laquelle le corps frappe le fluide; ou, ce qui revient au même, à moins que la viteſſe abſolue du fluide

recurrent ne ſoit double de celle du fluide répouſſé par le corps; ce qui eſt abſolument impoſſible. On ne peut donc en aucune maniere ſupprimer la réſiſtance des fluides, du moins celle que produiſent la denſité & l'inertie; d'où il faut conclure que les fluides céleſtes n'ont aucune force d'inertie puiſqu'ils n'oppoſent aucune réſiſtance; qu'il n'y a pareillement aucune force qui communique le mouvement, puiſqu'il n'y a point de force d'inertie; point de force qui puiſſe produire le plus léger changement dans les corps en général ou en particulier, puiſqu'il n'y a point de force qui puiſſe communiquer le mouvement; en un mot que ces fluides n'ont aucune efficacité, puiſqu'ils n'ont aucun moyen de produire le changement. Pourquoi donc ne pas regarder comme ridicule & indigne d'un Philoſophe, une hypothèſe qui n'a point de fondement & ne peut en aucune maniére ſervir à expliquer les loix & les phénomenes de la nature? Ceux qui veulent que l'univers ſoit rempli de matiére, & en même tems ſoutiennent que cette matiére n'a point de force d'inertie; établiſſent réellement l'éxiſtence du vuide dont ils ne ſuppriment que le nom; car puiſqu'il n'y a aucune maniére & aucune raiſon de diſtinguer une telle matiére du vuide, il eſt évident que ce n'eſt plus qu'une diſpute de mots. Si malgré tout cela, il y a encore des perſonnes ſi fort attachées à la matiére qu'elles veuillent croire qu'il n'eſt pas poſſible d'admettre un eſpace abſolument vuide de corps, voyons enfin où cette aſſertion les conduira.

Diront-ils que ce plein dans lequel ils imaginent que l'univers eſt conſtruit, eſt un effet de la volonté de Dieu qui a tout diſpoſé de cette maniére afin de trouver pour les opérations de la nature une reſſource toujours préſente dans cette matiére ſubtile qui pénétre & remplit tout; quoique nous ayons déja prouvé que l'on ne peut avancer cette propoſition, puiſqu'il eſt démontré par les phénomenes des Cometes qu'une telle matiére ne peut avoir aucune éfficacité? Avanceront-ils que Dieu a voulu établir ce plein, pour une fin que nous ne connoiſſons pas, ce qui ſeroit une autre abſurdité, puiſque l'on pourroit prouver par le même raiſonnement toute autre diſpoſition & tout autre méchaniſme qu'il plairoit d'imaginer pour expliquer le ſyſtême de l'univers? Oſeroient-ils enfin nous aſſurer que ce plein univerſel n'eſt pas dépendant de la volonté de Dieu, mais qu'il doit ſon éxiſtence à une certaine néceſſité de la nature? Il faut donc qu'ils retombent dans toutes les impiétés de la plus mépriſable de toutes les ſectes, de ceux qui ſont aſſez ſtupides pour croire que tout ſe fait au hazard, & non par une Providence ſouverainement intelligente; de ces hommes qui s'imaginent que la matiére a toujours exiſté néceſſairement & en tout lieu, qu'elle eſt infinie & éternelle. Si on leur accordoit ce principe, il s'enſuit auſſi de là

qu'elle doit être abſolument uniforme & homogène dans toute ſon étendue ; car la variété des formes eſt directement oppoſée à la néceſſité de l'éxiſtence : elle ſera auſſi par la même raiſon immobile ; car ſi elle ſe meut néceſſairement vers un certain point de l'étendue, avec une certaine viteſſe déterminée ; par une égale néceſſité elle ſera auſſi en mouvement vers un autre point de l'étendue avec une viteſſe différente ; mais il eſt évident qu'elle ne peut ſe mouvoir en même-tems vers différents lieux & avec des viteſſes différentes ; elle eſt donc néceſſairement immobile. Donc il n'a pas pu réſulter de cette matiére un monde auſſi beau & auſſi admirable que le nôtre, par la variété des formes & des mouvemens ; cet ouvrage ne peut donc être qu'un effet de la volonté ſouverainement libre d'un Dieu qui prévoit tout & qui gouverne tout.

C'eſt là qu'il faut chercher la ſource & l'origine de toutes ces loix que nous appellons *loix de la nature*, dans leſquelles on retrouve à chaque inſtant les marques ſenſibles d'une intelligence infinie, ſans jamais y découvrir le moindre trait qui puiſſe nous les faire regarder comme néceſſaires. Se flatter de pouvoir découvrir les principes d'une vraie phyſique & les loix de la nature par la ſeule force de ſon génie, en fermant les yeux ſur tout ce qui nous environne, pour ne conſulter que la lumiére d'une raiſon intérieure ; c'eſt établir que le monde exiſte néceſſairement, & que les loix dont il s'agit ſont des ſuites immédiates de cette néceſſité : ou ſi l'on eſt perſuadé que cet Univers eſt l'ouvrage d'un Dieu ; c'eſt avoir aſſez d'orgueil pour imaginer qu'un être auſſi petit, auſſi foible que l'homme, connoît néanmoins avec évidence ce que Dieu pouvoit faire de mieux. Toute Philoſophie ſaine & véritable eſt uniquement appuyée ſur les phénomenes. Si les mêmes phénomenes nous conduiſent de gré ou de force à des principes dans leſquels on voit briller évidemment l'intelligence & le pouvoir abſolu d'un Etre ſouverainement ſage & puiſſant ; ce n'eſt pas une raiſon de les rejetter, parce qu'ils déplairont à quelques particuliers ; que ce ſoit pour ces gens-là des miracles ou des qualités occultes, on ne doit point leur imputer les noms que la malice peut leur donner ; à moins qu'on ne veuille nous avouer tout ſimplement que la philoſophie doit être fondée ſur l'Athéiſme ; mais il ne faut pas alterer & corrompre la Philoſophie pour des hommes de cette eſpéce ; l'ordre de la nature doit être auſſi ſacré qu'il eſt immuable.

Les gens de bien & les juges équitables dans cette matiére regarderont certainement comme la plus excellente maniére de traiter la Philoſophie, celle qui eſt fondée ſur les expériences & les obſervations. Nous ne pouvons expoſer ici la gloire & l'éclat que cette nouvelle Philoſophie reçoit de l'excellent Ouvrage de notre illuſtre

Auteur. Rien de plus juſte que le reſpectueux étonnement avec lequel ceux qui ont approfondi ces matiéres ne ceſſent d'admirer la force & la grandeur de cet heureux génie occupé à réſoudre les problèmes les plus difficiles, & ſi ſupérieur à tout ce que l'on pouvoit attendre de l'eſprit humain : il a, pour ainſi dire, déchiré le voile de la nature pour nous en découvrir les plus admirables myſtères : il a mis ſous nos yeux une expoſition ſi élégante du ſyſtême de l'univers, un enſemble ſi beau & ſi parfait, qu'Alphonſe * lui-même n'auroit plus rien à déſirer ni pour l'harmonie, ni pour la ſimplicité, ſi ce prince vivoit encore. Nous pouvons maintenant contempler de plus près la majeſté de la nature, jouir plus que jamais d'un ſpectacle ſi doux ; adorer & ſervir avec plus d'ardeur le Maître & le Créateur de toutes choſes, & c'eſt là le plus grand avantage que l'on puiſſe retirer de la Philoſophie. Il faut être aveugle pour ne pas voir dans le meilleur & le plus ſage de tous les ouvrages, la ſageſſe & la bonté infinie de celui qui en eſt l'auteur ; mais c'eſt le comble de la folie que de ne vouloir pas le reconnoître.

Ce grand Ouvrage de M. Newton ſera donc un ſolide rempart que les impies & les athées ne pourront jamais renverſer ; c'eſt là qu'il faut chercher des armes ſi l'on veut les combattre avec ſuccès. Il y a déja longtems que cette importante vérité a été reconnue, par un illuſtre Profeſſeur du Collége de la Trinité, M. Richard *Bentley*, qui fait à la fois la gloire de ſon ſiécle & l'ornement de notre Académie. Ce grand homme auſſi recommandable par une vaſte érudition que par la protection qu'il accorde à tous les Savants, eſt auſſi le premier qui l'ait démontré avec autant de force que d'élégance dans ſes diſcours académiques, ſi univerſellement eſtimés, & qui ont été publiés en latin & en anglois. Je me fais un plaiſir de réconnoître ici combien je lui ſuis redevable à toutes ſortes d'égards, & je ne doute point que le Lecteur ne ſoit pareillement diſpoſé à lui payer le tribut de l'eſtime dûe à ſon ſçavoir & à ſon mérite. Lié depuis long-temps d'une maniére intime avec notre illuſtre Auteur ; & d'ailleurs auſſi ſenſible à cette gloire qu'à celle qu'il reçoit de ſes ouvrages, qui ſont les délices de toutes les perſonnes lettrées, il a ſçu rendre un ſervice également important au nom de ſon ami & au progrès des ſciences. Les exemplaires de la

* Alphonſe roi de Caſtille vivoit vers le milieu du XIII ſiécle : il donna des ſommes prodigieuſes pour faire conſtruire de nouvelles tables aſtronomiques. On rapporte de lui un trait ſingulier qui revient à cet article. Lorſque les Aſtronomes qu'il avoit choiſis pour faire cet Ouvrage lui préſentèrent leur ſyſtême, qui ſe trouvoit embarraſſé d'une infinité de cercles qu'ils avoient cru néceſſaires pour expliquer les différents mouvements des aſtres : *Si Dieu* dit ce Prince, *m'eut conſulté lorſqu'il créa l'Univers, tout auroit été dans un ordre meilleur & plus ſimple* : Ironie adroite qui part moins d'un principe d'impiété, que d'un génie naturellement connoiſſeur, qui ſe douroit bien que le méchaniſme de l'Univers devoit être beaucoup plus ſimple que celui qu'on lui propoſoit.

dernière édition des Principes étoient devenus très-rares & ſe vendoient à un prix éxorbitant. Il ne ceſſa de faire les plus vives inſtances à M. Newton, & détermina enfin cet homme, auſſi ſupérieur aux autres par ſa modeſtie que par ſon ſçavoir, à laiſſer paroître ſous ſes auſpices & à ſes dépens cette nouvelle édition que l'on a revue d'un bout à l'autre, & qui ſe trouve enrichie de diverſes additions importantes que l'on y a faites; enfin c'eſt par ſon crédit que je reçus dans le même tems une ſomme conſidérable qui me fut donnée, pour veiller à ce que cet Ouvrage fût exécuté avec tout le ſoin & toute la correction poſſible.

A Cambridge, le 12 *Mai* 1713.

ROGER COTES, Aſſocié du Collége de la Trinité, & Profeſſeur d'Aſtronomie & de Phyſique expérimentale.

Avertiſſement ſur les Planches de cet Ouvrage.

COMME on n'a pas voulu multiplier inutilement les Planches & les Figures, lorſque l'on trouvera une même Figure ſous deux numéro, on regardera cette Figure comme ſi c'étoit deux Figures ſéparées.

Les Planches qui étoient abſolument néceſſaires dans cet Ouvrage, & d'autres obſtacles qu'on ne pouvoit pas prévoir, ont empêché juſqu'ici la publication des *Principes de Newton*, qu'on ſe propoſoit de mettre en vente dès l'année 1756.

ERRATA.

PRÉFACE de M. Côtes, *p.* XXIV, avant derniere *lig.* au lieu de cette, *liſez* cet; & au lieu de vraiement, *liſez* vraiment.
Préface de M. Newton, *p.* xviij, *lig.* 8, oppoſitions; *liſez* propoſitions.
Préface de M. Newton à la troiſiéme édition, *p.* xx, *lig.* 2, Camberton, *liſez* Pemberton.
Ier Volume, *p.* 38, Lemme 2e *cottez* en marge, Fig. 6.
Page 39, Lemme 4e *cottez* en marge, Fig. 7 & 8.
Page 40, Lemme 6e *cottez* en marge, Fig. 9.
Page 94, *lig.* 3, le point coïncide; *liſ.* le point M. coïncide.
Ibidem, *ligne* 22, la droite *trp.* *liſez* la droite *tr.*
Page 293, à la marge, Fig. 29; *liſez* Fig. 26.
Page 297, à la marge, *ligne* 12, Fig. 27; *liſez* Fig. 28.
IIe Volume, *page* 35, vers le bas, *mettez* Figure 1re à la marge.
Commentaire, *page* 161, *ligne* 12; je fais les lignes A P, *liſez* A S.
Page 164, *ligne* 4, de la Sphere P S, *liſez* P Q.
Ibidem, au bas de la page, Fig. 6; *liſez* Fig. 7.
Page 198, vers le bas de la page; le canal A B, *liſez* le canal K L;
Page 212, *ligne* 10, les particules *s*, *liſez* les particules S.
Page 219, vers le bas de la page, ou à, *liſez* on a.

Page 237, *ligne* 14, on aura par le rapport $\frac{\frac{2}{15}cc\dot{e}}{\frac{2}{3}ce+\frac{8}{15}cc\dot{e}}$

Liſez on aura pour le rapport $\frac{\frac{2}{15}ce\dot{e}}{\frac{2}{3}ce+\frac{6}{15}cc\dot{e}}$

Page 283, vers le haut de la page, *mettez* à la marge Fig. 4.

SUR LA PHYSIQUE.

SUR LA PHYSIQUE DE NEWTON*

A MADAME

LA MARQUISE DU CHASTELET.

TU m'appelles à toi, vaſte & puiſſant génie,
Minerve de la France, immortelle Emilie.
Je m'éveille à ta voix, je marche à ta clarté,
Sur les pas des vertus & de la vérité.
Je quitte *Melpoméne* & les jeux du Théâtre,
Ces combats, ces lauriers, dont je fus idolâtre.
De ces triomphes vains mon cœur n'eſt plus touché.
Que le jaloux *Rufus*, à la terre attaché,
Traîne au bord du tombeau la fureur inſenſée
D'enfermer dans un vers une fauſſe penſée;
Qu'il arme contre moi ſes languiſſantes mains,
Des traits qu'il deſtinoit au reſte des humains;
Que quatre fois par mois un ignorant *Zoïle*
Eléve en frémiſſant une voix imbécille;
Je n'entends point leurs cris que la haine a formés.
Je ne vois point leurs pas dans la fange imprimés.
Le charme tout-puiſſant de la Philoſophie,
Eléve un eſprit ſage au-deſſus de l'envie.
Tranquille au haut des cieux, que *Newton* s'eſt ſoumis,
Il ignore en effet s'il a des ennemis.
Je ne les connois plus. Déja de la carriére
L'auguſte vérité vient m'ouvrir la barriére;

*Cette Lettre eſt imprimée au-devant des Elémens de Newton, donnés au Public par M. de Voltaire en 1738 & 1742.

Déja ces tourbillons, l'un par l'autre preſſés,
Se mouvant ſans eſpace, & ſans régles entaſſés,
Ces fantômes ſçavans à mes yeux diſparoiſſent.
Un jour plus pur me luit; les mouvemens renaiſſent;
L'eſpace, qui de Dieu contient l'immenſité,
Voit rouler dans ſon ſein l'Univers limité,
Cet Univers ſi vaſte à notre foible vûe,
Et qui n'eſt qu'un atôme, un point dans l'étendue.
Dieu parle, & le cahos ſe diſſipe à ſa voix.
Vers un centre commun tout gravite à la fois.
Ce reſſort ſi puiſſant, l'ame de la nature,
Etoit enſeveli dans une nuit obſcure.
Le compas de *Newton*, meſurant l'Univers,
Leve enfin ce grand voile, & les Cieux ſont ouverts.
Il découvre à mes yeux, par une main ſçavante,
De l'aſtre des ſaiſons la robe étincelante;
L'émeraude, l'azur, le pourpre, le rubis,
Sont l'immortel tiſſu dont brillent ſes habits.
Chacun de ſes raïons dans ſa ſubſtance pure,
Porte en ſoi les couleurs dont ſe peint la nature,
Et confondus enſemble ils éclairent nos yeux,
Ils animent le monde, ils empliſſent les Cieux.
Confidens du Très-haut, ſubſtances éternelles,
Qui brûlez de ſes feux, qui couvrez de vos aîles
Le Trône où votre Maître eſt aſſis parmi vous,
Parlez; du grand *Newton* n'étiez-vous point jaloux?
La mer entend ſa voix. Je vois l'humide empire
S'élever, s'avancer vers le Ciel qui l'attire:
Mais un pouvoir central arrête ſes efforts;
La mer tombe, s'affaiſſe, & roule vers ſes bords.

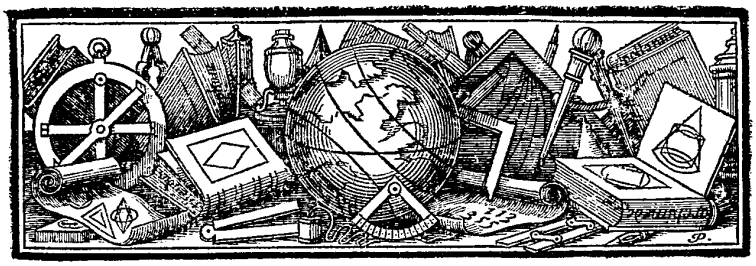
Cométes, que l'on craint à l'égal du tonnerre,
Ceſſez d'épouvanter les peuples de la terre;
Dans une ellipſe immenſe achevez votre cours;
Remontez, deſcendez près de l'aſtre des jours;
Lancez vos feux, volez; & revenant ſans ceſſe,
Des mondes épuiſés ranimez la vieilleſſe.
Et toi, ſœur du ſoleil, aſtre qui dans les Cieux
Des ſages éblouis trompois les faibles yeux,
Newton de ta carriére a marqué les limites:
Marche, éclaire les nuits, tes bornes ſont preſcrites.
Terre, change de forme, & que la peſanteur,
En abaiſſant le Pôle, éléve l'Equateur.
Pôle, immobile aux yeux, ſi lent dans votre courſe,
Fuyez le char glacé des ſept Aſtres de l'Ourſe:*
Embraſſez dans le cours de vos longs mouvemens
Deux cens ſiécles entiers par de-là ſix mille ans.
Que ces objets ſont beaux! Que notre ame épurée
Vole à ces vérités dont elle eſt éclairée!
Oui, dans le ſein de Dieu, loin de ce corps mortel,
L'eſprit ſemble écouter la voix de l'Eternel.
Vous, à qui cette voix ſe fait ſi bien entendre,
Comment avez-vous pû, dans un âge encor tendre,
Malgré les vains plaiſirs, ces écueils des beaux jours,
Prendre un vol ſi hardi, ſuivre un ſi vaſte cours,
Marcher après *Newton* dans cette route obſcure
Du labyrinthe immenſe où ſe perd la nature?
Puiſſé-je auprès de vous, dans ce Temple écarté,
Aux regards des François montrer la Vérité,

* C'eſt la Période de la preſſion des Equinoxes, laquelle s'accomplit en vingt-ſix mille neuf cens ans, ou environ.

Tandis * qu'Algaroti, ſûr d'inſtruire & de plaire,
Vers le Tibre étonné conduit cette Etrangére.
Que de nouvelles fleurs il orne ſes attraits,
Le compas à la main j'en tracerai les traits ;
De mes crayons groſſiers je peindrai l'immortelle ;
Cherchant à l'embellir, je la rendrois moins belle.
Elle eſt, ainſi que vous, noble, ſimple & ſans fard,
Au-deſſus de l'éloge, au-deſſus de mon art.

* M. Algaroti, jeune Vénitien, faiſoit imprimer alors à Veniſe un Traité ſur la Lumiére, dans lequel il expliquoit l'Attraction. Il y a eu ſept éditions de ſon Livre, lequel a été fort mal traduit en françois.

PRINCIPES



PRINCIPES MATHÉMATHIQUES DE LA *PHILOSOPHIE NATURELLE.*

DÉFINITIONS.

DÉFINITION PREMIERE.

La quantité de matiere ſe meſure par la denſité & le volume pris enſemble.

DEFINITIONS.

L'Air devenant d'une denſité double eſt quadruple en quantité, lorſque l'eſpace eſt double, & ſextuple, ſi l'eſpace eſt triple. On en peut dire autant de la neige & de la poudre condenſées par la liquéfaction ou la compreſſion, auſſi-bien que dans tous les corps condenſés par quelque cauſe que ce puiſſe être.

Je ne fais point attention ici au milieu qui paſſe librement entre les parties des corps, ſuppoſé qu'un tel milieu éxiſte. Je déſigne

DE'FINITIONS.

la quantité de matiere par les mots de *corps* ou de *maſſe*. Cette quantité ſe connoît par le poids des corps : car j'ai trouvé par des expériences très-éxactes ſur les pendules, que les poids des corps ſont proportionnels à leur maſſe ; je rapporterai ces expériences dans la ſuite.

DÉFINITION II.

La quantité de mouvement eſt le produit de la maſſe par la vîteſſe.

Le mouvement total eſt la ſomme du mouvement de chacune des parties ; ainſi la quantité du mouvement eſt double dans un corps dont la maſſe eſt double, ſi la vîteſſe reſte la même ; mais ſi on double la vîteſſe, la quantité du mouvement ſera quadruple.

DÉFINITION III.

La force qui réſide dans la matiere (vis inſita) *eſt le pouvoir qu'elle a de réſiſter. C'eſt par cette force que tout corps perſévere de lui-même dans ſon état actuel de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite.*

Cette force eſt toujours proportionnelle à la quantité de matiere des corps, & elle ne différe de ce qu'on appelle *l'inertie de la matiere*, que par la maniere de la concevoir : car l'inertie eſt ce qui fait qu'on ne peut changer ſans effort l'état actuel d'un corps ; ſoit qu'il ſe meuve, ſoit qu'il ſoit en repos ; ainſi on peut donner à la force qui réſide dans les corps le nom très-expreſſif de *force d'inertie*.

Le corps éxerce cette force toutes les fois qu'il s'agit de changer ſon état actuel, & on peut la conſidérer alors ſous deux différens aſpects, ou comme *réſiſtante*, ou comme *impulſive* : comme réſiſtante, en tant que le corps s'oppoſe à la force qui tend à lui faire changer d'état ; comme impulſive, en tant que le même corps fait effort pour changer l'état de l'obſtacle qui lui réſiſte.

On attribue communément la réſiſtance aux corps en repos, & la force impulſive à ceux qui ſe meuvent ; mais le mouvement

& le repos, tels qu'on les conçoit communément, ne ſont que reſpectifs : car les corps qu'on croit en repos ne ſont pas toujours dans un repos abſolu. DÉFINITIONS.

DÉFINITION IV.

La force imprimée (vis impreſſa) *eſt l'action par laquelle l'état du corps eſt changé, ſoit que cet état ſoit le repos, ou le mouvement uniforme en ligne droite.*

Cette force conſiſte uniquement dans l'action, & elle ne ſubſiſte plus dans le corps, dès que l'action vient à ceſſer. Mais le corps perſévere par ſa ſeule force d'inertie dans le nouvel état dans lequel il ſe trouve. La force imprimée peut avoir diverſes origines, elle peut être produite par le *choc*, par la *preſſion*, & par la *force centripete*.

DÉFINITION V.

La force centripete eſt celle qui fait tendre les corps vers quelque point, comme vers un centre, ſoit qu'ils ſoient tirés ou pouſſés vers ce point, ou qu'ils y tendent d'une façon quelconque.

La gravité qui fait tendre tous les corps vers le centre de la terre ; la force magnétique qui fait tendre le fer vers l'aimant, & la force, quelle qu'elle ſoit, qui retire à tout moment les planétes du mouvement rectiligne, & qui les fait circuler dans des courbes, ſont des forces de ce genre.

La pierre qu'on fait tourner par le moyen d'une fronde, agit ſur la main, en tendant la fronde, par un effort qui eſt d'autant plus grand, qu'on la fait tourner plus vîte, & elle s'échape auſſitôt qu'on ne la retient plus. La force éxercée par la main pour retenir la pierre, laquelle eſt égale & contraire à la force par laquelle la pierre tend la fronde, étant donc toujours dirigée vers la main, centre du cercle décrit, eſt celle que j'appelle *force centripete*. Il en eſt de même de tous les corps qui ſe meuvent en rond, ils font tous effort pour s'éloigner du centre de leur révo-

DÉFINITIONS.

lution ; & ſans le ſecours de quelque force qui s'oppoſe à cet effort & qui les retient dans leurs orbes, c'eſt-à-dire, de quelque *force centripete*, ils s'en iroient en ligne droite d'un mouvement uniforme.

Un projectile ne retomberoit point vers la terre, s'il n'étoit point animé par la force de la gravité, mais il s'en iroit en ligne droite dans les cieux avec un mouvement uniforme, ſi la réſiſtance de l'air étoit nulle. C'eſt donc par ſa gravité qu'il eſt retiré de la ligne droite, & qu'il s'infléchit ſans ceſſe vers la terre ; & il s'infléchit plus ou moins, ſelon ſa gravité & la vîteſſe de ſon mouvement. Moins la gravité du projectile ſera grande par rapport à ſa quantité de matiére, plus il aura de vîteſſe ; moins il s'éloignera de la ligne droite, & plus il ira loin avant de retomber ſur la terre.

Ainſi, ſi un boulet de canon étoit tiré horiſontalement du haut d'une montagne, avec une vîteſſe capable de lui faire parcourir un eſpace de deux lieues avant de retomber ſur la terre : avec une vîteſſe double, il n'y retomberoit qu'après avoir parcouru à peu près quatre lieues, & avec une vîteſſe décuple, il iroit dix fois plus loin ; (pourvû qu'on n'ait point d'égard à la réſiſtance de l'air,) & en augmentant la vîteſſe de ce corps, on augmenteroit à volonté le chemin qu'il parcoureroit avant de retomber ſur la terre, & on diminueroit la courbure de la ligne qu'il décriroit ; en ſorte qu'il pourroit ne retomber ſur la terre qu'à la diſtance de 10, de 30, ou de 90 degrés ; ou qu'enfin il pourroit circuler autour, ſans y retomber jamais, & même s'en aller en ligne droite à l'infini dans le ciel.

Or, par la même raiſon qu'un projectile pourroit tourner autour de la terre par la force de la gravité, il ſe peut faire que la lune par la force de ſa gravité, (ſuppoſé qu'elle gravite) ou par quelqu'autre force qui la porte vers la terre, ſoit détournée à tout moment de la ligne droite pour s'approcher de la terre, & qu'elle ſoit contrainte à circuler dans une courbe, & ſans une telle force, la lune ne pourroit être retenue dans ſon orbite.

Si cette force étoit moindre qu'il ne convient, elle ne retireroit pas aſſez la lune de la ligne droite; & ſi elle étoit plus grande, elle l'en retireroit trop, & elle la tireroit de ſon orbe vers la terre. La quantité de cette force doit donc être donnée; & c'eſt aux Mathématiciens à trouver la force centripete néceſſaire pour faire circuler un corps dans un orbite donné, & à déterminer réciproquement la courbe dans laquelle un corps doit circuler par une force centripete donnée, en partant d'un lieu quelconque donné, avec une vîteſſe donnée. DÉFINITIONS.

La quantité de la force centripete peut être conſidérée comme *abſolue, accélératrice & motrice.*

DÉFINITION VI.

La quantité abſolue de la force centripete eſt plus grande ou moindre, ſelon l'efficacité de la cauſe qui la propage du centre.

C'eſt ainſi que la force magnétique eſt plus grande dans un aimant que dans un autre, ſuivant la grandeur de la pierre, & l'intenſité de ſa vertu.

DÉFINITION VII.

La quantité accélératrice de la force centripete eſt proportionnelle à la vîteſſe qu'elle produit dans un temps donné.

La force magnétique du même aimant eſt plus grande à une moindre diſtance, qu'à une plus grande. La force de la gravité eſt plus grande dans les plaines, & moindre ſur le ſommet des hautes montagnes, & doit être encore moindre (comme on le prouvera dans la ſuite) à de plus grandes diſtances de la terre, & à des diſtances égales, elle eſt la même de tous côtés; c'eſt pourquoi elle accélére également tous les corps qui tombent, ſoit qu'ils ſoient légers ou peſans, grands ou petits, abſtraction faite de la réſiſtance de l'air.

DÉFINITIONS.

DÉFINITION VIII.

La quantité motrice de la force centripete eſt proportionnelle au mouvement qu'elle produit dans un temps donné.

Le poids des corps eſt d'autant plus grand, qu'ils ont plus de maſſe; & le même corps péſe plus près de la ſurface de la terre, que s'il étoit tranſporté dans le ciel. La quantité motrice de la force centripete eſt la force totale avec laquelle le corps tend vers le centre, & proprement ſon poids; & on peut toujours la connoître en connoiſſant la force contraire & égale qui peut empêcher le corps de deſcendre.

J'ai appellé ces différentes quantités de la force centripete, *motrices*, *accélératrices*, & *abſolues*, afin d'être plus court.

On peut, pour les diſtinguer, les rapporter *aux corps* qui ſont attirés vers un centre, *aux lieux* de ces corps, & *au centre* des forces.

On peut rapporter la force centripete motrice au corps, en la conſidérant comme l'effort que fait le corps entier pour s'approcher du centre, lequel effort eſt compoſé de celui de toutes ſes parties.

La force centripete accélératrice peut ſe rapporter au lieu du corps, en conſidérant cette force en tant qu'elle ſe répand du centre dans tous les lieux qui l'environnent, pour mouvoir les corps qui s'y rencontrent.

Enfin on rapporte la force centripete abſolue au centre, comme à une certaine cauſe ſans laquelle les forces motrices ne ſe propageroient point dans tous les lieux qui entourent le centre; ſoit que cette cauſe ſoit un corps central quelconque, (comme l'aimant dans le centre de la force magnétique, & la terre dans le centre de la force gravitante,) ſoit que ce ſoit quelqu'autre cauſe qu'on n'apperçoit pas. Cette façon de conſidérer la force centripete eſt purement mathématique: & je ne prétends point en donner la cauſe phyſique.

La force centripete accélératrice eſt donc à la force centripete motrice, ce que la vîteſſe eſt au mouvement ; car de même que la quantité de mouvement eſt le produit de la maſſe par la vîteſſe, la quantité de la force centripete motrice eſt le produit de la force centripete accélératrice par la maſſe ; car la ſomme de toutes les actions de la force centripete accélératrice ſur chaque particule du corps eſt la force centripete motrice du corps entier. Donc à la ſurface de la terre où la force accélératrice de la gravité eſt la même ſur tous les corps, la gravité motrice ou le poids des corps eſt proportionnel à leur maſſe ; & ſi on étoit placé dans des régions où la force accélératrice diminuât, le poids des corps y diminueroit pareillement ; ainſi il eſt toujours comme le produit de la maſſe par la force centripete accélératrice. Dans les régions où la force centripete accélératrice ſeroit deux fois moindre, le poids d'un corps ſousdouble ou ſoustriple ſeroit quatre fois ou ſix fois moindre.

Au reſte, je prens ici dans le même ſens les attractions & les impulſions accélératrices & motrices, & je me ſers indifféremment des mots d'*impulſion*, d'*attraction*, ou de *propenſion* quelconque vers un centre : car je conſidere ces forces mathématiquement & non phyſiquement ; ainſi le Lecteur doit bien ſe garder de croire que j'aie voulu déſigner par ces mots une eſpece d'action, de cauſe ou de raiſon phyſique ; & lorſque je dis que les centres attirent, lorſque je parle de leurs forces, il ne doit pas penſer que j'aie voulu attribuer aucune force réelle à ces centres que je conſidere comme des points mathématiques.

SCHOLIE.

Je viens de faire voir le ſens que je donne dans cet Ouvrage à des termes qui ne ſont pas communément uſités. Quant à ceux de *temps*, d'*eſpace*, de *lieu* & de *mouvement*, ils ſont connus de tout le monde ; mais il faut remarquer que pour n'avoir conſidéré ces quantités que par leurs relations à des choſes ſenſibles, on eſt tombé dans pluſieurs erreurs.

DÉFINITIONS.

Pour les éviter, il faut diſtinguer le temps, l'eſpace, le lieu, & le mouvement, en *abſolus* & *relatifs*, *vrais* & *apparens*, *mathématiques* & *vulgaires*.

I. Le temps abſolu, vrai & mathématique, ſans relation à rien d'extérieur, coule uniformément, & s'appelle *durée*. Le temps relatif, apparent & vulgaire, eſt cette meſure ſenſible & externe d'une partie de durée quelconque (égale ou inégale) priſe du mouvement : telles ſont les meſures d'*heures*, de *jours*, de *mois*, &c. dont on ſe ſert ordinairement à la place du temps vrai.

II. L'eſpace abſolu, ſans relation aux choſes externes, demeure toujours ſimilaire & immobile.

L'eſpace relatif eſt cette meſure ou dimenſion mobile de l'eſpace abſolu, laquelle tombe ſous nos ſens par ſa relation aux corps, & que le vulgaire confond avec l'eſpace immobile. C'eſt ainſi, par exemple, qu'un eſpace, pris au dedans de la terre ou dans le ciel, eſt déterminé par la ſituation qu'il a à l'égard de la terre.

L'eſpace abſolu & l'eſpace relatif ſont les mêmes d'eſpece & de grandeur ; mais ils ne le ſont pas toujours de nombre ; car, par exemple, lorſque la terre change de place dans l'eſpace, l'eſpace qui contient notre air demeure le même par rapport à la terre, quoique l'air occupe néceſſairement les différentes parties de l'eſpace dans leſquelles il paſſe, & qu'il en change réellement ſans ceſſe.

III. Le lieu eſt la partie de l'eſpace occupée par un corps, & par rapport à l'eſpace, il eſt ou relatif ou abſolu.

Je dis que le lieu eſt une partie de l'eſpace, & non pas ſimplement la ſituation du corps, ou la ſuperficie qui l'entoure : car les ſolides égaux ont toujours des lieux égaux, quoique leurs ſuperficies ſoient ſouvent inégales, à cauſe de la diſſemblance de leurs formes ; les ſituations, à parler exactement, n'ont point de quantité, ce ſont plutôt des affections des lieux, que des lieux proprement dits.

De même que le mouvement ou la tranſlation du tout hors de

ſon lieu eſt la ſomme des mouvemens ou des tranſlations des parties hors du leur ; ainſi le lieu du tout eſt la ſomme des lieux de toutes les parties, & ce lieu doit être interne, & être dans tout le corps entier (*& propterea internus & in corpore toto.*) DÉFINITIONS.

IV. Le mouvement abſolu eſt la tranſlation des corps d'un lieu abſolu dans un autre lieu abſolu, & le mouvement relatif eſt la tranſlation d'un lieu relatif dans un autre lieu relatif ; ainſi dans un vaiſſeau pouſſé par le vent, le lieu relatif d'un corps eſt la partie du vaiſſeau dans laquelle ce corps ſe trouve, ou l'eſpace qu'il occupe dans la cavité du vaiſſeau ; & cet eſpace ſe meut avec le vaiſſeau ; & le repos relatif de ce corps eſt ſa permanence dans la même partie de la cavité du vaiſſeau. Mais le repos vrai du corps eſt ſa permanence dans la partie de l'eſpace immobile, où l'on ſuppoſe que ſe meut le vaiſſeau & tout ce qu'il contient. Ainſi, ſi la terre étoit en repos, le corps qui eſt dans un repos relatif dans le Vaiſſeau auroit un mouvement vrai & abſolu, dont la vîteſſe ſeroit égale à celle qui emporte le vaiſſeau ſur la ſurface de la terre ; mais la terre ſe mouvant dans l'eſpace, le mouvement vrai & abſolu de ce corps eſt compoſé du mouvement vrai de la terre dans l'eſpace immobile, & du mouvement relatif du vaiſſeau ſur la ſurface de la terre ; & ſi le corps avoit un mouvement relatif dans le vaiſſeau, ſon mouvement vrai & abſolu ſeroit compoſé de ſon mouvement relatif dans le vaiſſeau, du mouvement relatif du vaiſſeau ſur la terre, & du mouvement vrai de la terre dans l'eſpace abſolu. Quant au mouvement relatif de ce corps ſur la terre, il ſeroit formé dans ce cas de ſon mouvement relatif dans le vaiſſeau, & du mouvement relatif du vaiſſeau ſur la terre. Enſorte que ſi la partie de la terre où ſe trouve ce vaiſſeau avoit un mouvement vrai vers l'orient, avec une vîteſſe diviſée en 10010 parties : que le vaiſſeau fût emporté vers l'occident avec 10 parties de cette vîteſſe ; & que le Pilote ſe promenât dans le vaiſſeau vers l'orient, avec une partie de cette même vîteſſe : ce Pilote auroit un mouvement réel & abſolu dans l'eſpace im-

DÉFINITIONS.

mobile, avec 10001 parties de vîteſſe vers l'orient, & un mouvement relatif ſur la terre vers l'occident avec 9 parties de vîteſſe.

On diſtingue en aſtronomie le temps abſolu du temps relatif par l'*équation du temps*. Car les jours naturels ſont inégaux, quoiqu'on les prenne communément pour une meſure égale du temps; & les Aſtronomes corrigent cette inégalité, afin de meſurer les mouvemens céleſtes par un temps plus éxact.

Il eſt très poſſible qu'il n'y ait point de mouvement parfaitement égal, qui puiſſe ſervir de meſure éxacte du temps; car tous les mouvemens peuvent être accélérés & retardés, mais le temps abſolu doit toujours couler de la même maniére.

La durée ou la perſévérance des choſes eſt donc la même, ſoit que les mouvemens ſoient prompts, ſoit qu'ils ſoient lents, & elle ſeroit encore la même, quand il n'y auroit aucun mouvement; ainſi il faut bien diſtinguer le temps de ſes meſures ſenſibles, & c'eſt ce qu'on fait par l'équation aſtronomique. La néceſſité de cette équation dans la détermination des Phénomènes ſe prouve aſſez par l'expérience des horloges à pendule, & par les obſervations des Eclipſes des ſatellites de Jupiter.

L'ordre des parties de l'eſpace eſt auſſi immuable que celui des parties du temps; car ſi les parties de l'eſpace ſortoient de leur lieu, ce ſeroit, ſi l'on peut s'exprimer ainſi, ſortir d'elles-mêmes. Les temps & les eſpaces n'ont pas d'autres lieux qu'eux-mêmes, & ils ſont les lieux de toutes les choſes. Tout eſt dans le temps, quant à l'ordre de la ſucceſſion: tout eſt dans l'eſpace, quant à l'ordre de la ſituation. C'eſt là ce qui détermine leur eſſence, & il ſeroit abſurde que les lieux primordiaux ſe mûſſent. Ces lieux ſont donc les lieux abſolus, & la ſeule tranſlation de ces lieux fait les mouvemens abſolus.

Comme les parties de l'eſpace ne peuvent être vûes ni diſtinguées les unes des autres par nos ſens, nous y ſuppléons par des meſures ſenſibles. Ainſi nous déterminons les lieux par les poſi-

tions & les diſtances à quelque corps que nous regardons comme immobile, & nous meſurons enſuite les mouvemens des corps par rapport à ces lieux ainſi déterminés : nous nous ſervons donc des lieux & des mouvemens relatifs à la place des lieux & des mouvemens abſolus ; & il eſt à propos d'en uſer ainſi dans la vie civile ; mais dans les matieres philoſophiques, il faut faire abſtraction des ſens ; car il ſe peut faire qu'il n'y ait aucun corps véritablement en repos, auquel on puiſſe rapporter les lieux & les mouvemens. DÉFINITIONS

Le repos & le mouvement relatifs & abſolus ſont diſtingués par leurs *propriétés*, leurs *cauſes* & leurs *effets*. La propriété du repos eſt que les corps véritablement en repos y ſont les uns à l'égard des autres. Ainſi, quoiqu'il ſoit poſſible qu'il y ait quelque corps dans la région des fixes, ou beaucoup au-delà, qui ſoit dans un repos abſolu, comme on ne peut pas connoître par la ſituation qu'ont entr'eux les corps d'ici-bas, ſi quelqu'un de ces corps conſerve ou non ſa ſituation par rapport à ce corps éloigné, on ne ſçauroit déterminer, par le moyen de la ſituation que ces corps ont entr'eux, s'ils ſont véritablement en repos.

La propriété du mouvement eſt que les parties qui conſervent des poſitions données par rapport aux touts participent aux mouvemens de ces touts ; car ſi un corps ſe meut autour d'un axe, toutes ſes parties font effort pour s'éloigner de cet axe, & s'il a un mouvement progreſſif, ſon mouvement total eſt la ſomme des mouvemens de toutes ſes parties. De cette propriété il ſuit, que ſi un corps ſe meut, les corps qu'il contient, & qui ſont par rapport à lui dans un repos relatif, ſe meuvent auſſi ; & par conſéquent le mouvement vrai & abſolu ne ſçauroit être défini par la tranſlation du voiſinage des corps extérieurs, que l'on conſidére comme en repos. Il faut que les corps extérieurs ſoient non ſeulement regardés comme en repos, mais qu'ils y ſoient véritablement : autrement les corps qu'ils renferment, outre leur tranſla-

DÉFINITIONS.

tion du voiſinage des ambians, participeront encore au mouvement vrai des ambians, & s'ils ne changeoient point de poſition par rapport aux parties des ambians, ils ne ſeroient pas pour cela véritablement en repos ; mais ils ſeroient ſeulement conſidérés comme en repos. Les corps ambians ſont à ceux qu'ils contiennent, comme toutes les parties extérieures d'un corps ſont à toutes ſes parties intérieures, ou comme l'écorce eſt au noyau. Or l'écorce étant muë, le noyau ſe meut auſſi, quoiqu'il ne change point ſa ſituation par rapport aux parties de l'écorce qui l'environnent.

Il ſuit de cette propriété du mouvement qu'un lieu étant mû, tout ce qu'il contient ſe meut auſſi, & par conſéquent qu'un corps qui ſe meut dans un lieu mobile, participe au mouvement de ce lieu. Tous les mouvemens qui s'éxécutent dans des lieux mobiles ne ſont donc que les parties des mouvemens entiers & abſolus. Le mouvement entier & abſolu d'un corps eſt compoſé du mouvement de ce corps dans le lieu où l'on le ſuppoſe, du mouvement de ce lieu dans le lieu où il eſt placé lui-même, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce qu'on arrive à un lieu immobile, comme dans l'éxemple du Pilote dont on a parlé ci-deſſus. Ainſi les mouvemens entiers & abſolus ne peuvent ſe déterminer qu'en les conſidérant dans un lieu immobile : & c'eſt pourquoi j'ai rapporté ci-deſſus les mouvemens abſolus à un lieu immobile, & les mouvemens relatifs à un lieu mobile. Il n'y a de lieux immobiles que ceux qui conſervent à l'infini dans tous les ſens leurs ſituations reſpectives; & ce ſont ces lieux qui conſtituent l'eſpace que j'appelle *immobile*.

Les cauſes par leſquelles on peut diſtinguer le mouvement vrai du mouvement relatif ſont les forces imprimées dans les corps pour leur donner le mouvement: car le mouvement vrai d'un corps ne peut être produit ni changé que par des forces imprimées à ce corps même ; au lieu que ſon mouvement relatif peut être produit & changé, ſans qu'il éprouve l'action d'au-

cune force : il ſuffit qu'il y ait des forces qui agiſſent ſur les corps par rapport auſquels on le conſidere, puiſque ces corps étant mûs, la relation dans laquelle conſiſte le repos ou le mouvement relatif change, de même, le mouvement abſolu d'un corps peut changer, ſans que ſon mouvement relatif change ; car ſi les forces qui agiſſent ſur ce corps agiſſoient en même temps ſur ceux par rapport auſquels on le conſidere, & en telle ſorte que les relations reſtaſſent toujours les mêmes, le mouvement relatif, qui n'eſt autre choſe que ces relations, ne changeroit point. Ainſi le mouvement relatif peut changer, tandis que le mouvement vrai & abſolu reſte le même, & il peut ſe conſerver auſſi, quoique le mouvement abſolu change ; il eſt donc ſûr que le mouvement abſolu ne conſiſte point dans ces ſortes de relations.

Les effets par leſquels on peut diſtinguer le mouvement abſolu du mouvement relatif, ſont les forces qu'ont les corps qui tournent pour s'éloigner de l'axe de leur mouvement ; car dans le mouvement circulaire purement relatif, ces forces ſont nulles, & dans le mouvement circulaire vrai & abſolu elles ſont plus ou moins grandes, ſelon la quantité du mouvement.

Si on fait tourner en rond un vaſe attaché à une corde juſqu'à-ce que la corde, à force d'être torſe, devienne en quelque ſorte infléxible ; ſi on met enſuite de l'eau dans ce vaſe, & qu'après avoir laiſſé prendre à l'eau & au vaſe l'état de repos, on donne à la corde la liberté de ſe détortiller, le vaſe acquérera par ce moyen un mouvement qui ſe conſervera très long temps : au commencement de ce mouvement la ſuperficie de l'eau contenue dans le vaſe reſtera plane, ainſi qu'elle l'étoit avant que la corde ſe détortillât ; mais enſuite le mouvement du vaſe ſe communiquant peu à peu à l'eau qu'il contient, cette eau commencera à tourner, à s'élever vers les bords, & à devenir concave, comme je l'ai éprouvé, & ſon mouvement s'augmentant, les bords de cette eau s'éléveront de plus en plus, juſqu'à-ce que ſes révolutions s'achevant dans des temps égaux à ceux dans leſquels le vaſe fait un tour entier, l'eau

DÉFINITIONS.

ſera dans un repos relatif par rapport à ce vaſe. L'aſcenſion de l'eau vers les bords du vaſe marque l'effort qu'elle fait pour s'éloigner du centre de ſon mouvement, & on peut connoître & meſurer par cet effort le mouvement circulaire vrai & abſolu de cette eau, lequel eſt entiérement contraire à ſon mouvement relatif; car dans le commencement où le mouvement relatif de l'eau dans le vaſe étoit le plus grand, ce mouvement n'excitoit en elle aucun effort pour s'éloigner de l'axe de ſon mouvement: l'eau ne s'élevoit point vers les bords du vaſe, mais elle demeuroit plane, & par conſéquent elle n'avoit pas encore de mouvement circulaire vrai & abſolu: lorſqu'enſuite le mouvement relatif de l'eau vint à diminuer, l'aſcenſion de l'eau vers les bords du vaſe marquoit l'effort qu'elle faiſoit pour s'éloigner de l'axe de ſon mouvement; & cet effort, qui alloit toujours en augmentant, indiquoit l'augmentation de ſon mouvement circulaire vrai. Enfin ce mouvement vrai fut le plus grand, lorſque l'eau fut dans un repos relatif dans le vaſe. L'effort que faiſoit l'eau pour s'éloigner de l'axe de ſon mouvement, ne dépendoit donc point de ſa tranſlation du voiſinage des corps ambians, & par conſéquent le mouvement circulaire vrai ne peut ſe déterminer par de telles tranſlations.

Le mouvement vrai circulaire de tout corps qui tourne eſt unique, & il répond à un ſeul effort qui eſt ſa meſure naturelle & éxacte; mais les mouvemens relatifs ſont variés à l'infini; ſelon toutes les relations aux corps extérieurs; & tous ces mouvemens, qui ne ſont que des relations, n'ont aucun effet réel, qu'en tant qu'ils participent du mouvement vrai & unique. De-là il ſuit que dans le ſyſtême de ceux qui prétendent que nos cieux tournent au-deſſous des cieux des Etoiles fixes, & qu'ils emportent les Planetes par leurs mouvemens: toutes les parties des cieux, & les Planetes qui ſont en repos par rapport aux cieux qui les environnent ſe meuvent réellement; car elles changent leur poſition entre elles (au contraire de ce qui arrive aux corps qui ſont dans un

repos abſolu) & étant tranſportées avec les cieux qui les entourent, elles font effort, ainſi que les parties des touts qui tournent, pour s'éloigner de l'axe du mouvement. DÉFINITIONS.

Les quantités relatives ne ſont donc pas les véritables quantités dont elles portent le nom, mais ce ſont les meſures ſenſibles, (éxactes ou non éxactes) que l'on employe ordinairement pour les meſurer. Or comme la ſignification des mots doit répondre à l'uſage qu'on en fait, on auroit tort ſi on entendoit par les mots de *temps*, d'*eſpace*, de *lieu* & de *mouvement*, autre choſe que les meſures ſenſibles de ces quantités, excepté dans le langage purement mathématique. Lorſqu'on trouve donc ces termes dans l'Ecriture, ce ſeroit faire violence au texte ſacré, ſi au lieu de les prendre pour les quantités qui leur ſervent de meſures ſenſibles, on les prenoit pour les véritables quantités abſolues, ce ſeroit de même aller contre le but de la Philoſophie & des Mathématiques, de confondre ces mêmes meſures ſenſibles ou quantités relatives avec les quantités abſolues qu'elles meſurent.

Il faut avouer qu'il eſt très difficile de connoître les mouvemens vrais de chaque corps, & de les diſtinguer actuellement des mouvemens apparens, parce que les parties de l'eſpace immobile dans leſquelles s'éxécutent les mouvemens vrais, ne tombent pas ſous nos ſens. Cependant il ne faut pas en déſeſpérer entiérement; car on peut ſe ſervir, pour y parvenir, tant des mouvemens apparens, qui ſont les différences des mouvemens vrais, que des forces qui ſont les cauſes & les effets des mouvemens vrais. Si, par éxemple, deux globes attachés l'un à l'autre par le moyen d'un fil de longueur donnée viennent à tourner autour de leur centre commun de gravité, la tenſion du fil fera connoître l'effort qu'ils font pour s'écarter du centre du mouvement, & donnera par ce moyen la quantité du mouvement circulaire. Enſuite, ſi en frappant ces deux globes en même-temps, dans des ſens oppoſés, & avec des forces égales, on augmente ou on diminue le mouvement circulaire, on connoîtra par l'augmen-

DÉFINITIONS.

tation ou la diminution de la tenſion du fil, l'augmentation ou la diminution du mouvement; & enfin on trouvera par ce moyen les côtés de ces globes où les forces doivent être imprimées pour augmenter le plus qu'il eſt poſſible le mouvement, c'eſt-à-dire, les côtés qui ſe meuvent parallélement au fil, & qui ſuivent ſon mouvement; connoiſſant donc ces côtés & leurs oppoſés qui précédent le mouvement du fil, on aura la détermination du mouvement.

On parviendroit de même à connoître la quantité & la détermination de ce mouvement circulaire dans un vuide quelconque immenſe, où il n'y auroit rien d'extérieur ni de ſenſible à quoi on pût rapporter le mouvement de ces globes.

Si dans cet eſpace il ſe trouvoit quelques autres corps très éloignés qui conſervaſſent toujours entr'eux une poſition donnée, tels que ſont les étoiles fixes, on ne pourroit ſçavoir par la tranſlation relative des globes, par rapport à ces corps, s'il faudroit attribuer le mouvement aux globes, ou s'il le faudroit ſuppoſer dans ces corps; mais ſi en faiſant attention au fil qui joint les globes, on trouvoit ſa tenſion telle que le mouvement des globes le requiert; alors non-ſeulement on verroit avec certitude que ce ſont les globes qui ſe meuvent, & que les autres corps ſont en repos; mais on auroit la détermination du mouvement de ces globes par leurs tranſlations relatives à l'égard des corps.

On fera voir plus amplement dans la ſuite comment les mouvemens vrais peuvent ſe connoître par leurs cauſes, leurs effets, & leurs différences apparentes, & comment on peut connoître au contraire par les mouvemens vrais ou apparens leurs cauſes & leurs effets, & c'eſt principalement dans cette vûe qu'on a compoſé cet Ouvrage.

AXIOMES, OU LOIX DU MOUVEMENT.

PREMIERE LOI.

Tout corps perſévére dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il ſe trouve, à moins que quelque force n'agiſſe ſur lui, & ne le contraigne à changer d'état.

LEs projectiles par eux-mêmes perſévérent dans leurs mouvemens, mais la réſiſtance de l'air les retarde, & la force de la gravité les porte vers la terre. Une toupie, dont les parties ſe détournent continuellement les unes les autres de la ligne droite par leur cohérence réciproque, ne ceſſe de tourner, que parceque la réſiſtance de l'air la retarde peu à peu. Les planettes & les cométes qui ſont de plus grandes maſſes, & qui ſe meuvent dans des eſpaces moins réſiſtans, conſervent plus long-temps leurs mouvemens progreſſifs & circulaires.

II. LOI.

Les changemens qui arrivent dans le mouvement ſont proportionnels à la force motrice, & ſe font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée.

Si une force produit un mouvement quelconque, une force double de cette premiere produira un mouvement double, & une force triple un mouvement triple, ſoit qu'elle ait été imprimée en un ſeul coup, ſoit qu'elle l'ait été peu à peu & ſucceſſivement, & ce mouvement, étant toujours déterminé du même côté que la force génératrice, ſera ajoûté au mouvement que le corps eſt

AXIOMES, OU LOIX DU MOUVEMENT.

ſuppoſé avoir déja, s'il conſpire avec lui ; ou en ſera retranché, s'il lui eſt contraire, ou bien ſera retranché ou ajoûté en partie, s'il lui eſt oblique ; & de ces deux mouvemens il s'en formera un ſeul, dont la détermination ſera compoſée des deux premieres.

III. LOI.

L'action eſt toujours égale & oppoſée à la réaction ; c'eſt-à-dire, que les actions de deux corps l'un ſur l'autre ſont toujours égales, & dans des directions contraires.

Tout corps qui preſſe ou tire un autre corps eſt en même-temps tiré ou preſſé lui-même par cet autre corps. Si on preſſe une pierre avec le doigt, le doigt eſt preſſé en même-temps par la pierre. Si un cheval tire une pierre par le moyen d'une corde, il eſt également tiré par la pierre : car la corde qui les joint & qui eſt tendue des deux côtés, fait un effort égal pour tirer la pierre vers le cheval, & le cheval vers la pierre ; & cet effort s'oppoſe autant au mouvement de l'un, qu'il excite le mouvement de l'autre.

Si un corps en frappe un autre, & qu'il change ſon mouvement, de quelque façon que ce ſoit, le mouvement du corps choquant ſera auſſi changé de la même quantité & dans une direction contraire par la force du corps choqué, à cauſe de l'égalité de leur preſſion mutuelle.

Par ces actions mutuelles, il ſe fait des changemens égaux, non pas de vîteſſe, mais de mouvement, pourvû qu'il ne s'y mêle aucune cauſe étrangere ; car les changemens de vîteſſe qui ſe font de la même maniére dans des directions contraires doivent être réciproquement proportionnels aux maſſes, à cauſe que les changemens de mouvement ſont égaux. Cette loi a lieu auſſi dans les attractions, comme je le prouverai dans le ſcholie ſuivant.

COROLLAIRE I.

Un corps pouſſé par deux forces parcourt, par leurs actions réunies, la Diagonale d'un parallélogramme dans le même temps, dans lequel il auroit parcouru ſes côtés ſéparément.

Si le corps, pendant un temps donné, eut été tranſporté de *A* en *B*, d'un mouvement uniforme par la ſeule force *M* imprimée en *A*; & que par la ſeule force *N*, imprimée dans le même lieu *A*, il eut été tranſporté de *A* en *C*, le corps par ces deux forces réunies ſera tranſporté dans le même temps dans la diagonale *AD* du parallélogramme *ABCD*; car puiſque la force *N* agit ſelon la ligne *AC* parallele à *BD*, cette force, ſelon la ſeconde loi du mouvement, ne changera rien à la vîteſſe avec laquelle ce corps s'approche de cette ligne *BD*, par l'autre force *M*. Le corps s'approchera donc de la ligne *BD* dans le même temps, ſoit que la force *N* lui ſoit imprimée, ſoit qu'elle ne le ſoit pas; ainſi à la fin de ce temps il ſera dans quelque point de cette ligne *BD*. On prouvera de la même maniére qu'à la fin de ce même temps le corps ſera dans un point quelconque de la ligne *CD*. Donc il ſera néceſſairement dans le point d'interſection *D* de ces deux lignes, & par la premiere loi il ira d'un mouvement rectiligne de *A* en *D*. Fig. 1.

COROLLAIRE II.

D'où l'on voit qu'une force directe AD *eſt compoſée des forces obliques quelconques* AB *&* BD, *& réciproquement qu'elle peut toujours ſe réſoudre dans les forces obliques quelconques* AB *&* BD. *Cette réſolution & cette compoſition des forces ſe trouve confirmée à tout moment dans la méchanique.*

Suppoſons que du centre *O* d'une rouë partent des rayons inégaux *OM*, *ON*, qui ſoutiennent par des fils *MA*, *NP* des poids *A* & *P*, & qu'on cherche les forces de ces poids pour faire tourner cette rouë. Fig. 2.

AXIOMES, OU LOIX DU MOUVEMENT.

On menera d'abord par le centre *O* la droite *KOL* perpendiculaire en *K* & en *L* aux fils *MA*, *NP*, & du centre *O* & de l'intervalle *OL*, le plus grand des intervalles *OK*, *OL* on décrira un cercle. On tirera enſuite par le centre *O*, & par l'interſection *D* de ce cercle avec le fil *MA* la droite *O D* à laquelle on menera par *A* la parallele *AC*, terminée en *C* par la droite *DC*, qui lui eſt perpendiculaire. Cela poſé, comme il eſt indifférent que les points K, *L*, *D*, des fils ſoient attachés ou non au plan de la roue, les poids feront le même effet, ſoit qu'ils ſoient attachés aux points *K* & *L*, ſoit qu'ils ſoient attachés aux points *D* & *L*.

Fig. 2.

Soit donc exprimée la force totale du corps *A* par la ligne *AD*, & ſoit cette force décompoſée dans les deux forces *AC*, & *CD*, la premiere *AC* tirant le rayon *OD* dans ſa direction, ne contribue point au mouvement de la roue; mais la ſeconde *DC* tirant le rayon *OD* perpendiculairement, fait le même effet que ſi elle tiroit perpendiculairement le rayon *OL* égal à *OD*, c'eſt-à-dire qu'elle ſera équivalente au poids *P*, pourvû que ce poids ſoit au poids *A*, comme la force *DC* eſt à la force *DA*, ou, ce qui revient au même (à cauſe des triangles ſemblables *ADC*, *DOK*) comme *OK* à *OD* ou *OL*: Donc ſi les poids *A* & *P* ſont pris dans la raiſon renverſée des rayons *OK*, *OL*, auſquels ils ſont appliqués, ils ſeront en équilibre, ce qui eſt la propriété ſi connue du levier, de la balance, & du treüil. Si l'un des poids eſt à l'autre dans une plus grande raiſon, ſa force en ſera d'autant plus grande pour mouvoir la roue.

Suppoſons préſentement que le poids *p* égal au poids *P*, ſoit en partie ſoutenu par le fil *Np*, & en partie par le plan *p G*, on menera *p H* & *NH*, la premiere perpendiculaire à l'horiſon, & l'autre au plan *p G*, & prenant *p H* pour exprimer la force avec laquelle le corps *p* tend en en bas, on décompoſera cette force dans les deux *p H* & *NH*. Imaginant enſuite que le poids *p*, au lieu d'être attaché au fil *Np*, fut arrêté par un plan *p Q* perpendiculaire à la direction *Np*, & coupant le plan *p G*, dans une ligne

parallele à l'horiſon, il eſt clair que les forces avec leſquelles le corps preſſeroit les plans pQ, pG, qui le retiendroient dans cette ſuppoſition, ſeroient exprimées, la premiere par pN, & la ſeconde par HN. Donc en ſupprimant le plan pQ, & laiſſant le fil Np qui fait abſolument le même effet, la tenſion de ce fil ſera la même force pN avec laquelle le plan pQ étoit preſſé.

Ainſi la tenſion du fil, lorſqu'il eſt dans la ſituation oblique pN, eſt à la tenſion du même fil, lorſqu'il a, comme dans le cas précédent, la ſituation perpendiculaire PN, comme pN à pH. C'eſt pourquoi ſi le poids p eſt au poids A dans la raiſon compoſée de la raiſon réciproque des moindres diſtances du centre de la rouë aux fils pN & AM, & de la raiſon directe de pH à pN; ces poids auront une égale force pour faire mouvoir la rouë, & ſeront par conſéquent en équilibre, ce dont tout le monde peut reconnoître la vérité. Fig. 1

Le poids p, en s'appuyant ſur ces deux plans obliques, eſt dans le même cas qu'un coin entre les deux ſurfaces internes du corps qu'il fend: & on peut connoître par-là les forces du coin & du marteau: puiſqu'en effet la force avec laquelle le corps p, preſſe le plan pQ, eſt à la force avec laquelle ce même corps eſt pouſſé vers ces plans, ſuivant la ligne perpendiculaire pH, par la force de ſa gravité ou par les coups du marteau, comme pN à pH; & à la force par laquelle il preſſe l'autre plan pG, comme pN à HN.

On peut par une ſemblable décompoſition des forces trouver la force de la vis; car la vis n'eſt autre choſe qu'un coin mû par un levier, ce qui fait voir la fécondité de ce Corollaire, & fournit de nouvelles preuves de ſa vérité; il peut ſervir de baſe à toute la méchanique dans laquelle on a employé juſqu'à préſent tant de différens principes.

On en tire aiſément, par éxemple, les forces de toutes les machines compoſées de rouës, de tambours, de poulies, de leviers, de cordes tendues, de poids montans directement ou obliquement,

AXIOMES, OU LOIX DU MOUVEMENT.

& enfin de toutes les puiſſances dont les machines ſont ordinairement compoſées ; on en tireroit auſſi les forces néceſſaires aux tendons pour mouvoir les membres des animaux.

COROLLAIRE III.

La quantité de mouvement, qui réſulte de la ſomme de tous les mouvemens vers le même côté, & de leurs différences vers des côtés oppoſés, ne change point par l'action des corps entr'eux.

L'action & la réaction ſont égales, ſuivant la troiſiéme loi ; donc par la ſeconde elles produiſent dans les mouvemens des changemens égaux dans des directions oppoſées. Donc ſi les mouvemens ſe font du même côté ; ce qui ſera ajoûté au mouvement du corps chaſſé, doit être ôté du mouvement de celui qui le ſuit, enſorte que la ſomme des mouvemens demeure la même qu'auparavant. Si les corps viennent de deux côtés oppoſés, il faudra retrancher également du mouvement de ces deux corps, & par conſéquent la différence des mouvemens vers des côtés oppoſés demeurera toujours la même.

Suppoſons, par éxemple, que la boule *A* ſoit triple de la boule *B*, & qu'elle ait deux parties de vîteſſe, & que *B* la ſuive dans la même ligne droite avec 10 parties de vîteſſe, le mouvement du corps *A* ſera à celui du corps *B*, comme 6 à 10 : Prenant donc 6 & 10 pour exprimer les quantités de mouvement de ces corps, 16 ſera la ſomme de leurs mouvemens.

Lorſque ces corps viendront à ſe rencontrer, ſi le corps *A* gagne 3, 4 ou 5 parties de mouvement, le corps *B* en perdra autant, enſorte que le corps *A*, après la réfléxion continuant ſon chemin avec 9, 10 ou 11 parties de mouvement, le corps *B*, ira avec 7, 6 ou 5, & la ſomme ſera toujours de 16 parties comme auparavant. Si le corps *A* gagne 9, 10, 11 ou 12 parties, & qu'il pourſuive par conſéquent ſon chemin après le choc avec 15, 16, 17 ou 18 parties de mouvement ; le corps *B* perdant tout ce que le corps *A* gagne, continuera de ſe mouvoir

vers le même côté avec une partie de mouvement, après en avoir perdu 9, ou il reſtera en repos, ayant perdu les 10 parties de mouvement progreſſif qu'il avoit, ou il retournera vers le côté oppoſé avec un degré de mouvement, après avoir perdu tout ce qu'il avoit & même une partie de plus (ſi je puis m'exprimer ainſi), ou bien enfin il retournera vers le côté oppoſé avec deux parties de mouvement, après avoir perdu 12 parties de ſon mouvement progreſſif. Ainſi les ſommes des mouvemens conſpirans 15+1 ou 16+0, & les différences des mouvemens oppoſés 17−1 & 18−2, ſeront toujours 16 parties comme avant le choc & la réfléxion: Connoiſſant donc la quantité de mouvement avec laquelle les corps ſe meuvent après la réfléxion, on trouvera la vîteſſe de chacun, en ſuppoſant que cette vîteſſe ſoit à la vîteſſe avant la réfléxion, comme le mouvement après la réfléxion eſt au mouvement avant la réfléxion. Ainſi dans le dernier cas, où le corps *A* avoit 6 parties de mouvement avant la réfléxion, & 18 après, & 2 de vîteſſe avant la réflexion; ou trouveroit que la vîteſſe après la téfléxion ſeroit 6, en diſant, comme 6 parties de mouvement avant la réfléxion, ſont à 18 parties après la réfléxion; ainſi 2 de vîteſſe avant la réfléxion ſont à 6 de vîteſſeaprès la réfléxion.

Si les corps n'étoient pas ſphériques, ou que ſe mouvant ſuivant diverſes lignes droites, ils vinſſent à ſe choquer obliquement, pour trouver leur mouvement après la réfléxion; il faudra commencer par connoître la ſituation du plan qui touche tous les corps choquans au point de concours: Enſuite (par le Cor. 2.) on décompoſera le mouvement de chaque corps en deux mouvemens, l'un perpendiculaire & l'autre parallele à ce plan tangent: & comme les corps n'agiſſent les uns ſur les autres que ſelon la ligne perpendiculaire au plan tangent, les mouvemens paralleles ſeront les mêmes après & avant la réfléxion; & les mouvemens perpendiculaires éprouveront des changemens égaux vers les côtés oppoſés; enſorte que la ſomme des mouvemens conſpirans & la différence des mouvemens oppoſés, reſteront toujours les mêmes

AXIOMES, OU LOIX DU MOUVEMENT.

qu'auparavant. C'eſt de ces ſortes de réfléxions que viennent ordinairement les mouvemens circulaires des corps autour de leurs centres; mais je ne conſidérerai point ces cas dans la ſuite, parce qu'il ſeroit trop long de démontrer tout ce qui y a rapport.

COROLLAIRE IV.

Le centre commun de gravité de deux corps ou de pluſieurs corps ne change point ſon état de mouvement ou de repos, par l'action réciproque de ces corps; ainſi le centre commun de gravité de tous les corps qui agiſſent les uns ſur les autres (ſuppoſé qu'il n'y ait aucune action ni aucun obſtacle extérieur) eſt toujours en repos, ou ſe meut uniformément en ligne droite.

Car, ſi deux points ſe meuvent uniformément en ligne droite, & que leur diſtance ſoit diviſée en raiſon donnée, le point de diviſion ſera en repos, ou il ſe mouvera uniformément en ligne droite. C'eſt ce qu'on trouvera démontré ci-après dans le Lemme 23 & dans ſon Corollaire, pour le cas où les deux points ſe meuvent dans le même plan; & ce qui ſe démontre facilement par la même méthode pour le cas où les deux points ſercient dans des plans différens. Donc, ſi des corps quelconques ſe meuvent uniformément en ligne droite, le commun centre de gravité de deux de ces corps, ou ſera en repos, ou ſe mouvera uniformément en ligne droite; parce que la ligne, qui joint les centres de ces corps, ſera diviſée par leur centre commun de gravité dans une raiſon donnée. De même le commun centre de gravité de ces deux corps & d'un troiſiéme, ſera en repos ou ſe mouvera uniformément en ligne droite; à cauſe que la ligne qui joint le centre commun de gravité de ces deux corps, & le centre du troiſiéme ſera encore diviſée par le commun centre de gravité de ces trois corps en raiſon donnée. Enfin le commun centre de gravité de ces trois corps & d'un quatriéme quelconque ſera en repos ou ſera mû uniformément en ligne droite; parce que la ligne qui joint le centre commun de gravité de ces trois corps, & le centre du quatriéme ſera

diviſée

diviſée par le centre commun de gravité de ces quatre corps en raiſon donnée & ainſi à l'infini. Donc dans un ſyſtême de corps, dont les actions réciproques les uns ſur les autres ne ſont point troublées par aucune action ou empêchement externe, & dont par conſéquent chacun ſe meut uniformément en ligne droite, le commun centre de gravité de tous ces corps ſera en repos ou ſera mû uniformément en ligne droite.

De plus, dans un ſyſtême compoſé de deux corps qui agiſſent l'un ſur l'autre, les diſtances des centres de chacun de ces corps à leur commun centre de gravité étant en raiſon réciproque de la maſſe de ces corps; les mouvemens relatifs de ces corps, pour s'éloigner ou pour s'approcher de ce centre commun de gravité, ſeront égaux entr'eux. Donc, ni les changemens égaux qui ſe font dans le mouvement de ces corps en ſens contraire, ni par conſéquent leur action mutuelle l'un ſur l'autre, ne changeront rien à l'état de leur centre commun de gravité qui ne ſera ni accéléré ni retardé, & qui ne recevra enfin aucune altération dans ſon état de mouvement ou de repos.

Puiſque dans un ſyſtême de pluſieurs corps, le centre de gravité de deux quelconques de ces corps qui agiſſent l'un ſur l'autre, ne change point d'état par cette action; & que le commun centre de gravité des autres, avec leſquels cette action n'a aucun rapport, n'en ſouffre aucune altération; la diſtance de ces deux centres ſera diviſée par le centre commun de tous ces corps dans des parties réciproquement proportionnelles aux ſommes totales des corps dont ils ſont les centres; & par conſéquent ces deux centres conſervant leur état de repos ou de mouvement, le centre commun de tous ces corps conſervera auſſi le ſien; car il eſt clair que le centre commun de tous ces corps ne changera point ſon état de repos ou de mouvement par les actions de deux quelconques de ces corps entr'eux.

Or, dans un tel ſyſtême, toutes les actions des corps les uns ſur les autres, ou ſont éxercées entre deux corps, ou ſont compoſées

AXIOMES, OU LOIX DU MOUVEMENT.

d'actions entre deux corps ; & par conſéquent elles ne produiſent aucun changement dans l'état de repos ou de mouvement du centre commun de tous ces corps. C'eſt pourquoi comme ce centre eſt en repos, ou qu'il ſe meut uniformément en ligne droite, lorſque les corps n'agiſſent point les uns ſur les autres ; il continuera de même, malgré l'action réciproque de ces corps, à être en repos, ou à ſe mouvoir uniformément en ligne droite, pourvû qu'il ne ſoit point tiré de ſon état par des forces étrangeres.

La loi d'un ſyſtême de pluſieurs corps eſt donc la même que celle d'un corps ſeul, quant à la permanence dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite où ils ſe trouvent. Et le mouvement progreſſif d'un corps ou d'un ſyſtême de corps, doit toujours s'eſtimer par le mouvement de leur centre de gravité.

COROLLAIRE V.

Les mouvemens des corps enfermés dans un eſpace quelconque ſont les mêmes entr'eux, ſoit que cét eſpace ſoit en repos, ſoit qu'il ſe meuve uniformément en ligne droite ſans mouvement circulaire.

Car les différences des mouvemens qui tendent vers le même côté, & les ſommes de ceux qui tendent vers des côtés oppoſés, ſont les mêmes au commencement du mouvement dans l'un & l'autre cas (par l'hypothèſe,) mais c'eſt de ces ſommes ou de ces différences qu'on tire l'effort avec lequel les corps ſe choquent mutuellement : Donc par la ſeconde loi les effets du choc ſeront les mêmes dans ces deux cas ; & par conſéquent les mouvemens de ces corps entr'eux, dans un de ces cas, demeureront égaux à leurs mouvemens entr'eux dans l'autre cas, ce que l'expérience confirme tous les jours. Car les mouvemens qui ſe font dans un vaiſſeau ſont les mêmes entr'eux, ſoit que le vaiſſeau marche uniformément en ligne droite, ſoit qu'il ſoit en repos.

COROLLAIRE VI.

Si des corps ſe meuvent entr'eux d'une façon quelconque, & qu'ils ſoient pouſſés par des forces accélératrices égales, & qui agiſſent ſur eux, ſuivant des lignes paralleles, ils continueront à ſe mouvoir entr'eux de la même maniere que ſi ces forces ne leur avoient pas été imprimées.

Car ces forces agiſſant également (par rapport à la quantité de matiére des corps à mouvoir) & ſuivant des lignes paralleles, elles feront mouvoir tous ces corps avec des vîteſſes égales par la ſeconde loi. Ainſi elles ne changeront point les poſitions & les mouvemens de ces corps entr'eux.

SCHOLIE.

Les principes que j'ai expliqué juſqu'à préſent ſont reçus de tous les Mathématiciens, & confirmés par une infinité d'expériences. Les deux premieres loix du mouvement & les deux premiers Corollaires ont fait découvrir à *Galilée* que la deſcente des graves eſt en raiſon doublée du temps, & que les Projectiles décrivent une Parabole; ce qui eſt conforme à l'expérience, ſi on fait abſtraction de la réſiſtance de l'air qui retarde un peu tous ces mouvemens.

La gravité étant uniforme, elle agit également à chaque particule égale de temps, ainſi elle imprime au corps qui tombe des vîteſſes & des forces égales : & dans le temps total elle lui imprime une force totale & une vîteſſe totale proportionnelle au temps. Mais les eſpaces décrits dans des temps proportionnels, ſont comme les vîteſſes & les temps conjointement; c'eſt-à-dire, en raiſon doublée des temps. Donc, lorſque les corps ſont jettés en enhaut, la gravité leur imprime des forces & leur ôte des vîteſſes proportionnelles au temps. Ainſi les temps que ces corps mettent à monter à la plus grande hauteur, ſont comme les vîteſſes que la gravité leur fait perdre, & ces hauteurs ſont comme les temps multipliés par les vîteſſes, ou en raiſon doublée des vîteſſes. Le mouvement d'un corps jetté ſuivant une ligne droite

AXIOMES, OU LOIX DU MOUVEMENT.

quelconque, eſt donc compoſé du mouvement de projection & du mouvement que la gravité lui imprime. Enſorte que ſi le corps A, par le ſeul mouvement de projection peut décrire dans un temps donné la droite AB, & que par le ſeul mouvement qui le porte vers la terre, il puiſſe décrire la ligne AC dans le même temps : en achevant le Parallélogramme $ABCD$, ce corps, par un mouvement compoſé, ſera à la fin de ce temps au lieu D; & la courbe AED qu'il décrira ſera une Parabole que la droite AB touchera au point A, & dont l'ordonnée BD ſera proportionnelle à AB^2.

Fig. 3.

C'eſt ſur ces mêmes loix & ſur leurs corollaires qu'eſt fondée la théorie des oſcillations des Pendules, vérifiée tous les jours par l'expérience. Par ces mêmes loix le Chevalier *Chriſtophe Wrenn*, *J. Wallis S. T. D.* & *Chrétien Hugens*, qui ſont ſans contredit les premiers Géométres des derniers, temps ont découvert, chacun de leur côté, les loix du choc & de la réfléxion des corps durs; ils communiquerent preſqu'en même temps leurs découvertes à la Société Royale; ces découvertes s'accordent parfaitement ſur ce qui concerne ces loix : *Wallis* fut le premier qui en fit part à la Société Royale; enſuite *Wrenn*, & enfin *Hugens*; mais ce fut *Wrenn* qui les confirma par des Expériences faites avec des Pendules devant la Société Royale : leſquelles le célébre *Mariotte* a rapportées depuis dans un Traité qu'il a compoſé exprès ſur cette matiere.

Pour que cette théorie s'accorde parfaitement avec l'expérience; il faut faire attention, tant à la réſiſtance de l'air, qu'à la force élaſtique des corps qui ſe choquent. Soient A & B des corps ſphériques ſuſpendus à des fils paralleles & égaux, AC, BD, attachés aux centres C & D, & ſoient décrits autour de ces points comme centre, & des intervalles AC, BD, les demi-cercles EAF, GBH ſéparés chacun en deux parties égales par les rayons AC, BD. Si on éleve le corps A juſqu'au point quelconque R de l'arc EAF, & qu'ayant ôté le corps B, on laiſſe tomber le corps A, & que ce corps, après une oſcillation, revienne au point V, RV,

Fig. 4.

ſera le retardement cauſé par la réſiſtance de l'air. Si on prend alors ST égale à la quatriéme partie de RV, & placée en telle ſorte que $RS = VT$, ST exprimera à peu près le retardement que le corps A éprouve en deſcendant de S vers A.

Qu'on remette préſentement le corps B à ſa place, & qu'on laiſſe tomber le corps A, du point S, ſa vîteſſe au point A où il doit ſe réfléchir, ſera la même, ſans erreur ſenſible, que s'il tomboit du point T dans le vuide. Cette vîteſſe ſera donc exprimée par la corde de l'arc TA; car c'eſt une propoſition connue de tous lès Géométres, que la vîteſſe d'un corps ſuſpendu par un fil eſt au point le plus bas de ſa chute, comme la corde de l'arc qu'il a parcouru en tombant.

Suppoſons que le corps A parvienne après la réfléxion en s, & le corps B en k, qu'on ôte encore le corps B, & qu'on trouve le lieu v duquel laiſſant tomber le corps A, ils reviennent après une oſcillation au lieu r, de plus que st ſoit la quatriéme partie de rv placée en telle ſorte que $rs = tv$, tA exprimera la vîteſſe que le corps A avoit en A l'inſtant d'après la réfléxion. Car t ſera le lieu vrai & corrigé auquel le corps A devroit remonter, ſi l'on faiſoit abſtraction de la réſiſtance de l'air. On corrigera par la même méthode le lieu k, auquel le corps B remonte; & on trouvera le lieu l auquel il auroit dû remonter dans le vuide, & par ce moyen on fera ces expériences auſſi éxactement dans l'air que dans le vuide. Enfin pour avoir le mouvement du corps A, au lieu A, immédiatement avant la réfléxion, il faudra multiplier le corps A, ſi je puis m'exprimer ainſi, par la corde de l'arc TA, qui exprime ſa vîteſſe; enſuite il faut le multiplier par la corde de l'arc tA, pour avoir ſon mouvement au lieu A, immédiatement après la réfléxion. De même, il faudra multiplier le corps B, par la corde de l'arc Bl, pour avoir ſon mouvement immédiatement après la réfléxion.

Par la même méthode, lorſque les deux corps tomberont en même temps de deux hauteurs différentes, on trouvera le mouve-

AXIOMES, OU LOIX DU MOUVEMENT.

ment de l'un & de l'autre, tant avant qu'après la réfléxion; & l'on pourra toujours, par ce moyen, comparer ces mouvemens entr'eux, & en conclure les effets de la réfléxion.

Suivant cette méthode, dans les expériences que j'ai fait avec des Pendules de 10 pieds de long auſquels j'avois ſuſpendu tantôt des corps égaux, tantôt des corps inégaux, & que j'avois fait ſe choquer en tombant de très haut, comme de 8, 12 & 16 pieds, j'ai toujours trouvé, à des différences près, leſquelles étoient moindres que trois pouces dans les meſures, que lorſque les corps ſe rencontroient directement, les changemens de mouvement vers les points oppoſés étoient toujours égaux, & que par conſéquent la réaction étoit toujours égale à l'action. Lorſque le corps *A*, par éxemple, ayant 9 parties de mouvement venoit à choquer le corps *B* en repos, & qu'après avoir perdu 7 parties de mouvement, il continuoit après la réfléxion à ſe mouvoir avec deux parties, le corps *B* rejailliſſoit avec ces 7 parties.

Si les deux corps alloient l'un vers l'autre, *A* avec 12 parties de mouvement & *B* avec 6, & qu'après le choc *A* s'en retournât avec 2 parties, *B* s'en retournoit avec 8, & il y avoit 14 parties de détruites de chaque côté. Car ſi du mouvement de *A* on en ôte d'abord 12 parties, il ne lui reſte rien: ſi on ôte enſuite 2 autres parties, il en naît deux parties de mouvement en ſens contraire: de même en ôtant 14 parties du mouvement du corps *B*, il en naît 8 parties vers le côté oppoſé.

Lorſque les deux corps alloient vers le même côté, *A* plus vîte avec 14 parties de mouvement, & *B* plus lentement avec 5 parties, & qu'après la réfléxion le corps *A* continuoit de ſe mouvoir avec 5 parties, le corps *B* continuoit alors à ſe mouvoir avec 14 parties, enſorte qu'il avoit acquis les neuf parties que le corps *A* avoit perdu; il en étoit de même dans tous les autres cas. La quantité de mouvement n'étoit jamais changée par le choc, elle ſe retrouvoit toujours ou dans la ſomme des mouvemens conſpirans ou dans la différence des mouvemens oppoſés; & j'ai attribué les

erreurs d'un ou deux pouces que j'ai trouvé dans les meſures à la difficulté de prendre ces meſures avec aſſez d'éxactitude; car il étoit difficile de faire tomber les Pendules dans le même inſtant, enſorte que les corps ſe rencontraſſent dans le lieu le plus bas *AB*; & de marquer éxactement les lieux *s* & *k* auſquels les corps remontoient après le choc; & il pouvoit encore s'y mêler d'autres cauſes d'erreur, comme l'inégale denſité des parties des corps ſuſpendus, leur différente texture, &c.

Et afin qu'on ne m'objecte pas que la loi que j'ai voulu prouver par ces Expériences ſuppoſe les corps ou parfaitement durs, ou parfaitement élaſtiques, & que nous ne connoiſſons point de tels corps, j'ajouterai que ces Expériences réuſſiſſent auſſi-bien ſur les corps mols que ſur les corps durs, & que par conſéquent la vérité de ce principe ne dépend point de la dureté des corps; car ſi on veut l'appliquer aux cas où les corps ne ſont pas parfaitement durs, il faudra ſeulement diminuer la réfléxion dans une certaine proportion relative à la quantité de la force élaſtique.

Dans la théorie de *Wrenn* & d'*Hugens*, les corps abſolument durs, après s'être choqués, s'éloignent l'un de l'autre avec la même vîteſſe qu'ils avoient dans le choc. On peut l'aſſurer avec encore plus de certitude des corps parfaitement élaſtiques. Dans les corps qui ne ſont pas parfaitement élaſtiques, la vîteſſe avec laquelle ils s'en retournent après le choc, doit être diminuée relativement à la force élaſtique; & parce que cette force (pourvû que les parties des corps ne ſoient point altérées par la colliſion, ou qu'elles ne ſouffrent point d'extenſion comme celle que cauſe le marteau) eſt conſtante & déterminée, ainſi que je l'ai remarqué; elle fait que les corps rejailliſſent avec une vîteſſe relative qui eſt à la vîteſſe qu'ils avoient avant le choc dans une raiſon donnée.

Je fis auſſi cette expérience avec des pelottes de laine très ſerrées. Je commençai par déterminer la quantité de la force élaſtique, en faiſant tomber les Pendules & en meſurant la réfléxion :

AXIOMES, OU LOIX DU MOUVEMENT.

& enſuite connoiſſant cette force, j'en conclus les réfléxions pour d'autres cas, & je trouvai que les expériences y répondoient. Les pelottes s'éloignoient toujours l'une de l'autre après le choc avec une vîteſſe relative, qui étoit à leur vîteſſe relative dans le choc, comme 5 à 9 environ. Les boules d'acier rejailliſſoient à peu près avec leur même vîteſſe : les boules de liége rejailliſſoient avec une vîteſſe un peu moindre ; & dans les boules de verre ces vîteſſes étoient à peu près comme 15 à 16. ainſi la troiſieme loi ſe trouve confirmée dans le choc & dans la réfléxion des corps par la théorie, & la théorie, l'eſt par l'expérience. Je vais faire voir qu'elle l'eſt auſſi dans les attractions.

Imaginez entre les deux corps *A* & *B* un obſtacle quelconque qui les empêche de ſe joindre. Si un de ces corps comme *A* eſt plus attiré vers *B*, que *B* vers *A*, l'obſtacle ſera plus preſſé par le corps *A* que par le corps *B* ; ainſi il ne ſera point en équilibre. La plus forte preſſion prévaudra, & il arrivera que le ſyſtême, compoſé de ces deux corps & de l'obſtacle qui eſt entre deux, ſe mouvera en ligne droite vers *B*, & qu'il s'en ira à l'infini dans le vuide avec un mouvement continuellement accéléré, ce qui eſt abſurde & contraire à la premiere loi du mouvement ; car par cette premiere loi, ce ſyſtême doit perſévérer dans ſon état de repos ou de mouvement en ligne droite ; ainſi ces deux corps doivent preſſer également cet obſtacle, & être par conſéquent tirés également l'un vers l'autre.

J'en ai fait l'expérience ſur le fer & ſur l'aimant. Si on poſe l'aimant & le fer chacun ſéparément dans de petits vaiſſeaux ſur une eau dormante, & que ces petits vaiſſeaux ſe touchent, ni l'un ni l'autre ne ſera mû ; mais ils ſoutiendront par l'égalité de leur attraction les efforts mutuels qu'ils font l'un ſur l'autre, & étant en équilibre, ils reſteront en repos.

De même, la gravité entre la terre & ſes parties eſt mutuelle ; car ſuppoſé que la terre *FI* fût coupée par un plan *EG* en deux parties *EGF*, *EGI* : les poids mutuels de ces parties l'une ſur l'autre,

Fig. 5.

l'autre, ſeront égaux; car ſi la plus grande partie *EGI* eſt coupée par un autre plan *HK* parallele au premier, en deux parties *EGHK* & *HIK*, deſquelles *HIK* = *EFG*: il eſt clair que la partie du milieu *EGHK* ne ſera portée par ſon propre poids ni vers l'une, ni vers l'autre de ces parties, mais qu'elle reſtera en équilibre entr'elles.

Quant à la partie *HIK*, elle preſſera de tout ſon poids la partie du milieu vers l'autre partie *EFG*; donc la force avec laquelle la partie *EGI*, compoſée des parties *HKI* & *EGHK*, tend vers la troiſiéme partie *EFG*, eſt égale au poids de la partie *HIK*, c'eſt-à-dire au poids de la troiſiéme partie *EFG*. Ainſi le poids de deux parties *EGI*, *EFG*, l'une ſur l'autre eſt égal, ce que je voulois prouver. Et ſi ces poids n'étoient pas égaux, toute la terre qui nage librement dans l'éther céderoit au plus grand de ces poids, & s'en iroit à l'infini.

De même que les corps qui ſe choquent ſe font équilibre, quand leurs vîteſſes ſont réciproquement comme leurs forces d'inertie (*ut vires inſitæ*:) les puiſſances qui agiſſent dans la méchanique ſe contrebalancent & détruiſent leurs efforts mutuels, quand leurs vîteſſes dans la direction des forces ſont réciproquement comme ces forces. Ainſi des poids attachés aux bras d'une balance font des efforts égaux pour la mouvoir, lorſque ces poids ſont réciproquement comme les vîteſſes qu'auroient les bras de la balance en haut & en bas, ſi elle venoit à oſciller; c'eſt-à-dire, que ces poids ſont en équilibre, lorſque les bras de la balance montent & deſcendent perpendiculairement, s'ils ſont entr'eux réciproquement comme la diſtance du point de ſuſpenſion au fléau de la balance; & ſi les bras de la balance montent & deſcendent obliquement, ſoit qu'ils ſoient ſoutenus par des plans obliques, ou que quelqu'autre obſtacle les empêche de monter & de deſcendre perpendiculairement, les poids ſeront en équilibre, lorſqu'ils ſeront entr'eux réciproquement, comme l'aſcenſion & la deſcenſion perpendiculaire des bras de la balance; parce-

AXIOMES, OU LOIX DU MOUVEMENT.

que la force de la gravité eſt toujours dirigée perpendiculairement vers la terre.

De même, dans la poulie ou dans le mouffle, ſi la force de la main qui tire la corde directement, eſt au poids qui monte directement ou obliquement, comme la vîteſſe de ſon aſcenſion perpendiculaire à la vîteſſe de la main qui tire la corde, il y aura équilibre.

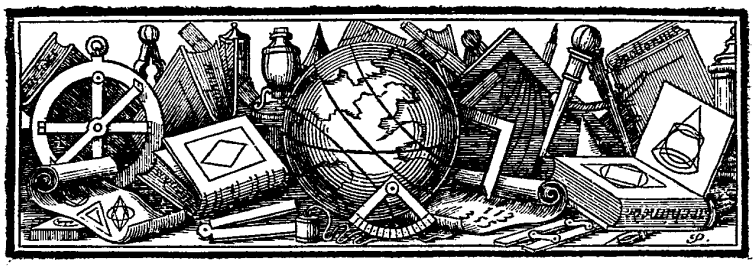
Dans les Horloges & les autres machines dont la conſtruction dépend du jeu de pluſieurs rouës, les forces contraires qui font des efforts pour les mouvoir & pour les retenir, ſe contrebalanceront mutuellement, ſi elles ſont entr'elles réciproquement comme les vîteſſes des parties des rouës auſquelles elles ſont imprimées.

La force de la vis pour preſſer un corps eſt à la force de la main qui tourne la manivelle, comme la vîteſſe circulaire de la manivelle dans la partie où la main la fait tourner, eſt à la vîteſſe progreſſive de la vis vers le corps qu'elle preſſe.

Les forces avec leſquelles le coin preſſe les deux côtés du bois qu'il fend, ſont à la force avec laquelle le marteau frappe le coin, comme le chemin que fait le coin dans la direction de la force que lui impriment les coups du marteau, eſt à la vîteſſe avec laquelle les parties du bois cedent au coin ſelon les lignes perpendiculaires aux faces du coin. Il en eſt de même dans toutes les machines dont l'efficacité conſiſte en cela ſeulement, qu'en diminuant la vîteſſe on augmente la force & réciproquement; & c'eſt par-là qu'on réſout ce Problême dans toutes les eſpeces de machines, *que le poids étant donné, la force néceſſaire pour le mouvoir eſt donnée*, ou ce qui eſt la même choſe, *que la réſiſtance étant donnée, la force néceſſaire pour la ſurmonter eſt donnée auſſi.* Car lorſque les machines ſeront conſtruites de façon que la vîteſſe de la puiſſance ſoit à celle de la réſiſtance en raiſon renverſée des forces; la puiſſance égalera la réſiſtance: & ſi on augmente la vîteſſe de la puiſſance, elle vaincra auſſitôt la réſiſtance.

Si la diſparité des vîteſſes eſt aſſez grande pour vaincre toute

eſpéce de réſiſtance, tant celle qu'oppoſe la peſanteur des corps qu'on veut élever, que celle qui vient de la cohéſion des corps qu'on veut ſéparer, & que celle qui eſt produite par le frottement des corps qui gliſſent les uns ſur les autres, la force reſtante produira une accélération de mouvement qui lui ſera proportionnelle, & qui ſera partagée entre les parties de la machine, & le corps réſiſtant; mais je ne me ſuis pas propoſé ici de donner un Traité de Méchanique, j'ai voulu montrer ſeulement combien la troiſiéme loi du mouvement eſt vraie, & combien ſon uſage eſt étendu; car ſi on eſtime l'action de l'agent par ſa force multipliée par ſa vîteſſe, & qu'on eſtime de même la réaction du corps réſiſtant par la vîteſſe de chacune de ſes parties multipliées par les forces qu'elles ont pour réſiſter en vertu de leur cohéſion, de leur attrition, de leur poids, & de leur accélération; l'action & la réaction ſe trouveront égales entr'elles, dans les effets de toutes les machines. Et toutes les fois qu'une action s'éxécute par le moyen d'une machine, & qu'elle parvient à être imprimée dans un corps réſiſtant, ſa derniere détermination eſt toujours contraire à la détermination de la réaction de ce corps.



DU MOUVEMENT DES CORPS.

LIVRE PREMIER.

SECTION PREMIERE.

De la méthode des premieres & dernieres raiſons employée dans tout cet Ouvrage.

LEMME PREMIER.

Les quantités & les raiſons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini, & qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité, que leur différence eſt plus petite qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales.

SI on le nie, qu'on ſuppoſe qu'elles ſoient à la fin inégales, & que leur derniere différence ſoit D, puiſqu'elles ne peuvent pas approcher plus près de l'égalité que de cette différence donnée D, leur différence ne ſera donc pas plus petite que toute différence donnée, ce qui eſt contre l'hypothéſe.

LEMME II.

Si dans une figure quelconque AacE, *compriſe entre les droites* Aa, AE, *& la courbe* acE, *on inſcrit un nombre quelconque de Parallélogrammes* Ab, Bc, Cd, &c. *compris ſous les baſes égales* AB, BC, CD, *&c. & ſous les côtés* Bb, Cc, Dd, *&c. paralléles au côté* Aa *de la figure ; & qu'on acheve les parallélogrammes* akbl, bLcm, cMdn, *&c. qu'on diminue enſuite la largeur de ces parallélogrammes, & qu'on augmente leur nombre à l'infini : les dernieres raiſons qu'auront entr'elles la figure inſcrite* AKbLcMdD, *la circonſcrite* Aalbmcnd○E, *& la curviligne* AabcdE, *ſeront des raiſons d'égalité.*

Car la différence de la figure inſcrite & de la figure circonſcrite, eſt la ſomme des parallélogrammes *K l*, *L m*, *M n*, *D o*, c'eſt-à-dire (à cauſe de l'égalité de toutes les baſes) que cette différence eſt égale au rectangle *A B l a* fait ſur l'une des baſes *K b* & ſur la ſomme *A a*, de toutes les hauteurs ; mais ce rectangle, à cauſe que ſa largeur diminue à l'infini, deviendra plus petit qu'aucun rectangle donné. Donc (par le Lemme premier) la figure inſcrite, la figure circonſcrite, & à plus forte raiſon la figure curviligne intermédiaire ſeront à la fin égales. *C. Q. F. D.*

LEMME III.

Les dernieres raiſons de ces mêmes figures ſeront encore des raiſons d'égalité, quoique les baſes AB, BC, CD, *&c. des parallélogrammes ſoient inégales, pourvû qu'elles diminuent toutes à l'infini.*

Soit AF la plus large de ces baſes, & ſoit achevé le parallélogramme *FA af*. Ce parallélogramme ſera plus grand que la différence de la figure inſcrite & de la figure circonſcrite ; mais ſa largeur AF diminuant à l'infini, il ſera plus petit qu'aucun rectangle donné. Donc &c. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. D'où il ſuit que la derniere ſomme de tous les parallélogrammes qui s'évanouiſſent coïncidera dans toutes ſes parties avec la figure curviligne.

Cor. 2. Et à plus forte raiſon la figure rectiligne, compriſe ſous les cordes des arcs évanouiſſans *a b*, *b c*, *c d*, &c. coïncidera à la fin avec la figure curviligne.

Cor. 3. Il en ſera de même de la figure rectiligne circonſcrite, qui eſt compriſe ſous les tangentes de ces mêmes arcs.

Cor. 4. Et par conſéquent ces dernieres figures (quant à leurs périmétres *a c E*) ne ſont pas rectilignes, mais les limites curvilignes des figures rectilignes.

LEMME IV.

Si dans deux figures A a c E, P p r T, *on inſcrit, comme ci-deſſus, deux ſuites de parallélogrammes, dont le nombre ſoit le même, & que lorſque leurs largeurs diminuent à l'infini, les dernieres raiſons des parallélogrammes de l'une des figures aux parallélogrammes de l'autre, chacun à chacun, ſoient les mêmes; ces deux figures* A a c E, P p r T *ſeront entr'elles dans cette même raiſon.*

Car la proportion qu'un des parallélogrammes de la premiere figure a avec celui qui lui répond dans la ſeconde, eſt la même que celle de la ſomme de tous les parallélogrammes de la premiere figure, à la ſomme de tous les parallélogrammes de la ſeconde, & par conſéquent la même que celle qui eſt entre les deux figures, en ſuppoſant toutefois, que, ſelon le Lemme 3. la raiſon de la premiere figure à la ſomme de tous les parallélogrammes qu'elle renferme, ſoit une raiſon d'égalité, auſſi-bien que celle de la ſeconde figure à la ſomme de tous les Parallélogrammes qui y ſont renfermés. *C. Q. E. D.*

Cor. D'où il ſuit, que ſi deux quantités d'un genre quelconque ſont partagées dans un même nombre de parties quelconques, & que ces parties, lorſque leur nombre augmente & que leur grandeur diminue à l'infini, ſoient entr'elles en raiſon donnée, la premiere à la premiere, la ſeconde à la ſeconde, & ainſi de ſuite: les touts ſeront entr'eux dans cette même raiſon donnée; car ſi on repréſente les parties de ces touts par les parallélogrammes des figures de ce Lemme, les ſommes de ces parties ſeront comme

les ſommes des parallélogrammes ; & par conſéquent, lorſque le nombre de ces parties & des Parallélogrammes augmente, & que leur grandeur diminue à l'infini, les touts ſeront dans la derniere raiſon d'un Parallélogramme à l'autre : c'eſt-à-dire, par l'hypothèſe, dans la derniere raiſon d'une partie à l'autre.

LEMME V.

Tous les côtés homologues des figures ſemblables ſont proportionnels, tant dans les figures curvilignes que dans les rectilignes, & leurs aires ſont en raiſon doublées de ces côtés.

LEMME VI.

Si un arc de cercle quelconque A C B *donné de poſition, eſt ſoutenu par la corde* A B, *& qu'au point* A *placé dans le milieu de ſa courbure continue, il ſoit touché par une droite* A D *prolongée des deux côtés, & que les points* A & B *s'approchent l'un de l'autre juſqu'à ce qu'ils coïncident ; l'angle* B A D, *compris ſous la tangente & la corde diminuera à l'infini, & s'évanouira à la fin.*

Car ſi cet angle ne s'évanouiſſoit pas, l'arc *A C B* & la tangente *A D* contiendroient un angle rectiligne, & par conſéquent la courbure au point *A* ne ſeroit point continue, ce qui eſt contre l'hypothèſe.

LEMME VII.

Les mêmes choſes étant poſées, la derniere raiſon qu'ont entr'elles l'arc, la corde & la tangente, eſt la raiſon d'égalité.

Car pendant que le point *B* s'approche du point *A*, ſuppoſons que les lignes *A B*, *A D* ſoient prolongées juſqu'aux points éloignés *b* & *d*, & qu'on méne la ligne *b d* parallele à la ſécante *B D*; & qu'on prenne de plus *A c b* toujours ſemblable à l'arc *A C B*. Lorſque les points *A* & *B* coïncideront, l'angle *d A b* s'évanouira par le Lemme précédent ; donc les droites *A b*, *A d*, qui reſtent toujours de grandeur finie, & l'arc intermédiaire *A c b* coïncideront & ſeront par conſéquent égales. Donc les droites *A B*, *A D*, & l'arc intermédiaire *A C B*, qui leur ſont toujours proportionnels,

nels, s'évanouiront, & auront pour derniere raiſon la raiſon d'égalité. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Ainſi, ſi par *B* on méne une droite *BF* parallele à la tangente *AD*, laquelle *BF* coupe toujours en *F* une ligne quelconque *AF* qui paſſe par *A*, la raiſon de cette droite *BF* à l'arc évanouiſſant *ACB*, ſera à la fin la raiſon d'égalité, puis qu'achevant le parallélogramme *AFBD*, cette raiſon eſt la même que celle qu'à la droite *AD* avec le même arc *ACB*. Fig. 10.

Cor. 2. Et ſi par *B* & par *A* on tire pluſieurs droites *BE*, *BD*, *AF*, *AG*, qui coupent la tangente *AD* & ſa parallele *BF*, la derniere raiſon de l'arc *AB* de la corde & de toutes les parties coupées *AD*, *AE*, *BF*, *BG* entr'elles ſera la raiſon d'égalité.

Cor. 3. Et par conſéquent toutes ces lignes pourront être priſes l'une pour l'autre dans tous les cas où l'on ſe ſervira de la méthode des premieres & dernieres raiſons.

LEMME VIII.

Si les droites données AR, BR, *l'arc* ACB, *la corde* AB, *& la tangente* AD, *forment trois triangles* RAB, RACB, RAD, *& que les points* A *&* B *s'approchent l'un de l'autre : ces triangles, qui s'évanouiront, ſeront à la fin ſemblables, & leur derniere raiſon ſera la raiſon d'égalité.*

Pendant que *B* s'approche de *A*, imaginons qu'on prolonge *AB*, *AD*, *AR*, en *b*, *d*, *r*, qu'on méne *rbd* parallele à *RD*, & qu'on prenne l'arc *Acb* toujours ſemblable à l'arc *ACB*, lorſque les points *A* & *B* coïncideront, l'angle *bAd* s'évanouira, & les trois triangles *rAb*, *rAcb*, *rAd*, qui reſtent toujours de grandeur finie coïncideront, & ſeront par conſéquent égaux & ſemblables. Donc les triangles *RAB*, *RACB*, *RAD*, qui leur ſont toujours ſemblables & proportionnels, ſeront à la fin égaux & ſemblables entr'eux. *C. Q. F. D.* Fig. 9.

Cor. Donc ces triangles pourront être pris l'un pour l'autre dans tous les cas où l'on employera la méthode des premieres & dernieres raiſons.

LEMME IX.

Soient données de poſition la droite AE *& la courbe* ABC, *qui ſe coupent ſous un angle donné* A, *& ſoient menées de cette droite ſous un autre angle donné les ordonnées* BD, CE, *qui rencontrent la courbe en* B, *& en* C, *ſi on ſuppoſe enſuite que les points* B *&* C *s'approchent l'un & l'autre continuellement du point* A; *les aires des triangles* ABD, ACE, *ſeront à la fin entr'elles en raiſon doublée des côtés.*

Fig. 11. Pendant que les points *B* & *C* s'approchent du point *A*, imaginons toujours que la ligne *AD* ſoit prolongée à des points très éloignés *d* & *e*, & en telle ſorte que *Ad* & *Ae* ſoient toujours proportionnelles à *AD* & à *AE*, de plus que les ordonnées *db*, *ec*, tirées paralleles aux ordonnées *DB*, *EC*, rencontrent en *b* & *c* les lignes *AB*, *AC* prolongées; enfin que *Abc* ſoit une courbe ſemblable à *ABC* & *Ag*, une droite qui touche les deux courbes en *A*, & coupe les ordonnées *DB*, *EC*, *db*, *ec*, en *F*, *G*, *f*, *g*. Cela poſé, lorſque les points *B* & *C* coïncideront avec le point *A*, la longueur *Ae* reſtant la même, l'angle *cAg* s'évanouira, les aires curvilignes *Abd*, *Ace* coïncideront avec les aires rectilignes *Afd*, *Age*, & par conſéquent elles ſeront (par le Lemme 5.) en raiſon doublée des côtés *Ad*, *Ae*; mais les aires *ABD*, *ACE* ſont toujours proportionnelles à ces aires, & les côtés *AD*, *AE* à ces côtés. Donc les aires *ABD*, *ACE* ſont à la fin en raiſon doublée des côtés *AD*, *AE*. C. Q. F. D.

LEMME X.

Les eſpaces qu'une force finie fait parcourir au corps qu'elle preſſe, ſoit que cette force ſoit déterminée & immuable, ſoit qu'elle augmente ou diminue continuellement, ſont dans le commencement du mouvement en raiſon doublée des temps.

Que les lignes *AD*, *AE* repréſentent les temps, & les ordonnées *DB*, *EC* les vîteſſes produites; les eſpaces décrits avec ces vîteſſes ſeront comme les aires *ABD*, *ACE* qui auroient été

décrites par la *fluxion* de ces ordonnées, c'eſt-à-dire (par le Lemme 9.) que ces eſpaces ſeront dans le commencement du mouvement en raiſon doublée des temps AD, AE. C. Q. F. D.

Cor. 1. De-là on tire aiſément, que lorſque des corps qui parcoureroient dans des temps proportionnels des parties ſemblables de figures ſemblables, ſont ſollicités par de nouvelles forces quelconques égales & appliquées de la même maniére, les déviations cauſées par ces forces, c'eſt-à-dire, les diſtances des points où les corps ſont arrivés réellement aux points où ils ſeroient arrivés ſans l'action de ces forces, ſont entr'elles à peu près comme les quarrés des temps dans leſquels ces déviations ont été produites.

Cor. 2. Et les déviations cauſées par des forces proportionnelles & appliquées de même aux parties ſemblables de figures ſemblables, ſont en raiſon compoſée des forces & des quarrés des temps.

Cor. 3. Il en eſt de même des eſpaces quelconques que les corps preſſés par des forces diverſes décrivent. Ces eſpaces ſont encore dans le commencement du mouvement, comme les forces multipliées par les quarrés des temps.

Cor. 4. Donc, dans le commencement du mouvement, les forces ſont comme les eſpaces décrits directement, & inverſement comme les quarrés des temps.

Cor. 5. Et les quarrés des temps ſont comme les eſpaces décrits directement, & inverſement comme les forces

SCHOLIE.

Lorſqu'on compare des quantités indéterminées de différent genre, & qu'on dit que l'une d'elles eſt en raiſon directe ou inverſe d'une autre : on entend par-là que la premiere augmente ou diminue dans la même raiſon que la derniere, ou dans la raiſon inverſe ; & lorſqu'on dit qu'une quantité eſt directement ou inverſement, comme pluſieurs de ces quantités, cela ſignifie qu'elle augmente ou diminue en raiſon compoſée des raiſons dans leſquelles ces autres quantités augmentent ou

diminuent, ou dans la raiſon compoſée des raiſons renverſées de ces raiſons. Si on dit, par éxemple, que A eſt directement comme B & comme C, & inverſement comme D : cela veut dire que A augmentera ou diminuera en même raiſon que $B \times C \times \frac{I}{D}$ ou que les quantités A & $\frac{BC}{D}$ ſont entr'elles en raiſon donnée.

LEMME XI.

Dans toutes les courbes qui ont une courbure finie au point de contact, la ſouſtendante évanouiſſante d'un angle de contact eſt à la fin en raiſon doublée de la ſouſtendante de l'arc qu'elle termine.

Cas 1. Soient $A\,b\,B$ cet arc, AD ſa tangente, BD la ſouſtendante de l'angle de contact, laquelle eſt perpendiculaire à la tangente, & AB la ſouſtendante de l'arc. Soient enſuite AG & BG perpendiculaires à AD & à AB, & ſoit G la rencontre de ces perpendiculaires. Cela poſé, imaginons que les points D, B, G, deviennent les points d, b, g, & que le point I ſoit la derniere interſection des lignes AG, BG, lorſque les points B & D ſont arrivés en A ; il eſt clair que la diſtance GI peut être moindre qu'aucune diſtance aſſignable ; mais à cauſe qu'on peut faire paſſer des cercles par les points A, B, G, & par les points A, b, g. on a $AB^2 = AG \times BD$ & $Ab^2 = Ag \times bd$; donc AB^2 eſt à Ab^2 en raiſon compoſée des raiſons de AG, à Ag & de BD à bd. Mais comme on peut ſuppoſer la diſtance GI plus petite qu'aucune longueur aſſignable, la différence entre la raiſon de AG à Ag & la raiſon d'égalité peut être moindre qu'aucune différence aſſignable ; donc la différence de la raiſon de AB^2 à Ab^2 à la raiſon de BD à bd, peut être moindre que toute différence aſſignable. Donc (par le Lemme 1.) la derniere raiſon de AB^2 à Ab^2 ſera la même que la derniere raiſon de BD à bd. *C. Q. F. D.*

Fig. 12.

Cas 2. Suppoſé que BD ſoit incliné ſur AD, ſelon un angle quelconque donné, la derniere raiſon de BD à bd reſtera toujours la même, & ſera par conſéquent la même que la raiſon de AB^2 à Ab^2. *C. Q. F. D.*

Cas. 3. Quand même l'angle *D* ne ſeroit point donné, & que la droite *BD* convergeroit vers un point donné, ou qu'elle ſeroit tirée ſuivant une loi quelconque; les angles *D* & *d*, formés ſelon la même loi, tendroient toujours à devenir égaux, & à la fin leur différence deviendroit moindre que toute différence donnée, c'eſt-à-dire, (par le Lemme 1.) qu'ils ſeroient égaux à la fin, & par conſéquent les lignes *BD*, *bd* ſeroient entr'elles dans la même raiſon qu'auparavant. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Comme les tangentes *AD*, *Ad*, les arcs *AB*, *Ab*, & leurs ſinus *BC*, *bc* deviennent à la fin égaux aux cordes *AB*, *Ab*, leurs quarrés ſont auſſi à la fin comme les ſouſtendantes *BD*, *bd*.

Cor. 2. Et ces quarrés ſeront auſſi entr'eux à la fin comme les fléches des ares, leſquelles coupent les cordes en deux parties égales, & convergent vers un point donné; car ces fléches ſont comme les ſouſtendantes *BD*, *bd*.

Cor. 3. Donc, lorſqu'un corps avec une vîteſſe donnée décrit un arc, la fléche de cet arc eſt en raiſon doublée du temps pendant lequel il eſt décrit.

Cor. 4. Les triangles rectilignes *ADB*, *Adb* ſont à la fin en raiſon triplée des côtés *AD*, *Ad*, & en raiſon ſeſquiplée des côtés *DB*, *db*; puiſqu'ils ſont en raiſon compoſée des côtés *AD*, *DB*, & *Ad*, *db*, de même les triangles *ABC*, *Abc*, ſont à la fin en raiſon triplée des côtés *BC*, *bc*. J'appelle raiſon ſeſquiplée la raiſon ſousdoublée de la raiſon triplée, parce qu'elle eſt compoſée de la raiſon ſimple & de la raiſon ſousdoublée.

Cor. 5. Comme *DB*, *db* deviennent à la fin paralleles, & en raiſon doublée de *AD* & de *Ad*, les dernieres aires curvilignes *ADB*, *Adb* ſeront (par la nature de la parabole,) les deux tiers des triangles rectilignes *ABD*, *Abd*; & les ſegmens *AB*, *Ab*, les tiers de ces mêmes triangles, & de-là ces aires & ces ſegmens ſeront en raiſon triplée, tant des tangentes *AD*, *Ad*, que des cordes & des arcs *AB*, *Ab*.

SCHOLIE.

Au reſte, dans toutes ces démonſtrations nous ſuppoſons que l'angle de contact n'eſt ni infiniment plus grand que les angles de contact contenus entre la tangente & la corde des cercles; ni infiniment plus petit que ces mêmes angles, c'eſt-à-dire que nous ſuppoſons que la courbure au point A n'eſt ni infiniment petite, ni infiniment grande, mais que le rayon oſculateur AI, eſt d'une grandeur finie; car ſi on prenoit DB proportionnelle à AD^3, aucun cercle ne pourroit paſſer par le point A entre la tangente AD & la courbe AB; & en ce cas l'angle de contact ſeroit infiniment plus petit que les angles de contact circulaires; & par le même raiſonnement, ſi on fait ſucceſſivement DB proportionnel à AD^4, AD^5, AD^6, AD^7, &c. on aura une ſérie infinie d'angles de contact, dont chacun ſera infiniment plus petit que celui qui le précéde, & ſi l'on fait ſucceſſivement BD proportionnelle à AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$ $AD^{\frac{4}{3}}$ $AD^{\frac{5}{4}}$, $AD^{\frac{6}{5}}$, $AD^{\frac{7}{6}}$, &c. on aura une autre ſuite infinie d'angles de contact, dont le premier ſera du même genre que les angles de contact circulaires; le ſecond ſera infiniment plus grand; le troiſiéme infiniment plus grand que le ſecond, & ainſi de ſuite. De plus, entre deux quelconque de ces angles on peut inſérer une ſuite d'angles intermédiaire, laquelle ſera infinie des deux côtés, & telle que chacun des angles qui la compoſeront ſera infiniment plus grand, ou infiniment plus petit que celui qui le précéde. Entre les termes AD^2 & AD^3, par éxemple, on peut inférer la ſérie $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{11}{4}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Enfin on pourra encore inférer entre deux angles quelconques de cette derniere ſérie, une nouvelle ſérie d'angles intermédiaires toujours infiniment plus grands les uns que les autres; car la nature ne connoît point de bornes.

Ce qu'on a démontré des lignes courbes & des ſuperficies qu'elles renferment, peut s'appliquer facilement aux ſurfaces

courbes des ſolides & aux ſolides mêmes. J'ai commencé par ces Lemmes ; pour éviter de déduire de longues démonſtrations *ad abſurdum*, ſelon la méthode des anciens Géométres.

J'aurois eu des démonſtrations plus courtes par la méthode des indiviſibles ; mais parce que l'hypothéſe des indiviſibles me paroît trop dure à admettre, & que cette méthode eſt par conſéquent peu géométrique ; j'ai mieux aimé employer celle des premieres & dernieres raiſons des quantités qui naiſſent & s'évanouiſſent ; & j'ai commencé par faire voir, le plus briévement que j'ai pu, ce que deviennent les quantités, lorſqu'elles atteignent leurs limites. Je démontrerai par cette méthode tout ce qu'on démontre par celle des indiviſibles ; mais en ayant prouvé le principe, je m'en ſervirai avec plus de ſécurité.

Ainſi, lorſque dans la ſuite je conſidérerai des quantités comme compoſées de particules déterminées, & que je prendrai pour des lignes droites de petites portions de courbes ; je ne déſignerai point par-là des quantités indiviſibles, mais des quantités diviſibles évanouiſſantes ; de même, ce que je dirai des ſommes & des raiſons, doit toujours s'entendre non des particules déterminées, mais des limites des ſommes & des raiſons des particules évanouiſſantes ; & pour ſentir la force de mes démonſtrations, il faudra toujours ſe rappeller la méthode que j'ai ſuivie dans les Lemmes précédens.

On peut dire, contre ce principe des premieres & dernieres raiſons, que les quantités qui s'évanouiſſent n'ont point de derniere proportion entr'elles ; parce qu'avant de s'évanouir, la proportion qu'elles ont n'eſt pas la derniere, & que lorſqu'elles ſont évanouies, elles n'en ont plus aucune. Mais on pourroit ſoutenir par le même raiſonnement qu'un corps qui parvient d'un mouvement uniformément retardé à un certain lieu où ſon mouvement s'éteint, n'a point de derniere vîteſſe ; Car, diroit-on, avant que ce corps ſoit parvenu à ce lieu, il n'a pas encore ſa derniere vîteſſe, & quand il l'a atteint, il n'en a aucune, puiſqu'alors ſon mouvement eſt éteint. Or, la réponſe à cet argument eſt facile ;

Du mouvement des Corps.

on doit entendre par la derniere vîteſſe de ce corps celle avec laquelle il ſe meut, non pas avant d'avoir atteint le lieu où ſon mouvement ceſſe, non pas après qu'il a atteint ce lieu, mais celle qu'il a dans l'inſtant même qu'il atteint ce dernier lieu & avec laquelle ſon mouvement ceſſe. Il en eſt de même de la derniere raiſon des quantités évanouiſſantes, il faut entendre par cette raiſon celles qu'ont entr'elles des quantités qui diminuent, non pas avant de s'évanouir, ni après qu'elles ſont évanouies; mais celle qu'elles ont dans le moment même qu'elles s'évanouiſſent. De la même maniere, la premiere raiſon des quantités naiſſantes eſt celle que les quantités qui augmentent ont au moment qu'elles naiſſent, & la premiere ou derniere ſomme de ces quantités eſt celle qui répond au commencement ou à la fin de leur exiſtence, c'eſt-à-dire, au moment qu'elles commencent à augmenter ou qu'elles ceſſent de diminuer.

Il y a une certaine borne que la vîteſſe d'un corps peut atteindre à la fin de ſon mouvement, & qu'elle ne ſçauroit paſſer; c'eſt cette vîteſſe qui eſt la derniere vîteſſe du corps. Il en eſt de même des limites & des proportions de toutes les quantités qui commencent & ceſſent. Comme cette limite eſt certaine & définie, c'eſt un problême très géométrique que de la déterminer; car on peut regarder comme géométriques tous les problêmes où il s'agit de déterminer avec préciſion quelque quantité.

On objectera peut-être que ſi les dernieres raiſons qu'ont entr'elles les quantités qui s'évanouiſſent ſont données, les dernieres grandeurs de ces quantités ſeront auſſi données; & qu'ainſi toute quantité ſera compoſée d'indiviſibles, au contraire de ce qu'*Euclide* a démontré des incommenſurables dans le dixiéme Livre de ſes élémens. Mais cette objection porte ſur une ſuppoſition fauſſe; car les dernieres raiſons qu'ont entr'elles les quantités qui s'évanouiſſent ne ſont pas en effet les raiſons des dernieres quantités, ou de quantités déterminées & indiviſibles, mais les limites dont les raiſons des quantités qui décroiſſent à l'infini approchent

ſans

ſans ceſſe, limites dont elles peuvent toujours approcher plus près que d'aucune différence donnée, qu'elles ne peuvent jamais paſſer, & qu'elles ne ſauroient atteindre, ſi ce n'eſt dans l'infini.

On comprendra ceci plus clairement dans les quantités infiniment grandes. Si deux quantités, dont la différence eſt donnée, augmentent à l'infini, leur derniere raiſon ſera donnée, & ſera certainement la raiſon d'égalité; cependant les dernieres, ou les plus grandes quantités auſquelles répond cette raiſon, ne ſeront point des quantités données. Donc, lorſque je me ſervirai dans la ſuite, pour être plus clair, des mots de *quantités évanouiſſantes*, de *quantités dernieres*, de *quantités très petites*, il ne faut pas entendre par ces expreſſions des quantités d'une grandeur déterminée, mais toujours des quantités qui diminuent à l'infini.

SECONDE SECTION.

De la recherche des forces centripetes.

PROPOSITION I. THÉOREME I.

*Dans les mouvemens curvilignes des corps, les aires décrites * autour d'un centre immobile, ſont dans un même plan immobile, & ſont proportionnelles au temps.*

Suppoſé que le temps ſoit diviſé en parties égales, & que dans la premiere partie de ce temps, le corps, par la force qui lui a été imprimée, décrive la ligne AB: ſuivant la premiere loi du mouvement dans un ſecond temps égal au premier, il décriroit, ſi rien ne l'en empêchoit, la droite $BC = AB$; Donc en tirant au centre S, les rayons AS, BS, cS, les aires ASB, BSc ſeroient égales. Suppoſé que lorſque ce corps eſt arrivé en B, la force Fig. 13.

* Les aires décrites par un corps autour d'un centre ſont les eſpaces terminés par les rayons qui partent de ce centre, & par l'arc ſur lequel s'appuient ces rayons.

centripete agiſſe ſur lui par un ſeul coup, mais aſſez puiſſant pour l'obliger à ſe détourner de la droite Bc & à ſuivre la droite BC. Si on tire la ligne Cc parallele à BS, laquelle rencontre BC en C, à la fin de ce ſecond temps, le corps (ſelon le 1. Corollaire des loix) ſera en C dans le même plan que le triangle ASB.

En tirant enſuite la ligne SC, le triangle SBC ſera égal au triangle SBc, à cauſe des paralleles SB, Cc, donc il ſera auſſi égal au triangle SAB.

De même, ſi la force centripete agit ſucceſſivement ſur le corps en C, D, E, &c. & qu'elle lui faſſe décrire à chaque petite portion de temps les droites CD, DE, EF, &c. ces lignes ſeront toutes dans le même plan; & le triangle SCD ſera égal au triangle SBC, le triangle SDE au triangle SCD, & le triangle SEF au triangle SDE. Ce corps décrira donc en des temps égaux des aires égales dans un plan immobile: & en compoſant, les ſommes des aires quelconques $SADS$, $SAFS$ ſeront entr'elles comme les temps employés à les décrire.

Qu'on imagine maintenant que le nombre des triangles augmente & que leur largeur diminue à l'infini; il eſt clair (par le Cor. 4. du Lemme 3.) que leur dernier périmétre ADF, ſera une ligne courbe. Donc la force centripete, qui retire le corps à tout moment de la tangente de cette courbe, agit ſans interruption, & les aires quelconques $SADS$, $SAFS$, qui étoient proportionnelles aux temps employés à les décrire, leur ſeront encore proportionnelles dans ce cas. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. La vîteſſe d'un corps attiré vers un centre immobile dans un eſpace non réſiſtant, eſt réciproquement comme la perpendiculaire tirée de ce centre à la ligne qui touche la courbe au lieu où le corps ſe trouve; car la vîteſſe de ce corps aux lieux A, B, C, D, E, eſt proportionnelle aux baſes AB, BC, CD, DE, EF des triangles égaux; & ces baſes ſont entr'elles en raiſon réciproque des perpendiculaires qui leur ſont abaiſſées du centre.

Cor. 2. Si on fait un parallélogramme *ABCV*, ſur les cordes *AB*, *BC*, de deux arcs ſucceſſivement parcourus par le même corps en des temps égaux dans des eſpaces non réſiſtans, & que la diagonale *BV* de ce parallélogramme ait la même poſition que celle qu'elle a à la fin, lorſque ces arcs diminuent l'infini, cette diagonale prolongée paſſera par le centre des forces.

Cor. 3. Si on fait les parallélogrammes *ABCV*, *DEFZ*, ſur les cordes *AB*, *BC* & *DE*, *EF* des arcs décrits en temps égaux dans des eſpaces non réſiſtans, les forces en *B* & en *E* ſeront entr'elles dans la derniere raiſon des diagonales *BV*, *EZ*, lorſque ces arcs diminueront à l'infini; car les mouvemens du corps, ſuivant les lignes *BC* & *EF*, ſont compoſés (par le Cor. 1. des loix) des mouvemens ſuivant les lignes *Bc*, *BV* & *Ef*, *EZ*: or, *BV* & *EZ*, qui ſont égales à *Cc*, & à *Ff*, ont été parcourues par les impulſions de la force centripete en *B* & en *E*, ſelon ce qui a été démontré dans cette propoſition; donc elles ſont proportionnelles à ces impulſions.

Cor. 4. Les forces par leſquelles les corps, qui ſe meuvent dans des eſpaces libres, ſont détournés du mouvement rectiligne & contraints à décrire des courbes, ſont entr'elles comme les fléches des arcs évanouiſſants parcourus en temps égaux, & ces fléches convergent vers le centre des forces, & coupent les cordes des arcs évanouiſſants en deux parties égales; car ces fléches ſont la moitié des diagonales dont on vient de parler dans le Cor. 3.

Cor. 5. Ainſi ces mêmes forces ſont à la force de la gravité, comme les fléches des arcs décrits ſont aux fléches verticales des arcs paraboliques que les projectiles décrivent dans le même temps.

Cor. 6. Tout ce qui a été démontré juſqu'ici ſera encore vrai, par le Cor. 5. des loix, lorſque les plans dans leſquels les corps ſe meuvent, & les centres des forces placés dans ces plans, au lieu d'être en repos, ſe mouveront uniformément en ligne droite.

Du mouvement des Corps.

PROPOSITION II. THÉOREME II.

La force centripete d'un corps qui ſe meut dans une ligne courbe décrite ſur un plan, & qui parcourt autour d'un point immobile, ou mû uniformément en ligne droite, des aires proportionnelles au temps, tend néceſſairement à ce point.

Cas 1. Tout corps qui ſe meut dans une courbe eſt détourné du mouvement rectiligne par une force qui agit ſur lui, par la premiere loi; & cette force qui contraint le corps à ſe détourner de la ligne droite, & à décrire en temps égaux les petits triangles égaux *SAB*, *SBC*, *SCD*, *&c.* autour du point immobile *S*, agit au lieu *B* ſuivant une ligne parallele à *cC*, par la ſeconde loi, c'eſt-à-dire, ſuivant la ligne *BS*; & au lieu *C* ſuivant une ligne parallele à *dD*, c'eſt-à-dire ſuivant la ligne *SC*, *&c.* Elle agit donc toujours ſelon des lignes qui tendent à ce point immobile *S*. *C. Q. F. D.*

Cas. 2. Et par le Corollaire 5. des loix, le mouvement du corps eſt le même, ſoit que la ſuperficie dans laquelle s'éxécute ce mouvement ſoit en repos, ſoit qu'elle ſe meuve uniformément en ligne droite en emportant avec elle le centre, la courbe décrite, & le corps décrivant.

Cor. 1. Dans les eſpaces ou milieux non réſiſtans, ſi les aires ne ſont pas proportionnelles au temps, les forces centripetes ne tendent pas au concours des rayons; mais elles déclinent vers le côté vers lequel le corps ſe meut ſi la deſcription des aires eſt accélérée; & elles déclinent vers le côté oppoſé ſi elle eſt retardée.

Cor. 2. Dans les milieux réſiſtans, ſi la deſcription des aires eſt accélérée, les directions des forces déclinent auſſi vers le côté vers lequel le mouvement du corps eſt dirigé.

SCHOLIE.

Le corps peut être animé par une force centripete compoſée de pluſieurs forces. Dans ce cas, le ſens de la Propoſition précé-

dente eſt, que la force qui réſulte de toutes les autres tend au point *S*. De plus, ſi quelqu'autre force agit continuellement ſelon une ligne perpendiculaire à la ſuperficie décrite, le corps ſe détournera du plan de ſon mouvement; mais la quantité de la ſuperficie décrite n'augmentera ni ne diminuera, ainſi on peut la négliger dans la compoſition des forces.

PROPOSITION III. THÉOREME III.

Si un corps décrit autour d'un autre corps qui ſe meut d'une façon quelconque des aires proportionnelles au temps, la force qui anime le premier eſt compoſée d'une force qui tend vers le ſecond, & de toute la force accélératrice par laquelle ce ſecond corps eſt animé.

Soit le premier corps *L* & le ſecond *T*: Si une force nouvelle égale & contraire à celle qui agit ſur le corps *T*, agit ſur ces deux corps, ſelon des lignes paralleles, le premier corps *L* continuera, par le Cor. 6. des loix, à décrire autour du corps *T* les mêmes aires qu'auparavant; mais la force qui agiſſoit ſur le corps *T* ſera détruite par cette nouvelle force qu'on a ſuppoſé lui être égale & contraire. Donc, par la premiere loi, ce corps *T* abandonné à lui-même demeurera en repos, ou ſe mouvera uniformément en ligne droite; & le corps *L*, qui eſt animé alors par la différence de ces forces, c'eſt-à-dire par la force reſtante, continuera à décrire des aires proportionnelles au temps autour du corps *T*. Donc par le Théor. 2. la différence de ces forces tend vers le corps *T* comme à ſon centre. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Il ſuit de-là, que ſi un corps *L* décrit autour d'un autre corps des aires proportionnelles au temps, & que de la force totale qui preſſe le corps *L*, ſoit ſimple, ſoit compoſée de pluſieurs forces, ſelon le Cor. 2. des loix, on ſouſtrait toute la force accélératrice qui agit ſur l'autre corps; la force reſtante par laquelle le corps *L* eſt animé, tendra tout entiere vers l'autre corps *T* comme centre.

Cor. 2. Et ſi ces aires ne s'éloignent pas beaucoup d'être pro-

portionnelles au temps, la force reſtante ſera à peu près dirigée vers le corps *T*.

Cor. 3. Et réciproquement, ſi la force reſtante tend à peu près vers le corps *T*, les aires ſeront à peu près proportionnelles au temps.

Cor. 4. Si le corps *L* décrit autour du corps *T* des aires qui s'éloignent beaucoup de la proportionnalité des temps, & que ce corps *T* ſoit en repos, ou qu'il ſe meuve uniformément en ligne droite, la force centripete qui tend vers ce corps eſt nulle, ou bien elle eſt mêlée & compoſée avec d'autres forces très puiſſantes ; & la force totale, compoſée de toutes ces forces, s'il y en a pluſieurs, ſera dirigée vers un autre centre mobile ou immobile. Il en eſt de même, lorſque le corps *T* ſe meut d'un mouvement quelconque, pourvû que l'on prenne pour force centripete, celle qui reſte après qu'on a ſouſtrait la force totale qui agit ſur le corps *T*.

SCHOLIE.

Comme la deſcription des aires égales en temps égaux marque que le corps qui décrit ces aires éprouve l'action d'une force qui agit ſur lui, qui le retire du mouvement rectiligne, & qui le retient dans ſon orbite ; pourquoi ne prendrions-nous pas dans la ſuite cette deſcription égale des aires pour l'indice d'un centre autour duquel ſe fait tout mouvement circulaire dans des eſpaces non réſiſtans ?

PROPOSITION IV. THÉOREME IV.

Les corps qui parcourent uniformément différens cercles ſont animés par des forces centripetes qui tendent au centre de ces cercles, & qui ſont entr'elles comme les quarrés des arcs décrits en temps égal, diviſés par les rayons de ces cercles.

Ces forces tendent au centre des cercles par la Propoſition 2. & le Corollaire 2. de la Propoſition 1. & elles ſont entr'elles, par

le Corollaire 4. de la Propoſition 1. comme les ſinus verſes des arcs décrits dans de très petits temps égaux, c'eſt-à-dire par le Lemme 7. comme les quarrés de ces mêmes arcs diviſés par les diamétres de leurs cercles. Or, comme ces petits arcs ſont proportionnels aux arcs décrits dans des temps quelconques égaux, & que les diamétres ſont comme les rayons, les forces ſeront comme les quarrés des arcs quelconques décrits dans des temps égaux diviſés par les rayons. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Comme ces arcs ſont proportionnels aux vîteſſes des corps, les forces centripetes ſeront en raiſon compoſée de la raiſon doublée des vîteſſes directement, & de la raiſon ſimple des rayons inverſement.

Cor. 2. Et comme les temps périodiques ſont en raiſon compoſée de la raiſon directe des rayons, & de la raiſon inverſe des vîteſſes; les forces centripetes ſeront en raiſon compoſée de la raiſon directe des rayons, & de la raiſon doublée inverſe des temps périodiques.

Cor. 3. Donc, ſi les temps périodiques ſont égaux, & que les vîteſſes ſoient par conſéquent comme les rayons; les forces centripetes ſeront auſſi comme les rayons: & au contraire.

Cor. 4. Si les temps périodiques & les vîteſſes ſont en raiſon ſousdoublée des rayons; les forces centripetes ſeront égales entre elles: & au contraire.

Cor. 5. Si les temps périodiques ſont comme les rayons, & que par conſéquent les vîteſſes ſoient égales, les forces centripetes ſeront en raiſon renverſée des rayons: & au contraire.

Cor. 6. Si les temps périodiques ſont en raiſon ſeſquiplée des rayons, & que par conſéquent les vîteſſes ſoient réciproquement en raiſon ſousdoublée des rayons; les forces centripetes ſeront réciproquement comme les quarrés des rayons: & au contraire.

Cor. 7. Et généralement, ſi le temps périodique eſt comme une puiſſance quelconque R^n du rayon, & que par conſéquent la

Du mouvement des Corps.

vîteſſe ſoit réciproquement comme la puiſſance R^{n-1} du rayon, la force centripete ſera réciproquement comme la puiſſance R^{2n-1} du rayon : & au contraire.

Cor. 8. On peut trouver de la même maniere tout ce qui concerne les temps, les vîteſſes & les forces avec leſquelles les corps décrivent des parties ſemblables de figures quelconques ſemblables, qui ont leurs centres poſés de même dans ces figures ; il ne faut pas pour ces cas d'autres démonſtrations que les précédentes, pourvû qu'on ſubſtitue la deſcription égale des aires au mouvement uniforme, & qu'on mette les diſtances des corps aux centres à la place des rayons.

Cor. 9. Il ſuit auſſi de la même démonſtration, que l'arc qu'un corps décrit pendant un temps quelconque en tournant uniformément dans un cercle en vertu d'une force centripete donnée, eſt moyen proportionnel entre le diamétre de ce cercle & la ligne que le corps parcoureroit en tombant par la même force donnée & pendant le même temps.

SCHOLIE.

Le cas du Corollaire 6. eſt celui des corps céléſtes, (comme nos Compatriotes *Hook*, *Wren* & *Halley* l'ont chacun conclu des obſervations) c'eſt pourquoi j'expliquerai fort au long dans la ſuite de cet Ouvrage tout ce qui a rapport à la force centripete qui décroît en raiſon doublée des diſtances au centre.

De plus, par la Propoſition précédente & par ſes Corollaires, on peut trouver la proportion qui eſt entre la force centripete & une force quelconque connue, telle que la gravité ; car ſi le corps tourne dans un cercle concentrique à la terre par la force de la gravité, la gravité ſera ſa force centripete : or, connoiſſant d'un côté la deſcente des graves, & de l'autre le temps de la révolution, & l'arc décrit dans un temps quelconque, on aura par le Corollaire 9. de cette Propoſition la proportion cherchée entre la gravité & la force centripete. C'eſt par des propoſitions ſemblables

bles que M. *Hugens*, dans ſon excellent Traité *de Horollogio oſcillatorio*, a comparé la force de la gravité avec les forces centrifuges des corps qui circulent.

On pourroit encore démontrer cette propoſition de cette maniere. Soit ſuppoſé un Polygone d'un nombre de côtés quelconques inſcrit dans un cercle. Si le corps, en parcourant les côtés de ce Poligone avec une vîteſſe donnée, eſt réfléchi par le cercle à chacun des angles de ce Poligone, la force avec laquelle ce corps frappe le cercle à chaque réfléxion ſera comme ſa vîteſſe : donc la ſomme des forces en un temps donné ſera comme cette vîteſſe multipliée par le nombre des réfléxions, c'eſt-à-dire, (ſi le Poligone eſt donné d'eſpece) comme la ligne parcourue dans ce temps, laquelle doit être augmentée ou diminuée dans la raiſon qu'elle a elle-même au rayon de ce cercle ; c'eſt-à-dire, comme le quarré de cette ligne diviſé par le rayon : ainſi ſi les côtés du Poligone diminuant à l'infini, le Poligone vient à coïncider enfin avec le cercle, la ſomme des forces ſera alors comme le quarré de l'arc parcouru dans un temps donné diviſé par le rayon. C'eſt là la meſure de la force centrifuge avec laquelle le corps preſſe le cercle ; & cette force eſt égale & contraire à la force par laquelle ce cercle repouſſe continuellement le corps vers le centre.

PROPOSITION V. PROBLÉME I.

Trouver le point auquel tendent comme centre des forces qui font parcourir une courbe donnée, lors qu'on connoît la vîteſſe du corps à chaque point de cette courbe.

Que les lignes PT, TQV, VR, qui ſe rencontrent aux points T & V, touchent la courbe donnée dans les points P, Q, R, que l'on mene enſuite par ces points & perpendiculairement aux tangentes les droites PA, QB, RC, réciproquement proportionnelles aux vîteſſes dans les mêmes points ; c'eſt-à-dire, de ſorte que PA ſoit à QB comme la vîteſſe au point Q eſt à la vîteſſe au point P, & que QB ſoit à RC comme la vîteſſe au point R à la vîteſſe Fig. 14.

Du mouvement des Corps.

au point Q. Cela fait, ſoient menées à angles droits par les extrémités A, B, C, de ces perpendiculaires les lignes AD, DBE, EC, qui ſe rencontrent en D & en E: & en tirant les lignes TD, VE, elles ſe rencontreront au centre cherché S.

Car les perpendiculaires tirées du centre S aux tangentes PT, QT ſont (par le Cor. 1. de la Prop. 1.) réciproquement comme les vîteſſes du corps aux points P & Q; donc par la conſtruction elles ſeront comme les perpendiculaires AP, BQ directement, c'eſt-à-dire, comme les perpendiculaires abaiſſées du point D ſur ces tangentes. D'où l'on tire facilement, que les points S, T, D ſont dans une même ligne droite. On prouvera par le même raiſonnement que les points S, E, V ſont auſſi dans une même ligne droite; donc le centre S ſe trouvera dans l'interſection des lignes TD, VE. C. Q. F. D.

PROPOSITION VI. THÉORÉME V.

Si un corps décrit autour d'un centre immobile un orbe quelconque dans un eſpace non réſiſtant, & qu'on ſuppoſe que la fléche de l'arc naiſſant que ce corps parcourt dans un temps infiniment petit, & qui partage ſa corde en deux parties égales, paſſe, étant prolongée par le centre des forces: La force centripete dans le milieu de l'arc ſera en raiſon directe de cette fléche, & en raiſon doublée inverſe du temps.

Par le Cor. 4. de la Prop. 1. la fléche dans un temps donné eſt comme la force; donc, en augmentant le temps en une raiſon quelconque, la fléche (par les Cor. 2. & 3. du Lemme 11.) augmentera dans la raiſon doublée du temps; car l'arc augmente en même raiſon que le temps, donc la fléche eſt en raiſon ſimple de la force, & en raiſon doublée du temps, & ſouſtrayant de part & d'autre la raiſon doublée du temps, la force ſera en raiſon directe de la fléche, & en raiſon doublée inverſe du temps. *C. Q. F. D.*

On pourroit auſſi démontrer facilement cette Propoſition par le Cor. 4. du Lemme 10.

Cor. 1. Si le corps P en tournant autour du centre S décrit la courbe APQ, & que cette courbe ſoit touchée par la ligne ZPR en un point quelconque P, que d'un autre point quelconque Q de cette courbe, on tire QR parallèle à SP, & qu'on abaiſſe QT perpendiculaire ſur SP: la force centripete ſera réciproquement comme la quantité que devient $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ lorſque les points P & Q coïncident; car QR eſt égale à la fléche de l'arc double de QP, dont le milieu eſt P, & le double du triangle SQP ou $SP \times QT$ eſt proportionnel au temps dans lequel cet arc double eſt décrit; ainſi on peut l'écrire à la place de ce temps. Fig. 15.

Cor. 2. On prouvera par le même raiſonnement que la force centripete eſt réciproquement comme la quantité $\frac{SY^2 \times QP^2}{QR}$ pourvû que SY ſoit abaiſſée perpendiculairement du centre des forces ſur la tangente PR de l'orbite; car les rectangles $SY \times QP$ & $SP \times QT$ ſont égaux.

Cor. 3. Si l'orbe PQ eſt un cercle dont la droite PV, qui paſſe par le corps & par le centre des forces, ſoit une corde, ou que cet orbe PQ ait pour cercle oſculateur le cercle dont la corde eſt PV, la force centripete ſera réciproquement comme la quantité $SY^2 \times PV$; car dans cette ſuppoſition $PV = \frac{QP^2}{QR}$

Cor. 4. Les mêmes choſes étant poſées, la force centripete eſt dans la raiſon doublée directe de la vîteſſe, & dans la raiſon inverſe de la corde PV; car par le Cor. 1. de la Propoſ. 1. la vîteſſe eſt réciproquement comme la perpendiculaire SY.

Cor. 5. Donc, ſi on a une figure curviligne quelconque APQ, & dans cette figure un point donné S, vers lequel la force centripete ſoit perpétuellement dirigée, on pourra trouver la loi de la force centripete, par laquelle un corps quelconque P ſera retiré à tout moment du mouvement rectiligne & retenu dans

Du mouvement des Corps.

le périmetre de cette figure, en cherchant la valeur du ſolide $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$, ou celle du ſolide $SY^2 \times PV$, qui ſont réciproquement proportionnels à cette force. Nous en donnerons des exemples dans les Problémes ſuivans.

PROPOSITION VII. PROBLÉME II.

Trouver la loi de la force centripete qui tend à un point donné, & qui fait décrire à un corps la circonférence d'un cercle.

Fig. 16. Soient $VQPA$ la circonférence du cercle; S le point donné vers lequel la force fait tendre le corps comme à ſon centre; P un lieu quelconque où l'on ſuppoſe le corps arrivé; Q le lieu conſécutif; PRZ la tangente du cercle au point P; & PV la corde qui paſſe par S. Soient de plus VA le diametre qui paſſe par V; AP la corde tirée de A à P; QT une perpendiculaire à PV, laquelle étant prolongée rencontre la tangente PR en Z; RL la parallele à PV qui paſſe par Q, & qui rencontre le cercle en L, & la tangente PZ en R.

Cela poſé, à cauſe des triangles ſemblables ZQR, ZTP, VPA; on aura RP^2, c'eſt-à-dire, $QR \times RL : QT^2 :: AV^2 : PV^2$; donc $\frac{QR \times RL \times PV^2}{AV^2} = QT^2$; multipliant préſentement cette équation par $\frac{SP^2}{QR}$, & écrivant PV au lieu de RL, ce qui eſt permis lorſque les points P & Q coïncident, on aura $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2} = \frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ donc, par les Corol. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripete ſera réciproquement comme $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$ c'eſt-à dire, à cauſe que AV^2 eſt donné, réciproquement comme le quarré de la diſtance ou hauteur SP multipliée par le cube de la corde PV. C. Q. F. T.

AUTRE SOLUTION.

Soit menée la perpendiculaire SY ſur la tangente PR prolongée; à cauſe des triangles ſemblables SYP, VPA, on aura

$AV : PV :: SP : SY$. Donc $\frac{SP \times PV}{AV} = SY$, & $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2} = SY^2 \times PV$. Donc par les Cor. 3. & 5. de la Prop. 6. la force centripete eſt réciproquement comme $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$, c'eſt-à-dire, à cauſe que AV eſt donnée, réciproquement comme $SP^2 \times PV^3$ C. Q. F. T.

Cor. 1. Donc, ſi le point donné S, auquel la force centripete tend ſans ceſſe, ſe trouve dans la circonférence de ce cercle, comme en V; la force centripete ſera réciproquement comme la cinquiéme puiſſance de la hauteur SP.

Cor. 2. La force par laquelle le corps P décrit le cercle $APTV$ autour du centre S des forces, eſt à la force par laquelle ce même corps P peut tourner dans le même tems périodique & dans le même cercle autour d'un autre centre quelconque de forces R, comme $SP \times RP^2$ à SG^3, SG étant une droite menée parallelement à RP, & terminée par la tangente PG. Fig. 17.

Car par la conſtruction, la premiere force eſt à la derniere comme $RP^2 \times PT^3$ à $SP^2 \times PV^3$ c'eſt-a-dire, comme $SP \times PR^2$ à $\frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3}$, ou bien, à cauſe des triangles ſemblables PSG, TPV, comme $SP \times PR^2$ à SG^3.

Cor. 3. La force par laquelle le corps P circule dans un orbe quelconque autour d'un centre de forces S, eſt à la force, par laquelle ce même corps P peut circuler dans le même temps périodique & dans le même orbe autour d'un autre centre quelconque R de forces, comme $SP \times RP^2$ à SG^3, c'eſt-à-dire, comme la diſtance du corps au premier centre des forces S, multipliée par le quarré de la diſtance au ſecond centre R, eſt au cube de la ligne SG tirée du premier centre S parallelement à la diſtance du ſecond centre, & terminée par la tangente PG de l'orbite. Car les forces dans cet orbe ſont les mêmes à un de ſes points quelconques P, que dans le cercle qui a la même courbure.

Du mouvement des Corps.

PROPOSITION VIII. PROBLÉME III.

On demande la loi de la force centripete dans le cas où le corps décrivant un demi-cercle PQA *tend continuellement vers un point* S *ſi éloigné, que toutes les lignes* PS, RS *tirées à ce point peuvent être regardées comme paralleles.*

Fig. 18. Par le centre C de ce demi cercle, ſoit tiré le demi diametre CA coupé perpendiculairement en M & en N par les directions de la force centripete. Tirant CP, on aura, à cauſe des triangles ſemblables, CPM, PZT & RZQ, $CP^2 : PM^2 :: PR^2 : QT^2$ & par la nature du cercle $PR^2 = QR \times \overline{RN + QN} =$ (les points Q & P coïncidant) $QR \times 2PM$. Donc $CP^2 : PM^2 :: QR \times 2PM : QT^2$ donc $\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$ & $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$; donc, par les Corol. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripete eſt réciproquement comme $\frac{2PM^3 \times SP^2}{CP^2}$, c'eſt-à-dire (en négligeant la raiſon déterminée de $\frac{2SP^2}{CP^2}$) réciproquement comme PM^3. *C. Q. F. T.*

On tireroit facilement la même choſe de la Propoſition précédente.

SCHOLIE.

Par un raiſonnement à peu près ſemblable, on trouveroit que ſi le corps décrivoit une ellipſe, une hiperbole, ou une Parabole, en vertu d'une force centripete dirigée à un point très-éloigné, cette force centripete ſeroit encore réciproquement comme le cube de l'ordonnée qui tend à ce point.

PROPOSITION IX. PROBLÉME IV.

Suppoſé que le corps tourne dans une ſpirale PQS *qui coupe tous les rayons* SP, SQ, *&c. ſous un angle donné: on demande la loi de la force centripete qui tend au centre de cette ſpirale.*

Fig. 19. Soit ſuppoſé conſtant l'angle indéfiniment petit PSQ, la figure

$SPRQT$, ayant tous ſes angles conſtans, ſera donnée d'eſpece; donc $\frac{QT}{QR}$ ſera donnée auſſi; donc $\frac{QT^2}{QR}$ ſera comme SP, parceque, comme on vient de le dire, $SPRQT$ eſt donnée d'eſpece.

Suppoſons préſentement que l'angle PSQ change ſelon une loi quelconque, la droite QR qui ſouſtend l'angle de contact QPR changera, par le Lemme 11. en raiſon doublée de PR ou de QT. De-là il ſuit, que la raiſon de $\frac{QT^2}{QR}$ demeurera la même qu'auparavant, c'eſt-à-dire qu'elle ſera encore comme SP. C'eſt pourquoi $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$ ſera comme SP^3; donc par les Corol. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripete ſera réciproquement proportionnelle au cube de la diſtance SP. *C. Q. F. T.*

AUTRE SOLUTION.

La perpendiculaire SY abaiſſée ſur la tangente, & la corde PV du cercle oſculateur étant en raiſon donnée avec SP, SP^2 eſt proportionnel à $SY^2 \times PV$, c'eſt-à-dire, par les Cor. 3. & 5. de la Prop. 6. réciproquement proportionnel à la force centripete.

LEMME XII.

Tous les parallélogrammes décrits autour des diametres quelconques conjugués d'une ellipſe ou d'une hyperbole donnée ſont égaux entr'eux.

Cette Propoſition eſt claire par les Coniques.

PROPOSITION X. PROBLÉME V.

Un corps circulant dans une ellipſe : on demande la loi de la force centripete qui tend au centre de cette ellipſe.

Soient CA, CB les demi axes de l'ellipſe; GP, DK d'autres diametres conjugués; PF, QT des perpendiculaires à ces diametres; Qv une ordonnée au diametre GP; ſi on acheve le parallélogramme $QvPR$, on aura par les coniques $Pv \times vG : Qv^2 ::$ Fig. 20.

Du Mouvement des Corps.

$PC^2 : CD^2$. Mais à cauſe des triangles ſemblables QvT, PCF, $Qv^2 : QT^2 :: PC^2 : PF^2$. Donc, en compoſant ces raiſons, on aura $Pv \times vG : QT^2 :: PC^2 : CD^2$, & $PC^2 : PF^2$, ou $vG : \frac{QT^2}{Pv} :: PC^2 : \frac{CD^2 \times PF^2}{PC^2}$. Si on écrit préſentement QR pour Pv, que l'on mette, à cauſe du Lemme 12. $BC \times CA$ à la place de $CD \times PF$, & que l'on ſuppoſe vG égale à $2PC$, ainſi qu'on le doit lorſque les points P & Q coïncident, on aura, en multipliant les extrêmes & les moyens, $\frac{QT^2 \times PC^2}{QR} = \frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$. Donc, par le Cor. 5. de la Prop. 6. la force centripete ſera réciproquement comme $\frac{2BC^2 \times AC^2}{PC}$; c'eſt-à-dire, à cauſe que $2CB^2 \times CA^2$ eſt donnée, réciproquement comme $\frac{1}{PC}$; ou, ce qui revient au même, directement comme la diſtance PC. *C. Q. F. T.*

AUTRE SOLUTION.

Sur la droite PG de l'autre côté du point T par rapport à P, ſoit pris le point u en ſorte que $Tu = Tv$. Soit pris enſuite uV à vG, comme DC^2 à PC^2. Puiſque les coniques donnent $Qv^2 : Pv \times vG :: DC^2 : PC^2$, on aura $Qv^2 = Pv \times uV$, & ajoûtant le rectangle $uP \times Pv$ de part & d'autre, il eſt clair que le quarré de la corde de l'arc PQ ſera égal au rectangle $VP \times Pv$; donc le cercle qui touche la ſection conique en P & qui paſſe par le point Q paſſera auſſi par le point V. Suppoſez à préſent que les points P & Q ſe confondent, la raiſon de uV à vG, qui eſt la même que la raiſon de DC^2 à PC^2, deviendra la raiſon de PV à PG ou de PV à $2PC$; donc $PV = \frac{2DC^2}{PC}$, donc, par le Cor. 3. de la Propoſ. 6. la force par laquelle le corps P fait ſa révolution dans l'ellipſe, ſera réciproquement comme $\frac{2DC^2}{PC} \times PF^2$, c'eſt-à-dire,

à cauſe que $2DC^2 \times PF^2$ eſt donné, que cette force ſera directement comme PC. *C. Q. F. T.*

Cor. 1. La force eſt donc comme la diſtance du corps au centre de l'ellipſe : & réciproquement, ſi la force eſt comme la diſtance, le corps décrira ou une ellipſe dont le centre ſera le même que le centre des forces, ou le cercle dans lequel l'ellipſe peut ſe changer.

Cor. 2. Les temps périodiques des révolutions qui ſe font autour du même centre ſont égaux dans toutes les ellipſes ; car ces temps ſont égaux dans les ellipſes ſemblables (par les Cor. 3. & 8. de la Prop. 4.) ; mais dans les ellipſes qui ont le grand axe commun, ils ſont les uns aux autres directement comme les aires elliptiques totales, & inverſement comme les particules de ces aires décrites en temps égal, c'eſt-à-dire directement comme les petits axes, & inverſement comme les vîteſſes des corps dans les ſommets principaux, ou directement comme les petits axes, & inverſement comme les ordonnées au même point de l'axe commun. Mais ces deux raiſons directes & inverſes qui compoſent la raiſon des temps ſont alors égales ; donc les temps ſont égaux.

SCHOLIE.

Si le centre de l'ellipſe s'éloigne à l'infini, & qu'elle devienne une parabole, le corps ſe mouvera dans cette parabole ; & la force tendant alors à un centre infiniment diſtant, elle deviendra uniforme. C'eſt le cas traité par *Galilée*. Si (en changeant l'inclinaiſon du plan au cône coupé) la parabole ſe change en une hiperbole, le corps ſe mouvera dans le périmetre de cette hyperbole, la force centripete ſe changeant alors en force centrifuge ; & de même que dans le cercle ou l'ellipſe, ſi les forces tendent au centre de la figure placé ſur l'abſciſſe, en augmentant ou diminuant les ordonnées en une raiſon donnée quelconque, ou en changeant l'angle d'inclinaiſon des ordonnées ſur l'abſciſſe, ces forces augmenteront ou diminueront toujours en raiſon des diſ-

Du mouvement des Corps.

tances au centre, pourvû que les temps périodiques demeurent égaux : ainſi dans toutes les courbes, ſi les ordonnées augmentent ou diminuent dans une raiſon donnée quelconque, ou que l'angle de ces ordonnées change d'une façon quelconque, le temps périodique & le centre des forces, qu'on ſuppoſe placé à volonté ſur l'abſciſſe, demeurans les mêmes, les forces centripetes aux extrémités des ordonnées correſpondantes ſeront entr'elles comme les diſtances au centre.

TROISIÉME SECTION.

Du mouvement des corps dans les Sections coniques excentriques.

PROPOSITION XI. PROBLEME VI.

Un corps faiſant ſa révolution dans une ellipſe ; on demande la loi de la force centripete, lorſqu'elle tend à un de ſes foyers.

Soient S le foyer de l'ellipſe, E la rencontre de SP avec le diametre DK, x celle de la même ligne SP avec l'ordonnée QV, Qx PR le parallélogramme fait ſur Px & Qx. On voit d'abord
Fig. 21. que EP eſt égale au demi grand axe AC ; car menant par l'autre foyer H la droite HI parallele à DK, il eſt clair que EI ſera égale à SE à cauſe de l'égalité qui eſt entre CH & CS, & par conſéquent PE ſera égale à la moitié de la ſomme de PI & de PS, ou, ce qui revient au même, à AC, moitié de la ſomme de PS & de PH, puiſqu'il ſuit de ce que HI eſt parallele à RP, & de ce que les angles HPZ & IPR ſont égaux, que $HP = PI$. Abaiſſant enſuite QT perpendiculaire à SP, & nommant L le parametre du grand axe, c'eſt-à-dire $\frac{2BC^2}{AC}$; on verra que $L \times QR : L \times Pv :: QR : Pv$, c'eſt-à-dire $:: PE$ ou $AC : PC$; mais $L \times Pv : Gv \times vP :: L : Gv$ & $Gv \times vP : Qv^2 :: PC^2 : CD^2$; de plus, $Qv^2 : Qx^2$ en raiſon d'égalité (Cor. 2. Lem. 7.)

lorſque les points P & Q coïncident, & Qx^2 ou $Qv^2 : QT^2 ::$ $EP^2 : PF^2$, c'eſt-à-dire $:: CA^2 : PF^2$ ou (Lem. 12.) $:: CD^2 :$ CB^2; donc, en compoſant toutes ces raiſons on aura $L \times QR :$ $QT^2 ::$ $AC \times L \times PC^2 \times CD^2$ ou $:: 2CB^2 \times PC^2 \times CD^2 :$ $PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$ ou $:: 2PC : Gv$. Or, puiſque $2PC$ & Gv ſont égales lorſque les points P & Q coïncident, les quantités $L \times QR$ & QT^2 qui leur ſont proportionnelles ſeront donc égales auſſi. Multipliant préſentement ces quantités égales par $\frac{SP^2}{QR}$, on aura $L \times SP^2 = \frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Donc par les Corol. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripete ſera réciproquement comme $L \times SP^2$, c'eſt-à-dire en raiſon renverſée de SP^2. *C. Q. F. T.* Fig. 21.

AUTRE SOLUTION.

Comme la force qui tend au centre de l'ellipſe, & par laquelle le corps P peut faire ſa révolution dans cette courbe, eſt par le Cor. 1. de la Prop. 10. proportionnelle à la diſtance CP du corps au centre C de l'ellipſe; en menant CE parallele à la tangente PR de l'ellipſe, on verra par le Cor. 3. de la Prop. 7. que la force par laquelle ce même corps P feroit ſa révolution autour d'un autre point quelconque S de l'ellipſe, ſeroit comme $\frac{PE^3}{SP^2}$ en ſuppoſant que E ſoit la rencontre de CE & de la droite SP, tirée au point S. Donc, lorſque le point S ſera le foyer, & que par conſéquent PE ſera conſtante, la force centripete ſera comme $\frac{1}{SP^2}$ *C. Q. F. T.* Fig. 21.

Dans ce Probléme, ainſi que dans le Probl. 5. on pourroit ſe contenter d'appliquer la concluſion trouvée pour le cas de l'ellipſe à celui de la Parabole & de l'hyperbole; mais à cauſe de l'importance de ce Probléme, & de l'étendue de ſon uſage dans les Propoſitions ſuivantes, j'ai cru qu'il ne ſeroit pas inutile de démontrer en particulier les cas de la parabole & de l'hyperbole.

Du mouvement des Corps.

PROPOSITION XII. PROBLÉME VII.

Suppoſé qu'un corps ſe meuve dans une hiperbole; on demande la loi de la force centripete qui tend au foyer de cette courbe.

Fig. 22. Que CA, CB ſoient les demi axes de l'hyperbole; PG, KD d'autres diametres conjugués; PF une perpendiculaire au diametre KD; & Qv une ordonnée au diametre PG. Qu'on tire SP, qui coupe le diametre DK en E, & l'ordonnée Qv en x, & qu'on acheve le parallélogramme $QRPx$; il eſt clair que EP ſera égale au demi axe tranſverſal AC; car tirant par l'autre foyer H de l'hiperbole la ligne HI parallele à EC, CH étant égale à CS, EI ſera égale à ES, & par conſéquent EP ſera la moitié de la différence des lignes PS & PI, c'eſt-à-dire, (à cauſe que IH, PR ſont paralleles, & que les angles IPR, HPZ ſont égaux) qu'elle ſera égale à la moitié de la différence des lignes PS & PH, c'eſt-à-dire que $EP = AC$.

Cela poſé, tirant QT perpendiculaire ſur SP, & nommant L le parametre principal de l'hiperbole ou $\frac{2BC^2}{AC}$, on aura $L \times QR : L \times Pv :: QR : Pv$ ou $:: Px : Pv$, c'eſt-à-dire, à cauſe des triangles ſemblables Pxv, PEC, $:: PE : PC$, ou $:: AC : PC$. On aura auſſi, $L \times Pv : Gv \times Pv :: L : Gv$; & par la nature des coniques $Gv \times vP : Qv^2 :: PC^2 : CD^2$. De plus $Qx^2 = QT^2$, ou (ce qui revient au même, Cor. 2. Lem. 7. lorſque les points P & Q coïncident) $Qv^2 : QT^2 :: EP^2 : PF^2$, c'eſt-à-dire, $:: CA^2 : PF^2$, ou Lemme 12. $:: CD^2 : CB^2$, & en compoſant toutes ces raiſons, on aura $L \times QR : QT^2 :: AC \times L \times PC^2 \times CD^2$ ou $2BC^2 \times PC^2 \times CD^2 : PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$, c'eſt-à-dire $:: 2PC : Gv$: mais lorſque les points P & Q coïncident, $2PC = Gv$. Donc les quantités $L \times QR$ & QT^2 qui leur ſont proportionnelles ſeront auſſi égales, & en multipliant ces quantités égales par $\frac{SP^2}{QR}$, on aura $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR} = L \times SP^2$.

Donc, par les Cor. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripete ſera réciproquement comme $L \times SP^2$, c'eſt-àdire, en raiſon renverſée du quarré de la diſtance SP. *C. Q. F. T.*

AUTRE SOLUTION.

Si on cherche la force en prenant le centre C de l'hiperbole pour centre des forces, on la trouvera proportionnelle à la diſtance CP. Donc, par le Cor. 3. de la Prop. 7. la force qui tend au foyer S ſera comme $\frac{PE^3}{SP^2}$; c'eſt-à-dire, à cauſe que PE eſt donnée, réciproquement comme SP^2. *C. Q. F. T.* Fig. 22.

On démontrera de la même maniere que ſi cette force centripete ſe change en une force centrifuge, le corps décrira l'hiperbole conjuguée.

LEMME XIII.

Le Parametre d'un diametre quelconque d'une parabole, eſt quadruple de la diſtance du ſommet de ce diametre au foyer de la Figure.

Cela ſe démontre par les coniques.

LEMME XIV.

La perpendiculaire, tirée du foyer d'une parabole à ſa tangente, eſt moyenne proportionnelle entre les diſtances du foyer au point de contact, & au ſommet principal de la Figure.

Soient AP une parabole, S ſon foyer, A ſon ſommet principal, P le point de contact, PO une ordonnée au diametre principal, PM une tangente qui rencontre le diametre principal en M, & SN la ligne perpendiculaire tirée du foyer ſur la tangente. Ayant tiré AN, il ſuivra de l'égalité des lignes MS & SP, MN & NP, MA & AO, que les droites AN & OP ſont paralleles, & par conſéquent que le triangle SAN eſt rectangle en A, & ſemblable aux triangles égaux SNM, SNP; donc $PS : SN :: SN : SA$. *C. Q. F. D.* Fig. 23.

Cor. 1. Donc $PS^2 : SN^2 :: PS : SA$.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

Cor. 2. A cauſe que SA eſt donnée, SN^2 ſera proportionnelle à PS.

Cor. 3. Le concours d'une tangente quelconque PM & de la droite SN, tirée perpendiculairement du foyer ſur cette tangente, tombera ſur la droite AN qui touche la parabole à ſon ſommet principal.

PROPOSITION XIII. PROBLÉME VIII.

Suppoſé qu'un corps décrive une parabole, on demande la loi de la force centripete qui tend au foyer de cette courbe.

Fig. 24. La conſtruction demeurant la même que dans le Lemme précédent, ſoient P le lieu de la parabole dans lequel on ſuppoſe d'abord le corps, & Q le lieu conſécutif, de ce lieu Q tirez QR parallele à SP, & QT perpendiculaire ſur cette ligne SP, que v ſoit la rencontre de PG avec la parallele Qv à la tangente, & x la rencontre de la même parallele Qv avec SP, parce que les triangles Pxv, SPM ſont ſemblables, & que les côtés SM, SP de l'un de ces triangles ſont égaux, les côtés Px ou QR, & Pv de l'autre triangle ſeront auſſi égaux. Mais, par les coniques, le quarré de l'ordonnée Qv eſt égal au rectangle ſous le parametre & le ſegment du diametre Pv, c'eſt-à-dire, par le Lemme 13. au rectangle $4PS \times Pv$ ou $4PS \times QR$; & par le Cor. 2. du Lemme 7. les points P & Q coïncidant, la raiſon de Qv à Qx devient la raiſon d'égalité. Donc, dans ce cas, $Qx^2 = 4PS \times QR$. De plus, à cauſe des triangles ſemblables QxT, SPN, $Qx^2 : QT^2 :: PS : SN^2$; c'eſt-à-dire, Cor. 1. Lem. 14. $:: PS : SA$, ou $:: 4PS \times QR : 4SA \times QR$. Donc $QT^2 = 4SA \times QR$. Multipliant enſuite cette égalité par $\frac{SP^2}{QR}$, on aura $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR} = SP^2 \times 4SA$, ce qui apprend, Cor. 1. & 5. de la Prop. 6. que la force centripete eſt réciproquement comme $SP^2 \times 4SA$, c'eſt à-dire, à cauſe que $4SA$ eſt donnée que cette force eſt en raiſon renverſée du quarré de la diſtance SP. *C. Q. F. T.*

Cor. 1. Des trois dernieres Propoſitions on tire, que ſi un corps quelconque attiré continuellement vers un centre par une force réciproquement proportionnelle au quarré des diſtances part d'un lieu P, ſuivant une droite quelconque PR, & avec une vîteſſe quelconque, ce corps ſe mouvera dans une ſection conique qui aura pour l'un de ſes foyers le centre des forces, & réciproquement; car le foyer, le point de contact, & la poſition de la tangente étant donnés, on peut décrire la ſection conique qui aura à ce point une courbure donnée: & deux orbites qui ſe touchent, & qui ſont décrites avec la même vîteſſe & la même force centripete ne ſçauroient différer entr'elles.

Cor. 2. Si la vîteſſe avec laquelle le corps part du lieu P eſt celle qui peut lui faire décrire la petite ligne PR dans un eſpace de temps fort court, & que la force centripete puiſſe faire parcourir à ce même corps dans le même temps l'eſpace QR: le corps décrira une ſection conique, dont le parametre ſera ce que devient la quantité $\frac{QT^2}{QR}$, lorſque les petites lignes PR & QR diminuent à l'infini. Fig. 25.

Dans ces Corollaires je rapporte le cercle à l'ellipſe, & j'excepte le cas où le corps deſcend en ligne droite au centre.

PROPOSITION XIV. THÉORÉME VI.

Si pluſieurs corps font leurs révolutions autour d'un centre commun, & que les forces centripetes ſoient réciproquement en raiſon doublée de leurs diſtances à ce centre, les parametres principaux de leurs orbes ſeront en raiſon doublée des aires qu'ils décrivent en temps égal.

Car, par le Cor. 2. de la Prop. 13. le parametre L eſt égal à ce que devient la quantité $\frac{QT^2}{QR}$ lorſque les points P & Q coïncident; mais la petite ligne QR eſt dans un temps donné comme la force centripete qui la fait décrire, c'eſt-à-dire, par Fig. 25.

Fig. 25.

l'hipothèſe, en raiſon renverſée de SP^2, Donc $\frac{QT^2}{QR}$ eſt proportionnelle à $QT^2 \times SP^2$, c'eſt-à-dire, que le parametre L eſt en raiſon doublée de l'aire $QT \times SP$. *C. Q. F. D.*

Corol. Donc l'aire elliptique totale, & le rectangle formé par les axes, qui lui eſt proportionnel, eſt en raiſon compoſée de la raiſon ſousdoublée du parametre, & de la raiſon du temps périodique; car l'aire totale eſt proportionnelle à l'aire $QT \times SP$ décrite dans un temps donné, & multipliée par le temps périodique.

PROPOSITION XV. THÉOREME VII.

Les mêmes choſes étant poſées, les temps périodiques dans les ellipſes, ſont en raiſon ſeſquiplée de leurs grands axes.

Puiſque le petit axe eſt moyen proportionnel entre le grand axe & le parametre, le rectangle formé par les axes eſt donc en raiſon compoſée de la raiſon ſousdoublée du paramétre & de la raiſon ſeſquiplée du grand axe; mais ce rectangle, par le Cor. de la Prop. 14. eſt en raiſon compoſée de la raiſon ſousdoublée du parametre, & de la raiſon du temps périodique. Otant donc de part & d'autre la raiſon ſousdoublée du parametre, il reſtera la raiſon ſeſquiplée du grand axe, qui ſera la même que la raiſon du temps périodique. *C. Q. F. D.*

Corol. Les temps périodiques ſont donc les mêmes dans les ellipſes, & dans les cercles, dont les diametres ſont égaux aux grands axes des ellipſes.

PROPOSITION XVI. THÉORÉME VIII.

Les mêmes choſes étant poſées, ſi par les points où l'on ſuppoſe les corps dans chaque orbite on mene des tangentes, & qu'on abbaiſſe du foyer commun des perpendiculaires ſur les tangentes, les vîteſſes de ces corps ſeront en raiſon compoſée de la raiſon inverſe de ces perpendiculaires

perpendiculaires, & de la raiſon directe ſousdoublée des parametres principaux.

Du foyer S à la tangente PR tirez la perpendiculaire SY, la vîteſſe du corps P ſera réciproquement en raiſon ſousdoublée de la quantité $\frac{SY^2}{L}$; car cette vîteſſe eſt comme le petit arc PQ décrit dans une particule de temps donnée, c'eſt-à-dire, par le Lemme 7. comme la tangente PR, ou ce qui revient au même, (à cauſe que $PR : QT :: SP : SY$) comme $\frac{SP \times QT}{SY}$, c'eſt-à-dire, comme SY réciproquement & $SP \times QT$ directement; or $SP \times QT$ eſt comme l'aire décrite en un temps donné, c'eſt-à-dire par la Prop. 14. en raiſon ſousdoublée du parametre. *C. Q. F. D.* Fig. 26.

Cor. 1. Les parametres principaux ſont en raiſon compoſée de la raiſon doublée des perpendiculaires, & de la raiſon doublée des vîteſſes.

Cor. 2. Les vîteſſes des corps, dans les plus grandes & les moindres diſtances du foyer commun, ſont en raiſon compoſée de la raiſon inverſe des diſtances, & de la raiſon directe ſousdoublée des parametres principaux; car alors les perpendiculaires ſont les diſtances elles-mêmes.

Cor. 3. Donc la vîteſſe, dans une ſection conique à la plus grande ou à la plus petite diſtance du foyer, eſt à la vîteſſe dans un cercle à la même diſtance du centre, en raiſon ſousdoublée du parametre au double de cette diſtance.

Cor. 4. Les vîteſſes des corps qui font leurs révolutions dans des ellipſes ſont les mêmes dans leurs moyennes diſtances du foyer commun, que celles des corps qui circulent dans des cercles aux mêmes diſtances; c'eſt-à-dire, par le Cor. 6. de la Prop. 4. que ces vîteſſes ſont en raiſon inverſe ſousdoublée des diſtances. Car les perpendiculaires ſont moitié des petits axes, & les petits axes ſont comme les moyennes proportionnelles entre les moyen-

nes diſtances & les parametres. Compoſant donc la raiſon inverſe des perpendiculaires avec la raiſon ſousdoublée directe des parametres, il en viendra la raiſon ſousdoublée inverſe des diſtances.

Cor. 5. Dans la même figure, ou même dans diverſes figures, pourvû que les parametres principaux ſoient égaux, la vîteſſe du corps eſt réciproquement comme la perpendiculaire tirée du foyer à la tangente.

Cor. 6. Dans la parabole, la vîteſſe eſt réciproquement en raiſon ſousdoublée de la diſtance du corps au foyer; dans l'ellipſe elle varie plus que dans cette raiſon, & moins dans l'hyperbole. Pour démontrer ces trois vérités, il ſuffit de remarquer (Cor. 2. Lem. 14.) que la perpendiculaire abbaiſſée du foyer ſur la tangente de la parabole eſt en raiſon ſousdoublée de la diſtance; que dans l'ellipſe cette perpendiculaire eſt dans une plus grande raiſon, & que dans l'hiperbole elle eſt dans une moindre raiſon.

Cor. 7. Dans la parabole, la vîteſſe, à une diſtance quelconque du foyer, eſt à la vîteſſe dans un cercle à la même diſtance du centre en raiſon ſousdoublée de deux à un. Dans l'ellipſe elle eſt dans une moindre raiſon, & dans une plus grande dans l'hiperbole; car, par le Cor. 2. de cette Propoſition, la vîteſſe au ſommet de la parabole eſt dans cette proportion, &, par les Corol. 6. de cette Propoſition & de la Propoſition 4. cette proportion ſe conſerve à toutes les diſtances. D'où il ſuit qu'à chaque point de la parabole, la vîteſſe eſt égale à la vîteſſe du corps qui feroit ſa révolution dans un cercle à la moitié de la diſtance du centre; que dans l'ellipſe elle eſt moindre, & plus grande dans l'hiperbole.

Cor. 8. La vîteſſe d'un corps qui circule dans une ſection conique quelconque eſt à la vîteſſe d'un corps qui fait ſa révolution dans un cercle à la diſtance de la moitié du parametre principal, comme cette diſtance eſt à la perpendiculaire abaiſſée du foyer de la ſection ſur la tangente. La démonſtration en eſt évidente par le Cor. 5.

Cor. 9. Donc, puiſque (*Cor.* 6. Prop. 4.) la vîteſſe d'un corps qui tourne dans ce cercle ſeroit à la vîteſſe d'un corps qui tourne dans un autre cercle quelconque en raiſon ſousdoublée inverſe des diſtances, la vîteſſe d'un corps qui tourne dans une ſection conique ſera à la vîteſſe de celui qui tourne dans un cercle à la même diſtance, comme la moyenne proportionnelle entre cette diſtance commune & la moitié du parametre principal de la ſection conique eſt à la perpendiculaire abaiſſée du foyer commun ſur la tangente de cette ſection conique.

PROPOSITION XVII. PROBLÉME IX.

Suppoſant que la force centripete ſoit réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance au centre, & que la quantité abſolue de cette force ſoit connue, on demande la courbe qu'un corps décrit en partant d'un lieu donné, avec une vîteſſe donnée, ſuivant une ligne droite donnée.

Que la force centripete qui tend au point S ſoit celle qui fait circuler le corps p dans une orbite donnée pq, & que la vîteſſe de ce corps au point p ſoit connue. Que le corps P parte du lieu P, ſuivant la ligne PR avec une vîteſſe donnée, & qu'en vertu de cette vîteſſe & de la force centripete, il décrive la ſection conique PQ. Que la droite PR touche cette courbe en P, & que pr touche pareillement l'orbite pq en p; ſi l'on imagine des perpendiculaires tirées du point S à ces tangentes; il eſt clair, par le Cor. 1. de la Prop. 16. que le principal parametre de la ſection conique cherchée ſera au principal parametre de l'orbite donnée, en raiſon compoſée de la raiſon doublée des perpendiculaires, & de la raiſon doublée des vîteſſes, ainſi il ſera donné. Soit L le parametre de la ſection conique cherchée, le foyer S de cette même ſection étant auſſi donné, en faiſant l'angle RPH égal au complément à deux droits de l'angle RPS, on aura la poſition de la ligne PH, qui paſſe par l'autre foyer; car tirant SK perpendiculaire à PH, Fig. 27. & 28.

Du mouvement des Corps.

& ſuppoſant que BC ſoit le demi axe conjugué, on aura, $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2 = \overline{SP+PH}^2 - L \times \overline{SP+PH} = SP^2 + 2SP \times PH + PH^2 - L \times \overline{SP+PH}$, & ajoûtant de part & d'autre $2KP \times PH - SP^2 - PH^2 + L \times \overline{SP+PH}$, il viendra $L \times \overline{SP+PH} = 2SP \times PH + 2KP \times PH$ ou $SP+PH : PH :: 2SP + 2KP : L$. d'où PH eſt donnée tant de longueur que de poſition.

Si la vîteſſe du corps au point P eſt telle que le parametre L ſoit moindre que $2SP + 2KP$, la ligne PH tombera du même côté de la tangente PR que la ligne PS; ainſi la courbe ſera une ellipſe, & comme ſes foyers S & H ſeront donnés, ſon grand axe $SP+PH$ ſera auſſi donné.

Fig. 27.

Si la vîteſſe du corps eſt telle, que le parametre L ſoit égal à $2SP + 2KP$, la ligne PH ſera infinie, & par conſéquent la courbe ſera une parabole dont l'axe SH parallele à la ligne PK ſera donné.

Si le corps part du lieu P avec une vîteſſe encore plus grande, il faudra prendre la ligne PH de l'autre côté de la tangente; ainſi la tangente paſſant entre les foyers, la courbe ſera une hiperbole dont l'axe principal ſera égal à la différence des lignes SP & PH, & ſera par conſéquent donné.

Dans tous ces cas, ſi l'on ſuppoſe que le corps P ſe meuve dans la ſection conique ainſi trouvée, il eſt clair, par les Prop. 11. 12. & 13. que la force centripete ſera réciproquement comme le quarré de la diſtance du corps au centre S des forces; ainſi la ligne PQ repréſentera éxactement celle que le corps décrira par une telle force en partant du lieu donné P, avec une vîteſſe donnée, & ſuivant une ligne droite PR donnée de poſition. *C. Q. F. F.*

Cor. 1. De-là, le ſommet principal D, le parametre L, & le foyer S étant donnés, on aura dans toute ſection conique l'autre foyer H, en prenant DH à DS, comme le parametre à la différence entre le parametre & $4DS$; car la proportion $SP+PH$:

$PH :: 2SP + 2PK : L$ devient dans le cas de ce Corollaire, $DS + DH : DH :: 4DS : L$, & en diviſant on aura $DS : DH :: 4DS - L : L$.

Cor. 2. Ainſi, ſi la vîteſſe du corps dans le ſommet principal D eſt donnée, on trouvera facilement l'orbite, en déterminant d'abord ſon parametre par cette condition (Cor. 5. de la prop. 16.) qu'il ſoit au double de la diſtance DS en raiſon doublée de cette vîteſſe donnée à la vîteſſe du corps qui tourne dans un cercle à la diſtance DS, & en prenant enſuite DH à DS, comme le parametre eſt à la différence entre le parametre & $4DS$. Fig. 27.

Cor. 3. De-là, ſi le corps ſe meut dans une ſection conique quelconque, & qu'il ſoit dérangé de ſon orbite par une impulſion quelconque ; on pourra connoître la nouvelle orbite dans laquelle il circulera enſuite, en compoſant le mouvement que ce corps a déja avec le mouvement que cette impulſion ſeule lui auroit imprimé; car par ce moyen on aura le mouvement du corps lorſqu'il part du lieu donné dans lequel il a reçu l'impulſion ſuivant une ligne droite donnée de poſition.

Cor. 4. Et ſi ce corps eſt continuellement troublé dans ſa révolution par quelque force qui lui ſoit imprimée extérieurement, on connoîtra à peu près la courbe qu'il décrira, en prenant les changemens que cette force produit dans pluſieurs points quelconques, & en eſtimant par l'ordre de la ſérie les changemens continuels dans les lieux intermédiaires.

SCHOLIE.

Si le corps P par une force centripete qui tend à un point quelconque donné R, ſe meut dans le périmetre d'une ſection conique quelconque donnée, dont le centre ſoit C; & qu'on cherche la loi de la force centripete : on n'aura qu'à mener CG parallele au rayon RP, & qui rencontre la tangente PG en G, & cette force ſera, par le Cor. 1. & la Scholie de la Prop. 10. & par le Cor. 3. de la Prop. 7. comme $\frac{CG^3}{RP^2}$. Fig. 29.

QUATRIÉME SECTION.

De la détermination des orbes elliptiques, paraboliques & hiperboliques, lorſque l'un des foyers eſt donné.

LEMME XV.

Si des foyers S & H *d'une hiperbole ou d'une ellipſe quelconque, on tire à un troiſiéme point quelconque* V *deux lignes droites* S V, H V, *l'une deſquelles* H V *ſoit égale à l'axe principal de la figure, c'eſt-à-dire, à l'axe dans lequel les foyers ſe trouvent, & qu'on éleve ſur le milieu de l'autre ligne* S V *la perpendiculaire* T R, *cette perpendiculaire touchera en quelque point la ſection conique; & réciproquement, ſi elle la touche, la ligne* H V *ſera égale à l'axe principal de la Figure.*

Fig. 30.

Soient, le point *R* la rencontre de la perpendiculaire *TR* avec la ligne *HV* prolongée, s'il eſt néceſſaire, & *SR* la droite tirée de *S* à ce point *R*; les lignes *TS*, *TV* étant égales, les lignes *SR* & *VR* le ſeront auſſi, ainſi que les angles *TRS*, *TRV*; donc, le point *R* ſera à la ſection conique, & la perpendiculaire *TR* ſera tangente de cette ſection au point *R*. L'inverſe ſe démontreroit de même. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION XVIII. PROBLÉME X.

Le foyer, & les axes principaux étant donnés, décrire les trajectoires elliptiques & hiperboliques qui paſſent par des points donnés, & qui touchent des droites données de poſition.

Fig. 31.

Soit *S* le foyer commun de ces trajectoires, *AB* une ligne égale à l'axe principal d'une quelconque de ces trajectoires, *P* un point par lequel cette courbe doit paſſer, & *TR* une ligne

qu'elle doit toucher : ſoit de plus le cercle HG décrit du centre P & de l'intervalle $AB-SP$, ſi l'orbite eſt une ellipſe, ou $AB+SP$, ſi c'eſt une hiperbole : abaiſſant enſuite ſur la tangente TR la perpendiculaire ST prolongée en V, en ſorte que $TV=ST$, du centre V & de l'intervalle AB décrivez le cercle FH.

Par cette méthode, ſoit qu'on ait les deux points P & p, ou les deux tangentes TR & tr, ou le point P & la tangente TR, on décrira toujours deux cercles. Soit H leur interſection commune, décrivant alors une trajectoire qui ait pour axe principal l'axe donné, & les points S & H pour foyers, le Probléme ſera réſolu. Car cette trajectoire paſſera par le point P, à cauſe que $PH+SP$ dans l'ellipſe, & $PH-SP$ dans l'hiperbole, ſeront égales à l'axe. De plus, par le Lemme précédent, la ligne TR touchera cette trajectoire. On prouvera par le même raiſonnement ou qu'elle paſſera par les deux points P & p, ou qu'elle aura pour tangentes les lignes TR, tr. C. Q. F. F. Fig. 31.

PROPOSITION XIX. PROBLÉME II.

Autour d'un foyer donné décrire une trajectoire parabolique, qui paſſe par des points donnés, & qui touche des lignes droites données de poſition.

S étant le foyer, P un point de la trajectoire à décrire, & TR une tangente de cette trajectoire, du centre P, & de l'intervalle PS ſoit décrit le cercle FG, & ſoit abaiſſé de S ſur la tangente TR la perpendiculaire ST qu'on prolongera en V, enſorte que $TV=ST$. On décrira un autre cercle fg de la même maniere ſi on a une autre point donné p ; ou bien on trouvera un autre point v ſi on a une autre tangente tr; cela fait on ménera la droite IF qui touche les deux cercles FG, fg, ſi les deux points P & p ſont donnés, ou qui paſſe par les deux points V & v, ſi les deux tangentes TR & tr ſont données, ou enfin qui touche le cercle FG, & paſſe par le point V, ſi on a le point P, & la tangente TR. Fig. 32.

Abaiſſant enſuite ſur FI la perpendiculaire SI, coupée en deux parties égales au point K, & décrivant ſur l'axe SK une parabole dont le ſommet principal ſoit K, le Probléme ſera réſolu. Car cette parabole, à cauſe que SK, IK ſont égales, ainſi que SP & FP, paſſera par le point P, &, par le Lemme 14. Cor. 3. elle aura TR pour tangente, à cauſe que ST & TV ſont égales, & que l'angle STR eſt droit. *C. Q. F. F.*

PROPOSITION XX. PROBLÉME XII.

Décrire une trajectoire quelconque donnée d'eſpece, autour d'un foyer donné, laquelle paſſe par des points donnés, & touche des lignes droites données de poſition.

Fig. 33. *Cas* 1. Soit propoſé d'abord de décrire la trajectoire ABC qui paſſe par deux points B & C, & qui ait pour foyer le point donné S.

Comme cette trajectoire eſt donnée d'eſpece, la raiſon de l'axe principal à la diſtance des foyers ſera donnée. Prenez KB à BS, & LC à SC dans cette raiſon; décrivez deux cercles des centres B & C, & des intervalles BK & CL; ſur la droite KL qui touche ces cercles en K & en L, abaiſſez la perpendiculaire SG, & coupez cette ligne SG en A & en a, en ſorte que GA ſoit à AS, & Ga à aS, comme KB à BS; & des ſommets A, a, & ſur l'axe Aa décrivez enſuite une trajectoire, le Probléme ſera réſolu.

Car ſoit H l'autre foyer de la Figure décrite, puiſqu'on a, $GA : AS :: Ga : aS$, on aura, en diviſant, $Ga - GA$ ou $Aa : aS - AS$ ou SH dans la même raiſon, & par conſéquent dans la raiſon qui eſt entre l'axe principal de la Figure cherchée & la diſtance de ſes foyers. La Figure décrite eſt donc de la même eſpece que la Figure à décrire. Et comme KB eſt à BS & LC à CS dans la même raiſon, cette courbe paſſera par les points B & C, comme il eſt clair par les coniques.

Fig. 34. *Cas* 2. Soit propoſé maintenant de décrire autour du foyer S donné, une trajectoire qui ſoit touchée quelque part par les deux lignes TR & tr.

Abaiſſez du foyer ſur ces tangentes les perpendiculaires ST, St, & prolongez ces perpendiculaires en V, & en v, en ſorte que TV & tv ſoient égales à TS & à tS. Coupez la ligne Vv en deux parties égales au point O, élevez enſuite la perpendiculaire indéfinie OH, & coupez en K & en k la droite VS prolongée indéfiniment, en ſorte que VK ſoit à KS & Vk à kS, comme l'axe principal de la trajectoire à décrire eſt à la diſtance des foyers. Enfin ſur le diametre Kk décrivez un cercle qui coupe la ligne OH en H; & tracez une trajectoire dont les foyers ſoient S & H, & l'axe principal une ligne égale à VH; & le Probléme ſera réſolu.

Car coupant kK en deux parties égales au point X, & tirant les lignes HX, HS, HV, Hv: puiſque $VK : KS :: Vk : kS$, & par conſéquent :: $VK + Vk : KS + kS$ & :: $Vk - VK : kS - KS$, c'eſt-à-dire :: $2VX : 2KX$, & :: $2KX : 2SX$, ou ce qui revient au même :: $VX : HX$ & :: $HX : SX$; les triangles VXH, HXS ſont ſemblables: ce qui donne $VH : HS :: VX : XH$, c'eſt-à-dire :: $VK : KS$. De-là il ſuit que l'axe principal VH de la trajectoire décrite eſt à la diſtance SH de ſes foyers, dans la même raiſon que celle qui eſt entre l'axe principal de la trajectoire à décrire & la diſtance de ſes foyers, & que par conſéquent la trajectoire eſt de l'eſpece demandée. De plus, comme VH & vH ſont égales à l'axe principal, & que les lignes VS, vS ſont coupées en deux parties égales par les perpendiculaires TR, tr, il eſt clair, par le Lemme 15. que la trajectoire décrite aura encore la propriété demandée d'être touchée par les droites TR, tr. C. Q. F. F. Fig. 34.

Cas 3. Le foyer S étant donné, on demande une trajectoire qui touche la droite TR en un point donné R. Fig. 35.

Sur la droite TR abaiſſez la perpendiculaire ST, & prolongez la en V, en ſorte que $TV = ST$. Tirez enſuite VR & coupez en k & en K la droite VS prolongée indéfiniment en ſorte que VK ſoit à SK & Vk à Sk comme l'axe principal de l'ellipſe à

Du mouvement des Corps.

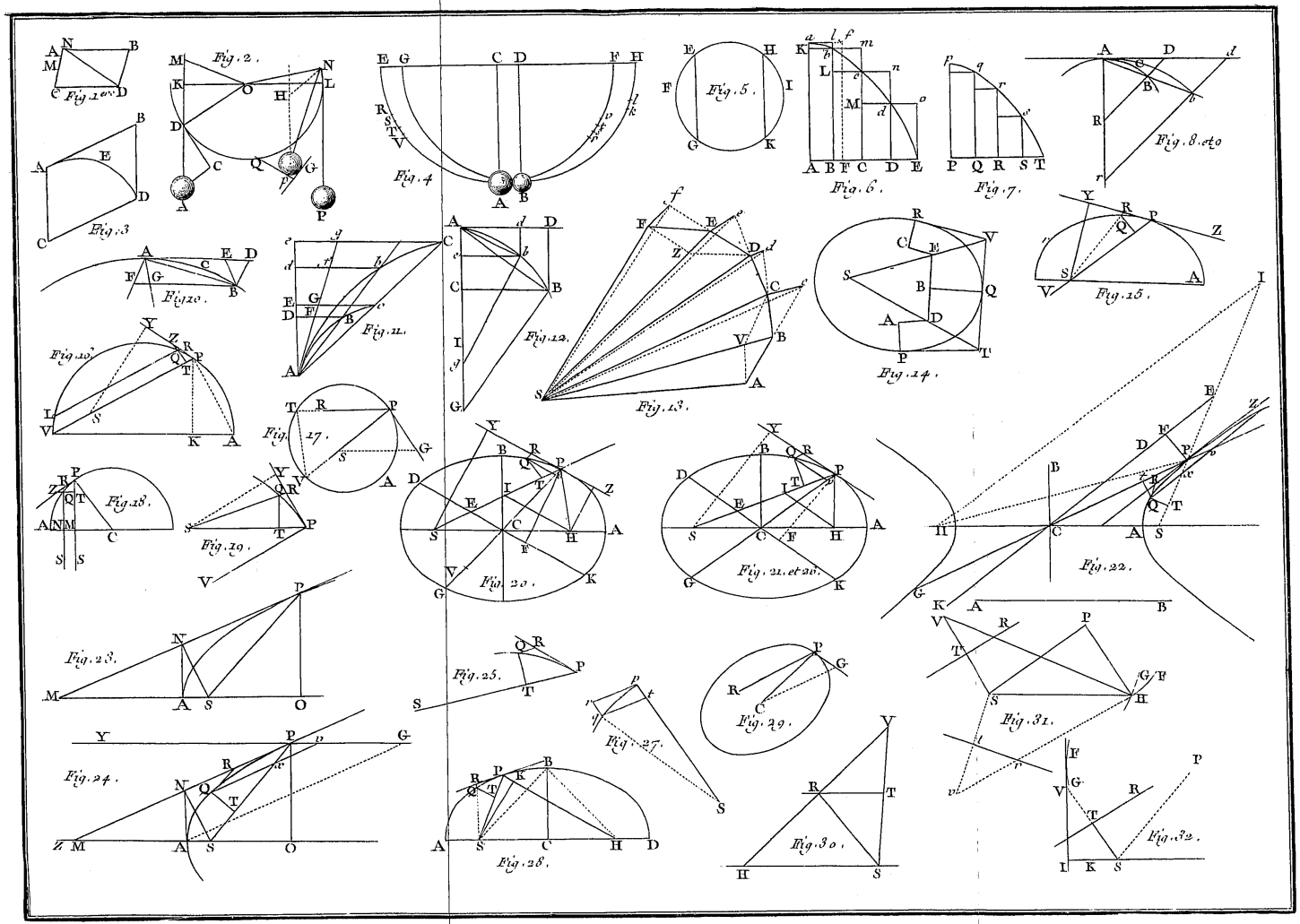
décrire eſt à la diſtance des foyers ; ayant décrit enſuite ſur le diametre Kk un cercle qui coupe en H la droite VR prolongée, tracez une trajectoire dont les foyers ſoient S & H, & qui ait pour axe principal une ligne égale à VH, & le Probléme ſera réſolu.

Car il eſt clair, par ce qui a été démontré dans le ſecond cas, que $VH : SH :: VK : SK$, & par conſéquent comme l'axe principal de la trajectoire à décrire eſt à la diſtance entre ſes foyers, la trajectoire décrite ſera donc de même eſpece que la trajectoire à décrire. De plus, il eſt clair par les coniques, que cette trajectoire ſera touchée au point R par la droite TR qui coupe l'angle VRS en deux parties égales. *C. Q. F. F.*

Fig. 36. & 37. *Cas* 4. Soit enfin propoſé de décrire autour du foyer S la trajectoire APB qui ſoit touchée par la droite TR, & qui paſſe par un point quelconque P donné hors de la tangente, & qui ſoit ſemblable à la Figure apb décrite des foyers s, h, & ſur l'axe principal ab.

Abaiſſez ſur la tangente TR la perpendiculaire ST, & prolongez-la en V, en ſorte que $TV = ST$. Faites les angles hsq, shq reſpectivement égaux aux angles VSP, SPV, du centre q & d'un intervalle qui ſoit à ab, comme SP à VS, décrivez un cercle qui coupe la figure apb en p, joignez les points s & p & tirez SH qui ſoit à sh, comme SP à sp, & qui faſſe l'angle PSH égal à l'angle psh, & l'angle VSH égal à l'angle psq. Enſuite, des foyers H & S ſur l'axe principal AB égal à la diſtance VH, décrivez la ſection conique, & le Probléme ſera réſolu.

Car ſi on tire sv qui ſoit à sp, comme sh à sq, & qui faſſe l'angle vsp égal à l'angle hsq, & l'angle vsh égal à l'angle psq, les triangles svh, spq ſeront ſemblables, & par conſéquent on aura $vh : pq :: sh : sq$, c'eſt-à-dire, à cauſe des triangles ſemblables $VSP : hsq :: SV : SP$ ou $ab : pq$. Donc $vh = ab$. De plus, à cauſe des triangles ſemblables VSH, vsh $VH : SH :: vh : sh$, c'eſt-à-dire, que l'axe de la ſection conique


Fig. 1er.
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8. et 9
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20.
Fig. 21. et 26.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.

décrite eſt à l'intervalle de ſes foyers comme l'axe ab à l'intervalle sh des foyers; & par conſéquent la figure décrite eſt ſemblable à la figure aph. De plus, cette figure paſſe par le point P, parce que le triangle PSH, eſt ſemblable au triangle psh; & elle eſt touchée par la droite TR, à cauſe que ſon axe eſt égal à VH, & que VS eſt coupée en deux parties égales par TR. C. Q. F. F. Fig. 36. & 37.

LEMME XVI.

Trouver un point, duquel tirant des lignes droites à trois points donnés, les différences de ces trois droites ſoient nulles ou donneés.

Cas 1. Soient A, B, C, les points donnés, & Z, le quatriéme point qu'il faut trouver; la différence des lignes AZ, BZ étant donnée, le point Z ſera à une hiperbole qui aura pour foyers les points A & B, & pour axe principal la différence donnée. Soit MN cet axe, prenant $PM : MA :: MN : AB$, élevant enſuite PR perpendiculaire ſur AB, & abaiſſant ZR perpendiculaire ſur PR; on aura, par la nature de l'hiperbole, $ZR : AZ :: MN : AB$. Par le même raiſonnement on trouvera que le point Z ſera à une autre hiperbole dont les foyers ſeront les points A & C, & l'axe principal la différence entre AZ & CZ, & on trouvera auſſi la droite QS perpendiculaire ſur AC, à laquelle QS, ſi on méne la perpendiculaire ZS d'un point quelconque Z de cette hiperbole, ZS ſera à AZ comme la différence entre AZ & CZ eſt à AC. Cela poſé, il eſt aiſé de remarquer que les raiſons de ZR & de ZS à AZ ſont données, & que par conſéquent celle que ZR & ZS ont entr'elles eſt donnée auſſi. Donc, ſi les droites RP, SQ prolongées ſe rencontrent en T, & qu'on tire TZ & TA, la figure $TRZS$ ſera donnée d'eſpece, & la droite TZ dans laquelle eſt placé le point cherché Z ſera donnée de poſition. De plus, la droite TA ſera donnée auſſi ainſi que l'angle ATZ; & parce que les raiſons de AZ & de TZ Fig. 38.

à ZS ſont données, celle de AZ & de TZ entr'elles ſera donnée auſſi, & par conſéquent le triangle entier ATZ, dont le ſommet eſt le point cherché Z, ſera enfin donné. *C. Q. F. T.*

Cas 2. Si deux de ces trois lignes, comme AZ & BC, ſont égales, tirez la droite TZ en ſorte qu'elle partage la droite AB en deux parties égales, & cherchez enſuite le triangle ATZ comme ci-deſſus. Fig. 38.

Cas 3. Si ces trois lignes ſont égales, le point Z ſera placé dans le centre du cercle qui paſſe par les points A, B, C. C. Q. F. T.

Ce Probléme ſe réſoud auſſi par le livre des Touchantes d'*Apollonius*, reſtitué par *Viet.*

PROPOSITION XXI. PROBLÉME XIII.

Décrire une trajectoire autour d'un foyer donné, laquelle paſſe par des points donnés, & touche des droites données de poſition.

Que le foyer S, le point P, & la tangente TR ſoient donnés, & qu'il s'agiſſe de trouver l'autre foyer H.

Abaiſſez ſur la tangente la perpendiculaire ST, & prolongez-la en Y, en ſorte que $TY = ST : YH$, ſera alors égale à l'axe principal. Tirez enſuite SP, HP, & SP ſera la différence entre HP & l'axe principal. De la même maniere, ſi on a pluſieurs tangentes TR, ou pluſieurs points P, on trouvera toujours autant de lignes YH, ou PH, tirées de ces points Y ou P, au foyer H, leſquelles ſeront égales aux axes, ou en différeront de longueurs données SP, & ces lignes ſeront par conſéquent égales entre elles, ou bien elles auront des différences données, & de-là il ſuit qu'on aura par le Lemme précédent l'autre foyer H. Ayant donc les foyers & la longueur de l'axe (qui ſera YH, ou bien la droite égale à $PH \pm SP$, c'eſt-à-dire, $PH + PS$, ſi la trajectoire eſt une ellipſe, & $PH - SP$, ſi c'eſt une hiperbole) on aura la trajectoire. *C. Q. F. F.* Fig. 39.

SCHOLIE.

Lorſque la trajectoire eſt une hiperbole, je ne prends pour trajectoire qu'une des hyperboles oppoſées; car le corps, en perſévérant dans ſon mouvement, ne peut jamais paſſer dans l'autre hyperbole.

Le cas où trois points ſont donnés ſe réſout plus facilement de cette maniere: Soient B, C, D les points donnés. Tirez les lignes BC, CD, & prolongez-les en E, & en F, en ſorte que $EB : EC :: SB : SC$, & que $FC : FD :: SC : SD$. Ayant mené EF, & l'ayant prolongée, abaiſſez-lui les perpendiculaires SG, BH, enſuite ſur GS prolongée infiniment prenez $GA : AS$ & $Ga : aS :: HB : BS$; A ſera le ſommet, & Aa l'axe principal de la trajectoire, laquelle, ſelon que GA ſera plus grand, égal, ou plus petit que AS, ſera une ellipſe, une parabole, ou une hiperbole. Dans le premier cas, le point a tombera du même côté que le point A, par rapport à la ligne GF; dans le ſecond cas il s'éloignera à l'infini; & dans le troiſiéme il tombera du côté oppoſé au point A, par rapport à la ligne GF. Car ſi on abaiſſe ſur GF les perpendiculaires CI, DK, on aura, $IC : HB :: EC : EB$, c'eſt-à-dire, $:: SC : SB$, & réciproquement $IC : SC :: HB : SB$ ou $:: GA : SA$, & par un ſemblable raiſonnement KD ſera à SD dans la même raiſon. Donc, les points B, C, D ſont à la ſection conique, dans laquelle toutes les droites tirées du foyer S à la courbe ſont aux perpendiculaires abaiſſées des mêmes points de la courbe ſur GF, dans cette raiſon donnée. Fig. 40. Fig. 46.

Le célébre Géometre *la Hire* a donné une ſolution à-peu-près ſemblable de ce Probléme au huitiéme Livre de ſes Coniques, Prop. 25.

CINQUIÉME SECTION.

De la détermination des Orbites lors qu'aucun des foyers n'eſt donné.

LEMME XVII.

Si d'un point quelconque P *d'une Section conique donnée, on mène les quatre droites* PQ, PR, PS, PT, *qui faſſent chacune un angle donné avec chacun des quatre côtés indéfiniment prolongés* AB, CD, AC, DB *d'un trapeze quelconque* ABCD *inſcrit dans la ſection conique, le rectangle des droites* PQ × PR *tirées à deux côtés oppoſés, ſera en raiſon donnée au rectangle des droites* PS × PT *tirées aux deux autres côtés oppoſés.*

Fig. 41.

Cas 1. Suppoſons premierement que les lignes tirées aux côtés oppoſés ſoient paralleles à l'un ou à l'autre des côtés reſtans, que PQ & PR, par exemple, ſoient paralleles au côté AC, & PS & PT au côté AB; de plus, que deux de ces côtés oppoſés comme AC & BD ſoient paralleles l'un à l'autre. Dans ce cas, la droite qui coupe ces côtés paralleles en deux parties égales, ſera un des diametres de la ſection conique, & coupera auſſi la ligne RQ en deux parties égales. Soit O la rencontre de ce diametre & de RQ, PO ſera une ordonnée à ce même diametre, & OK priſe égale à OP, & placée ſur ſon prolongement ſera l'ordonnée oppoſée. Les points A, B, P & K étant donc à la ſection conique, il eſt clair (Prop. 17. 19. 21. 23. du Liv. III. des coniques d'*Apollonius*) à cauſe que PK coupe AB ſous un angle donné, que le rectangle $PQ \times QK$ ſera en raiſon donnée au rectangle $AQ \times QB$. Mais $QK = PR$, puiſque ces lignes ſont les différences des lignes égales OK, OP & OQ, OR; donc les rectangles $PQ \times QK$, & $PQ \times PR$ ſont auſſi égaux; & par

Fig. 41.

conſéquent le rectangle $PQ \times PR$ eſt au rectangle $AQ \times QB$, c'eſt-à-dire au rectangle $PS \times PT$, en raiſon donnée. *C. Q. F. D.*

Cas 2. Suppoſons à préſent que les côtés oppoſés AC, BD du trapeze ne ſoient point paralleles, tirez Bd parallele à AC & qui rencontre la droite ST en t, & la ſection conique en d, tirez de plus Cd qui coupe la ligne PQ en r, & DM parallele à PQ & qui coupe Cd en M & AB en N, à cauſe des triangles ſemblables BTt, DBN, on aura Bt, ou $PQ : Tt :: DN : NB$, & ainſi $Rr : AQ$ ou $PS :: DM : AN$. Multipliant alors les antécédens par les antécédens, & les conſéquens par les conſéquens, le rectangle $ND \times DM$ ſera au rectangle $AN \times NB$, comme le rectangle $PQ \times Rr$ eſt au rectangle $PS \times Tt$; mais par le cas 1. le rectangle $PQ \times Pr$ ſera au rectangle $PS \times Pt$ dans la même raiſon. Donc cette raiſon ſera auſſi celle du rectangle $PQ \times PR$ au rectangle $PS \times PT$. C. Q. F. D. Fig. 42.

Cas 3. Suppoſons enfin que les quatre lignes PQ, PR, PS, PT ne ſoient pas paralleles aux côtés AC, AB, mais qu'elles leur ſoient inclinées d'une façon quelconque.

Ayant tiré Pq, Pr paralleles à AC; Ps, Pt paralleles à AB; les angles des triangles PQq, PRr, PSs, PTt ſeront donnés, ainſi que les rapports de PQ à Pq, de PR à Pr, de PS à Ps, & de PT à Pt. Donc les raiſons compoſées de $PQ \times PR$ à $Pq \times Pr$ & de $PS \times PT$ à $Ps \times Pt$ ſeront données. Mais, par ce qui a été démontré ci-deſſus, la raiſon de $Pq \times Pr$ à $Ps \times Pt$ eſt donnée. Donc la raiſon de $PQ \times PR$ à $PS \times PT$ l'eſt auſſi. *C. Q. F. D.* Fig. 43.

LEMME XVIII.

Les mêmes choſes étant poſées, ſi les points P *ſont tels que les rectangles des droites* PQ × PR, *menées à deux côtés oppoſés du trapeze, ſoient en raiſon donnée aux rectangles des lignes* PS × PT, *menées aux deux autres côtés; ces points* P *ſeront à une ſection conique circonſcrite au trapeze.* Fig. 44.

Si par quelqu'un du nombre infini des points P, par le point p,

par exemple, & par les quatre points A, B, C, D, on imagine une ſection conique, je dis que cette ſection conique paſſera par tout autre point P trouvé de la même maniere. Si on le nie, qu'on ſuppoſe donc que AP coupe cette courbe en quelque point autre que P, comme en b. Tirant de ces points p & b, aux côtés du trapeze, & ſous les angles donnés les droites pq, pr, ps, pt, & bk, bn, bf, bd; on aura, par le Lemme 17, $pq \times pr : ps \times pt :: bk \times bn : bf \times bd$. Mais $PQ \times PR$ eſt à $PS \times PT$ dans la même raiſon, par l'hipotheſe. Donc, à cauſe que les trapezes $bk\,Af$, $PQ\,AS$ ſont ſemblables, on aura $PQ : PS :: bk : bf$, & par conſéquent, en diviſant les termes de la premiere proportion par les termes correſpondans de celle-ci, on aura $bn : bd :: PR : PT$. Donc les trapezes équiangles $Dnbd$, $DRPT$ ſont ſemblables; d'où l'on tire que leurs diagonales Db, DP coïncident, & qu'ainſi le point b tombe dans l'interſection des droites AP, DP, c'eſt-à-dire, qu'il coïncide avec le point P, ou, ce qui revient au même, que le point P, quelque part qu'on le prenne, ſera à la ſection conique ainſi déterminée. *C. Q. F. D.*

Fig. 44.

Cor. De-là, ſi les trois droites PQ, PR, PS ſont menées du même point P ſous des angles donnés à autant d'autres droites AB, CD, AC données de poſition, & que le rectangle, ſous deux de ces lignes $PQ \times PR$, ſoit au quarré de la troiſiéme PS en raiſon donnée : le point P, d'où ces lignes ſeront tirées, ſera à la ſection conique que les lignes AB, CD touchent en A & en C; & réciproquement.

Fig. 44.

Car ſi la ligne BD coïncide avec la ligne AC, la poſition des trois lignes AB, CD, AC demeurant la même, & qu'enſuite la ligne PT coïncide auſſi avec la ligne PS : le rectangle $PS \times PT$ deviendra le quarré de PS, & les droites AB, CD qui coupoient la courbe dans les points A & B, C & D, ne pourront plus la couper dans ces points lorſqu'ils ſe confondent, mais alors elles la toucheront.

SCHOLIE.

On a pris dans ce Lemme le mot de *ſection conique* dans un ſens étendu, en ſorte qu'il renferme la ſection rectiligne qui paſſe par le ſommet du cône, & la circulaire parallele à ſa baze. Car ſi le point p tombe ſur la droite qui joint les points A & D, ou C & B, la ſection conique ſe changera en deux lignes droites, dont l'une eſt celle ſur laquelle le point p tombe, & l'autre la ligne droite qui joint les deux autres des quatre points donnés. Si deux angles oppoſés du trapeze ſont égaux, pris enſemble, à deux droits, que les quatre lignes PQ, PR, PS, PT ſoient menées à ſes côtés ou perpendiculairement ou ſous des angles égaux quelconques, & que le rectangle, ſous deux de ces lignes $PQ \times PR$, ſoit égal au rectangle ſous les deux autres $PS \times PT$, la ſection conique ſera un cercle. Ce ſera la même choſe, ſi les quatre lignes ſont menées ſous des angles quelconques, & que le rectangle de deux de ces lignes $PQ \times PR$ ſoit au rectangle des deux autres $PS \times PT$, comme le rectangle des ſinus des angles S & T, ſous leſquels les deux dernieres lignes PS, PT ont été menées, eſt au rectangle des ſinus des angles Q & R ſous leſquels on a mené les deux premieres PQ, PR. Fig. 44.

Dans les autres cas, le lieu du point P ſera quelqu'une des trois figures qu'on appelle ordinairement *ſections coniques*.

On peut à la place du trapeze $ABCD$ employer un quadrilatere, dont les deux côtés oppoſés ſe coupent mutuellement comme des diagonales. Il ſe peut auſſi que des quatre points A, B, C, D un ou même deux ſoient placés à une diſtance infinie : alors les côtés de la figure qui convergeoient précédemment vers ces points deviendront paralleles, & la ſection conique paſſera par les autres points, & s'étendra à l'infini du même côté que ces lignes devenues paralleles.

Du mouvement des Corps.

LEMME XIX.

Les quatre lignes AB, CD, AC, BD *étant données de poſition, trouver un point* P *tel qu'en tirant à ces quatre lignes les droites* PQ, PR, PS, PT *qui faſſent avec elles des angles reſpectivement égaux à quatre angles donnés, le rectangle* PQ×QR *de deux de ces quatre lignes, ſoit au rectangle* PS×PT *des deux autres en raiſon donnée.*

Fig. 45.

Ayant tiré une ligne quelconque *AH* par un des quatre points *A, B, C, D,* dans leſquels ſe rencontrent les lignes *AB, CD, AC, BD,* ſoit propoſé de trouver ſur cette ligne un point *P* qui ait la propriété demandée.

Fig. 45.

Pour y parvenir, ſuppoſant que *H* & *I* ſoient les points où cette ligne *AH* rencontre les lignes *BD* & *CD*, on remarquera que puiſque tous les angles de la figure ſont donnés, les raiſons de *PQ* à *PA* & de *PA* à *PS* ſeront données, & que par conſéquent la raiſon de *PQ* à *PS* le ſera auſſi. Otant donc cette raiſon de la raiſon donnée *PQ*×*PR* à *PS*×*PT*, on aura la raiſon de *PR* à *PT*, & en ajoutant les raiſons données de *PI* à *PR*, & de *PT* à *PH*, on aura la raiſon de *PI* à *PH*, & par conſéquent le point *P*. *C. Q. F. T.*

Cor. 1. On tire de-là la maniere de mener une tangente à un point quelconque *D* du lieu des points *P*; car la corde *PD* devient tangente lorſque les points *P* & *D* coïncident, c'eſt-à-dire lorſque *AH* paſſe par le point *D*. Dans ce cas, la derniere raiſon des évanouiſſantes *IP* & *PH* ſe trouvera comme ci-deſſus. Menant donc *CF* parallele à *AD*, qui rencontre *BD* en *F*, & qui ſoit coupée en *E* dans cette derniere raiſon, *DE* ſera tangente, à cauſe que *CF* & l'évanouiſſante *IH* ſont paralleles & coupées de même en *E* & en *P*.

Fig. 46.

Cor. 2. De-là ſuit encore la maniere d'avoir le lieu de tous les points *P*. Par l'un des points *A, B, C, D*, comme *A*, menez la tangente *AE*, & par un autre point quelconque *B*, menez *BF*

parallele à cette tangente, & trouvez par le Lemme 19. le point *F* où cette droite rencontre le lieu.

Coupez enſuite *BF* en deux parties égales au point *G*, la droite indéfinie *AG* ſera la poſition d'un diametre auquel *BG* & *FG* ſeront ordonnées. La longueur *AH* de ce diametre ſe trouvera en déterminant le point *H* où *AG* rencontre le lieu; & ſon parametre ſera à *AH* comme BG^2 à $AG \times GH$. Si *AG* ne rencontre point le lieu, la ligne *AH* étant infinie, le lieu ſera une parabole, & le parametre du diametre *AG* ſera $\frac{BG^2}{AG}$; mais ſi elle le rencontre quelque part, le lieu ſera une hyperbole, lorſque les points *A* & *H* ſont placés du même côté par rapport à *G*, & il ſera un ellipſe, lorſque le point *G* ſera placé entre *A* & *H*, à moins que l'angle *AGB* ne fût droit; & que de plus BG^2 ne fut égal au rectangle $AG \times GH$; car dans ce cas le lieu ſeroit un cercle. Fig. 46.

De cette façon le Probléme des quatre lignes commencé par Euclide, & continué par *Apollonius* ſe trouve réſolu dans ce Corollaire, non par le calcul, mais par une compoſition Géométrique telle que celle par laquelle les anciens l'ont cherché.

LEMME XX.

Si un parallélogramme quelconque ASPQ *a ſes deux angles oppoſés* A *&* P *placés dans une ſection conique; & que les côtés* AQ, AS *d'un de ſes angles étant prolongés rencontrent la même ſection conique en* B *&* C; *en tirant des points de concours* B *&* C *à un cinquiéme point quelconque* D *de la ſection conique les deux lignes* BD, CD *qui rencontrent en* T *&* R *les deux autres côtés* PS, PQ *du parallélogramme prolongés indéfiniment: les parties* PR *&* PT *ſeront toujours entr'elles en raiſon donnée, & réciproquement, ſi ces parties ſont entr'elles en raiſon donnée, le point* D *ſera à la ſection conique qui paſſe par les quatre points* A, B, C, P. Fig. 47.

Cas 1. Soient tirés *BP*, *CP*, & du point *D* les droites *DG*, *DE*, dont la premiere *DG* ſoit parallele à *AB*, & rencontre *PB*,

PQ, CA en H, I, G; & dont la ſeconde DE ſoit parallele à AC, & rencontre PC, PS, AB, en F, K, E, à cauſe que $PQ : IQ$ (ou DE) $:: PB : BH :: PT : DH$, & que $PR : DF :: RC : DC :: IG$ (ou PS) $: DG$; on aura les deux proportions $PQ : PT :: DE : DH$ & $PR : PS :: DF : DS$, qui donneront étant compoſées $PQ \times PR : PS \times PT :: DE \times DF : DG \times DH$; mais par le Lemme 17. $DE \times DF : DG \times DH$ en raiſon donnée, de plus, PQ & PS ſont données; donc la raiſon de PR à PT eſt donnée.

Fig. 47.

Cas 2. Si PR & PT ſont ſuppoſées entr'elles en raiſon donnée, en reprenant le même raiſonnement, on trouvera que le rectangle $DE \times DF$ eſt au rectangle $DG \times DH$ en raiſon donnée, & qu'ainſi, par le Lemme 18. le point D eſt à la ſection conique qui paſſe par les points A, B, C, P. C. Q. F. D.

Fig. 47.

Cor. 1. Donc, ſi on tire BC qui coupe PQ en r, & que ſur PT on prenne Pt à pr, dans la même raiſon que PT à PR, Bt ſera tangente de la ſection conique au point B; car ſuppoſez que le point D coïncide avec le point B, la corde BD s'évanouiſſant, BT deviendra tangente, & CD & BT coïncideront avec CB & Bt.

Fig. 47.

Cor. 2. Et réciproquement, ſi Bt eſt tangente, & que BD, CD ſe rencontrent en un point quelconque D de la ſection conique, on en concluera que $PR : PT :: pr : Pt$, & de même Bt étant toujours tangente, ſi $PR : PT :: Pr : Pt$, il s'enſuivra que les droites BD & CD ſe rencontreront dans un point quelconque D de la ſection conique.

Cor. 3. Une ſection conique ne peut couper une autre ſection conique en plus de quatre points; car ſuppoſant que cela pût être, imaginez que deux ſections coniques euſſent les cinq points A, B, C, P, O communs, & qu'elles fuſſent coupées l'une & l'autre par la ligne BD dans les points D, d; la droite Cd coupant la droite PQ en q, on auroit $PR : PT :: Pq : PT$, ce qui donneroit $PR = Pq$, contre l'hipotheſe.

Fig. 47.

LEMME XXI.

Si aux deux points donnés ou poles B, C *ſont fixés les ſommets de deux angles donnés* MBD, MCD, *& que l'on faſſe parcourir la droite donnée* MN, *au concours* M *des côtés* BM *&* CM *de ces angles les deux autres côtés* BD *&* CD *des mêmes angles décriront par leur interſection une ſection conique. Et réciproquement, ſi les droites* BD, CD *décrivent par leur concours* D *une ſection conique qui paſſe par les points donnés* A, B, C, *& que les angles* DBM, DCM *ſoient pris reſpectivement égaux aux angles donnés* ABC, ACB, *la rencontre des côtés* BM, CM *ſe fera toujours dans une ligne droite donnée de poſition.* Fig. 48.

Suppoſant que *N* ſoit un point donné de la droite *MN*, par lequel on faſſe paſſer les côtés *BM*, *CM* des angles mobiles, & que *D* ſoit le point dans lequel ſe rencontre les autres côtés des mêmes angles; ſoient tirées *CN*, *BN*, *CP*, *BP*, ſoient tirées enſuite du point *P* les droites *PT*, *PR*, qui rencontrent *BD*, *CD* en *T* & en *R*, & qui faſſent l'angle *BPT* égal à l'angle donné *BNM*, & l'angle *CPR* égal à l'angle donné *CNM*, comme (par l'hipotheſe) les angles *MBD*, *NBP* ſont égaux, ainſi que les angles *MCD*, *NCP*; en ôtant les angles communs *NBD*, *NCD*, il reſtera les angles égaux *NBM* & *PBT*, *NCM* & *TCR*. De-là il ſuit que les triangles *NBM*, *PBT* ſont ſemblables, ainſi que les triangles *NCM*, *PCR*. C'eſt pourquoi *PT*: *NM* :: *PB*: *NB*, & *PR*: *NM* :: *PC*: *NC*. Or les points *B*, *C*, *N*, *P* ſont immobiles, donc *PT* & *PR* ſont en raiſon donnée avec *NM*, ou, ce qui revient au même, elles ſont en raiſon donnée l'une à l'autre; donc, par le Lemme 20. le point *D*, concours perpétuel des droites mobiles *BT* & *CR*, ſera à la ſection conique qui paſſe par les points *B*, *C*, *P*. C. Q. F. D. Fig. 48.

Et réciproquement, ſi le point mobile *D* eſt à une ſection conique qui paſſe par les points donnés *B*, *C*, *A*; que les angles *DBM*, *DCM* ſoient reſpectivement égaux aux angles *ABC*, Fig. 49.

ACB; & que faiſant coïncider ſucceſſivement le point D avec les deux points donnés p, P de la ſection conique, on détermine les points n & N avec leſquels le point coïncide ſucceſſivement par cette opération, la droite nN ſera le lieu de tous les points M. Car ſuppoſez que le point M ſoit à quelque courbe; dans ce cas le lieu des points D déterminé par cette courbe, ſeroit une ſection conique qui paſſeroit par les cinq points B, C, A, p, P; mais, par ce qui a été démontré, le lieu des points D, lorſque les points M ſont dans une ligne droite, eſt encore une ſection conique qui paſſe par les mêmes points B, C, A, p, P. On auroit donc, par la ſuppoſition que le point M eſt dans une courbe, deux ſections coniques qui paſſeroient par les cinq mêmes points, ce qui eſt impoſſible par le Cor. 3. du Lemme 20. donc cette ſuppoſition eſt abſurde.

Fig. 49.

PROPOSITION XXII. PROBLÉME XIV.

Faire paſſer une trajectoire par cinq points donnés.

Soient donnés les cinq points A, B, C, P, D. D'un de ces points A ſoient menées les droites AB, AC à deux autres quelconques B & C, qu'on prend pour poles, & ſoient menées par le quatriéme point P deux lignes TPS, PRQ paralleles aux deux lignes AB, AC. Soient tirées enſuite des deux poles B C, au cinquiéme point D deux lignes indéfinies, dont l'une BDT rencontre TPS en T, & l'autre CRD rencontre PRQ en R. Cela fait, en tirant d'un point quelconque t de la droite indéfinie SPT la droite trp parallele à TR, la rencontre d des lignes Crd, & Bt ſera à la trajectoire cherchée; car ce point d (par le Lemme 20.) ſera à la ſection conique qui paſſe par les quatre points A, B, C, P; de plus, les lignes Rr, Tt s'évanouiſſants, le point D coïncide avec le point d. Donc la ſection conique paſſe par les cinq points A, B, C, P, D. C. Q. F. D.

Fig. 50.

AUTRE SOLUTION.

Joignez par des lignes droites trois quelconques A, B, C, des points

Fig. 51.

donnés ; prenant enſuite les deux points B & C pour poles, appliqués ſucceſſivement aux points D & P, les côtés BA & CA des angles ABC, ACB, & marquez les points M & N dans leſquels les autres côtés de ces angles ſe rencontrent dans ces deux poſitions. Cela fait, tirez la droite indéfinie MN, & faites parcourir cette ligne à l'interſection continuelle m des côtés BL, CL des angles ABC, ACB ; & vous aurez alors par l'interſection continuelle d des autres côtés de ces mêmes angles la trajectoire cherchée $PADdB$. Fig. 51.

Car le point d (par le Lemme 21.) ſera à la ſection conique qui paſſe par les points B, C ; & lorſque le point m coïncidera avec les points L, M, N, le point d, par la conſtruction, coïncidera avec les points A, D, P. Ainſi il décrira la ſection conique qui paſſe par les cinq points A, B, C, P, D. C. Q. F. F.

Cor. 1. On peut mener très-aiſément par ce moyen une droite qui touche la trajectoire cherchée dans un point quelconque donné B, Car en faiſant coïncider le point d avec le point B, la droite Bd ſera la tangente cherchée. Fig. 51.

Cor. 2. De-là on aura le centre, le diametre, & le parametre de la trajectoire, comme dans le Cor. 2. du Lemme 19.

SCHOLIE.

La conſtruction précédente deviendra un peu plus ſimple en tirant BP, & prenant ſur cette ligne prolongée, s'il eſt beſoin, $Bp : BP :: PR : PT$; & en tirant par p une ligne infinie pe parallele à SPT ; car il ne faudra que prendre ſur cette ligne la partie pe égale à l'intervalle quelconque Pr, & tirer les lignes Crd, Bed, pour avoir par leur rencontre un point quelconque de la trajectoire. On verra aiſément la raiſon de cette conſtruction en remarquant, que puiſque les raiſons de Pr à Pt, de PR à PT, de pB à PB, & de pe à Pt, ſont égales, il faut donc que pe & Pr ſoient égales entr'elles. Fig. 52.

Lorſqu'on ne voudra pas employer la conſtruction méchanique

de la ſeconde ſolution, celle-ci ſera d'une grande commodité dans la pratique.

PROPOSITION XXIII. PROBLÉME XV.

Décrire une trajectoire qui paſſe par quatre points donnés & qui ait pour tangente une droite donnée de poſition.

Cas 1. Que la tangente HB, le point de contact B, & trois autres points C, D, P ſoient donnés. Joignez les points B & C par la ligne BC, tirez PS parallele à BH & PQ parallele à BC; achevez le parallélogramme $BSPQ$; tirez enſuite BD qui coupe SP en T, & CD qui coupe PQ en R. Enfin, ayant mené une droite quelconque tr parallele à TR, prenez ſur PQ & ſur PS les abſciſes Pr, Pt reſpectivement proportionnelles aux lignes PR, PT; & le point d, concours des lignes Cr, Bt, ſera toujours, par le Lemme 20. à la trajectoire qu'il falloit décrire. *C. Q. F. F.*

Fig. 53.

AUTRE SOLUTION.

Faiſant tourner l'angle CBH autour du pole B, ainſi que le rayon rectiligne quelconque DC, prolongé des deux côtés, autour du pole C, ſoient marqués les points M & N, dans leſquels le côté BC de l'angle coupe ce rayon, lorſque l'autre côté BH concourt avec ce même rayon dans les points P & D. Faiſant enſuite mouvoir le rayon CD & le côté BC de l'angle CBH, de maniere, que leur concours ſoit toujours dans la droite indéfinie MN, on aura alors par la rencontre continuelle de l'autre côté BH de l'angle CBH, avec le même rayon CD, la trajectoire cherchée.

Fig. 54.

Car, ſi dans les conſtructions du probléme précédent, le point A ſe confond avec le point B, les lignes AC & CB coïncideront, & la ligne AB, dans ſa derniere poſition, deviendra la tangente BH; ce qui changera ces conſtructions dans celles qu'on vient de décrire. Le concours du côté BH & du rayon, décrira donc la ſection conique qui paſſe par les points C, D, P, & qui touche la droite BH au point B. *C. Q. F. F.*

Fig. 51. & 54.

Cas 2.

Cas 2. Soient donnés quatre points B, C, D, P placés hors de la tangente H I.

Tirez les lignes BD, CP, qui concourent en G, & qui rencontrent la tangente en H & en I. Coupez enſuite cette tangente en A, en ſorte que HA ſoit à IA, comme le rectangle de la moyenne proportionnelle entre CG & GP, & de la moyenne proportionnelle entre BH & HD eſt au rectangle de la moyenne proportionnelle entre DG & GB, & de la moyenne proportionnelle entre PI & IC; & le point A ſera le point de contact. Car ſi la ligne HX, parallele à la droite PI, coupe la trajectoire dans les points quelconques X & Y, il faudra, par les coniques, que la poſition du point A ſoit telle que AH^2 ſoit à AI^2, en raiſon compoſée de la raiſon du rectangle $XH \times HY$ au rectangle $BH \times HD$, ou du rectangle $CG \times GP$ au rectangle $DG \times GB$, & de la raiſon du rectangle $BH \times HD$ au rectangle $PI \times IC$. Ayant donc trouvé le point de contact A, on décrira la trajectoire comme dans le premier cas. *C. Q. F. F.* Fig. 55.

Il eſt à remarquer qu'on peut prendre le point A entre les points H & I, ou ſur le prolongement de HI, ce qui donne deux ſolutions du Probléme.

PROPOSITION XXIV. PROBLÉME XVI.

Décrire une trajectoire qui paſſe par trois points donnés, & qui ſoit touchée par deux lignes droites données de poſition.

Par deux quelconques B & D des trois points donnés B, C, D, tirez la droite indéfinie BD qui rencontre les tangentes données HI, KL dans les points H & K, enſuite par le point D, & par le troiſiéme point donné C, tirez la droite indéfinie CD, qui rencontre les mêmes tangentes aux points I & L. De plus, coupez ces lignes en R & en S, de ſorte que HR ſoit à KR comme la moyenne proportionnelle entre BH & HD eſt à la moyenne proportionnelle entre BK & KD; & que IS ſoit à LS comme la moyenne proportionnelle entre CI & ID eſt à Fig. 56.

la moyenne proportionnelle entre CL & LD. Cela fait, ſoit que vous ayez pris les points R & S entre les points K & H, I & L, ou ſur les prolongemens de KH & de IL, ainſi que cela eſt permis, vous aurez, par les rencontres de la ligne RS avec les tangentes HI & KL, les points d'attouchement A & P. Fig. 56.

Car ſi on ſuppoſe que A & P ſoient les points d'attouchement placés quelque part dans les tangentes, & que par un point quelconque I, des points H, I, K, L, placé ſur l'une ou l'autre tangente HI, on tire la droite IY parallele à l'autre tangente KL, & qui rencontre la courbe en X & en Y, & qu'on prenne IZ moyenne proportionnelle entre IX & IY: on aura, par les coniques, le rectangle $XI \times IY$ ou IZ^2 à LP^2, comme le rectangle $CI \times ID$ au rectangle $CL \times LD$, c'eſt-à-dire, par la conſtruction, comme SI^2 à SL^2: d'où l'on tirera que $IZ : LP :: SI : SL$, & que par conſéquent les points S, P, Z ſont en ligne droite. De plus, les tangentes concourant au point G, on aura encore par les coniques le rectangle $XI \times IY$ ou $IZ^2 : IA^2 :: GP^2 : GA^2$, qui donne $IZ : IA :: GP : GA$. Donc, les points P, Z & A ſont en ligne droite, & par conſéquent les points S, P & A, y ſont auſſi. On prouvera par le même raiſonnement que les points R, P & A, ſont en ligne droite. Donc les points d'attouchement A & P ſont dans la droite RS.

Ayant ainſi les points d'attouchement A & P, on décrira la trajectoire comme dans le premier cas du Probléme précédent. *C. Q. F. F.*

Dans cette Propoſition, & dans le ſecond Cas de la Propoſition précédente les conſtructions ſont les mêmes, ſoit que la droite XY coupe la trajectoire en X & en Y, ſoit qu'elle ne la coupe point; puiſque les opérations qu'on a faites ne dépendent point de cette ſection. Or ayant démontré les conſtructions pour le cas où XY rencontre la trajectoire, il ſera aiſé d'en tirer la démonſtration pour le cas où elle ne la rencontre pas; je ne m'y arrêterai donc pas de crainte d'être trop long. Fig. 56.

LEMME XXII.

Changer les figures en d'autres figures du même genre.

Étant propoſé de transformer la figure quelconque *HGI*, ſoient menées à volonté deux droites paralleles *AO*, *BL* qui coupent en *A* & en *B* une troiſiéme droite quelconque *AB* donnée de poſition; ſoit de plus menée la parallele *GD* à *OA* par un point quelconque *G* de la figure donnée. Tirant enſuite du point *O* donné dans *AO*, au point *D*, la droite *OD* qui rencontre *BL* en *d*, & élevant ſur ce point *d* la droite *dg*, qui faſſe avec la droite *BL* un angle quelconque donné, & qui ait à *Od* la même raiſon que *DG* à *OD*; *g* ſera le point qui dans la figure nouvelle *hgi* répond au point *G*, de la même maniere chaque point de la premiere figure donnera autant de points de la figure nouvelle; & ſi on imagine que le point *G* parcourre d'un mouvement continu tous les points de la premiere figure, le point *g* parcourrera de même, par un mouvement continu, tous les points de la nouvelle figure. Fig. 57.

Afin d'être plus clair, nous appellerons *DG* premiere ordonnée, & *dg* nouvelle ordonnée; *AD* premiere abſciſſe, & *ad* abſciſſe nouvelle; *O* pole, *OD* rayon coupant, *OA* premier rayon ordonné, & la droite *Oa*, qui acheve le parallélogramme *OABa*, nouveau rayon ordonné.

Cela poſé, ſi le point *G* eſt à une ligne droite donnée de poſition, le point *g* ſera auſſi à une ligne droite donnée de poſition. Si le point *G* eſt à une ſection conique, le point *g* ſera auſſi à une ſection conique. Je mets ici le cercle au nombre des ſections coniques. De plus, ſi le point *G* eſt à une ligne du troiſiéme ordre, le point *g* ſera de même à une ligne du troiſiéme ordre; il en ſera de même des courbes des ordres plus élevés, c'eſt-à-dire, que les deux lignes auſquelles ſeront les points *G* & *g* ſeront toujours du même degré.

Car *Od* étant à *OD*, *dg* à *DG*, & *AB* à *AD*, comme *ad*

à OA, on aura $AD = \frac{OA \times AB}{ad}$, & $DG = \frac{OA \times dg}{ad}$.

Fig. 57. Donc, ſi le point G eſt à une ligne droite, dans l'équation quelconque, qui exprime la relation entre l'abſciſſe AD & l'ordonnée DG, les indéterminées DG & AD n'ayant qu'une dimenſion, en écrivant dans cette équation $\frac{OA \times AB}{ad}$ pour AD & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pour DG, on aura une équation nouvelle, dans laquelle la nouvelle abſciſſe ad & la nouvelle ordonnée dg n'auront auſſi qu'une dimenſion, & cette équation exprimera par conſéquent une ligne droite. Si AD & DG, ou ſeulement l'une des deux, avoit deux dimenſions dans la premiere équation, ad & dg en auroient auſſi deux dans la ſeconde; & il en ſeroit de même ſi elles avoient trois dimenſions, ou des dimenſions plus hautes. Ainſi les indéterminées ad, dg dans la ſeconde équation, & AD, DG dans la premiere, auront toujours le même nombre de dimenſions, & par conſéquent les lignes auſquelles ſont les points G & g ſont du même degré.

De plus, ſi une ligne droite touche la ligne courbe dans la premiere figure; la droite qui lui répondra dans la nouvelle figure touchera la courbe de la même maniere; & au contraire. Car ſi deux points d'une courbe quelconque s'approchent l'un de l'autre, & qu'ils ſe confondent dans la premiere figure, les mêmes points correſpondans dans la figure nouvelle s'approcheront & ſe confondront auſſi; donc, les droites qui joignent ces points deviendront en même temps tangentes des courbes dans l'une & l'autre figure.

Les démonſtrations de ces Propoſitions pourroient être préſentées d'une maniere plus conforme aux démonſtrations géométriques ordinaires; mais je préfere la briéveté.

Si c'eſt une figure rectiligne qu'il faut transformer, il ſuffira de joindre par des lignes, dans la nouvelle figure, les points cor-

reſpondans à ceux qui ſont les interſections des lignes dont la premiere figure eſt compoſée. Si la figure à transformer eſt curviligne, il faut tranſporter dans la nouvelle figure les points, les tangentes, & les autres droites par leſquelles on peut décrire la courbe.

Ce Lemme ſert à réſoudre des Problémes très difficiles, en transformant les figures propoſées en de plus ſimples. Car on peut transformer les lignes convergentes en des lignes paralleles, en prenant pour premier rayon ordonné une ligne droite quelconque qui paſſe par le point de concours des lignes convergentes; parce que, dans ce cas, le point de concours dans la nouvelle figure s'éloignera à l'infini, & enſuite lorſqu'on a réſolu le Probléme dans la nouvelle figure, on n'aura plus qu'à repaſſer, par des opérations inverſes, de la nouvelle figure à la premiere, & le Probléme ſera réſolu.

Ce Lemme eſt encore fort utile dans la ſolution des Problémes ſolides; car toutes les fois qu'on a deux ſections coniques, de l'interſection deſquelles dépend la ſolution du Probléme, on pourra transformer l'une ou l'autre, ſoit hiperbole ou parabole, en une ellipſe; & enſuite l'ellipſe ſe change aiſément en un cercle. De la même maniere, dans les Problémes plans, la ligne droite & la ſection conique ſe changeront en une droite & un cercle.

PROPOSITION XXV. PROBLÉME XVII.

Décrire une trajectoire, qui paſſe par deux points donnés, & qui touche trois lignes droites données de poſition.

Par le concours de deux de ces tangentes, & par le concours de la troiſiéme avec la ligne droite qui paſſe par les deux points donnés, tirez une droite indéfinie, & la prenant pour le premier rayon ordonné, changez la figure en une figure nouvelle, par le Lemme précédent. Dans cette nouvelle figure les deux tangentes qui concourroient ſeront paralleles entr'elles, & la troiſiéme

ſera parallele à la droite qui paſſe par les deux points donnés. Que hi & kl repréſentent ces deux tangentes paralleles, ik la troiſiéme tangente, hl la droite qui lui eſt parallele, & qui paſſe par les points a & b, par leſquels la ſection conique doit paſſer dans cette nouvelle figure, & que $hikl$ ſoit le parallélogramme formé par ces quatre lignes. Cela poſé, ſoient coupées les droites hi, ik, kl, en e, d, e, enſorte que hc ſoit à $\sqrt{ah \times hb}$, ic à id, & ke à kd, comme $hi + kl$ à $ik + \sqrt{ah \times hb} + \sqrt{al \times lb}$, & les points c, d, e ſeront les points d'attouchement.

Fig. 58.

Car on voit, par les coniques, que $hc^2 : ah \times hb :: ic^2 : id^2 :: ke^2 : kd^2 :: el^2 : al \times lb$, ou ce qui revient au même que $hc : \sqrt{ah \times hb} :: ic : id :: ke : kd :: el : \sqrt{al \times lb}$, c'eſt-à-dire, (en ajoutant les antécédens ainſi que les conſéquens) $:: hi + kl : ki + \sqrt{ah \times hb} + \sqrt{al \times bl}$, ce qui donne la conſtruction qu'on vient d'énoncer.

Ayant donc les points d'attouchement c, d, e, dans la nouvelle figure, par des opérations inverſes, on trouvera leurs points correſpondans dans la premiere figure, & par le Problême 14. on décrira la trajectoire. *C. Q. F. F.*

Au reſte, de la même maniere que les points a & b ſeront entre les points h & l, ou bien ſur le prolongement de la ligne qui joint ces points, les points c, d, e doivent être pris entre les points h, i, k, l, ou bien ſur les prolongemens des lignes qui joignent ces points. Lorſque l'un des points a & b ſera entre les points h & l, & l'autre ſur le prolongement de la ligne qui les joint, le Probléme ſera impoſſible.

PROPOSITION XXVI. PROBLÉME XVIII.

Décrire une trajectoire qui paſſe par un point donné, & qui touche quatre droites données de poſition.

De l'interſection de deux de ces tangentes quelconques on tirera à l'interſection des deux autres une droite indéfinie, & la prenant pour le premier rayon ordonné, on transformera la fi-

gure par le Lemme 22. en une figure nouvelle. Par ce moyen chaque paire de tangentes qui concouroit dans le premier rayon ordonné deviendra une paire de tangentes paralleles. Fig. 59.

Soient *i k h l* le parallélogramme formé par les quatre nouvelles tangentes, & *p* le point qui répond dans la nouvelle figure au point donné dans la premiere ; en tirant de ce point *p* au centre *O* du parallélogramme la droite *p O q* double de *p O*, *q* ſera un autre point de la ſection conique. On n'aura donc plus, en ſe ſervant du Lemme 22. qu'à retrouver par une opération inverſe le point qui répond à ce point *q* dans la premiere figure, & le Probléme ſera réduit au précedent. *C. Q. F. F.*

LEMME XXIII.

Si deux lignes A C, B D, *données de poſition, ſont terminées par les points donnés* A, B, *& qu'elles ayent entr'elles une raiſon donnée ; que de plus la droite* C D, *qui joint les points indéterminés* C, D, Fig. 60. *ſoit coupée en K dans une raiſon donnée : le point* K *ſera à une droite donnée de poſition.*

E étant la rencontre des lignes *AC*, *BD*, ſoit pris ſur *BE* l'intervalle *BG* qui ſoit à *AE*, comme *BD* à *AC*, ſoit priſe enſuite *FD* qui ſoit toujours égale à la droite donnée *EG* ; on aura par la conſtruction *EC* : *GD*, (ou *EF*) :: *AC* : *BD*, & par conſéquent en raiſon donnée ; ainſi le triangle *EFC* eſt donné d'eſpece. Soit coupée maintenant *CF* en *L*, en ſorte que *CL* : *CF* :: *CK* : *CD* ; il eſt clair, à cauſe que cette raiſon eſt donnée, que le triangle *EFL* ſera auſſi donné d'eſpece ; donc le point *L* ſera à la droite *EL* donnée de poſition. Tirant alors *LK*, il eſt clair que les triangles *CLK*, *CDF* ſeront ſemblables, & qu'à cauſe que *FD* eſt donnée, ainſi que la raiſon de *LK* à *FD*, la droite *LK* ſera auſſi donnée. Donc en prenant *EH* = *LK*, & en menant *HK*, cette droite ſera donnée de poſition, & ſera celle qui paſſe par tous les points *K*. *C. Q. F. D.* Fig. 60.

Corol. A cauſe que la figure *EFLC* eſt donnée d'eſpece, les Fig. 60.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

trois droites EF, EL & EC, ou GD, HK & EC auront des raiſons données entr'elles.

LEMME XXIV.

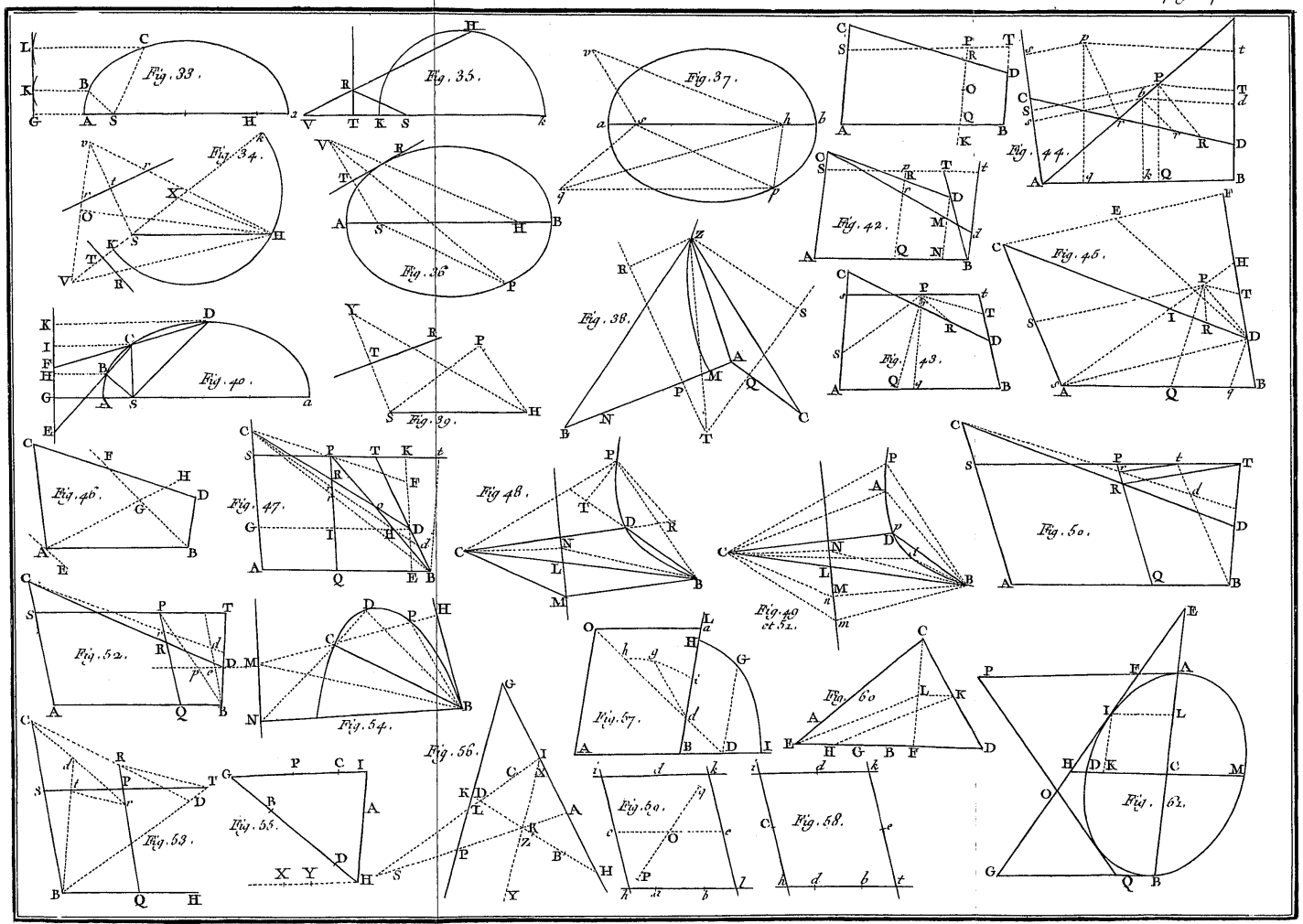
Si trois droites touchent une ſection conique quelconque, & que deux de ces droites ſoient paralleles & données de poſition; celui des demi diametres de cette ſection conique qui ſera le demi diametre parallele à ces deux lignes, ſera moyen proportionnel entre les ſegmens de ces lignes compris entre les points d'attouchement, & la troiſiéme tangente.

Soient AF, BG les deux paralleles qui touchent la ſection co-
Fig. 61. nique ADB en A & en B; EF la troiſiéme droite qui touche la même courbe en I, & qui rencontre les deux premieres tangentes en F & en G; ſoit de plus CD le demi diametre de la figure parallele aux tangentes: il s'agit de démontrer que les lignes AF, CD, BG ſont en proportion continue.

Pour le faire voir, ſoit prolongé le diametre MCD juſqu'à ce qu'il rencontre en H la tangente FG, & ſoit tiré le diametre conjugué ACB. En formant le parallélogramme $IKLC$; on aura, par la nature des ſections coniques, $EC : CA :: CA : CL :: EC - CA : CA - CL$, ou $:: EA : AL$, & par conſéquent $EA : EA + AL$ (ou EL) $:: EC : EC + CA$ (ou EB); donc, à cauſe que les triangles EAF, ELI, ECH, EBG ſont ſemblables, $AF : LI :: CH : BG$. Mais, par la nature des coniques, LI ou $CK : CD :: CD : CH$; donc $AF : CD :: CD : BG$. C. Q. F. D.

Cor. I. De-là, ſi deux tangentes FG, PQ ſe coupent en O, & rencontrent les tangentes paralleles AF, BG en F & G, P & Q; on aura $AF : BQ :: AP : BG$, & par conſéquent $:: FP : GQ$; c'eſt-à-dire $:: FO : OG$.

Cor. 2. Ainſi deux droites PG, FQ menées par les points P & G, F & Q auront leur commune interſection dans la droite ACB, qui paſſe par le centre de la figure, & par les points d'attouchement A & B.


Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 50.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60
Fig. 62.
Fig. 49 et 51.

LEMME XXV.

Si les quatre côtés d'un parallélogramme prolongés indéfiniment touchent une ſection conique quelconque, & qu'ils ſoient coupés par une cinquiéme tangente quelconque, en prenant ſur deux côtés quelconques oppoſés de ce parallélogramme les ſegmens terminés à deux angles oppoſés, chacun de ces ſegmens ſera au côté duquel il aura été retranché par la cinquiéme tangente, comme la partie de l'autre côté du parallélogramme, compriſe entre le point d'attouchement & le troiſiéme côté, eſt à l'autre ſegment.

ML, IK, KL, MI étant les quatre côtés d'un paralléloGramme $MLIK$ qui touchent la ſection conique en A, B, C, D; & FQ une cinquiéme tangente qui coupe ces côtés en F, Q, H, E: ſi on prend les ſegmens ME, KQ des côtés MI, KI, on aura $ME : MI :: BK : KQ$, & ſi on prend les ſegmens KH, MF des côtés ML, KL, on aura $KH : KL :: AM : MF$. Fig. 62.

Car par le Corollaire premier du Lemme précédent, on aura $ME : MI :: AM$ ou $BK : BQ$; d'où l'on tire $ME : MI :: BK : KQ$. C. Q. F. D.

Par le même Corollaire on aura $KH : HL :: BK$ ou $AM : AF$, qui donne $KH : KL :: AM : MF$. C. Q. F. D.

Cor. 1. De-là, ſi le parallélogramme $IKLM$ décrit autour de la ſection conique eſt donné, le rectangle $KQ \times ME$ ſera donné, ainſi que le rectangle $KH \times MF$, qui lui eſt égal, à cauſe que les triangles MFE, KQH ſont ſemblables.

Cor. 2. Si on mene une ſixiéme tangente eq qui rencontre les tangentes KI, MI, en q & en e; le rectangle $KQ \times ME$ étant égal au rectangle $Kq \times Me$, on aura $KQ : Me :: Kq : ME$, & par conſéquent $:: Qq : Ee$.

Cor. 3. D'où, ſi on tire Eq & eQ, qu'on les coupe en deux parties égales, & qu'on tire une droite par les points de biſection, cette droite paſſera par le centre de la ſection conique. Car puiſque $Qq : Ee :: KQ : Me$, il faut, par le Lemme 23. que la droite qui

Du mouvement des Corps.

passe par le milieu de Eq & de eQ, passe aussi par le milieu de MK. Or, le milieu de MK est le centre de la section conique.

Fig. 62.

PROPOSITION XXVII. PROBLÉME XIX.

Décrire une trajectoire qui soit touchée par cinq lignes droites données de position.

Fig. 63.

Les tangentes ABG, BCF, GCD, FDE, EA étant données de position, coupez en deux parties égales aux points M & N les diagonales AF, BE de la figure quadrilatere $ABFE$ formée par quatre quelconques de ces tangentes, & par le Cor. 3. du Lem. 25. la droite MN menée par les points de bisection passera par le centre de la trajectoire. Coupez ensuite en deux parties égales dans les points P & Q les diagonales BD, GF de la figure quadrilatere $BGDF$, formée par quatre autres des cinq mêmes tangentes: & la droite PQ tirée par les points de bisection passera encore par le centre de la trajectoire; ainsi la rencontre O de MN & de PQ donnera la position de ce centre. Tirez ensuite KL parallele à une tangente quelconque BC, & à une telle distance de cette tangente, que le centre O soit placé au milieu de l'intervalle qui sépare ces paralleles, KL sera par ce moyen une nouvelle tangente de la trajectoire qu'il faut décrire. Que L & K soient les points où cette nouvelle tangente coupe deux quelconques GCD, FDE, des premieres, en menant des droites CK, FL par les points C & K, F & L où les tangentes paralleles CF, KL rencontrent les tangentes non paralleles CL, FK, on aura par la rencontre R de ces droites, & par le centre O la position de la ligne RO qui coupe les deux tangentes CF, KL dans les points où ces deux tangentes touchent la section conique cherchée, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer par le Cor. 2. du Lemme 24. Trouvant ensuite les autres points de contact par la même méthode, il sera aisé de décrire la trajectoire par le Probl. 14.

SCHOLIE.

Les Problémes, dans leſquels les centres ou les aſymptotes des trajectoires ſont donnés, ſont contenus dans les précédens; car, par le moyen des points de ces trajectoires qui ſeront donnés, de leurs tangentes, & du centre, on aura autant d'autres points, & d'autres tangentes priſes de l'autre côté du centre & à égale diſtance. A l'égard des aſymptotes on peut les regarder comme des tangentes, & leurs extrémités (ſi l'on peut s'exprimer ainſi) comme des points de contact. Imaginez donc que le point d'attouchement d'une tangente s'éloigne à l'infini; cette tangente deviendra aſymptote, & les conſtructions des Problémes précédens ſe changeront dans les conſtructions des Problémes où l'aſymptote eſt donnée.

Lorſque la trajectoire eſt décrite, on peut trouver ſes axes & ſes foyers par la méthode ſuivante. Dans la conſtruction & la figure du Lemme 21. faites que les côtés *BP*, *CP* des angles mobiles *PBN*, *PCN*, par le concours deſquels la trajectoire a été décrite, deviennent paralleles entr'eux, & qu'en conſervant cette poſition, ils tournent dans cette figure autour de leurs poles *B* & *C*. Pendant ce mouvement les ſeconds côtés *CN*, *BN* de ces angles décriront par leur concours *K* ou *k* le cercle *BGKC*. Du centre *O* de ce cercle tirez la ligne *OH* qui rencontre le cercle en *K* & en *L*, & qui ſoit perpendiculaire ſur la régle *MN*, ſur laquelle ces ſeconds côtés *CN*, *BN* ſe ſont rencontrés en décrivant la trajectoire: lorſque ces ſeconds côtés arrivés en *CK*, *BK* ſe couperont en *K* dans le point le plus proche de cette régle, les premiers côtés *CP*, *BP* ſeront alors paralleles au grand axe, & perpendiculaires au petit; ce ſeroit le contraire, ſi ces mêmes côtés concouroient au point le plus éloigné *L*. Donc, ſi le centre de la trajectoire eſt donné, on aura par ce moyen la longueur des axes, & la poſition des foyers s'en tirera tout de ſuite. Fig. 64. & 65.

Les quarrés des axes ſont entr'eux comme *KH* à *LH*; ce qui donne un moyen facile de décrire par quatre points quelcon-

ques une trajectoire donnée d'eſpece. Car ſi on prend deux de ces points donnés pour les poles *B* & *C*, le troiſiéme donnera les angles mobiles, *PCK*, *PBK*; & ces angles étant donnés, on connoîtra auſſi-tôt le cercle *BGKC*. Or, la trajectoire étant donnée d'eſpece, la raiſon de *OH* à *OK* ſera donnée, & par conſéquent *OH* le ſera auſſi. Décrivant donc du centre *O*, & de l'intervalle *OH* un autre cercle, la droite qui touchera ce cercle, & qui paſſera par le concours des ſeconds côtés *CK*, *BK*, lorſque les premiers *CP*, *PB* concourent au quatriéme point donné, ſera la régle *MN* par le moyen de laquelle on peut décrire facilement la trajectoire. Par la même méthode on pourra auſſi inſcrire un trapeze donné d'eſpece dans une ſection conique donnée quelconque toutes les fois que le cas ſera poſſible.

Fig. 64. & 65.

Il y a encore d'autres Lemmes par leſquels on peut décrire des trajectoires données d'eſpece lorſqu'on a des points donnés, & des tangentes données. Tel eſt par éxemple celui-ci. Si d'un point donné on méne à volonté une ligne droite, qui coupe une ſection conique donnée en deux points, & que l'intervale de ces interſections ſoit partagé en deux parties égales, le point de biſection ſera à une autre ſection conique de la même eſpece que la premiere, & les axes de ces deux courbes ſeront paralleles entr'eux; mais je paſſe à des choſes plus utiles.

LEMME XXVI.

Placer les trois côtés d'un triangle donné de grandeur & d'eſpece, enſorte que ſes trois angles ſoient reſpectivement appliqués ſur trois lignes données de poſition, mais qui ne ſont pas toutes paralleles entr'elles.

Les trois lignes indéfinies *AB*, *AC*, *BC*, étant données de poſition, il s'agit de placer le triangle *DEF* de façon que ſon angle *D* ſoit placé ſur la ligne *AB*, l'angle *E* ſur la ligne *AC*, & l'angle *F* ſur la ligne *BC*.

Fig. 66. & 67.

On commencera par décrire ſur *DE*, *DF*, & *EF* les trois ſegmens de cercles *DRE*, *DGF*, *EMF* capables d'angles qui ſoient

reſpectivement égaux aux angles *BAC*, *ABC*, *ACB*, en obſervant, pour la poſition de ces ſegmens ſur les lignes *DE*, *DF*, *EF*, que les lettres *DRED* ayent entr'elles le même ordre que les lettres *BACB*, les lettres *DGFD* le même ordre que les lettres *ABCA*, & les lettres *EMFE* le même ordre que les lettres *ACBA*.

Ayant enſuite achevé les cercles de ces ſegmens & marqué la rencontre *G* des deux premiers, dont les centres ſont *P* & *Q*, on tirera *GP* & *PQ*, & l'on prendra *Ga* à *AB*, comme *GP* à *PQ*. Cela fait, du centre *G* & de l'intervalle *Ga* on décrira un cercle qui coupera le premier cercle *DGE* en *a*. Tirant alors *aD* & *aE*, ces deux droites couperont, l'une le ſecond cercle *DFG* en *b*, l'autre le troiſiéme cercle *EMF* en *c*: & l'on aura par ce moyen la figure *ABCdef* égale & ſemblable à la figure demandée *abcDEF*. Fig. 66. & 67.

Pour le démontrer ſoit tiré *Fc*, & ſoit d'abord ſuppoſé que *n* ſoit le point où cette ligne rencontre *aD*, ſoient tirées enſuite *aG*, *bG*, *QG*, *QD*, *PD*. L'angle *EaD* étant égal par conſtruction à l'angle *CAB*, & l'angle *acF* à l'angle *ACB*, le triangle *anc* ſera équiangle au triangle *ABC*. Donc l'angle *anc* ou *FnD*, ſera égal à l'angle *ABC*, & par conſéquent à l'angle *FbD*; donc, le point *n* coïncidera avec le point *b*; de plus, l'angle *GPQ*, qui eſt la moitié de l'angle au centre *GPD*, eſt égal à l'angle à la circonférence *GaD*; & l'angle *GQP*, qui eſt la moitié de l'angle au centre *GQD*, eſt égal au complément à deux droits de l'angle à la circonférence *GbD*; donc, il eſt égal à l'angle *Gba*. De-là il ſuit que les triangles *GPQ*, *Gab* ſont ſemblables, & que par conſéquent *Ga*:*ab*::*GP*:*PQ*; c'eſt-à-dire, par la conſtruction, ::*Ga*:*AB*. Donc *ab*=*AB*; donc les triangles *abc*, *ABC*, que nous venons de prouver ſemblables, ſont auſſi égaux. Or, comme les angles *D*, *E*, *F* du triangle *DEF* ſont appliqués reſpectivement ſur les côtés *ab*, *ac*, *bc* du triangle *abc*, on n'a plus qu'à achever la figure *ABCdef*, de façon qu'elle

Du mouvement des Corps.

ſoit égale & ſemblable à la figure *a b c D E F*, & le Probléme ſera reſolu. *C. Q. F. F.*

Cor. On peut par cette méthode tirer une droite dont les parties données de longueur ſoient placées entre trois droites données de poſition. Car imaginant que le point *D* s'approche du côté *E F*, & que les côtés *D E*, *D F* deviennent le prolongement l'un de l'autre, le triangle *D E F* ſe changera en une droite, dont la partie donnée *D E* doit être placée entre les lignes données de poſition *A B*, *AC* & la partie donnée *D F* entre les lignes *A B*, *B C* données auſſi de poſition; appliquant donc la conſtruction précédente à ce cas, on réſoudra le Probléme.

Fig. 66. & 67.

PROPOSITION XXVIII. PROBLÉME XX.

Décrire une trajectoire donnée d'eſpece & de grandeur, dont les parties données ſoient placées entre trois lignes droites données de poſition.

Qu'on ait à décrire une trajectoire ſemblable & égale à la courbe *D E F*, & coupée par trois lignes droites *A B*, *A C*, *B C* données de poſition, en des parties égales & ſemblables aux parties données *D F*, *F E* de cette courbe.

Fig. 68. & 69.

Tirez les droites *D E*, *E F*, *D F*, & placez par le Lemme 26 les angles *D*, *E*, *F* de ce triangle *D E F* ſur ces lignes données de poſition, enſuite décrivez autour de ce triangle une trajectoire ſemblable & égale à la courbe *D E F*. *C. Q. F. F.*

LEMME XXVII.

Décrire un trapeze donné d'eſpece, dont les angles ſoient appliqués reſpectivement ſur quatre lignes droites données de poſition, en ſuppoſant que ces quatre lignes ne ſoient ni toutes paralleles, ni convergentes à un ſeul point.

Fig. 70. & 71.

Que les quatre droites *A B C*, *A D*, *B D*, *C E* ſoient données de poſition, la premiere coupant la ſeconde en *A*, la troiſiéme en *B*, & la quatriéme en *C*; & qu'on ſe propoſe de décrire le trapeze *f g h i* ſemblable au trapeze *F G H I* & placé en telle ſorte que les quatre angles *f*, *g*, *h*, *i*, égaux reſpectivement aux angles *F*, *G*,

H, *I*, ſoient appliqués reſpectivement ſur les quatre lignes *A B C*, *A D*, *B D*, *C E*.

Fig. 70. & 71.

On commencera par tirer *F H* & par décrire ſur *F G*, *F H*, *F I* les trois ſegmens de cercle *F S G*, *F T H*, *F V I*; dont le premier *F S G* ſoit capable d'un angle égal à l'angle *B A D*, le ſecond *F T H* d'un angle égal à l'angle *C B D*, & le troiſiéme *F V I* d'un angle égal à l'angle *A C E*, en obſervant pour la poſition de ces ſegmens ſur les lignes *F G*, *F H*, *F I*, que l'ordre des lettres *F S G F* ſoit le même que celui des lettres *B A D B*, que l'ordre des lettres *F T H F* ſoit celui des lettres *C B D C*, & que l'ordre des lettres *F V I F* ſoit celui des *A C E A*.

Ayant enſuite achevé les cercles de ces ſegmens, & tiré la ligne indéfinie *P Q*, qui joint les centres *P* & *Q* des deux premiers cercles *F S G*, *F T H*, on prendra ſur cette ligne la droite *Q R* qui ſoit à *P Q*, comme *B C* à *A B*, en obſervant pour la poſition de cette ligne *Q R*, que l'ordre des lettres *P*, *Q*, *R* ſoit le même que celui des lettres *A*, *B*, *C*; cela fait, du centre *R* & de l'intervalle *R F*, on décrira un quatriéme cercle *F N c* qui coupera le troiſiéme *F V I* en *c*, & l'on tirera *F c* qui coupera le premier cercle en *a*, & le ſecond en *b*. Menant alors les droites *a G*, *b H*, *c I*, on n'aura plus qu'à conſtruire la figure *A B C f g h i* ſemblable à la figure *a b c F G H I*, & le trapéze *f g h i* ſera celui qu'il falloit conſtruire.

Car ſuppoſant que les deux premiers cercles *F S G*, *F T H* ſe coupent en *K*, ſoient tirées *P K*, *Q K*, *R K*, *a K*, *b K*, *c K*, & ſoit prolongée *Q P* en *L*, les angles à la circonférence *F a K*, *F b K*, *F c K* étant moitié des angles *F P K*, *F Q K*, *F R K* au centre, ſeront égaux aux angles *L P K*, *L Q K*, *L R K*. Donc la figure *P Q R K* eſt équiangle, & ſemblable à la figure *a b c K*, ce qui donne *a b* : *b c* :: *P Q* : *Q R*, c'eſt-à-dire, :: *A B* : *B C*. De plus, les angles *f A g*, *f B h*, *f C i*, ſont égaux, par conſtruction, aux angles *F a G*, *F b H*, *F c I*. Donc la figure *A B C f g h i* eſt ſemblable à la figure *a b c F G H I*. Donc le trapéze *f g h i* ſera ſemblable au

DU MOUVEMENT DES CORPS.

trapeze $FGHI$, & aura ſes angles f, g, h, i reſpectivement appuyées ſur les droites ABC, AD, BD, CE. *C. Q. F. F.*

Cor. On peut mener par ce moyen une ligne droite, dont les parties ſoient placées ſuivant un ordre donné entre quatre droites données de poſition, & qui ayent entr'elles une proportion donnée. Car augmentant les angles FGH, GHI juſqu'à ce que les droites FG, GH, HI deviennent le prolongement l'une de l'autre, la conſtruction précédente donnera la droite $fghi$, dont les parties fg, gh, hi, placées entre les quatre droites données de poſition AB & AD, AD & BD, BD, & CE, ſeront entr'elles comme les lignes, FG, GH, HI, & garderont le même ordre entr'elles. La même queſtion peut ſe réſoudre un peu plus vîte de la maniere ſuivante.

Fig. 70. & 71.

Fig. 72. & 73.

Soient prolongées les droites AB & BD en K & en L, enſorte que $BK : AB :: HI : GH$; & $DL : BD :: GI : FG$; ſoit tiré enſuite KL, qui rencontre la droite CE en i, & ſoit prolongé iL en M, enſorte que $LM : iL :: GH : HI$. Cela fait, tirant la ligne MQ parallele à LB, & qui rencontre la droite AD en g, la ligne tirée de g à i rencontrera les lignes AB, BD en f & en h, & ſera la ligne demandée.

Car en tirant AP parallele à BD & qui rencontre iL en P, on aura gM à Lh (gi à hi, Mi à Li, GI à HI, AK à BK,) & AP à BL dans la même raiſon. Coupant alors DL en R enſorte que DL ſoit à RL dans cette même raiſon, & marquant les points Q & S, où la droite Mg coupe les droites AB & AD, on aura, à cauſe des proportionnelles gS à gM, AS à AP, & DS à DL, les proportions $gS : Lh :: AS : BL :: DS : RL$; & $BL - RL : Lh - BL :: AS - DS : gS - AS$, c'eſt-à dire, $BR : Bh :: AD : Ag$, & par conſéquent $:: BD : gQ$, & réciproquement $BR : BD :: Bh : gQ$, ou $:: fh : fg$. Mais par la conſtruction, la ligne BL a été coupée en D & en R dans la même raiſon que la ligne FI en G & en H: Donc $BR : BD :: FH : FG$. donc $fh : fg :: FH : FG$. Or, comme on a auſſi $gi : hi :: Mi : Li$, c'eſt-à-dire ::

$GI : HI$, il eſt clair que la ligne fi eſt coupée en g & h de la même maniere que FI l'eſt en G & H. C. Q. F. F.

Dans la conſtruction de ce Corollaire, après qu'on a mené LK qui coupe CE en i, ſi on prolonge iE en V, enſorte qu'on ait $EV : Ei :: FH : HI$, & qu'on tire Vf parallele à BD, on aura également la ſolution du Probléme. On l'auroit encore de même, ſi du centre i, & de l'intervalle IH on décrivoit un cercle qui coupât BD en X, & qu'on prolongeât iX en Y, en ſorte que $iY = IF$, & qu'on tirât enſuite Yf parallele à BD. Fig. 72. & 73.

Wren & *Wallis* ont donné autrefois d'autres ſolutions de ce Probléme.

PROPOSITION XXIX. PROBLÉME XXI.

Décrire une trajectoire donnée d'eſpece, qui ſoit coupée par quatre droites données de poſition, en des parties données d'eſpece, d'ordre & de proportion.

Qu'on ſe propoſe de décrire une trajectoire ſemblable à la courbe $FGHI$, & dont les parties ſemblables & proportionnelles aux parties FG, GH, HI de cette courbe ſoient placées entre les droites AB & AD, AD & BD, BD & CE données de poſition, la premiere entre les deux premieres; la ſeconde entre les deux ſecondes, & la troiſiéme entre les deux troiſiémes. Ayant tiré les droites FG, GH, HI, FI, ſoit décrit par le Lemme 27. le trapeze $fghi$, ſemblable au trapeze $FGHI$, & dont les angles f, g, hi ſoient appliqués ſuivant l'ordre preſcrit ſur les droites AB, AD, BD, CE. Cela fait, on n'aura plus qu'à décrire autour de ce trapeze une trajectoire ſemblable à la courbe $FGHI$, & le Probléme ſera réſolu. Fig. 74. & 75.

SCHOLIE.

Ce Probléme peut encore ſe conſtruire en cette ſorte. Ayant tiré FG, GH, HI, FI, prolongez GF en V, tirez FH & IG & faites les angles CAK, DAL égaux aux angles FGH, VFH. Suppoſant enſuite que les lignes AK, AL rencontrent la ligne Fig. 76. & 77.

Du mouvement des Corps.

BD en K & en L, tirez KM & LN, dont la premiere KM faſſe l'angle AKM égal à l'angle GHI, & ſoit à AK, comme HI à GH; & la ſeconde LN faſſe l'angle ALN égal à l'angle FHI, & ſoit à AL comme HI à FH. Mais en plaçant ces lignes AK, KM, AL, LN ayez cette attention que leur ſituation ſoit telle à l'égard des lignes AD, AK, AL, que l'ordre des lettres $CAKMC$, $ALKA$, $DALND$ ſoit le même que celui des lettres $FGHIF$.

Fig. 76. & 77. Cela fait, tirez la ligne MN qui rencontre CE en i; faites l'angle iEP égal à l'angle IGF, & prenez PE à Ei comme FG à GI. Tirez de plus par le point P la ligne PQF, qui faſſe avec la ligne ADE, l'angle PQE égal à l'angle FIG; & obſervez, pour la poſition de ces lignes PE & PQ par rapport aux droites CE, PE, que l'ordre des lettres $PEiP$, $PEQP$ ſoit le même que celui des lettres $FGHIF$. Marquant alors le point f où PQ rencontre la ligne droite AB, on n'aura qu'à décrire ſur if, comme baſe, la figure $ifgh$ ſemblable à $IFGH$, & en lui circonſcrivant la trajectoire donnée d'eſpece, le Probléme ſera réſolu.

Après avoir appris à trouver les orbes, il reſte à déterminer les mouvemens des corps dans ces orbes.

SIXIÉME SECTION.

De la détermination des mouvemens dans des Orbes donnés.

PROPOSITION XXX. PROBLÉME XXII.

Trouver pour un temps donné le lieu d'un corps qui ſe meut dans une Trajectoire Parabolique donnée.

Fig. 78. Soient S le foyer de la parabole, A ſon ſommet, P le lieu cherché où le corps eſt arrivé en venant de A, ou bien celui

d'où il faut qu'il parte pour arriver en A dans le temps donné. Soit de plus $4AS \times M$ la ſurface de l'aire parabolique donnée par ce temps.

Fig. 78.

Ayant diviſé la ligne AS en deux parties égales au point G & élevé perpendiculairement à AS la droite GH égale à $3M$, on aura le lieu cherché P par l'interſection de la parabole & du cercle dont le centre eſt H, & le rayon HS. Car abaiſſant PO perpendiculaire ſur l'axe, & tirant PH, on aura $AG^2 + GH^2 = (HP^2 = \overline{AO-AG}^2 + \overline{PO-GH}^2) = AO^2 + PO^2 - 2GA \times AO - 2GH \times PO + AG^2 + GH^2$. D'où l'on tire $2GH \times PO (= AO^2 + PO^2 - 2GA \times AO) = AO^2 + \frac{3}{4}PO^2$. Ecrivant enſuite $AO \times \frac{PO^2}{4AS}$ au lieu de AO^2, diviſant tous les termes par $3PO$ & les multipliant par $2AS$, on aura $\frac{4}{3}GH \times AS (= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO =$ l'aire $APO - SPO) =$ l'aire APS. Mais à cauſe que $GH = 3M$, on a $\frac{4}{3}GH \times AS = 4AS \times M$. Donc l'aire APS a pour ſurface la quantité donnée $4AS \times M$.

Cor. 1. De-là on tire que GH eſt à AS, comme le temps pendant lequel le corps décrit l'arc AP eſt au temps pendant lequel il décrit l'arc compris entre le ſommet A & la perpendiculaire élevée du foyer S ſur l'axe.

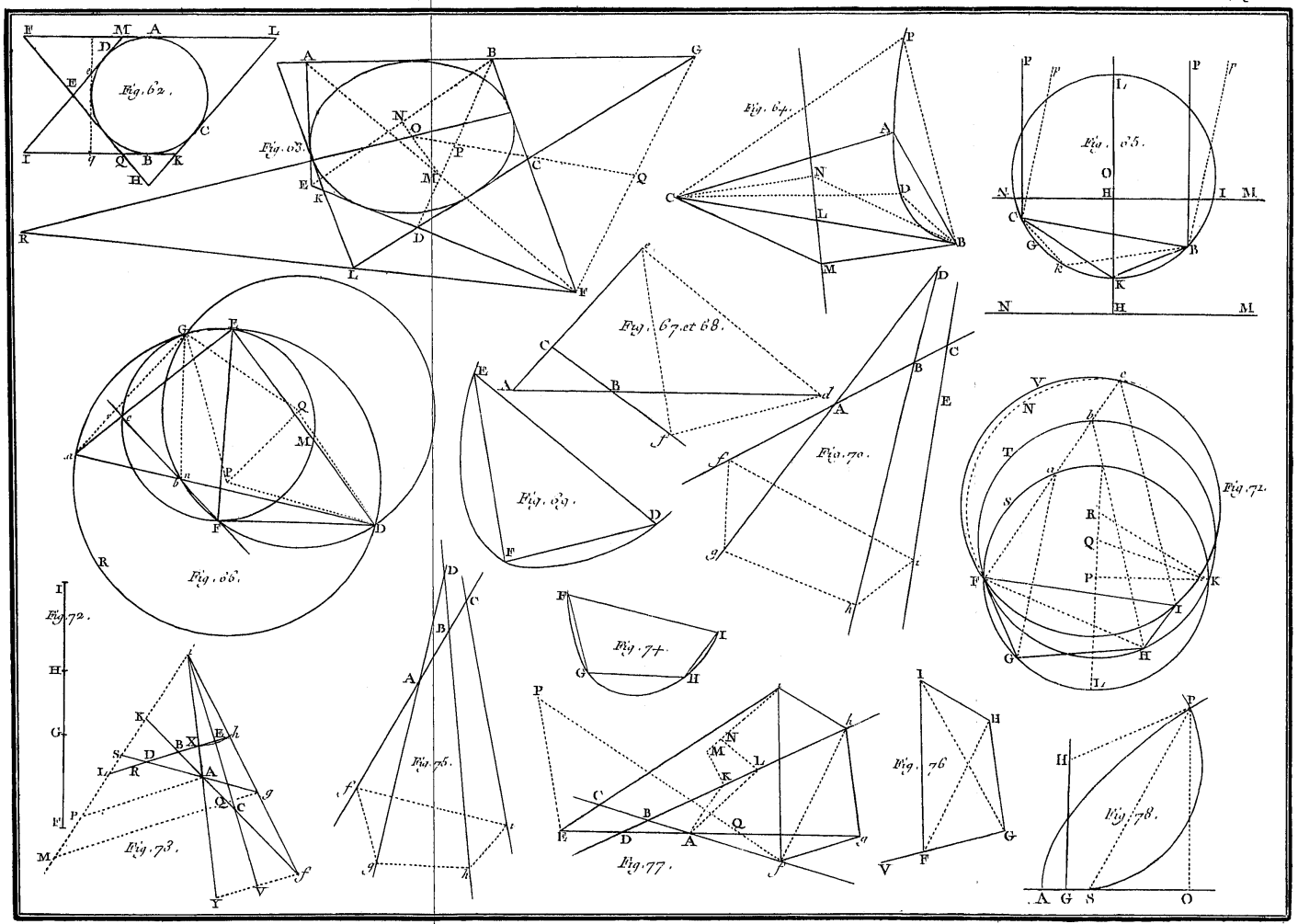
Cor. 2. Si on imagine que le cercle ASP ſuive continuellement le corps P, la vîteſſe du point H ſera à la vîteſſe du corps au ſommet A, comme 3 à 8. Donc la ligne GH, & la ligne droite que le corps peut décrire dans le temps qu'il ſe meut de A vers P, avec la vîteſſe qu'il avoit au ſommet A, ſont entr'elles dans la même raiſon.

Cor. 3. Et réciproquement; on peut trouver le temps que le corps a employé à décrire un arc quelconque AP, en tirant AP & en élevant au milieu de cette ligne une perpendiculaire qui rencontre la droite GH en H.

LEMME XXVIII.

Les parties quelconques de toute figure ovale, déterminées par les coordonnées ou par d'autres droites tirées à volonté, ne peuvent jamais être trouvées par aucune équation d'un nombre fini de termes & de dimenſions.

Soit donné dans l'ovale un point quelconque autour duquel, comme pole, tourne perpétuellement une ligne droite d'un mouvement uniforme, & ſoit imaginé en même temps ſur cette ligne un point mobile allant toujours depuis le pole avec une vîteſſe qui ſoit comme le quarré de la partie de cette ligne renfermée dans l'ovale, ce point décrira alors une ſpirale compoſée d'une infinité de Spires. Or ſi la portion d'aire ovale, coupée par cette droite, peut être trouvée par une équation d'un nombre fini de termes, on aura auſſi, par la même équation, le rayon de la ſpirale qui eſt proportionnel à cette aire. Ainſi on pourra trouver par une équation finie tous les points d'une ſpirale, & par conſéquent on pourra trouver auſſi l'interſection d'une droite quelconque donnée de poſition, & d'une ſpirale par une équation finie ; mais toute droite prolongée infiniment coupe une ſpirale en une infinité de points, & toute équation qui donne l'interſection quelconque de deux lignes doit donner toutes leurs interſections par autant de racines, & doit avoir par conſéquent autant de dimenſions qu'il y a d'interſections. Car on ſçait que deux cercles ſe coupant en deux points, on ne peut avoir une de leurs interſections que par une équation du ſecond degré qui donne en même temps l'autre point ; & que deux ſections coniques pouvant ſe couper en quatre points, on ne ſçauroit avoir une de ces interſections que par une équation du quatriéme degré, qui donne en même temps les trois autres, puiſque ſi on cherche chacune des interſections à part, le calcul fondé ſur les mêmes conditions ſera le même, & donnera toujours un même réſultat qui renfermera toutes les interſections, & les donnera


Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 64.
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 67. et 68.
Fig. 69.
Fig. 70.
Fig. 71.
Fig. 72.
Fig. 73.
Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76
Fig. 77.
Fig. 78.

indifféremment. De même, les ſections coniques & les courbes du troiſiéme degré pouvant ſe couper en ſix points, leurs interſections ſe trouvent toutes à la fois par des équations de ſix dimenſions, & les interſections de deux courbes du troiſiéme degré pouvant être au nombre de neuf, elles ſe trouvent toutes en même temps par des équations de neuf dimenſions. Si cela n'arrivoit pas néceſſairement, on pourroit réduire tous les Problémes ſolides aux Problémes plans, & les ſurſolides aux Problémes ſolides. Je parle ici des courbes dont le degré eſt irréductible. Car ſi l'équation qui exprime une courbe, peut être réduite à un degré inférieur, la courbe ne ſera pas unique, mais elle ſera compoſée de deux ou pluſieurs courbes dont on peut trouver les interſections ſéparément par différents calculs. Les deux interſections des droites & des coniques ſe trouvent auſſi toujours par des équations de deux dimenſions, les trois interſections des droites & des courbes irréductibles du troiſiéme degré, par des équations de trois dimenſions, & les quatre interſections des droites & des courbes irréductibles du quatriéme degré, par des équations de quatre dimenſions, & ainſi à l'infini.

Or, la ſpirale étant une courbe ſimple & qu'on ne peut décompoſer en pluſieurs courbes, le nombre infini de ſes interſections avec une ligne droite ne ſera exprimé que par une équation d'un nombre infini de dimenſions & de racines, qui donnera toutes ces interſections à la fois, puiſque c'eſt la même loi & le même calcul pour toutes. Car ſi du pole on abaiſſe une perpendiculaire ſur la droite coupante, & que cette perpendiculaire ſe meuve avec la droite coupante autour du pole, les interſections de la ſpirale paſſeront mutuellement entr'elles, celle qui étoit la premiere ou la plus proche, ſera après une révolution la ſeconde, après deux révolutions elle ſera la troiſiéme, & ainſi de ſuite; & cependant l'équation ne changera point, à moins que la grandeur des quantités qui déterminent la poſition de la coupante ne change: or, comme ces quantités après chaque

révolution retournent à leurs premieres grandeurs, l'équation reviendra à ſa premiere forme ; ainſi une ſeule & même équation donnera toutes les interſections, & elle aura par conſéquent un nombre infini de racines qui les donneront toutes. On ne peut donc trouver d'une maniere générale une interſection quelconque d'une droite & d'une ſpirale par une équation finie, & par conſéquent il n'y a point d'ovale dont l'aire coupée par des droites à volonté puiſſe être exprimée par une telle équation.

En prenant le rayon de la ſpirale proportionnel au périmetre de l'ovale coupée, il ſera aiſé de prouver par le même raiſonnement qu'on ne peut exprimer la longueur de ce périmetre d'une façon générale par aucune équation finie. Au reſte, je parle ici des ovales qui ne ſont pas touchées par des figures conjuguées qui s'étendent à l'infini.

Cor. De-là on voit que l'aire elliptique décrite autour du foyer ne peut pas être exprimée dans un temps donné par une équation finie, & que par conſéquent elle ne peut être déterminée par la deſcription des courbes géométriquement rationnelles. J'appelle courbes géométriquement rationnelles, celles dont la relation entre les abſciſſes & les ordonnées peut être déterminée par des équations en termes finis. Les autres courbes, telles que les ſpirales, les quadratices, les trochoïdes, &c. je les nomme des courbes géométriquement irrationelles. Je vais montrer à couper l'aire elliptique proportionnellement au temps par une courbe de cette eſpece.

PROPOSITION XXXI. PROBLÉME XXIII.

Trouver pour un temps donné le lieu d'un corps qui ſe meut dans une trajectoire elliptique donnée.

Fig. 79. Que A ſoit le ſommet de l'ellipſe APB, S ſon foyer, O ſon centre, & qu'il s'agiſſe de trouver le lieu P du corps. Prolongez OA en G, en ſorte que $OG : OA :: OA : OS$; élevez la perpendiculaire GH, & du centre O & de l'intervalle OG décrivez

le cercle GEF; cela fait, prenant GEF pour cercle roulant, A pour point décrivant, & GH pour baſe, tracez la trochoïde ALI, & prenez GK qui ſoit à la circonférence $GEFG$ dans la même raiſon que le temps pendant lequel le corps décrit l'arc AP, en partant du point A, eſt au temps d'une révolution dans l'ellipſe. Elevez enſuite la perpendiculaire KL qui rencontre la trochoïde en L, & vous aurez, en menant LP parallele à KG, le lieu cherché P. Fig. 76.

Pour le démontrer, ſoit décrit ſur le diametre AB le demi cercle AQB, & ſoient tirées du point Q, où la droite PL rencontre ce demi cercle, les droites QS, QO aux points O & S; ſoit de plus prolongé OQ juſqu'à ce qu'elle rencontre l'arc EFG en F, & abaiſſez ſur cette droite OQ la perpendiculaire SR; il eſt clair, à cauſe que l'aire APS eſt proportionnelle à l'aire AQS, c'eſt-à-dire à la différence entre le ſecteur OQA & le triangle OQS, ou à la différence des rectangles $\frac{1}{2}OQ \times AQ$, & $\frac{1}{2}OQ \times SR$, ou (ce qui revient au même $\frac{1}{2}OQ$ étant donné) à la différence entre l'arc AQ & la droite SR, ou bien encore (à cauſe que les raiſons de SR au ſinus de l'arc AQ, de OS à OA, de OA à OG, de AQ à GF, & par conſéquent de $AQ - SR$ à $GF -$ le ſinus de l'arc AQ, ſont égales & données) à la droite GK différence entre GF & le ſinus de l'arc AQ. C. Q. F. D.

SCHOLIE.

Au reſte, comme la deſcription de cette courbe eſt difficile, il vaut mieux employer une ſolution approchée. On commencera par trouver un angle B qui ſoit à l'angle de 57. 29578 degrés que ſouſtend un arc égal au rayon, comme la diſtance SH des foyers eſt au diametre AB de l'ellipſe; & une longueur quelconque L qui ſoit au rayon dans la même raiſon inverſe; ce qui étant trouvé, le Probléme ſe conſtruira enſuite par l'analyſe ſuivante. Fig. 80.

Ayant trouvé par une méthode ou par une eſtime quelconque,

un lieu P voiſin du vrai lieu cherché p, & ayant tiré l'ordonnée PR à l'axe de l'ellipſe, la proportion des diametres de l'ellipſe donnera l'ordonnée RQ du cercle circonſcrit AQB, laquelle eſt le ſinus de l'angle AOQ pour le rayon AO, & coupe l'ellipſe au point P. Il ſuffit de trouver cet angle en nombres approchés par un calcul groſſier. Il faut connoître auſſi l'angle proportionnel au temps, c'eſt-à-dire, l'angle qui eſt à quatre droits, comme le temps pendant lequel le corps décrit l'arc Ap eſt au temps d'une révolution dans l'ellipſe. N étant cet angle, on prendra l'angle D à l'angle B, comme le ſinus de l'angle AOQ eſt au rayon, & l'angle E à l'angle $N-AOQ+D$, comme la longueur L eſt à cette même longueur L diminuée du coſinus de l'angle AOQ, lorſque cet angle eſt moindre qu'un droit, & augmentée de ce même coſinus lorſqu'il eſt plus grand. On prendra enſuite l'angle F à l'angle B, comme le ſinus de l'angle $AOQ+E$ au rayon, & l'angle G à l'angle $N-AOQ-E+F$, comme la longueur L eſt à cette même longueur L, diminuée du coſinus de l'angle $AOQ+E$ lorſque cet angle eſt moindre qu'un droit, & augmentée de ce même coſinus lorſqu'il eſt plus grand. On continuera de même à prendre l'angle H à l'angle B, comme le ſinus de l'angle $AOQ+E+G$ au rayon; & l'angle I à l'angle $N-AOQ-E-G+H$, comme la longueur L eſt à cette même longueur L diminuée du coſinus de l'angle $AOQ+E+G$ lorſque cet angle eſt moindre qu'un droit, & augmentée de ce même coſinus lorſqu'il eſt plus grand, & l'opération pourra être continuée à l'infini. Enfin prenant l'angle AOq égal à l'angle $AOQ+E+G+I+$, &c. le coſinus Or de cet angle, & l'ordonnée Pr qui eſt au ſinus qr comme le petit axe de l'ellipſe eſt au grand, donneront le lieu corrigé p.

Fig. 82.

Fig. 76.

Lorſque l'angle $N-AOQ+D$ eſt négatif, le ſigne $+$ de E doit par tout ſe changer en $-$ & ſon ſigne $-$ en $+$. Il en eſt de même des ſignes de G & de I, lorſque les angles $N-AOQ-E+F$, & $N-AOQ-E-G+H$ deviennent négatifs.

Il eſt à remarquer que la ſuite infinie $AOQ + E + G + I +$ &c. converge ſi vîte, qu'il n'eſt preſque jamais beſoin d'aller au-delà du ſecond terme E ; le calcul que je viens de donner eſt fondé ſur ce Théoréme, que l'aire APS eſt comme la différence entre l'arc AQ & la droite tirée du foyer S perpendiculairement ſur le rayon OQ.

On réſout le même Probléme pour l'hyperbole par un calcul à peu près ſemblable. O étant ſon centre, A ſon ſommet, S ſon foyer, & OK ſon aſymptote : on commencera par connoître la quantité de l'aire à retrancher proportionnelle au temps, & par tirer la droite SP qu'on eſtime pouvoir retrancher l'aire APS approchante de l'aire demandée. On tirera enſuite OP, & des points A & P on ménera les paralleles AI, PK à l'autre aſymptote. Cela fait, par la table des Logarithmes, on aura l'aire $AIKP$, ainſi que l'aire OPA qui lui eſt égale, laquelle étant retranchée du triangle OPS laiſſera l'aire APS. Diviſant par la ligne SN, tirée perpendiculairement du foyer S ſur la tangente TP, la double différence $2APS - 2A$ ou $2A - 2APS$ de l'aire A à retrancher & de l'aire APS retranchée, on aura la longueur de la corde PQ. Plaçant enſuite cette corde PQ entre A & P ſi l'aire retranchée APS eſt plus grande que l'aire A qu'il faut retrancher, ou du côté oppoſé ſi elle eſt plus petite, le point Q ſera un lieu plus approché du vrai, & en répétant la même opération on en approchera de plus en plus à l'infini. Fig. 81.

Ainſi par ces calculs on réſout le Probléme analytiquement & généralement ; mais la méthode particuliere qui ſuit eſt plus propre aux uſages aſtronomiques.

AO, OB, OD étant les demi axes de l'ellipſe, L ſon parametre & D la différence entre la moitié OD du petit axe, & la moitié $\frac{1}{2}L$ du parametre ; cherchez l'angle Y, dont le ſinus ſoit au rayon, comme le rectangle, ſous cette différence D & la moitié $AO + OD$ de la ſomme des axes, eſt au quarré du grand axe AB ; cherchez auſſi l'angle Z dont le ſinus ſoit au Fig. 82.

Du mouvement des Corps.

rayon, comme le double rectangle, ſous la diſtance SH des foyers, & cette différence D, eſt au triple quarré de la moitié AO du grand axe. Ces angles étant une fois trouvés, vous aurez ainſi le lieu cherché.

Prenez l'angle T proportionnel au temps pendant lequel l'arc BP eſt décrit, ou, pour parler comme les Aſtronomes, égal au mouvement moyen. Prenez de plus l'angle V, premiere équation du mouvement moyen, à l'angle Y, premiere plus grande équation, comme le ſinus du double de l'angle T eſt au rayon; & l'angle X, ſeconde équation, à l'angle Z, ſeconde plus grande équation, comme le cube du ſinus de l'angle T au cube du rayon. Cela fait, prenez l'angle BHP du mouvement moyen corrigé, égal, ou à la ſomme $T+X+V$ des angles T, V, X, ſi l'angle T eſt plus petit qu'un droit, ou à la différence $T+X-V$, ſi cet angle eſt plus grand qu'un droit, & moindre que deux droits. Enfin tirez SP au point P où HP rencontre l'ellipſe, & l'aire BSP ſera à très peu de choſe près proportionnelle au temps.

Fig. 81. & 82.

Cette conſtruction eſt aſſez courte, parce qu'en ſe contentant des deux ou trois premiers chifres, lorſqu'on détermine les petits angles V & X, qu'on peut, ſi on veut, ne prendre qu'en ſecondes, on a une ſolution du Probléme auſſi éxacte qu'il eſt néceſſaire pour la théorie des planetes; car dans l'orbe de Mars même, dont la plus grande équation du centre eſt de dix degrés, l'erreur paſſeroit à peine une ſeconde.

Au reſte, connoiſſant l'angle BHP du mouvement moyen corrigé: l'angle BSP du mouvement vrai, & la diſtance SP ſont aiſés à trouver par une méthode très connue.

Juſqu'ici j'ai éxaminé le mouvement des corps dans des lignes courbes; mais il ſe peut faire que le mobile monte ou deſcende dans une ligne droite. Je vais donc expliquer ce qui a rapport à cette ſorte de mouvement.

SEPTIÈME SECTION.

De l'aſcenſion & de la deſcenſion rectiligne des corps.

PROPOSITION XXXII. PROBLÈME XXIV.

Suppoſant que la force centripete ſoit réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance au centre, trouver les eſpaces rectilignes que le corps parcourt en tombant dans des temps donnés.

Cas 1. Si le corps ne tombe pas perpendiculairement, il décrira (par le Cor. 1. de la Prop. 13.) quelque ſection conique dont le foyer ſera dans le centre des forces. Soit $ARPB$ cette ſection conique, & S ſon foyer. Suppoſant d'abord que cette courbe ſoit une ellipſe, on décrira ſur ſon grand axe AB un demi cercle ADB, & l'on tirera par le lieu du corps tombant la ligne DPC perpendiculaire à l'axe; on tirera enſuite DS, PS, & l'on aura l'aire ASD proportionnelle au temps. Fig. 83.

L'axe AB reſtant le même, & la largeur de l'ellipſe diminuant continuellement, l'aire ASD demeurera toujours proportionnelle au temps; & ſi l'on ſuppoſe que cette largeur diminue à l'infini, l'orbe APB coïncidant avec l'axe AB, & le foyer S avec l'extrémité B de l'axe, le corps deſcendra dans la droite AC, & l'aire ABD ſera alors proportionnelle au temps. L'eſpace AC que le corps décrit dans le temps donné en tombant perpendiculairement du lieu A ſera donc donné auſſi-tôt que l'on prendra l'aire ABD proportionnelle au temps, & qu'on tirera du point D la ligne DC perpendiculaire ſur la droite AB. *C. Q. F. T.*

Cas 2. Suppoſant préſentement que la figure RPB ſoit une hyperbole, ſoit décrit ſur ſon diametre principal AB une hyperbole équilatere BED: l'aire $SDEB$ ſera proportionnelle au temps pendant lequel le corps P décrira l'arc PfB, parce que l'aire $SPfB$ eſt proportionnelle à ce temps; & que les aires Fig. 84.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

CSP, $CBfP$, $SPfB$ ſont aux aires CSD, $CBED$, $SDEB$, reſpectivement, dans la raiſon donnée de CP à CD.

Si on diminue enſuite à l'infini le parametre de l'hyperbole RPB, ſon premier axe reſtant le même, l'arc PB coïncidera avec la droite CB, le foyer S avec le ſommet B, & la droite SD avec la droite BD; ainſi l'aire $BDEB$ ſera proportionnelle au temps de la chute rectiligne CB.

Cas 3. Par le même raiſonnement, ſi la figure RPB eſt une parabole, & que du même ſommet principal B on décrive une autre parabole BED, qui demeurera toujours donnée pendant que la premiere parabole, dans le périmetre de laquelle le corps P ſe meut, vient à coïncider avec la ligne CB, par la diminution infinie de ſon parametre, le ſegment parabolique $BDEB$ ſera proportionnel au temps de la chute rectiligne CB. C. Q. F. T.

Fig. 85.

PROPOSITION XXXIII. THÉORÉME IX.

Les choſes trouvées ci-devant étant poſées, la vîteſſe du corps qui tombe eſt, dans un lieu quelconque C, *à la vîteſſe du corps qui décrit un cercle au tour du centre* B, *à la diſtance* BC, *dans la raiſon ſous-doublée de* AC, (*diſtance du corps au ſommet ultérieur* A *du cercle ou de l'hyperbole équilatere,*) *au demi diametre principal* $\frac{1}{2}$ AB *de la figure.*

Fig. 86. & 87.

Soient O le milieu du diametre AB de l'une & de l'autre figure RPB, DEB; PT la tangente de la figure RPB en P; T la rencontre de cette tangente avec le diametre commun AB prolongé, s'il eſt néceſſaire; SY la perpendiculaire à cette tangente; BQ la perpendiculaire à AB; L le parametre de la figure RPB. Il eſt certain, par le Corol. 7. de la Propoſ. 16. que la vîteſſe du corps, qui ſe meut dans la ligne RPB autour du centre S, eſt dans un lieu quelconque P, à la vîteſſe du corps qui décrit un cercle autour du même centre & à la diſtance SP, en raiſon ſousdoublée du rectangle $\frac{1}{2} L \times SP$ à SY^2. Or par les coniques $AC \times CB : CP^2 :: 2AO : L$; donc

$\frac{AO \times 2CP^2}{AC \times CB} = L$. Donc ces vîteſſes ſont entr'elles en raiſon ſous-doublée de $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{AC \times CB}$ à SY^2. De plus, on a encore par les coniques $CO : BO :: BO : TO$, & par conſéquent $:: CB : BT$; d'où on tire $BO \mp CO : BO :: CT : BT$, c'eſt-à-dire, $AC : AO :: CP : BQ$; & par conſéquent $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{AC \times CB} = \frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Suppoſant préſentement que la largeur CP de la figure RPB diminue à l'infini, enſorte que le point P coïncide avec le point C, le point S avec le point B, la ligne SP avec la ligne BC, & la ligne SY avec la ligne BQ, la vîteſſe du corps qui deſcend dans la droite CB, ſera à la vîteſſe du corps qui décrit un cercle autour du centre B & à la diſtance CB dans la raiſon ſousdoublée de $\frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times BC}$ à SY^2, c'eſt-à-dire, (à cauſe qu'en ce cas $SP = BC$ & $BQ^2 = SY^2$,) que ces vîteſſes ſeront alors entr'elles dans la raiſon ſousdoublée de AC à AO ou $\frac{1}{2}AB$. C. Q. F. D. Fig. 86. & 87.

Cor. 1. Les points B & S coïncidant, on aura $TC : TS :: AC : AO$.

Cor. 2. Si la vîteſſe d'un corps qui décrit un cercle autour du centre des forces étoit imprimée à ce corps ſuivant le rayon, & dans la direction oppoſée au centre, il parcoureroit en remontant un eſpace égal au diametre.

PROPOSITION XXXIV. THÉORÉME X.

Si la figure BED *eſt une parabole, la vîteſſe du corps qui tombe eſt égale dans un lieu quelconque* C, *à la vîteſſe avec laquelle ce corps peut décrire uniformément un cercle autour du centre* B *& à la moitié de ſa diſtance* BC. Fig. 88.

La vîteſſe du corps qui décrit la parabole RPB autour du centre S, eſt dans un lieu P, par le Corol. 7. de la Prop. 16,

Du mouvement des Corps.

égale à la vîteſſe du corps qui décrit uniformément un cercle autour du même centre S & à la diſtance $\frac{1}{2} SP$. Suppoſant donc que la largeur CP de la parabole diminue à l'infini, enſorte que l'arc parabolique PfB coïncide avec la droite CB, la propoſition ſera prouvée, puiſque le centre S ſe confondra avec le ſommet B, & la diſtance SP avec la diſtance BC. C. Q. F. D.

Fig. 88.

PROPOSITION XXXV. THÉORÉME XI.

Les mêmes choſes étant poſées, l'aire de la figure DES *décrite autour du centre* S *eſt égale à l'aire qu'un corps peut décrire, en tournant uniformément pendant le même temps dans un cercle dont le centre eſt le même point* S, *& le rayon la moitié du parametre de la figure* DES.

Fig. 89. & 90.

Suppoſant que le corps ait parcouru la petite ligne Cc en tombant pendant un très-petit eſpace de temps, & que dans le même temps un autre corps K, en tournant uniformément dans le cercle OKk, ait décrit l'arc Kk autour du centre S; on élevera les perpendiculaires CD, cd qui rencontrent la figure DES en D & en d, on tirera SD, Sd, SK, Sk, l'on menera Dd qui rencontre l'axe AS en T, & l'on abaiſſera la perpendiculaire SY ſur cette ligne.

Cas 1. Si la figure DES eſt une hyperbole équilatere, ou un cercle, & que ſon diametre tranſverſal AS ſoit coupé en deux parties égales au point O, SO ſera la moitié du parametre. Or comme $TC : TD :: Cc : Dd$, & $TD : TS :: CD : SY$, on aura $TC : TS :: CD \times Cc : SY \times Dd$; mais $TC : TS :: AC : AO$, par le Corol. 1. de la Prop. 33. Si on prend les dernieres raiſons de ces lignes lorſque les points D & d coïncident : donc $AC : AO$ ou $SK :: CD \times Cc : SY \times Dd$. De plus, par la Prop. 33. la vîteſſe en C du corps qui deſcend eſt à la vîteſſe du corps qui décrit un cercle autour du centre S & à la diſtance SC en raiſon ſousdoublée de AC à AO ou SK, & cette vîteſſe, par le Corol. 6. de la Prop. 4. eſt à la vîteſſe du corps qui décrit le

cercle OKk en raiſon ſousdoublée de SK à SC; ou, ce qui en eſt une ſuite évidente, la vîteſſe en C eſt à la vîteſſe dans le cercle OKk, c'eſt-à-dire, la petite ligne Cc eſt à l'arc Kk dans la raiſon ſousdoublée de AC à SC, ou dans la raiſon ſimple de AC à CD. Donc, comme il ſuit delà que $CD \times Cc = AC \times Kk$, la proportion précédente $AC : SK :: CD \times Cc : SY \times Dd$ ſe changera en $AC : SK :: AC \times Kk : SY \times Dd$, d'où l'on tirera $SK \times Kk = SY \times Dd$, c'eſt-à-dire que l'aire KSk eſt égale à l'aire SDd. De même, à chaque particule de temps, il y aura deux petites portions d'aires KSk & SDd, qui, en diminuant de grandeur, & en augmentant de nombre à l'infini, auront entr'elles à la fin la raiſon d'égalité; donc, par le Corol. du Lemme 4. les aires entiéres décrites dans le même temps ſeront toujours égales. *C. Q. F. D.* Fig. 89. & 90.

Cas 2. Si la figure DES eſt une parabole, on trouvera, comme ci-deſſus $CD \times Cc : SY \times Dd :: TC : TS$, c'eſt-à-dire :: 2 : 1; donc $\frac{1}{4} CD \times Cc = \frac{1}{2} SY \times Dd$; mais, par la Prop. 34. la vîteſſe du corps qui tombe eſt égale dans le lieu C à la vîteſſe avec laquelle le cercle dont le rayon eſt $\frac{1}{2} SC$ peut être décrit uniformément, & par le Corol. 6. de la Prop. 4. cette vîteſſe eſt à la vîteſſe avec laquelle le cercle dont le rayon eſt SK peut être décrit, dans la raiſon ſousdoublée de SK à $\frac{1}{2} SC$; donc la petite ligne Cc eſt à l'arc Kk dans la même raiſon, ou, ce qui revient au même, dans la raiſon de SK à $\frac{1}{2} CD$: or, delà il ſuit, que $\frac{1}{2} SK \times Kk = \frac{1}{4} CD \times Cc$, & par conſéquent $= \frac{1}{2} SY \times Dd$, c'eſt-à-dire, que l'aire KSk eſt égale à l'aire SDd, comme ci-deſſus. *C. Q. F. D.* Fig. 91.

PROPOSITION XXXVI. PROBLÉME XXV.

Déterminer le temps de la chute d'un corps qui tombe d'un lieu donné A. Fig. 92.

Sur le diametre AS, diſtance du corps au centre dans le commencement de la chute, décrivez le demi cercle ADS,

Du Mouvement des Corps

ainſi que le demi cercle OKH, qui lui eſt égal, & qui eſt décrit autour du centre S. D'un lieu quelconque C du corps, élevez l'ordonnée CD, tirez SD, & faites le ſecteur OSK égal à l'aire ASD. Il eſt clair, par la Prop. 35. que le corps en tombant par AC, employera le même temps qu'il faudroit à un autre corps pour décrire l'arc OK, en tournant uniformément autour du centre S. *C. Q. F. F.*

Fig. 92.

PROPOSITION XXXVII. PROBLÉME XXVI.

Déterminer le temps de l'aſcenſion ou de la deſcenſion d'un corps jetté d'un lieu donné, ſoit en en haut, ou en en bas.

Que le corps parte du lieu donné G, ſuivant la ligne GS avec une vîteſſe quelconque. Prenez AG à $\frac{1}{2}AS$ en raiſon doublée de cette vîteſſe à la vîteſſe uniforme avec laquelle le corps peut circuler dans un cercle autour du centre S, & à la diſtance donnée SG. Si cette raiſon eſt celle de 2 à 1, le point A ſera infiniment diſtant, & alors ce ſera une parabole qu'il faudra décrire, ſon ſommet étant S, ſon axe SG, & ſon parametre une ligne quelconque; ce qui eſt clair par la Prop. 34.

Fig. 93. 94. 95.

Si cette raiſon eſt moindre ou plus grande que celle de 2 à 1, ce ſera ou un cercle, ou une hyperbole équilatere qu'il faudra décrire ſur le diametre SA, comme il eſt évident par la Prop. 33. Dans chacun de ces cas décrivez le cercle HkK du cercle S, & d'une intervalle égal à la moitié du parametre. Elevez les perpendiculaires GI, CD, au lieu G, & à un autre lieu quelconque C, de l'eſpace parcouru en montant ou en deſcendant, leſquelles perpendiculaires rencontrant la ſection conique ou le cercle en I & en D. Tirant enſuite les lignes SI, SD, & faiſant les ſecteurs HSK, HSk égaux aux ſegmens $SEIS$, $SEDS$, il eſt clair, par la Prop. 35. que le corps G parcourera l'eſpace GC dans le même temps qu'il faudroit au corps K, pour décrire l'arc Kk. C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXVIII. THÉOREME XII.

La force centripete étant proportionnelle à la hauteur ou à la diſtance des lieux au centre, les temps, les vîteſſes & les eſpaces décrits par les corps tombans ſont reſpectivement proportionnels aux arcs, aux ſinus droits & aux ſinus verſes de ces arcs.

Suppoſant que le corps tombe d'un lieu quelconque A, ſuivant une droite AS, ſoit décrit du centre S des forces, & de l'intervalle AS le quart du cercle AE, & ſoit CD le ſinus droit d'un arc quelconque AD, le corps A décrira l'eſpace AC en tombant pendant le temps AD, & aura en C la vîteſſe CD. Fig. 96.

C'eſt ce qu'il eſt aiſé de démontrer par la Prop. 10. de la même maniere qu'on a démontré la Prop. 32. par la Prop. 11.

Cor. 1. Delà, le temps, dans lequel un corps tombant du lieu A parvient au centre S, eſt égal au temps dans lequel un autre corps décrit l'arc de cercle ADE.

Cor. 2. Les temps dans leſquels les corps tombent de lieux quelconques juſqu'au centre ſont donc tous égaux les uns aux autres. Car par le Corol. 3. de la Prop. 4. tous les temps périodiques des corps qui tournent ſont égaux.

PROPOSITION XXXIX. PROBLÉME XXVII.

La quadrature des courbes étant ſuppoſée, & le corps montant ou deſcendant dans une ligne droite qui paſſe par le centre vers lequel il eſt pouſſé, ſuivant une loi quelconque, on demande la vîteſſe de ce corps en un point quelconque de cette droite, ainſi que le temps employé à y arriver : & réciproquement.

Que le corps E tombe d'un lieu quelconque A ſuivant la droite $ADEC$, & que BFG ſoit la courbe dont toutes les ordonnées AB, DF, EG, *&c.* ſoient proportionnelles aux forces en A, D, E vers le centre C, la vîteſſe en un point quelconque E ſera comme la racine quarrée de l'aire $ABEG$. C. Q. F. T. Fig. 97.

Que la courbe VLM, dont l'aſymptote eſt ABT, ſoit celle

Du mouvement des Corps.

dont toutes les ordonnées EM ſoient réciproquement proportionnelles aux aires $ABGE$, l'aire $ABTVME$ repréſentera le temps pendant lequel le corps parcourera en tombant la ligne AE. C. Q. F. T.

Pour démontrer la premiere de ces deux aſſertions, ſoit priſe ſur la droite AE une très petite ligne DE donnée de longueur, & ſoit DLF le lieu de la ligne EMG, lorſque le corps étoit en D; ſi la force centripete eſt ſuppoſée celle qui convient pour que la vîteſſe du corps deſcendant ſoit proportionnelle à la racine quarrée de l'aire $ABGE$, cette aire ſera en raiſon doublée de la vîteſſe, c'eſt-à-dire, que ſi au lieu des vîteſſes en D & en E, on écrit V & $V+I$, l'aire $ABFD$ ſera comme V^2, & l'aire $ABGE$ comme $V^2+2VI+I^2$, d'où il réſultera que l'aire $DFGE$ ſera comme $2VI+I^2$, & par conſéquent $\frac{DFGE}{DE}$ ſera comme $\frac{2VI+I^2}{DE}$, c'eſt-à-dire, en prenant les premieres raiſons des quantités naiſſantes, que la longueur DF ſera comme la quantité $\frac{2VI}{DE}$, ou comme ſa moitié $\frac{I \times V}{DE}$.

Fig. 97.

Maintenant, le temps, pendant lequel le corps en tombant parcourt la petite ligne DE, eſt comme cette petite ligne directement, & la vîteſſe V inverſement; de plus, la force eſt comme l'incrément I de la vîteſſe directement, & comme le temps inverſement; donc ſi on prend les premieres raiſons des quantités naiſſantes, cette force ſera comme $\frac{I \times V}{DE}$, c'eſt-à-dire comme la longueur DF. Donc la force proportionnelle à DF ou à EG fera deſcendre le corps avec une vîteſſe qui ſera comme la racine de l'aire $ABGE$. C. Q. F. D.

La ſeconde aſſertion eſt facile à démontrer préſentement; car puiſque le temps, employé à parcourir une petite ligne DE d'une longueur quelconque donnée, eſt inverſement comme la

vîteſſe, & par conſéquent inverſement comme la ligne droite qui ſeroit la racine de l'aire $ABFD$, & que DL, & par conſéquent l'aire naiſſante $DLME$ eſt comme la même droite inverſement : le temps ſera comme l'aire $DLME$: & la ſomme de tous les temps, comme la ſomme de toutes ces aires, c'eſt-à-dire, par le Corol. du Lemme 4. que le temps total employé à parcourir la ligne AE ſera comme l'aire totale $ATVME$. C. Q. F. D. Fig. 97.

Cor. 1. Si P eſt le lieu duquel le corps doit tomber, afin qu'étant preſſé par une force centripete donnée & uniforme, telle qu'on ſuppoſe ordinairement la gravité, il acquiere au lieu D une vîteſſe égale à celle qu'un autre corps pouſſé par une force quelconque a acquiſe au même lieu D, on aura le lieu A, d'où cet autre corps a commencé de tomber en prenant ſur la perpendiculaire DF une ligne DR, qui ſoit à DF comme la force uniforme eſt à la force variable en D, & en coupant l'aire $ABFD$ égale au rectangle $PDRQ$. Car puiſque l'aire $ABFD$ eſt à l'aire $DFGE$ comme V^2 à $2VI$, ou comme $\frac{1}{2}V$ à I, c'eſt-à-dire, comme la moitié de la vîteſſe totale produite par la force variable eſt à l'incrément de cette vîteſſe, & que de même l'aire $PQRD$ eſt à l'aire $DRSE$, comme la moitié de la vîteſſe totale produite par la force uniforme eſt à l'incrément de cette vîteſſe ; que de plus ces incrémens, à cauſe de l'égalité des temps naiſſans, ſont comme les forces génératrices, c'eſt-à-dire, comme les ordonnées DF, DR, ou, ce qui revient au même, comme les aires naiſſantes $DFGE$, $DRSE$; il s'enſuit que les aires totales $ABFD$, $PQRD$ ſeront l'une à l'autre comme les moitiés des vîteſſes totales, & que par conſéquent elles ſeront égales, ainſi que ces vîteſſes.

Cor. 2. Ainſi, ſi d'un lieu quelconque D, on jette un corps en en haut ou en en bas avec une vîteſſe donnée, & que la loi de la force centripete ſoit connue, on trouvera ſa vîteſſe dans un autre lieu quelconque e en élevant l'ordonnée eg, & prenant cette vîteſſe à la vîteſſe dans le lieu D, comme la racine du

Du mouvement des Corps.

rectangle $PQRD$ augmenté de l'aire curviligne $DFge$, ſi le lieu e eſt plus bas que le lieu D, ou diminué de cette aire, s'il eſt plus haut, à la racine du rectangle $PQRD$.

Fig. 97.

Cor. 3. On connoîtra auſſi le temps en élevant l'ordonnée em réciproquement proportionnelle à la racine quarrée de $PQRD \pm DFge$, & prenant le temps pendant lequel le corps décrit la ligne De, au temps que l'autre corps pouſſé par une force uniforme a employé à tomber de P en D, comme l'aire curviligne $DLme$ eſt au rectangle $2PD \times DL$. Car le temps pendant lequel le corps, pouſſé par une force uniforme, a décrit la ligne PD eſt au temps pendant lequel ce même corps a décrit la ligne PE en raiſon ſousdoublée de PD à PE, c'eſt-à-dire, (lorſque la petite ligne DE eſt naiſſante,) en raiſon de PD à $PD + \frac{1}{2}DE$ ou de $2PD$ à $2PD + DE$; d'où il ſuit que ce temps par PD eſt au temps par DE, comme $2PD$ à DE, ou, ce qui revient au même, comme le rectangle $2PD \times DL$ eſt à l'aire $DLME$, mais le temps par DE, ſoit que cette droite ait été parcourue en vertu de la force conſtante ou de la force variable, eſt au temps par De, parcourue en vertu de la force variable, comme l'aire $DLME$ eſt à l'aire $DLme$. Donc le temps par PD eſt au temps par De, comme $2PD \times DL$ à l'aire $DLme$.

HUITIÉME SECTION.

De la détermination des orbes que décrivent des corps ſollicités par des forces centripetes quelconques.

PROPOSITION XL. THÉORÉME XIII.

Fig. 98.

Si deux corps, dont l'un eſt ſollicité par une force centripete quelconque, tandis que l'autre monte ou deſcend dans une ligne droite par la même force, ont la même vîteſſe à une même diſtance quelconque du centre, ces corps auront la même vîteſſe à toutes les autres diſtances.

Suppoſant qu'un corps tombe le long de la ligne AC vers le centre C, & qu'un autre corps ſe meuve dans la courbe $VIKk$

en partant du lieu V. Soient décrits du centre C, & d'intervalles quelconques CD, CE différens très peu l'un de l'autre, les cercles concentriques DI, EK qui rencontrent la droite AC en D & E, & la courbe VIK en I & K. Soit de plus abbaiſſée du point N où la droite IC rencontre KE la perpendiculaire NT ſur IK. Soit enfin imaginé que les vîteſſes aux points D & I ſont égales, comme aux diſtances égales CD, CI, les forces centripetes ſeront égales. Repréſentons ces forces par les petites lignes égales DE, IN; ſi une de ces forces IN eſt décompoſée, par le Corol. 2. des loix, en deux autres NT & IT, la force NT agiſſant ſelon la ligne NT perpendiculaire à la direction ITK du corps, elle ne changera rien à la vîteſſe du corps dans cette direction, & ſera toute employée à le retirer de la ligne droite; mais l'autre force IT agiſſant ſuivant la direction même du corps, elle ſera toute employée à accélérer ſon mouvement, & dans un très petit temps donné elle produira une accélération qui ſera proportionnelle à elle-même. Donc les accélérations que les corps reçoivent en D & en I, dans des temps égaux, (ſi on prend les premieres raiſons des lignes naiſſantes DE, IN, IK, IT, NT) ſeront comme les lignes DE, IT: & dans des temps inégaux, elles ſeront comme ces lignes & les temps conjointement; mais les temps dans leſquels DE & IK ſont parcourues, ſont, à cauſe de l'égalité des vîteſſes, comme ces lignes DE & IK, donc les accélérations des corps, ſuivant les lignes DE & IK, ſont en raiſon compoſée de DE à IT, & de DE à IK; c'eſt-à-dire, comme DE^2 à $IT \times IK$, ou, ce qui revient au même, en raiſon d'égalité, à cauſe que $IT \times IK = IN^2 = DE^2$. Si donc les accélérations des corps dans leur paſſage de D & I à E & K ſont égales, les vîteſſes des corps en E & en K ſeront auſſi égales, ainſi que dans tous les autres points ſuivans, pris à même diſtance du centre. *C. Q. F. D.*

Fig. 98.

Et par le même raiſonnement, les corps qui ont des vîteſſes égales à égale diſtance du centre, ſont également retardés en montant à des hauteurs égales. *C. Q. F. D.*

DU MOUVEMENT DES CORPS.

Cor. 1. Si un corps ſuſpendu par un fil oſcille, ou qu'il ſoit forcé de ſe mouvoir dans une ligne courbe par quelque obſtacle parfaitement poli, & qu'un autre corps monte ou deſcende ſuivant une ligne droite, il eſt clair qu'il ſuffira que leurs vîteſſes ſoient égales à une même hauteur quelconque, pour être égales à toutes les autres hauteurs égales. Car le fil, ou l'obſtacle parfaitement poli, fait le même effet ſur le corps que la force tranſverſale NT, donc il ne le retarde ni ne l'accélére; mais il le force ſeulement de s'écarter de la ligne droite.

Fig. 98.

Cor. 2. Ainſi, ſi la quantité P repréſente la plus grande diſtance du centre à laquelle le corps puiſſe monter, ou en oſcillant, ou en décrivant une trajectoire, en étant jetté en en haut d'un point quelconque de la trajectoire avec la vîteſſe qu'il a dans ce point; que de plus, A exprime la diſtance du corps au centre dans un autre point quelconque de la ligne parcourue, & que la force centripete ſoit toujours comme une puiſſance quelconque de A telle que A^{n-1}, la vîteſſe du corps à cette hauteur quelconque A ſera comme $\sqrt{P^2 A^n}$, & elle ſera par conſéquent donnée. La démonſtration en eſt claire par la Prop. 39.

PROPOSITION XLI. PROBLÉME XXVIII.

La force centripete étant donnée, & la quadrature des courbes étant ſuppoſée, on demande les trajectoires des corps, & les temps de leurs mouvemens dans ces trajectoires.

Fig. 99.

C étant le centre des forces, & $VIKk$ la trajectoire cherchée dans laquelle on ſuppoſe que le corps va de V vers K, ſoit décrit du centre C, & d'un intervalle quelconque CV, le cercle VR, ſoient décrits enſuite du même centre & d'intervalles quelconques très peu différens l'un de l'autre les cercles ID, KE qui coupent la trajectoire en I & en K, & la droite CV en D & en E. Soient de plus tirés les rayons CNI, CK qui prolongés rencontrent le cercle VR en X & en Y. Cela fait, ſi A eſt le lieu d'où un autre corps auroit dû tomber pour avoir en D la même vîteſſe

que celui qui décrit la trajectoire a en I, & que l'on conſerve la conſtruction de la Prop. 39. il eſt clair que la petite ligne IK, décrite dans un très petit intervalle de temps & proportionnelle à la vîteſſe, ſera comme la racine quarrée de l'aire $ABFD$. Fig. 99. De plus, le triangle ICK proportionnel au temps ſera donné, & par conſéquent KN ſera réciproquement comme la hauteur IC, c'eſt-à-dire, (Q repréſentant une quantité donnée, & A la hauteur IC) comme $\frac{Q}{A}$: appellons Z cette quantité $\frac{Q}{A}$, & ſuppoſons que la quantité Q ſoit telle, que l'on ait en quelque cas, $\sqrt{ABFD} : Z :: IK : KN$, on aura dans tous les autres cas, $\sqrt{ABFD} : Z :: IK : KN$ qui donne $ABFD : Z^2 :: IK^2 : KN^2$, & par conſéquent $ABFD - Z^2 : Z^2 :: IN^2 : NK^2$. d'où l'on tire $\sqrt{ABFD - Z^2} : Z$ ou $\frac{Q}{A} :: IN : KN$, ou $A \times KN = \frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD - Z^2}}$. Or, puiſque $YX \times XC : A \times KN :: CX^2 : A^2$ on aura $XY \times XC = \frac{Q \times IN \times CX^2}{A^2\sqrt{ABFD - Z^2}}$.

Si on prend donc ſur DF, les droites Db, Dc reſpectivement égales à $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - Z^2}}$, & à $\frac{Q \times CX^2}{2A^2\sqrt{ABFD - Z^2}}$; que l'on décrive les courbes ab, ac, qui paſſent par tous les points b & c; & que l'on mene Va perpendiculaire ſur CA, qui coupe les aires curvilignes $VDba$, $VDca$, & qu'on tire les ordonnées $E\zeta$, Ex, il eſt évident, que puiſque le rectangle $Db \times IN$ ou $Db\zeta E$ eſt égal à la moitié du rectangle $A \times KN$ ou au triangle ICK; & que le rectangle $Dc \times IN$ ou $Dcx E$ eſt égal à la moitié du rectangle $YX \times XC$ ou au triangle XCY; c'eſt-à-dire, puiſque les particules naiſſantes $Db\zeta E$, ICK des aires $VDba$, VIC ſont toujours égales, & que les particules naiſſantes $Dcx E$, XCY des aires $VDca$, VCX ſont auſſi toujours égales, l'aire produite $VDba$ ſera égale à l'aire produite

Du mouvement des Corps.

VIC; c'eſt-à-dire, proportionnelle au temps, & l'aire produite $VDca$ ſera égale au ſecteur produit VCX.

Fig. 99. Ayant donc le temps écoulé depuis le départ du lieu V, on aura l'aire $VDba$ qui lui eſt proportionnelle, & par conſéquent la hauteur CD ou CI; & ayant par ce moyen l'aire $VDca$, le ſecteur VCX qui lui eſt égal donnera l'angle VCI. Or, dès que l'on connoît l'angle VCI & la hauteur CI, on a le lieu I dans lequel le corps ſe trouve à la fin de ce temps. *C. Q. F. T.*

Cor. 1. On peut trouver par-là très aiſément les plus grandes & les moindres diſtances au centre; c'eſt-à-dire, les apſides des trajectoires. Car ces apſides ſont aux points ſur leſquels la droite IC, menée par le centre, tombe perpendiculairement dans la trajectoire VIK, ce qui arrive lorſque les droites IK, NK ſont égales, & par conſéquent lorſque l'aire $ABFD = Z^2$.

Cor. 2. Quant à l'angle KIN, ſous lequel la trajectoire coupe en un lieu quelconque le rayon IC, il peut ſe trouver facilement par le moyen de la hauteur IC, en prenant ſon ſinus au rayon comme KN eſt à IK, c'eſt-à-dire, comme Z eſt à la racine quarrée de l'aire $ABFD$.

Fig. 100. & 101. *Cor.* 3. VRS étant une ſection conique quelconque, ayant C pour centre & V pour ſommet, ſi d'un de ſes points R pris à volonté on tire la tangente TR & le rayon CR, que l'on faſſe l'angle VCP proportionnel au ſecteur VCR, & le rayon $CP = CT$, la courbe VPQ, que l'on aura par ce moyen, ſera celle qu'un corps parti de V perpendiculairement à VC, & avec une vîteſſe convenable, décriroit dans l'hypothèſe d'une peſanteur réciproquement proportionnelle au cube de la diſtance au centre C.

Si la ſection conique VRS eſt une hyperbole, le corps parti de V ira en deſcendant, & arrivera au centre. Si au contraire elle eſt une ellipſe, le corps ira en montant juſqu'à l'infini.

Lorſqu'on aura une des trajectoires VPQ décrites dans cette hypothèſe de peſanteur, on aura celle qu'on voudra des autres trajectoires en augmentant ou diminuant l'angle VCP dans une raiſon

raiſon conſtante, aiſée à déterminer par la vîteſſe connue au point V; mais il faut pour cela que dans la trajectoire donnée, le corps deſcende en partant de V, s'il doit deſcendre dans la ſeconde en partant du même point, & au contraire.

Si on ſuppoſe que la force tendante en C, & toujours en raiſon réciproque du cube de la diſtance, ſoit centrifuge au lieu d'être centripete, quelque ſoit la vîteſſe du corps en partant de V, il s'éloignera toujours de plus en plus du centre, & l'orbite qu'il décrira ſe conſtruira encore en prenant les angles VCP proportionnels aux ſecteurs elliptiques, & faiſant $CP = CT$. Tout cela ſuit de la propoſition précédente. Fig. 100. & 101.

PROPOSITION XLII. PROBLÉME XXIX.

La loi de la force centripete étant donnée, on demande le mouvement d'un corps qui part d'un lieu donné avec une vîteſſe donnée, & ſuivant une ligne droite donnée.

Tout étant ſuppoſé comme dans les trois Propoſitions précédentes; que le corps parte du lieu I en allant vers K ſuivant la petite ligne IK avec la même vîteſſe qu'un autre corps peut acquerir au lieu D, en tombant du lieu P par une force centripéte uniforme, & que cette force uniforme ſoit à la force variable qui agit en I ſur le premier corps comme DR eſt à DF; il eſt clair que le rectangle $PDRQ$ étant donné, ainſi que la loi de la force centripete qui agit dans la trajectoire cherchée, la courbe BFg ſera donnée par la conſtruction du Probléme 27 & ſon Corol. 1. De plus, par l'angle donné CIK on a la proportion des quantités naiſſantes IK, KN; ce qui, par la conſtruction du Probléme 28, donne la quantité Q, & par conſéquent les courbes abv, acw: donc, pour un temps quelconque $Dbve$, on aura la hauteur Ce ou ſon égale Ck, l'aire $Dcwe$, le ſecteur XCy qui lui eſt égal, & l'angle ICk; c'eſt-à-dire, qu'on aura le lieu k dans lequel le corps ſera alors. *C. Q. F. T.* Fig. 102.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

Après avoir traité juſqu'ici du mouvement des corps dans des orbes immobiles, nous allons éxaminer leurs mouvemens dans des orbes qui tournent autour du centre des forces.

NEUVIÉME SECTION.

Du mouvement des corps dans des orbes mobiles, & du mouvement des apſides.

PROPOSITION XLIII. PROBLÉME XXX.

On demande quelle eſt la force qui pourroit faire décrire à un corps une trajectoire mobile autour du centre de cette force, en ſuppoſant que cette trajectoire mobile ſoit parcourue dans le même temps, & ſuivant les mêmes loix que ſi elle étoit immobile.

Fig. 103. Suppoſant que le corps P faſſe ſa révolution dans l'orbe VPK donné de poſition en avançant de V vers K, ſoient tirées du centre C les lignes Cp égales à CP, & qui faſſent les angles VCp proportionnels aux angles VCP; l'aire que la ligne Cp décrit ſera à l'aire VCP que la ligne CP décrit en même temps, comme la vîteſſe de la ligne décrivante Cp à la vîteſſe de la ligne décrivante CP; c'eſt-à-dire, comme l'angle VCp à l'angle VCP, & par conſéquent en raiſon donnée. Cette aire ſera donc proportionnelle au temps.

Par ce qui précéde, il eſt clair que l'aire proportionnelle au temps, décrite par la ligne Cp dans un plan immobile, indique que le corps p eſt preſſé par quelque force centripete. Il n'eſt donc plus queſtion que de trouver quelle eſt cette loi de force centripete, & l'on aura réſolu le Probléme.

Pour y parvenir, il n'y a qu'à trouver la courbe des points que le corps p décrit dans l'eſpace abſolu, & chercher par le Cor. 5. de la Propoſition 6. la force centripete dans cette courbe. *C. Q. F. F.*

PROPOSITION XLIV. THÉORÈME XIV.

La différence des forces par leſquelles deux corps peuvent avoir le même mouvement, l'un dans une orbite en repos, & l'autre dans la même orbite révolvante, eſt en raiſon triplée inverſe de leur commune hauteur.

Que les parties up, pk de l'orbite révolvante ſoient égales aux parties VP, PK de l'orbite en repos, l'intervalle PK étant ſuppoſé très petit. De plus, que kr abbaiſſée perpendiculairement ſur Cp ſoit prolongée juſqu'en m; enſorte que mr ſoit à kr comme l'angle VCp à l'angle VCP. Fig. 104.

Puiſque les hauteurs PC & pC, KC & kC des corps révolvans ſont toujours égales, il eſt clair que les incrémens ou les décrémens des lignes PC & pC ſeront toujours égaux. Ainſi, ſi les mouvemens de chacun de ces corps dans les lieux P & p ſont décompoſés (par le Cor. 2. des loix) en deux mouvemens, dont les uns ſoient dirigés vers le centre, ou ſuivant les lignes PC, pC, & les autres ſoient tranſverſaux aux premiers; c'eſt-à-dire, dirigés ſuivant des lignes perpendiculaires à ces lignes PC, pC; les mouvemens vers le centre ſeront égaux, & le mouvement tranſverſal du corps p ſera au mouvement tranſverſal de l'autre corps P comme le mouvement angulaire de la ligne pC au mouvement angulaire de la ligne PC; c'eſt-à-dire, comme l'angle VCp à l'angle VCP. Donc, dans le même temps dans lequel le corps P parvient par ces deux mouvemens au point K, le corps p étant mû d'un mouvement égal vers le centre ſera porté également de p vers C, & ſera par conſéquent au bout de ce temps quelque part dans la ligne mkr; & par ſon mouvement tranſverſal il ſera arrivé à une diſtance de la ligne pC, qui ſera à la diſtance de la ligne PC à laquelle l'autre corps P ſera arrivé comme le mouvement tranſverſal du corps p au mouvement tranſverſal de l'autre corps P. Ainſi comme la ligne kr eſt égale à la diſtance de la ligne PC à laquelle le corps P

DU MOUVEMENT DES CORPS.

eſt arrivé, ſi mr eſt à kr comme l'angle VCp à l'angle VCP; c'eſt-à-dire, comme le mouvement tranſverſal du corps p au mouvement tranſverſal de l'autre corps P, il eſt clair que le corps p au bout de ce temps ſera en m.

Fig. 104.

C'eſt-là ce qui arrivera quand les corps p & P ſe mouveront également dans les lignes pC & PC, & que par conſéquent ils ſeront pouſſés dans ces directions par des forces égales.

Mais comme il arrive que le corps p ſe trouve au bout de ce temps au point n déterminé en prenant $Cn = Ck$, & en telle ſorte que l'angle pCn ſoit à l'angle pCk comme l'angle VCp à l'angle VCP. Il faut donc qu'il ſoit pouſſé par une force plus grande que celle qui pouſſe le corps P, ſi l'angle nCp eſt plus grand que l'angle KCp; c'eſt-à-dire, ſi l'orbite upk ſe meut en conſéquence ou en antécédence, avec une vîteſſe plus grande que le double de celle avec laquelle la ligne CP ſe meut en conſéquence; & qu'il ſoit pouſſé au contraire par une force moindre, ſi l'orbite ſe meut plus lentement en antécédence. De plus, la différence des forces des corps P & p ſera comme l'intervalle mn.

Que du centre C & de l'intervalle Cn ou Ck on décrive un cercle qui coupe les lignes mr, mn prolongées en s & en t, le rectangle $mn \times mt$ ſera égal au rectangle $mk \times ms$, donc $mn = \frac{mk \times ms}{mt}$. Or comme les eſpaces pCk, pCn ſont donnés de grandeur dans un temps donné, la première raiſon des lignes kr & mr, de leur différence mk, & de leur ſomme ms dans leur naiſſance ſera la raiſon ſimple inverſe de pC. Donc, celle du rectangle $mk \times ms$ ſera la doublée de cette raiſon; mais mt eſt directement comme $\frac{1}{2}mt$; c'eſt-à-dire, comme la hauteur pC. Donc $\frac{mk \times ms}{mt}$, c'eſt-à-dire, la petite ligne naiſſante mn, & la différence des forces, qui lui eſt proportionnelle, ſont réciproquement comme le cube de la hauteur pC. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Il ſuit delà que la différence des forces dans les lieux

P & p, ou K & k eſt à la force par laquelle le corps peut faire ſa révolution par un mouvement circulaire de R vers K, dans le même temps dans lequel le corps P décrit dans un orbe immobile l'arc PK, comme la petite ligne naiſſante mn eſt au ſinus verſe de l'arc naiſſant RK; c'eſt-à-dire, comme $\frac{mk \times ms}{mt}$ eſt à $\frac{rk^2}{2kC}$, ou comme $mk \times ms$ eſt à rk^2; c'eſt-à-dire, ſi on prend les quantités données F & G dans la même raiſon entre elles que l'angle VCP & l'angle VCp ont entre eux, comme $GG-FF$ à FF. Donc ſi du centre C, & d'un intervalle quelconque CP ou Cp, on décrit un ſecteur circulaire égal à l'aire totale VPC que le corps P décrit autour du centre en faiſant ſa révolution dans un orbe immobile pendant un temps quelconque: la différence des forces par leſquelles le corps P & le corps p font leurs révolutions, le premier dans un orbe immobile, & le dernier dans un orbe mobile, ſera à la force centripete, par laquelle un corps pourroit décrire uniformément ce ſecteur autour du centre dans le même temps dans lequel l'aire VPC ſeroit décrite uniformément, comme $GG-FF$ à FF. Car ce ſecteur & l'aire pCk ſont l'un à l'autre, comme les temps pendant leſquels ils ſont décrits.

Fig. 104.

Fig. 104.

Cor. 2. Si l'orbe VPK eſt une ellipſe dont le foyer ſoit C & l'apſide la plus haute V; que l'ellipſe upk lui ſoit ſemblable & égale, en ſorte qu'on ait toujours $pC=PC$, que l'angle VCp ſoit à l'angle VCP dans la raiſon donnée de G à F; & qu'enfin, au lieu de la hauteur PC ou pC, on écrive A & $2R$ pour le parametre de l'ellipſe, la force par laquelle le corps pourra faire ſa révolution dans une ellipſe mobile ſera comme $\frac{FF}{AA}+\frac{RGG-RFF}{A^3}$, & réciproquement. Car ſuppoſé que la force par laquelle le corps fait ſa révolution dans une ellipſe immobile, ſoit exprimée par la quantité $\frac{FF}{AA}$, la force en V ſera $\frac{FF}{CV^2}$; mais la force, par

Du mouvement des Corps.

laquelle le corps peut faire ſa révolution dans un cercle à la diſtance CV avec la même vîteſſe que le corps qui décrit une ellipſe a au point V, eſt à la force par laquelle le corps révolvant dans une ellipſe eſt preſſé à ſon apſide V comme la moitié du parametre de l'ellipſe au demi diametre CV du cercle; donc

Fig. 104. ſa valeur eſt $\frac{RFF}{CV^3}$. De plus, la force qui eſt à celle-là comme $GG-FF$ à FF a pour valeur $\frac{RGG-RFF}{CV^3}$: & cette force (par le Corol. 1.) eſt la différence au point V des forces par leſquelles, le corps P dans une ellipſe immobile VPK, & le corps p dans une ellipſe mobile upk, font leur révolution. Donc, comme on vient de voir que cette différence à une hauteur quelconque A eſt à ce qu'elle devient à la hauteur CV, comme $\frac{1}{A^3}$ à $\frac{1}{CV^3}$, il s'enſuit que cette même différence à la hauteur quelconque A ſera $\frac{RGG-RFF}{A^3}$, & par conſéquent, ſi on ajoute à la force $\frac{FF}{AA}$, par laquelle le corps peut faire ſa révolution dans une ellipſe immobile VPK, l'excès $\frac{RGG-RFF}{A^3}$, on aura la force totale $\frac{FF}{AA}+\frac{RGG-RFF}{A^3}$ par laquelle le corps peut faire ſa révolution dans une ellipſe mobile upk dans le même temps.

Fig. 104. *Cor.* 3. On conclura de la même maniere que ſi l'orbe VPK eſt une ellipſe dont le centre ſoit le centre C des forces, $2R$ le parametre principal, $2T$ le parametre tranſverſal ou le grand axe, la force dans cette ellipſe, ſuppoſée immobile, ſera à la force dans la même ellipſe, ſuppoſée mobile, comme $\frac{FFA}{T^3}$ à $\frac{FFA}{T^3}+\frac{RGG-RFF}{A^3}$.

Cor. 4. Et généralement, ſi T exprime la plus grande hauteur

CV du corps, R le rayon de la courbure de l'orbe VPK en V, c'eſt-à-dire le rayon du cercle oſculateur dans ce point, $\frac{VFF}{T^2}$ Fig. 104. ce qu'eſt en V la force centripete par laquelle le corps peut faire ſa révolution dans une trajectoire quelconque immobile VPK, & X ce qu'elle eſt dans un autre lieu quelconque P, A la hauteur CP, & que le rapport de G à F exprime toujours la raiſon donnée de l'angle VCp à l'angle VCP; la force centripete, par laquelle le même corps pourra achever les mêmes mouvemens dans le même temps dans la même trajectoire upk muë circulairement, ſera comme la ſomme des forces $X+\frac{VRGG-VRFF}{A^3}$.

Cor. 5. Le mouvement d'un corps dans une orbite quelconque immobile étant donné, on peut augmenter ou diminuer ſon mouvement angulaire autour du centre des forces en raiſon donnée, & trouver les nouveaux orbes immobiles que ce mouvement produit, & les forces des corps qui y circulent.

Cor. 6. VP étant une droite indéfinie perpendiculaire à VC, ſi Fig. 105. on mene les droites CP, & qu'on les tranſporte enſuite en Cp, en faiſant l'angle VCp à l'angle VCP en raiſon donnée, la force par laquelle le corps peut tourner dans la courbe Vpk, qui eſt le lieu de tous les points p, ſera réciproquement comme le cube de la hauteur Cp. Car le corps P, par ſa ſeule force d'inertie, peut s'avancer uniformément dans la droite VP, & en ajoutant la force qui tend vers le centre C, laquelle eſt réciproquement proportionnelle au cube de la hauteur CP ou Cp, le mouvement rectiligne de ce corps deviendra (par ce qui a été ci-devant démontré) le mouvement curviligne Vpk.

Il eſt à remarquer que cette courbe Vpk eſt la même que la courbe VPQ trouvée dans le Cor. 3. de la Prop. 41. où l'on a vu en effet que la force centripete étoit en raiſon renverſée du cube de la diſtance.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

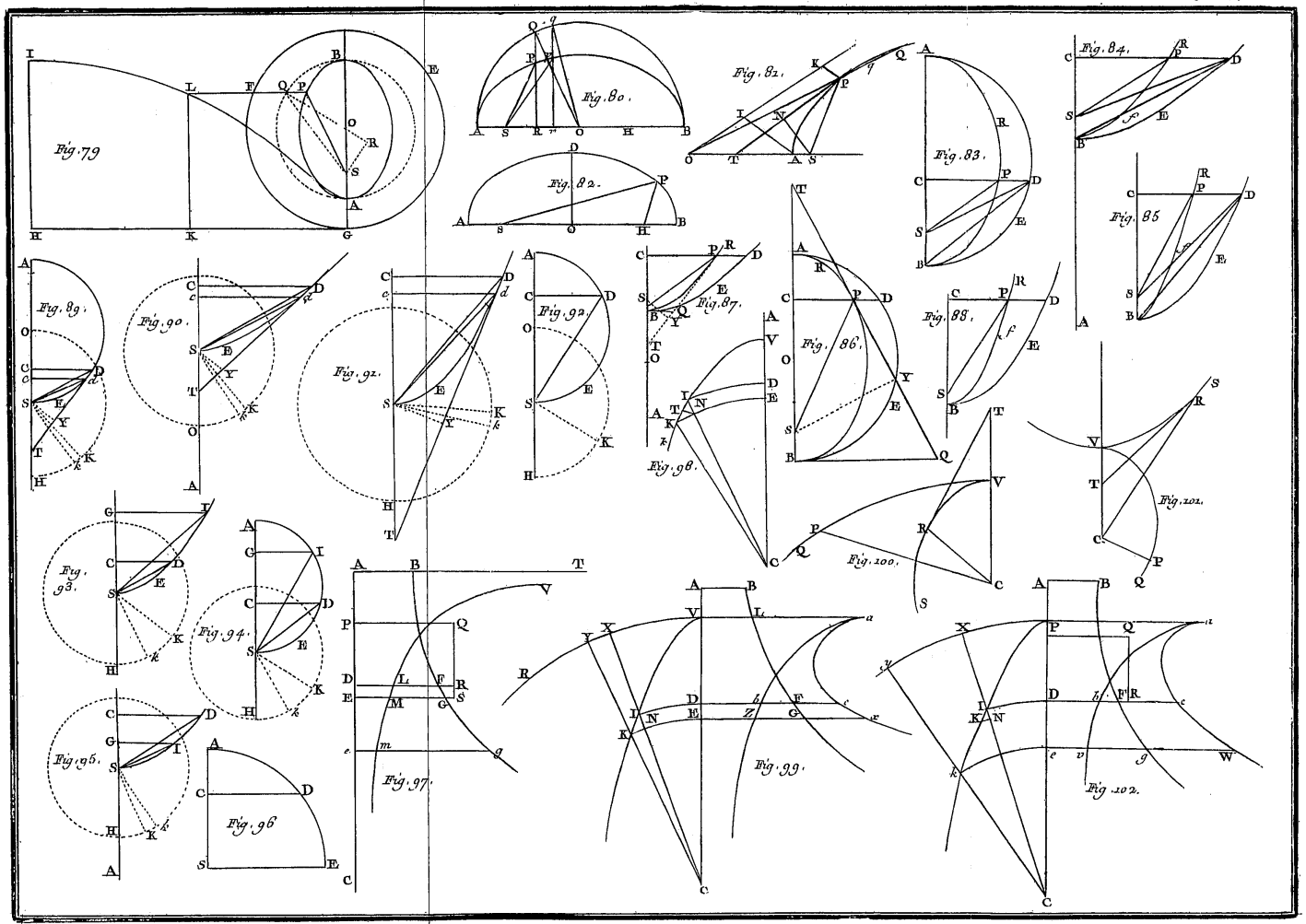
PROPOSITION XLV. PROBLÉME XXXI.

On demande le mouvement des apſides dans des orbes qui approchent beaucoup des orbes circulaires.

On réſout ce Probléme arithmétiquement en faiſant enſorte qne l'orbite que décrit dans un plan immobile le corps qui circule dans une ellipſe mobile (comme dans le Cor. 2. ou 3. de la Propoſition précédente) approche de la forme de l'orbite dont on cherche les apſides, & en cherchant les apſides de l'orbite décrite ainſi dans ce plan immobile. Or, pour parvenir à donner aux orbites la même forme, il faut faire enſorte que les forces centripetes qui les font décrire, étant comparées entr'elles, ſoient proportionnelles à des hauteurs égales.

Fig. 104. Soit le point V la plus haute apſide, écrivant T au lieu de la plus grande hauteur CV, A à la place d'une autre hauteur quelconque CP ou cp, & X pour la différence $CV-CP$ de ces hauteurs, la force par laquelle le corps eſt mû dans une ellipſe révolvante (comme dans le Cor. 2.) autour de ſon foyer C, laquelle force étoit (dans le Cor. 2.) proportionnelle à $\frac{FF}{AA}+\frac{RGG-RFF}{A^3}$; c'eſt-à-dire $\frac{FFA+RGG-RFF}{A^3}$ deviendra, en mettant $T-X$ au lieu de A, proportionnelle à $\frac{RGG-RFF+TFF-FFX}{A^3}$. Il faudra réduire de même toute autre force centripete quelconque à une fraction dont le dénominateur ſoit A^3, & dont les numérateurs ſoient déterminés par la comparaiſon des termes de même eſpéce. Ceci s'éclaircira par des éxemples.

Exemple 1. Suppoſons que la force centripete ſoit uniforme, & que par conſéquent elle ſoit proportionnelle à $\frac{A^3}{A^3}$ ou bien (en écrivant au numérateur $T-X$ au lieu de A) proportionnelle à $\frac{T^3-3TTX+3TXX-X^3}{A^3}$; & en comparant les termes correſpondans


Fig. 79
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.
Fig. 94.
Fig. 95.
Fig. 96
Fig. 97.
Fig. 98.
Fig. 99.
Fig. 100.
Fig. 101.
Fig. 102.

reſpondans des numérateurs, c'eſt-à-dire les donnés avec les donnés, & les non donnés avec les non donnés, on aura $RGG - RFF + TFF : T^3 :: - FFX : - 3TTX + 3TXX - X^3$ ou $:: - FF : - 3TT + 3TX - X^2$, qui (dans le cas où l'orbe approchera tellement du cercle qu'elle ſe confondra avec lui, ce qui rend T égal à R & fait évanouir X) deviendra $RGG : T^3 :: - FF : - 3T^2$, qui donne $GG : TT :: F^2 : 3T^2$, & réciproquement, $GG : FF :: T^2 : 3T^2$, c'eſt-à-dire $:: 1 : 3$; donc G ſera à F, c'eſt-à-dire l'angle VCp à l'angle VCP, comme 1 à $\sqrt{3}$. Donc, lorſque le corps dans une ellipſe immobile fera en deſcendant de la plus haute apſide à la plus baſſe l'angle VCP de 180 degrés, ſi on peut s'exprimer ainſi, un autre corps dans une ellipſe mobile, & par conſéquent dans l'orbite immobile dont nous traitons ici, fera en deſcendant de l'apſide la plus haute à la plus baſſe l'angle VCp de $\frac{180^\circ}{\sqrt{3}}$; ce qui eſt fondé ſur la ſimilitude de l'orbe que le corps décrit par une force centripete uniforme, & de celui que le corps décrit dans un plan immobile en faiſant ſes révolutions dans une ellipſe révolvante, ſimilitude qui n'a lieu cependant que lorſque les orbes ſont ſuppoſées fort approchantes des circulaires.

Le réſultat de cet éxemple eſt donc qu'un corps, qui ſe meut avec une force centripete uniforme dans une orbite qui approche fort du cercle, fera toujours entre la plus haute apſide & la plus baſſe un angle au centre de $\frac{180^\circ}{\sqrt{3}}$ ou de 103°. 55′ 23″. Il fera le même angle en allant de l'apſide la plus haute à la plus baſſe; & en retournant enſuite de la plus baſſe à la plus haute, & ainſi de ſuite à l'infini.

Exemple 2. Suppoſons que la force centripete ſoit comme une puiſſance quelconque de la hauteur A, telle que A^{n-3} ou $\frac{A^n}{A^3}$: $n-3$ & n repréſentant des expoſans quelconques entiers ou rompus, rationels ou irrationels, poſitifs ou négatifs, le numérateur A^n ou

$\overline{T-X}^n$ étant changé en une ſuite infinie par notre méthode des ſéries convergentes deviendra $T^n - nXT^{n-1} + \frac{nn-n}{2} X^2 T^{n-2}$ &c. dont les termes, étant comparés avec les termes de l'autre numérateur $RGG - RFF + TFF - FFX$, donnent $RGG - RFF + TFF : T^n :: -FF : -nT^{n-1} + \frac{nn-n}{2} XT^{n-2}$ &c. qui devient, dans la ſuppoſition que les orbes approchent infiniment d'être circulaires, $RGG : T^n :: -FF : -nT^{n-1}$, ou $G^2 : T^{n-1} :: F^2 : nT^{n-1}$ ou $G^2 : F^2 :: T^{n-1} : nT^{n-1}$, c'eſt-à-dire $:: 1 : n$; ainſi G eſt à F, ou, ce qui revient au même, l'angle VCp eſt à l'angle VCP comme 1 à $\sqrt{n}$. C'eſt pourquoi l'angle VCP, que le corps fait dans l'ellipſe en deſcendant de l'apſide la plus haute à la plus baſſe, étant de 180°, l'angle VCp, que le corps fait en deſcendant de l'apſide la plus haute à la plus baſſe dans une orbe preſque circulaire décrite par une force centripete proportionnelle à la puiſſance A^{n-3}, ſera de $\frac{180°}{\sqrt{n}}$; & par la répétition de cet angle, le corps remontera de l'apſide la plus baſſe à la plus haute, & ainſi de ſuite à l'infini.

Ainſi, ſi la force centripete eſt comme la diſtance au centre, c'eſt-à-dire, comme A ou $\frac{A^4}{A^3}$, on aura $n = 4$ & $\sqrt{n} = 2$; donc, l'angle entre l'apſide la plus haute & la plus baſſe ſera de $\frac{180°}{2}$ ou de 90°; c'eſt-à-dire, que le corps, après avoir fait le quart d'une révolution, parviendra à l'apſide la plus baſſe, & qu'après en avoir fait un autre quart, il parviendra à la plus haute, & ainſi de ſuite à l'infini, ce qui eſt évident par la Prop. 10. Car le corps étant preſſé par cette loi de force centripete fera ſa révolution dans une ellipſe immobile dont le centre ſera dans le centre des forces.

Si la force centripete eſt réciproquement comme la diſtance, c'eſt-à-dire directement comme $\frac{1}{A}$ ou comme $\frac{A^2}{A^3}$, on aura $n = 2$, & par conſéquent l'angle entre l'apſide la plus haute & la plus

baſſe ſera de $\frac{180^\circ}{\sqrt{2}}$ ou de $127^\circ\ 16'.\ 45''$. Ainſi lorſqu'un corps fera ſa révolution en vertu d'une telle force, il ira, par la répétition continuelle de ce même angle, alternativement de l'apſide la plus haute à la plus baſſe, & de la plus baſſe à la plus haute à l'infini.

Si la force centripete eſt réciproquement comme la racine quarrée de la onziéme puiſſance de la hauteur, c'eſt-à-dire réciproquement comme $A^{\frac{11}{4}}$, & par conſéquent en raiſon directe de $A^{\frac{1}{\frac{11}{4}}}$ ou de $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$ on aura $n=\frac{1}{4}$ & $\frac{180^\circ}{\sqrt{n}}=360^\circ$ & par conſéquent le corps employera une révolution entiere à aller de l'apſide la plus haute à l'apſide la plus baſſe : il mettra de même une ſeconde révolution à aller de cette plus baſſe à la plus haute, & ainſi de ſuite à l'infini.

Exemple 3. Prenant m & n pour les expoſans quelconques des puiſſances de la hauteur, & b, c pour des nombres donnés à volonté, ſuppoſons que la force centripete ſoit comme $\frac{bA^m+CA^n}{A^3}$; c'eſt-à-dire, comme $\frac{b\times\overline{T-X}^m+C\times\overline{T-X}^n}{A^3}$, ou (par notre même méthode des ſéries convergentes) comme $\frac{bT^m+cT^n-mbXT^{m-1}}{A^3}$ $\frac{-ncXT^{n-1}+\frac{mm-m}{2}bXXT^{m-2}+\frac{nn-n}{2}cXXT^{n-2}}{A^3}$, &c. & en comparant les termes des numérateurs on aura, $RGG-RFF+TFF : bT^m+cT^n :: -F^2 : -mbT^{m-1}-ncT^{n-1}+\frac{mm-m}{2}bXT^{m-2}+\frac{nn-n}{2}cXT^{n-2}$, &c. qui devient, dans la ſuppoſition que les orbites approchent infiniment d'être circulaires, $G^2 : bT^{m-1}+cT^{n-1} :: F^2 : mbT^{m-1}+ncT^{n-1}$, ou $G^2 : F^2 :: bT^{m-1}+cT^{n-1} : mbT^{m-1}+ncT^{n-1}$, ou (en exprimant arithmétiquement par l'unité la plus grande hauteur CV ou T) $G^2 : F^2 :: b+c : mb+nc$, d'où on tire G à F; c'eſt-à-dire, l'angle VCp à l'angle VCP, comme 1 à $\sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}$. L'angle VCP,

Du mouvement des Corps.

entre l'apſide la plus haute & la plus baſſe dans une ellipſe immobile, étant donc de 180°, l'angle VCp entre les mêmes apſides dans l'orbe que le corps décrit par une force centripete proportionnelle à la quantité $\frac{bA^m+cA^n}{A^3}$ ſera de $180°\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$. Par le même raiſonnement, ſi la force centripete eſt comme $\frac{bA^m-cA^n}{A^3}$, on trouvera l'angle entre les apſides de $180°\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$, & on réſoudra de même le Probléme dans les cas plus difficiles.

La quantité à laquelle la force centripete eſt proportionnelle doit toujours ſe changer en des ſéries convergentes dont le dénominateur ſoit A^3, enſuite il faut prendre la partie conſtante du numérateur qui vient de cette opération, dans la même raiſon à ſon autre partie qui eſt variable, que la partie donnée $RGG-RFF+TFF$ du numérateur $RGG-RFF+TFF-FFX$ eſt à la partie variable $-FFX$ du même numérateur. Négligeant alors dans la proportion les quantités qui peuvent l'être par la nature des orbes, & écrivant l'unité au lieu de T, on trouvera la proportion de G à F.

Cor. 1. Si la force centripete eſt comme quelque puiſſance de la hauteur, on peut trouver cette puiſſance par le mouvement des apſides, & réciproquement. Suppoſons, par éxemple, que tout le mouvement angulaire par lequel le corps retourne à la même apſide ſoit au mouvement angulaire d'une révolution, ou de 360° comme un nombre quelconque m, à un autre nombre n, & qu'on nomme la hauteur A: la force ſera comme la puiſſance $\frac{nn}{mm}-3$ de la hauteur A; ce qui eſt clair par le ſecond éxemple.

D'où l'on voit que cette force, en s'éloignant du centre, ne peut pas décroître dans une plus grande raiſon que la raiſon triplée de la hauteur. Un corps qui ſeroit pouſſé par une telle force, & qui commenceroit à deſcendre en partant de la plus haute

apſide n'auroit point de plus baſſe apſide ; mais deſcendroit ſans ceſſe juſqu'au centre en décrivant la courbe dont nous avons parlé dans le Cor. 3. de la Prop. 41. & ſi ſa direction, en quittant l'apſide, tendoit à le faire monter, il monteroit à l'infini ſans avoir de plus haute apſide. Décrivant alors la courbe dont on a parlé dans le même Corollaire & dans le Corol. 6. de la Prop. 44. lorſque la force en s'éloignant du centre décroît dans une plus grande raiſon que la raiſon triplée de la hauteur, le corps en partant de l'apſide, s'il commence à deſcendre ou à monter, deſcendra juſqu'au centre, ou montera à l'infini ; mais ſi la force, en s'éloignant du centre, décroît dans une raiſon moindre que la raiſon triplée de la hauteur, ou croît dans une raiſon quelconque de la hauteur, le corps ne deſcendra jamais juſqu'au centre ; mais il ira alternativement de l'apſide la plus haute à la plus baſſe : & réciproquement, ſi le corps monte & deſcend alternativement d'une apſide à l'autre ſans toucher jamais le centre, la force, en s'éloignant du centre, augmentera, ou bien elle décroîtra dans une raiſon moindre que la raiſon triplée de la hauteur : & plus le corps retournera vîte d'une apſide à l'autre, plus la raiſon des forces s'éloignera de cette raiſon triplée ; enſorte que ſi le corps en 8 ou 4 ou 2 ou $1\frac{1}{2}$ révolutions, part de la plus haute apſide, & y retourne par une aſcenſion & une deſcenſion alternative ; c'eſt-à-dire, ſi $m : n :: 8$ ou 4 ou 2 ou $1\frac{1}{2} : 1$, & que par conſéquent $\frac{nn}{mm} - 3$ ait pour valeur $\frac{1}{64} - 3$ ou $\frac{1}{16} - 3$ ou $\frac{1}{4}$ ou $\frac{4}{9} - 3$: la force ſera comme $A^{\frac{1}{64}-3}$ ou $A^{\frac{1}{16}-3}$ ou $A^{\frac{1}{4}-3}$ ou $A^{\frac{4}{9}-3}$; c'eſt-à-dire, réciproquement, comme $A^{3-\frac{1}{64}}$ ou $A^{3-\frac{1}{16}}$ ou $A^{3-\frac{1}{4}}$ ou $A^{3-\frac{4}{9}}$.

Si le corps à chaque révolution retournoit à la même apſide immobile, on auroit $m : n :: 1 : 1$, donc $A^{\frac{nn}{mm}-3} = A^{-2}$ ou $\frac{1}{AA}$; & par conſéquent les forces décroîtroient en raiſon doublée de la

hauteur, comme il a été démontré précédemment. Si le corps dans les trois quarts, ou les deux tiers, ou le tiers, ou le quart d'une révolution retourne à la même apſide, on aura $m : n :: \frac{3}{4}$ ou $\frac{2}{3}$ ou $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4} : 1$, donc $A^{\frac{nn}{mm}-3} = A^{\frac{16}{9}-3}$ ou $A^{\frac{9}{4}-3}$ ou A^{9-3} ou A^{16-3}; & par conſéquent la force ſera réciproquement comme $A^{\frac{11}{9}}$ ou $A^{\frac{3}{4}}$, ou directement comme A^{6} ou A^{13}. Enfin ſi le corps a fait une révolution entiére, & trois degrés de plus lorſqu'il revient à la plus haute apſide d'où il étoit parti, & que par conſéquent cette apſide faſſe à chaque révolution du corps trois degrés dans le même ſens que ce corps, on aura, $m : n :: 363° : 360°$ ou $:: 121 : 120$ qui donne $A^{\frac{nn}{mm}-3} = A^{\frac{29123}{14641}}$, & par conſéquent la force centripete ſera réciproquement comme $A^{\frac{29123}{14641}}$, ou réciproquement comme $A^{2\frac{4}{245}}$ à peu près. La force centripete décroît donc dans une raiſon un peu plus grande que la raiſon doublée, mais qui approche $59\frac{3}{4}$ fois plus près de cette raiſon que de la triplée.

Cor. 2 Ainſi, ſi le corps, par une force centripete qui ſoit réciproquement comme le quarré de la hauteur, fait ſa révolution dans une ellipſe qui ait ſon foyer dans le centre des forces, & qu'à cette force centripete on ôte ou on ajoute une force nouvelle quelconque; on peut connoître (par l'exemple 3) le mouvement des apſides cauſé par cette force nouvelle : & réciproquement.

Si, par éxemple, de la force $\frac{1}{AA}$ par laquelle le corps fait ſa révolution dans une ellipſe, on ôte une nouvelle force exprimée par cA, la force reſtante ſera alors comme $\frac{A - cA^4}{A^3}$, ce qui donnera (éxemple 3) $b = 1$, $m = 1$, & $n = 4$; & dans cette ſuppoſition l'angle de la révolution entre les apſides ſera de $180° \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$.

Suppoſé que cette nouvelle force ſoit de 357.45 parties, moin-

dre que la premiére par laquelle le corps fait ſa révolution dans une ellipſe; c'eſt-à-dire, que $c = \frac{100}{35745}$ lorſque A ou $T = 1$, ſa quantité $180\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ deviendra alors $180\sqrt{\frac{35645}{35345}}$, ou 180. 7623; c'eſt-à-dire, 180° 45′ 44″. Donc, dans cette hypothèſe, le corps parviendra de l'apſide la plus haute à la plus baſſe par un mouvement angulaire de 180° 45′ 44″ & par la répétition de ce mouvement il continuera à aller d'une apſide à l'autre, l'apſide la plus haute ayant pendant chaque révolution un mouvement angulaire de 1° 31′ 28″ en conſéquence, ce qui eſt à peu près la moitié du mouvement de l'apſide de la lune.

Nous avons traité juſqu'à préſent des mouvemens des corps dans des orbites dont les plans paſſent par le centre des forces: nous allons à préſent examiner leurs mouvemens dans des plans excentriques. Nous nous conformerons en cela aux Auteurs qui ont traité du mouvement des graves; ces auteurs ayant coutume de conſidérer l'aſcenſion & la deſcenſion des poids, par des plans quelconques donnés, tant obliques que perpendiculaires. Nous ſuppoſerons que les plans ſur leſquels ſont les corps pouſſés par des forces quelconques ſoient parfaitement polis; & même au lieu des plans ſur leſquels les corps s'appuyent, & qu'ils preſſent, nous ſuppoſerons ici d'autres plans qui leur ſoient paralleles, & dans leſquels les centres des corps ſe meuvent & décrivent les orbites par leur mouvement. Nous irons plus loin, nous déterminerons par la même loi les mouvemens des corps dans les ſuperficies courbes.

DIXIÉME SECTION.

Du mouvement des corps dans des ſuperficies données, & des oſcillations des corps ſuſpendus par des fils.

PROPOSITION XLVI. PROBLÉME XXXII.

Une loi quelconque de forces centripetes étant donnée, on demande, en ſuppoſant la quadrature des courbes, le mouvement d'un corps qui part d'un lieu donné, avec une vîteſſe donnée, & ſuivant une droite donnée ſur un plan quelconque qui ne paſſe pas par le centre des forces.

Fig. 106. Soit S le centre des forces, SC la plus petite diſtance de ce centre au plan donné, P un corps partant du lieu P ſuivant une droite PZ, Q le même corps qui ſe meut ſur le plan donné dans la trajectoire cherchée PQR. Cela poſé, ſi on tire CQ, QS, que ſur QS on prenne SV proportionnelle à la force centripete qui tire le corps vers le centre S, & qu'on mene VT parallele à CQ & qui rencontre SC en T : la force SV ſe décompoſera (Corol. 2. des loix) dans les forces ST, TV; deſquelles ST, tirant le corps ſuivant une ligne perpendiculaire au plan, ne change rien à ſon mouvement dans ce plan. Mais l'autre force TV agiſſant parallelement au plan, tire le corps directement vers le point C donné dans le plan, & l'oblige par conſéquent à ſe mouvoir dans ce plan de la même maniere que ſi la force ST n'éxiſtoit pas, & que le corps tournât autour du centre C dans une eſpace libre par la ſeule force TV. Or la force centripete TV, par laquelle le corps Q tourne autour du centre donné C, dans un eſpace libre, étant donnée, il eſt clair que la trajectoire PQR que le corps décrit, le lieu Q dans lequel il ſe trouve dans un temps quelconque donné, & ſa vîteſſe dans

dans ce lieu Q ſont auſſi donnés; par la Prop. 42. & réciproquement. *C. Q. F. T.*

PROPOSITION XLVII. THÉORÈME XV.

La force centripete étant ſuppoſée proportionnelle à la diſtance au centre, tous les corps qui font leurs révolutions dans des plans quelconques décriront des ellipſes, & les temps de leurs révolutions ſeront égaux; & les corps qui décriront des lignes droites dans cette hypothèſe oſcilleront alors, & employeront toujours le même temps dans ces oſcillations quelles qu'elles ſoient.

Car, les choſes reſtant comme dans la Prop. précédente, la force SV par laquelle le corps Q eſt tiré vers le centre S en faiſant ſa révolution dans le plan quelconque PQR, eſt comme la diſtance SQ; & par conſéquent à cauſe des proportionnelles SV & SQ, TV & CQ, la force TV, par laquelle le corps eſt tiré vers le point C donné dans le plan de l'orbe, eſt comme la diſtance CQ. Les forces qui tirent vers le point C les corps qui ſont dans le plan PQR ſont donc, eu égard aux diſtances, égales aux forces par leſquelles les corps ſont tirés de toutes parts vers le centre S; & par conſéquent ces corps employeront les mêmes temps à décrire les mêmes figures, ſoit dans le plan quelconque PQR autour du point C, ou dans des eſpaces libres autour du centre S; donc, par le Cor. 2. de la Prop. 10. & par le Cor. 2. de la Prop. 38, ils décriront des ellipſes dans ce plan autour du centre C, ou bien ils acheveront leurs périodes d'allée & de retour dans des lignes droites menées dans ce plan par le centre C, & cela dans des temps qui ſeront toujours égaux. *C. Q. F. D.* Fig. 106.

SCHOLIE.

La deſcenſion & l'aſcenſion des corps dans des ſuperficies courbes ſe peuvent traiter de la même maniere que les mouvemens dont on vient de parler. Imaginez qu'une ligne courbe décrite

DU MOUVEMENT DES CORPS.

dans un plan tourne autour d'une ligne droite de ce plan, & que par ce moyen elle forme une ſurface courbe : ſi un corps vient à ſe mouvoir de maniere que ſon centre ſoit toujours dans cette ſurface, & qu'en y oſcillant, il ſe trouve toujours dans un même plan, paſſant par l'axe de rotation, la courbe qu'il décrit alors ſera égale à celle dont la révolution a produit la ſurface ; & ainſi il ſuffira d'éxaminer les mouvemens qui peuvent être éxécutés dans cette courbe.

PROPOSITION XLVIII. THÉORÉME XVI.

Si on fait rouler un cercle ſur la convéxité d'une ſphere dans le plan d'un grand cercle de cette ſphere, l'arc de la cycloïde ou épicycloïde, décrit pendant ce mouvement, & compris entre le point de contact du cercle roulant dans ſa premiere poſition, & le point où eſt arrivé ce point de contact après un temps quelconque, a pour meſure une ligne qui eſt au double du ſinus verſe de la moitié de l'arc du cercle roulant dont tous les points ont été appliqués ſur la circonférence du grand cercle pendant le roulement, comme la ſomme des diamétres de la ſphere & du cercle eſt au demi diamétre de la ſphere.

PROPOSITION XLIX. THÉORÉME XVII.

Si on fait rouler un cercle dans la concavité d'une ſphere dans le plan d'un grand cercle de cette ſphere, l'arc de cycloïde ou d'épicycloïde, décrit pendant ce mouvement, & compris entre le point de contact du cercle roulant dans ſa premiere poſition, & le point où ce point de contact eſt arrivé après un temps quelconque, a pour meſure une ligne qui eſt au double du ſinus verſe de la moitié de l'arc du cercle roulant dont tous les points ont été appliqués ſur la circonférence du grand cercle pendant le roulement, comme la différence des diamétres de la ſphere & du cercle au demi diamétre de la ſphere.

Fig. 107. & 108. Soit *A B L* la ſphere, *C* ſon centre, *B P V* le cercle roulant, *E* le centre de ce cercle, *B* le point de contact, & *P* le point auquel le point du contact eſt arrivé après l'application ſucceſſive

de tous les points de l'arc BP ſur l'arc de grand cercle AP, il s'agit de prouver que l'arc de cycloïde AP, décrit pendant ce mouvement, a pour meſure une ligne qui eſt au double du ſinus verſe de l'arc $\frac{1}{2}BP$ comme $2CE$ à CB.

Du point V, où CE rencontre le cercle roulant, tirez au point P la droite VP & menez la tangente VH. Tirez enſuite de P les droites BP, PE, CP & la tangente PH. Abaiſſez de V ſur CP la perpendiculaire VF, & du point G où cette perpendiculaire rencontre PH, ainſi que du point H concours des tangentes PH, VH, menez GI & HK perpendiculaires à VP. Enfin du centre C & d'un intervalle quelconque Co, décrivez l'arc nom, & du centre V & de l'intervalle Vo, décrivez l'arc oq qui coupe en q la ligne VP prolongée. Cela fait, il eſt aiſé de remarquer que comme le cercle, en avançant, tourne toujours autour du point de contact B, la droite BP eſt perpendiculaire à la cycloïde AP, & par conſéquent que la droite VP touche cette courbe au point P; le rayon du cercle nom, étant augmenté ou diminué peu à-peu, égalera enfin la ligne CP; & parce que la figure évanouiſſante $Pnomq$ & la figure $PFGVI$ ſont ſemblables, la derniere raiſon des petites lignes évanouiſſantes Pm, Pn, Po, Pq, c'eſt-à-dire, la raiſon des changemens momentanés de la courbe AP, de la droite CP, de l'arc circulaire BP, & de la droite VP, ſera la même que celle des lignes PV, PF, PG, PI reſpectivement. Mais comme VF eſt perpendiculaire ſur CF, & VH ſur CV, & que par conſéquent les angles HVG, VCF ſont égaux; que de plus l'angle VHG (à cauſe des angles droits V & P du quadrilatere $HVEP$) eſt égal à l'angle CEP, les triangles VGH, CEP ſeront ſemblables; ce qui donnera $GH:HV$ ou HP & $KI:KP :: EP:CE$; d'où l'on tire $CB:EC :: PI:PK$, & par conſéquent $CB:2CE :: PI:PV$, $:: Pq:Pm$. Donc le décrément de la ligne VP, c'eſt-à-dire, l'incrément de la ligne $BV-VP$ eſt à l'incrément de la ligne courbe AP dans la raiſon donnée

Fig. 107. & 108.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

de CB à $2\,CE$, d'où il ſuit, par le Cor. du Lemme 4. que les longueurs entieres $BV-VP$ & AP ſont dans la même raiſon. Maintenant il eſt clair qu'en prenant BV pour rayon, VP eſt le coſinus de l'angle BVP ou $\frac{1}{2}BEP$, & $BV-VP$ le ſinus verſe du même angle : donc dans le cercle dont le rayon eſt $\frac{1}{2}BV$, $BV-VP$ ſera le double du ſinus verſe de l'arc $\frac{1}{2}BP$, donc AP eſt au double du ſinus verſe de l'arc $\frac{1}{2}BP$, comme $2\,CE$ à CB. C. Q. F. D.

Fig. 107. & 108.

Nous nommerons la ligne AP conſidérée dans la premiere Propoſition, *cycloïde extérieure*, & celle qui eſt conſidérée dans la derniere, nous la nommerons *cycloïde intérieure.*

Cor. 1. Si on décrit une cycloïde entiere ASL, & qu'on la coupe en deux parties égales en S, l'arc PS ſera à VP (double du ſinus de l'angle VBP pour le rayon EB) comme $2\,CE$ à CB, & par conſéquent en raiſon donnée.

Cor. 2. Et le demi périmetre de la cycloïde AS ſera égal à la ligne droite qui eſt au diamétre BV du cercle, comme $2\,CE$ à CB.

PROPOSITION L. PROBLÉME XXXIII.

Faire qu'un corps ſuſpendu par un fil oſcille dans une cycloïde donnée.

Fig. 109.

Etant donnée la cycloïde intérieure QRS coupée en deux moitiés au point R, & rencontrant par ſes deux extrémités Q & S la ſuperficie du globe QVS au dedans duquel elle a été décrite, ſoit tirée de R au centre C de ce globe la droite CR qui coupe en deux parties égales l'arc QS en O, & qui ſoit prolongée en A; enſorte que $CA : CO :: CO : CR$. Du centre C & de l'intervalle CA ſoit décrit enſuite un globe extérieur DAF, & par le moyen de ce globe & du cercle dont le diamétre eſt AO, ſoient tracées deux demi cycloïdes AQ, AS, leſquelles touchent le globe intérieur en Q & en S, & rencontrent le globe extérieur en A. Cela fait, ſi de ce point A, on ſuſpend le corps T par un fil APT dont la longueur ſoit égale à AR, & que l'on faſſe oſciller ce corps entre les demi cycloï-

des AQ, AS; enſorte que toutes les fois que le pendule s'éloignera de la perpendiculaire AR, la partie ſupérieure AP de ce fil ſoit appliquée à la demi cycloïde APS, tandis que le reſte PT de ce fil demeure étendu en ligne droite, la ligne décrite par le corps T, pendant ces oſcillations, ſera la cycloïde donnée QRS. C. Q. F. F. Fig. 109.

Car tirant du centre C au point V, où le fil rencontre le cercle QOS, le rayon CV, & élevant des extrémités P & T de la partie droite PT du fil les perpendiculaires PB, TW, qui rencontrent la droite CV en B & en W, il eſt clair, par la conſtruction & la formation des figures ſemblables AS, SR, que ces perpendiculaires PB, TW couperont ſur CV les intervalles VB, VW égaux aux diamétres OA, OR des cercles roulans de ces deux cycloïdes. Donc TP eſt à VP (double du ſinus de l'angle VBP pour le rayon $\frac{1}{2}BV$) comme BW à BV, ou comme $AO+OR$ à AO; c'eſt-à-dire, (à cauſe que CA eſt proportionnelle à CO, CO à CR, & AO à OR) comme $CA+CO$ à CA, ou bien encore, en coupant BV en deux parties égales au point E, comme $2CE$ à CB. De-là il ſuit, par le Corol. 1. de la Prop. 49. que la partie droite PT du fil eſt toujours égale à l'arc PS de la cycloïde, & que tout le fil APT eſt égal à l'arc APS moitié de la cycloïde, c'eſt-à-dire (Cor. 2. de la Prop. 49.) à la longueur AR, & réciproquement, ſi on ſuppoſe que le fil demeure toujours égal à AR, le point T ſe mouvera dans la cycloïde donnée QRS. C. Q. F. D.

Cor. Le fil AR eſt égal à la demi-cycloïde AS, & par conſéquent il a au demi-diamétre AC du globe extérieur la même raiſon que la demi-cycloïde SR, qui eſt ſemblable à la premiere AS, au demi-diamétre CO du globe intérieur.

PROPOSITION LI. THÉORÉME XVIII.

Si on ſuppoſe que le corps T, *oſcillant comme on vient de l'expliquer dans la cycloïde* QRS, *ſoit animé par une force centripete tendante au centre* C, *& agiſſant proportionnellement à la diſtance au centre, & qu'il n'éprouve l'action d'aucune autre force, les oſcillations de ce corps, quelqu'inégales qu'elles ſoient, ſeront de même durée.*

Fig. 110.

Fig. 110. Puiſque la force centripete qui pouſſe le corps T vers C eſt comme la droite CT, il eſt clair, par le Cor. 2. des loix du mouvement, qu'en abaiſſant CX perpendiculaire ſur la tangente TX de la cycloïde, cette force TC ſe réſoudra dans les deux forces CX, TX, deſquelles CX agiſſant ſuivant la direction PT ne fait d'autre effet que de tendre le fil PT, & eſt entiérement détruite par la réſiſtance de ce fil; mais l'autre force TX, pouſſant le corps tranſverſalement, c'eſt-à-dire vers X, accélere directement ſon mouvement dans la cycloïde; & il eſt clair que l'accélération de ce corps, étant proportionnelle à cette force accélératrice, eſt à chaque moment comme la longueur TX; c'eſt-à-dire, à cauſe que CV, WV ſont données, & que TX, TW leur ſont proportionnelles, comme la longueur TW, ou, ce qui revient au même, par le Cor. 1. de la Prop. 49. comme la longueur de l'arc TR de la cycloïde.

Deux pendules APT, Apt étant donc inégalement écartés de la perpendiculaire AR, & abandonnés à eux-mêmes en même temps, auront toujours des accélérations qui ſeront comme les arcs TR, tR à décrire. Or les parties décrites dans le commencement du mouvement ſont comme les accélérations, c'eſt-à-dire, comme les arcs entiers, & par conſéquent les parties qui reſtent à décrire & les accélérations ſuivantes qui ſont proportionnelles à ces parties ſont auſſi comme les arcs entiers, & ainſi de ſuite. Donc les accélérations, & par conſéquent les vîteſſes produites, les parties décrites par ces vîteſſes, & les

parties à décrire ſeront toujours comme les arcs entiers; mais ſi les parties à décrire gardent toujours entr'elles la même raiſon, elles s'évanouiront en même temps; c'eſt-à-dire, que les deux corps oſcillans arriveront en même temps à la perpendiculaire *A R*. Et réciproquement, les aſcenſions des pendules perpendiculaires faites d'un mouvement rétrograde le long des mêmes arcs cycloïdaux, & à compter du lieu le plus bas *R* ſeront retardés à chacun des lieux par les mêmes forces qui accéléroient leurs deſcenſions, enſorte que les vîteſſes des aſcenſions & des deſcenſions faites par les mêmes arcs ſeront égales, & que les temps de ces deſcenſions & de ces aſcenſions ſeront auſſi égaux. Or comme les deux parties *R S* & *R Q* de la cycloïde qui ſont placées des deux côtés de la perpendiculaire ſont ſemblables & égales, les deux pendules auront donc leurs oſcillations entieres iſochrones, ainſi que leurs demi-oſcillations. *C. Q. F. D.* Fig. 110.

Cor. La force par laquelle le corps *T* eſt accéléré ou retardé dans un lieu quelconque *T* d'une cycloïde eſt à tout le poids de ce même corps dans le lieu le plus élevé *S* ou *Q*, comme l'arc *T R* de la cycloïde à l'arc *S R* ou *Q R* de la même courbe.

PROPOSITION LII. PROBLÉME XXXIV.

Trouver les vîteſſes des pendules dans chaque point des arcs qu'ils décrivent, & les temps qu'ils employent tant à parcourir ces arcs entiers que leurs parties quelconques.

D'un centre quelconque *G* & de l'intervalle *G H* égal à l'arc *R S* de la cycloïde, décrivez le demi cercle *HKM* coupé en deux parties égales par le demi diamétre *G K*. Imaginez enſuite que pendant que le corps *T* part de *S* pour aller vers *R*, un corps *L* parte de *H* pour aller vers *G* en éprouvant l'action d'une force proportionnelle à la diſtance à ce centre, & égale en *H* à la force que le corps *T* a en *S* vers le centre *C*. Fig. 111, & 112.

Comme les forces qui ſollicitent ces corps ſont égales dans le commencement, & qu'elles ſont toujours proportionnelles aux

Du mouvement des Corps.

Fig. III. 112.

eſpaces TR & LG à décrire, elles ſeront par conſéquent égales dans les lieux T & L en ſuppoſant $TR = LG$; ainſi il eſt clair que ces corps décriront les eſpaces égaux ST, HL dans le commencement. Donc ces corps continuant à être ſollicités également dans la ſuite, ils continueront auſſi à décrire des eſpaces égaux. C'eſt pourquoi, par la Prop. 38. le temps dans lequel le corps décrit l'arc ST ſera au temps d'une oſcillation, comme l'arc HI, qui exprime le temps que le corps H employe à arriver en L, eſt à la demie circonférence HKM qui repréſente le temps que ce corps H employe à arriver en M. Et la raiſon de $\sqrt{SR^2 - TR^2}$ à SR exprimera celle de la vîteſſe du pendule en T à ſa vîteſſe en R, à cauſe que cette raiſon eſt la même que celle de la vîteſſe du corps H au lieu L à ſa vîteſſe au lieu G, & que ces dernieres vîteſſes ſont comme les incréments des lignes HL, HG, pendant des fluxions de temps égales, ou, ce qui revient au même, pendant les fluxions égales des arcs HI, HK.

De plus, à cauſe que dans des oſcillations par des arcs moindres que la cycloïde entiere, les arcs décrits en temps égaux ſont proportionnels aux arcs entiers de ces oſcillations, il eſt clair que, quelles que ſoient ces oſcillations, on aura toujours pour un temps donné les vîteſſes & les arcs décrits. Ce qu'il falloit premierement trouver.

Suppoſez à préſent que des corps ſuſpendus à des fils oſcillent dans des cycloïdes différentes, décrites dans l'intérieur de globes différens dont les forces abſolues ſoient différentes : ſi on appelle V la force abſolue d'un globe quelconque QOS, la force accélératrice, qui agit ſur le pendule dans la circonférence de ce globe au lieu d'où le pendule commence à tomber, ſera comme la diſtance au centre du globe, & comme la force abſolue conjointement, c'eſt-à-dire, comme $CO \times V$. Donc la petite ligne décrite HV dans un inſtant donné, qui doit être proportionnelle à cette force, ſera auſſi comme $CO \times V$.

Mais

Mais en élevant la perpendiculaire ZY qui rencontre la circonférence en Z, l'arc naiſſant HZ qui eſt proportionnel à $\sqrt{GH \times HY}$ repréſente cet inſtant donné, donc cet arc naiſſant eſt comme $\sqrt{GH \times CO \times V}$, & par conſéquent le temps d'une oſcillation entiere dans la cycloïde QRS (lequel temps eſt directement comme la demie circonférence HKM qui repréſente cette oſcillation entiére & inverſement, comme l'arc HZ qui repréſente de même l'inſtant donné) devient comme GH directement & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inverſement, c'eſt-à-dire, à cauſe des égales GH & SR, comme $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, ou, par le Cor. de la Propoſition 50. comme $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Donc, dans toutes les cycloïdes & dans tous les globes, les oſcillations produites par des forces abſolues quelconques ſont en raiſon compoſée de la raiſon ſous-doublée directe de la longueur du fil, & des raiſons ſous-doublées inverſes de la diſtance entre le point de ſuſpenſion & le centre du globe, & de la force abſolue du globe. *C. Q. F. T.* Fig. 111. 112.

Cor. 1. On peut par ce moyen comparer le temps qu'un corps met à oſciller avec celui qu'il mettroit à faire une révolution autour du même centre de forces, ou à deſcendre en ligne droite vers ce centre. Car ſi on fait le diamétre du cercle qui décrit la cycloïde dans le globe égal au demi diamétre de ce globe, la cycloïde deviendra une ligne droite qui paſſera par le centre du globe, enſorte que l'oſcillation ſe changera alors en un mouvement d'aſcenſion & de deſcenſion dans cette droite : & par le ſecond cas de cette propoſition, le temps de cette deſcenſion & de cette aſcenſion perpendiculaire, ainſi que le temps qui lui eſt égal, dans lequel le corps, en tournant uniformément autour du centre du globe à une diſtance quelconque, décrit une moitié de ſa révolution, eſt au temps d'une oſcillation dans la cycloïde QRS comme 1 à $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Cor. 2. On tire auſſi de-là ce que *Wren* & *Hughens* ont trouvé

ſur la cycloïde ordinaire. Car ſi le diamétre du globe eſt augmenté à l'infini, ſa ſuperficie ſe changera en un plan, la force centripete deviendra uniforme & dirigée ſuivant des lignes perpendiculaires à ce plan, & notre cycloïde ne ſera plus que la cycloïde ordinaire. Dans ce cas, la longueur de l'arc de cycloïde, compris entre ce plan & le point décrivant, deviendra égale au quadruple du ſinus verſe de la moitié de l'arc du cercle roulant compris entre ce même plan & le point décrivant, comme *Wren* l'a trouvé : & le pendule ſuſpendu entre deux cycloïdes oſcillera dans une cycloïde ſemblable & égale en employant toujours le même temps, quelques inégales que ſoient ces oſcillations, ainſi que l'a démontré *Hughens*. Enfin le temps de ces oſcillations ſera celui qu'*Hughens* a déterminé.

Fig. 111. 112.

On peut appliquer les propoſitions qu'on vient de démontrer au ſyſtême actuel de la terre, car les cloux des roues qui roulent ſur la ſurface de la terre décrivent des épicycloïdes extérieures ; & les pendules qui ſeroient ſuſpendus au dedans de la terre dans des cavernes entre deux arcs d'épicycloïdes intérieures feroient des oſcillations iſochrones. Car, comme on le verra au troiſiéme livre, la gravité qui agit au deſſus de la terre en raiſon renverſée du quarré des diſtances agit au dedans en raiſon de la ſimple diſtance au centre.

PROPOSITION LIII. PROBLÉME XXXV.

En ſuppoſant la quadrature des courbes, trouver les forces par leſquelles les corps feront toujours des oſcillations iſochrones dans des courbes données.

Fig. 113.

Le corps T oſcillant dans une ligne courbe quelconque $STRQ$, dont l'axe AR paſſe par le centre C des forces ; ſoit tirée TX qui touche cette courbe dans le lieu quelconque T, & ſoit pris ſur cette tangente TX l'intervalle TY égal à l'arc TR, ce qui ne demande autre choſe que la quadrature des courbes. Soit élevée enſuite ſur la tangente la perpendiculaire YZ, laquelle ren-

contrant en Z la droite CT donnera TZ pour exprimer la force centripete cherchée. *C. Q. F. T.*

Car ſi la force TZ par laquelle le corps eſt tiré de T vers C eſt décompoſée dans les forces TY, YZ, la partie YZ tirant le corps dans la direction du fil PT ne change rien à ſon mouvement; mais l'autre force TY accélérera ou retardera directement ſon mouvement dans la courbe $STRQ$. Ainſi, puiſque cette force eſt comme l'arc TR à décrire, les accélérations ou retardations du corps dans deux oſcillations de différente étendue ſeront toujours, dans les parties à décrire ſuppoſées proportionnelles, comme ces parties, & il arrivera par conſéquent que ces parties ſeront décrites en même temps. Or les corps qui décrivent dans des temps égaux des parties toujours proportionnelles aux tous, décrivent auſſi les tous en temps égal. *C. Q. F. D.* Fig. 113.

Cor. 1. Donc ſi un corps T qui pend à un fil rectiligne AT attaché au centre A décrit l'arc circulaire $STRQ$, & que dans le même temps il ſoit pouſſé en en bas ſuivant des lignes paralleles par quelque force qui ſoit à la force uniforme de la gravité, comme l'arc TR à ſon ſinus TN; les temps de chacune des oſcillations ſeront égaux. Car à cauſe des paralleles TZ, AR, les triangles ATN, ZTY ſeront ſemblables; & par conſéquent on aura $TZ : AT :: TY : TN$, c'eſt-à-dire, que ſi la force uniforme de la gravité eſt exprimée par la ligne donnée AT, la force TZ par laquelle les oſcillations deviennent iſochrones ſera à la force de la gravité AT comme l'arc TR égal à TY eſt à ſon ſinus TN. Fig. 114.

Cor. 2. Et par conſéquent dans les horloges, ſi les forces imprimées au pendule par la machine pour conſerver le mouvement peuvent être tellement combinées avec la force de la gravité, que la force totale qui pouſſe le corps en en bas ſoit toujours comme la ligne qu'on a en diviſant le rectangle ſous l'arc TR & le rayon AR par le ſinus TN, toutes les oſcillations ſeront iſochrones.

Du mouvement des Corps.

PROPOSITION LIV. PROBLÉME XXXVI.

En ſuppoſant la quadrature des courbes, trouver les temps dans leſquels les corps montent & deſcendent dans des courbes quelconques par une force centripete quelconque, ces courbes étant décrites dans un plan qui paſſe par le centre des forces.

Fig. 115. Le corps tombant d'un lieu quelconque S le long de la courbe quelconque $STtR$ donnée dans un plan qui paſſe par le centre C des forces, ſoit tirée CS que l'on ſuppoſe diviſée dans un nombre innombrable de parties égales telles que Dd. Du centre C & des intervalles CD, Cd ſoient décrits les cercles DT, dt qui rencontrent la courbe $STtR$ en T & en t, la Prop. 39. apprendra à trouver la vîteſſe en un point quelconque T en employant la loi de la force centripete donnée & la diſtance du centre C au point S d'où la chute a commencé. Mais le temps dans lequel le corps décrit la petite ligne Tt eſt en raiſon directe de la longueur de cette petite ligne, c'eſt-à-dire, de la ſécante de l'angle tTC, & en raiſon inverſe de la vîteſſe. Donc ſi on éléve au point D & perpendiculairement à CS l'appliquée DN proportionnelle à ce temps, l'aire $DNnd$, c'eſt-à-dire $DN \times Dd$, à cauſe de la donnée Dd, ſera auſſi proportionnelle à ce même temps, & par conſéquent la courbe PNn, lieu des points N, donnera par ſon aire $SQPND$ (compriſe entre l'aſymptote SQ perpendiculaire à CS, l'axe SD, l'appliquée DN, & l'arc infini NP) le temps que le corps S a employé à aller de S en T. C. Q. F. T.

PROPOSITION LV. THÉORÊME XIX.

Si pendant qu'un corps qui tend vers un centre de forces ſe meut librement ſur une ſurface courbe quelconque dont l'axe paſſe par ce centre, on imagine ſur un plan perpendiculaire à cet axe une courbe qui ſoit la projection orthogonale de la premiere, & qui ſoit parcourue

par un point qui réponde continuellement au corps mû ſur la ſurface, ce point décrira des aires proportionnelles aux temps.

Soit *B K L* la ſuperficie courbe; *T* le corps qui fait ſa révolution dans cette ſuperficie; *S T R* la trajectoire qu'il y décrit; *S* le commencement de cette trajectoire; *O M K* l'axe de la ſuperficie courbe; *T N* la droite tirée perpendiculairement du lieu *T* ſur l'axe; *O P* égale à *T N* ſa projection ſur le plan *A P O* perpendiculaire à l'axe *K O*; *A P* la projection de la trajectoire décrite dans ce même plan par le point *P* répondant au corps *T*; *A* le commencement de cette projection répondant au point *S*; *T C* la droite menée du corps au centre; *T G* la partie de cette droite proportionnelle à la force centripete qui pouſſe le corps vers le centre *C*; *T M* la ligne droite perpendiculaire à la ſuperficie courbe; *T I* la partie de cette ligne proportionnelle à la force par laquelle le corps preſſe cette ſuperficie, & en eſt réciproquement preſſé vers *M*; *P T F* la droite parallele à l'axe & qui paſſe par le lieu *T*; *G F*, *H I* les droites abaiſſées perpendiculairement des points *G* & *I* ſur cette parallele *P H T F*. Cela poſé, je dis que l'aire *A O P* décrite par le point *P* autour de *O* depuis le commencement du mouvement eſt proportionnelle au temps. Fig. 117.

Car la force *T G* (par le Cor. 2. des loix) ſe décompoſera dans les forces *T F*, *F G*; & la force *T I* dans les forces *T H*, *H I*: mais les forces *T F*, *T H* agiſſant dans la direction *P F* perpendiculaire au plan *A O P* ne changent le mouvement du corps *T* que dans le ſens perpendiculaire à ce plan. Ainſi donc la partie de ſon mouvement qui ſe fait dans le ſens du plan, c'eſt-à-dire, le mouvement du point *P* par lequel la projection *A P* de la trajectoire eſt décrite, demeure le même qu'il ſeroit, ſi les forces *F T*, *T H* étoient ſupprimées, & que les ſeules forces *F G*, *H I* agiſſent ſur le corps, c'eſt-à-dire, le même qu'il ſeroit, ſi le corps décrivoit la courbe *A P* dans le plan *A O P*, par une force centripete qui tendit au centre *O*, & qui fut égale à la Fig. 117.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

ſomme des forces FG, HI; mais une telle force par la Prop. 1. feroit décrire au corps l'aire AOP proportionnelle au temps. Donc, &c. *C. Q. F. D.*

Fig. 116. *Cor.* Par le même raiſonnement, ſi un corps quelconque étoit ſollicité par des forces qui tendiſſent vers deux ou pluſieurs centres ſitués dans une même ligne droite donnée CO & qu'il décrivit dans un eſpace libre une courbe quelconque ST, l'aire AOP ſeroit toujours proportionnelle au temps.

PROPOSITION LVI. PROBLÈME XXXVII.

Suppoſant la quadrature des courbes, & connoiſſant la loi de la force qui tend vers un centre donné dans l'axe d'une ſurface courbe quelconque, on demande la trajectoire décrite ſur cette ſurface par un corps pouſſé ſuivant une vîteſſe & une direction quelconque.

Fig. 117. Les mêmes choſes que dans la Propoſition précédente & que le corps T parte du lieu donné S ſuivant une direction & avec une vîteſſe donnée; que T ſoit le lieu où ce corps eſt arrivé après un temps quelconque; Tt le petit arc parcouru pendant un inſtant donné, Pp ſa projection ſur le plan BDO, c'eſt-à-dire, une petite partie de la projection APp de la trajectoire ſur ce plan; la petite ellipſe pQ la projection du cercle décrit ſur la ſurface courbe du centre O & du rayon Tt; Op le rayon tiré du centre O au point p.

Il eſt clair que la vîteſſe du corps T au point quelconque T ſera donnée par la hauteur TC, ou, ce qui revient au même, par le rayon OP de la projection de la trajectoire, & que la grandeur des axes de la petite ellipſe pQ ne dépendra non plus que de la même ligne. Donc à cauſe que le ſecteur POp eſt proportionnel au temps, on connoîtra le point p interſection de cette ellipſe & de Op, c'eſt-à-dire, que la poſition de Pp, ou, ce qui revient au même, le ſinus de l'angle pPO ne dépendra encore que de OP. Or la relation connue entre Op & le ſinus de pPO donnera facilement la projection AP en employant la

conſtruction des courbes de la Prop. 41. & la projection *AP* étant connue donne tout de ſuite la trajectoire demandée.

Fig. 117.

ONZIÉME SECTION.

Du mouvement des corps qui s'attirent mutuellement par des forces centripetes.

J'ai traité juſqu'ici des mouvemens des corps attirés vers un centre immobile, tel qu'il n'en éxiſte peut-être aucun dans la nature ; car les attractions ont coutume de ſe faire vers des corps, & les actions des corps qui attirent & qui ſont attirés ſont toujours mutuelles & égales par la troiſiéme loi. Si on ne conſidére, par éxemple, que deux corps, ni le corps attiré, ni le corps attirant ne ſeront en repos ; mais ils feront l'un & l'autre, par leur attraction mutuelle, (ſelon le Corol. 4. des Loix) leur révolution autour de leur centre commun de gravité ; s'il y a pluſieurs corps qui ſoient tous attirés vers un ſeul qu'ils attirent auſſi, ou bien qui s'attirent tous mutuellement, ils doivent ſe mouvoir entr'eux de ſorte que leur centre commun de gravité ſoit en repos, ou qu'il ſe meuve uniformément en ligne droite.

Je vais expliquer les mouvemens produits par ces forces que je nomme *attractions*, quoique peut-être je deuſſe plutôt les appeller *impulſions*, pour parler le langage des Phyſiciens ; mais je laiſſe à part les diſputes qu'on peut élever ſur cette dénomination, & je me ſers des expreſſions les plus commodes pour les Mathématiciens.

PROPOSITION LVII. THÉORÉME XX.

Deux corps qui s'attirent mutuellement décrivent autour de leur centre commun de gravité, & autour l'un de l'autre, des figures ſemblables.

Les diſtances des corps au centre commun de gravité ſont réciproquement proportionnelles à ces corps ; ainſi elles ſont en

DU MOUVEMENT DES CORPS.

raiſon donnée l'une à l'autre, auſſi bien qu'à la diſtance totale qui eſt entre les deux corps. De plus, ces diſtances ſont tranſportées autour de leur terme commun d'un mouvement angulaire égal, parce que ces corps étant toujours poſés en ligne droite l'un par rapport à l'autre, ne changent point leur inclinaiſon mutuelle, mais les droites, qui ſont entr'elles en raiſon donnée, & qui ſont tranſportées d'un mouvement angulaire égal autour de leurs extrémités, décrivent autour de ces mêmes extrémités des figures entiérement ſemblables dans des plans qui ſont en repos avec ces termes, ou qui ſe meuvent d'un mouvement quelconque qui n'eſt point angulaire. Donc, &c. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION LVIII. THÉORÉME XXI.

Etant donnée, la loi des forces avec leſquelles deux corps s'attirent mutuellement, on peut, en ſuppoſant que l'un de ces corps ſoit fixe, donner telle impulſion à l'autre qu'il décrive autour de lui une courbe égale & ſemblable à celles que ces deux corps décrivent l'un autour de l'autre lorſqu'ils ſont tous deux mobiles autour de leur centre commun de gravité.

Fig. 118. & 119. Que les corps S & P faſſent leur révolution autour d'un centre commun de gravité C, l'un allant de S vers T, l'autre de P vers Q. Que d'un point donné s, on tire sp, sq toujours égales & paralleles à SP & à QT; la courbe pqv, que le point p décrit en tournant autour d'un point immobile s, ſera ſemblable & égale aux courbes que les corps S & P décrivent mutuellement autour l'un de l'autre; & par conſéquent, par le Théoréme 20. elle ſera ſemblable aux courbes ST & PQV, que ces mêmes corps décrivent autour de leur centre commun de gravité C.

Fig. 118. & 119. *Cas* 1. Ce commun centre de gravité C, par le Cor. 4. des loix, eſt en repos, ou ſe meut en ligne droite uniformément. Suppoſons premiérement qu'il ſoit en repos, & qu'il y ait en s & en p deux corps, deſquels celui qui eſt immobile ſoit en s, & celui qui eſt mobile en p, & que ces corps ſoient égaux & ſemblables aux

aux corps S & P. De plus, que les droites PR & pr touchent les courbes PQ & pq en P & p, & que les lignes CQ & sq ſoient prolongées en R & en r, à cauſe que les figures $CPRQ$, $sprq$ ſont ſemblables, on aura $RQ : rq :: CP : sp$, & par conſéquent ces lignes ſeront en raiſon donnée. Ainſi, ſi la force par laquelle le corps P eſt attiré vers le corps S, & par conſéquent vers le centre intermédiaire C, étoit à la force par laquelle le corps p eſt attiré vers le centre s, dans cette même raiſon donnée ; ces corps en temps égaux ſeroient retirés des tangentes PR, pr vers les arcs PQ, pq par des intervalles RQ, rq proportionnels à ces arcs, & par conſéquent la force qui agit ſur le corps p le feroit circuler dans une courbe pqu, qui ſeroit ſemblable à la courbe PQV, que la premiere force fait parcourir au corps P, & leurs révolutions s'acheveroient dans les mêmes temps. Fig. 118. & 119.

Mais comme ces forces ne ſont pas l'une à l'autre dans la raiſon de CP à sp ; qu'au contraire elles ſont égales à cauſe que les corps S & s, P & p ſont ſemblables & égaux, & que les diſtances SP, sp ſont égales, ces corps dans des temps égaux ſeront également retirés de leurs tangentes. Donc, afin que le dernier corps p ſoit retiré d'un intervalle plus grand rq, il faut un temps plus long, lequel ſera en raiſon ſousdoublée de ces intervalles, à cauſe que les eſpaces au commencement du mouvement ſont par le Lemme 10. en raiſon doublée des temps. Or, pour faire en ſorte que le temps par l'arc pq ſoit au temps par l'arc PQ, comme sp à CP, il ne faut autre choſe que prendre la vîteſſe du corps p à la vîteſſe du corps P, dan la même raiſon de sp à CP, puiſque les eſpaces pq, PQ ſont entr'eux dans la raiſon ſimple de sp à CP. Suppoſant donc de telles vîteſſes aux corps, ils ſeront toujours attirés par des forces égales, & décriront autour des centres en repos C & s les figures ſemblables PQV, pqv, deſquelles la derniere pqv ſera égale & ſemblable à la figure que le corps P décrit autour du corps mobile S. *C. Q. F. D.*

Du mouvement des Corps.

Cas 2. Suppoſons à préſent que le commun centre de gravité ſe meuve uniformément en ligne droite avec l'eſpace dans lequel les corps ſe meuvent entr'eux, tous les mouvemens s'éxécuteront dans cet eſpace comme auparavant, par le ſixiéme Coroll. des Loix. Ainſi ces corps décriront mutuellement autour l'un de l'autre les mêmes figures qu'auparavant, leſquelles ſeront égales & ſemblables à la figure *p q v*. *C. Q. F. D.*

Fig. 118. & 119.

Cor. 1. Ainſi deux corps qui s'attirent mutuellement par des forces proportionnelles à leur diſtance décriront, par la Prop. 10. autour de leur centre commun de gravité, & autour l'un de l'autre, des ellipſes concentriques; & réciproquement, ſi de telles figures ſont décrites, les forces ſeront proportionnelles aux diſtances.

Cor. 2. Deux corps qui s'attirent avec des forces réciproquement proportionnelles au quarré de leur diſtance décriront, par les Prop. 11. 12. & 13. autour de leur commun centre de gravité, & autour l'un de l'autre, des Sections coniques dont le foyer ſera dans le centre autour duquel ces figures ſont décrites; & réciproquement ſi de telles figures ſont décrites, les forces centripetes ſeront réciproquement proportionnelles au quarré de la diſtance.

Cor. 3. Deux corps quelconques qui tournent autour d'un centre commun de gravité décriront autour de ce centre, & autour d'eux-mêmes des aires proportionnelles au temps.

PROPOSITION LIX. THÉORÉME XXII.

Le temps périodique de deux corps S & P, *qui font leur révolution autour de leur commun centre de gravité* C, *eſt au temps périodique de l'un ou l'autre de ces corps* P, *qui tourne autour d'un autre centre immobile* S, *& qui y décrit une figure égale & ſemblable à celle que ces corps décrivent mutuellement l'un autour de l'autre, en raiſon ſous-doublée de l'autre corps* S, *à la ſomme* S + P *de ces corps.*

Fig. 118. & 119.

Par la démonſtration de la Propoſition précédente, les temps pendant leſquels les arcs quelconques ſemblables *P Q* & *p q* ſont

décrits ſont en raiſon ſousdoublée des diſtances CP & SP ou sp, c'eſt-à-dire en raiſon ſousdoublée du corps S à la ſomme $S+P$ de ces corps. Et par conſéquent les ſommes des temps employés à parcourir tous les arcs ſemblables PQ & pq, c'eſt-à-dire, les temps totaux des révolutions des corps S & P, ſont dans cette même raiſon ſousdoublée. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION LX. THÉORÉME XXIII.

Si deux corps S & P, *qui s'attirent mutuellement par des forces réciproquement proportionnelles au quarré de leur diſtance, font leurs révolutions autour d'un centre de gravité commun; le grand axe de l'ellipſe que l'un ou l'autre de ces corps* P *décrira par ce mouvement autour de l'autre corps* S *ſera à l'axe principal de l'ellipſe, que le même corps* P *peut décrire dans le même temps périodique autour de l'autre corps* S, *ſuppoſé en repos, comme la ſomme des deux corps* $S+P$, *à la premiere des deux moyennes proportionnelles entre cette ſomme & l'autre Corps S.*

Car ſi les ellipſes décrites étoient égales entr'elles, les temps périodiques (par le Théoréme précédent) ſeroient en raiſon ſousdoublée du corps S à la ſomme $S+P$ de ces corps. Diminuant donc dans cette raiſon le temps périodique de la derniere ellipſe, les temps périodiques deviendront égaux, & l'axe principal de l'ellipſe, par la Prop. 15. diminuera dans la raiſon dont celle-là eſt ſeſquiplée, c'eſt-à-dire dans la raiſon dont la raiſon de S à $S+P$ eſt triplée; ainſi il ſera à l'axe principal de l'autre ellipſe, comme la premiere des deux moyennes proportionnelles entre $S+P$, & S eſt à $S+P$. Et réciproquement, l'axe principal de l'ellipſe décrite autour du corps mobile ſera à l'axe principal de l'ellipſe décrite autour du corps immobile, comme $S+P$ à la premiere des deux moyennes proportionnelles entre $S+P$ & S. C. Q. F. D.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

PROPOSITION LXI. THÉORÈME XXIV.

Si deux corps s'attirent mutuellement ſuivant une loi donnée à volonté, & ſe meuvent d'une façon quelconque ſans éprouver aucune autre action, ils ſe mouveront comme s'ils ne s'attiroient pas mutuellement, & qu'ils fuſſent attirés l'un & l'autre avec les mêmes forces par un troiſiéme corps placé dans leur centre commun de gravité: & la loi des forces attirantes ſera la même, tant à l'égard de la diſtance de ces corps à ce centre commun, qu'à l'égard de la diſtance qui eſt entre ces corps.

Car les forces, par leſquelles ces corps s'attirent mutuellement, tendant à ces corps, tendent à leur commun centre de gravité qui eſt placé entr'eux; ainſi elles ſont les mêmes que ſi elles émanoient d'un corps intermédiaire. *C. Q. F. D.*

Et comme la raiſon de la diſtance de l'un ou l'autre de ces corps du commun centre de gravité à la diſtance qui ſépare ces corps eſt donnée, la raiſon d'une puiſſance quelconque de la diſtance de l'un à la même puiſſance de la diſtance de l'autre ſera auſſi donnée, auſſi bien que la raiſon d'une quantité quelconque, compoſée comme on voudra d'une de ces diſtances & de conſtantes quelconques, à une autre quantité, compoſée de la même maniére de l'autre diſtance & d'autant de conſtantes qui auroient aux premieres la raiſon donnée de ces diſtances. Ainſi, ſi la force par laquelle un corps eſt attiré par un autre eſt directement ou inverſement comme la diſtance de ces corps entr'eux, ou comme une puiſſance quelconque de cette diſtance, ou enfin comme une quantité quelconque compoſée d'une façon quelconque de cette diſtance & de conſtantes, la même force, par laquelle le même corps ſera attiré vers le commun centre de gravité, ſera de même directement ou inverſement comme la diſtance du corps attiré à ce commun centre de gravité, ou bien comme la même puiſſance de cette diſtance, ou enfin comme la quantité compoſée de même de cette diſtance, & de quan-

tités analogues données. C'eſt-à-dire que la loi de la force attirante ſera la même, eu égard à la diſtance de l'un & de l'autre corps. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION LXII. PROBLÉME XXXVIII.

Déterminer le mouvement de deux corps qui s'attirent mutuellemcnt en raiſon renverſée du quarré de leur diſtance, & qui partent de lieux donnés.

Par le théoréme précédent, ces corps ſe mouveront de même que s'ils étoient attirés par un troiſiéme corps placé dans leur centre commun de gravité; & ce centre ſera en repos dans le commencement du mouvement, par l'hypotheſe; donc, par le Cor. 4. des loix, il ſera toujours en repos. Ainſi, en déterminant par la Prop. 17. les mouvemens des corps comme s'ils étoient ſollicités par des forces tendantes à ce centre, on aura leur mouvement dans la ſuppoſition qu'ils s'attirent mutuellement. *C. Q F. T.*

PROPOSITION LXIII. PROBLÉME XXXIX.

Déterminer le mouvement de deux corps qui s'attirent mutuellement en raiſon renverſée du quarre de leur diſtance, & qui partent de lieux donnés, ſuivant des droites données, & avec des viteſſes données.

Les mouvemens de ces corps, quand ils commencent à ſe mouvoir, étant donnés, le mouvement uniforme de leur commun centre de gravité eſt donné, ainſi que le mouvement de l'eſpace qui ſe meut uniformément en ligne droite avec ce centre, & le mouvement initial de ces corps par rapport à cet eſpace. Or les mouvemens, qui s'éxécuteront enſuite dans cet eſpace, s'y éxécuteront de la même maniére (Théor. 24. & Cor. 5. des loix) que ſi cet eſpace & ce commun centre de gravité étoient en repos, & que ces corps ne s'attiraſſent point mutuellement, mais qu'ils fuſſent attirés par un troiſiéme placé dans leur centre commun de gravité. Il faut donc déterminer, par le Probléme 9. & par le 26. le mouvement de l'un de ces corps

Du mouvement des Corps.

dans cet eſpace mobile, en ſuppoſant qu'il parte d'un lieu donné ſuivant une droite donnée, avec une vîteſſe donnée, & qu'il ſoit ſollicité par une force centripete tendante à ce centre, & on aura en même temps le mouvement de l'autre corps autour du même centre. Il faut enſuite compoſer ce mouvement avec le mouvement progreſſif & uniforme du ſyſtême entier compoſé de l'eſpace & des corps qui y circulent, lequel a été trouvé ci-deſſus, & on aura le mouvement abſolu de ces corps dans l'eſpace immobile. *C. Q. F. T.*

PROPOSITION LXIV. PROBLÉME XL.

On demande le mouvement de pluſieurs corps qui s'attirent tous mutuellement en raiſon directe de la diſtance.

Suppoſons premierement deux corps T & L ayant un centre de gravité commun D. Ces corps décriront (Cor. 1. du Th. 21.), autour de D comme centre, des ellipſes, deſquelles on connoîtra la grandeur par le Probléme 5.

Fig. 120. Qu'un troiſiéme corps attire les deux premiers T & L avec des forces accélératrices ST, SL, & qu'il ſoit attiré à ſon tour par ces deux premiers, la force ST ſe décompoſera, par le Cor. 2. des loix, dans les forces SD, TD, & la force SL dans les forces SD, DL. Or les forces DT, DL qui ſont comme leur ſomme TL, & par conſéquent comme les forces accélératrices par leſquelles les corps T & L s'attirent mutuellement, étant ajoutées aux forces des corps T & L, la premiere à la premiere, & la derniere à la derniere, compoſeront des forces proportionnelles aux diſtances DT & DL, comme auparavant, mais plus grandes que les premieres forces; donc, par le Cor. 1. de la Prop. 10. & par les Coroll. 1. & 8. de la Prop. 4. elles feront décrire à ces corps des ellipſes comme auparavant, mais avec un mouvement plus prompt.

Les autres forces accélératrices SD & SD, par leurs actions motrices $SD \times T$ & $SD \times L$, leſquelles ſont comme les corps,

tirant ces corps également & ſuivant les lignes TI, LK paralleles à DS, ne changent rien à leurs ſituations reſpectives, mais elles font qu'ils approchent également de la ligne IK tirée par le milieu du corps S, & perpendiculaire à la ligne DS. Et ce mouvement vers la ligne IK pourra être nul en donnant au ſyſtême des corps T & L d'une part, & au corps S de l'autre, des vîteſſes convenables pour les faire tourner autour du centre commun de gravité C : dans ce cas, le corps S décrira une ellipſe autour de ce même point C, parce que la ſomme des forces motrices $SD \times T$ & $SD \times L$, leſquelles ſont proportionnelles à la diſtance CS, tend vers le centre C. De plus, le point D, à cauſe des proportionnelles CS, CD, décrira une ellipſe ſemblable à celle qui eſt décrite par le corps S. Donc les corps T & L attirés également, comme on l'a dit, par les forces motrices $SD \times T$ & $SD \times L$, le premier par la premiere, & le dernier par la derniere, ſuivant les lignes paralleles TI & LK, continueront (Cor. 5. & 6. des loix) à décrire leurs ellipſes autour du centre mobile D comme auparavant. *C. Q. F. T.* Fig. 120.

Qu'on ajoute enſuite un quatriéme corps V, & on concluera par le même raiſonnement que ce corps & le point C décriront des ellipſes autour du commun centre de gravité B de tout le ſyſtême, les mouvemens des premiers corps T, L & S autour des centres C & D ſubſiſtants toujours ſans autre différence que d'être accélérés. Il en ſeroit de même, quelque fût le nombre des corps. *C. Q. F. T.*

C'eſt encore la même choſe lorſque les corps T & L s'attirent mutuellement avec des forces accélératrices dont les intenſités ſont différentes de celles avec leſquelles ils attirent les autres corps relativement à leurs diſtances.

Et en général, il ſuit de ce qu'on vient de dire que toutes les fois que les attractions mutuelles accélératrices d'un nombre quelconque de corps ſeront entr'elles comme les diſtances multipliées par les corps attirants, tous ces corps décriront dans des

temps périodiques égaux des ellipſes diverſes autour de leur commun centre de gravité B, & dans un plan immobile. *C.Q.F.T.*

PROPOSITION LXV. THÉORÉME XXV.

Pluſieurs corps dont les forces décroiſſent en raiſon doublée des diſtances à leurs centres peuvent décrire les uns autour des autres des courbes approchantes de l'ellipſe, & décrire autour des foyers de ces courbes des aires à peu-près proportionnelles au temps.

On a donné dans la Propoſition précédente le cas où les mouvemens s'éxécutent dans des ellipſes rigoureuſes. Plus la loi des forces s'éloigne de la loi qu'on y a employée, & plus les corps troubleront leurs mouvemens mutuels; & il ne put arriver que les corps qui s'attirent mutuellement, ſelon la loi ſuppoſée ici, décrivent éxactement des ellipſes, à moins qu'ils ne conſervent une certaine proportion dans leurs diſtances reſpectives.

Cas 1. Imaginons pluſieurs petits corps qui font leur révolution autour d'un plus grand, à différentes diſtances de ce plus grand, & qui tendent tous les uns vers les autres avec des forces abſolues proportionnelles à ces mêmes corps. Si ces corps révolvans ſont aſſez petits pour que le corps autour duquel ils tournent ne s'écarte jamais ſenſiblement du centre de gravité, il eſt clair, par le Cor. 4. des loix, que ce corps approchera extrêmement d'être en repos ou de ſe mouvoir uniformément en ligne droite. De plus, ces petits corps tourneront autour de lui dans des ellipſes, & décriront des aires proportionnelles au temps, abſtraction faite des erreurs qui peuvent être cauſées, ou par le petit écart que fait le grand corps du centre commun de gravité, ou par les actions mutuelles de ces petits corps les uns ſur les autres. Or on peut augmenter la petiteſſe des corps révolvans à un tel point, que cet écart & ces actions mutuelles ſoient moindres que toute quantité donnée; c'eſt-à-dire, juſqu'à ce que les orbites deviennent elliptiques, & que les aires ſoient proportionnelles au temps ſans erreur ſenſible. *C. Q. F. M.*

Cas 2.

Cas 2. Suppoſons qu'un ſyſtême tel que celui dont on vient de parler, compoſé de petits corps qui font leurs révolutions autour d'un plus grand, ou qu'un ſyſtême compoſé ſimplement de deux corps qui tournent l'un autour de l'autre, avance uniformément en ligne droite, & qu'en même temps ces corps ſoient ſollicités par la force d'un autre corps beaucoup plus grand, & placé à une grande diſtance : comme les forces accélératrices égales, par leſquelles ces corps ſont ſollicités à ſe mouvoir ſuivant des lignes paralleles, ne changent point la ſituation reſpective de ces corps, mais qu'elles font ſeulement que le ſyſtême entier, dont les parties conſervent leurs mouvemens entr'elles, eſt tranſporté en même temps : il eſt clair, que les attractions vers le grand corps ne doivent cauſer d'autres altérations dans les attractions mutuelles de ces corps, que celles qui peuvent réſulter de l'inégalité des attractions accélératrices, ou de l'inclinaiſon qu'ont entr'elles les lignes ſuivant leſquelles agiſſent ces attractions. Suppoſé donc que toutes les attractions accélératrices vers le grand corps ſoient entr'elles réciproquement comme les quarrés des diſtances ; en augmentant la diſtance du grand corps juſqu'à ce que les différences des longueurs des droites menées de ce grand corps aux petits, & que leurs inclinaiſons réciproques ſoient moindres que toute quantité donnée, les mouvemens des parties de ce ſyſtéme entr'elles n'éprouveront point d'irrégularité qui ne ſoit plus petite que tout ce qu'on les voudroit ſuppoſer. Et comme à cauſe de la petite diſtance de ces parties entr'elles, tout le ſyſtême entier ſera attiré de la même maniere que s'il conſiſtoit en un ſeul corps, ce ſyſtême éprouvera auſſi le même mouvement par cette attraction, que ſi elle s'éxerçoit ſur un ſeul corps ; c'eſt-à-dire, que ſon centre de gravité décrira autour du grand corps une Section conique, & que les aires qu'il décrira autour de ce grand corps ſeront proportionnelles au temps, ſans erreurs ſenſibles. *C. Q. F. D.*

On pourroit par le même raiſonnement aller à des cas plus compoſés à l'infini.

Cor. 1. Dans le ſecond cas, plus le grand corps approche du ſyſtême de deux ou de pluſieurs corps, & plus les mouvemens des parties de ce ſyſtême entr'elles ſeront troublés; parce qu'alors l'inclinaiſon mutuelle des lignes tirées du grand corps à ces autres corps eſt plus grande, ainſi que l'inégalité de la proportion.

Cor. 2. Ces mouvemens ſeront très-fortement troublés, ſi les attractions accélératrices des parties de ce ſyſtême vers le plus grand corps ne ſont plus entr'elles réciproquement comme le quarré des diſtances à ce grand corps; ſur-tout ſi l'inégalité de la proportion de cette attraction eſt plus grande que l'inégalité de la proportion des diſtances au grand corps. Car ſi la force accélératrice ne trouble point ces mouvemens entr'eux, lorſqu'elle agit également, & par des lignes paralleles, elle doit néceſſairement les troubler, lorſqu'elle agit inégalement, & cela plus ou moins, ſelon que cette inégalité eſt plus ou moins grande. Car l'excès des plus grandes impulſions, éxercées ſur quelques-uns de ces corps & non éxercées ſur les autres, doit néceſſairement changer leur poſition entr'eux; & ce dérangement, ajoûté à celui qui naît de l'inégalité des lignes & de leur inclinaiſon, rendra le dérangement total plus ſenſible.

Cor. 3. Ainſi, ſi les parties de ce ſyſtême ſe meuvent dans des ellipſes ou dans des cercles ſans aucune altération ſenſible, il eſt clair qu'elles ne ſont ſollicitées que très-foiblement par des forces accélératrices tendantes à d'autres corps, ou que ces forces agiſſent à peu près également ſur elles, & ſuivant des lignes qui ſont preſque paralleles.

PROPOSITION LXVI. THÉORÉME XXVI.

Si trois corps dont les forces décroiſſent en raiſon doublée des diſtances s'attirent mutuellement, & que les attractions accélératrices de deux quelconques vers le troiſiéme, ſoient entr'elles en raiſon renverſée du quarré des diſtances, les plus petits tournant autour du plus grand; je dis que le corps le plus intérieur des deux petits décrira autour de ce grand corps des aires qui approcheront plus d'être proportionnelles au temps, & que la figure qu'il décrira approchera plus d'être une ellipſe dont le foyer ſera le centre des forces, ſi le grand corps eſt agité par les attractions des petits corps, que s'il étoit en repos, & qu'il n'éprouvât aucune attraction de leur part, ou qu'il fût beaucoup plus ou beaucoup moins agité en vertu d'une attraction beaucoup plus ou beaucoup moins forte.

Cette Propoſition ſuit aſſez naturellement du Cor. 2. de la Propoſition précédente; mais je vais encore la prouver par des argumens plus précis, & plus preſſans.

Cas 1. Que les plus petits corps P & S tournent dans le même plan, autour du plus grand T; P décrivant l'orbite intérieur PAB, & S l'extérieure ESE. Que SK ſoit la moyenne diſtance des corps P & S, & que cette ligne SK exprime l'attraction de P vers S à la moyenne diſtance. En prenant SL à SK en raiſon doublée de SK à SP, SL ſera l'attraction accélératrice de P vers S, à une diſtance quelconque SP, & cette force SL ſe décompoſera dans les deux forces SM, LM, en menant LM parallele à la ligne qui joint P & T. Fig. 121.

Cela poſé, il eſt clair que le corps P ſera ſollicité par trois forces: la premiere tend à T & vient de l'attraction mutuelle des corps T & P; & l'effet de cette force, ſi elle étoit ſeule, ſeroit de faire décrire au corps P autour du corps T (ſoit que ce corps fût immobile, ſoit qu'il fût animé de la même attraction) des aires proportionnelles au temps, & une ellipſe dont le foyer ſeroit T. Ce qui paroît clairement par la Prop. 11. & par les Cor. 2. & 3. du Théor. 21.

La ſeconde force qui agit ſur P eſt l'attraction LM, laquelle tendant de P à T s'ajouteroit à la premiere, & produiroit toujours des aires proportionnelles au temps (Cor. 3. Théor. 21.); mais n'étant pas réciproquement proportionnelle au quarré des diſtances, la ſomme des deux forces ne ſe trouveroit pas non plus dans cette raiſon, & s'en écarteroit d'autant plus que ces deux forces auroient une plus grande proportion l'une à l'autre. Or, comme par la Prop. 11. & par le Cor. 2. du Théor. 21. la force néceſſaire pour faire décrire une ellipſe autour du foyer T doit tendre vers ce foyer, & être réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance PT, l'orbe PAB s'écartera de la forme elliptique, & cela d'autant plus qu'il y aura une plus grande proportion entre les deux forces qui compoſent celle de P vers T, toutes choſes étant ſuppoſées d'ailleurs égales.

Fig. 121.

La troiſiéme force qui agit ſur P eſt la force SM, laquelle tirant le corps P ſelon une ligne parallele à ST compoſera avec les forces précédentes une force qui ne ſera plus dirigée de P vers T, & qui s'éloignera d'autant plus de cette détermination, que la proportion de cette troiſiéme force aux premieres ſera plus grande, toutes choſes égales: par cette force le corps P ne décrira plus des aires proportionnelles au temps autour du corps T, & les aires s'éloigneront d'autant plus de cette proportionnalité, que le rapport de la troiſiéme force aux deux premieres ſera plus grand. L'altération que ſouffrira par cette troiſiéme force l'orbe PAB dans la forme elliptique que donne la premiere, ſera augmentée par deux cauſes, parce que cette force n'eſt pas dirigée de P vers T, & parce qu'elle n'eſt pas réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance PT.

Ceci étant bien entendu, il eſt clair, que les aires approcheront d'autant plus d'être proportionnelles au temps, que la troiſiéme force ſera moindre, les autres forces reſtant les mêmes, & que l'orbite PAB approchera d'autant plus de la forme elliptique, que la ſeconde & la troiſiéme force, mais principalement

la troiſiéme, ſeront moindres, la premiere demeurant la même.

Si l'attraction accélératrice du corps T vers S eſt repréſentée par la ligne SN; & que les attractions accélératrices SN, SM ſoient égales, elles ne changeront rien à la poſition des corps P & T entr'eux, parce qu'elles les tireront également, & ſelon des lignes paralleles; ainſi les mouvemens de ces corps ſeront les mêmes qu'ils ſeroient ſans ces attractions (Cor. 6. des Loix), & par la même raiſon, ſi l'attraction SN étoit moindre que l'attraction SM, elle en détruiroit une partie égale à SN, & ce ſeroit la partie reſtante MN qui dérangeroit la forme elliptique de l'orbe, & la proportionnalité des aires & des temps. Si l'attraction SN étoit plus forte que l'attraction SM, l'altération dans la proportionnalité des aires & dans l'orbite ſeroit cauſée de même par leur ſeule différence MN. Par l'attraction SN, la troiſiéme force SM eſt donc toujours réduite à l'attraction MN, la premiere & la ſeconde attraction reſtant entiérement les mêmes; & par conſéquent les aires & les temps approcheront le plus de la proportionnalité, & l'orbite PAB de la forme elliptique dont on a parlé, lorſque l'attraction MN ſera ou nulle ou la plus petite qu'il eſt poſſible, ce qui arrivera lorſque les attractions accélératrices des corps P & T vers le corps S approcheront, autant qu'il eſt poſſible, de l'égalité; c'eſt-à-dire, lorſque l'attraction SN ne ſera pas nulle, ni moindre que la plus petite de toutes les attractions SM, mais qu'elle ſera à peu près moyenne entre la plus grande & la plus petite de toutes les attractions SM, ou, ce qui revient au même, lorſqu'elle n'eſt ni beaucoup plus forte, ni beaucoup plus foible que l'attraction SK. C. Q. F. D.

Fig. 121.

Cas 2. Que les petits corps P & S tournent autour du plus grand T dans des plans différens, la force LM, qui agit ſuivant la ligne PT placée dans le plan de l'orbite PAB, aura le même effet qu'auparavant, & elle ne retirera point le corps P du plan de ſon orbite; mais l'autre force MN qui agit ſuivant une ligne parallele à ST (& eſt par conſéquent inclinée au plan de

DU MOUVEMENT DES CORPS.

l'orbite PAB quand le corps S ſe trouve hors de la ligne des nœuds) cauſera, outre l'altération en longitude dont on vient de parler, une altération au mouvement en latitude; cette altération pour une poſition quelconque des corps P & T, ſera comme la force MN qui l'a cauſée; ainſi elle ſera la plus petite quand MN ſera la plus petite, c'eſt-à-dire, comme je l'ai déjà fait voir, lorſque l'attraction SN ne ſera ni beaucoup plus forte, ni beaucoup plus foible que l'attraction SK. C. Q. F. D.

Fig. 121.

Cor. 1. On tire facilement de là, que ſi pluſieurs petits corps P, S, R, *&c.* font leurs révolutions autour d'un plus grand T, le mouvement du plus intérieur P ſera le moins troublé qu'il eſt poſſible par les attractions des corps extérieurs, lorſque le plus grand corps T ſera attiré & agité pareillement par les autres, en raiſon de leurs forces accélératrices, & qu'il les attirera réciproquement.

Cor. 2. Dans un ſyſtême compoſé de trois corps T, P, S, ſi les attractions accélératrices de deux quelconques ſur le troiſiéme ſont réciproquement entr'elles comme le quarré des diſtances, les aires que le corps P décrira autour du corps T ſeront plus accélérées auprès de la conjonction A & de l'oppoſition B, qu'auprès des quadratures C & D. Car toute force qui agit ſur le corps P, ſans agir ſur le corps T, & qui n'eſt point dirigée vers PT, accélére ou retarde la deſcription de l'aire ſelon qu'elle eſt dirigée en conſéquence ou en antécédence; telle eſt la force NM. Dans le paſſage du corps P de C en A, elle tire en conſéquence; enſuite depuis A juſqu'en D, elle tire en antécédence; puis de D en B, elle tire en conſéquence, & enfin en antécédence de B en C.

Cor. 3. Et par le même raiſonnement, il eſt clair que le corps P, toutes choſes d'ailleurs égales, ſe meut plus vîte dans la conjonction & dans l'oppoſition, que dans les quadratures.

Cor. 4. L'orbe du corps P, toutes choſes d'ailleurs égales, eſt plus courbe dans les quadratures que dans la conjonction & l'oppoſition; car les corps qui ont le plus de vîteſſe s'écartent le moins

Fig. 121.

du cours rectiligne. D'ailleurs la force KL ou MN, dans la conjonction & dans l'oppoſition, eſt contraire à la force par laquelle le corps T tire le corps P; & par conſéquent elle diminue cette force, & le corps P doit moins ſe détourner du cours rectiligne lorſqu'il eſt moins tiré vers T. Fig 121.

Cor. 5. De-là le corps P, le reſte étant égal, s'écartera plus du corps T dans les quadratures que dans l'oppoſition & la conjonction. Toutes ces choſes ſuppoſent qu'il n'y ait pas de mouvement d'excentricité; car ſi l'orbite du corps P eſt excentrique, ſon excentricité (comme on le verra dans le Cor. 9. de cette Prop.) deviendra la plus grande, lorſque les apſides ſeront dans les ſyzygies; & delà il peut arriver que le corps P arrivant au ſommet de l'apſide la plus haute, ſoit plus loin du corps T dans les ſyzygies que dans les quadratures.

Cor. 6. Parce que la force centripete du corps central T, laquelle retient le corps P dans ſon orbite, eſt augmentée dans les quadratures par l'addition de la force LM, qu'elle eſt diminuée dans les ſyzygies par la ſouſtraction de la force KL, & qu'à cauſe de la grandeur de la force KL, la diminution eſt plus grande que l'augmentation; que d'ailleurs cette force centripete vers T, par le Cor. 2. de la Prop. 4. eſt en raiſon compoſée de la raiſon ſimple & directe de PT, & de la raiſon renverſée du quarré du temps périodique: il eſt clair, que cette raiſon compoſée ſera diminuée par l'action de la force KL, & par conſéquent que le temps périodique (ſi le rayon PT de l'orbe reſte le même) ſera augmenté dans la raiſon ſousdoublée de celle ſuivant laquelle cette force centripete ſera diminuée; de plus, par le Cor. 6. de la Prop. 4. ſi le rayon augmente ou diminue, le temps périodique ſera plus augmenté ou moins diminué que ſuivant la proportion ſeſquiplée de ce rayon.

Si la force du corps central venoit à diminuer, le corps P étant de moins en moins attiré s'éloigneroit davantage du centre T; & au contraire, ſi cette force du corps central augmentoit, le

Du Mouvement des Corps.

corps P s'approcheroit plus du centre. Donc, ſi l'action du corps éloigné S, par laquelle cette force eſt diminuée, augmente & diminue tour à tour, le rayon TP augmentera & diminuera auſſi ſucceſſivement; & le temps périodique augmentera & diminuera dans la raiſon compoſée de la raiſon ſeſquiplée du rayon & de la raiſon ſousdoublée de la proportion ſuivant laquelle cette force centripete du corps central T augmente & diminue par l'incrément ou le décrément de l'action du corps éloigné S.

Fig. 121.

Cor. 7. De tout ce que nous venons de dire, il ſuit que l'axe de l'ellipſe décrite par le corps P, ou la ligne des apſides, avance & rétrograde tour à tour d'un mouvement angulaire, de façon cependant que le mouvement en avant eſt le plus fort, & qu'à la fin de chaque révolution de P, la ligne des apſides s'eſt mue en conſéquence.

Car la force qui pouſſe le corps P vers T dans les quadratures, où la force MN s'évanouit, eſt compoſée de la force LM & de la force centripete par laquelle le corps T attire le corps P. La premiere force LM, ſi on augmente la diſtance PT, augmentera à peu près dans la même raiſon que cette diſtance, & la derniere force décroîtra dans cette raiſon doublée. Donc la ſomme de ces forces décroîtra dans une moindre raiſon que la raiſon doublée de la diſtance PT, & par conſéquent (Cor. 1. de la Prop. 45.) elle fera rétrograder la plus haute apſide.

Mais dans la conjonction & dans l'oppoſition, la force par laquelle le corps P eſt porté vers le corps T eſt la différence entre la force par laquelle le corps T attire le corps P, & la force KL, & cette différence, à cauſe que la force KL augmente à peu près dans la raiſon de la diſtance PT, décroît dans une plus grande raiſon que la raiſon doublée de la diſtance PT; ainſi par le Cor. 1. de la Prop. 45. elle fera avancer la plus haute apſide. Dans les lieux placés entre les ſyzygies & les quadratures, le mouvement de la plus haute apſide dépend de ces deux cauſes, enſorte que ſelon l'excès de l'efficacité de l'une ou de l'autre, la

plus

haute apſide avancera ou rétrogradera. Ainſi comme la force KL dans les ſyzygies eſt preſque double de la force LM dans les quadratures, l'effet réſultant de ces deux forces dans toute la révolution ſera dans le même ſens que la force KL ; c'eſt-à-dire, que la plus haute apſide ſera portée en conſéquence. Fig. 121.

Les vérités établies dans ce Corollaire & dans le précédent ſe comprendront plus aiſément en ſuppoſant que le ſyſtéme des deux corps T & P ſoit environné de toutes parts de pluſieurs corps S,S,S, *&c.* placés dans l'orbe ESE; car par l'action de ces corps, celle du corps T ſera diminuée dans tous les lieux, & par conſéquent elle décroîtra dans une raiſon plus que doublée de la diſtance.

Cor. 8. Comme le progrès ou la rétrogradation des apſides dans le paſſage du corps de l'apſide la plus baſſe à la plus haute, dépend du décrément de la force centripete dans une plus grande ou une moindre raiſon que la raiſon doublée de la diſtance PT, & de ſon incrément ſemblable dans le retour du corps à l'apſide la plus baſſe ; & que par conſéquent ce progrès ou cette rétrogradation eſt dans ſon *maximum.* lorſque la proportion de la force dans l'apſide la plus haute à la force dans l'apſide la plus baſſe s'éloigne le plus de la raiſon doublée inverſe des diſtances ; il eſt clair que les apſides étant dans leurs ſyzygies avanceront le plus vîte par la ſouſtraction de la force KL ou $NM-LM$, & que dans leurs quadratures elles rétrograderont le plus lentement par l'addition de la force LM. Or à cauſe de la longueur du temps pendant lequel la vîteſſe de ce progrès & le retardement de cette rétrogradation ſont continués, cette inégalité devient extrêmement grande.

Cor. 9. Si un corps, par une force réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance au centre, ſe meut autour de ce centre dans une ellipſe, & qu'enſuite dans ſa deſcente de l'apſide la plus haute à la plus baſſe, cette force par l'addition perpétuelle d'une nouvelle force ſoit augmentée dans une raiſon plus grande que la doublée inverſe de la diſtance, il eſt clair

Du mouvement des Corps.

que ce corps, étant pouſſé ſans ceſſe vers le centre par l'addition perpétuelle de cette nouvelle force, s'approchera davantage de ce centre, que s'il n'y étoit porté que par la ſeule force en raiſon doublée inverſe de la diſtance; ainſi il décrira autour de ce centre un orbe qui ſera intérieur à l'orbe elliptique qu'il décrivoit; & dans l'apſide la plus baſſe il s'approchera plus du centre qu'auparavant: donc ſon orbe, par l'addition de cette nouvelle force, deviendra plus excentrique. Si enſuite, lorſque le corps va de l'apſide la plus baſſe à la plus haute, la force décroiſſoit par les mêmes degrés par leſquels elle avoit augmenté auparavant, le corps retourneroit à la premiere diſtance; & par conſéquent, ſi la force décroiſſoit dans une plus grande raiſon, le corps étant moins attiré monteroit à une plus grande hauteur, & l'excentricité de ſon orbe augmenteroit encore davantage. Ainſi, ſi la raiſon de l'incrément & du décrément de la force centripete augmente à chaque révolution, l'excentricité augmentera toujours; & au contraire, elle diminuera toujours, ſi cette même raiſon décroît.

Fig. 121.

Dans le ſyſtéme des corps T, P, S, lorſque les apſides de l'orbe PAB ſont dans les quadratures, cette raiſon de l'incrément & du décrément eſt la plus petite, & elle devient la plus grande lorſque les apſides ſont dans les ſyzygies. Si les apſides ſont dans les quadratures, la raiſon près des apſides eſt moindre que la raiſon doublée des diſtances, & elle eſt au contraire plus grande près des ſyzygies: & c'eſt de cette plus grande raiſon que naît le mouvement direct de l'apſide la plus haute, comme on l'a déja dit; mais ſi l'on conſidere la raiſon de tout l'incrément ou de tout le décrément dans le progrés entre les apſides, elle eſt moindre que la raiſon doublée des diſtances. La force dans l'apſide la plus baſſe eſt à la force dans l'apſide la plus haute, dans une moindre raiſon que la raiſon doublée de la diſtance de la plus haute apſide au foyer de l'ellipſe, à la diſtance de l'apſide la plus baſſe à ce même foyer; & au contraire, lorſque les apſides ſont dans les ſyzygies, la force dans l'apſide la plus baſſe eſt à la force dans

l'apſide la plus haute, dans une plus grande raiſon que la raiſon doublée des diſtances; car les forces LM dans les quadratures étant ajoûtées aux forces du corps T compoſent des forces qui ſont dans une moindre raiſon, & les forces KL dans les ſyzygies étant ôtées des forces du corps T font que les forces reſtantes ſont dans une plus grande raiſon.

Fig. 121.

La raiſon de tout l'incrément & de tout le décrément dans le paſſage entre les apſides eſt donc la moindre dans les quadratures, & la plus grande dans les ſyzygies; & par conſéquent dans le paſſage des apſides des quadratures aux ſyzygies, elle augmentera perpétuellement, & elle augmentera l'excentricité de l'ellipſe; mais dans le paſſage des ſyzygies aux quadratures, elle diminuera continuellement, & l'excentricité diminuera auſſi.

Cor. 10. Pour chercher la loi des dérangemens en latitude, ſuppoſons que le plan de l'orbite EST reſte immobile; il eſt clair que la partie ML des forces MN, ML, en quoi conſiſte la cauſe totale des dérangemens, agiſſant toujours dans le plan de l'orbite PAB, ne trouble jamais le mouvement en latitude; & que la force MN qui agit auſſi dans le plan de cette même orbite, lorſque les nœuds ſont dans les ſyzygies, ne dérange point alors ces mouvemens, au lieu qu'elle les dérange beaucoup lorſqu'ils ſont dans les quadratures; car alors en retirant continuellement le corps P du plan de ſon orbite elle diminue l'inclinaiſon du plan dans le paſſage du corps des quadratures aux ſyzygies, & elle l'augmente au contraire dans ſon paſſage des ſyzygies aux quadratures. D'où il arrive que le corps étant dans les ſyzygies, l'inclinaiſon du plan eſt la plus petite, & qu'elle retourne à ſa premiere grandeur à peu près, lorſque le corps arrive au nœud le plus voiſin. Mais lorſque les nœuds ſeront dans les octans après les quadratures, c'eſt-à-dire entre C & A, D & B, on comprendra, par ce qu'on vient de dire, que dans le paſſage du corps P de l'un ou l'autre nœud au quatre-vingt-dixiéme degré ſuivant, l'inclinaiſon du plan diminuera perpétuellement; & qu'enſuite dans le paſſage

Du mouvement des Corps.

par les quarante-cinq degrés prochains juſqu'à la quadrature prochaine, l'inclinaiſon augmentera, & qu'elle diminuera enſuite de nouveau dans le paſſage du corps par les quarante-cinq autres degrés juſqu'au nœud prochain. Ainſi cette inclinaiſon diminuera plus qu'elle n'augmentera, & par conſéquent elle eſt toujours moindre dans le nœud qui ſuit, que dans celui qui précéde; & par le même raiſonnement, l'inclinaiſon augmentera plus qu'elle ne diminuera, lorſque les nœuds ſeront dans les autres octans *A* & *D*, *B* & *C*. Elle ſera donc la plus grande, lorſque les nœuds ſeront dans les ſyzygies. Dans leur paſſage des ſyzygies aux quadratures, elle diminuera à chaque fois que le corps parviendra aux nœuds; & elle deviendra la plus petite, lorſque les nœuds ſeront dans les quadratures, & le corps dans les ſyzygies; & elle croîtra enſuite par les mêmes degrés par leſquels elle avoit diminué auparavant; & lorſque les nœuds arriveront aux ſyzygies prochaines, elle reviendra à ſa premiere grandeur.

Fig. 121.

Cor. 11. Comme le corps *P*, lorſque les nœuds ſont dans les quadratures, eſt continuellement retiré du plan de ſon orbite du côté de *S* dans ſon paſſage du nœud *C* par la conjonction *A* au nœud *D*; & du côté oppoſé dans ſon paſſage du nœud *D* par l'oppoſition *B* au nœud *C*: il eſt clair que dans ſon mouvement depuis le nœud *C*, le corps s'éloignera perpétuellement du premier plan *CD* de ſon orbite, juſqu'à ce qu'il ſoit parvenu au nœud prochain, qui ſera très-éloigné de ce plan *CD*, & qui, au lieu d'être placé en *D* dans l'autre interſection de ce plan avec le plan *EST*, ſera placé du côté de *S*, c'eſt-à-dire en antécédence, & par le même raiſonnement, les nœuds continueront à s'éloigner dans le paſſage du corps de ce nœud au nœud qui ſuit.

Les nœuds étant dans les quadratures rétrograderont donc toujours; dans les ſyzygies, où rien ne trouble le mouvement en latitude, ils ſeront en repos; & dans les lieux intermédiaires où ils participeront de l'une & l'autre condition, ils rétrograderont plus lentement. Ainſi étant toujours ſtationaires ou rétrogrades,

ils ſeront portés en antécédence à chaque révolution.

Cor. 12. Tous les dérangemens dont on a parlé dans ces Corollaires ſont un peu plus grands dans la conjonction des corps *P* & *S*, que dans leur oppoſition, parce que les forces *NM* & *ML* qui les cauſent ſont plus grandes. Fig. 121.

Cor. 13. Comme on n'a point fait entrer la grandeur du Corps *S* dans la démonſtration des Corollaires précédens, tout ce qu'on vient de dire aura lieu, lorſque la grandeur de ce corps ſera telle que le ſyſtême des deux corps *T* & *P* tournera autour de lui. Et comme le corps *S* étant plus grand, ſa force centripete qui cauſe les dérangemens du corps *P* eſt plus grande ; tous ces dérangemens ſeront plus grands à des diſtances égales dans ce cas, que dans celui, où le corps *S* tourne autour du ſyſtême des corps *P* & *T*.

Cor. 14. Comme les forces *MN*, *ML*, lorſque le corps *S* eſt fort éloigné, ſont à peu près en raiſon compoſée de la force *SK*, & de la raiſon de *PT* à ST^3, c'eſt-à-dire, ſi la diſtance *PT* & la force abſolue du corps *S* ſont données, en raiſon renverſée de ST^3, & que ces forces *MN*, *ML* ſont les cauſes des dérangemens & de tous les effets dont on a parlé dans les Corollaires précédens : il eſt clair que tous ces effets ſeront à peu près en raiſon compoſée de la raiſon directe de la force abſolue du corps *S* & de la raiſon triplée inverſe de la diſtance *ST*, lorſqu'on ſuppoſe que le ſyſtême des corps *P* & *T* reſte le même, tandis qu'on fait varier la diſtance *ST*, & la force abſolue du corps *S*. Ainſi, ſi le ſyſtême des corps *T* & *P* tourne autour d'un corps très-éloigné *S*, les forces *MN*, *ML*, & leurs effets ſeront (Cor. 2. & 6. de la Prop. 4.) réciproquement en raiſon doublée du temps périodique, & par-conſéquent, ſi la grandeur du corps *S* eſt proportionnelle à ſa force abſolue, ces forces *MN*, *ML*, & leurs effets ſeront directement comme le cube du diamétre apparent du corps éloigné *S* vû du lieu *T*, & au contraire. Car ces raiſons ſont

les mêmes que la raiſon compoſée dont on a parlé ci-deſſus.

Cor. 15. Si la forme des orbes *E S E*, *B A P*, leur inclinaiſon & leurs proportions entre elles reſtent les mêmes pendant que leur grandeur change; & ſi les forces des corps *S* & *T* ſont conſtantes ou varient dans une raiſon donnée quelconque; comme alors ces forces (c'eſt-à-dire, la force du corps *T*, par laquelle le corps *P* décrit l'orbite *P A B*; & la force du corps *S* qui fait écarter le corps *P* de cette orbite) agiſſent toujours de la même maniére & dans la même proportion, il eſt néceſſaire que tous les effets ſoient ſemblables & proportionnels, & que les temps de ces effets ſoient auſſi proportionnels; c'eſt-à-dire, que toutes les altérations linéaires ſoient comme les diamétres des orbites, que les angulaires ſoient les mêmes qu'auparavant, & que les temps des dérangemens linéaires ſemblables ou des angulaires égaux ſoient comme les temps périodiques des orbites.

Fig. 121.

Cor. 16. Ainſi, ſi la forme des orbites, & leur inclinaiſon mutuelle reſtant les mêmes, la grandeur des corps, leurs forces, & leurs diſtances changent d'une maniére quelconque & qu'on connoiſſe les dérangemens & les temps des dérangemens dans un cas quelconque, on en pourra conclure à peu près les dérangemens, & les temps des dérangemens pour tout autre cas. Mais on y parviendra d'une maniére plus prompte par la méthode ſuivante.

Les forces *L M*, *M N* ſont comme le rayon *T P*, tout le reſte demeurant le même, & leurs effets périodiques, c'eſt-à-dire, les dérangemens linéaires de *P* (Cor. 2. du Lemme 10.) ſont comme ces forces, & le quarré du temps périodique de *P* conjointement. De-là, les erreurs angulaires du corps *P*, vû du centre *T*, (c'eſt-à dire, tant le mouvement de ſes nœuds & de ſes apſides, que tous les dérangemens apparens en latitude & en longitude) ſont dans une révolution quelconque du corps *P*, comme le quarré du temps d'une révolution à peu près,

Compoſant donc cette raiſon avec celle du Cor. 14. on trouvera que dans un ſyſtême quelconque de corps P, S, T, dans lequel P tourne autour de T dont il eſt proche, & T autour de S qui eſt éloigné, les dérangemens angulaires du corps P tels qu'ils paroiſſent du centre T ſeront à chaque révolution de ce corps P comme le quarré du temps périodique P directement, & le quarré du temps périodique de T inverſement. Et ainſi le mouvement moyen des apſides ſera en raiſon donnée au mouvement moyen des nœuds, & l'un & l'autre mouvement ſera comme le quarré du temps périodique du corps P directement, & le quarré du temps périodique du corps T inverſement. En augmentant ou diminuant l'excentricité & l'inclinaiſon de l'orbite PAB, les mouvemens des apſides & des nœuds ne changeront pas ſenſiblement, à moins que les changemens de l'excentricité & de l'inclinaiſon ne fuſſent fort grands. Fig. 121.

Cor. 17. Comme la ligne LM eſt tantôt plus grande, & tantôt plus petite que le rayon PT, exprimant la force moyenne LM par PT, elle ſera ainſi à la force moyenne SK ou SN qu'on peut exprimer par la ligne ST, comme PT eſt à ST. Mais la force moyenne SN ou ST, par laquelle le corps T eſt retenu dans ſon orbite autour de S, eſt à la force par laquelle le corps P eſt retenu dans ſon orbite autour de T, en raiſon compoſée de la raiſon du rayon ST au rayon PT, & de la raiſon doublée du temps périodique du corps P autour du corps T au temps périodique du corps T autour du corps S: donc, la force moyenne LM eſt à la force par laquelle le corps P eſt retenu dans ſon orbite autour de T (ou à celle avec laquelle le même corps P pourroit tourner dans le même temps périodique autour d'un point quelconque immobile T à la diſtance PT) dans cette même raiſon doublée des temps périodiques. Donc, les temps périodiques étant donnés, ainſi que la diſtance PT, la force moyenne LM ſera donnée; & cette force LM étant

Du mouvement des Corps.

donnée, la force MN le ſera auſſi à peu près par la proportion des lignes PT, MN.

Fig. 121.

Cor. 18. Imaginons pluſieurs corps fluides qui ſe meuvent autour d'un même corps T, à des diſtances égales & par les mêmes loix par leſquelles le corps P tourne autour du corps T; ſuppoſons enſuite que de tous ces corps fluides contigus, il ſe forme un anneau fluide circulaire & concentrique au corps T; chaque partie de cet anneau ſuivant dans tous ſes mouvemens la loi du corps P, ces parties approcheront plus près du corps T, & elles ſe mouveront plus vîte dans leurs conjonctions & leurs oppoſitions avec le corps S que dans leurs quadratures; & les nœuds de cet anneau, ou ſes interſections avec le plan de l'orbite du corps S ou T ſeront en repos dans les ſyzygies; mais hors des ſyzygies ils ſe mouveront en antécédence, & leur mouvement ſera plus prompt dans les quadratures, & plus lent dans les autres lieux. L'inclinaiſon de l'anneau variera auſſi, & ſon axe oſcillera à chaque révolution, & après une révolution entiére il retournera à ſon premier état, à la différence près que produit la préceſſion des nœuds.

Cor. 19. Suppoſons à préſent que le globe T formé de matiére ſolide s'étende juſqu'à cet anneau, qu'il contienne de l'eau dans un canal creuſé autour de lui, & qu'il tourne autour de ſon axe uniformement d'un mouvement commun périodique. Le mouvement de cette eau étant accéléré & retardé tour à tour, comme dans le cas expoſé au corollaire précédent, ſera plus prompt dans les ſyzygies & plus lent dans les quadratures, que celui de la ſuperficie de ce globe, & ainſi il y aura dans ce canal un flux & un reflux tel que celui de la mer.

Cette eau en tournant autour du centre du globe, lequel centre eſt en repos, n'acquéreroit aucun mouvement de flux & de reflux ſi l'attraction du corps S n'avoit pas lieu; car il arrive la même choſe à un globe qui ſe meut uniformement en ligne droite, & qui tourne en même-temps autour de ſon centre (Cor. 5.

des

des loix) qu'à un globe qui ſeroit détourné uniformement du mouvement rectiligne (Cor. 6. des loix). Qu'on imagine de plus l'attraction du corps *S*, & alors l'inégalité de cette attraction troublera le mouvement de l'eau, puiſque les parties de l'eau les plus voiſines ſeront plus attirées, & les plus éloignées le ſeront moins. La force *L M* attirera l'eau en en bas dans les quadratures, & la fera deſcendre juſqu'aux ſyzygies ; au contraire, la force *K L* l'attirera en en haut dans les ſyzygies, l'empêchera de deſcendre davantage & la fera monter juſqu'aux quadratures, à la retardation près qui eſt produite dans le flux & le reflux de l'eau, par le frottement du fonds. Fig. 121.

Cor. 20. Si l'on ſuppoſe à préſent que l'anneau devienne ſolide, & que le globe ſoit diminué, le mouvement de flux & de reflux ceſſera ; mais le mouvement oſcillatoire de l'inclinaiſon, & la préceſſion des nœuds ſubſiſteront.

Si on ſuppoſe enſuite que le globe ait le même axe que l'anneau, qu'il acheve ſes révolutions dans le même temps, qu'il le touche, & lui ſoit attaché par ſa ſuperficie intérieure ; le globe participant du mouvement de l'anneau, ils oſcilleront enſemble, & les nœuds rétrograderont. Car le globe (comme on le dira bientôt) eſt également ſuſceptible de recevoir toutes ſortes d'impreſſions.

Le plus grand angle d'inclinaiſon de l'anneau qui entoure le globe eſt dans le lieu où les nœuds ſont dans les ſyzygies.

Donc, dans le progrès des nœuds vers les quadratures, l'anneau eſt contraint de diminuer ſon inclinaiſon, & par cet effort il imprime un mouvement à tout le globe ; le globe retient le mouvement imprimé juſqu'à ce que l'anneau le lui ôte par un effort contraire, & qu'il lui en imprime un nouveau dans un ſens oppoſé : ainſi par cette raiſon, le plus grand mouvement de l'inclinaiſon décroiſſante ſe fait dans les quadratures des nœuds, & le plus petit angle d'inclinaiſon ſe fait dans les octans après les quadratures ; le plus grand mouvement de réclinaiſon eſt dans les

ſyzygies, & le plus grand angle dans les octans prochains. Il en eſt de même d'un globe qui n'a point d'anneau, & qui eſt un peu plus élevé, ou un peu plus denſe vers l'équateur que vers les Pôles; car cette protubérance de matiére dans les régions de l'équateur lui tient lieu d'anneau, & quoiqu'en augmentant d'une façon quelconque la force centripete de ce globe, toutes ſes parties ſoient ſuppoſées tendre en en bas, de même que les parties gravitantes de la terre, cependant les phénomènes dont on a parlé dans ce Corollaire & dans le précédent, en ſeront à peine altérés, il y aura ſeulement cette différence, que les lieux des plus grandes & des moindres hauteurs de l'eau ne ſeront pas les mêmes, car l'eau reſtera dans ſon orbite, & y ſera retenue, non par ſa force centrifuge, mais par les parois du lit dans lequel elle coule. De plus, la force LM l'attire plus fortement en en bas dans les quadratures, & la force KL ou $NM - LM$ l'attire plus fortement en en haut dans les ſyzygies. Et ces forces réunies ceſſent d'attirer l'eau en en bas, & commencent à l'attirer en en haut dans les octans avant les ſyzigies, & elles ceſſent de l'attirer en en haut, & commencent à l'attirer en en bas dans les octans après les ſyzygies; & par conſéquent la plus grande élévation de l'eau peut arriver à peu près dans les octans après les ſyzygies, & la plus petite vers les octans après les quadratures; à moins que le mouvement d'aſcenſion & de deſcenſion, imprimé à l'eau par ces forces, ne ſe conſerve un peu plus long temps par la force d'inertie de l'eau, ou ne ſe perde un peu plûtôt par les frottemens de l'eau contre le lit qui la contient.

Fig. 121.

Cor. 21. Par la même raiſon que la matiére redondante placée à l'équateur fait rétrograder les nœuds, & les fait rétrograder d'autant plus qu'elle eſt en plus grande quantité, il s'enſuit, que ſi on la diminue, la rétrogradation diminuera auſſi; que ſi on la détruit entiérement, il n'y aura plus de rétrogradation; & enfin, que ſi on enlevoit du globe plus que cette matiére redondante,

qu'on le rendit allongé vers les pôles, ou plus rare vers l'équateur, les nœuds ſeroient mûs en conſéquence.

Cor. 22. Et réciproquement, par le mouvement des nœuds, on pourra connoître la forme du globe. S'il conſerve toujours les mêmes pôles, & que le mouvement des nœuds ſe faſſe en antécédence, la matiére du globe ſera protubérante vers l'équateur; & ſi ce mouvement ſe fait en conſéquence, elle ſera abaiſſée dans ſes régions. Fig. 121.

Suppoſez qu'un globe parfaitement ſphérique, & d'une matiére homogene, ait premiérement été en repos dans l'eſpace libre, & qu'enſuite il ait été pouſſé par une impulſion quelconque oblique à ſa ſuperficie, laquelle impulſion lui ait imprimé un mouvement en partie circulaire, & en partie en ligne droite; comme la forme de ce globe eſt la même par rapport à tous les axes qui paſſent par ſon centre, & qu'il n'a pas plus de tendance pour tourner autour de l'un de ces axes qu'autour d'un autre; il eſt clair, que par ſa propre force il ne changera jamais ni ſon axe, ni l'inclinaiſon de cet axe. Suppoſez enſuite que ce globe reçoive une nouvelle impulſion quelconque oblique dans le même endroit de ſa ſuperficie dans laquelle il a reçu la premiére; comme cette nouvelle impulſion, ſoit qu'elle ſoit imprimée plûtôt ou plus tard, a toujours les mêmes effets; il eſt clair, que ces deux impulſions ſucceſſives produiront le même mouvement que ſi elles avoient été imprimées en même-temps, c'eſt-à-dire, que l'effet ſera le même que ſi le globe avoit été pouſſé par une force ſimple compoſée de l'une & de l'autre, (Corol. 2. des Loix.) & que par conſéquent cet effet ſera un mouvement ſimple autour d'un axe donné d'inclinaiſon: il en eſt de même d'une ſeconde impulſion imprimée dans un autre lieu quelconque de l'équateur du premier mouvement, ainſi que de la premiére impulſion imprimée dans un lieu quelconque de l'équateur du mouvement que la ſeconde auroit produit ſans la premiére; & enfin que de deux impulſions imprimées dans des lieux

Du Mouvement des Corps.

quelconques ; les impulſions produiront le même mouvement circulaire que ſi elles avoient été imprimées à la fois dans le lieu de l'interſection des équateurs des mouvemens qu'elles auroient produit ſéparément.

Fig. 121.

Un globe homogene & parfaitement ſphérique ne retient donc pas l'impreſſion diſtincte de pluſieurs mouvemens différens, mais de tous ces mouvemens divers il naît un mouvement unique, & le globe tend toujours, autant qu'il eſt en lui, à tourner d'un mouvement ſimple & uniforme autour d'un ſeul axe incliné d'une maniére invariable, & la force centripete ne peut changer ni l'inclinaiſon de l'axe, ni la vîteſſe de la rotation. Car ſi on ſuppoſe le globe diviſé en deux hémiſphéres par un plan quelconque qui paſſe par ſon centre & par le centre vers lequel la force eſt dirigée, cette force preſſera également l'un & l'autre hémiſphere, & par conſéquent ce globe, quant au mouvement de rotation, n'inclinera vers aucun côté. Suppoſez à préſent qu'on lui ajoute quelque part entre le pôle & l'équateur une matiére nouvelle accumulée en forme de montagne, cette matiére, par l'effort continuel qu'elle fera pour s'éloigner du centre de ſon mouvement, troublera le mouvement du globe, & fera que ſes pôles changeront à tout moment de poſition, & qu'ils décriront perpétuellement des cercles autour d'eux mêmes & du point qui leur eſt oppoſé. Et on ne pourra empêcher l'énormité de cette vagation des pôles, qu'en plaçant cette montagne dans l'un ou l'autre pôle, auquel cas (Cor. 21.) les nœuds de l'équateur avanceront; ou dans l'équateur, & alors (Cor. 21.) les nœuds rétrograderont; ou enfin en ajoûtant de l'autre côté de l'axe une matiére nouvelle qui cauſe une libration à cette protubérance, & par ce moyen les nœuds avanceront ou rétrograderont, ſelon que cette protubérance & cette nouvelle matiére ſeront plus proches des pôles ou de l'équateur.

PROPOSITION LXVII. THÉORÉME XXVII.

Le corps extérieur S *décrit des aires plus proportionnelles au temps & un orbe plus approchant de la forme elliptique autour du centre de gravité* O *des corps intérieurs* P *&* T *; qu'autour du corps le plus intérieur* T. Fig. 122.

Car les attractions qui portent le corps *S* vers les corps *P* & *T* compoſent ſon attraction abſolue, laquelle eſt dirigée avec plus de force vers le centre commun de gravité *O* de ces corps, que vers le plus grand corps *T*; ainſi elle approche plus d'être réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance *S O*, qu'au quarré de la diſtance *S T*.

PROPOSITION LXVIII. THÉORÉME XXVIII.

Les mêmes loix d'attraction étant poſées, le corps extérieur S *décrira autour de* O, *commun centre de gravité des corps intérieurs* P *&* T, *des aires qui approcheront plus d'être proportionnelles au temps, & une orbite plus approchante de l'ellipſe qui auroit ce même centre dans ſon foyer, ſi le corps le plus intérieur & le plus grand eſt attiré par ces corps de même qu'il les attire, que s'il n'étoit point attiré & qu'il fût en repos, ou qu'il fût plus ou moins agité en vertu d'une attraction plus ou moins forte.* Fig. 122.

Cette Propoſition pourroit ſe démontrer à peu près de la même maniére que la Propoſition *66*. mais il faudroit un raiſonnement trop long que j'omettrai, il ſuffira de la traiter de la maniére ſuivante.

Par la démonſtration de la Propoſition précédente, il eſt aiſé de voir que le centre vers lequel le corps *S* eſt attiré par les forces réunies qui agiſſent ſur lui, eſt près du centre commun de gravité des deux corps *P* & *T*. Si ce centre coïncidoit avec le centre commun de gravité de ces deux corps, & que le centre commun de gravité des trois corps fût en repos; le corps *S* d'une part, & le commun centre de gravité des deux autres

Du mouvement des Corps.

corps de l'autre, décriroient autour de ce commun centre de gravité en repos des ellipſes éxactes, ce qui eſt clair par le Corollaire 2. de la Propoſition 58. & par ce qui a été démontré dans les Propoſitions 64. & 65.

Fig. 122. Ce mouvement elliptique eſt un peu troublé à cauſe de la diſtance du centre de ces deux corps au centre vers lequel le troiſiéme corps *S* eſt attiré. Si de plus le centre commun de ces trois corps ſe meut, cette perturbation ſera encore plus grande, & par conſéquent elle ſera la moindre, lorſque le centre commun de gravité de ces trois corps ſera en repos; c'eſt-à-dire, lorſque le corps le plus grand & le plus intérieur *T* ſera attiré ſelon la même loi que les autres; & elle deviendra toujours de plus grande en plus grande, lorſque le commun centre de gravité de ces trois corps, commencera à ſe mouvoir par la diminution du mouvement du corps *T*, & que ce centre ſera de plus en plus agité.

Cor. Il eſt aiſé de tirer de là, que ſi pluſieurs petits corps font leurs révolutions autour d'un plus grand, leurs orbites approcheront plus d'être des ellipſes, & les aires qu'ils décriront ſeront plus égales, ſi tous ces corps s'attirent & s'agittent mutuellement par des forces accélératrices qui ſoient directement comme leurs forces abſolues, & inverſement comme les quarrés de leurs diſtances, & que le foyer d'une orbite quelconque ſoit placé dans le centre commun de gravité des corps intérieurs, (c'eſt-à-dire, le foyer de la premiére orbite intérieure, dans le centre de gravité du grand corps qui eſt le plus intérieur de tous; le foyer de la ſeconde orbite, dans le centre commun de gravité des deux corps les plus intérieurs, & celui de la troiſiéme orbite, dans le centre commun de gravité des trois corps les plus intérieurs; & ainſi de ſuite,) que ſi le corps intérieur étoit en repos, & qu'il fût le foyer commun de toutes ces orbites.

PROPOSITION LXIX. THÉORÈME XXIX.

Dans un ſyſtême de pluſieurs corps A, B, C, D, *&c. Si un corps* A *attire tous les autres* B, C, D, *&c. par des forces accélératrices qui ſoient réciproquemment comme les quarrés des diſtances au corps attirant ; & qu'un autre* B *attire auſſi tous les autres* A, C, D, *&c. par des forces qui ſoient réciproquement comme les quarrés des diſtances au corps attirant : les forces abſolues des corps attirans* A *&* B *l'un ſur l'autre ſeront dans la même raiſon que ces corps.*

Car à des diſtances égales les attractions accélératrices de tous les corps *B*, *C*, *D*, vers le corps *A* ſont égales entr'elles, par l'hypotheſe, & de même, les attractions accélératrices de tous ces corps vers *B* ſont égales entr'elles à égales diſtances. Donc la force attractive abſolue du corps *A* eſt à la force attractive abſolue du corps *B*, comme l'attraction accélératrice de tous les corps vers *A* eſt à l'attraction accélératrice de tous les corps vers *B* à des diſtances égales ; & l'attraction accélératrice du corps *B* vers *A* eſt dans la même raiſon à l'attraction accélératrice du corps *A* vers *B*. Mais l'attraction accélératrice du corps *B* vers *A* eſt à l'attraction accélératrice du corps *A* vers *B*, comme la maſſe du corps *A* à la maſſe du corps *B* ; parce que les forces motrices, qui, par les définitions 2, 7 & 8, ſont comme les forces accélératrices & les corps attirés conjointement, ſont ici égales entr'elles, par la troiſiéme loi du mouvement. Donc la force attractive abſolue du corps *A* eſt à la force attractive abſolue du corps *B*, comme la maſſe du corps *A* eſt à la maſſe du corps *B*.

Cor. 1. Donc ſi des corps *A*, *B*, *C*, *D*, &c. de ce ſyſtême, chacun, étant conſidéré à part, attire tous les autres par des forces accélératrices qui ſoient réciproquement comme les quarrés des diſtances au corps attirant ; les forces abſolues de tous ces corps ſeront entr'elles comme ces corps eux-mêmes.

Cor. 2. Et par le même raiſonnement on prouvera, que ſi cha-

DU MOUVEMENT DES CORPS.

que corps *A*, *B*, *C*, *D*, &c. de ce ſyſtême, étant conſidéré à part, attire tous les autres par des forces accélératrices, qui ſoient directement ou réciproquement en raiſon d'une puiſſance quelconque des diſtances au corps attirant, ou qu'elles dépendent d'une loi quelconque des diſtances à l'un des corps attirans; les forces abſolues de tous ces corps, ſeront comme ces corps.

Cor. 3. Dans un ſyſtême de corps dont les forces décroiſſent en raiſon doublée des diſtances, s'il arrive que les plus petits tournent autour du plus grand dans des ellipſes éxactes à très-peu de choſes près, que leur foyer commun ſoit à peu près dans le centre de ce plus grand corps, & que ces petits corps décrivent autour du plus grand des aires preſque proportionnelles au temps; les forces abſolues de ces corps ſeront entr'elles éxactement ou à peu près comme ces corps; & au contraire. Ce qui eſt clair par le Corol. de la Prop. 68. & le Corol. 1. de cette Propoſition.

SCHOLIE.

De ces Propoſitions on doit paſſer tout de ſuite à l'analogie qui eſt entre les forces centripetes, & les corps centraux vers leſquels ces forces ſont dirigées. Car il eſt vraiſemblable que les forces qui ſont dirigées vers des corps dépendent de leur nature & de leur quantité, ainſi qu'il arrive dans l'aiman. Dans tous les cas de cette eſpéce, on trouvera les attractions des corps, en aſſignant des forces à chacune de leurs parties, & en ſommant toutes ces forces.

Je me ſers ici du mot d'*attraction* pour exprimer d'une maniére générale l'effort que font les corps pour s'approcher les uns des autres, ſoit que cet effort ſoit l'effet de l'action des corps, qui ſe cherchent mutuellement, ou qui s'agitent l'un l'autre par des émanations, ſoit qu'il ſoit produit par l'action de l'Ether, de l'air, ou de tel autre milieu qu'on voudra, corporel ou incorporel, qui pouſſe l'un vers l'autre d'une maniére quelconque les corps qui y nâgent.

J'emploie

J'emploie le mot d'*impulſion* dans le même ſens général, ne recherchant point dans ce Traité l'eſpéce de ces forces ni leurs qualités phyſiques, mais leurs quantités & leurs proportions mathématiques, comme je l'ai déja dit dans les définitions. C'eſt par les Mathématiques qu'on doit chercher les quantités de ces forces & leurs proportions qui ſuivent des conditions quelconques que l'on a poſées : enſuite lorſqu'on deſcend à la Phyſique, on doit comparer ces proportions avec les Phénoménes ; afin de connoître quelles ſont les loix des forces qui appartiennent à chaque genre de corps attirans, c'eſt alors qu'on peut éxaminer avec plus de certitude ces forces, leurs cauſes, & leurs explications phyſiques. Voyons maintenant quelles ſont les forces avec leſquelles des corps ſphériques, formés de parties qui attirent de la maniére qu'on vient de dire, doivent agir l'un ſur l'autre, & quels ſont les mouvemens qui en doivent réſulter.

DOUZIÉME SECTION.

Des forces attractives des corps ſphériques.

PROPOSITION LXX. THÉORÉME XXX.

Un corpuſcule placé dans l'intérieur d'une ſurface ſphérique dont toutes les parties attirent en raiſon renverſée du quarré des diſtances, n'éprouve aucune attraction de cette ſuperficie.

Soient *HIKL* la ſurface ſphérique, & *P* le corpuſcule placé au dedans. En menant par *P* deux droites quelconques *IPL*, *HPK*, qui coupent dans un des cercles de cette ſphere deux arcs infiniment petits *HI*, *KL*, il eſt clair (Corol. 3. Lem. VII.) que ces arcs ſeront proportionnels aux droites *PH*, *PL*, & Fig. 123.

Du Mouvement des Corps.

que les petites parties de la ſurface de la ſphere, qui ſeroient terminées de tous les côtés par des lignes telles que HK & IL menées par P, ſeroient comme les quarrés des mêmes droites PH, PL. Or delà il ſuit que les attractions de ces petites parties de la ſurface ſphérique ſur le corpuſcule P ſont égales. Car ces attractions doivent être en raiſon directe de ces particules, & en raiſon inverſe du quarré des diſtances, & ces deux raiſons compoſées enſemble en font une d'égalité.

Fig. 123.

Par le même raiſonnement on verroit, que les attractions de toutes les parties de la ſphere ſur le même corpuſcule P ſont toujours égales aux attractions des parties oppoſées, & que par conſéquent elles ſe détruiſent réciproquement; c'eſt-à-dire, que ce corpuſcule ne ſouffre aucune attraction de la ſurface ſphérique. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION LXXI. THÉORÉME XXXI.

La même loi d'attraction étant poſée, un corpuſcule, placé au dehors de la ſurface ſphérique, eſt attiré par cette ſurface en raiſon renverſée du quarré de la diſtance de ce corpuſcule au centre.

Fig. 124. & 125.

Soient $AHKB$, $ahkb$ deux ſuperficies ſphériques égales; S, s leurs centres; P, p deux corpuſcules placés hors de ces ſpheres, chacun à une diſtance quelconque du centre. Soient de plus $PASB$, $pasb$ des droites tirées des corpuſcules aux centres S & s; PHK & PIL, phk & pil d'autres droites tirées par les mêmes corpuſcules en telle ſorte que les arcs HK & IL, hk & il ſoient reſpectivement égaux; SFD & SE, sfd & se les perpendiculaires abaiſſées des centres S & s ſur les cordes HK & IL, hk & il; IR & IQ, ir & iq les perpendiculaires abaiſſées de I ſur PK & ſur PB, & de i ſur pk & ſur pb. Enfin ſoit ſuppoſé que les angles DPE, dpe s'évanouiſſent, ce qui, à cauſe de l'égalité de DS & de ds, de ES & de es, permet de regarder les lignes PE & PF, pe & pf, DF & df comme égales.

Celà poſé, on aura $PI : PF :: RI : DF$ & $pf : pi ::$ 'df ou $DF : ri$, ce qui donnera $PI \times pf : PF \times pi :: RI : ri$ ou (Cor. 3. Lem. VII.) $:: IH : ih$. De plus, $PI : PS ::$ Fig. 124. & 125. $IQ : SE$ & $ps : pi :: se$ ou $SE : iq$ & par conſéquent, $PI \times ps : PS \times pi :: IQ : iq$. Delà on tire $PI^2 \times pf \times ps : pi^2 \times PF \times PS :: IQ \times HI : ih \times iq$. C'eſt-à-dire, que la petite ſurface ſphérique produite par la révolution de HI autour de PS eſt à la petite ſurface ſphérique produite par la révolution de hi autour de ps, comme $PI^2 \times pf \times ps$ à $pi^2 \times PF \times PS$. Mais les forces avec leſquelles ces petites ſurfaces tirent vers elles les corpuſcules P & p ſont (par hypotheſe) comme ces ſurfaces directement, & comme les quarrés des diſtances PI & pi inverſement, donc ces forces ſont comme $pf \times ps$ à $PF \times PS$.

En décompoſant préſentement ces forces, par le Corol. 2. des loix, pour avoir les parties qui en réſultent dans le ſens des diamétres PS, ps il eſt clair, que les forces réſultantes dans cette direction ſeront aux forces totales comme PS à PF & comme ps à pf. Donc la force ſuivant PS de la petite ſurface produite par HI ſera à la force ſuivant ps de la petite ſurface produite par hi, comme $pf \times ps \times \frac{PF}{PS}$ à $PF \times PS \times \frac{pf}{ps}$, c'eſt-à-dire, en raiſon renverſée des quarrés des diſtances PS, ps. Or on trouveroit la même choſe pour toutes les autres petites ſurfaces dont les deux ſuperficies ſphériques ſont compoſées. Donc les attractions entiéres de ces deux ſuperficies ſur les corpuſcules P & p ſont entr'elles en raiſon renverſée des quarrés des diſtances de ces corpuſcules aux centres. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION LXXII. THÉORÉME XXXII.

Si toutes les parties d'une ſphere homogene attirent en raiſon renverſée du quarré des diſtances ; & qu'on ſuppoſe donnés, tant la denſité de cette ſphere, que le rapport du rayon de cette ſphere

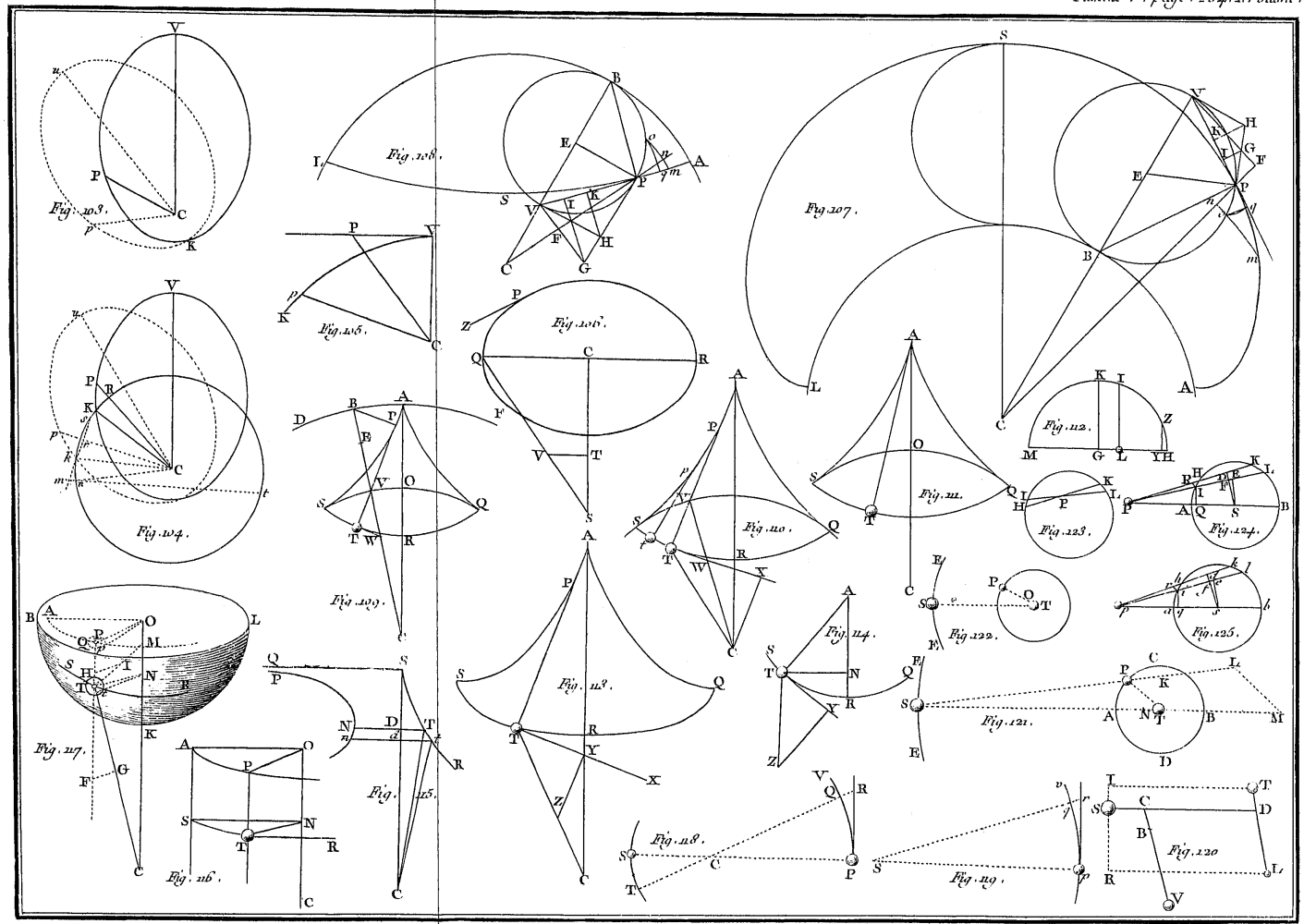
à la diſtance du corpuſcule qu'elle attire, l'attraction éxercée ſur ce corpuſcule ſera proportionnelle au rayon de la ſphere.

Qu'on ſe repréſente deux ſpheres & deux corpuſcules placés à des diſtances de leurs centres reſpectivement proportionnelles aux rayons de ces ſpheres. Qu'on imagine enſuite ces deux ſpheres compoſées d'une infinité de particules reſpectivement ſemblables & ſemblablement poſées par rapport aux corpuſcules. Il eſt clair, que les attractions que chacun de ces corpuſcules ſouffrira de la part de toutes les particules de la ſphere attirante, ſeront en raiſon compoſée de toutes ces particules directement, & de tous les quarrés de leur diſtance inverſement. Mais toutes ces particules étant ſemblables & ſemblablement placées, elles ſeront comme les cubes des rayons, & les quarrés des diſtances des corpuſcules à chaque particule ſont comme les quarrés de ces mêmes rayons; donc toutes les attractions de ces particules ſeront ſeulement comme les rayons; donc les attractions de ces deux ſpheres ſeront dans cette même raiſon.
C. Q. F. D.

Cor. 1. Si deux corpuſcules, ſe mouvant autour de deux ſpheres de même matiére attractive, décrivent chacun un orbite circulaire, & que les rayons de ces orbites ſoient proportionnels aux rayons des ſpheres attirantes, les temps périodiques ſeront égaux.

Cor. 2. Et réciproquement, ſi les temps périodiques ſont égaux, les diſtances des corpuſcules ſeront proportionnelles aux rayons des ſpheres. Ces deux Corollaires ſont évidens par le Corol. 3. de la Prop. 4.

Cor. 3. Deux ſolides quelconques ſemblables & homogenes, étant compoſés de parties qui attirent en raiſon renverſée des quarrés des diſtances, éxercent ſur deux corpuſcules, placés ſemblablement par rapport à eux, des forces qui ſont dans la raiſon directe de leurs dimenſions ſemblables.


Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.
Fig. 113.
Fig. 114.
Fig. 115.
Fig. 116.
Fig. 117.
Fig. 118.
Fig. 119.
Fig. 120.
Fig. 121.
Fig. 122.
Fig. 123.
Fig. 124.
Fig. 125.

PROPOSITION LXXIII. THÉORÉME XXXIII.

Un corpuſcule, placé dans l'intérieur d'une ſphere dont les parties attirent en raiſon renverſée du quarré des diſtances, tend vers le centre de cette ſphere avec une force proportionnelle à la ſimple diſtance.

Que *A C B D* ſoit la ſphere attirante, *P* le corpuſcule placé dans ſon intérieur, *S* le centre de cette ſphere, & *P E Q F* la ſphere décrite du même centre *S* & du rayon *P S*. Il eſt clair, par la Propoſition 70, que toutes les ſurfaces ſphériques compriſes entre *A C B D*, & *E P F Q* n'éxercent aucune attraction ſur le corpuſcule *P*, & que par conſéquent la ſeule ſphere intérieure *P E Q F* agit ſnr ce corpuſcule. Mais l'attraction de cette ſphere eſt par la Propoſition 72. comme la diſtance *P S*. Donc, &c. *C. Q. F. D.* Fig. 126.

S C H O L I E.

Les ſuperficies que je ſuppoſe ici former un ſolide par leur aſſemblage ne ſont pas des ſuperficies purement mathématiques, ce ſont des orbes dont l'épaiſſeur eſt ſi petite, qu'on la peut regarder comme nulle, c'eſt-à-dire, les orbes évanouiſſantes qui compoſent une ſphere lorſque leur nombre & leur ténuité ſont augmentés à l'infini. J'entends de même par les points qui compoſent les lignes, les ſuperficies, & les ſolides, des particules de ces quantités dont l'étendue eſt ſi petite, qu'on peut les négliger.

PROPOSITION LXXIV. THÉORÉME XXXIV.

Les mêmes choſes que dans les Propoſitions précédentes étant poſées, un corpuſcule placé hors d'une ſphere, eſt attiré vers le centre de cette ſphere par une force réciproquement proportionnelle au quarré de ſa diſtance à ce centre.

Car ſi on ſuppoſe que cette ſphere ſoit partagée en une infinité de ſurfaces ſphériques qui aient le même centre qu'elle, toutes ces ſurfaces éxerceront ſur le corpuſcule extérieur une

DU MOUVEMENT DES CORPS.

attraction qui ſera, ſuivant la Prop. 71. dans la raiſon renverſée du quarré de la diſtance du corpuſcule au centre. Ajoutant donc toutes ces attractions, la ſomme totale ou l'attraction de la ſphere ſera dans la même raiſon. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Delà il ſuit, qu'à des diſtances égales, les attractions des ſpheres de même denſité ſeront comme ces ſpheres. Car, par la Prop. 72. deux ſpheres éxercent à des diſtances proportionnelles à leurs rayons des forces auſſi proportionnelles à ces rayons. Si on diminue enſuite la plus grande de ces deux diſtances dans la raiſon qu'ont entr'eux les rayons des deux ſpheres, cette diſtance deviendra par ce moyen égale à l'autre, & l'attraction ſera à ce qu'elle étoit d'abord dans la raiſon du quarré du rayon de la plus grande ſphere au quarré du rayon de la plus petite. Mais cette attraction étoit déja à l'attraction vers l'autre ſphere dans la raiſon ſimple des mêmes rayons; donc elle ſera alors comme les cubes de ces rayons, c'eſt-à-dire, comme les ſpheres.

Cor. 2. A des diſtances quelconques, les attractions ſeront en raiſon directe des ſpheres, & inverſe des quarrés des diſtances.

Cor. 3. Si un corpuſcule eſt placé hors d'une ſphere dont toutes les parties ſont ſuppoſées avoir des forces attractives, & qu'on ait remarqué que l'attraction de ce corpuſcule vers la ſphere entiere ſoit en raiſon inverſe du quarré des diſtances au centre, les attractions de toutes les particules de la ſphere ſeront auſſi en raiſon renverſée des quarrés de leurs diſtances au corpuſcule attiré.

PROPOSITION LXXV. THÉORÉME XXXV.

Si à tous les points d'une ſphere donnée tendent des forces centripetes égales, qui décroiſſent en raiſon doublée des diſtances à ces points, cette ſphere éxercera ſur une autre ſphere quelconque compoſée de parties homogenes entr'elles une attraction qui ſera en raiſon renverſée du quarré des diſtances de leurs centres.

Car l'attraction d'une particule quelconque de la ſphere attirée

eſt en raiſon renverſée du quarré de ſa diſtance au centre de la ſphere attirante par la Prop. 74. & elle eſt par conſéquent la même qu'elle ſeroit ſi toute la ſphere attirante étoit réduite à un corpuſcule placé dans ſon centre. Mais l'action de ce corpuſcule auquel on ſuppoſe réduite la ſphere attirante, doit être la même ſur la ſphere attirée qu'elle ſeroit, ſi au lieu d'agir ſur cette ſphere attirée, il éprouvoit au contraire vers les parties de cette ſphere des forces égales à celles avec leſquelles il les attire; & la ſomme des forces avec leſquelles il ſeroit attiré par cette ſphere, ſeroit, par la Propoſition 74. en raiſon inverſe du quarré de la diſtance au centre. Donc l'attraction du corpuſcule, ou, ce qui revient au même, celle de la ſphere attirante ſur la ſphere attirée, eſt réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance des centres de ces ſpheres.

Cor. 1. Les attractions des ſpheres vers d'autres ſpheres homogenes ſont comme les ſpheres attirantes directement, & comme les quarrés des diſtances des centres inverſement.

Cor. 2. Il en eſt de même lorſque la ſphere attirée attire auſſi. Car chaque point de cette ſphere attire les points de l'autre avec la même force avec laquelle il en eſt réciproquement attiré. Si donc dans toute attraction le point attirant éprouve la même action que le point attiré, il en naîtra une action mutuelle double, proportions gardées.

Cor. 3. Tout ce qui a été dit ci-deſſus du mouvement des corps dans des ſections coniques autour des foyers a lieu, ſi on place dans ces foyers les centres des ſpheres attirantes.

Cor. 4. Et tout ce qui concerne le mouvement dans des ſections autour du centre de ces courbes peut s'appliquer aux mouvemens qui ſe font dans l'intérieur d'une ſphere.

PROPOSITION LXXVI. THÉORÈME XXXVI.

Deux ſpheres dont toutes les parties agiſſent en raiſon renverſée du quarré des diſtances, étant compoſées l'une & l'autre d'orbes concen-

Du Mouvement des Corps.

triques dont les denſités du centre à la circonférence varient ſuivant une loi quelconque, s'attirent réciproquement avec des forces qui ſont en raiſon renverſée du quarré des diſtances de leurs centres.

Fig. 127.

Soient AB, CD, EF, &c. tant de ſpheres concentriques homogenes qu'on voudra, dont les intérieures étant ajoutées aux extérieures, ou en étant retranchées forment une ſphere totale AB compoſée de couches plus ou moins denſes vers le centre qu'à la circonférence. Soient enſuite GH, IK, LM, &c. d'autres ſpheres homogenes concentriques dont l'addition ou la ſouſtraction forment pareillement une ſphere GH hétérogene du centre à la circonférence. Par la Prop. 75. une quelconque des ſpheres homogénes AB ou CD, &c. & une quelconque des ſpheres homogénes GH, IK, &c. s'attireront réciproquement avec une force qui eſt en raiſon renverſée du quarré de SP. Donc les attractions réciproques des ſpheres totales hétérogenes AB, GH qui ſont produites par les ſommes ou par les différences des attractions des ſpheres homogenes, ſeront auſſi en raiſon renverſée du quarré de SP.

Qu'on ſuppoſe préſentement que le nombre de toutes ces ſpheres homogenes, dont l'addition ou la ſouſtraction forment les ſpheres hétérogenes, ſoit augmenté juſqu'à l'infini, on pourra donner à ces ſpheres hétérogenes une loi quelconque de denſité du centre à la circonférence, & leur attraction réciproque demeurera toujours en raiſon renverſée du quarré de la diſtance SP. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Si on a pluſieurs ſpheres compoſées ainſi d'orbes de différentes denſités, l'attraction accélératrice de l'une quelconque de ces ſpheres vers une autre quelconque, à même diſtance, ſera comme la ſphere attirante.

Cor. 2. Et à diſtance inégale, elle ſera comme cette ſphere diviſée par le quarré de la diſtance.

Cor. 3. Mais l'attraction motrice, à diſtance égale, ſera comme le produit de la ſphere attirée par la ſphere attirante.

Cor. 4.

Cor. 4. Et à diſtance inégale, comme ce produit diviſé par le quarré de la diſtance.

Cor. 5. Il en eſt de même lorſque l'attraction vient de la force attractive mutuelle de chaque ſphere l'une vers l'autre, car de ces deux attractions il s'en forme une ſeule égale à leur ſomme.

Cor. 6. Lorſque l'on comparera les révolutions que des ſpheres entierement ſemblables, formées, ſuivant la même loi, ainſi d'orbes de différentes denſités, font les unes autour des autres, on trouvera que ſi les diſtances de celles qui tournent à celles qui ſont fixes, ſont proportionnelles aux rayons de ces ſpheres fixes, les temps périodiques ſeront égaux.

Cor. 7. Et réciproquement ſi les temps périodiques ſont égaux, les diſtances ſeront proportionnelles à ces rayons.

Cor. 8. Tout ce qu'on a démontré ci-deſſus du mouvement des corps autour des foyers des ſections coniques a lieu, lorſque la ſphere attirante, formée ainſi d'orbes de différentes denſités, eſt placée au foyer.

Cor. 9. Et il en eſt de même lorſque le corps qui décrit la trajectoire eſt auſſi une ſphere attirante formée d'orbes de différentes denſités.

PROPOSITION LXXVII. THÉORÉME XXXVII.

Si toutes les parties des ſpheres attirent avec des forces qui ſoient comme les diſtances, la force compoſée par laquelle deux ſphéres s'attirent mutuellement eſt comme la diſtance qui ſépare les centres de ces ſpheres.

Cas. 1. Soient $AEBF$ une ſphere, S ſon centre, P un corpuſcule qu'elle attire, $PASB$ l'axe de la ſphere paſſant par le centre du corpuſcule, EF, ef deux ſections de la ſphere faites par des plans qui coupent l'axe perpendiculairement à des diſtances égales SG, sg du centre ; ſoit de plus H un point quelconque du plan EF. Il eſt clair, que la force centripete du point H ſur le corpuſcule P ſuivant la ligne PH, ſera comme Fig. 128.

Du Mouvement des Corps.

la diſtance PH; & que par le Cor. 2. des loix, cette force décompoſée ſuivant PG, c'eſt-à dire, la force vers le centre S, ſera comme la droite PG. Donc la force de tous les points du plan EF, c'eſt-à-dire, la force totale de ce plan, par laquelle le corpuſcule P eſt attiré vers le centre S, eſt comme la diſtance PG multipliée par le nombre des points, c'eſt-à-dire, comme le ſolide formé par ce même plan EF, & cette droite PG. Par la même raiſon, la force du plan ef par laquelle le corpuſcule P eſt attiré vers le centre S ſera comme ce plan multiplié par ſa diſtance Pg, ou comme le plan EF égal au plan ef multiplié par cette même diſtance Pg, d'où il ſuit, que la ſomme des forces de l'un & de l'autre plan ſera comme le plan EF multiplié par la ſomme des diſtances $PG + Pg$, c'eſt-à-dire, comme ce plan multiplié par le double de la diſtance PS qui eſt entre le centre & le corpuſcule, ou, ce qui revient au même, comme la ſomme des plans égaux $EF+ef$ multipliée par cette même diſtance; & comme il en ſeroit de même des forces de tous les plans qu'on peut imaginer de chaque côté du centre de la ſphere, & également diſtans de ce centre, la ſomme de toutes ces forces, c'eſt-à-dire, celle de la ſphere entiere ſur le corpuſcule, ſera comme cette ſphere multipliée par la diſtance SP. *C. Q. F. D.*

Fig. 128.

Cas. 2. Si on ſuppoſe que le corpuſcule P attire la ſphere $AEBF$, on prouvera par le même raiſonnement qu'il éxercera ſur cette ſphere une force proportionnelle à la diſtance PS. *C. Q. F. D.*

Cas. 3. Qu'on imagine préſentement en P une autre ſphere compoſée d'une infinité de corpuſcules P. De ce que la force, par laquelle un corpuſcule unique eſt attiré, eſt en raiſon compoſée de la ſolidité de la premiere ſphere, & de la diſtance du corpuſcule à ſon centre, & de ce que cette force eſt par conſéquent la même que ſi elle émanoit toute d'un corpuſcule unique placé au centre de la premiere ſphere : il ſuit que la force

entiére par laquelle ſont attirés tous les corpuſcules de la ſeconde ſphere, c'eſt-à-dire, la force par laquelle la ſeconde ſphere entiere eſt attirée, ſera la même qu'elle ſeroit, ſi toute cette ſphere étoit attirée par un corpuſcule unique placé au centre de la premiere ſphere : & par conſéquent, par le cas 2, cette force ſera proportionnelle à la diſtance entre les centres des deux ſpheres. *C. Q. F. D.* Fig. 128.

Cas. 4. Et ſi on ſuppoſe que ces ſpheres s'attirent mutuellement, leurs forces réunies conſerveront la même proportion. *C. Q. F. D.*

Cas. 5. Que le corpuſcule p ſoit placé maintenant au-dedans de la ſphere $AEBF$, parce que la force du plan ef ſur ce corpuſcule eſt comme le ſolide formé par ce plan & la diſtance pg ; & que la force contraire du plan EF eſt comme le ſolide formé par ce même plan & la diſtance pG ; la force compoſée des deux ſera comme la différence de ces ſolides, c'eſt-à-dire, comme la ſomme des plans égaux multipliée par la moitié de la différence des diſtances, c'eſt-à-dire, comme cette ſomme multipliée par la diſtance pS du corpuſcule au centre de la ſphere. Or, comme il en ſeroit de même de l'attraction de tous les plans EF, ef qu'on peut imaginer dans la ſphere entiere, c'eſt-à-dire, de l'attraction de toute la ſphere, cette attraction doit donc être le produit de la ſomme de tous ces plans, ou de la ſphere totale par la diſtance pS. *C. Q. F. D.* Fig. 129.

Cas 6. Et ſi on s'imagine une nouvelle ſphere compoſée d'un nombre innombrable de corpuſcules p, & placée au dedans de la premiere ſphere $AEBF$; on prouvera, comme ci-deſſus, que l'attraction ſera comme la diſtance pS des centres, ſoit que l'on conſidere l'attraction ſeule d'une ſphere ſur l'autre, ſoit que l'on conſidere l'attraction mutuelle des deux ſpheres l'une ſur l'autre. *C. Q. F. D.*

Du Mouvement des Corps.

PROPOSITION LXXVIII. THÉORÉME XXXVIII.

Deux ſpheres, compoſées chacune d'orbes dont les denſités varient du centre à la circonférence ſuivant une loi quelconque, étant formées l'une & l'autre d'une matiére dont toutes les parties attirent en raiſon directe des diſtances, éxercent l'une ſur l'autre des forces proportionnelles à la diſtance de leurs centres.

Cette Propoſition ſuit de la précédente de la même maniere que la Propoſition 76. ſuit de la Propoſition 75.

Cor. Tout ce qui a été démontré ci-deſſus dans les Propoſitions 10 & 64 du mouvement des corps autour des centres des ſections coniques a lieu, lorſque les corps attirans & les corps attirés ont les conditions qu'on ſuppoſe dans cette Propoſition.

SCHOLIE.

J'ai expliqué les deux principaux cas des attractions, celui où les forces centripetes décroiſſent en raiſon doublée des diſtances, & celui où elles croiſſent dans la raiſon ſimple des diſtances. Dans l'un & l'autre cas, les révolutions des corps ſe font dans des ſections coniques, & les forces centripetes des particules qui compoſent les corps ſphériques croiſſent ou décroiſſent en s'éloignant du centre, ſelon la même loi que la force centripete des corps entiers, ce qui eſt digne de remarque.

Les autres cas qui donnent des concluſions moins élégantes ſeroient trop longs à parcourir chacun en particulier : je vais les donner tous par une méthode générale.

LEMME XXIX.

Si on décrit du centre S *un cercle quelconque* A E B, *& du centre* P *deux cercles* E F, c f, *qui coupent, tant le premier en* E *& en* e, *que la ligne* P S *en* F *& en* f, *qu'on abaiſſe de plus* E D, e d *perpendiculaires ſur* P S ; *je dis, que lorſque la diſtance des arcs* E F, c f *diminue à l'infini, la derniére raiſon de la ligne éva-*

Fig. 130.

nouiſſante Dd *à la ligne évanouiſſante* Ff *eſt la même que celle de la ligne* PE *à la ligne* PS.

Car en prolongeant la droite Ee qui coïncide avec l'arc évanouiſſant Ee juſqu'à ce qu'elle rencontre la droite PS en T; & abaiſſant du point S la perpendiculaire SG ſur PE, on aura (à cauſe des triangles ſemblables DTE, dTe, DES;) $Dd : Ee :: DT : TE$, ou $:: DE : ES$; & en ſuppoſant que q ſoit la rencontre de Pe & de l'arc EF, les triangles Eeq, ESG ſeront ſemblables par le Lemme 8. & par le Cor. 3. du Lemme 7. ils donneront $Ee : eq$ ou $Ff :: ES : SG$; & $Dd : Ff :: DE : SG$, c'eſt-à-dire, (à cauſe des triangles ſemblables PDE, PGS) $:: PE : PS$. C. Q. F. D. Fig. 130.

PROPOSITION LXXIX. THÉORÉME XXXIX.

Si la ſuperficie EF, fe, *dont la largeur eſt ſuppoſée évanouiſſante, tourne autour de l'axe* PS, *& que chacune des particules du ſolide produit par cette révolution attire le corpuſcule* P *avec une force égale, la force entiére avec laquelle ce ſolide attirera le corpuſcule* P *vers* S *ſera en raiſon compoſée du ſolide* $DE^2 \times Ff$, *& de la force avec laquelle une particule donnée & placée dans un lieu* Ff *attireroit ce même corpuſcule.* Fig. 131.

N'éxaminant d'abord que la force de la ſuperficie ſphérique FE, produite par la circonvolution de l'arc FE, on verra, par ce qu'a enſeigné Archimede dans ſon Traité *de la Sphere & du Cylindre*, que la partie annulaire de cette ſuperficie, produite par la révolution du petit arc Er dont l'extrémité r eſt la rencontre de ed & de EF, doit être proportionnelle à Dd, le rayon PE demeurant conſtant; & la force de cette ſuperficie, éxercée ſuivant les lignes PE, devant être comme cette ſuperficie annulaire, ſera auſſi comme Dd, ou, ce qui eſt la même choſe, comme le rectangle ſous PE & Dd: mais cette même force éxercée ſuivant la ligne PS qui tend au centre S ſera moindre dans la raiſon de PD à PE: donc ſa force dans cette

Du Mouvement des Corps.

direction ſera proportionnelle à $PD \times Dd$. Et ſi on ſuppoſe que la ligne DF ſoit diviſée en un nombre innombrable de parties égales telles que Dd, & que la ſuperficie FE ſoit diviſée en même temps en autant d'anneaux égaux par les plans élevés perpendiculairement du point D, il eſt clair, que la ſomme des forces de tous ces anneaux ſera comme la ſomme de tous les $PD \times Dd$, c'eſt-à-dire, comme $\frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2$, & par conſéquent comme DE^2.

Fig. 131.

Connoiſſant ainſi l'attraction de la ſuperficie FE, celle du ſolide $FEfe$ ſera connue auſſi : il ne faudra pour l'avoir que multiplier la premiere par Ff, c'eſt-à-dire, que cette attraction deviendra proportionnelle à $DE^2 \times Ff$, ſi la force qu'une particule donnée Ff éxerce ſur le corpuſcule P à la diſtance PF eſt donnée. Mais ſi cette force n'eſt pas donnée, la force du ſolide $EFfe$ ſera comme le ſolide $ED^2 \times Ff$ & cette force qui n'eſt pas donnée conjointement.

PROPOSITION LXXX. THÉORÉME XL.

Fig. 132.

ABE *étant une ſphere homogene dont le centre eſt* S, *& dont toutes les parties attirent ſuivant une loi quelconque des diſtances*, *&* P *un corpuſcule placé ſur l'axe* AB *de cette ſphere, la force avec laquelle ce corpuſcule ſera attiré par toute la ſphere, ſera proportionnelle à l'aire* ABN *d'une courbe* ANB *dont les ordonnées* DN *correſpondantes aux ordonnées* DE *du cercle* SEB *ſont priſes en raiſon compoſée de la force qu'éxerce ſur* P *la particule placée en* E, *& du ſolide* $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$.

Conſervant les conſtructions du dernier Lemme & du dernier Théoréme, concevez l'axe AB de la ſphere diviſé en un nombre innombrable de particules égales Dd, & toute la ſphere diviſée en autant de petites lames ſphériques $EFfe$; & par le point n élevez l'ordonnée dn à la courbe ANB, il eſt clair, par le Théoréme précédent, que la force avec laquelle la petite

lame $EFfe$ attire le corpuſcule P, eſt en raiſon compoſée de $DE^2 \times Ff$ & de la force qu'une particule éxerce à la diſtance PE. Mais par le dernier Lemme $Dd : Ff :: PE : PS$, ce qui donne $Ff = \frac{PS \times Dd}{PE}$; & $DE^2 \times Ff = Dd \times \frac{DE^2 \times PS}{PE}$. Donc la force de la petite lame $EFfe$ eſt en raiſon compoſée de $Dd \times \frac{DE^2 \times PS}{PE}$ & de la force qu'une particule éxerce à la diſtance PF, c'eſt-à-dire, par la conſtruction de la courbe ANB, comme $DN \times Dd$ ou comme l'aire évanouiſſante $DNnd$. Donc les forces de toutes les petites lames de même eſpéce, ou, ce qui revient au même, la force de la ſphere entiere ſur le corpuſcule P eſt comme l'aire totale ANB. Fig. 132.

Cor. 1. Delà, ſi la force centripete qui tend à chaque particule eſt toujours la même quelle que ſoit la diſtance, & qu'on ſuppoſe DN proportionnelle à $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$, la force totale par laquelle le corpuſcule P ſera attiré par la ſphere ſera comme l'aire ANB.

Cor 2. Si la force centripete des particules eſt réciproquement comme la diſtance du corpuſcule qu'elles attirent, & qu'on faſſe DN proportionnelle à $\frac{DE^2 \times PS}{PE^2}$, la force par laquelle le corpuſcule P ſera attiré par toute la ſphére, ſera comme l'aire ANB.

Cor. 3. Si la force centripete des particules eſt réciproquement comme le cube de la diſtance du corpuſcule qu'elles attirent, & qu'on faſſe DN proportionnelle à $\frac{DE^2 \times PS}{PE^4}$; la force par laquelle le corpuſcule ſera attiré par toute la ſphere ſera comme l'aire ANB.

Cor. 4. Et généralement, ſi on ſuppoſe que la force centripete, qui tend vers chaque particule de la ſphere, ſoit réciproquement comme la quantité V, & qu'on prenne DN proportionnelle à

Du Mouvement des Corps.

$\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$; la force, par laquelle le corpuſcule ſera attiré par toute la ſphere, ſera comme l'aire ANB.

PROPOSITION LXXXI. PROBLÉME XLI.

Fig. 133. *Les mêmes choſes étant poſées, on demande la valeur de l'aire* ANB.

Ayant tiré du point P la droite PH qui touche la ſphere en H, & ayant abaiſſé la perpendiculaire HI ſur l'axe PAB, on coupera PI en deux parties égales au point L, & on aura $PE^2 = PS^2 + SE^2 + 2PS \times SD$; mais SE^2 ou SH^2 eſt égal au rectangle $PS \times SI$ à cauſe des triangles ſemblables SPH, SHI : donc $PE^2 = PS \times \overline{PS + SI} + 2SD$, c'eſt-à-dire, $= PS \times 2SL \times 2SD = PS \times 2LD$. De plus $DE^2 = SE^2 - SD^2 = SE^2 - LS^2 + 2LS \times LD - LD^2$ ou enfin $= 2SL \times LD - LD^2 - AL \times LB$, à cauſe que $LS^2 - SE^2$ ou $LS^2 - SA^2$ eſt égal au rectangle $AL \times LB$. Ecrivant donc $2SL \times LD - LD^2 - AL \times LB$ au lieu de DE^2; la quantité $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$ (laquelle, ſelon le Corol. 4. de la Prop. précédente, eſt comme la longueur de l'ordonnée DN) ſe décompoſera dans les trois parties $\frac{2SL \times LD \times PS}{PE \times V} - \frac{LD^2 \times PS}{PE \times V} - \frac{AL \times LB \times PS}{PE \times V}$; & ſi dans ces trois parties on écrit au lieu de V la quantité qui exprime la force centripete d'une particule en E ſur le corpuſcule P, & au lieu de PE la moyenne proportionnelle entre PS & $2LD$; on aura les ordonnées d'autant de courbes, dont on connoîtra les aires par les méthodes ordinaires. *C. Q. F. F.*

Exemple 1. Si la force centripete tendante à chacune des particules de la ſphere eſt réciproquement comme la diſtance, écrivez PE au lieu de V & enſuite $2PS \times LD$ au lieu de PE^2, & vous aurez DN proportionnelle à $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{AL \times LB}{2LD}$.

Suppoſez que DN ſoit égale au double $2SL - DL - \frac{AL \times LB}{LD}$

de

de cette quantité : la partie donnée $2SL$ de cette ordonnée ſervant d'ordonnée elle-même, AD ſervant d'abſciſſe, donnera pour la premiere aire le rectangle $2SL \times AB$; la ſeconde partie variable LD ſervant d'ordonnée pour la même abſciſſe AD donnera pour la ſeconde aire $\frac{LB^2 - LA^2}{2}$ ou $SL \times AB$; qui étant ſouſtraite de la premiere aire $2SL \times AB$ donnera l'aire $SL \times AB$. La troiſiéme partie $\frac{AL \times LB}{LD}$ variable auſſi, donnera pour la troiſiéme aire, une aire hyperbolique, laquelle étant ſouſtraite de l'aire $SL \times AB$ donnera pour reſte l'aire cherchée ANB d'où l'on tire la conſtruction ſuivante du Problême. Fig. 133.

Aux points L, A, B élevez les perpendiculaires Ll, Aa, Bb, deſquelles $Aa = LB$ & $Bb = LA$. Décrivez enſuite par les points ab l'hyperbole ab dont les aſymptotes ſoient Ll, LB, & la corde ba renfermera l'aire aba égale à l'aire cherchée ANB. Fig. 134.

Exemple 2. Si la force centripete qui tend à chaque particule de la ſphere, eſt réciproquement comme le cube de la diſtance, ou ce qui revient au même, comme le cube diviſé par un plan quelconque donné ; écrivez alors $\frac{PE^3}{2AS^2}$ aulieu de V, & $2PS \times LD$ au lieu de PE^2 ; vous aurez par ce moyen DN proportionnelle à $\frac{SL \times AS^2}{PS \times LD} - \frac{AS^2}{2PS} - \frac{AL \times LB \times AS^2}{2PS \times LD^2}$, c'eſt-à-dire, (à cauſe que $\div PS, AS, SI$) proportionnelle à $\frac{SL \times SI}{LD} - \frac{1}{2}SI - \frac{AL \times LB \times SI}{2LD^2}$. Faiſant ſervir de même ces trois parties d'ordonnées pendant que AD ſert d'abſciſſe, la premiere $\frac{LS \times SI}{LD}$ donnera l'aire d'une hyperbole ; la ſeconde $\frac{1}{2}SI$ donnera l'aire $\frac{1}{2}AB \times SI$; & la troiſiéme $\frac{AL \times LB \times SI}{2LD^2}$ donnera l'aire $\frac{AL \times LB \times SI}{2LA} - \frac{AL \times LB \times SI}{2LB}$, c'eſt-à-dire, $\frac{1}{2}AB \times SI$;

ſouſtrayant de la premiére la ſomme de la ſeconde & de la troiſiéme, il reſtera l'aire cherchée ANB, ce qui fournit cette conſtruction.

Fig. 135. Elevez aux points L, A, S, B les perpendiculaires Ll, Aa, Ss, Bb, deſquelles Ss ſoit égale à SI; & décrivez par le point s l'hyperbole asb dont les aſymptotes ſoient Ll, BL. Cette hyperbole coupera les lignes Aa, Bb aux points a & b, & donnera par ce moyen l'aire $AasbB$, de laquelle retranchant le rectangle $2AS \times SI$, on aura l'aire cherchée ANB.

Fig. 133. *Exemple* 3. Si la force centripete qui tend à chaque particule de la ſphere décroît en raiſon quadruplée de la diſtance à ces particules, écrivez $\frac{PE^4}{2AS^3}$ au lieu de V, & enſuite $\sqrt{2PS \times LD}$ au lieu de PE, par ce moyen DN deviendra proportionnelle à $\frac{SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{I}{\sqrt{LD^3}} - \frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{I}{\sqrt{LD}} - \frac{SI^2 \times AL \times LB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{I}{\sqrt{LD^5}}$, dont les trois parties, ſervant toujours d'ordonnées tandis que AD ſert d'abſciſſe, donneront les trois aires $\frac{2SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{I}{\sqrt{LA}} - \frac{I}{\sqrt{LB}}$; $\frac{SI^2}{\sqrt{2SI}} \times \overline{\sqrt{LB} - \sqrt{LA}}$; & $\frac{SI^2 \times AL \times LB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{I}{LA \times \sqrt{LA}} - \frac{I}{LB \times \sqrt{LB}}$ qui ſe réduiſent aux trois quantités $\frac{2SI^2 \times SL}{LI}$; SI^2 & $SI^2 \times \frac{2SI^3}{3LI}$, de la premiere deſquelles retranchant la ſomme des deux autres, il reſte $\frac{4SI^3}{3LI}$; d'où l'on apprend que la force avec laquelle P eſt attiré par la ſphere entiere eſt proportionnelle à $\frac{SI^3}{PI}$, ou, ce qui revient au même, que cette force eſt en raiſon renverſée de $PS^3 \times PI$. C. Q. F. T.

Par la même méthode on pourroit déterminer l'attraction d'un corpuſcule placé au-dedans d'une ſphere, mais on aura plus facilement cette attraction par le Théoréme ſuivant.

PROPOSITION LXXXII. THÉORÉME XLI.

Dans une ſphere dont le centre eſt S *&* *le rayon* SA, *ſi on prend* SI, SA, SP *continuellement proportionnelles, l'attraction d'un corpuſcule placé dans un lieu quelconque* I *au dedans de cette ſphere, ſera à l'attraction d'un autre corpuſcule placé hors de la ſphere, dans le lieu* P, *en raiſon compoſée de la raiſon ſousdoublée des diſtances* IS, PS, *du centre, & de la raiſon ſousdoublée des forces avec leſquelles ces mêmes corpuſcules* P *&* I *ſeroient attirés par une ſeule particule placée au centre de la ſphere.*

Fig. 136.

Si, par exemple, les forces centripetes des particules de la ſphere ſont réciproquement comme les diſtances du corpuſcule qu'elle attire; la force par laquelle un corpuſcule placé en *I* eſt attiré par toute la ſphere, ſera à la force par laquelle il ſeroit attiré s'il étoit placé en *P* en raiſon compoſée de la raiſon ſousdoublée de la diſtance *SI* à la diſtance *SP*, & de la raiſon ſousdoublée inverſe des diſtances *SI*, *SP*; or comme ces deux raiſons ſousdoublées compoſent une raiſon d'égalité, les attractions éxercées par la ſphere entiere en *I* & en *P* ſont égales.

Si les forces des particules de la ſphere ſont réciproquement en raiſon doublée des diſtances, on trouvera par le même calcul que l'attraction en *I* eſt à l'attraction en *P*, comme la diſtance *SP* au demi-diametre *SA* de la ſphere.

Si les forces ſont réciproquement en raiſon triplée des diſtances, les attractions en *I* & en *P* ſeront l'une à l'autre comme SP^2 à SA^2.

Si elles ſont en raiſon quadruplée, les attractions ſeront comme SP^3 à SA^3. Ainſi comme l'attraction en *P* dans ce dernier cas a été trouvée réciproquement comme $PS^3 \times PI$, l'attraction en *I* ſera réciproquement comme $SA^3 \times PI$, c'eſt-à-dire, (à cauſe que SA^3 eſt donnée) réciproquement comme *PI*, il en ſeroit de même des autres cas. Ce Théoréme ſe démontre ainſi.

De la même maniere qu'on a vu dans la ſolution du Problême

Du Mouvement des Corps.

précédent que lorſque le corpuſcule placé en P donnoit l'ordonnée DN proportionnelle à la quantité $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$, on verra en faiſant le même uſage de I que l'on a fait de P que cette ordonnée DN doit être dans ce cas proportionnelle à $\frac{DE^2 \times IS}{IE \times V}$, ſuppoſant donc que les forces centripetes, qui émanent d'un point quelconque E de la ſphere, ſoient l'une à l'autre dans les diſtances IE, PE comme PE^n à IE^n, on trouvera que l'ordonnée DN que donneroit la ſuppoſition du corpuſcule en P eſt à celle que donneroit la ſuppoſition du corpuſcule en I dans le rapport des quantités $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times PE^n}$ & $\frac{DE^2 \times IS}{IE \times IE^n}$, c'eſt-à-dire, dans le rapport de $PS \times IE \times IE^n$, à $IS \times PE \times PE^n$. Or, parce que les lignes SI, SE, SP ſont en proportion continue, les triangles SPE, SIE ſont ſemblables & donnent $IE : PE :: IS : SE$ ou SA. Ecrivant donc dans le rapport précédent des deux valeurs de DN la raiſon de IS à SA au lieu de celle de IE à PE, on aura le rapport de $PS \times IE^n$ à $SA \times PE^n$. Mais la raiſon de PS à SA eſt la raiſon ſousdoublée des diſtances PS, SI; & la raiſon de IE^n à PE^n (à cauſe de la proportion $IE : PE :: IS : SA$) eſt la raiſon ſousdoublée des forces aux diſtances PS, IS. Donc les valeurs de DN dans les deux cas, & par conſéquent les aires des courbes auſquelles elles appartiennent, ou, ce qui revient au même, les attractions des corpuſcules en P & en I, ſont en raiſon compoſée de ces raiſons ſousdoublées. *C. Q. F. D.*

Fig. 136.

PROPOSITION LXXXIII. PROBLÉME XLII.

Trouver la force par laquelle un corpuſcule placé dans le centre d'une ſphere eſt attiré vers un ſegment quelconque de cette ſphere.

Fig. 137.

Soit P le corpuſcule placé au centre de la ſphere, & $RBSD$ le ſegment qui l'attire. Soit de plus EFG une des ſurfaces ſphériques quelconques décrites du centre P & du rayon PF, deſ-

quelles on peut ſuppoſer que le ſegment propoſé eſt compoſé, en ne regardant pas ces ſurfaces comme purement mathématiques, mais comme ayant une épaiſſeur infiniment petite.

Nommant O cette petite épaiſſeur, il eſt clair, par ce qu'a démontré Archiméde, que la ſurface ou orbe ſphérique EFG ſera proportionnelle à $PF \times DF \times O$, & par ce qui a été démontré dans la Propoſition 79, ſi on ſuppoſe que les forces attractives des particules de la ſphere, ſoient en raiſon renverſée des puiſſances n des diſtances, l'attraction de cette orbe ſera comme $\frac{DE^2 \times O}{PF^n}$, c'eſt-à-dire, comme $\frac{2DF \times O}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2 \times O}{PF^n}$. Prenant donc l'ordonnée FN proportionnelle à cette quantité, l'aire DB, de la courbe qu'on décrira par ce moyen, exprimera l'attraction cherchée du corpuſcule P vers le ſegment propoſé $RBSD$. *C. Q. F. T.* Fig. 137.

PROPOSITION LXXXIV. PROBLÉME XLIII.

Trouver la force par laquelle un corpuſcule placé hors du centre de la ſphere & ſur l'axe d'un ſegment quelconque, eſt attiré par ce même ſegment.

Que le corps P ſoit attiré par le ſegment EBK dans l'axe ADB duquel il eſt placé. En décrivant du centre P & de l'intervalle PE la ſuperficie ſphérique EFK laquelle partage le ſegment propoſé en deux parties $EBKFE$, $EFKDE$; on n'aura qu'à chercher la force de la premiere partie par la Propoſition 81, & la force de la derniere par la Prop. 83; & la ſomme de ces forces ſera la force totale du ſegment $EBKDE$. *C. Q. F. T.* Fig. 138.

SCHOLIE.

Après avoir expliqué les attractions des corps ſphériques, je devrois naturellement entrer dans le même détail ſur les loix d'attraction des autres corps; mais il n'eſt pas néceſſaire à mon deſſein de les expliquer toutes en particulier: je me contenterai de donner quelques-unes des Propoſitions les plus générales ſur

Du Mouvement des Corps.

les forces de tous ces corps en général, & ſur les mouvemens qui doivent en naître, parce que ces Propoſitions peuvent être de quelque uſage dans la Phyſique.

TREIZIÉME SECTION.

Des forces attractives des corps qui ne ſont pas ſphériques.

PROPOSITION LXXXV. THÉORÉME XLII.

Si l'attraction du corps attiré eſt beaucoup plus forte lorſqu'il eſt contigu au corps attirant, que lorſqu'il n'en eſt ſéparé que d'un très-petit intervalle : les forces des particules du corps attirant décroîtront dans une raiſon plus que doublée des diſtances à ces particules.

Les forces décroiſſant en raiſon doublée des diſtances, l'attraction vers une ſphere, eſt par la Prop. 74. réciproquement comme le quarré de la diſtance du corps attiré au centre de la ſphere, & par conſéquent elle augmentera à peine ſenſiblement dans le contact ; donc l'augmentation ſeroit encore moins remarquable ſi la force décroiſſoit dans une moindre raiſon. La Propoſition à démontrer eſt donc claire quant aux ſpheres attractives : elle a lieu auſſi dans les orbes ſphériques concaves qui attirent des corps placés au-dehors ; & elle eſt encore plus évidente pour les corps placés dans l'intérieur des orbes ſphériques qui les attirent, puiſque les attractions éxercées par les concavités des orbes ſont détruites par des attractions contraires par la Prop. 70. & que par conſéquent elles ſont nulles dans le contact.

Si on ſuppoſe préſentement que de ces ſpheres ou de ces orbes ſphériques on ôte des parties quelconques éloignées du lieu du contact & qu'on leur ajoûte de nouvelles parties dans d'autres endroits, on pourra changer à volonté la forme de ces corps ſans que ces parties ajoutées ou retranchées, leſquelles

ſont éloignées du lieu du contact, augmentent ſenſiblement l'attraction de ces corps dans le contact. Donc la Propoſition en queſtion eſt vraie pour tous les corps, quelque ſoit leur forme. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION LXXXVI. THÉORÉME XLIII.

Si les forces des particules qui compoſent un corps attirant décroiſſent en raiſon triplée ou plus que triplée des diſtances, l'attraction ſera beaucoup plus forte dans le contact, que lorſque le corps attirant & le corps attiré ne ſeront ſéparés que d'un très-petit intervalle.

On a vu dans la ſolution du Problême 41. donnée dans les Exemples 2 & 3; que dans cette loi d'attraction lorſque le corpuſcule attiré approche de la ſphere qui l'attire, l'attraction augmente à l'infini. On concluera facilement la même choſe (par ces éxemples & par le Théoréme 41.) des attractions des corps vers des orbes concaves convexes, ſoit que les corps attirés ſoient placés hors de ces orbes, ſoit qu'ils ſoient dans leur concavité. Or en ajoutant ou en ôtant à ces ſpheres & à ces orbes de la matiére quelconque attractive placée où l'on voudra, pourvû que ce ne ſoit pas dans le lieu du contact, les corps attirans pourront avoir la forme qu'on voudra, & la propoſition ſera prouvée en général. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION LXXXVII. THÉORÉME XLIV.

Si deux corps ſemblables entre eux, & formés d'une matiére également attractive, attirent ſéparément des corpuſcules qui leur ſoient proportionnels, & qui ſoient poſés de même par rapport à eux, les attractions accélératrices des corpuſcules vers les corps entiers ſeront comme leurs attractions accélératrices vers les particules de ces corps ſituées ſemblablement, & priſes proportionnelles aux touts.

Car ſi ces corps ſont diviſés dans des particules qui ſoient proportionnelles aux corps entiers, & poſées de même dans ces corps, les attractions vers chacune des particules du premier corps ſeront aux attractions vers chacune des particules correſpondan-

tes de l'autre corps, comme l'attraction vers une particule quelconque du premier corps eſt à l'attraction vers une particule correſpondante de l'autre corps; & par conſéquent l'attraction vers le premier corps entier, ſera à l'attraction vers tout le ſecond dans cette même raiſon. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc ſi les forces attractives des particules décroiſſent en raiſon d'une puiſſance quelconque des diſtances, les attractions accélératrices vers les corps entiers ſeront en raiſon renverſée de ces puiſſances des diſtances, & en raiſon directe des maſſes attirantes.

Si, par exemple, les forces des particules décroiſſent en raiſon doublée des diſtances aux corpuſcules attirés, que les corps attirans ſoient comme A^3 & B^3 & que par conſéquent tant les racines cubes de ces corps, que leurs diſtances aux corpuſcules attirés ſoient comme A & B, les attractions accélératrices vers les corps attirans ſeront comme $\frac{A^3}{A^2}$ & $\frac{B^3}{B^2}$, c'eſt-à-dire, comme les racines cubes A & B de ces corps.

Si les forces des particules décroiſſent en raiſon triplée des diſtances aux corpuſcules attirés, les attractions accélératrices vers les corps entiers ſeront comme $\frac{A^3}{A^3}$ & $\frac{B^3}{B^3}$, c'eſt-à-dire, égales.

Si les forces décroiſſent en raiſon quadruplée, les attractions vers les corps ſeront comme $\frac{A^3}{A^4}$ & $\frac{B^3}{B^4}$, c'eſt-à-dire, réciproquement comme les racines cubes A & B; & ainſi des autres.

Cor. 2. Et réciproquement, en connoiſſant les forces par leſquelles des corps ſemblables attirent des corpuſcules ſemblablement placés, on pourra en conclure la loi des diſtances ſuivant laquelle agiſſent les particules attirantes, pourvu que cette loi dépende de quelque raiſon directe ou inverſe des diſtances.

PROPOSITION

PROPOSITION LXXXVIII. THÉORÉME XLV.

Si les forces attractives des particules égales d'un corps quelconque, ſont comme les diſtances, la force qu'exercera le corps entier, tendra à ſon centre de gravité : & elle ſera la même que celle d'un globe de même maſſe qui auroit ſon centre placé dans le centre de gravité de ce corps.

Que les particules A, B du corps $RSTV$ attirent un corpuſcule Z avec des forces qui ſoient comme les diſtances AZ, BZ, ſi ces particules ſont égales entr'elles ; & qui ſoient en raiſon compoſée de ces particules & de leurs diſtances AZ, BZ, ſi ces particules ſont ſuppoſées inégales : que ces particules A & B ſoient jointes par la droite AB diviſée en G, enſorte que AG ſoit à BG comme la particule B à la particule A, G ſera le commun centre de gravité de ces particules. La force $A \times AZ$ de la particule A ſe décompoſera (par le Corol. 2. des loix) dans les forces $A \times GZ$ & $A \times AG$, & la force $B \times BZ$ de la particule B ſe décompoſera de même dans les forces $B \times GZ$ & $B \times GB$. Mais les forces $A \times AG$ & $B \times BG$, ſont égales, à cauſe que $BG : AG :: A : B$; donc puiſqu'elles tendent vers des côtés oppoſés, elles ſe détruiſent mutuellement. Il reſte donc les forces $A \times GZ$ & $B \times GZ$ leſquelles tendent de Z vers le centre G, & compoſent la force $\overline{A+B} \times GZ$; c'eſt-à-dire, la même force que ſi les particules attractives A & B étoient placées dans leur commun centre de gravité G, & qu'elles y compoſaſſent un globe. Fig. 139.

Par le même raiſonnement, ſi on ajoute une troiſiéme particule C, & que ſa force ſe compoſe avec la force $\overline{A+B} \times GZ$ qui tend au centre G, la force qui en réſultera tendra au commun centre de gravité de ce globe, lequel globe eſt ſuppoſé en G, & de la particule C, c'eſt-à-dire, au commun centre de gravité des trois particules A, B, C ; & elle ſera la même que ſi ces trois particules ne faiſoient qu'un ſeul globe placé dans leur

Du mouvement des Corps.

commun centre de gravité, & ainſi des autres à l'infini. La force totale de toutes les particules d'un corps quelconque *R S T V*, eſt donc la même qu'elle ſeroit, ſi ce corps, en conſervant le même centre de gravité, devenoit un globe. *C. Q. F. D.*

Fig. 139. *Cor.* De là, le mouvement du corps attiré *Z*, ſera le même que ſi le corps attirant *R S T V* étoit ſphérique, & par conſéquent ſi ce corps attirant eſt en repos, où qu'il ſe meuve uniformement en ligne droite, le corps attiré décrira une ellipſe dont le centre ſera le centre de gravité du corps attirant.

PROPOSITION LXXXIX. THÉORÉME XLVI.

Si on a pluſieurs corps formés de particules égales, & dont les forces ſoient comme les diſtances : la force compoſée des forces de tous ces corps, & par laquelle ils attireront un corpuſcule quelconque, tendra au commun centre de gravité des corps attirans ; de plus cette force ſera la même qu'elle ſeroit, ſi ces corps attirans en conſervant leur commun centre de gravité, s'uniſſoient enſemble, & formoient un globe.

Cette Propoſition ſe démontre de la même maniére que la Propoſition précédente.

Cor. Le mouvement du corps attiré ſera donc le même, que ſi les corps attirans, en conſervant leur commun centre de gravité, s'uniſſoient enſemble, & qu'il s'en formât un globe. Donc ſi le commun centre de gravité des corps attirans eſt en repos, ou ſe meut uniformement en ligne droite, le corps attiré décrira une ellipſe autour de ce centre.

PROPOSITION XC. PROBLÉME XLIV.

Suppoſant qu'à chaque point d'un cercle quelconque, tendent des forces centripetes égales, & qui croiſſent ou décroiſſent dans une raiſon quelconque des diſtances, on demande la force par laquelle eſt attiré un corpuſcule placé à volonté dans la ligne droite élevée ſur le centre de ce cercle perpendiculairement à ſon plan.

Fig. 140. Du centre *A* & d'un intervalle quelconque *A D* ſoit décrit un cercle dans le plan auquel la droite *A P* eſt perpendiculaire :

pour trouver la force par laquelle un corpuſcule quelconque P eſt attiré vers ce cercle, on tirera d'un point quelconque E de ce cercle une ligne PE au corpuſcule attiré P, on prendra enſuite ſur la droite PA, $PF=PE$, & on tirera la perpendiculaire FK qui ſoit comme la force avec laquelle le point E attire le corpuſcule P. On tracera la courbe IKL, lieu de tous les points K, & qui rencontre le plan du cercle en L, enfin on prendra ſur PA, $PH=PD$, & on élevera la perpendiculaire HI qui rencontrera la courbe, dont on vient de parler, en I; alors l'attraction du corpuſcule P vers le cercle ſera comme l'aire $AHIL$ multipliée par la hauteur AP. *C. Q. F. T.* Fig. 140.

Car ſi on prend ſur AE la ligne infiniment petite Ee, qu'on tire Pe, & que ſur PE & PA on prenne PC & Pf égales à Pe, la force avec laquelle un point quelconque E de l'anneau décrit du centre A & de l'intervalle AE, attire vers lui le corpuſcule P étant ſuppoſée proportionnelle à FK, on trouvera que la force avec laquelle ce point attire le corps P vers A, eſt proportionnelle à $\frac{AP \times FK}{PE}$, & que la force avec laquelle tout l'anneau attire le corps P vers A, eſt comme l'anneau, & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjointement; mais cet anneau eſt comme le rectangle formé par le rayon AE & la largeur Ee, & ce rectangle, (à cauſe des proportionnelles PE & AE, Ee & CE) eſt égal au rectangle $PE \times CE$ ou $PE \times Ff$; donc la force avec laquelle cet anneau attire le corps P vers A, ſera comme $PE \times Ff$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjointement, c'eſt-à-dire, comme le produit $Ff \times FK \times AP$, ou comme l'aire $FKkf$ multipliée par AP. Et par-conſéquent la ſomme des forces avec leſquelles tous les anneaux contenus dans le cercle entier dont le rayon eſt AD attirent le corps P vers A, eſt comme l'aire totale $AHIKL$ multipliée par AP. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Si les forces décroiſſent en raiſon doublée des diſtances,

c'eſt-à-dire, ſi FK eſt proportionnelle à $\frac{1}{PF^2}$, & que par conſéquent l'aire $AHIKL$ ſoit comme $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; l'attraction du

Fig. 140. corpuſcule P vers le cercle ſera comme $1 - \frac{PA}{PH}$; c'eſt-à-dire, comme $\frac{AH}{PH}$.

Cor. 2. Et généralement, ſi les forces aux diſtances D ſont réciproquement comme une puiſſance quelconque D^n des diſtances, c'eſt-à-dire, ſi FK eſt proportionnelle à $\frac{1}{D^n}$, & que par conſéquent l'aire $AHIKL$ ſoit comme $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$; l'attraction du corpuſcule P vers le cercle ſera comme $\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}$.

Cor. 3. Si le diametre du cercle eſt augmenté à l'infini, & que le nombre n ſoit plus grand que l'unité, l'attraction du corpuſcule P vers le plan total infini, ſera réciproquement comme PA^{n-2}, à cauſe que l'autre terme $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ s'évanouira.

PROPOSITION XCI. PROBLÈME XLV.

Trouver l'attraction qu'un conoïde quelconque éxerce ſur un corpuſcule placé dans l'axe de révolution, en ſuppoſant que les forces attractives des particules de ce ſolide décroiſſent dans une raiſon quelconque des diſtances.

P étant le corpuſcule donné & placé ſur l'axe AB du conoïde

Fig. 141. $DECG$, & RFS le cercle qui eſt la tranche de ce conoïde par un plan quelconque perpendiculaire à l'axe ſoit priſe, (par la Prop. 90.) la ligne FK proportionnelle à la force par laquelle le corpuſcule P eſt attiré vers ce cercle, & ſoit tracée la courbe LKI lieu de tous les points K trouvés de la même maniére;

l'aire $LABI$ exprimera l'attraction demandée du corpuſcule P vers le ſolide $DECG$. *C. Q. F. T.*

Cor. 1. Si ce ſolide eſt un cylindre décrit par la révolution du rectangle $ADEB$ autour de l'axe AB; & que les forces centripetes qui tendent à chacun de ces points ſoient réciproquement comme les quarrés des diſtances, l'attraction du corpuſcule P vers ce cylindre ſera comme $AB-PE+PD$. Car l'ordonnée FK, par le Corol. 1. de la Prop. 90. ſera proportionnelle à $1-\frac{PF}{PR}$. Or la partie 1. de cette ordonnée donnera le rectangle $1\times AB$ pour la premiere partie de l'aire $LABI$, & la ſeconde $\frac{PF}{RP}$ étant ſuppoſée appliquée continuellement à l'abſciſſe AF, donnera une courbe dont les aires qui répondent à AP & à PB ſeront $1\times\overline{PD-AD}$ & $1\times\overline{PE-AD}$ & dont par conſéquent l'aire répondant à AB ſera $1\times\overline{PE-PD}$; retranchant donc de $1\times AB$ l'eſpace $1\times\overline{PE-PD}$, on aura $1\times\overline{AB-PE+PD}$ pour exprimer l'aire $LABI$ de l'attraction du cylindre $DGCE$. Fig. 142.

Cor. 2. Il eſt aiſé de connoître, par cette Propoſition, la force avec laquelle le ſphéroïde $AGBC$ attire un corps quelconque P placé au-dehors ſur ſon axe AB. $NKRM$ étant une ſection conique dont l'ordonnée ER perpendiculaire ſur PE eſt toujours égale à la ligne PD menée de P au point D dans lequel l'ordonnée coupe le ſphéroïde. Soient élevées des ſommets A, B du ſphéroïde les perpendiculaires AK, BM à ſon axe AB, leſquelles ſoient reſpectivement égales à AP & à BP, & rencontrent par conſéquent la ſection conique en K & en M; & ſoit tiré KM qui retranche de cette ſection le ſegment $KMRK$. Si le plus grand demi diametre du ſphéroïde eſt SC, & que ſon centre ſoit S, la force avec laquelle le ſphéroïde entier attire le corpuſcule P ſera à la force avec laquelle la ſphere décrite ſur le diametre AB attire ce même corpuſcule, comme $\frac{AS\times\overline{CS^2}-PS\times\overline{KMRK}}{PS^2+CS^2-AS^2}$ à $\frac{AS^3}{3PS^2}$, & on auroit de la même Fig. 143.

maniere l'attraction d'un ſegment quelconque de ce ſphéroïde.

Cor. 3. On peut tirer encore de la même Propoſition que ſi le corpuſcule eſt placé au-dedans du ſphéroïde, ſur ſon axe, l'attraction ſera comme ſa diſtance au centre. Mais on peut s'en aſſurer plus facilement de la maniere ſuivante, ſoit que le corpuſcule ſoit placé ſur l'axe, ſoit qu'il le ſoit ſur un autre diametre quelconque donné.

Fig. 144.

Que *AGOF* ſoit le ſphéroïde attirant; *S* ſon centre; *P* le corps attiré; *SPA* un demi diametre paſſant par *P*; *DE*, *FG* deux droites quelconques qui traverſent le ſphéroïde, & paſſent par *P*; *PCM*, *HLN* les ſuperficies de deux ſphéroïdes intérieurs, concentriques & ſemblables à l'extérieur, dont le premier paſſe par le corps *P*, & coupe les droites *DE* & *FG* en *B* & *C*, & dont le dernier coupe les mêmes droites en *H*, *I* & *K*, *L*.

Suppoſant que tous ces ſphéroïdes aient un axe commun, les parties des droites *DP* & *BE*, *FP* & *CG*, *DH* & *IE*, *FK* & *LG* coupées de part & d'autre du point *P*, ſeront reſpectivement égales; puiſque les droites *DE*, *PB* & *HI* ſont coupées en deux également au même point, ainſi que les droites *FG*, *PC* & *KL*. Or ſi on imagine à préſent que *DPF*, *EPG* repréſentent deux cônes oppoſés dont les angles générateurs *DPF*, *EPG* ſoient infiniment petits, & que les lignes *DH*, *EI* ſoient auſſi infiniment petites, on verra que les particules *DHKF*, *GLIE* des cônes, coupées par les ſuperficies des ſphéroïdes, ſeront entr'elles, à cauſe de l'égalité des lignes *DH*, *EI*, comme les quarrés de leurs diſtances au corpuſcule *P*, & par conſéquent elles attireront également ce corpuſcule. Par la même raiſon, ſi on diviſe les eſpaces *DPF*, *EGCB* en une infinité de particules par une infinité de ſuperficies ſphéroïdales ſemblables & concentriques qui aient le même axe, toutes ces particules attireront également le corps *P* de part & d'autre en ſens contraire.

Les forces du cône *DPF* & du cône tronqué *EGCB* étant ainſi égales & contraires, elles ſe détruiſent mutuellement, & il en eſt de même des forces de toute la matiére placée hors du ſphéroïde intérieur *PCBM*. Le corps *P* eſt donc attiré par ce ſeul ſphéroïde intérieur *PCBM*, & par conſéquent, par le Corol. 3. de la Prop. 72. Son attraction eſt à la force par laquelle le corps *A* eſt attiré par le ſphéroïde entier *AGOD* comme la diſtance *PS* eſt à la diſtance *AS*. *C. Q. F. D.* Fig. 144.

PROPOSITION XCII. PROBLÉME XLVI.

Une matiére attractive étant donnée, trouver la loi ſuivant laquelle ſes parties attirent.

On fera de cette matiére une ſphere, un cylindre, ou un autre corps régulier dont la loi d'attraction puiſſe être déterminée par les Propoſitions 80. 81. & 91. Enſuite on fera des expériences pour déterminer la loi ſuivant laquelle ce corps attirera un corpuſcule placé à différentes diſtances; & de la loi que ſuivra l'attraction du total, on tirera celles que doivent ſuivre toutes ſes parties. *C. Q. F. T.*

PROPOSITION XCIII. THÉORÉME XLVII.

Si un ſolide terminé d'un côté par un plan, & infini de tous les autres côtés, eſt formé de particules égales & également attractives, dont les forces décroiſſent en raiſon d'une puiſſance quelconque plus que doublée des diſtances, un corpuſcule placé de l'un ou de l'autre côté du plan, ſera attiré par ce ſolide entier avec une force qui décroîtra dans la raiſon d'une puiſſance de la diſtance du corpuſcule au plan, dont l'expoſant ſera moindre de trois unités que celui de la puiſſance des diſtances ſuivant laquelle ſe fait l'attraction des particules.

Cas. 1. Le plan *LGl* terminant le ſolide lequel s'étend à l'infini du côté de *I*, & eſt ſuppoſé partagé en un nombre innombrable de plans *mHM*, *nIN*, *oKO*, *&c.* paralleles à *LG*, ſoit placé premiérement le corps attiré dans un point *C* hors du Fig. 145.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

ſolide, & ſoit abaiſſée ſur LGl la perpendiculaire $CGHI$, & ſoit pris n, qu'on ne ſuppoſe pas moindre que 3, pour exprimer la puiſſance des diſtances ſuivant laquelle décroiſſent les forces attractives des particules de ce ſolide. Cela poſé, la force avec laquelle un plan quelconque mHM attire le point C, ſera, par le Corol. 3. de la Prop. 90. réciproquement comme CH^{n-2}, enſorte qu'en prenant ſur mHM, lGL, nIN, oKO les droites GL, HM, IN, KO, &c. reſpectivement proportionnelles aux quantités $\frac{1}{CG^{n-2}}$, $\frac{1}{CH^{n-2}}$, $\frac{1}{CI^{n-2}}$, $\frac{1}{CK^{n-2}}$, &c. Ces droites expriment les forces de ces plans; d'où il ſuit, que la ſomme de ces forces, ou, ce qui revient au même, la force du ſolide entier ſera proportionnelle à l'aire $GLOK$ ſuppoſée étendue juſqu'à l'infini du côté de OK; mais cette aire, par les méthodes connues des quadratures, eſt réciproquement comme CG^{n-3}. Donc la force de tout le ſolide eſt réciproquement comme CG^{n-3}. *C. Q. F. D.*

Fig. 145.

Fig. 146.

Cas. 2. Le corpuſcule C étant ſuppoſé préſentement placé au-dedans du ſolide, ſoit priſe la diſtance CK égale à la diſtance CG, il eſt clair que la partie $LGloKO$ du ſolide, terminée par les plans paralleles lGL, oKO, n'attirera vers aucun côté le corpuſcule C placé au milieu, les actions contraires dirigées vers des points oppoſés ſe détruiſant mutuellement à cauſe de leur égalité. Ainſi le corpuſcule C n'eſt attiré que par la force des parties du ſolide qui ſont au-delà du plan OK; & cette force par le premier cas eſt réciproquement comme CK^{n-3}. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Si le ſolide $LGIN$ eſt terminé des deux côtés par les deux plans paralleles infinis LG, IN, on connoîtra ſa force attractive, en ſouſtraïant de la force attractive du ſolide entier $LGKO$ la force attractive de ſa partie ultérieure $NIKO$ étendue infiniment vers KO.

Cor. 2.

Cor. 2. Si l'attraction de la partie ultérieure de ce ſolide infini eſt très-petite, en comparaiſon de l'attraction de ſa partie citérieure, on peut la négliger : & l'attraction de ſa partie citérieure décroîtra à peu près comme la puiſſance $n-3$ de la diſtance. Fig. 146.

Cor. 3. De-là, ſi un corps quelconque fini & plan d'un côté attire un corpuſcule placé vers le milieu de ce plan, & à une diſtance de ce plan, qui ſoit très-petite par rapport aux dimenſions du corps attirant qu'on ſuppoſe compoſé de particules homogenes dont les forces attractives décroiſſent en raiſon d'une puiſſance quelconque plus que quadruplée des diſtances, la force attractive de tout le corps attirant décroîtra à peu près dans la raiſon d'une puiſſance de la diſtance dont l'Expoſant ſera moindre de trois unités que celui de la puiſſance ſuivant laquelle agiſſent les particules. Cette Propoſition n'a pas lieu lorſqu'il s'agit de corps compoſés de particules dont les forces attractives décroiſſent en raiſon de la puiſſance triplée des diſtances ; parce que dans ce cas l'attraction de cette partie ultérieure du corps infini dont on a parlé dans le Corol. 2. eſt toujours infiniment plus forte que l'attraction de la partie citérieure.

SCHOLIE.

Si un corps jetté ſuivant une direction & avec une vîteſſe quelconque, eſt attiré perpendiculairement vers un plan donné par une force dont la loi eſt donnée, on trouvera la courbe qu'il décrira en cherchant, par la Prop. 39. le mouvement du corps qui deſcend en ligne droite vers ce plan, & en compoſant, par le Corol. 2. des loix, ce mouvement avec le mouvement uniforme dirigé dans des lignes paralleles à ce même plan. Et au contraire, ſi on cherche la loi de l'attraction dirigée perpendiculairement vers le plan, par cette condition, que le corps attiré ſe meuve dans une ligne courbe quelconque donnée, on réſoudra le Problême en opérant comme dans le Problême 5.

Mais la ſolution de ce dernier Problême peut être plus courte en employant ainſi les ſuites.

Suppoſons, par éxemple, qu'un corps décrive une courbe dont les ordonnées, faiſant avec le plan attirant un angle conſtant, ſoient comme les puiſſances $\frac{m}{n}$ des abſciſſes A priſes ſur ce plan. Pour trouver la force attractive de ce plan en vertu de laquelle cette courbe eſt décrite, on ſuppoſera que l'abſciſſe A augmente d'une très-petite partie O, & on transformera l'ordonnée $\overline{A+O}^{\frac{m}{n}}$ en une ſuite infinie $A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$ + &c. & on ſuppoſera la force cherchée proportionnelle au terme de cette ſuite, dans lequel O a deux dimenſions, c'eſt-à-dire, que cette force ſera comme $\frac{mm-mn}{2nn} OOA^{\frac{m-2n}{n}}$, ou comme $\frac{mm-mn}{2nn} A^{\frac{m-2n}{n}}$, ou bien encore comme $\frac{mm-mn}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$.

Si $m=2$, $n=1$, ce qui fait de la courbe décrite une parabole, la force deviendra comme $2B^0$, c'eſt-à-dire, qu'elle deviendra conſtante. Or on ſçait en effet, par ce qu'a appris Galilée, qu'une force conſtante, & qui agit parallelement, fait décrire une parabole.

Si $m=0-1$ & $n=1$; la force deviendra comme $2A^{-3}$ ou $2B^{3}$. Donc, une force qui feroit comme le cube de l'ordonnée, feroit décrire une hyperbole. Mais paſſons à quelques autres Propoſitions ſur le mouvement.

QUATORZIÉME SECTION.

Du Mouvement des corpuſcules attirés par toutes les parties d'un corps quelconque.

PROPOSITION XCIV. THÉORÉME XLVIII.

Si deux milieux, dont chacun eſt homogene, ſont ſéparés par un eſpace terminé de part & d'autre par des plans paralléles, & qu'un corps en paſſant par cet eſpace ſoit attiré ou pouſſé perpendiculairement vers l'un ou l'autre de ces milieux, que de plus il n'éprouve aucune autre force qui le retarde ou l'accélere; & que l'attraction ſoit toujours la même partout à des diſtances égales de l'un & de l'autre plan priſes du même côté de ces plans: le ſinus d'incidence ſur l'un ou l'autre plan ſera en raiſon donnée au ſinus d'émergence par l'autre plan.

Cas. 1. Aa, Bb, étant deux plans paralleles, ſuppoſez qu'un corps tombe ſur le premier plan Aa ſuivant la ligne GH, & que pendant tout le temps de ſon paſſage par l'eſpace intermédiaire il ſoit attiré ou pouſſé vers le milieu où s'eſt fait l'incidence, enſorte que par cette attraction il décrive la courbe HI, & qu'il ſorte ſuivant la ligne IK. Elevez enſuite ſur le plan d'émergence Bb la perpendiculaire IM qui rencontre en M la ligne d'incidence GH prolongée, & en R le plan d'incidence Aa. Du centre L où la ligne d'émergence prolongée rencontre HM, & du rayon LI décrivez un cercle qui coupe la ligne HM en P & en Q, & en N la ligne MIR. Cela fait, en ſuppoſant l'attraction ou l'impulſion uniforme, la courbe HI ſera, ſuivant les démonſtrations de Galilée, une parabole, & aura par conſéquent cette propriété, que le rectangle ſous le parametre donné & ſous la ligne IM eſt égal au quarré de HM; mais Fig. 147.

à cauſe que la ligne HM eſt coupée en deux parties égales au point L, il eſt clair, en abaiſſant la perpendiculaire LO ſur MI, que MO eſt égale à OR, ainſi que MN à IR. Or comme IR eſt donnée, MN le ſera auſſi; donc le rectangle $NM \times MI$ ſera au rectangle ſous le parametre & ſous IM, c'eſt-à-dire, à HM^2, en raiſon donnée. De plus, le rectangle $NM \times MI$ eſt égal au rectangle $PM \times MQ$, c'eſt-à-dire, à la différence des quarrés ML^2 & PL^2, ou LI^2; & HM^2 à une raiſon donnée à ML^2 puiſqu'il en eſt quadruple: donc la raiſon de $ML^2 - LI^2$ à ML^2 eſt donnée, & par conſéquent la raiſon de LI^2 à ML^2, & celle de LI à LM ſont auſſi données. Maintenant dans tout triangle LMI, les ſinus des angles ſont proportionnels aux côtés oppoſés, donc la raiſon du ſinus de l'angle d'incidence LMR au ſinus de l'angle d'émergence LIR eſt donnée. *C. Q. F. D.*

Fig. 147.

Fig. 148.

Cas 2. Que le corps paſſe à préſent ſucceſſivement par pluſieurs eſpaces terminés par des plans paralleles $AabB$, $BbcC$, &c. & qu'il ſoit preſſé par une force uniforme dans chaque eſpace, mais différente dans des eſpaces différens; il eſt clair, par ce qui vient d'être démontré, que le ſinus d'incidence ſur le premier plan Aa, ſera au ſinus d'émergence du ſecond plan Bb, en raiſon donnée, & que ce dernier ſinus, qui devient le ſinus d'incidence ſur le ſecond plan Bb, ſera au ſinus d'émergence du troiſiéme plan Cc, en raiſon donnée; enſuite, que ce nouveau ſinus ſera au ſinus d'émergence du quatrieme plan Dd, en raiſon donnée; & ainſi à l'infini, en ſorte qu'il en réſultera, que le ſinus d'incidence ſur le premier plan eſt au ſinus d'émergence du dernier plan en raiſon donnée. Imaginons à préſent que les intervalles des plans diminuent à l'infini, & que le nombre de ces plans augmente de même, en ſorte que l'action de l'attraction ou de l'impulſion devienne continue ſelon une loi quelconque donnée; alors la raiſon du ſinus d'incidence ſur le premier plan au ſinus d'émergence du dernier plan, ſera auſſi donnée. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION XCV. THÉORÉME XLIX.

Les mêmes choſes étant poſées, la vîteſſe du corps avant l'incidence eſt à ſa vîteſſe après l'émergence, comme le ſinus d'émergence au ſinus d'incidence.

Soient priſes égales les lignes AH, Id, & ſoient élevées les perpendiculaires AG, dK qui rencontrent les lignes d'incidence & d'émergence GH, IK, en G & K. Soit priſe enſuite ſur GH, $TH=IK$, & ſoit abbaiſſée la perpendiculaire Tv ſur le plan Aa. Si l'on décompoſe, par le Corol. 2. des loix, le mouvement du corps en deux mouvemens, l'un perpendiculaire aux plans Aa, Bb, Cc, &c. & l'autre parallele à ces mêmes plans, la force de l'attraction ou de l'impulſion agiſſant ſuivant des lignes perpendiculaires, ne changera rien aux mouvemens ſuivant des lignes paralleles, & par conſéquent le corps par ce mouvement parcourera en temps égaux dans la direction parallele aux plans les eſpaces égaux qui ſont entre la ligne AG & le point H, & entre le point I & la ligne dK; c'eſt-à-dire, qu'en temps égaux il parcourera les lignes GH, IK; & par conſéquent la vîteſſe avant l'incidence ſera à la vîteſſe après l'émergence comme GH à IK ou TH, ou, ce qui revient au même, comme AH ou Id à vH, ou enfin, à cauſe de l'égalité des rayons TH, ou IK, comme le ſinus d'émergence au ſinus d'incidence. *C. Q. F. D.* Fig. 149.

PROPOSITION XCVI. THÉORÉME L.

Les mêmes choſes étant poſées, & ſuppoſant de plus que le mouvement avant l'incidence ſoit plus prompt qu'après : ſi on donne une certaine inclinaiſon à la ligne d'incidence, le corps ſe réfléchira, & fera l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence.

Car ſuppoſant, comme ci-deſſus, qu'un corps décrive des arcs paraboliques entre les plans paralleles Aa, Bb, Cc, &c. & que ces arcs ſoient HP, PQ, QR, &c. ſoit priſe l'obliquité de la ligne d'incidence GH ſur le premier plan Aa, telle, que Fig. 150.

Du Mouvement des Corps.

Fig. 150.

le ſinus d'incidence ſoit au rayon du cercle dont il eſt ſinus, dans la raiſon que ce même ſinus d'incidence a au ſinus d'émergence hors du plan Dd dans l'eſpace $DdeE$: le ſinus d'émergence ſe trouvant par ce moyen égal au rayon, l'angle d'émergence ſera droit, & la ligne d'émergence coïncidera avec le plan Dd. Le corps étant donc arrivé au point R de ce plan, & ayant alors une direction qui coïncide avec ce plan, il eſt clair qu'il ne pourra pas aller plus avant que ce plan Ee. Mais le même corps ne peut pas non plus continuer à ſe mouvoir dans la ligne d'émergence Rd, parce qu'il eſt perpétuellement attiré, ou pouſſé vers le milieu de l'incidence : il retournera donc entre les plans Cc, Dd, en décrivant l'arc parabolique QRq, dont le ſommet eſt en R ; & en coupant le plan Cc ſous le même angle en q, qu'il l'avoit coupé auparavant en Q ; enſuite, continuant à décrire des arcs paraboliques qp, ph, &c. ſemblables & égaux aux premiers arcs paraboliques QP, PH, &c. il coupera le reſte des plans ſous les mêmes angles en p, h, &c. qu'il les avoit coupés auparavant en P, H, &c. & il aura en ſortant la même obliquité en h, que celle qu'il avoit dans ſon incidence en H. Si on conçoit à préſent que les intervalles des plans Aa, Bb, Cc, Dd, Ee, &c. diminuent à l'infini, & que le nombre de ces plans augmente de même, en ſorte que l'attraction ou l'impulſion devienne continue ſelon une loi quelconque donnée, on verra que l'angle d'émergence ſera toujours égal à l'angle d'incidence. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

On peut appliquer ces recherches ſur l'attraction à la réfléxion de la lumiére & à ſa réfraction qui ſe fait, comme Snellius l'a découvert, en raiſon donnée des Sécantes, & par conſéquent en raiſon donnée des ſinus, ainſi que Deſcartes l'a fait voir.

Car il eſt certain, par la découverte des phénomenes des ſatellites de Jupiter confirmée par les obſervations de pluſieurs Aſtronomes, que la propagation de la lumiere eſt ſucceſſive, & qu'el-

le vient du ſoleil à la terre en ſept ou huit minutes; & les rayons en paſſant près des angles des corps opaques ou tranſparens tels que l'extrémité d'une lame de couteau, d'une piéce de monnoye, d'un morceau de verre, ou de pierre, &c. s'infléchiſſent autour de ces corps comme s'ils en étoient attirés: c'eſt ce qu'a découvert Grimaldi il y a longtemps en faiſant entrer un rayon de lumiere par un trou dans une chambre obſcure, & ce que j'ai vérifié.

Ceux de ces rayons qui en paſſant approchent le plus près des corps ſe courbent davantage, comme s'ils étoient plus attirés, ainſi que je m'en ſuis aſſuré par des expériences éxactes. Ceux qui paſſent à de plus grandes diſtances s'infléchiſſent moins; & ceux qui paſſent à des diſtances encore plus grandes s'infléchiſſent un peu en ſens contraire, & forment trois faiſceaux de couleurs. Dans la figure ci-jointe, *S* repréſente la pointe d'un couteau ou d'un corps quelconque *ASB*; & *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlsld*, ſont des rayons qui s'infléchiſſent vers le couteau par des arcs *owo*, *nun*, *mtm*, *lsl*, plus ou moins concaves ſelon leurs diſtances. Or comme cette courbure des rayons ſe fait à une certaine diſtance du couteau, les rayons qui l'atteignent doivent donc s'être infléchis avant de l'avoir atteint. Il en eſt de même des rayons qui tombent ſur du verre: ainſi la réfraction ne ſe fait pas dans le ſeul point de l'incidence; mais peu à peu par l'incurvation continuelle des rayons, laquelle ſe fait en partie dans l'air avant qu'ils atteignent le verre, & en partie, ſi je ne me trompe, dans le verre même après qu'ils y ſont entrés comme il eſt marqué dans la figure ci-jointe où les rayons *ckqc*, *biyb*, *ahxa*, dont l'incidence ſe fait en *r*, *q* & *p*, s'infléchiſſent entre *k* & *q*, *i* & *y*, *h* & *x*.

Fig. 151.

Fig. 152.

A cauſe de l'analogie qui eſt entre le mouvement progreſſif de la lumiere, & celui des autres projectiles, j'ai cru néceſſaire d'ajouter les Propoſitions ſuivantes en faveur des Opticiens. Au reſte, je ne m'embaraſſe point de la nature des rayons, je n'éxa-

DU MOUVEMENT DES CORPS.

mine point s'ils ſont matériels ou non ; mais je me contente de déterminer les trajectoires des corps qui peuvent être ſemblables à celles que décrivent les rayons.

PROPOSITION XCVII. PROBLÉME XLVII.

Suppoſant que le ſinus d'incidence ſur une ſuperficie quelconque, ſoit au ſinus d'émergence en raiſon donnée, & que l'incurvation des rayons près de cette ſuperficie, ſe faſſe dans un eſpace aſſez petit pour le regarder comme un point, on demande la ſuperficie propre à réunir dans un lieu donné tous les corpuſcules qui émanent ſucceſſivement d'un autre lieu donné.

Fig. 153. Soit A le lieu d'où les corpuſcules partent, & B le lieu dans lequel ils doivent ſe réunir ; ſoient de plus, CDE la courbe qui en tournant autour de l'axe AB décrit la ſuperficie cherchée ; D & E deux points quelconques de cette courbe, EF, EG, des perpendiculaires abbaiſſées de E ſur les rayons incidens & rompus AD & DB. Imaginant que le point D s'approche du point E, la derniere raiſon de l'incrément DF de AD au décrement DG de BD ſera celle du ſinus d'incidence au ſinus d'émergence, & par conſéquent elle ſera donnée. Donc les quantités finies qui ſont les augmentations de AD, & celles qui ſont les diminutions de BD ſont encore dans la même raiſon. Delà il ſuit, qu'en choiſiſſant un point quelconque C dans l'axe AB pour être le ſommet de la courbe demandée CDE, on n'aura qu'à prendre l'augmentation CM de AC à la diminution CN de BC dans la raiſon du ſinus d'incidence au ſinus d'émergence, & décrire des centres A & B, & des intervalles AM, BN, deux cercles qui ſe coupent mutuellement en D, afin d'avoir un point quelconque D de la courbe cherchée. *C. Q. F. T.*

Cor. 1. En ſuppoſant que le point A ou B s'éloigne à l'infini, ou qu'il vienne de l'autre côté du point C, on aura toutes les courbes que Deſcartes a données dans ſa Géométrie & dans ſon Optique

Optique pour les réfractions ; & comme il n'a point expoſé la maniere de les trouver, j'ai cru devoir la donner dans cette Propoſition.

Cor. 2. Si un corps tombant ſur une ſurface quelconque *C D*, & dans la direction d'une ligne droite quelconque *A D*, tirée ſuivant une loi quelconque, traverſe cette ſurface, & prend en la quittant une autre direction quelconque *D K*; je dis, que ſi on imagine tirées les courbes *C P*, *C Q* toujours perpendiculaires aux directions *A D*, *D K*, les accroiſſemens des lignes *P D*, *Q D* & par conſéquent les lignes mêmes *P D*, *Q D* formées de ces accroiſſemens ſeront entr'elles en raiſon des ſinus d'incidence & d'émergence : & au contraire.

PROPOSITION XCVIII. PROBLÉME XLVIII.

Les mêmes choſes étant poſées, & étant décrite autour de l'axe A B *une ſurface attractive quelconque* C D, *réguliere ou irréguliere, au travers de laquelle doivent paſſer des corps partis du point* A ; *trouver quelle ſeroit une autre ſurface attractive* E F *capable de faire converger ces corps au point donné* B. Fig. 154.

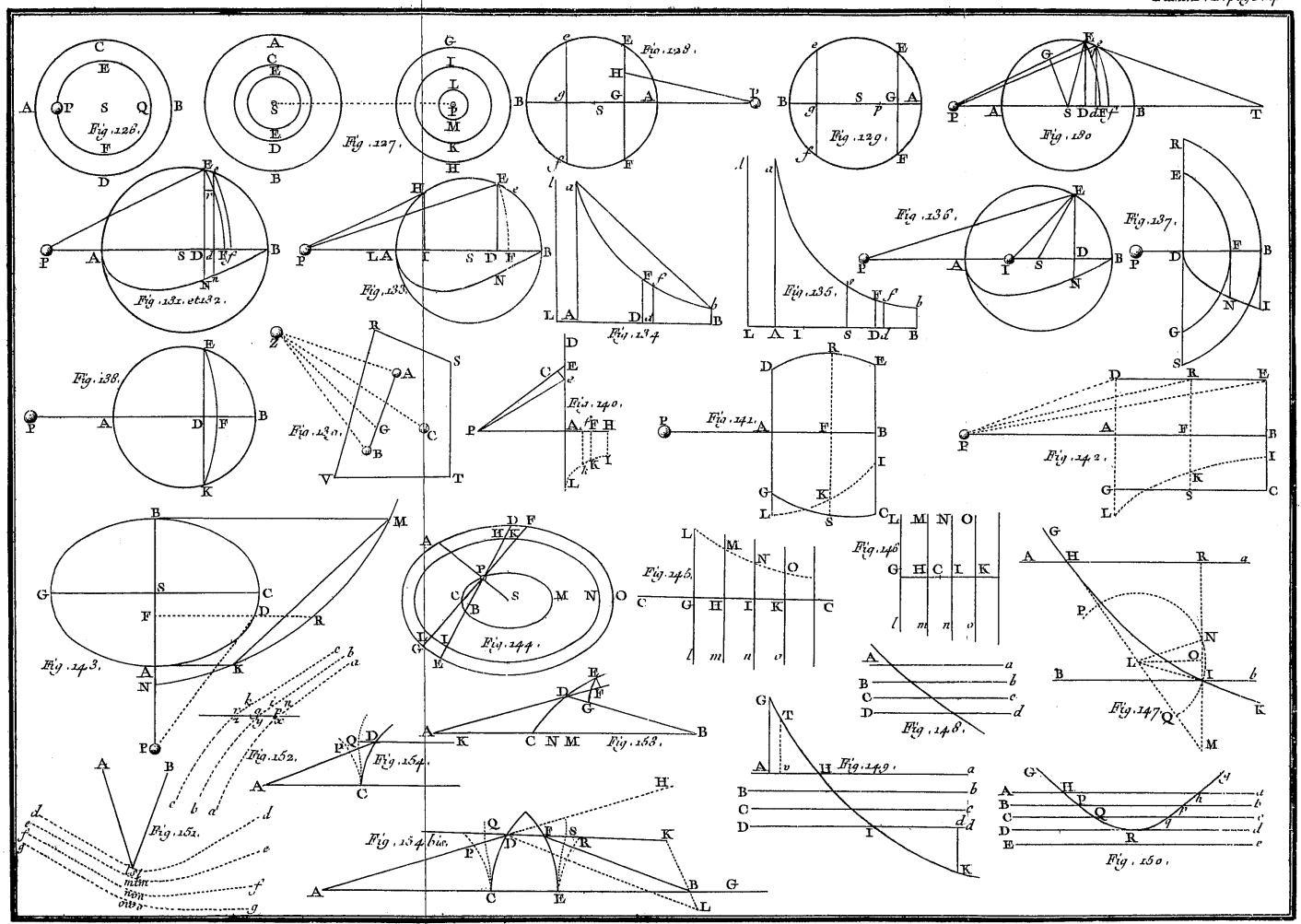
Du point *A* au point B ſoit tirée *A B* coupant la premiere ſurface en *C* & l'autre en *E*, & ſoit pris le point *D* à volonté. Qu'on ſuppoſe encore que le ſinus d'incidence ſur la premiere ſurface ſoit au ſinus d'émergence de cette même ſurface en raiſon donnée *P E*, par exemple, comme de *M* à *N*, ainſi que le ſinus d'émergence de la ſeconde ſurface au ſinus d'incidence ſur cette même ſurface ; enſuite, qu'on prolonge *A B* en *G*, enſorte que l'on ait *B G* à *C E* comme *M* — *N* à *N* ; qu'on prolonge auſſi *A D* en *H*, enſorte que *A H* = *A G* & *D F* en un point *K*, placé de façon que *D K* ſoit à *D H* dans la raiſon de *N* à *M*. Du point *K* au point *B* tirez la droite *K B*. Du point *D* comme centre & du rayon

DH décrivez un cercle qui rencontre en L la ligne KB prolongée : enfin tirez BF parallele à DL ; je dis, que le point F ſera un point de la ligne EF capable de produire par ſa révolution autour de l'axe AB la ſurface cherchée. *C. Q. F. F.*

Car les lignes CP, CQ étant toujours reſpectivement perpendiculaires aux lignes AD, DF, ainſi que les lignes BR, ES, aux lignes FB, FD, & par conſéquent ayant toujours QS égale à CE, on aura (par le Cor. 2. de la Prop. 97.) PD à QD comme M à N, par conſéquent comme DL à DK, ou comme FB à FK ; & en diviſant, comme $DL-FB$ ou $PH-PD-FB$ à FD ou $FQ-QD$. Donc, en compoſant, comme $PH-FB$ à FQ, c'eſt-à-dire, (à cauſe des lignes PH & CG, QS & CE qui ſont égales) comme $CE+BG-FR$ à $CE-FS$. Mais (à cauſe des proportionnelles BG à CE & $M-N$ à N) on a auſſi $CE+BG$ à CE comme M à N ; & par conſéquent, en diviſant, FR à FS comme M à N. Donc (par le Cor. 2. de la Prop. 97.) la ſurface EF oblige le corps qui tombe ſur elle ſuivant la direction DF de prendre la direction FR qui le mene au point B. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

On pourroit employer la même méthode pour trois ſurfaces & pour davantage. Au reſte, pour l'optique, les figures ſphériques ſont celles qui conviennent le mieux. Si pour former les verres objectifs des lunettes on ſe ſert de deux verres ſphériques creux, appliqués l'un ſur l'autre, & renfermant de l'eau dans leur concavité, il pourra arriver que les réfractions de l'eau corrigeront aſſez exactement les erreurs de réfractions occaſionnées par l'inégalité des ſurfaces des verres ; & l'on doit préférer ces ſortes de verres objectifs aux elliptiques & aux hyperboliques, tant parce qu'ils ſont plus aiſés à travailler, que parce qu'ils réfractent mieux les


Fig. 126.
Fig. 127.
Fig. 128.
Fig. 129.
Fig. 130
Fig. 131. et 132.
Fig. 133.
Fig. 134.
Fig. 135.
Fig. 136.
Fig. 137.
Fig. 138.
Fig. 139.
Fig. 140.
Fig. 141.
Fig. 142.
Fig. 143.
Fig. 144.
Fig. 145.
Fig. 146.
Fig. 147.
Fig. 148.
Fig. 149.
Fig. 150.
Fig. 151.
Fig. 152.
Fig. 153.
Fig. 154.
Fig. 154 bis.

rayons qui tombent hors de l'axe du verre. Cependant ce n'eſt point aſſez pour pouvoir perfectionner l'optique qu'on ait aſſigné aux verres la figure ſphérique ou telle autre quelconque, il faudroit encore pouvoir remédier à la différence de réfrangibilité des différens rayons. Tant qu'on ne ſera pas en état de corriger les erreurs qui naiſſent de cette différence, tout ce qu'on fera pour corriger les autres ne ſera jamais qu'imparfait.

Fin du premier Livre.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

LIVRE SECOND.

SECTION PREMIERE.

Du Mouvement des corps qui éprouvent une réſiſtance en raiſon de leur vîteſſe.

PROPOSITION I. THÉORÈME I.

Le Mouvement que perdent les corps par la réſiſtance qu'ils éprouvent, eſt comme l'eſpace qu'ils parcourent en ſe mouvant, lorſque cette réſiſtance eſt en raiſon de leur vîteſſe.

LE mouvement perdu à chaque particule égale du temps étant comme la vîteſſe, c'eſt-à-dire, comme le chemin fait pendant cette particule de temps, le mouvement perdu pendant le temps total ſera comme le chemin total. *C. Q. F. D.*

Cor. Ainſi, ſi un corps privé de toute gravité ſe meut dans des eſpaces libres par la ſeule force qui lui a été imprimée; &

que le mouvement total au commencement, ainſi que le reſte du mouvement après quelque eſpace parcouru ſoient donnés : l'eſpace total que ce corps peut parcourir dans un temps infini ſera auſſi donné : & cet eſpace ſera à l'eſpace déja décrit, comme le mouvement total au commencement, eſt à la partie de ce mouvement qui s'eſt perdue.

LEMME PREMIER.

Les quantités proportionnelles à leurs différences ſont en proportion continue.

Soit $A : A-B :: B : B-C :: C : C-D$, &c. on en tirera en renverſant $A : B :: B : C :: C : D$, &c. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION II. THÉORÉME II.

Si un corps éprouve une réſiſtance en raiſon de ſa vîteſſe, & qu'il ſe meuve dans un milieu homogéne par la ſeule force qui lui a été imprimée, je dis, qu'en prenant des tems égaux, les vîteſſes au commencement de chacun de ces temps ſeront en progreſſion géométrique, & que les eſpaces parcourus pendant chacun de ces temps ſeront comme les vîteſſes.

Cas. 1. Soit diviſé le temps en particules égales, & ſoit ſuppoſé au commencement de chacune de ces particules une force réſiſtante qui ſoit comme la vîteſſe & qui agiſſe par un ſeul coup, le décrement de la vîteſſe à chacune de ces particules de temps ſera comme cette vîteſſe, car les vîteſſes ſont continuellement proportionnelles à leurs différences. (Lemme 1. Liv. 2.) Donc, ſi d'un nombre égal de particules on compoſe des temps quelconques égaux, les vîteſſes au commencement de ces temps ſeront comme les termes d'une progreſſion continue pris par ſauts, en obmettant un nombre égal de termes intermédiaires. Or les raiſons de ces termes pris par ſauts ſont compoſés des raiſons que les termes intermédiaires également répétés ont entr'eux, leſquelles ſont les mêmes, donc ces raiſons compoſées ſont les mêmes, & les vîteſſes proportionnelles à ces termes ſont en progreſſion géométrique. Maintenant, ſoient diminuées ces particules égales de

temps, & ſoit leur nombre augmenté à l'infini, enſorte que l'impulſion de la réſiſtance devienne continue; & les vîteſſes qui ſont toujours en proportion continue dans les commencemens des temps égaux le ſeront encore dans ce cas. *C. Q. F. D.*

Cas. 2. Et par conſéquent les différences des vîteſſes, c'eſt-à-dire, leurs parties détruites à chaque particule de temps, ſont comme les vîteſſes totales : mais les eſpaces décrits à chacune de ces particules du temps ſont comme les parties détruites des vîteſſes. (Prop. 1. Liv. 2.) Donc ils ſont auſſi comme les vîteſſes totales. *C. Q. F. D.*

Cor. De-là, ſi on décrit une hiperbole $B\,G$, entre les aſymptotes perpendiculaires $A\,C$, $C\,H$, & que $A\,B$, $G\,D$, ſoient perpendiculaires ſur l'aſymptote $A\,C$, & qu'on exprime, tant la vîteſſe du corps que la réſiſtance du milieu dans le commencement du mouvement, par une ligne quelconque donnée $A\,C$, & après un temps quelconque par la ligne indéfinie $D\,C$; le temps pourra être exprimé par l'aire $A\,B\,G\,D$, & l'eſpace décrit pendant ce temps, par la ligne $A\,D$. Car ſi cette aire, par le mouvement du point D, augmente uniformement comme le temps, la ligne $D\,C$ ainſi que la vîteſſe décroîtront en proportion géométrique, & les parties de la droite $A\,C$ décrites dans des temps égaux décroîtront dans la même raiſon. Fig. 1.

PROPOSITION III. PROBLÉME I.

Trouver le mouvement d'un corps qui monte ou deſcend ſuivant une ligne droite dans un milieu homogene qui réſiſte en raiſon de la vîteſſe pendant que la gravité agit uniformément.

Que la gravité du corps qui remonte ſoit repréſentée par un rectangle quelconque donné $B\,A\,C\,H$, & la réſiſtance du milieu au commencement de ſon aſcenſion par le rectangle $B\,A\,D\,E$, pris du côté oppoſé au premier. Entre les aſymptotes perpendiculaires $A\,C$, $C\,H$, ſoit décrit par le point B une hiperbole qui coupe les perpendiculaires $D\,E$, $d\,e$ en G & en g; il eſt clair, Fig. 2.

Du Mouvement des Corps.

que le corps en montant pendant le temps $DGgd$ parcourera l'eſpace $EGge$, & que pendant le temps $DGBA$ de toute ſon aſcenſion il parcourera l'eſpace EGB; dans le temps $ABKI$ il parcourera en deſcendant l'eſpace BFK, & dans le temps $IKki$; il parcourera en deſcendant l'eſpace $KFfk$ & les vîteſſes du corps (proportionnelles aux réſiſtances du milieu) à la fin des temps entiers, ſeront exprimées par les eſpaces infiniment petits, $ABED$, $ABed$; reſpectivement proportionnels aux eſpaces $ABFI$, $ABfi$; & la plus grande vîteſſe que le corps puiſſe acquérir en deſcendant ſera $BACH$.

Fig. 2.

Fig. 3. Car ſoit diviſé le rectangle $BACH$ en un nombre infini de rectangles Ak, Kl, Lm, Mn, &c. qui ſoient comme les incrémens des vîteſſes en autant de temps égaux; & les rectangles infiniment petits, Ak, Al, Am, An, &c. ſeront comme les vîteſſes totales, & par conſéquent (par l'hypoteſe) comme les réſiſtances du milieu au commencement de chacun de ces temps égaux. Soit fait AC à AK ou $ABHC$ à $ABkK$, comme la force de la gravité à la réſiſtance dans le commencement du ſecond temps, & ſoient les réſiſtances ſouſtraites de la force de la gravité, les reſtes $ABHC$, $KkHC$, $LlHC$, $MmHC$, &c. ſeront comme les forces abſolues par leſquelles le corps eſt preſſé au commencement de chacun de ces temps, & par conſéquent (par la ſeconde Loi du mouvement) comme les incremens des vîteſſes, c'eſt-à-dire, comme les rectangles Ak, Kl, Lm, Mn, &c. c'eſt à-dire, (Lemme I. du Livre II.) en progreſſion géométrique. Prolongeant donc les droites Kk, Ll, Mm, Nn, &c. juſqu'à ce qu'elles rencontrent l'hyperbole en q, r, s, t, &c. les aires $ABqK$, $KqrL$, $LrsM$, $MstN$, &c. ſeront égales, & par conſéquent elles ſeront toujours proportionnelles tant aux temps qu'aux forces de la gravité qui ſont toujours égales. Or l'aire $ABqK$, (Cor. 3. Lemme 7. & 8. du Liv. I.) eſt à l'aire Bkq comme Kq à $\frac{1}{2}kq$, ou comme AC à $\frac{1}{2}AK$, c'eſt-à-dire, comme la force de la gravité à la réſiſtance dans le milieu du

premier temps. Et par le même raiſonnement, les aires $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$, &c. ſont aux aires $qklr$, $rlms$, $smnt$, &c. comme les forces de la gravité aux réſiſtances dans le milieu du ſecond temps, du troiſiéme, du quatriéme, &c. Donc les aires égales $BAKq$, $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$, &c. étant proportionnelles aux forces de la gravité, les aires Bkq, $qklr$, $rlms$, $smnt$, &c. ſeront proportionnelles aux réſiſtances dans les milieux de chacun des temps, c'eſt-à-dire, (par l'hypoteſe) aux vîteſſes, & par conſéquent aux eſpaces décrits. Soient priſes les ſommes de ces quantités proportionnelles, & les aires Bkq, Blr, Bms, Bnt, &c. ſeront proportionnelles à tous les eſpaces décrits, de même que les aires $ABqK$, $ABrL$, $ABsM$, $ABtN$, &c. le ſeront aux temps. Donc le corps en deſcendant dans un temps quelconque $ABrL$ décrit l'eſpace Blr, & dans le temps $LrtN$ l'eſpace $rlnt$. *C. Q. F. D.*

Fig. 3.

Et c'eſt la même démonſtration pour le mouvement en remontant. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc la plus grande vîteſſe que le corps peut acquérir en deſcendant eſt à la vîteſſe acquiſe dans un temps quelconque donné, comme la force donnée de la gravité par laquelle ce corps eſt continuellement preſſé, eſt à la force de la réſiſtance qui s'oppoſe à cette force à la fin de ce temps.

Cor. 2. Or le temps étant augmenté en progreſſion arithmétique, la ſomme de cette plus grande vîteſſe, & de la vîteſſe dans l'aſcenſion, ainſi que leur différence dans la deſcenſion, décroît en progreſſion géométrique.

Cor. 3. Et de même les différences des eſpaces qui ſont décrits dans les différences égales des temps, décroiſſent dans la même progreſſion géométrique.

Cor. 4. Mais l'eſpace décrit par le corps eſt la différence des deux eſpaces dont l'un eſt comme le temps pris depuis le commencement de la deſcenſion, & l'autre comme la vîteſſe, leſquels eſpaces ſont égaux entr'eux au commencement du mouvement.

PROPOSITION IV. PROBLÉME II.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

Suppoſant que la force de la gravité ſoit uniforme dans quelque milieu homogene, & qu'elle tende perpendiculairement au plan de l'horiſon; trouver le mouvement d'un projectile dans ce même milieu, en ſuppoſant que la réſiſtance ſoit proportionnelle à la vîteſſe.

Fig. 4. Qu'un projectile parte d'un lieu quelconque D, ſelon une ligne droite quelconque donnée DP, & que la vîteſſe au commencement du mouvement ſoit exprimée par la ligne DP. Que du point P à la ligne horiſontale DC, on abaiſſe la perpendiculaire PC, & qu'on coupe DC en A deſorte que DC ſoit à CA comme la réſiſtance du milieu produite par le mouvement en hauteur eſt à la force de gravité dans le commencement du mouvement; ou, (ce qui eſt la même choſe) que le point A ſoit pris enſorte que le rectangle ſous DA, & DP, ſoit au rectangle ſous AC, & CP comme toute la réſiſtance au commencement du mouvement eſt à la force de la gravité. Cela fait, ſoit décrite une hiperbole quelconque $GTBS$ entre les aſymptotes DC, CP, laquelle coupe les perpendiculaires DG, AB en G & en B, & ſoit achevé le parallélograme $DGKC$, dont le côté GK, coupe AB en Q. Soit priſe la ligne N dans la même raiſon à QB que DC à CP; & ayant élevé ſur la ligne DC à un point quelconque R une perpendiculaire RT, qui rencontre l'hiperbole en T, & les droites EH, GK, DP en I, t, & V, prenez ſur cette perpendiculaire Vr égale à $\frac{tGT}{N}$; ou (ce qui eſt la même choſe) prenez Rr égale à $\frac{GTIE}{N}$; & le projectile dans le temps $DRTG$ arrivera au point r, en décrivant la ligne courbe $DraF$ donnée par les points r, & il acquérera ſa plus grande hauteur en a, dans la perpendiculaire AB, après quoi il continuera de s'approcher toujours de l'aſymptote PC. Quant à ſa vîteſſe dans un point quelconque r, elle

ſera comme la tangente rL de la courbe. *C. Q. F. T.*

Car N eſt à QB comme DC à CP ou comme DR à RV. Donc $RV = \frac{DR \times QB}{N}$ & Rr, (c'eſt-à-dire, $RV - Vr$, ou $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) $= \frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Que le temps ſoit repréſenté par l'aire $RDGT$, & (Cor. 2. des Loix) ſoit le mouvement du corps décompoſé en deux mouvemens, l'un en montant, l'autre tranſverſal. La réſiſtance étant comme le mouvement, qu'elle ſoit auſſi décompoſée en deux parties proportionnelles & oppoſées aux deux parties du mouvement décompoſé: par ce moien la longueur décrite par le mouvement tranſverſal ſera (Prop. 2. de ce Livre) comme la ligne DR, mais la hauteur (Prop. 3. de ce Livre) ſera comme l'aire $DR \times AB - RDTG$, c'eſt-à-dire, comme la ligne Rr. Et dans le commencement du mouvement l'aire $RDTG$ eſt égale au rectangle $DR \times AQ$, donc cette ligne Rr (ou $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) eſt alors à DR comme $AB - AQ$, ou QB à N, ce qui eſt comme CP à DC; & par conſéquent comme le mouvement en hauteur au mouvement tranſverſal au commencement. Or comme Rr eſt toujours proportionnelle à l'eſpace parcouru en hauteur, & DR toujours proportionnelle à l'eſpace parcouru d'un mouvement tranſverſal, & que Rr eſt à DR dans le commencement comme l'eſpace en hauteur eſt à l'eſpace tranſverſal: il eſt néceſſaire que Rr ſoit toujours à DR, comme l'eſpace en hauteur à l'eſpace tranſverſal, & que par conſéquent le corps ſe meuve dans la ligne $Dr\,aF$ qui eſt le lieu des points r. *C. Q. F. D.*

Fig. 4.

Cor. 1. Donc $Rr = \frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDTG}{N}$: donc, ſi on prolonge RT en X, enſorte que $RX = \frac{DR \times AB}{N}$, c'eſt-à-dire, ſi on acheve le parallélograme $ACPY$, qu'on tire DY cou-

pant CP en Z, & qu'on prolonge RT juſqu'à ce qu'elle rencontre DY en X; on aura $Xr = \frac{RDGT}{N}$, & par conſéquent proportionnelle au temps.

Fig. 4.

Cor. 2. Donc, ſi l'on prend un nombre innombrable de CR, ou (ce qui eſt la même choſe) un nombre innombrable de ZX en progreſſion géométrique, on aura autant de Xr en progreſſion arithmétique. Et delà on pourra facilement décrire la courbe $Dr\ a\ F$ par les tables des logarithmes.

Fig. 5.

Cor. 3. Si du ſommet D du diametre DG prolongé en embas & d'un parametre qui ſoit à $2DP$ comme toute la réſiſtance au commencement du mouvement à la force de la gravité, on conſtruit une parabole; la vîteſſe avec laquelle le corps doit partir du lieu D, ſelon la droite DP, pour qu'il décrive, dans un milieu qui réſiſte uniformement, la ligne courbe $D\ r\ a\ F$, ſera la même que celle avec laquelle il devroit partir du même lieu D ſelon la même ligne droite DP pour décrire la parabole dans un milieu non réſiſtant. Car le parametre de cette parabole dans le commencement du mouvement eſt $\frac{DV^2}{Vr}$, & Vr eſt $\frac{tGT}{N}$ ou $\frac{DR \times Tt}{2N}$; mais la droite qui toucheroit l'hyperbole GTS en G eſt parallele à DK, donc Tt eſt $\frac{CK \times DR}{DC}$, & comme N étoit $\frac{QB \times DC}{CP}$, Vr ſera par conſéquent $\frac{DR^2 \times CK \times CP}{2DC^2 \times QB}$ ou (à cauſe des proportionnelles DR & DC, DV & DP) $\frac{DV^2 \times CK \times CP.}{2DP^2 \times QB}$, donc le parametre $\frac{DV^2}{Vr}$ devient $\frac{2DP^2 \times QB}{CK \times CP}$, ou (à cauſe des proportionnelles QB & CK, DA & AC) $\frac{2DP^2 \times DA}{AC \times CP}$ & par conſéquent il eſt à $2PD :: DP \times DA : CP \times AC$; c'eſt-à-dire, comme la réſiſtance à la gravité. *C. Q. F. D.*

Cor. 4.

Cor. 4. Delà, ſi un corps eſt lancé d'un lieu quelconque *D* avec une vîteſſe donnée, ſelon une ligne droite *D P* donnée de poſition ; & que la réſiſtance du milieu ſoit donnée dans le commencement du mouvement : on trouvera la courbe *D r a F* que le même corps décrira. Car la vîteſſe étant donnée, on ſçait que le parametre de la parabole eſt donné : & prenant 2 *D P* à ce parametre, comme la force de la gravité eſt à la force de la réſiſtance, on aura *D P*. Enſuite coupant *D C* en *A*, enſorte que *C P* × *C A* ſoit à *D P* × *D A* dans cette même raiſon de la gravité à la réſiſtance, on aura le point *A*, & par conſéquent la courbe *D r a F*. Fig. 5.

Cor. 5. Et au contraire, ſi la courbe *D r a F* eſt donnée, on aura la vîteſſe du corps, & la réſiſtance du milieu à chaque lieu *r*. Car de la raiſon donnée de *C P* × *A C* à *D P* × *D A*, on tire la réſiſtance du milieu au commencement du mouvement, & le parametre de la parabole, ce qui donne auſſi la vîteſſe au commencement du mouvement. Enſuite, de la longueur de la tangente *r L*, on tire la vîteſſe qui lui eſt proportionnelle, & par conſéquent la réſiſtance du milieu à un lieu quelconque *r*, laquelle eſt proportionnelle à cette vîteſſe. Fig. 4.

Cor. 6. De ce que la longueur 2 *P D* eſt au parametre de la parabole comme la gravité à la réſiſtance en *D* ; & de ce que la vîteſſe étant augmentée, la réſiſtance augmente dans la même raiſon, & le parametre de la parabole dans la raiſon doublée de cette raiſon ; il ſuit que la longueur 2 *P D* augmentera dans cette raiſon ſimple, qu'elle ſera toujours proportionnelle à la vîteſſe, & qu'elle n'augmentera, ni ne diminuera, quoique l'angle *C D P* change, à moins que la vîteſſe ne change auſſi.

Cor. 7. D'où on voit la maniere de déterminer à peu près la courbe *D r a F* par les phénomenes, & de conclure delà la réſiſtance & la vîteſſe avec laquelle le corps a été lancé. Soient deux corps ſemblables & égaux jettés avec la même vîteſſe d'un lieu *D* ſous divers angles *C D P*, *C D p*, & que les lieux *F*, *f*, Fig. 6.

Du Mouvement des Corps.

où ils tombent ſur le plan horiſontal $D\,C$ ſoient connus. Alors prenant une longueur quelconque pour $D\,P$ ou $D\,p$, ſuppoſant de plus que la réſiſtance en D ſoit à la gravité dans une raiſon quelconque, & exprimant cette raiſon par une longueur quelconque $S\,M$, on trouvera par le calcul, & par cette longueur $D\,P$, priſe à volonté, les longueurs $D\,F$, $D\,f$; & ayant trouvé par le calcul la raiſon de $\frac{F\,f}{D\,F}$ on en ôtera cette même raiſon trouvée par les expériences, & on en exprimera la différence par la perpendiculaire $M\,N$. On recommencera enſuite la même choſe une ſeconde & une troiſiéme fois, en prenant toujours une nouvelle raiſon $S\,M$ de la réſiſtance à la gravité, & raſſemblant les différences on aura une nouvelle différence $M\,N$. Plaçant alors les différences poſitives d'un côté de la droite $S\,M$ & les négatives de l'autre, & traçant par les points N, N, N la courbe $N\,N\,N$ qui coupe la droite $S\,M\,M\,M$ en X, $S\,X$ ſera la vraie proportion cherchée de la réſiſtance à la gravité. Au moyen de cette proportion le calcul donnera la longueur $D\,F$, & la longueur, qui ſera à la longueur ſuppoſée $D\,P$ comme la longueur $D\,F$ connue par l'expérience à la longueur $D\,F$ ainſi trouvée, ſera la vraie longueur $D\,P$, laquelle ſuffira pour donner la ligne courbe $D\,r\,a\,F$ que le corps décrit, la vîteſſe du corps, & la réſiſtance à chaque lieu.

Fig. 6. & 7.

SCHOLIE.

Au reſte, l'hipotheſe qui fait la réſiſtance des corps en raiſon de la vîteſſe, eſt plus mathématique que conforme à la nature. Dans les milieux qui n'ont aucune tenacité les réſiſtances des corps ſont en raiſon doublée des vîteſſes. Car dans un temps moindre, un corps qui aura une plus grande vîteſſe communiquera à la même quantité du milieu un mouvement plus grand, en raiſon de ſa plus grande vîteſſe; donc en temps égal il lui communiquera un mouvement plus grand dans la raiſon doublée, à cauſe

de la plus grande quantité des parties du milieu qui ſont muës ; & la réſiſtance (Loix 2. & 3. du mouvement) eſt comme le mouvement communiqué : voyons donc quels mouvemens doivent ſuivre de cette loi de réſiſtance.

DEUXIÉME SECTION.

Du Mouvement des Corps qui éprouvent une réſiſtance en raiſon doublée des vîteſſes.

PROPOSITION V. THÉORÉME III.

Si le corps éprouve une réſiſtance en raiſon doublée de la vîteſſe, & qu'il ſe meuve dans un milieu homogène, par la ſeule force qui lui a été imprimée ; je dis, qu'en prenant les temps dans une progreſſion géométrique aſcendante, les vîteſſes au commencement de chaque temps ſeront dans la même progreſſion géométrique inverſement ; & que les eſpaces décrits à chacun de ces temps ſeront égaux.

Car puiſque la réſiſtance du milieu eſt proportionnelle au quarré de la vîteſſe, & que le décrément de la vîteſſe eſt proportionnel à la réſiſtance ; ſi on diviſe le temps en un nombre infini de parties égales, les quarrés des vîteſſes à chaque commencement des temps ſeront proportionnels aux différences de ces mêmes vîteſſes. Soient ces particules de temps Fig. 8. AK, KL, LM, &c. priſes ſur la droite CD, & ſoient élevées les perpendiculaires AB, Kk, Ll, Mm, &c. rencontrant en B, k, l, m, &c. l'hyperbole $Bklm G$ décrite entre les aſymptotes perpendiculaires CD, CH, on aura $AB : Kk :: CK : CA$; & par conſéquent $AB - Kk : Kk :: AK : CA$, ou $AB - Kk : AK :: Kk : CA$, c'eſt-à-dire, comme $AB \times Kk : AB \times CA$, d'où AK & $AB \times CA$ étant données, on aura, $AB - Kk$ comme $AB \times Kk$; & à la fin, (lorſque AB &

Du Mouvement des Corps.

Kk coïncident) comme AB^2. Par le même raiſonnement, on aura $Kk - Ll$ & $Ll - Mm$, &c. proportionnels à Kk^2 & Ll^2, &c. Les quarrés des lignes AB, Kk, Ll, Mm ſont donc comme leurs différences; & comme les quarrés des vîteſſes ſont auſſi comme ces mêmes différences, les deux progreſſions ſeront ſemblables. Ce qui étant démontré, il ſuit que les aires décrites par ces lignes ſont dans une progreſſion ſemblable à celle des eſpaces décrits avec ces vîteſſes. Donc, ſi la vîteſſe au commencement du premier temps AK eſt exprimée par la ligne AB, & la vîteſſe au commencement du ſecond KL par la ligne Kk, & la longueur décrite dans le premier temps, par l'aire $AKkB$; toutes les vîteſſes ſuivantes ſeront exprimées par les lignes ſuivantes Ll, Mm, &c. & les longueurs décrites par les aires Kl, Lm, &c. d'où en compoſant, ſi le temps total eſt exprimé par la ſomme de ſes parties AM, la longueur totale décrite ſera exprimée par la ſomme de ſes parties $AMmB$. Suppoſez à-préſent que le temps AM ſoit diviſé dans les parties AK, KL, LM, &c. en ſorte que CA, CK, CL, CM, &c. ſoient en progreſſion géométrique; ces parties ſeront dans la même progreſſion, & les vîteſſes AB, Kk, Ll, Mm, &c. ſeront dans la même progreſſion inverſement; & par conſéquent les eſpaces décrits Ak, Kl, Lm, &c. ſeront égaux. *C. Q. F. D.*

Fig. 8. *Cor.* 1. Il eſt donc clair, que ſi le temps eſt exprimé par une partie quelconque AD de l'aſymptote, & la vîteſſe dans le commencement de ce temps par l'ordonnée AB; la vîteſſe à la fin de ce temps ſera exprimée par l'ordonnée DG; & l'eſpace total décrit ſera repréſenté par l'aire hiperbolique adjacente $ABGD$: de même, l'eſpace qu'un corps peut décrire dans un milieu non réſiſtant pendant le même temps AD, & avec la premiere vîteſſe AB, ſera repréſenté par le rectangle $AB \times AD$.

Cor. 2. Delà on a l'eſpace décrit dans un milieu réſiſtant, en prenant cet eſpace à l'eſpace qui peut être décrit dans le même temps dans un milieu non réſiſtant avec la vîteſſe uniforme AB.

comme l'aire hiperbolique $ABGD$ eſt au rectangle $AB \times AD$.

Cor. 3. La réſiſtance du milieu ſera auſſi donnée en la ſuppoſant égale au commencement du mouvement à la force centripete uniforme qui peut produire la vîteſſe AB, dans un corps qui tombe dans un milieu non réſiſtant pendant le temps AC. Car ſi on mene BT qui touche l'hyperbole en B, & rencontre l'aſymptote en T; la droite AT ſera égale à AC, & repréſentera le temps dans lequel la premiere réſiſtance étant uniformement continuée, peut ôter au corps toute la vîteſſe AB. Fig. 8.

Cor. 4. Et par-là on a auſſi la proportion de cette réſiſtance à la force de la gravité, ou à une autre force centripete quelconque donnée.

Cor. 5. Et réciproquement, ſi la proportion de la réſiſtance à une force centripete quelconque eſt donnée, on aura auſſi le temps AC pendant lequel la force centripete, égale à la réſiſtance, peut produire une viteſſe quelconque AB; & on aura par-là le point B, par lequel on doit décrire l'hyperbole: donc les aſymptotes ſeront CH, CD, ainſi que l'eſpace $ABGD$ que le corps peut décrire en commençant à ſe mouvoir avec une vîteſſe AB, dans un milieu également réſiſtant pendant un temps quelconque AD.

PROPOSITION VI. THÉORÉME IV.

Les corps ſphériques, homogènes & égaux qui éprouvent une réſiſtance en raiſon doublée des vîteſſes, & qui ſe meuvent par les ſeules forces qui leur ont eté imprimées, décrivent toujours des eſpaces égaux dans des temps réciproquement proportionnels aux vîteſſes qu'ils ont au commencement & ils perdent des parties de vîteſſe proportionnelles à leur vîteſſe totale.

Ayant décrit une hyperbole quelconque $Bb\,E\,e$, dont les aſymptotes ſoient les perpendiculaires CD, CH, & qui ſoit coupée en B, b, E, e, par les perpendiculaires AB, ab, DE, de, que les vîteſſes initiales ſoient exprimées par les perpendiculaires AB, DE, & les temps par les lignes Aa, Dd. On a (par l'hypotheſe) $DE : AB :: Aa : Dd$, ou (par la nature de l'hyperbole) Fig. 9.

Du mouvement des Corps.

Fig. 9.

:: $CA : CD$, & par conſéquent :: $Ca : Cd$, donc les aires $ABba$, $DEed$, c'eſt-à-dire, les eſpaces décrits ſont égaux entr'eux, & les premieres vîteſſes AB, DE ſont proportionnelles aux dernieres ab, de, & ſont par conſéquent proportionnelles aux parties perdues de ces vîteſſes $AB - ab$ $DE - de$. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION VII. THÉORÉME V.

Les corps ſphériques qui éprouvent une réſiſtance en raiſon doublée des vîteſſes, perdent dans des temps qui ſont directement comme les premiers mouvemens, & inverſement comme les premieres réſiſtances, des parties de mouvement proportionnelles aux touts; & décrivent des eſpaces en raiſon compoſée de ces temps, & des premieres vîteſſes.

Car les parties perdues des mouvemens ſont en raiſon compoſée des réſiſtances & des temps. Donc comme ces parties ſont proportionnelles aux touts, la raiſon compoſée de la réſiſtance & du temps doit être celle du mouvement. Ainſi le temps ſera comme le mouvement directement, & comme la réſiſtance inverſement. C'eſt pourquoi les particules des temps étant priſes dans cette raiſon, les corps perdront toujours des particules de mouvement proportionnelles aux touts, & par conſéquent ils conſerveront toujours des vîteſſes proportionnelles à leurs premieres vîteſſes. Et à cauſe de la raiſon donnée des vîteſſes, ils décriront toujours des eſpaces qui ſeront comme les premieres vîteſſes & les temps conjointement: *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc, ſi les corps qui ont des vîteſſes égales éprouvent des réſiſtances qui ſoient en raiſon doublée des diamétres: les globes homogènes mus avec des vîteſſes quelconques perdront des parties de mouvement proportionnelles aux touts en parcourant des eſpaces proportionnels à leurs diamétres. Ainſi le mouvement d'un globe quelconque ſera comme ſa vîteſſe, & ſa maſſe conjointement, c'eſt-à-dire, comme ſa vîteſſe & le cube de ſon diamétre; la réſiſtance (par l'hypoteſe) ſera comme le

quarré du diamétre & le quarré de la vîteſſe conjointement ; & le temps (par cette Propoſition) eſt dans la premiere raiſon directement, & dans la derniere inverſement, c'eſt-à-dire, directement comme le diamétre, & inverſement comme la vîteſſe ; donc l'eſpace qui eſt proportionnel au temps & à la vîteſſe, eſt comme le diamétre.

Cor. 2. Si des corps qui ont des vîteſſes égales éprouvent des réſiſtances qui ſoient en raiſon ſeſquiplée de leurs diamétres : les globes homogènes mus avec des vîteſſes quelconques, perdront des parties de leurs mouvemens proportionnelles aux touts en parcourant des eſpaces en raiſon ſeſquiplée de leurs diamétres.

Cor. 3. Et généralement, ſi des corps qui ont des vîteſſes égales éprouvent des réſiſtances en raiſon d'une puiſſance quelconque de leurs diamétres ; les eſpaces dans leſquels des globes homogènes mus avec des vîteſſes quelconques perdront des parties de mouvement proportionnelles aux touts, ſeront comme les cubes des diamétres diviſés par cette puiſſance. Soient les diamétres D & E, ſi les réſiſtances, lorſque les vîteſſes ſont ſuppoſées égales, ſont comme D^n & E^n, les eſpaces dans leſquels les globes mus avec des vîteſſes quelconques perdront des parties de mouvement proportionnelles aux touts, ſeront comme D^{3-n} & E^{3-n}, & par conſéquent des globes homogènes en décrivant des eſpaces proportionnels à D^{3-n} & E^{3-n} conſerveront des vîteſſes qui ſeront dans la même raiſon entr'elles que dans le commencement.

Cor. 4. Et ſi les globes ne ſont pas homogènes, l'eſpace parcouru par un globe plus denſe doit augmenter en raiſon de ſa denſité. Car le mouvement eſt plus grand en raiſon de la denſité lorſque la vîteſſe eſt égale, & le temps (par cette Propoſition) augmentera en raiſon du mouvement directement, & l'eſpace décrit en raiſon du temps.

Cor. 5. Et ſi les globes ſe meuvent dans des milieux différens ; l'eſpace ſera moindre dans un milieu qui réſiſte plus, en raiſon

de cette plus grande réſiſtance. Car le temps (par cette Prop.) diminuera en raiſon de la réſiſtance augmentée, & l'eſpace en raiſon du temps.

LEMME II.

Le moment de la quantité produite *eſt égal au moment de chacune des racines compoſantes, multipliées ſucceſſivement par les expoſans de leurs puiſſances & par leurs coëficiens.*

J'appelle quantité *produite* toute quantité formée ſans addition & ſans ſouſtraction, ſoit arithmétiquement par la multiplication, la diviſion, ou l'extraction des racines de quantités ſimples, ou de leurs puiſſances, ſoit géométriquement par la détermination des produits & des racines, ou des extrêmes & des moyens proportionnels. Telles ſont les produits, les quotiens, les racines, les rectangles, les quarrés, les cubes, les racines quarrées, & les racines cubes. Je conſidere ici ces quantités comme variables, & croiſſant ou décroiſſant comme par un mouvement ou flux perpétuel; & j'entends par *momens* leur incrément ou décrément momentané: enſorte que l'on doit prendre leurs incrémens pour les momens additifs ou poſitifs, & leurs décrémens pour ceux qui ſont négatifs ou ſouſtractifs. Prenez garde cependant de ne pas entendre par là des particules finies. Car les particules finies ne ſont pas les momens, mais les quantités mêmes produites par ces *momens*. Il faut donc prendre pour particules les principes naiſſans de quantités finies. On ne conſidere point dans ce Lemme la grandeur des momens. Mais la premiere proportion des quantités qui naiſſent. Et il en ſera de même ſi au lieu des *momens* on emploie les vîteſſes des incrémens & des décrémens (qu'on peut auſſi appeller mouvemens, mutations, & fluxions des quantités) ou les quantités finies quelconques proportionnelles à ces vîteſſes. Quant au coëficient d'une racine quelconque qui produit une quantité, il ſe trouve en diviſant la quantité produite, par cette racine.

Le

Le ſens de ce Lemme eſt donc, que ſi A, B, C, &c. ſont les momens des quantités quelconques croiſſantes ou décroiſſantes par un mouvement continu, & que les vîteſſes proportionnelles à ces changemens ſoient nommées a, b, c, &c. le moment ou le changement du rectangle produit AB ſera $aB+bA$, & le moment du produit ABC ſera $aBC+bAC+cAB$: & les momens des puiſſances produites A^2, A^3, A^4, $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1}, A^{-2}, & $A^{-\frac{1}{2}}$ ſeront $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$ & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ reſpectivement. Et généralement, le moment d'une puiſſance quelconque $A^{\frac{n}{m}}$ ſera $\frac{n}{m}aA^{\frac{n-m}{m}}$, de même le moment de la quantité produite A^2B ſera $2aAB+bA^2$ & celui de la quantité produite $A^3B^4C^2$ ſera $3aA^2B^4C^2+4bA^3B^3C^2+2cA^3B^4C$, celui de la quantité produite $\frac{A^3}{B^2}$ ou A^3B^{-2} ſera $3aA^2B^{-2}-2bA^3B^{-3}$: & ainſi des autres. On démontrera ce Lemme de cette maniere.

Cas. 1. Un rectangle quelconque AB augmenté par un mouvement continu, lorſqu'on ôte des côtés A & B la moitié des momens $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, devient $\overline{A-\frac{1}{2}a}\times\overline{B-\frac{1}{2}b}$, ou $AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. Et lorſque les côtés A & B ſont augmentés des autres moitiés des momens, il devient $\overline{A+\frac{1}{2}a}\times\overline{B+\frac{1}{2}b}$, ou $AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab$. Otant de ce rectangle le premier rectangle, on aura pour reſte $aB+bA$, donc l'incrément $aB+bA$ du rectangle ſera produit par les incrémens entiers a & b des côtés. *C. Q. F. D.*

Cas 2. Suppoſez que AB ſoit toujours égal à G, le moment du produit ABC, ou GC (par le cas 1.) ſera $gC+cG$, c'eſt-à-dire, (ſi on écrit au lieu de G & g, AB, & $aB+bA$) $aBC+bAC+cAB$, il en ſeroit de même pour des produits plus compoſés. *C. Q. F. D.*

Cas 3. Suppoſez que les produiſans A, B, C ſoient toujours égaux entr'eux ; le moment $aB+bA$ du quarré A^2 ou du rectangle AB ſera $2aA$, & le moment $aBC+bAC+cAB$ du cube A^3 ou du produit ABC ſera $3aA^2$. Et par le même raiſonnement, le moment d'une puiſſance quelconque A^n eſt naA^{n-1}. *C. Q. F. D.*

Cas 4. D'où $\frac{1}{A} \times A$ étant $= 1$, ſon moment qui eſt A multiplié par le moment de $\frac{1}{A}$ & ajouté avec $\frac{1}{A} \times a$ ſera le moment de 1, c'eſt-à-dire, $= 0$. Donc le moment de $\frac{1}{A}$ ou de A^{-1} eſt $\frac{-a}{A^2}$, & généralement, comme $\frac{1}{A^n} \times A^n = 1$ le moment de $\frac{1}{A^n} \times A^n$, ajouté avec $\frac{1}{A^n} \times naA^{n-1}$ ſera $= 0$, & par conſéquent le moment de $\frac{1}{A^n}$ ou de A^{-n} ſera $-\frac{na}{A^{n+1}}$. *C. Q. F. D.*

Cas 5. Et comme $A^{\frac{1}{2}} \times A^{\frac{1}{2}} = A$, le moment de $A^{\frac{1}{2}} \times 2A^{\frac{1}{2}}$ ſera $= a$. (par le 3^e^. Cas) Donc le moment de $A^{\frac{1}{2}}$ ſera $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ ou $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$; & généralement, ſi on ſuppoſe $A^{\frac{m}{n}} = B$, on aura $A^m = B^n$, & par conſéquent, $maA^{m-1} = nbB^{n-1}$ & $maA^{-1} = nbB^{-1}$ ou $nbA^{-\frac{m}{n}}$, donc $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ eſt égal à b ou au moment de $A^{\frac{m}{n}}$. *C. Q. F. D.*

Cas 6. Donc le moment de la quantité quelconque produite A^mB^n eſt le moment de A^m multiplié par B^n & ajouté avec le moment de la même quantité B^n multiplié par A^m, c'eſt-à-dire, $maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$, ſoit que les expoſans m & n ſoient des nombres entiers ou rompus, poſitifs ou négatifs. C'eſt la même choſe pour le produit d'un plus grand nombre de puiſſances. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. De là, dans les quantités continuellement proportion-

nelles, ſi un terme eſt donné, les momens des autres termes ſeront comme ces mêmes termes multipliés par le nombre des intervales qui ſont entr'eux & le terme donné. Soient les quantités A, B, C, D, E, F continuellement proportionnelles; ſi le terme C eſt donné, les momens des autres termes ſeront entr'eux comme $-2A-B$, D, $2E$, $3F$.

Cor. 2. Et ſi dans quatre proportionnelles deux moiennes ſont données, les momens des extrêmes ſeront comme ces mêmes extrêmes. Il faut entendre la même choſe des côtés d'un rectangle quelconque donné.

Cor. 3. Et ſi la ſomme ou la différence de deux quarrés eſt donnée, les momens de leurs côtés ſeront réciproquement comme ces côtés.

SCHOLIE.

En expliquant dans une lettre à *D. J. Collins* le 10. Décembre 1672. la méthode des tangentes que je ſoupçonne être la même que celle de Sluſius qui ne m'avoit pas encore été communiquée, j'ajoutai, *cela eſt plutôt un corollaire particulier d'une méthode générale qui s'étend, ſans calcul embaraſſant, non-ſeulement à mener des tangentes à des courbes quelconques, ſoit géométriques, ſoit méchaniques, ou relatives d'une façon quelconque à des lignes droites ou courbes, mais auſſi à réſoudre d'autres eſpeces de problemes très-difficiles touchant les courbures, les quadratures, les rectifications, les centres de gravité des courbes, &c. & elle n'eſt pas reſtreinte* (*comme la méthode de* maximis & minimis *de Hudde*) *aux ſeules équations qui ne contiennent point de quantités irrationnelles. J'ai entremêlé cette méthode de cette autre par laquelle je détermine les racines des équations en les réduiſant à des ſéries infinies.* Juſqu'à ces derniers mots, c'eſt la lettre, mais ces derniers mots ſont du Traité que j'avois écrit ſur cette matiere dès l'année 1671. Les principes de cette Méthode générale ſont contenus dans le Lemme précédent.

Du Mouvement des Corps.

PROPOSITION VIII. THÉORÉME VI.

Lorſqu'un corps monte ou deſcend en ligne droite dans un milieu homogène, la gravité agiſſant uniformément ſur lui, ſi on partage tout l'eſpace qu'il a décrit en parties égales, & qu'on trouve (en ajoutant la réſiſtance du milieu à la force de la gravité, lorſque le corps monte, & l'en ſouſtrayant lorſqu'il deſcend) les forces abſolues au commencement de chacune de ces parties égales; je dis que ces forces abſolues ſeront en progreſſion géométrique.

Fig. 10. Car ſoit exprimée la force de la gravité par la ligne donnée AC; la réſiſtance par la ligne indéfinie AK; la force abſolue lorſque le corps deſcend par la différence KC; la vîteſſe du corps par la ligne AP, qui ſoit moienne proportionnelle entre AK & AC, & par conſéquent en raiſon ſouſdoublée de la réſiſtance; que l'incrément de la réſiſtance dans une particule donnée de temps ſoit repréſenté par la petite ligne KL, & l'incrément contemporain de la vîteſſe par la petite ligne PQ, & du centre C, ſoit décrite l'hyperbole quelconque BNS ayant pour aſymptotes les perpendiculaires CA, CH, & ſoient élevées les perpendiculaires AB, KN, LO qui la rencontrent en B, N, O. Parce que AK eſt comme AP^2, ſon moment KL ſera comme le moment $2APQ$ de AP^2 : c'eſt-à-dire, comme $AP \times KC$, car l'incrément PQ de la vîteſſe (2e Loi du mouvement) eſt proportionnel à la force génératrice KC. Compoſant la raiſon de KL avec celle de KN, on aura le rectangle $KL \times KN$ proportionnel à $AP \times KC \times KN$; c'eſt-à-dire, à cauſe du rectangle donné $KC \times KN$, proportionnel à AP; donc la derniére raiſon de l'aire hyperbolique $KNLO$ au rectangle $KL \times KN$ lorſque les points K & L coïncident, eſt la raiſon d'égalité. Donc cette aire évanouiſſante eſt comme AP. Or l'aire totale hyperbolique $ABLO$ eſt compoſée des particules $KNOL$ qui ſont toujours proportionnelles à la vîteſſe AP, & par conſéquent, l'aire totale eſt proportionnelle à l'eſpace décrit avec

cette vîteſſe. Soit à préſent diviſée cette aire dans les parties égales *ABMI*, *IMNK*, *KNOL*, &c. les forces abſolues *AC*, *IC*, *KC*, *LC*, &c. ſeront en progreſſion géométrique. *C.Q.F.D.* Fig. 10.

Par le même raiſonnement, dans l'aſcenſion du corps, prenant de l'autre côté du point *A* les aires égales *ABmi*, *imnk*, *knol*, &c. On prouvera que les forces abſolues *AC*, *iC*, *kC*, *lC*, &c. ſeront continuellement proportionnelles. Donc ſi dans l'aſcenſion & la deſcenſion du corps on prend tous les eſpaces égaux; toutes les forces abſolues *lC*, *kC*, *iC*, *AC*, *KC*, *LC*, &c. ſeront en proportion continue. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. De là, ſi l'eſpace décrit eſt repréſenté par l'aire hyperbolique *ABNK*; la force de la gravité, la vîteſſe du corps, & la réſiſtance du milieu peuvent être repréſentées par les lignes *AC*, *AP* & *AK* reſpectivement, & au contraire.

Cor. 2. Et l'expoſant de la plus grande vîteſſe que le corps peut jamais acquérir en deſcendant à l'infini eſt la ligne *AC*.

Cor. 3. Donc, ſi on connoît la réſiſtance du milieu pour une vîteſſe donnée, on trouvera la plus grande vîteſſe en la prenant à cette vîteſſe donnée dans la raiſon ſouſdoublée que la force de la gravité a à cette réſiſtance connue du milieu.

PROPOSITION IX. THÉORÈME VII.

Les choſes ci-devant démontrées étant poſées, je dis, que ſi on prend pour un rayon donné de grandeur les tangentes des angles du ſecteur circulaire & du ſecteur hyperbolique proportionnelles aux vîteſſes, le temps entier que le corps employera à monter au lieu le plus haut ſera comme le ſecteur du cercle, & tout le temps qu'il employera à deſcendre du lieu le plus haut ſera comme le ſecteur de l'hyperbole.

Soit menée *AD* perpendiculaire & égale à *AC* qui exprime la force de la gravité. Du centre *D*, & du demi diametre *AD* ſoit décrit, tant le quart de cercle *AtE*, que l'hyperbole équilatere *AVZ* dont l'axe ſoit *AX*, le ſommet *A*, & l'aſymp- Fig. 11.

Du Mouvement des Corps.

Fig. 11.

tote DC. Soient menées Dp & DP, le ſecteur circulaire AtD ſera comme tout le temps employé à monter au lieu le plus haut; & le ſecteur hyperbolique ATD ſera comme tout le temps employé à deſcendre du lieu le plus haut : pourvû cependant que les tangentes Ap, AP des ſecteurs ſoient comme les vîteſſes.

Cas 1. Soit tirée Dvq qui coupe les momens du ſecteur ADt & du triangle ADp, ou les particules très-petites tDv, & qDp décrites en même temps. Comme ces particules, à cauſe de l'angle commun D, ſont en raiſon doublée des côtés, la particule tDv ſera comme $\frac{qDp \times tD^2}{pD^2}$, c'eſt-à-dire, à cauſe de la donnée tD, comme $\frac{qDp}{pD^2}$. Mais pD^2 eſt $AD^2 + Ap^2$, c'eſt-à-dire, $AD^2 + AD \times Ak$, ou $AD \times Ck$; & qDp eſt $\frac{1}{2} AD \times pq$. Donc la particule tDv du ſecteur eſt comme $\frac{pq}{Ck}$, c'eſt-à-dire, comme le très-petit décrément pq de la vîteſſe directement, & la force Ck qui diminue la vîteſſe inverſement; & par conſéquent, comme la particule du temps qui répond au décrément de la vîteſſe. D'où en compoſant, la ſomme de toutes les particules tDv dans le ſecteur ADt eſt comme la ſomme des petites parties du temps qui répondent à chacune des particules perdues pq de la vîteſſe décroiſſante Ap, juſqu'à ce que la vîteſſe étant diminuée à l'infini, elle s'évanouiſſe; c'eſt-à-dire, que le ſecteur total ADt eſt comme tout le temps employé à monter au lieu le plus haut. *C. Q. F. D.*

Cas 2. Soit tirée DQV qui coupe les très-petites particules TDV & PDQ tant du ſecteur DAV que du triangle DAQ; ces particules ſeront l'une à l'autre comme DT^2 à DP^2, c'eſt-à-dire, (ſi TX & AP ſont paralleles) comme DX^2 à DA^2 ou TX^2 à AP^2, & en diviſant, comme $DX^2 - TX^2$ à $DA^2 - AP^2$. Mais par la nature de l'hyperbole,

$DX^2 - TX^2$ eſt AD^2, & par l'hypoteſe, AP^2 eſt $AD \times AK$. Donc les particules ſont entr'elles comme AD^2 à $AD^2 - AD \times AK$, c'eſt-à-dire, comme AD à $AD - AK$ ou AC à CK. Donc la petite partie TDV du ſecteur eſt $\frac{PDQ \times AC}{CK}$; & par conſéquent, à cauſe des données AC & AD, comme $\frac{PQ}{CK}$, c'eſt-à-dire, comme l'incrément de la vîteſſe directement ; & comme l'incrément de la force génératrice inverſement, & par conſéquent comme la particule de temps qui répond à l'incrément. D'où en compoſant, la ſomme des particules de temps pendant leſquelles toutes les particules PQ de la vîteſſe AP ſont produites, eſt comme la ſomme des particules du ſecteur ATD, c'eſt-à-dire, que le temps total eſt comme tout ce ſecteur. *C.Q.F.D.*

Fig. 11.

Cor. 1. De là, en ſuppoſant que AB ſoit la quatriéme partie de AC, l'eſpace que le corps décrit en tombant pendant un temps quelconque ſera à l'eſpace que le corps avec la plus grande vîteſſe AC pourroit décrire en avançant uniformement pendant le même temps, comme l'aire $ABNK$, qui exprime l'eſpace décrit en tombant, eſt à l'aire ATD par laquelle le temps eſt exprimé. Car puiſque $AC : AP :: AP : AK$, on aura (Cor. 1. du Lemme 2. de ce livre) $LK : PQ :: 2AK : AP$, c'eſt-à-dire, $:: 2AP : AC$, & de là on tire, $LK : \frac{1}{2}PQ :: AP : \frac{1}{4}AC$ ou AB ; mais $KN : AC$ ou $AD :: AB : CK$, & par conſéquent, $LNKO : DPQ :: AP : CK$. De plus, on avoit $DPQ : DTV :: CK : AC$. Donc $LKNO : DTV :: AP : AC$; c'eſt-à-dire, comme la vîteſſe du corps qui tombe, à la plus grande vîteſſe que le corps peut acquérir en tombant. Or comme les momens $LKNO$ & DTV des aires $ABNK$ & ATD ſont proportionnels aux vîteſſes, toutes les parties de ces aires produites en même temps ſeront comme les eſpaces décrits en même temps, donc les aires totales $ABNK$, ATD décrites depuis le commencement du mouvement ſeront comme les

DU MOUVEMENT DES CORPS.

eſpaces entiers décrits depuis que le corps a commencé à deſcendre. *C. Q. F. D.*

Fig. 11.

Cor. 2. Il en eſt de même de l'eſpace décrit en remontant, c'eſt-à-dire, que tout cet eſpace eſt à l'eſpace décrit avec la vîteſſe uniforme AC dans le même temps, comme l'aire $ABnk$ eſt au ſecteur ADt.

Cor. 3. La vîteſſe du corps qui tombe pendant le temps ATD eſt à la vîteſſe qu'il acquéroit dans le même temps dans un eſpace non réſiſtant, comme le triangle APD eſt au ſecteur hyperbolique ATD. Car la vîteſſe dans un milieu non réſiſtant ſeroit comme le temps ATD, & dans un milieu réſiſtant elle eſt comme AP, c'eſt-à-dire, comme le triangle APD. Or les vîteſſes au commencement de la chute ſont égales entr'elles, donc elles ſont comme les aires ATD, APD.

Cor. 4. Par le même raiſonnement, la vîteſſe dans l'aſcenſion eſt à la vîteſſe avec laquelle le corps peut perdre tout ſon mouvement en remontant dans le même temps, dans un eſpace non réſiſtant, comme le triangle ApD eſt au ſecteur circulaire AtD; ou comme la droite Ap à l'aire At.

Cor. 5. Le temps dans lequel le corps en tombant dans un milieu réſiſtant peut acquérir la vîteſſe AP, eſt donc au temps dans lequel il peut acquérir la plus grande vîteſſe AC en tombant dans un milieu non réſiſtant, comme le ſecteur ADT eſt au triangle ADC; & le temps pendant lequel il peut perdre la vîteſſe Ap en remontant dans un milieu réſiſtant, eſt au temps dans lequel il peut perdre la même vîteſſe en remontant dans un milieu non réſiſtant, comme l'arc At eſt à ſa tangente Ap.

Cor. 6. De là, le temps étant donné, on a l'eſpace décrit dans l'aſcenſion ou dans la deſcenſion. Car ſi le corps deſcend à l'infini ſa plus grande vîteſſe eſt donnée par les Cor. 2. & 3. du Théor. 6. de ce Liv. 2. & par-là on a le temps dans lequel il peut acquérir cette vîteſſe en tombant dans un eſpace non réſiſtant

réſiſtant. Prenant donc le ſecteur ADT ou ADt au triangle ADC dans la raiſon du temps donné au temps déja trouvé, on aura tant la vîteſſe AP ou Ap, que l'aire $ABNK$ ou $ABnk$ qui eſt au ſecteur ADT ou ADt comme l'eſpace cherché eſt à l'eſpace qui auroit pu être décrit uniformement dans un temps donné avec cette plus grande vîteſſe trouvée. Fig. 11.

Cor. 7. Et réciproquement, l'eſpace $ABnk$ ou $ABNK$ décrit pendant l'aſcenſion ou la deſcenſion étant donné, le temps ADt ou ADT le ſera auſſi.

PROPOSITION X. PROBLÉME III.

La force uniforme de la gravité tendant directement au plan de l'horiſon, & la réſiſtance étant comme la denſité du milieu & le quarré de la vîteſſe conjointement; on demande à chacun des lieux, tant la denſité du milieu néceſſaire pour que le corps décrive une courbe quelconque donnée, que la vîteſſe du corps & la réſiſtance du milieu à chacun des lieux de cette courbe.

Que PQ ſoit le plan perpendiculaire au plan de la figure; $PFHQ$ une ligne courbe rencontrant ce plan en P & Q; G, H, I, K quatre lieux du corps dans cette courbe en allant de F en Q; & GB, HC, ID, KE quatre ordonnées paralleles abaiſſées de ces points ſur la ligne horiſontale PQ, & s'appuyant ſur cette ligne aux points B, C, D, E; les diſtances BC, CD, DE de ces ordonnées étant égales entr'elles. Des points G & H ſoient tirées les droites GL, HN tangentes de la courbe en G & H, & rencontrant en L & N les ordonnées CH, DI prolongées en enhaut, & ſoit achevé le parallélograme $HCDM$; les temps dans leſquels le corps décrit les arcs GH, HI ſeront en raiſon ſouſdoublée des hauteurs LH, IN que le corps peut parcourir dans ces temps en tombant par ces tangentes; & les vîteſſes ſeront comme les longueurs parcourues GH, HI directement, & comme les temps inverſement. Qu'on exprime les temps par T & t, & les vîteſſes par Fig. 12.

Fig. 12.

$\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$ le décrément de la vîteſſe pendant le temps t ſera $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Ce décrément vient de la réſiſtance qui retarde le corps, & de la gravité qui l'accélere. La gravité produit dans un corps qui parcourt en tombant l'eſpace NI une vîteſſe par laquelle le corps pourroit parcourir le double de cet eſpace dans le même temps, comme Galilée l'a démontré; c'eſt-à-dire, la vîteſſe $\frac{2NI}{t}$: mais dans le corps qui parcourt l'arc HI elle augmente ſeulement cet arc de la longueur $HI - HN$ ou $\frac{MI \times NI}{HI}$; elle produit donc ſeulement alors la vîteſſe $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Ajoutant cette vîteſſe au décrément dont on a parlé, on aura le décrément de la vîteſſe cauſé par la ſeule réſiſtance, c'eſt-à-dire, $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Donc, puiſque la gravité produit dans le même temps dans le corps qui tombe la vîteſſe $\frac{2NI}{t}$; la réſiſtance ſera à la gravité comme $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ à $\frac{2NI}{t}$, ou comme $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ à $2NI$.

Ecrivant à préſent, au lieu des abſciſſes CB, CD, DE, $-o$, o, $2o$; pour l'ordonnée CH, P; & pour MI la ſérie quelconque $Qo + Roo + So^3 +$ &c. Tous les termes de cette ſérie après le premier, c'eſt-à-dire, $Ro^2 + So^3 +$ &c. ſeront NI; & les ordonnées DI, EK, & BG, ſeront $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 -$ &c. & $P + Qo - Roo + So^3 -$ &c. reſpectivement. Et en quarant les différences des ordonnées $BG - CH$ & $CH - DI$ & ajoutant à ces quarrés les quarrés de BC, CD, on aura les

quarrés $oo + QQoo - 2QRo^3 +$ &c. & $oo + QQoo + 2QRo^3 +$ &c. des arcs GH, HI, dont les racines $o\sqrt{1+QQ} - \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ & $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QRoo}{\sqrt{1+QQ}}$ ſont les arcs GH & HI. De plus, ſi on ſouſtrait de l'ordonnée CH la demi-ſomme des ordonnées BG & DI, & de l'ordonnée DI la demi-ſomme des ordonnées CH & EK, il reſtera les fléches Roo & $Roo + \frac{3}{2}So^3$ des arcs GI & HK, leſquelles ſont proportionnelles aux petites lignes LH & NI, & par conſéquent en raiſon doublée des temps infiniment petits T & t. Donc la raiſon de $\frac{t}{T}$ eſt $\sqrt{\frac{R + \frac{3}{2}So}{R}}$ ou $\frac{R + \frac{3}{4}So}{R}$; & $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, & en mettant au lieu de $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI & NI leurs valeurs trouvées, on aura $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$, & comme $2NI$ eſt $2Roo$, la réſiſtance ſera alors à la gravité comme $\frac{3Soo}{2R}\sqrt{1+QQ}$ à $2Roo$, c'eſt-à-dire, comme $3S\sqrt{1+QQ}$ à $4RR$.

Cette vîteſſe eſt celle avec laquelle le corps en partant d'un lieu quelconque H, ſelon la tangente HN, décrit la parabole dont le diametre eſt HC & le parametre $\frac{HN^2}{NI}$ ou $\frac{1+QQ}{R}$, & avec laquelle il pourroit ſe mouvoir dans le vuide & décrire la même courbe.

Et la réſiſtance étant comme la denſité du milieu, & le quarré de la vîteſſe conjointement, la denſité du milieu ſera comme la réſiſtance directement, & le quarré de la vîteſſe inverſement, c'eſt-à-dire, comme $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directement & $\frac{1+QQ}{R}$ inverſement, ou ce qui revient au même, comme $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$. C. Q. F. T.

Fig. 12.

Du Mouvement des Corps.

Fig 12.

Cor. 1. Si on prolonge la tangente HN des deux côtés, enſorte qu'elle rencontre une ordonnée quelconque AF en T, $\frac{HT}{AC}$ ſera égale à $\sqrt{1+QQ}$, donc on peut l'écrire dans les calculs précédens au lieu de $\sqrt{1+QQ}$. C'eſt pourquoi la réſiſtance ſera à la gravité, comme $3S\times HT$ à $4RR\times AC$, la vîteſſe comme $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$ & la denſité du milieu comme $\frac{S\times AC}{R\times HT}$.

Cor. 2. Et delà, ſi la ligne courbe $PFHQ$ eſt exprimée ſuivant l'uſage par la relation entre la baſe ou l'abſciſſe AC & l'appliquée CH, & que la valeur de l'appliquée ſoit transformée en une ſérie convergente: le problême ſe réſoudra très-facilement par les premiers termes de la ſérie comme dans les exemples ſuivans.

Exemple 1. Que la ligne $PFHQ$ ſoit un demi-cercle décrit ſur le diametre PQ, & qu'on demande la denſité du milieu néceſſaire pour que le projectile ſe meuve dans cette ligne.

Que le diametre PQ ſoit coupé en deux également au point A; & qu'on nomme AQ, n; AC, a; CH, e; & CD, o; & on aura DI^2 ou $AQ^2-AD^2=nn-aa-2ao-oo$, ou, $ee-2ao-oo$, & la racine étant extraite par notre méthode on aura, $DI=e-\frac{ao}{e}-\frac{oo}{2e}-\frac{aaoo}{2e^3}-\frac{ao^3}{2e^3}-\frac{a^3o^3}{2e^5}-$ &c. & écrivant nn au lieu de $ee+aa$, on aura $DI=e-\frac{ao}{e}-\frac{nnoo}{2e^3}-\frac{annno^3}{2e^5}-$ &c.

Je diſtingue en cette ſorte les ſéries de l'eſpéce de la précédente en termes ſucceſſifs. J'appelle *premier terme* celui dans lequel la quantité infiniment petite o ne ſe trouve point; *ſecond terme*, celui dans lequel cette quantité eſt d'une dimenſion; *troiſieme terme*, celui dans lequel elle en a deux; *quatrieme terme*, celui où elle en a trois, & ainſi à l'infini. Le premier terme qui eſt ici,

e, repréſentera toujours la longueur de l'ordonnée CH qui s'appuye ſur le commencement de la quantité indéfinie o.

Le ſecond terme qui eſt ici $\frac{ao}{e}$ repréſentera la différence entre CH & DN, c'eſt-à-dire, la petite ligne MN, qui eſt retranchée en achevant le parallélograme $HCDM$, & qui par conſéquent détermine toujours la poſition de la tangente HN, comme dans ce cas, en prenant MN à HM comme $\frac{ao}{e}$ eſt à o, ou, comme a eſt à e.

Le troiſiéme terme qui eſt ici $\frac{nnoo}{2e3}$ repréſentera la petite ligne IN qui eſt compriſe entre la tangente & la courbe, & qui par conſéquent détermine l'angle de contact IHN, ou la courbure que la ligne courbe a au point H. Si cette petite ligne IN eſt de grandeur finie, elle ſera repréſentée par le troiſiéme terme & par tous ceux qui le ſuivent à l'infini, mais ſi cette petite ligne diminue à l'infini, les termes ſuivans deviendront infiniment plus petits que le troiſiéme, & peuvent par conſéquent être négligés.

Le quatriéme terme détermine la variation de la courbure ; le cinquiéme la variation de la variation, & ainſi de ſuite. D'où l'on voit en paſſant l'uſage de ces ſéries dans la ſolution des problêmes qui dépendent des tangentes & de la courbure des courbes.

En comparant la ſérie $e-\frac{ao}{e}-\frac{nnoo}{2e^3}-\frac{annno^3}{2e^5}$, — &c. avec la ſérie $P-Qo-Roo-So^3-$ &c. & écrivant enſuite pour P, Q, R & S, e, $\frac{a}{e}$, $\frac{nn}{2e^3}$ & $\frac{ann}{2e^5}$ & au lieu de $\sqrt{1\times QQ}$, $\sqrt{1+\frac{aa}{ee}}$ ou $\frac{n}{e}$, on aura la denſité du milieu comme $\frac{a}{ne}$, c'eſt-à-dire, (à cauſe que n eſt donnée) comme $\frac{a}{e}$, ou $\frac{AC}{CH}$,

Du Mouvement des Corps.

ou ce qui revient au même, comme cette longueur HT de la tangente qui eſt terminée par le demi diametre AF perpendiculaire ſur PQ : & la réſiſtance ſera à la gravité comme $3a$ à $2n$, c'eſt-à-dire, comme $3AC$ au diametre PQ du cercle : quant à la vîteſſe elle ſera comme $\sqrt{CH}$. C'eſt pourquoi, ſi le corps part du lieu F dans une ligne paralléle à PQ avec une vîteſſe ſuffiſante, & que la denſité du milieu à chacun des lieux H ſoit comme la longueur HT de la tangente, & que la réſiſtance dans quelque lieu H ſoit à la force de la gravité comme $3AC$ à PQ, ce corps décrira le quart de cercle FQH. *C. Q. F. T.*

Fig. 12.

Mais ſi ce même corps eût été porté du lieu P ſelon une ligne perpendiculaire à PQ, & qu'il eût commencé à ſe mouvoir dans l'arc du demi-cercle PFQ, il auroit fallu prendre AC, ou a de l'autre côté du centre A, & par conſéquent il eût fallu changer ſon ſigne & écrire $-a$, au lieu de $+a$. Ce qui donneroit la denſité du milieu comme $-\frac{a}{e}$, mais la nature n'admet point de denſité négative, c'eſt-à-dire, qui accélere le mouvement : & par conſéquent il ne ſe peut faire que le corps en montant du point P décrive l'arc de cercle PF, car il faudroit qu'il fut accéléré par un milieu qui le portât en en haut, au lieu d'être retardé par un milieu réſiſtant.

Fig. 13.

Exemple 2. Que la ligne PFQ ſoit une parabole ayant ſon axe AF perpendiculaire à l'horiſon PQ & qu'on cherche la denſité du milieu néceſſaire pour que le projectile ſe meuve dans cette ligne.

Par la nature de la parabole, le rectangle PDQ eſt égal au rectangle ſous l'ordonnée DI & une ligne droite conſtante ; c'eſt-à-dire, (ſi on appelle cette ligne b ; la ligne Pc, a ; PQ, c ; CH, e ; & CD, o ;) que le rectangle $a+o \times c-a-o$, ou $ac-aa-2ao+co-oo$ eſt égal au rectangle $b \times DI$. Donc $DI = \frac{ac-aa}{b} + \frac{\overline{c-2a}}{b} \times o - \frac{oo}{b}$. Dans cette ſuite, le ſecond terme

$\frac{c-2a}{b} \times o$ repréſente Qo & le troiſiéme terme $\frac{oo}{b}$ repréſente Roo. Or, comme il n'y a pas d'avantage de termes, le coëficient S du quatriéme doit s'évanouir, & par conſéquent la quantité $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ à laquelle la denſité du milieu eſt proportionnelle, ſera nulle; donc, lorſque la denſité du milieu eſt nulle le projectile doit ſe mouvoir dans une parabole comme *Galilée* l'a démontré autrefois. *C. Q. F. T.* Fig. 13.

Exemple 3. Que la ligne AGK ſoit une hyperbole dont l'aſymptote NX ſoit perpendiculaire au plan horiſontal AK; & qu'on cherche la denſité du milieu néceſſaire pour que le projectile ſe meuve dans cette ligne. Fig. 14.

Soit MX l'autre aſymptote qui rencontre en V l'ordonnée DG prolongée; & par la nature de l'hyperbole, le rectangle $XV \times VG$ eſt donné. Mais la raiſon de DN à VX eſt auſſi donnée, & par conſéquent le rectangle $DN \times VG$ l'eſt auſſi. Soit bb ce rectangle: après avoir achevé le parallélograme $DNXZ$; qu'on nomme BN, a; BD, o; NX, c; & que la raiſon donnée de VZ à ZX ou DN ſoit $\frac{m}{n}$. On aura $DN = a - o$, $VG = \frac{bb}{a-o}$, $VZ = \frac{m}{n}\sqrt{a-o}$, & GD ou $NX - VZ - VG = c - \frac{m}{n}a + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{a-o}$. Que le terme $\frac{bb}{a-o}$ ſoit transformé dans la ſérie convergente $\frac{bb}{a} + \frac{bb}{aa}o + \frac{bb}{a^3}oo + \frac{bb}{a^4}o^3$ &c. & on aura $GD = c - \frac{m}{n}a - \frac{bb}{a} + \frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o - \frac{bb}{a^3}o^2 - \frac{bb}{a^4}o^3$ &c. Le ſecond terme $\frac{m}{n}o - \frac{bb}{aa}o$ de cette ſérie repréſentera Qo, le troiſiéme $\frac{bb}{a^3}o^2$, en changeant le ſigne, repréſentera Ro^2, & le quatriéme $\frac{bb}{a^4}o^3$, en changeant auſſi le ſigne, repréſentera So^3,

Fig. 14.

& ſelon la regle précédente, les coëficiens $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}$, $\frac{bb}{a^3}$, & $\frac{bb}{a^4}$ ſeront les quantités qu'il faudra ſubſtituer dans la formule précédente à la place des quantités Q, R & S. La ſubſtitution faite, on aura la denſité du milieu comme $\frac{bb}{a^4}$

$$\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3}\sqrt{1+\frac{mm}{nn}-\frac{2mbb}{naa}+\frac{b^4}{a^4}}} \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{aa+\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}}},$$

c'eſt-à-dire, (ſi on prend ſur VZ la ligne $VY=VG$) comme $\frac{1}{XY}$, car aa & $\frac{mm}{nn}aa-\frac{2mbb}{n}+\frac{b^4}{aa}$ ſont les quarrés de XZ & de ZY, & on trouvera que la réſiſtance eſt à la gravité dans la raiſon de $3XY$ à $2YG$; & c'eſt la même vîteſſe avec laquelle le corps décriroit la parabole dont le ſommet ſeroit G, le diametre DG, & le parametre $\frac{XY^2}{VG}$. C'eſt pourquoi, ſuppoſant que les denſités du milieu dans chacun des lieux G, ſoient réciproquement comme les diſtances XY, & que la réſiſtance dans quelque lieu G ſoit à la gravité comme $3XY$ à $2YG$; le corps partant de A avec la vîteſſe néceſſaire décrira cette hyperbole AGK. *C. Q. F. T.*

Exemple 4. Suppoſons en général que la ligne AGK ſoit une hyperbole dont le centre ſoit X, les aſymptotes MX, NX, & qu'elle ſoit décrite par cette Loi, qu'ayant fait le rectangle $XZDN$ dont le côté ZD coupe l'hyperbole en G & ſon aſymptote en V, VG ſera réciproquement comme ZX ou comme quelque puiſſance DN^n de DN dont l'expoſant ſera le nombre n: & qu'on cherche la denſité du milieu néceſſaire pour que le projectile décrive cette courbe.

Au lieu de BN, BD, NX, écrivez A, O, C reſpectivement, & ſoit $VZ:XZ$ ou $DN::d:e$, & on aura $VG=\frac{bb}{DN^n}$ &

Fig. 14.

$DN=A-O$, $VG=\frac{bb}{A-O^n}$, $VZ=\frac{d}{e}\overline{A-O}$, & GD ou $NX-VZ-VG=C-\frac{d}{e}A+\frac{d}{e}O-\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$. Soit transformé $\frac{bb}{\overline{A-O}^n}$ dans la ſérie infinie $\frac{bb}{A^n}+\frac{nbb}{A^{n+1}}O+\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2+\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$, &c. & on aura $GD=C-\frac{d}{e}A-\frac{bb}{A^n}+\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O-\frac{+nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2-\frac{+n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$, &c. Et le ſecond terme $\frac{d}{e}O-\frac{nbb}{A^{n+1}}O$ de cette ſérie, repréſentera Qo, le troiſieme $\frac{nn+n}{2A^{n+2}}bbO^2$, repréſentera Ro^2, le quatrieme $\frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}}bbO^3$ repréſentera So^3. Delà, la denſité du milieu $\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}}$ deviendra dans un lieu quelconque G $\sqrt[n+2]{A^2+\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^{2n}}}$.

Donc ſi on prend ſur VZ la ligne $VY=n\times VG$, cette denſité ſera réciproquement comme XY. Car A^2 & $\frac{dd}{ee}A^2-\frac{2dnbb}{eA^n}A+\frac{nnb^4}{A^2}$, ſont les quarrés de XZ & de ZY. Mais la réſiſtance dans le même lieu G eſt à la gravité comme $3S\times\frac{XY}{A}$ à $4RR$, c'eſt-à-dire, comme XY à $\frac{2nn+2n}{n+2}VG$. Et la vîteſſe dans le même lieu G eſt la même avec laquelle le corps étant jetté décriroit une parabole dont le ſommet ſeroit G, le diametre GD, & le parametre $\frac{1+QQ}{R}$ ou $\frac{2XY^2}{nn+n\times VG}$.

C. Q. F. T.

SCHOLIE.

Fig. 12. De même qu'on a trouvé dans le Cor. 1. la denſité du milieu comme $\frac{S \times AC}{R \times HT}$, ſi on ſuppoſe la réſiſtance comme une puiſſance quelconque n de la vîteſſe V, on aura la denſité du milieu comme $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \left(\frac{AC}{HT}\right)^{n-1}$. Et par conſéquent, ſi on peut trouver une courbe telle que la quantité $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ ſoit proportionnelle à $\left(\frac{HT}{AC}\right)^{n-1}$ ou bien que la quantité $\frac{S^2}{R^{4-n}}$ ſoit proportionnelle à $(1+QQ)^{n-1}$: le corps décrira cette courbe dans un milieu uniforme dont la réſiſtance ſera comme la puiſſance n de la vîteſſe, c'eſt-à-dire, comme V^n. Mais revenons à des courbes plus ſimples.

Fig. 14. Comme le corps ne décrit une parabole que dans un milieu non réſiſtant, & qu'il ne décrit les hyperboles dont nous venons de parler qu'en éprouvant une réſiſtance continuelle: il eſt clair que la ligne que le projectile décrit dans un milieu qui réſiſte uniformement approche plus de ces hyperboles que de la parabole. Cette ligne eſt donc du genre hyperbolique, mais c'eſt une eſpece d'hyperbole qui eſt plus éloignée des aſymptotes vers le ſommet, & qui dans les parties très-éloignées s'en approche davantage que les hyperboles dont j'ai parlé ici. Mais cependant la différence qui eſt entr'elles n'eſt pas aſſez grande pour qu'elles ne puiſſent pas être priſes les unes pour les autres ſans inconvénient dans la pratique : & peut-être ſont-elles plus utiles que les hyperboles décrites avec plus de ſoin, & plus compoſées.

Voici comment on peut en faire uſage.

Soit achevé le parallélogramme $XYGT$, & que la droite

GT touche l'hyperbole en G, la denſité du milieu en G eſt donc réciproquement comme la tangente GT, la vîteſſe dans le même milieu comme $\sqrt{\frac{GT^2}{GV}}$ & la réſiſtance à la force de la gravité comme GT à $\frac{2nn+2n}{n+2} \times GV$. Fig. 14.

Donc, ſi le corps jetté du lieu A dans la droite AH décrit l'hyperbole AGK, & que AH prolongée rencontre l'aſymptote NX en H; tirant AI parallele à cette aſymptote, & qui rencontre l'autre aſymptote MX en I, la denſité du milieu en A ſera réciproquement comme AH, & la vîteſſe du corps comme $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, & la réſiſtance dans le même lieu ſera à la gravité comme AH à $\frac{2nn+2n}{n+2} \times AI$: d'où on tire les regles ſuivantes. Fig. 15.

Regle 1. Si la denſité du milieu reſte la même qu'en A, ainſi que la vîteſſe avec laquelle le corps a été jetté, & qu'on change l'angle NAH; les longueurs AH, AI, HX reſteront les mêmes. Donc, ſi on trouve ces longueurs dans quelque cas, on pourra déterminer enſuite très-aiſément l'hyperbole pour un angle quelconque donné NAH.

Regle 2. Si la denſité du milieu & l'angle NAH reſtent les mêmes qu'en A, & que la vîteſſe avec laquelle le corps a été jetté change, la longueur AH reſtera la même, mais AI changera en raiſon doublée réciproque de la vîteſſe.

Regle 3. Si la vîteſſe du corps, l'angle NAH & la gravité accélératrice reſtent les mêmes qu'en A, & que la proportion de la réſiſtance en A à la gravité motrice augmente dans une raiſon quelconque; la proportion de AH à AI augmentera dans la même raiſon, le parametre de la parabole dont on a parlé reſtant le même, ainſi que la longueur $\frac{AH^2}{AI}$ qui lui eſt proportionnelle: & par conſéquent, AH diminuera dans la même

Du Mouvement des Corps.

raiſon, & AI diminuera dans cette raiſon doublée. Mais la proportion de la réſiſtance au poids augmentera, ſi la gravité ſpécifique eſt moindre ſous un égal volume, ou ſi la denſité du milieu eſt plus grande, ou bien la réſiſtance diminuera en une moindre raiſon que le poids, le volume étant diminué.

Fig. 15.

Regle 4. Comme la denſité du milieu près du ſommet de l'hyperbole eſt plus grande qu'au lieu A; pour avoir la denſité moyenne, il faut trouver la raiſon de la plus petite des tangentes GT à la tangente AH, & augmenter la denſité en A en une raiſon un peu plus grande que la demi-ſomme de ces tangentes à la plus petite de ces tangentes GT.

Regle 5. Si les longueurs AH, AI ſont données, & qu'on veuille décrire la figure AGK: prolongez HN en X, enſorte que $HX : AI :: n+1 : 1$, & décrivez par le point A une hyperbole dont les aſymptotes ſoient MX, NX & le centre X, & qui ait cette propriété que AI ſoit à une ligne quelconque VG comme XV^n eſt à XI^n.

Regle 6. Plus le nombre n eſt grand, plus les hyperboles décrites par le corps en montant du lieu A ſont exactes, & moins elles ſont exactes lorſqu'il deſcend vers K; & au contraire. L'hyperbole conique tient le milieu, & d'ailleurs eſt la plus ſimple. Donc, ſi l'hyperbole eſt de ce genre, & qu'on cherche le point K où le corps projetté tombe ſur une ligne quelconque AN qui paſſe par le point A: il faudra prolonger AN enſorte qu'elle rencontre les aſymptotes MX, NX en M & en N & prendre $NK = AM$.

Regle 7. Et de là on tire une maniere très-aiſée de déterminer cette hyperbole par les Phénomenes. Car, ſoient jettés deux corps ſemblables & égaux, avec la même viteſſe, ſous des angles divers HAK, hAk, & qu'ils tombent dans le plan de l'horiſon en K & en k; & ſoit trouvée par obſervation la proportion de AK à Ak que je ſuppoſe ici celle de d à e. Après avoir élevé une perpendiculaire AI d'une longueur quelconque, prenez à volonté la longueur AH ou Ah, & meſurez enſuite gra-

phiquement les longueurs AK, Ak par la regle 6. Si la raiſon de AK à Ak eſt la même que celle de d à e, la longueur AH aura été priſe exactement. Si cette raiſon eſt moindre, prenez ſur la droite indéfinie SM la longueur SM égale à la longueur priſe AH, & élevez la perpendiculaire MN égale à la différence des raiſons $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ multipliée par une droite quelconque donnée. Ayant pris pluſieurs longueurs AH, on trouvera par la même méthode autant de points N, & par tous ces points on pourra tracer une courbe réguliere $NNXN$ qui coupe la droite $SMMM$ en X. Soit priſe enfin AH égale à l'abſciſſe SX, & on trouvera de nouveau la longueur AK; & les longueurs, qui ſeront à la longueur priſe AI & à cette derniere AH comme la longueur AK connue par expérience à la longueur AK trouvée en dernier lieu, ſeront les vraies longueurs AI, & AH qu'il falloit trouver. Or ces longueurs étant données, la réſiſtance du milieu au lieu A ſera donnée auſſi, car elle eſt à la force de la gravité comme AH à 2 AI. Augmentant la denſité du milieu par la regle 4, la réſiſtance qu'on vient de trouver en deviendra plus exacte ſi on l'augmente dans cette même raiſon.

Fig. 15.

Fig. 16.

Fig. 15.

Regle 8. Les longueurs AH, HX étant trouvées; ſi on cherche la poſition de la droite AH ſelon laquelle le projectile ayant été jetté avec une vîteſſe donnée, tombe en un point quelconque K: il faudra élever aux points A & K les droites AC, KF perpendiculaires à l'horiſon, deſquelles AC tende en enbas, & ſoit égale à AI ou $\frac{1}{2} HX$. On tracera enſuite l'hyperbole dont les aſymptotes ſont AK, KF, & dont la conjuguée paſſe par le point C, du centre A & de l'intervalle AH on décrira un cercle qui coupe cette hyperbole au point H; & le projectile jetté ſelon la ligne droite AH tombera ſur le point K. *C. Q. F. T.*

Car le point H, à cauſe de la longueur donnée AH, ſera

Du Mouvement des Corps.

quelque part ſur le cercle décrit. Tirant CH qui rencontre AK & KF, la premiere en E, & l'autre en F; à cauſe des paralleles CH, MX, & des égales AC, AI, on aura $AE = AM = KN$ par conſéquent. Mais $CE : AE :: FH : KN$, donc $CE = FH$. Le point H tombe donc ſur l'hyperbole dont les aſymptotes ſont AK, KF, & dont la conjuguée paſſe par le point C, donc ce point ſe trouvera dans la commune interſection du cercle décrit & de cette hyperbole. *C. Q. F. D.*

Fig. 15.

Il faut remarquer de plus, que cette conſtruction ſe fait de même, ſoit que la droite AKN ſoit parallele à l'horiſon ſoit qu'elle lui ſoit inclinée ſous un angle quelconque : & que les deux interſections H & H forment deux angles NAH, NAH; & que dans la pratique il ſuffit de décrire une fois le cercle, & d'appliquer enſuite la regle infinie CH de telle ſorte au point C que ſa partie FH compriſe entre la droite FK & le cercle ſoit égale à ſa partie CE compriſe entre le point C & la droite AK.

Fig. 17.

Ce qu'on a dit des hyperboles peut s'appliquer facilement aux paraboles. Car ſi $XAGK$ eſt une parabole, que la droite XV touche au ſommet X, & que les ordonnées IA, VG ſoient comme les puiſſances quelconques XI^n, XV^n des abſciſſes XI & XV, ſoient tirées XT, GT, AH, deſquelles XT ſoit parallele à VG & que GT, AH touchent la parabole en G, & A; le corps, étant projetté avec la vîteſſe néceſſaire d'un lieu quelconque A ſelon une droite AH prolongée, décrira cette parabole, ſi la denſité du milieu à chacun des lieux G eſt réciproquement comme la tangente GT. La vîteſſe en G ſera celle avec laquelle le corps décriroit, dans un eſpace non réſiſtant, la parabole conique dont le ſommet ſeroit G, le diametre VG la ligne prolongée en enbas & le parametre $\frac{2GT^2}{nn-n \times VG}$. Quant à la réſiſtance en G elle ſera à la force de la gravité comme GT à $\frac{2nn-2n}{n-2} \times VG$. D'où, ſi NAK eſt

la ligne horiſontale, & que la denſité en A demeurant la même, ainſi que la vîteſſe avec laquelle le corps a été jetté, l'angle NAH change d'une façon quelconque; les longueurs AH, AI, XH demeureront les mêmes, & de là le ſommet X de la parabole ſera donné, ainſi que la poſition de la droite XI, prenant donc $VG:IA::XV^n.XI^n$, on aura tous les points G de la parabole par leſquels le projectile paſſera. Fig. 17.

TROISIÉME SECTION.

Du Mouvement des Corps qui éprouvent des réſiſtances qui ſont en partie en raiſon de la vîteſſe, & en partie en raiſon doublée de cette même vîteſſe.

PROPOSITION XI. THÉORÉME VIII.

Si un corps éprouve une réſiſtance qui ſoit en partie comme ſa vîteſſe, & en partie en raiſon doublée de cette vîteſſe, que ce corps ſe meuve dans un milieu homogène par la ſeule force qui lui a été imprimée, & qu'on prenne les temps en progreſſion arithmétique; les quantités réciproquement proportionnelles aux vîteſſes ſeront en progreſſion géométrique, la quantité quelconque dont elles augmentent étant donnée.

Du centre C ſoit décrite l'hyperbole BEe qui ait pour aſymptotes les perpendiculaires $CADd$, & CH, que les lignes AB, DE, de ſoient paralleles à l'aſymptote CH. Que les points A & G ſoient donnés ſur l'aſymptote CD; ſi le temps eſt repréſenté par l'aire hyperbolique $ABED$ qui croît uniformement, je dis que la vîteſſe peut être repréſentée par la longueur DF dont la réciproque GD ajoutée avec l'ordonnée CG compoſe la longueur CD qui croît en progreſſion géométrique. Fig. 18.

Soit la petite aire $DEed$ l'incrément donné infiniment petit du

temps, Dd ſera réciproquement comme DE, & par conſéquent directement comme CD. Mais le décrément de $\frac{1}{GD}$ qui eſt (par le Lemme 2. de ce Liv.) $\frac{Dd}{GD^2}$ ſera proportionnel à $\frac{CD}{GD^2}$ ou à $\frac{CG+GD}{GD^2}$, c'eſt-à-dire, à $\frac{1}{GD} \times \frac{CG}{GD^2}$. Donc pendant le temps $ABDE$, qui croît uniformément par l'addition des petites particules données $EDde$, $\frac{1}{GD}$ décroît dans la même raiſon que la vîteſſe. Car le décrément de la vîteſſe eſt comme la réſiſtance, c'eſt-à-dire, (par l'hypoteſe) comme la ſomme de deux quantités dont l'une eſt comme la vîteſſe & l'autre comme le quarré de la vîteſſe; mais le décrément de $\frac{1}{GD}$ eſt comme la ſomme des quantités $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GD^2}$ deſquelles la premiere eſt $\frac{1}{GD}$ elle-même, & la derniere $\frac{CG}{GD^2}$ eſt proportionnelle à $\frac{1}{GD^2}$: donc $\frac{1}{GD}$, à cauſe du décrément analogue, eſt comme la vîteſſe. Et ſi on augmente la quantité GD réciproquement proportionnelle à $\frac{1}{GD}$ de la quantité donnée CG; la ſomme CD croîtra en progreſſion géométrique, lorſque le temps $ABED$ croîtra uniformement.

Fig. 18.

Cor. 1. Donc, ſi les points A & G étant donnés, on exprime le temps par l'aire hyperbolique $ABED$, la vîteſſe peut être exprimée par $\frac{1}{GD}$ réciproque de GD.

Cor. 2. En prenant GA à GD comme la réciproque de la vîteſſe au commencement à la réciproque de la vîteſſe à la fin d'un temps quelconque $ABED$, on trouvera le point G; & ce point étant trouvé, on peut trouver la vîteſſe pour un autre temps donné quelconque.

PROPOSITION

PROPOSITION XII. THÉORÉME IX.

Les mêmes choſes étant poſées, je dis que, ſi on prend les eſpaces décrits en progreſſion arithmétique, les vîteſſes augmentées d'une quantité quelconque donnée ſeront en progreſſion géométrique. Fig. 19.

Sur l'aſymptote CD ſoit donné le point R, & ſoit élevée la perpendiculaire RS qui rencontre l'hyperbole en S, & ſoit priſe l'aire hyperbolique $RSED$ pour exprimer l'eſpace décrit; la vîteſſe ſera comme la longueur GD, laquelle avec la donnée CG compoſe la longueur CD qui décroît en progreſſion géométrique pendant que l'eſpace $RSED$ augmente en progreſſion arithmétique.

Car à cauſe de l'incrément donné $EDde$ de l'eſpace, la petite ligne Dd qui eſt le décrément de GD ſera réciproquement comme ED, ou directement comme CD, c'eſt-à-dire, comme la ſomme de GD même & de la longueur donnée CG. Mais le décrément de la vîteſſe dans un temps qui lui eſt réciproquement proportionnel, & pendant lequel la particule donnée $DdeE$ de l'eſpace eſt décrite, eſt comme la réſiſtance, & le temps conjointement; c'eſt-à-dire, directement comme la ſomme de deux quantités dont l'une eſt comme la vîteſſe & l'autre comme le quarré de la vîteſſe, & inverſement comme la vîteſſe; & par conſéquent, directement comme la ſomme de deux quantités, dont l'une eſt donnée, & l'autre eſt proportionnelle à la vîteſſe. Donc le décrément tant de la vîteſſe que de la ligne GD eſt comme la quantité donnée & la quantité décroiſſante conjointement, & à cauſe que les décrémens ſont proportionnels, les quantités décroiſſantes, c'eſt-à-dire, la vîteſſe & la ligne GD ſeront toujours proportionnelles. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Si la vîteſſe eſt exprimée par la longueur GD, l'eſpace décrit ſera comme l'aire hyperbolique $DESR$.

Cor. 2. Et ſi on prend le point R à volonté, on trouvera le point G en prenant GR à GD comme la vîteſſe au commen-

DU MOUVEMENT DES CORPS.

cement eſt à la vîteſſe après l'eſpace $RSED$ décrit. Or le point G étant trouvé, on a l'eſpace lorſque la vîteſſe eſt donnée; & au contraire.

Fig. 19.

Cor. 3. Donc la vîteſſe étant donnée (Prop. 11.) lorſque le temps eſt donné, & par cette préſente Propoſition l'eſpace étant donné lorſque la vîteſſe eſt donnée; on aura l'eſpace quand le temps ſera donné: & au contraire.

PROPOSITION XIII. THÉORÉME X.

Suppoſé que le corps étant attiré en enbas par une gravité uniforme monte ou deſcende dans une ligne droite, & qu'il éprouve une réſiſtance qui ſoit en partie en raiſon de la vîteſſe, & en partie dans cette même raiſon doublée: je dis que, ſi on mene des droites paralleles aux diametres du cercle & de l'hyperbole par les extrémités de leurs diametres conjugués, & que les vîteſſes ſoient comme les ſegmens quelconques faits par ces paralleles menées d'un point donné, les temps ſeront comme les ſecteurs des aires retranchées des ſegmens: & réciproquement.

Fig. 20.

Cas 1. Suppoſons premierement que le corps monte, du centre D & d'un demi diametre quelconque DB ſoit décrit un quart de cercle $BETF$, & par l'extrémité B du demi diametre DB ſoit tirée la ligne infinie BAP parallele au demi diametre DF. Sur cette parallele ſoit donné le point A, & ſoit priſe AP proportionnelle à la vîteſſe. Comme une partie de la réſiſtance eſt comme la vîteſſe, & l'autre partie comme le quarré de la vîteſſe: ſoit la réſiſtance totale comme AP^2+2BAP, & ſoient tirées DA, DP qui coupent le cercle en E & T, ſoit enfin exprimée la gravité par AD^2 enſorte que la gravité ſoit à la réſiſtance en P comme DA^2 à AP^2+2BAP: & le temps de l'aſcenſion totale ſera comme le ſecteur EDT du cercle.

Car ſoit menée DVQ qui coupe, tant le moment PQ de la

vîteſſe AP, que le moment DTV du ſecteur DET répondant au moment donné du temps ; & ce décrément PQ de la vîteſſe ſera comme la ſomme des forces de la gravité DA^2 & de la réſiſtance AP^2+2BAP, c'eſt-à-dire, comme DP^2. Donc l'aire DPQ qui eſt proportionnelle à PQ eſt comme DP^2, & l'aire DTV qui eſt à l'aire DPQ comme DT^2 à DP^2: donc l'aire EDT ſera comme la quantité donnée DT^2, & cette aire décroît uniformement comme le temps reſtant, en ſouſtrayant les particules données DTV, & par conſéquent cette aire eſt proportionnelle au temps de toute l'aſcenſion. *C. Q. F. D.* Fig. 20.

Cas 2. Si la longueur AP exprime comme ci-deſſus la vîteſſe lorſque le corps remonte, qu'on ſuppoſe la réſiſtance comme AP^2+2BAP, & que la force de la gravité ſoit moindre que celle qui peut être exprimée par DA^2 ; on prendra BD d'une longueur telle que AB^2-BD^2 ſoit proportionnelle à la gravité, & que DF ſoit perpendiculaire & égale à BD ; par le ſommet F, on décrira l'hyperbole $FTVE$ dont les demi-diametres conjugués ſoient DB & DF, & qui coupe DA en E & DP, DQ en T & V; & le temps de l'aſcenſion entiere ſera comme le ſecteur TDE de l'hyperbole. Fig. 21.

Car le décrément PQ de la vîteſſe pendant une particule de temps donnée eſt comme la ſomme de la réſiſtance AP^2+2BAP & de la gravité AB^2-BD^2, c'eſt-à-dire, comme BP^2-BD^2. Mais l'aire DTV eſt à l'aire DPQ comme DT^2 à DP^2, c'eſt-à-dire, (en abaiſſant GT perpendiculaire ſur DF) comme GT^2 ou $GD^2-DF^2 : BD^2$ & $:: GD^2 : BP^2$, & en diviſant $:: DF^2 : BP^2-BD^2$. Donc comme l'aire DPQ eſt proportionnelle à PQ, c'eſt-à-dire, à BP^2-BD^2, on aura l'aire DTV comme la quantité donnée DFQ. L'aire EDT décroît donc uniformement à chaque particule égale de temps, par la ſouſtraction d'autant de particules données DTV, & par conſéquent elle eſt proportionnelle au temps. *C. Q. F. D.*

Du Mouvement des Corps.

Cas 3. Que AP repréſente la vîteſſe dans la deſcenſion du corps, AP^2+2BAP la réſiſtance, & BD^2-AB^2 la force de la gravité, l'angle DBA étant droit. Si du centre D & du ſommet B on décrit l'hyperbole équilatere $BETV$ coupant les lignes DA, DP, & DQ prolongées en E, T & V, le ſecteur EDT de cette hyperbole ſera comme le temps total de la deſcenſion. Car l'incrément PQ de la vîteſſe, & l'aire PDQ qui lui eſt proportionnelle eſt comme l'excès de la gravité ſur la réſiſtance, c'eſt-à-dire, comme $BD^2-AB^2-2APB-AP^2$ ou BD^2-BP^2; & l'aire DTV eſt à l'aire DPQ comme DT^2 à DP^2, & par conſéquent comme GT^2 ou GD^2-BD^2 à BP^2, ou bien comme GD^2 à BD^2, ou bien encore comme BD^2 à BD^2-BP^2. C'eſt pourquoi comme l'aire DPQ eſt proportionnelle à BD^2-BP^2, l'aire DTV ſera comme la quantité donnée BD^2. L'aire EDT croît donc uniformement pendant chaque particule égale de temps par l'addition d'autant de particules données DTV, & par conſéquent elle eſt proportionnelle au temps de la deſcenſion. *C. Q. F. D.*

Fig. 22.

Cor. Si du centre D & du demi-diametre DA, on décrit par le ſommet A un arc At ſemblable à l'arc ET & ſoutendant de même l'angle ADT: la vîteſſe AP ſera à la vîteſſe que le corps peut acquérir en deſcendant ou perdre en remontant dans un eſpace non réſiſtant, & pendant le temps EDT, comme l'aire du triangle ADP à l'aire du ſecteur DAt; & par conſéquent cette vîteſſe ſera donnée dans un temps donné. Car la vîteſſe, dans un milieu non réſiſtant, eſt proportionnelle au temps, & par conſéquent à ce ſecteur, & dans un milieu réſiſtant elle eſt comme le triangle; & dans l'un & l'autre milieu lorſqu'elle eſt très-petite elle approche de la raiſon d'égalité ainſi que le ſecteur & le triangle.

SCHOLIE.

Ce cas peut ainſi ſe démontrer dans l'aſcenſion du corps „

lorſque la force de la gravité eſt moindre que celle qu'on peut exprimer par AD^2 ou AB^2+BD^2 & plus grande que celle qui peut l'être par AB^2-BD^2, & qui doit l'être par AB^2. Mais paſſons à d'autres Propoſitions.

PROPOSITION XIV. THÉORÉME XI.

Les mêmes choſes étant poſées, je dis, que l'eſpace décrit dans l'aſcenſion ou la deſcenſion, eſt comme la différence de l'aire qui repréſente le temps, & d'une autre aire quelconque qui augmente ou diminue en progreſſion arithmétique; ſi on prend les forces compoſées de la réſiſtance & de la gravité en progreſſion géométrique.

Soit priſe AC proportionnelle à la gravité, & AK proportionnelle à la réſiſtance, en obſervant de les placer du même côté du point A ſi le corps deſcend, & du côté oppoſé s'il remonte. Soit de plus élevé Ab qui ſoit à DB comme DB^2 à $4BAC$: ayant décrit l'hyperbole bN dont les aſymptotes ſoient les perpendiculaires CK, CH, & ayant élevé KN perpendiculaire ſur CK, l'aire $AbNK$ augmentera ou diminuera en progreſſion arithmétique lorſqu'on prendra les forces CK en progreſſion géométrique. Cela poſé, je dis donc que la diſtance du corps du lieu où il parviendroit à ſa plus grande hauteur eſt comme l'excès de l'aire $AbNK$ ſur l'aire DET. Fig.23.24.&25.

Car AK étant comme la réſiſtance, c'eſt-à-dire, comme AP^2+2BAP; ſoit priſe une quantité donnée quelconque Z & ſoit ſuppoſée $AK=\frac{AP^2+2BAP}{Z}$ & (par le Lemme 11. de ce Livre) le moment KL de AK ſera égal à $\frac{2APQ+2BA\times PQ}{Z}$ ou $\frac{2BPQ}{Z}$ & le moment $KLON$ de l'aire $AbNK$ ſera égal à $\frac{2BPQ\times LO}{Z}$ ou $\frac{BPQ\times BD^2}{2Z\times CK\times AB}$.

Cas 1. Si on ſuppoſe que le corps monte, & que la gravité

ſoit comme $AB^2 + BD^2$, BET étant un cercle (dans la fig. 23.) la ligne AC qui eſt proportionnelle à la gravité ſera $\frac{AB^2+BD^2}{Z}$ & DP^2 ou $AP^2+2BAP+AB^2+BD^2$, ſera $AK\times Z+AC\times Z$ ou $CK\times Z$; donc l'aire DTV ſera à l'aire DPQ comme DT^2 ou DB^2 à $CK\times Z$.

Fig. 23. 24. & 25.

Cas. 2. Si le corps monte, & que la gravité ſoit comme AB^2-BD^2 la ligne AC (dans la figure 24.) ſera $\frac{AB^2-BD^2}{Z}$ & DT^2 ſera à DP^2 comme DF^2 ou DB^2 à BP^2-BD^2 ou $AP^2+2BAP+AB^2-BD^2$, c'eſt-à-dire, à $AK\times Z+AC\times Z$ ou $CK\times Z$. Donc l'aire DTV ſera à l'aire DPQ comme DB^2 à $CK\times Z$.

Cas 3. Et par le même raiſonnement, ſi le corps deſcend, & que par conſéquent la gravité ſoit comme BD^2-AB^2 & que la ligne AC (dans la fig. 25.) ſoit égale à $\frac{BD^2-AB^2}{Z}$ l'aire DTV ſera à l'aire DPQ comme BD^2 à $CK\times Z$: comme ci-deſſus.

Or comme ces aires ſont toujours dans cette raiſon; ſi au lieu de l'aire DTV, par laquelle le moment du temps, toujours égal à lui-même, eſt repréſenté, on écrit un rectangle quelconque déterminé comme $BD\times m$, on aura l'aire DPQ, c'eſt-à-dire, $\frac{1}{2}BD\times PQ$ à $BD\times m$, comme $CK\times Z$ à BD^2. D'où on tirera $PQ\times BD^3=2BD\times m\times CK\times Z$, & le moment $KLON$ de l'aire $AbNK$ trouvé ci-deſſus, ſera $\frac{BP\times BD\times m}{AB}$. otant le moment DTV ou $BD\times m$ de l'aire DET, il reſtera $\frac{AP\times BD\times m}{AB}$. La différence des momens, c'eſt-à-dire, le moment de la différence des aires, eſt donc égale à $\frac{AP\times BD\times m}{AB}$, & par conſéquent, à cauſe que $\frac{BD\times m}{AB}$ eſt donné, comme la

vîteſſe AP, c'eſt-à-dire, comme le moment de l'eſpace que le corps décrit dans ſon aſcenſion, ou dans ſa deſcenſion. Donc la différence des aires, & cet eſpace qui croiſſent ou décroiſſent par des momens proportionnels & qui naiſſent ou s'évanouiſſent en même-temps ſont toujours proportionnels. *C. Q. F. D.* Fig. 23. 24. & 25.

Cor. Si l'on nomme M la longueur qui vient en diviſant l'aire DET par la ligne BD ; & qu'une autre longueur V ſoit priſe à la longueur M dans la raiſon que la ligne DA a à la ligne DE : l'eſpace que le corps parcourt dans toute ſon aſcenſion, ou dans toute ſa deſcenſion dans un milieu réſiſtant, ſera à l'eſpace qu'il peut décrire dans un milieu non réſiſtant dans le même temps en tombant de ſon point de repos, comme la différence des aires dont on a parlé à $\frac{BD \times V^2}{AB}$: c'eſt-à-dire, que l'eſpace ſera donné lorſque le temps eſt donné. Car l'eſpace parcouru dans un milieu qui ne réſiſte point eſt en raiſon doublée du temps, ou comme V^2, & à cauſe des données BD & AB comme $\frac{BD^2 \times V^2}{AB}$. Cette aire eſt égale à l'aire $\frac{DA^2 \times BD \times M^2}{DE^2 \times AB}$, & le moment de M eſt m, & par conſéquent le moment de cette aire eſt $\frac{DA^2 \times BD \times 2M \times m}{DE^2 \times AB}$. Mais ce moment eſt au moment de la différence des aires DET, & $AbNK$ dont on a parlé, c'eſt-à-dire, à $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$ comme $\frac{DA^2 \times BD \times M}{DE^2}$ eſt à $\frac{1}{2} BD \times AP$, ou comme $\frac{DA^2}{DE^2} \times DET$ eſt à DAP, c'eſt-à-dire, lorſque les aires DET & DAP ſont infiniment petites, en raiſon d'égalité. Donc l'aire $\frac{BD \times V^2}{AB}$ & la différence des aires DET & $AbNK$, quand toutes ces aires ſont très-petites, ont des momens égaux, & ſont par conſéquent égales. Delà, lorſque les vîteſſes, & par conſéquent auſſi les eſ-

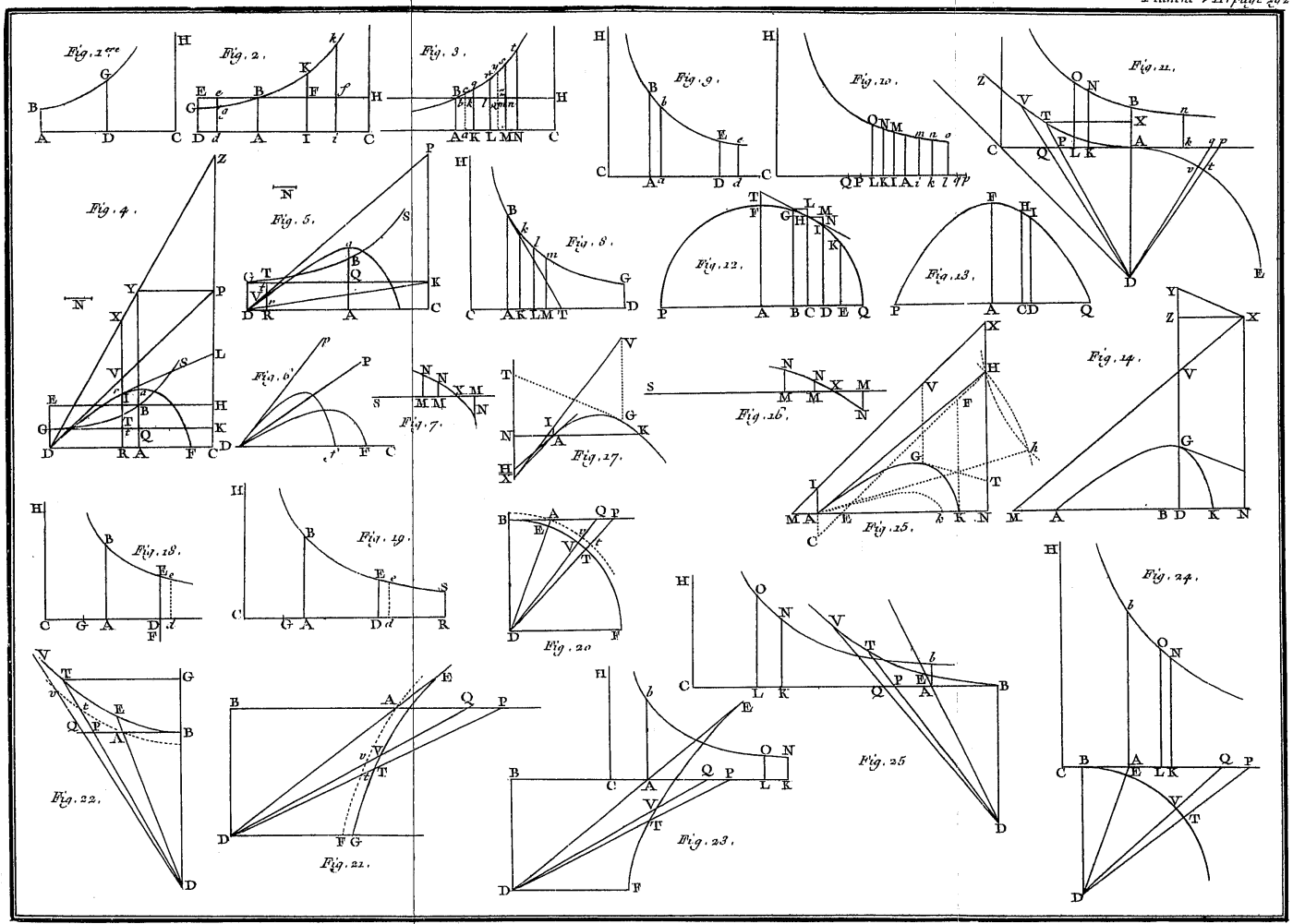
paces parcourus en même-temps dans l'un & l'autre milieu au commencement de la deſcenſion ou à la fin de l'aſcenſion approchent de l'égalité, ils ſont alors l'un à l'autre comme l'aire $\frac{BD \times V^2}{AB}$ & la différence des aires DET & $AbNK$; de plus, comme l'eſpace dans un milieu non réſiſtant eſt toujours comme $\frac{BD \times V^2}{AB}$ & que dans un milieu qui réſiſte il eſt toujours comme la différence des aires DET & $AbNK$: il eſt néceſſaire que les eſpaces parcourus dans l'un & l'autre milieu, pendant des temps quelconques égaux, ſoient entr'eux comme cette aire $\frac{BD \times V^2}{AB}$ & la différence des aires DET & $AbNK$. *C. Q. F. D.*

Fig. 23. 24. & 25.

SCHOLIE.

La réſiſtance que les corps ſphériques éprouvent dans les fluides vient en partie de la ténacité, en partie du frotement, & en partie de la denſité du milieu. C'eſt cette partie de la réſiſtance qui vient de la denſité du fluide que nous diſons être en raiſon doublée de la vîteſſe; l'autre partie qui vient de la ténacité du fluide eſt uniforme ou comme le moment du temps : il ſeroit donc à propos de parler du mouvement des corps qui éprouvent une réſiſtance cauſée en partie par une force uniforme ou en raiſon des momens du temps, & en partie par une force en raiſon doublée de la vîteſſe. Mais il ſuffit d'avoir préparé la voye à cette ſpéculation par les Prop. 8. & 9. & leurs Corollaires. Car dans ces Propoſitions on peut ſubſtituer à la place de la réſiſtance uniforme qu'éprouve un corps qui remonte, laquelle vient de ſa gravité, la réſiſtance uniforme qui vient de la ténacité du milieu lorſque le corps ſe meut par la ſeule force qui lui a été imprimée; & on peut ajouter cette réſiſtance, uniforme cauſée par la gravité, au corps qui monte en ligne droite, & la ſouſtraire lorſque le corps deſcend en ligne droite. Il ſeroit donc

temps


Fig. 1ere
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 8.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 20
Fig. 24.
Fig. 22.
Fig. 21.
Fig. 23.
Fig. 25

temps de parler à préſent du mouvement des corps qui éprouvent une réſiſtance compoſée de forces qui ſont en partie uniformes, en partie en raiſon de la vîteſſe, & en partie en raiſon doublée de cette vîteſſe. J'en ai poſé les principes dans les Prop 12. & 14. dans leſquelles on peut auſſi ſubſtituer la réſiſtance uniforme qui vient de la ténacité du milieu à la place de la force de la gravité, ou prendre les deux forces enſemble comme ci-deſſus. Ainſi je paſſe à d'autres Propoſitions.

QUATRIÉME SECTION.

Du mouvement circulaire des corps dans les milieux réſiſtans.

LEMME III.

Soit P Q R *une ſpirale qui coupe tous les rayons* S P, S Q, S R, *&c. ſous des angles égaux. Soit tirée la droite* P T *qui touche la ſpirale en un point quelconque* P, *& qui coupe le rayon* S Q *en* T ; *ayant tiré à la ſpirale les perpendiculaires* P O, Q O *qui concourent en* O, *ſoit tirée* S O. *Je dis que, ſi les points* P *&* Q *s'approchent l'un de l'autre & ſe confondent, l'angle* P S O *deviendra droit, & la derniere raiſon du rectangle* T Q × 2 P S *à* P Q² *ſera une raiſon d'égalité.* Fig. 191

Car des angles droits *O P Q*, *O Q R* ſoient ôtés les angles égaux *S P Q*, *S Q R*, il reſtera les angles égaux *O P S*, *O Q S*. Donc le cercle qui paſſe par les points *O*, *S*, *P* paſſera auſſi par le point *Q*. Que les points *P* & *Q* coïncident, ce cercle touchera la ſpirale dans le point de leur coïncidence, & par conſéquent il coupera perpendiculairement la droite *O P*. Que cette ligne *O P* devienne le diametre de ce cercle, & l'angle *O S P* qui eſt dans le demi cercle ſera droit. *C. Q. F. D.*

Sur *O P* ſoient abaiſſées les perpendiculaires *Q D*, *S E*, & les dernieres raiſons de ces lignes ſeront telles ; *T Q* : *P D* :: *T S*

Du Mouvement des Corps.

ou $PS : PE$ ou $2PO : 2PS$; de plus, $PD : PQ :: PQ : 2PO$, d'où on tire $PQ^2 = TQ \times 2PS$. *C. Q. F. D.*

Fig. 26.

PROPOSITION XV. THÉORÉME XII.

Si la denſité du milieu à chacun des lieux eſt réciproquement comme la diſtance au centre immobile, & que la force centripete ſoit en raiſon doublée de la denſité ; je dis, que le corps peut ſe mouvoir dans une ſpirale qui coupera ſous un angle donné tous les rayons tirés de ce centre.

Fig. 27.

Les mêmes choſes étant ſuppoſées que dans le Lemme précédent, ſoit prolongée SQ en V, enſorte que $SV = SP$. Que le corps dans un temps quelconque parcoure dans un milieu réſiſtant le très-petit arc PQ, & dans un temps double, le très-petit arc PR ; les décrémens de ces arcs qui ſeroient décrits dans un milieu non réſiſtant pendant les mêmes temps ſeront entr'eux comme les quarrés des temps dans leſquels ils ſont produits : donc le décrément de l'arc PQ eſt la quatrieme partie du décrément de l'arc PR. Donc ſi on prend l'aire QSr égale à l'aire PSQ, le décrément de l'arc PQ ſera égal à la moitié de la petite ligne Rr ; donc la force de la réſiſtance & la force centripete ſont l'une à l'autre comme les petites lignes $\frac{1}{2}Rr$ & TQ qu'elles produiſent en même temps. Mais comme la force centripete par laquelle le corps eſt preſſé en P eſt réciproquement comme SP^2, & que (par le Lemme 10. du Liv. 1.) la petite ligne TQ que cette force a produit eſt en raiſon compoſée de la raiſon de cette force & de la raiſon doublée du temps dans lequel l'arc PQ a été décrit, (car dans ce cas je néglige la réſiſtance comme étant infiniment plus petite que la force centripete) $TQ \times SP^2$, c'eſt-à-dire, (par le dernier Lemme) $\frac{1}{2} PQ^2 \times SP$ ſera en raiſon doublée du temps ; le temps eſt donc comme $PQ \times \sqrt{SP}$; & la vîteſſe du corps par laquelle l'arc PQ eſt parcouru dans ce temps eſt comme $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, c'eſt-à-dire, réciproquement en rai-

ſon doublée de SP. Par le même raiſonnement, la vîteſſe avec laquelle l'arc QR eſt décrit eſt réciproquement en raiſon ſous-doublée de SQ. Mais ces arcs PQ & QR ſont l'un à l'autre comme les vîteſſes décrivantes, c'eſt-à-dire, en raiſon ſous-doublée de SQ à SP, ou comme SQ à $\sqrt{SP \times SQ}$; & à cauſe des angles égaux SPQ, SQr & des aires égales PSQ, QSr, l'arc PQ eſt à l'arc Qr comme SQ à SP. Prenant donc les différences des conſéquents proportionnels, on aura l'arc PQ à l'arc Rr comme SQ à $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ ou $\frac{1}{2}VQ$. Car les points P & Q coïncidans, la derniere raiſon de $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ à $\frac{1}{2}VQ$ eſt la raiſon d'égalité. Et parce que le décrément de l'arc PQ, cauſé par la réſiſtance, ou ſon double Rr eſt comme la réſiſtance & le quarré du temps conjointement; la réſiſtance ſera comme $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP}$. Mais on avoit $PQ : Rr :: SQ : \frac{1}{2}VQ$, & de là $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP}$ devient comme $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ ou comme $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SP^2}$. Car les points P & Q coïncidans, SP & SQ coïncideront auſſi, & l'angle PVQ ſera droit; & à cauſe des triangles ſemblables PVQ, PSO, $PQ : \frac{1}{2}VQ :: OP : \frac{1}{2}OS$. Donc $\frac{OS}{OP \times SP^2}$ eſt comme la réſiſtance, c'eſt-à-dire, en raiſon de la denſité du milieu au point P, & en raiſon doublée de la vîteſſe conjointement. Donc en ôtant la raiſon doublée de la vîteſſe, c'eſt-à-dire, la raiſon $\frac{1}{SP}$, il reſtera la denſité du milieu en P proportionnelle à $\frac{OS}{OP \times SP}$. Soit donnée la ſpirale; & à cauſe de la raiſon de OS à OP qui eſt donnée, la denſité du milieu en P ſera comme $\frac{1}{SP}$. Donc dans un milieu dont la denſité eſt réciproquement comme la diſtance SP du centre, le corps peut ſe mouvoir dans cette ſpirale. *C. Q. F. D.*

Fig. 27.

Cor. 1. La vîteſſe dans un lieu quelconque P eſt toujours celle

Du Mouvement des Corps.

avec laquelle le corps peut tourner par la même force centripete dans un milieu non réſiſtant dans un cercle à la même diſtance SP du centre.

Fig. 28.

Cor. 2. Si la diſtance SP eſt donnée, la denſité du milieu eſt comme $\frac{OS}{OP}$, & ſi cette diſtance n'eſt pas donnée, la denſité eſt comme $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et par conſéquent, on peut appliquer la ſpirale à une denſité quelconque du milieu.

Cor. 3. La force de la réſiſtance dans un lieu quelconque P eſt à la force centripete dans le même lieu, comme $\frac{1}{2}OS$ à OP. Car ces forces ſont entr'elles comme $\frac{1}{2}Rr$ & TQ, ou comme $\frac{\frac{1}{4}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2}PQ^2}{SP}$, c'eſt-à-dire, comme $\frac{1}{2}VQ$ & PQ, ou $\frac{1}{2}OS$ & OP. Or la ſpirale étant donnée, la proportion de la réſiſtance à la force centripete eſt auſſi donnée, & réciproquement, cette proportion étant donnée, la ſpirale l'eſt auſſi.

Cor. 4. Le corps ne peut donc tourner dans cette ſpirale, que lorſque la force de la réſiſtance eſt moindre que la moitié de la force centripete. Car ſuppoſé que la réſiſtance ſoit égale à la moitié de la force centripete, alors la ſpirale ſe confondra avec la ligne droite PS, & dans ce cas, le corps deſcendra vers le centre dans cette droite avec une vîteſſe, qui ſera à la vîteſſe avec laquelle nous avons prouvé ci-deſſus, dans le cas de la parabole, (Théor. 10. du Liv. 1.) que le corps deſcendroit dans un milieu non réſiſtant, en raiſon ſous-doublée de 1 à 2. Et les temps de la deſcenſion ſeront ici réciproquement comme les vîteſſes & par conſéquent ils ſeront donnés.

Cor. 5. Et parce que à égales diſtances du centre, la vîteſſe eſt la même dans la ſpirale PQR & dans la droite SP, & que la longueur de la ſpirale, eſt à la longueur de la droite SP, dans la raiſon de OP à OS; le temps de la deſcenſion dans la ſpirale ſera au temps de la deſcenſion dans la droite SP dans cette

même raiſon donnée, & par conſéquent il ſera donné.

Cor. 6. Si du centre S, & de deux intervalles quelconques donnés on décrit deux cercles, & ſi ces deux cercles reſtans les mêmes, l'angle que la ſpirale fait avec le rayon SP change d'une façon quelconque : le nombre des révolutions que le corps P peut achever entre les circonférences de ces cercles en allant dans la ſpirale d'une circonférence à l'autre eſt comme $\frac{PS}{OS}$ ou comme la tangente de l'angle que la ſpirale fait avec le rayon PS ; & le temps de ces révolutions eſt comme $\frac{OP}{OS}$, c'eſt-à-dire, comme la ſécante du même angle, ou bien réciproquement, comme la denſité du milieu. Fig. 27.

Cor. 7. Si le corps dans un milieu dont la denſité eſt réciproquement comme la diſtance des lieux au centre, faiſoit une révolution dans une courbe quelconque AEB autour de ce centre, & que le premier rayon AS la coupât ſous le même angle en B, qu'il l'avoit coupée premierement en A, & que la vîteſſe du corps à ce lieu B fut à ſa premiere vîteſſe en A réciproquement en raiſon ſous doublée des diſtances au centre, (c'eſt-à-dire, comme AS à la moyenne proportionnelle entre AS & BS) ce corps continueroit à faire une infinité de révolutions ſemblables BFC, CGD &c. & partageroit par leurs interſections le rayon AS dans les parties AS, BS, CS, DS, &c. continuellement proportionnelles. Et les temps des révolutions ſeront comme les périmetres des ſpires, AEB, BFC, CGD, &c. directement, & les vîteſſes aux commencemens A, B, C de ces révolutions inverſement ; c'eſt-à-dire, comme $AS^{\frac{3}{2}}, BS^{\frac{3}{2}}, CS^{\frac{3}{2}}$. Donc le temps total dans lequel le corps parviendra au centre ſera au temps de la premiere révolution, comme la ſomme de toutes les continuellement proportionnelles $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ (juſqu'à l'infini) au premier terme $AS^{\frac{3}{2}}$; c'eſt-à- Fig. 27.

Du Mouvement des Corps.

Fig. 28.

dire, comme le premier terme $AS^{\frac{3}{2}}$ à la différence des deux premiers termes $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, ou comme $\frac{3}{2} AS$ à AB à peu près. Ce qui donnera aiſément ce temps total.

Cor. 8. De tout ceci on peut tirer à peu près le mouvement des corps dans des milieux dont la denſité ou eſt uniforme, ou obſerve une autre loi quelconque aſſignée.

Du centre S, & des intervalles continuellement proportionnels SA, SB, SC, &c. décrivez un nombre quelconque de cercles, & ſuppoſez que le temps des révolutions entre les périmetres de deux de ces cercles quelconques, dans le milieu dont nous parlons, ſoit au temps des révolutions, entre ces mêmes cercles, dans le milieu propoſé, à peu près comme la denſité moyenne du milieu propoſé entre ces cercles, à la denſité moyenne du milieu dont nous parlons entre ces mêmes cercles : & que la ſécante de l'angle, ſous lequel la ſpirale précédente coupe le rayon AS dans le milieu dont nous parlons, ſoit dans la même raiſon à la ſécante de l'angle ſous lequel la ſpirale nouvelle coupe le même rayon dans le milieu propoſé : & qu'enfin les nombres de toutes les révolutions entre les deux mêmes cercles ſoient à peu près comme les tangentes de ces mêmes angles. Si cela arrive ainſi entre deux cercles quelconques, le mouvement ſe continuera entre tous les autres cercles. Et de-là on peut trouver facilement de quelle façon & dans quels temps les corps doivent tourner dans un milieu quelconque qui réſiſte ſelon une loi quelconque aſſignée.

Cor. 9. Et quoique le mouvement ſoit excentrique dans les ſpirales qui approchent de l'ovale, cependant, en imaginant que chaque révolution de ces ſpirales ſoient ſéparées par des intervalles égaux, & qu'ils arrivent au centre par les mêmes degrés que la ſpirale qu'on a décrit ci-deſſus, on comprendra de quelle maniere les mouvemens des corps s'exécutent dans ces ſortes de ſpirales.

PROPOSITION XVI. THÉORÉME XIII.

Fig. 27.

Si la denſité du milieu à chacun des lieux, eſt réciproquement comme la diſtance de ces lieux au centre immobile, & que la force centripete ſoit réciproquement comme une puiſſance quelconque de cette même diſtance : je dis que le corps peut tourner dans une ſpirale qui coupe ſous un angle donné tous les rayons tirés de ce centre.

Cette Propoſition ſe démontre de la même maniere que la Propoſition précédente. Car ſi la force centripete en P eſt réciproquement comme une puiſſance quelconque SP^{n+1} de la diſtance SP, on trouvera, comme ci-deſſus, que le temps pendant lequel le corps parcourt l'arc quelconque PQ ſera comme $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; & la réſiſtance en P ſera comme $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP^n}$ ou comme $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$ & par conſéquent, comme $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, c'eſt-à-dire, à cauſe de la qnantité donnée $\frac{\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS}{OP}$, réciproquement comme SP^{n+1}. Donc la vîteſſe étant réciproquement comme $SP^{\frac{1}{2}n}$, la denſité en P ſera réciproquement comme SP.

Cor. 1. La réſiſtance eſt à la force centripete comme $\overline{1-\frac{1}{2}n} \times OS$ à OP.

Cor. 2. Si la force centripete eſt réciproquement comme SP^3 alors $1-\frac{1}{2}n=0$; donc alors la réſiſtance & la denſité du milieu ſeront nulles, comme dans la Prop. 9. du Liv. 1.

Cor. 3. Si la force centripete eſt réciproquement comme quelque puiſſance du rayon SP dont l'expoſant ſoit plus grand que le nombre 3. la réſiſtance deviendra de poſitive négative.

SCHOLIE.

Au reſte, cette Propoſition & les précédentes, qui ont rap-

Du Mouvement des Corps.

port aux milieux inégalement denſes, doivent s'appliquer auſſi aux mouvemens des corps qui ſont aſſez petits pour que l'excès de la denſité du milieu qui touche un de leurs côtés ſur celle du milieu qui touche leur autre côté puiſſe être négligée. Je ſuppoſe ici la réſiſtance proportionnelle à la denſité, le reſte étant égal. Ainſi dans les milieux dont la force réſiſtante n'eſt pas comme la denſité, la denſité doît augmenter ou diminuer juſqu'à ce que l'excès de la réſiſtance ſoit contre-balancé, ou que ſon défaut ſoit ſuppléé.

PROPOSITION XVII. PROBLÈME IV.

Trouver, & la force centripete, & la réſiſtance du milieu néceſſaires pour que le corps puiſſe ſe mouvoir dans une ſpirale donnée par une loi de vîteſſe donnée.

Fig. 29.

Soit cette ſpirale PQR. La vîteſſe avec laquelle le corps décrit le très-petit arc PQ étant donnée, le temps l'eſt auſſi, & par la hauteur TQ, qui eſt comme la force centripete & le quarré du temps, on a la force. Enſuite par la différence RSr des aires PSQ & QSR décrites en des particules égales de temps, on aura la retardation du corps, & par la retardation on trouvera la réſiſtance, & la denſité du milieu.

PROPOSITION XVIII. PROBLÈME V.

La loi de la force centripete étant donnée, trouver à chacun des lieux la réſiſtance du milieu néceſſaire pour que le corps décrive une ſpirale donnée.

Par le moyen de la force centripete donnée il faut trouver la vîteſſe à chacun des lieux, enſuite il faut par la retardation de la vîteſſe chercher la denſité du milieu ; comme dans la Propoſition précédente.

J'ai fait voir, dans la dixiéme Prop. & dans le Lemme 2. de ce Livre, la maniere de traiter ces Problêmes, & je ne veux pas arrêter plus long-temps le Lecteur à ces ſortes de diſcuſſions aſſez

aſſez compliquées. Il eſt temps de dire quelque choſe des forces des corps dans leurs mouvemens progreſſifs, de la denſité, & de la réſiſtance des milieux dans leſquels les mouvemens dont j'ai parlé juſqu'à préſent & ceux de même nature s'exécutent.

CINQUIEME SECTION.

De la denſité & de la compreſſion des Fluides & de l'Hydroſtatique.

DEFINITION DU FLUIDE.

Les corps fluides ſont ceux dont les parties cédent à toute eſpece de force qui agit ſur eux, & qui ſe meuvent très-facilement entre eux.

PROPOSITION XIX. THÉORÉME XIV.

Toutes les parties d'un fluide immobile & homogène enfermé dans un vaſe quelconque immobile dans lequel il eſt comprimé de toutes parts, (en faiſant abſtraction de la gravité, de la condenſation, & de toute eſpéce de force centripéte) ſont également preſſées de tous les côtés, & chacune reſte dans ſon lieu ſans que cette preſſion produiſe aucun mouvement.

Cas 1. Dans un vaſe ſphérique *A B C*, ſoit enfermé un fluide de maniére qu'il y ſoit comprimé de toutes parts également, je dis qu'aucune de ſes parties ne ſe mouvera par cette preſſion. Car ſi quelque partie *D* ſe mouvoit, il ſeroit néceſſaire que toutes les autres parties qui ſont à la même diſtance du centre ſe meuſſent enſemble d'un mouvement ſemblable ; & cela parce que la preſſion qu'elles éprouvent toutes eſt égale & ſemblable, Fig. 30.

& qu'on ſuppoſe qu'elles n'ont point d'autre mouvement que celui que cette preſſion peut produire. Or elles ne peuvent toutes approcher plus près du centre, à moins que le fluide ne ſe condenſe vers le centre; ce qui eſt contre l'hypotèſe. Elles ne peuvent non plus s'en éloigner à moins que le fluide ne ſe condenſe vers la circonférence, ce qui eſt auſſi contre l'hypotèſe. Enfin elles ne peuvent, en conſervant leur diſtance au centre, ſe mouvoir vers un côté quelconque parce qu'il y auroit la même raiſon pour qu'elles ſe meuſſent vers le côté oppoſé. Or une même partie ne peut ſe mouvoir en même temps vers des côtés oppoſés, donc aucune partie de ce fluide ne ſortira de ſa place. *C. Q. F. D.*

Cas 2. Je dis à préſent, que toutes les parties ſphériques de ce fluide ſont également preſſées de tous côtés. Car ſuppoſez que *EF* ſoit une partie ſphérique de ce fluide, ſi elle n'eſt pas également preſſée de tous côtés, ſuppoſez que la preſſion la plus foible augmente juſqu'à ce que cette partie ſphérique ſoit également preſſée de toutes parts, & alors, par le premier cas, toutes ſes parties demeureront dans leurs lieux. Mais avant que cette preſſion fut augmentée, elles devoient demeurer auſſi dans leurs lieux, par le même cas premier, & la preſſion étant augmentée, elles doivent ſortir de leurs lieux par la définition du fluide, or ces deux choſes ſont contradictoires. Donc il étoit faux de dire que la ſphere *EF* ne fut pas également preſſée de toutes parts. *C. Q. F. D.*

Cas 3. Je dis de plus que la preſſion de pluſieurs parties ſphériques eſt égale, car les parties ſphériques contigues ſe preſſent mutuellement & également dans le point de contact par la troiſiéme loi du mouvement, mais par le cas ſecond, elles ſont preſſées de toutes parts par la même force. Donc deux parties quelconques ſphériques non contigues ſont preſſées par la même force, parce qu'une partie ſphérique intermédiaire peut toucher l'une & l'autre. *C. Q. F. D.*

Cas 4. Je dis encore que toutes les parties du fluide ſont preſſées partout également. Car deux parties quelconques peuvent être touchées par les parties ſphériques dans des points quelconques, & les parties ſphériques preſſent également dans ces points par le cas troiſieme, & elles ſont également preſſées à leur tour par ces deux autres parties par la troiſieme loi du mouvement. *C. Q. F. D.*

Cas 5. Or comme une partie quelconque *G H I* du fluide eſt renfermée dans le reſte de ce fluide comme dans un vaſe, & qu'elle y eſt également preſſée de tous côtés, & que de plus toutes les parties qui la compoſent ſe preſſent mutuellement & également, & ſont en repos entr'elles; il eſt clair que toutes les parties *G H I* d'un fluide quelconque qui eſt comprimé également de tous côtés, ſe preſſent également les unes les autres, & ſont en repos entr'elles. *C. Q. F. D.* Fig. 30.

Cas 6. Si ce fluide n'eſt pas renfermé dans un vaſe infléxible, & que par conſéquent il ne ſoit pas preſſé également de toutes parts; il cédera à la preſſion la plus forte par la définition de la fluidité.

Cas 7. Donc dans un vaſe infléxible le fluide ne ſoutiendra pas une preſſion plus forte d'un côté que de l'autre, mais il cédera à la plus forte, & cela dans un inſtant indiviſible, parce que le côté infléxible du vaſe ne pourſuit pas la liqueur qui céde: le fluide en cédant preſſera donc le côté oppoſé, & ainſi la preſſion deviendra égale de tous côtés, & parce que le fluide dans le premier moment où il tend à s'éloigner du lieu où il éprouve la plus grande preſſion, en eſt empêché par la réſiſtance du vaſe du côté oppoſé, la preſſion devient égale de toutes parts, dans un inſtant & ſans aucun mouvement local: & dans le moment les parties du fluide ſe preſſent mutuellement & également par le cinquiéme cas, & ſont en repos entre elles. *C. Q. F. D.*

Cor. D'où on voit que les mouvemens des parties du fluide entr'elles ne peuvent changer par une preſſion exercée de toutes

Du Mouvement des Corps.

parts ſur la ſuperficie entiere du fluide, à moins que la figure de cette ſuperficie ne change en quelque endroit, ou que toutes les parties du fluide en ſe preſſant mutuellement avec plus ou moins de force coulent plus ou moins facilement les unes ſur les autres.

PROPOSITION XX. THÉORÉME XV.

Si les parties d'une ſphere fluide & homogène qui enveloppe un fond ſphérique qui a le même centre, gravitent également vers ce centre lorſqu'elles en ſont à égale diſtance ; ce fonds ſoutiendra le poids d'un cylindre, dont la baſe eſt égale à la ſuperficie de ce fond, & la hauteur eſt la même que celle du fluide incumbant.

Fig. 31. Que *DHM* ſoit la ſuperficie de ce fond, & *AEI* la ſuperficie ſupérieure du fluide. Que ce fluide ſoit partagé par un nombre innombrable de ſuperficies ſphériques *BFK*, *CGL* dans des orbes concentriques également épaiſſes ; & que la force de la gravité ſoit ſuppoſée agir ſeulement ſur la ſuperficie ſupérieure d'un orbe quelconque, ſes actions étant égales ſur les parties égales de toutes ces ſuperficies. La ſuperficie de deſſus *AE* eſt donc preſſée par la ſeule force de ſa propre gravité, par laquelle toutes les parties de l'orbe ſupérieur & la ſeconde ſuperficie *BFK* (par la Prop. 19.), ſelon ſa grandeur, ſont également preſſées. Mais outre cela, la ſeconde ſuperficie *BFK* eſt preſſée par la force de ſa propre gravité, qui, ajoutée à la premiere, compoſe une preſſion double. La troiſieme ſuperficie *CGL* ſera preſſée ſelon ſa grandeur par cette preſſion, & de plus par la force de ſa propre gravité, c'eſt-à-dire, par une preſſion triple : & de même, la quatrieme ſuperficie éprouvera une preſſion quadruple, la cinquiéme une quintuple, & ainſi de ſuite. La preſſion que chaque ſuperficie éprouve, n'eſt donc pas comme la quantité ſolide du fluide qui s'appuie ſur elle, mais comme le nombre des orbes juſqu'à la ſurface ſupé-

rieure du fluide ; & elle eſt égale à la gravité de l'orbe inférieur multiplié par le nombre des orbes : c'eſt-à-dire, à la gravité du ſolide dont la derniere raiſon au cylindre déterminé eſt la raiſon d'égalité, (ſuppoſé que le nombre des orbes croiſſe & que leur épaiſſeur diminue à l'infini, enſorte que l'action de la gravité de la ſuperficie inférieure à la ſupérieure devienne continue). La ſuperficie inférieure ſoutiendra donc le cylindre dont on vient de parler. *C. Q. F. D.*

Et par un raiſonnement ſemblable on prouveroit la propoſition, dans le cas où la gravité décroît dans une raiſon quelconque de la diſtance au centre, & dans celui où le fluide eſt plus rare en enhaut, & plus denſe en embas. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc, le fond n'eſt pas preſſé par tout le poids du fluide incumbant, mais il ſoutient ſeulement cette partie du poids du fluide dont on a parlé dans cette Propoſition ; le reſte de ſon poids étant ſoutenu par la figure en voute du fluide.

Cor. 2. Mais la quantité de la preſſion eſt toujours la même à des diſtances égales du centre, ſoit que la ſuperficie preſſée ſoit parallele à l'horiſon, ſoit qu'elle lui ſoit perpendiculaire ou oblique, ſoit que le fluide s'éleve perpendiculairement dans une ligne droite au-deſſus de la ſuperficie preſſée, ſoit qu'il ſerpente obliquement dans des canaux & des cavités qui ſoient de formes régulieres ou irrégulieres, & qui ſoient larges ou étroites, on trouve que toutes ces circonſtances ne changent rien à la preſſion, en appliquant la démonſtration de ce Théorême aux différens cas où ſe trouvent les fluides.

Cor. 3. On prouve auſſi par la même démonſtration (& par la Prop. 19.) que les parties d'un fluide peſant n'acquiérent aucun mouvement entr'elles par la preſſion d'un poids incumbant, pourvû qu'on faſſe abſtraction du mouvement qui vient de la condenſation.

Cor. 4. Et par conſéquent ſi un autre corps de la même gravité ſpécifique, mais incapable de condenſation, eſt plongé dans

ce fluide, il n'acquérera aucun mouvement par la preſſion du poids incumbant : il ne deſcendra point, il ne montera point, & il ne ſera point contraint à changer ſa forme. S'il eſt ſphérique, il demeurera ſphérique malgré la preſſion : s'il eſt quarré, il demeurera quarré : & cela, ſoit qu'il ſoit mol ou très-fluide ; ſoit qu'il nâge librement dans le fluide, ſoit qu'il s'appuie ſur le fond. Or toute partie interne quelconque d'un fluide eſt dans le même cas qu'un corps plongé, & il en eſt de même de tous les corps plongés qui ont la même grandeur, la même figure, & la même gravité ſpécifique. Si le corps plongé devenoit fluide en conſervant ſon poids ; ce corps, s'il étoit monté ou deſcendu, ou s'il avoit pris une nouvelle forme auparavant par la preſſion du fluide, ſeroit encore forcé de monter ou de deſcendre, ou de prendre une nouvelle forme : & cela, parce que ſa gravité & toutes les autres cauſes de mouvement ſubſiſtent. Or (par le cas 5. de la Prop. 19.) il ſeroit en repos & conſerveroit ſa figure. Donc, &c.

Cor. 5. Donc le corps qui eſt ſpécifiquement plus peſant que le fluide qui lui eſt contigu ira au fond, & s'il eſt ſpécifiquement plus léger, il montera ſur la ſuperficie, ce qui produira du mouvement, & un changement de figure, tels que l'excès ou le défaut de la gravité de ce corps les peut produire. Car cet excès, ou ce défaut ſont la cauſe de l'impulſion que reçoit le corps, lequel autrement eût été en équilibre avec les parties du fluide ; & cet excès ou ce défaut de gravité du corps plongé peut être comparé avec l'excès ou le défaut de poids des corps qui ſont dans l'un ou l'autre baſſin d'une balance.

Cor. 6. Les corps qui ſont dans des fluides ont donc une double gravité, l'une vraie & abſolue, l'autre apparente & relative. La gravité abſolue eſt la force totale par laquelle le corps tend en embas : la relative eſt l'excès de la gravité du corps par lequel il tend plus fortement en embas que le fluide qui l'environne. Les parties des fluides & celles de tous les corps gravi-

tent toutes dans leurs lieux par une gravité du premier genre : donc tous leurs poids réunis compoſent le poids total. Car tout corps eſt peſant comme on peut l'éprouver dans des vaſes pleins de liqueur, & le poids du tout eſt égal aux poids de toutes les parties & en eſt par conſéquent compoſé. Par la gravité du ſecond genre, les corps ne gravitent point dans leurs lieux, c'eſt-à-dire, qu'étant comparés entre eux, ils ne ſont pas plus peſans les uns que les autres, mais par les efforts mutuels qu'ils font pour deſcendre ils s'oppoſent mutuellement à leur chute & demeurent chacun à leur place comme s'ils n'avoient aucune gravité. Le peuple croit que les corps qui ſont ſoutenus dans l'air ne ſont point peſans. Et il croit peſans ceux qui tombent parce qu'ils ne ſont pas ſoutenus par le poids de l'air. Ainſi, ſelon le peuple, le poids des corps n'eſt autre choſe que l'excès de leur poids abſolu, ſur le poids de l'air. Et c'eſt pourquoi il appelle *corps légers* ceux qui ſont moins peſans que l'air, & qui s'élévent parce que l'air eſt plus peſant qu'eux. Mais ces corps ne ſont légers que comparativement, car ils deſcendent dans le vuide. De même les corps qui montent ou deſcendent dans l'eau, à raiſon de leur plus grande ou de leur moindre gravité, ſont comparativement, & en apparence les uns légers & les autres peſans, & leur peſanteur ou leur légereté comparative & apparente, eſt l'excès ou le défaut dont leur gravité vraie & abſolue ſurpaſſe ou eſt ſurpaſſée par celle de l'eau. Ceux qui ne deſcendent ni ne remontent, quoiqu'ils augmentent de leur poids abſolu le poids total qu'ils compoſent avec l'eau, ne peſent cependant point dans l'eau comparativement & dans le ſens du peuple. Car la démonſtration eſt la même pour tous ces cas.

Cor. 7. Ce qu'on vient de démontrer pour la gravité a auſſi lieu dans toutes les autres eſpéces quelconques des forces centripétes.

Cor. 8. Ainſi, ſi le milieu dans lequel le corps ſe meut, eſt preſſé ou par ſa propre gravité ou par quelqu'autre force centri-

pète, & que le corps qui y eſt placé ſoit preſſé plus fortement par la même force; la différence de ces forces eſt cette force motrice que nous avons conſidérée dans les Propoſitions précédentes comme force centripéte. Et ſi le corps eſt moins preſſé par cette force on doit conſidérer la différence de ces forces comme une force centrifuge.

Cor. 9. Mais comme les fluides, en preſſant les corps qui y ſont plongés, ne changent pas leur figure extérieure, il eſt clair de plus (Cor. de la Prop. 19.) qu'ils ne changent point la ſituation de leurs parties internes entr'elles: & par conſéquent, ſi des animaux ſont plongés, & que toute ſenſation vienne du mouvement des parties, les parties du fluide ne bleſſeront point les animaux plongés, & n'exciteront en eux aucune ſenſation, ſi ce n'eſt en tant qu'ils peuvent être condenſés par la compreſſion. Et c'eſt la même choſe pour un ſyſtême quelconque de corps environnés d'un fluide qui les comprime. Car toutes les parties de ce ſyſtême ſeront agitées des mêmes mouvemens que s'ils étoient dans le vuide, & qu'ils n'euſſent que leur ſeule gravité comparative, ſi ce n'eſt que ce fluide réſiſtât un peu à leurs mouvemens, ou qu'il contribuât à attacher leurs parties enſemble par la compreſſion.

PROPOSITION XXI. THÉORÉME XVI.

Si la denſité d'un fluide quelconque eſt proportionnelle à ſa compreſſion, & que ſes parties ſoient attirées en embas par une force centripéte réciproquement proportionnelle à leurs diſtances au centre: je dis que ſi l'on prend ces diſtances continuellement proportionnelles, les denſités de ce fluide à ces mêmes diſtances ſeront auſſi continuellement proportionnelles.

Fig. 32. Que ATV repréſente le fond ſphérique ſur lequel le fluide s'appuie, que S ſoit le centre, & que SA, SB, SC, SD, SE, SF, &c. ſoient des diſtances continuellement proportionnelles

nelles. Soient élevées les perpendiculaires AH, BI, CK, DL, EM, FN, &c. qui ſoient comme les denſités du milieu aux lieux A, B, C, D, E, F, & les gravités ſpécifiques dans ces mêmes lieux ſeront comme $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$ &c. Ou, ce qui revient au même, comme $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Suppoſez premierement que ces gravités ſoient continuées uniformément de A à B, de B à C, de C à D, &c. les décrémens ſe faiſant par dégrés aux points B, C, D, &c. & ces gravités multipliées par les hauteurs AB, BC, CD, &c. formeront les preſſions AH, BI, CK, &c. par leſquelles le fond ATV eſt preſſé (ſelon le Théor. 15.): la particule A ſoutiendra donc toutes les preſſions AH, BI, CK, DL en allant à l'infini; & la particule B toutes les preſſions hors la premiere AH; & la particule C toutes les preſſions hors les deux premieres AH, BI, & ainſi de ſuite. Donc la denſité AH de la premiere particule A eſt à la denſité BI de la ſeconde particule B comme la ſomme de toutes les denſités $AH+BI+CK+DL$ à l'infini, à la ſomme de toutes les denſités $BI+CK+DL$ &c. Et BI denſité de la ſeconde B eſt à CK denſité de la troiſieme C, comme la ſomme de toutes les denſités $BI+CK+DL$ &c. à la ſomme de toutes les denſités $CK+DL$ &c. Or ces ſommes ſont proportionnelles à leurs différences AH, BI, CK, &c. & par conſéquent elles ſont continuellement proportionnelles, (par le Lemme 1. de ce Liv.) donc les différences AH, BI, CK, &c. qui ſont proportionnelles aux ſommes, ſont auſſi continuellement proportionnelles. C'eſt pourquoi, comme les denſités dans les lieux A, B, C, &c. ſont comme AH, BI, CK, &c. elles ſeront auſſi continuellement proportionnelles. Qu'on les prenne par ſauts, & aux diſtances SA, SC, SE, continuellement proportionnelles, les denſités AH, CK, EM ſeront continuellement proportionnelles, & par le même raiſonnement, aux diſ-

Fig. 32.

Du Mouvement des Corps.

tances quelconques continuellement proportionnelles SA, SD, SG, les denſités AH, DL, GO ſeront continuellement proportionnelles.

Fig. 32. Que les points A, B, C, D, E, &c. ſe rapprochent à préſent, enſorte que la progreſſion des gravités ſpécifiques, depuis le fond A juſqu'à la partie ſupérieure du fluide, devienne continue, les denſités AH, DL, GO, qui étoient toujours continuellement proportionnelles dans des diſtances quelconques SA, SD, SG, demeureront continuellement proportionnelles. *C. Q. F. D.*

Cor. Delà, ſi la denſité du fluide eſt donnée en deux lieux comme A & E, on peut trouver ſa denſité dans un lieu quelconque Q.

Fig. 33. Du centre S, ſoit décrite une hyperbole dont les aſymptotes ſoient les perpendiculaires SQ, SX, & qui coupe les lignes AH, EM, QT perpendiculaires à l'aſymptote SQ en a, e, q, ainſi que les perpendiculaires HX, MY, TZ, à l'aſymptote SX, en h, m & t. Soit l'aire $YmtZ$ à l'aire donnée $YmhX$ comme l'aire donnée $EeqQ$ à l'aire donnée $EeaA$; la ligne Zt prolongée coupera la ligne QT proportionnellement à la denſité. Car ſi les lignes SA, SE, SQ ſont continuellement proportionnelles, les aires $EeqQ$, $EeaA$ ſeront égales, & de-là, les aires $YmtZ$, $XhmY$, qui ſont proportionnelles aux premieres, ſeront auſſi égales, & les lignes SX, SY, SZ, c'eſt-à-dire, AH, EM, QT ſeront continuellement proportionnelles, comme le théorème le demande. Et ſi les lignes SA, SE, SQ ont un autre ordre quelconque dans une ſérie de quantités continuellement proportionnelles, les lignes AH, EM, QT, à cauſe de la proportionnalité des aires hyperboliques, auront le même ordre dans une autre ſérie de quantités continuellement proportionnelles.

PROPOSITION XXII. THÉORÉME XVII.

La denſité d'un fluide quelconque étant proportionnelle à ſa compreſſion, & ſes parties étant attirées en embas par une gravité réciproquement proportionnelle aux quarrés de leurs diſtances au centre : je dis que ſi l'on prend ces diſtances dans une progreſſion harmonique les denſités du fluide à ces diſtances ſeront en progreſſion géométrique.

Que S repréſente le centre, & SA, SB, SC, SD, SE les diſtances en progreſſion géométrique. Soient élevées les perpendiculaires AH, BI, CK, &c. qui ſoient comme les denſités du fluide aux lieux A, B, C, D, E, &c. & ſes gravités ſpécifiques dans les mêmes lieux ſeront $\frac{AH}{SA^2}$, $\frac{BI}{SB^2}$, $\frac{CK}{SC^2}$, &c. Suppoſez que ces gravités ſoient continuées uniformement, la premiere de A à B, la ſeconde de B à C, la troiſiéme de C à D, &c. en les multipliant par les hauteurs AB, BC, CD, DE, &c. ou, ce qui eſt le méme, par les diſtances SA, SB, SC, &c. proportionnelles à ces hauteurs, on aura les expoſans des preſſions $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. C'eſt pourquoi, comme les denſités ſont proportionnelles à la ſomme de ces preſſions, les différences des denſités $AH-BI$, $BI-CK$, &c. ſeront comme les différences des ſommes $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, $\frac{CK}{SC}$, &c. Fig. 34.

Du centre S ſoit décrit une hyperbole quelconque dont les aſymptotes ſoient SA, Sx, & qui coupe les lignes AH, BI, CK, &c. qui ſont perpendiculaires, en a, b, c, &c. ſur l'aſymptote SA prolongée, ainſi que les lignes Ht, Iu, Kw perpendiculaires en h, i, k &c. ſur l'aſymptote Sx prolongée, & les différences tu, uw, &c. des denſités ſeront proportionnelles à $\frac{AH}{SA}$, $\frac{BI}{SB}$, &c. & les rectangles $tu \times th$,

Du Mouvement des Corps.

Fig. 34.

$uw \times ui$, &c. ou tp, uq &c. ſeront comme $\frac{AH \times th}{SA}, \frac{BI \times ui}{SB}$ &c. c'eſt-à-dire, comme Aa, Bb, &c. Car, par la nature de l'hyperbole, $SA : AH$ ou $St :: th : Aa$, donc $\frac{AH \times th}{SA} = Aa$. Et par le même raiſonnement, $\frac{BI \times ui}{SB} = Bb$, &c. Or Aa, Bb, Cc, &c. ſont continuellement proportionnelles, & par conſéquent elles ſont proportionnelles à leurs différences $Aa - Bb$, $Bb - Cc$, &c. & par conſéquent les rectangles tp, uq, &c. ſont auſſi proportionnels à ces différences, ainſi que les ſommes des rectangles $tp + uq$ ou $tp + uq + wr$, aux ſommes des différences $Aa - Cc$ ou $Aa - Dd$. Suppoſé qu'il y ait beaucoup de termes de cette ſorte, & la ſomme de toutes les différences comme $Aa - Ff$ ſera proportionnelle à la ſomme de tous les rectangles comme ζthn. Qu'on augmente le nombre des termes, & qu'on diminue la diſtance des points A, B, C, &c. à l'infini, ces rectangles deviendront égaux à l'aire hyperbolique ζthn, & par conſéquent la différence $Aa - Ff$ eſt proportionnelle à cette aire. Soient priſes à préſent les diſtances quelconques SA, SD, SF en progreſſion harmonique, & les différences $Aa - Dd$, $Dd - Ff$ ſeront égales; & par conſéquent, les aires $thlx$, $xln\zeta$ proportionnelles à ces différences ſeront égales entr'elles, & les denſités St, Sx, $S\zeta$, c'eſt-à-dire, AH, DL, FN, ſeront continuellement proportionnelles. *C. Q. F. D.*

Cor. Delà, ſi deux denſités quelconques du fluide ſont données comme AH & BI, l'aire $thiu$, répondant à la différence tu de ces denſités ſera donnée; & par-là, on trouvera la denſité FN à une hauteur quelconque SF, en prenant l'aire $thn\zeta$ à cette aire donnée $thiu$ comme la différence $Aa - Ff$ eſt à la différence $Aa - Bb$.

SCHOLIE.

On peut prouver par le même raiſonnement, que ſi la gravité des particules du fluide diminue en raiſon triplée des diſtances au centre, & qu'on prenne les réciproques des quarrés des diſtances SA, SB, SC, &c. (c'eſt-à-dire, $\frac{SA^3}{SA^2}$, $\frac{SA^3}{SB^2}$, $\frac{SA^3}{SC^2}$.) en progreſſion arithmétique; les denſités AH, BI, CK, &c. ſeront en progreſſion géométrique. Et ſi la gravité diminue en raiſon quadruplée des diſtances, & que les réciproques des cubes des diſtances (c'eſt-à-dire $\frac{SA^4}{SA^3}$, $\frac{SA^4}{SB^3}$, $\frac{SA^4}{SC^3}$, &c.) ſoient priſes en progreſſion arithmétique; les denſités AH, BI, CK, &c. ſeront en progreſſion géométrique. Et ainſi à l'infini. De plus, ſi la gravité des particules du fluide eſt la même à toutes les diſtances, & que les diſtances ſoient en progreſſion arithmétique, les denſités ſeront en progreſſion géométrique, comme le célebre *Edmond Halley* l'a trouvé. Si la gravité eſt comme la diſtance & que les quarrés des diſtances ſoient en progreſſion arithmétique, les denſités ſeront en progreſſion géométrique. Et de même à l'infini. Cela arrive ainſi lorſque la denſité du fluide condenſé par la compreſſion eſt comme la force comprimante, ou, ce qui eſt la même choſe, lorſque l'eſpace occupé par le fluide eſt réciproquement comme cette force. On peut ſuppoſer d'autres loix de condenſation, comme, par exemple, que le cube de la force comprimante ſoit comme la quatriéme puiſſance de la denſité, ou que la raiſon triplée de la force ſoit la même que la raiſon quadruplée de la denſité. Auquel cas, ſi la gravité eſt réciproquement comme le quarré de la diſtance au centre, la denſité ſera réciproquement comme le cube de la diſtance. Suppoſez à préſent que le cube de la force comprimante ſoit comme la cinquiéme puiſſance de la denſité, ſi la gravité eſt réciproquement comme le quarré de la diſtance, la denſité ſera réciproquement en raiſon ſeſ-

Fig. 34.

quiplée de la diſtance. Suppoſez que la force comprimante ſoit en raiſon doublée de la denſité & la gravité réciproquement en raiſon doublée de la diſtance, la denſité ſera réciproquement comme la diſtance. Il ſeroit trop long de parcourir tous les cas. Au reſte, il eſt certain, par l'expérience, que la denſité de l'air eſt, ou exactement, ou à peu près comme la force comprimante; & par conſéquent, la denſité de l'air de l'atmoſphere de la terre eſt comme le poids de tout l'air incumbant, c'eſt-à-dire, comme la hauteur du mercure dans le Barometre.

PROPOSITION XXIII. THÉORÉME XVIII.

Si la denſité d'un fluide, compoſé de parties qui ſe fuient mutuellement, eſt comme la compreſſion, les forces centrifuges des particules ſeront réciproquement proportionnelles aux diſtances à leurs centres. Et au contraire, les particules dont les forces ſont réciproquement proportionnelles aux diſtances à leur centre, & qui ſe fuient mutuellement, compoſent un fluide élaſtique, dont la denſité eſt proportionnelle à la compreſſion.

Fig. 35. Suppoſez qu'un fluide ſoit renfermé dans un eſpace cubique ACE, & qu'enſuite il ſoit réduit par la compreſſion dans un eſpace moindre ace; les diſtances des particules, qui ont la même poſition entr'elles dans l'un & l'autre eſpace, ſeront comme les côtés AB, ab de ces cubes; & les denſités des milieux ſeront réciproquement comme les capacités AB^3, & ab^3. Dans la face $ABCD$ du plus grand cube, ſoit pris le quarré DP égal à la face db du petit cube; & par l'hypotèſe, la preſſion que le quarré DP exerce ſur le fluide qui y eſt renfermé ſera à la preſſion par laquelle ce quarré db preſſe le fluide inclus, comme les denſités du milieu ſont entr'elles, c'eſt-à-dire, comme ab^3 à AB^3. Mais la preſſion, par laquelle le quarré DB comprime le fluide inclus, eſt à la preſſion par laquelle il eſt comprimé par le quarré DP, comme le quarré DB au quarré DP,

c'eſt-à-dire, comme AB^2 à ab^2. Donc la preſſion par laquelle le quarré DB comprime le fluide eſt à la preſſion par laquelle il eſt comprimé par le quarré db, comme ab à AB. Les ſurfaces FGH, fgh, qui ſont menées dans l'intérieur des cubes, partagent le fluide en deux parties, & ſe preſſent mutuellement par les mêmes forces par leſquelles elles ſont preſſées par les ſurfaces AC, ac, c'eſt-à-dire, dans la proportion de ab à AB : donc les forces centrifuges qui ſoutiennent ces preſſions ſont dans la même raiſon. Fig. 35.

Comme les particules ſont en même nombre & également ſituées dans l'un & l'autre cube, les forces que toutes les particules exercent ſuivant les ſurfaces FHG, fhg ſur toutes les particules ſont comme celles que chacune d'elles exerce ſur chacune. Donc, les forces que chacune exerce ſur chacune ſuivant le plan FGH dans le plus grand cube, ſont aux forces que chacune exerce ſur chacune dans le plus petit cube ſuivant le plan fgh, comme ab à AB, c'eſt-à-dire, réciproquement comme les diſtances des particules entr'elles. *C. Q. F. D.*

Et réciproquement, ſi les forces de chacune des particules ſont en raiſon renverſée des diſtances, c'eſt-à-dire, réciproquement comme les côtés AB, ab des cubes; les ſommes des forces ſeront dans la même raiſon, & les preſſions des côtés DB, db, ſeront comme les ſommes des forces; & la preſſion du quarré DP ſera à la preſſion du côté DB comme ab^2 à AB^2, & la preſſion du quarré DP eſt à la preſſion du côté db comme ab^3 à AB^3 c'eſt-à-dire, que la force de la compreſſion eſt à la force de la compreſſion comme la denſité à la denſité. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

Par le même raiſonnement, ſi les forces centrifuges des particules ſont réciproquement en raiſon doublée des diſtances entre les centres, les cubes des forces comprimantes ſeront comme le quarré quarré des denſités. Si les forces centrifuges

Du Mouvement des Corps.

ſont réciproquement en raiſon triplée ou quadruplée des diſtances, les cubes des forces comprimantes ſeront comme la ſixiéme ou la neuviéme puiſſance des denſités. Et généralement, ſi on prend D pour la diſtance, E pour la denſité du fluide comprimé, & que les forces centrifuges ſoient réciproquement comme la puiſſance quelconque d'une diſtance D^n; les forces comprimantes ſeront comme les racines cubiques de la puiſſance E^{n+2}, & réciproquement. Tout cela doit s'entendre des forces centrifuges des particules, leſquelles ne s'exercent que ſur les particules les plus proches, ou ne paſſent gueres au-delà. Nous en avons un exemple dans les corps magnétiques, dont la force attractive ne s'étend pas au-delà des corps du même genre, & qui ſont très-proches. Car la vertu magnétique ne s'étend pas au-delà d'une petite lame de fer qu'on interpoſe entre le corps & l'aimant, & elle ſe termine preſque entierement à ce fer, puiſque les corps placés au-delà de cette lame ne ſont pas tant attirés par l'aimant que par la lame de fer. Si on conçoit de même des particules qui en fuient d'autres du même genre qu'elles, & dont elles ſont très-proches, & qu'on imagine qu'elles n'exercent aucune force ſur les particules plus éloignées, on formera par l'aſſemblage infini de ces particules les fluides dont il s'agit dans cette Propoſition. Que s'il y a des particules dont la force s'étende à l'infini, il faudra une plus grande force pour opérer la même condenſation d'une plus grande quantité de fluide. C'eſt une queſtion qui regarde la phyſique que de ſçavoir ſi les fluides élaſtiques ſont compoſés de parties qui ſe fuient mutuellement. Nous avons démontré ici mathématiquement la propriété des fluides compoſés de particules de cette eſpece, afin de donner aux Phyſiciens les moyens de traiter cette matiere.

SIXIÉME

SIXIÉME SECTION.

Du Mouvement & de la réſiſtance des corps oſcillans.

PROPOSITION XXIV. THÉORÉME XIX.

Les quantités de matiere dans les corps oſcillans & dont les centres d'oſcillation ſont également diſtans du centre de ſuſpenſion, ſont en raiſon compoſée de la raiſon des poids, & de la raiſon doublée des temps des oſcillations dans le vuide.

Car la vîteſſe qu'une force donnée peut produire dans une matiére donnée en un temps donné eſt comme le temps & la force directement, & comme la quantité de matiere inverſement. Plus la force eſt grande, plus le temps eſt long, moins il y a de matiere, & plus il y aura de vîteſſe produite : ce qui eſt clair par la ſeconde loy du mouvement. Car ſi les pendules ſont de même longueur, les forces motrices ſont comme les poids dans les lieux également diſtans de la perpendiculaire ; donc ſi deux corps décrivent en oſcillant des arcs égaux, & que ces arcs ſoient diviſés en parties égales ; comme les temps dans leſquels ces corps décrivent chaque partie correſpondante des arcs ſont comme les temps entiers des oſcillations, les vîteſſes ſeront entr'elles dans les parties correſpondantes des oſcillations, comme les forces motrices & les temps entiers des oſcillations directement, & comme les quantités de matiere réciproquement : donc les quantités de matiere ſont comme les forces, & les temps des oſcillations directement, & réciproquement comme les vîteſſes. Mais les vîteſſes ſont réciproquement comme les temps, donc les temps ſont directement, & les vîteſſes ſont réciproquement comme les quarrés des temps, & par conſéquent les quantités de matiere ſont comme les forces motrices, & les quarrés des temps, c'eſt-

à-dire, comme les poids & les quarrés des temps. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc ſi les temps ſont égaux, les quantités de matiere dans chaque corps ſeront comme les poids.

Cor. 2. Si les poids ſont égaux, les quantités de matiere ſeront comme les quarrés des temps.

Cor. 3. Si les quantités de matiere ſont égales, les poids ſeront réciproquement comme les quarrés des temps.

Cor. 4. Puiſque les quarrés des temps, toutes choſes égales, ſont comme les longueurs des pendules; il eſt clair que ſi les temps ſont égaux, ainſi que les quantités de matiere, les poids ſeront comme les longueurs des pendules.

Cor. 5. Et généralement, la quantité de matiere du pendule eſt comme le poids & le quarré du temps directement, & inverſement comme la longueur du pendule.

Cor. 6. Mais dans un milieu non réſiſtant la quantité de matiere du pendule eſt comme le poids comparatif & le quarré du temps directement, & comme la longueur du pendule inverſement. Car le poids comparatif eſt la force motrice du corps dans un milieu quelconque peſant, comme je l'ai expliqué ci-deſſus; donc le poids abſolu dans le vuide eſt la même choſe que dans un tel milieu non réſiſtant.

Cor. 7. Et delà on voit tant la maniere de comparer les corps entre eux quant à la quantité de matiere de chacun; que celle de comparer les poids du même corps en divers lieux, pour connoître la variation de la gravité. Et par des expériences très-exactes j'ai toujours trouvé que la quantité de matiere dans chaque corps étoit proportionnelle à leurs poids.

PROPOSITION XXV. THÉORÉME XX.

Les corps ſuſpendus par des fils, & qui ſe meuvent dans un milieu quelconque qui leur réſiſte en raiſon des momens du temps, & ceux qui ſe meuvent dans un milieu non réſiſtant, lequel a la même gravité ſpécifique que ces corps, achevent leurs oſcillations en des temps

égaux dans une cycloïde, & décrivent en même temps des arcs proportionnels au temps.

Fig. 36.

Soit *AB* un arc de cycloïde que le corps *D* décrit en oſcillant pendant un temps quelconque dans un milieu non réſiſtant. Soit cet arc coupé en deux au point *C*, enſorte que *C* ſoit ſon point le plus bas; & la force accélératrice par laquelle le corps eſt preſſé à un point quelconque *D*, ou *d*, ou *E*, ſera comme la longueur de l'arc *CD*, ou *Cd*, ou *CE*. Soit repréſentée cette force par le même arc; la réſiſtance étant comme le moment du temps elle ſera donnée. Suppoſez qu'elle ſoit repréſentée par la partie donnée *CO* de l'arc de cycloïde, en prenant l'arc *Od* dans la même raiſon à l'arc *CD* que l'arc *OB* a à l'arc *CB*: la force par laquelle le corps eſt preſſé en *d* dans un milieu réſiſtant, laquelle eſt l'excès de la force *Cd* ſur la réſiſtance *CO*, ſera repréſentée par l'arc *Od*, & ſera par conſéquent à la force par laquelle le corps *D* ſera preſſé dans un milieu non réſiſtant, dans le lieu *D*, comme l'arc *Od* à l'arc *CD*; & par conſéquent dans un lieu *B*, comme l'arc *OB* à l'arc *CB*. Donc ſi deux corps *D* & *d* partent du lieu *B*, & ſont preſſés par ces forces, il eſt clair que ces forces ſont au commencement comme les arcs *CB* & *OB*, & que les premieres vîteſſes & les arcs premierement décrits ſeront dans la même raiſon. Soient ces arcs *BD* & *Bd*, les arcs reſtans *CD*, *Od* ſeront dans la même raiſon. Et par conſéquent les forces qui ſont proportionnelles à *CD*, *Od* demeureront dans la même raiſon qu'au commencement, & par conſéquent les corps continueront à décrire en même temps des arcs dans la même raiſon. Donc les forces, les vîteſſes, & les arcs reſtans *CD*, *Od* ſeront toujours comme les arcs entiers *CB*, *OB*, & par conſéquent les arcs reſtans ſeront décrits en même temps. C'eſt pourquoi deux corps *D* & *d* parviendront en même temps aux lieux *C* & *O*, l'un dans un milieu non réſiſtant au lieu *C*, & l'autre dans un milieu réſiſtant au lieu *O*. Mais les vîteſſes en *C* & en *O* étant comme les arcs *CB*, *OB*; les arcs

Du Mouvement des Corps.

que les corps décriront en même temps en avançant au-delà ſeront dans la même raiſon. Soient ces arcs CE & Oe. La force avec laquelle un corps D, dans un milieu non réſiſtant, eſt retardé en E eſt comme CE, & la force avec laquelle un corps d eſt retardé au point e dans un milieu réſiſtant eſt comme la ſomme de la force Ce & de la réſiſtance CO, c'eſt-à-dire, comme Oe; donc les forces qui retardent les corps ſont comme les petits arcs CE, Oe, leſquels ſont proportionnels aux arcs CB, OB; donc les vîteſſes & les arcs qu'elles font décrire ſont toujours dans cette même raiſon donnée des arcs CB & OB; & par conſéquent ſi on prend les arcs entiers AB, aB dans la même raiſon, les corps D & d décriront en même temps ces arcs, & perdront en même temps tout leur mouvement aux lieux A & a. Les oſcillations entieres ſont donc iſochrones, & les parties quelconques BD, Bd ou BE, Be des arcs qui ſont décrites en même temps ſont proportionnelles aux arcs entiers BA, Ba. *C. Q. F. D.*

Fig. 36.

Cor. Donc, ce n'eſt pas dans le point le plus bas C que le mouvement eſt le plus prompt dans un milieu qui réſiſte, mais dans le point O dans lequel l'arc total décrit aB eſt coupé en deux parties égales; & le corps en avançant enſuite vers a eſt retardé par les mêmes dégrés par leſquels il étoit accéléré auparavant en deſcendant de B en O.

PROPOSITION XXVI. THÉORÉME XXI.

Les corps ſuſpendus qui éprouvent une réſiſtance en raiſon des vîteſſes, & qui oſcillent dans des arcs de cycloïde, ont leurs oſcillations iſochrones.

Car ſi deux corps également diſtans des centres de ſuſpenſion décrivent, en oſcillant, des arcs inégaux, & que les vîteſſes dans les parties correſpondantes des arcs ſoient entr'elles comme les arcs entiers, les réſiſtances proportionnelles aux vîteſſes ſeront auſſi entr'elles comme ces mêmes arcs. Ainſi, ſi des forces motrices

qui ſont l'effet de la gravité, leſquelles ſont comme ces mêmes arcs, on ôte, ou on leur ajoute ces réſiſtances, les différences ou les ſommes ſeront entr'elles dans la même raiſon des arcs : or comme les incrémens, ou les décrémens des vîteſſes ſont comme ces différences ou ces ſommes, les vîteſſes ſeront toujours comme les arcs entiers ; donc ſi les vîteſſes ſont dans quelque cas comme les arcs entiers, elles demeureront toujours dans cette même raiſon. Mais dans le commencement du mouvement, où les corps commencent à deſcendre & à décrire ces arcs, les forces étant proportionnelles aux arcs produiront des vîteſſes qui ſeront auſſi proportionnelles à ces arcs ; donc les vîteſſes ſeront toujours comme les arcs entiers à décrire, & par conſéquent ces arcs ſeront décrits en même temps. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION XXVII. THÉOREME XXII.

Si les corps ſuſpendus à des fils éprouvent une réſiſtance en raiſon doublée des vîteſſes, les différences entre les temps des oſcillations dans un milieu réſiſtant, & les temps des oſcillations dans un milieu non réſiſtant de la même gravité ſpécifique, ſeront à peu près proportionnelles aux arcs décrits en oſcillant.

Car ſuppoſez que des pendules égaux décrivent dans un milieu réſiſtant des arcs inégaux A, B ; la réſiſtance que le corps éprouve dans l'arc A ſera à la réſiſtance qu'il éprouve dans la partie correſpondante de l'arc B, en raiſon doublée des vîteſſes, c'eſt-à-dire, comme AA à BB à peu près. Si la réſiſtance dans l'arc B étoit à la réſiſtance dans l'arc A comme AB à AA, les temps dans les arcs A & B ſeroient égaux, par la Propoſition précédente. Donc la réſiſtance AA dans l'arc A, ou la réſiſtance AB dans l'arc B produit l'excès du temps dans l'arc A ſur le temps dans un milieu non réſiſtant ; & la réſiſtance BB produit l'excès du temps dans l'arc B ſur le temps dans un milieu non réſiſtant. Et ces excès ſont comme les forces efficientes AB & BB à peu près, c'eſt-à-dire, comme les arcs A & B. *C. Q. F. D.* Fig. 36.

Cor. 1. Delà on peut connoître par les temps des oſcillations qui ſe font dans un milieu réſiſtant & dans des arcs inégaux, les temps des oſcillations dans un milieu non réſiſtant de la même gravité ſpécifique. Car la différence des temps ſera à l'excès du temps dans le plus petit arc ſur le temps dans un milieu non réſiſtant, comme la différence des arcs au plus petit arc.

Cor. 2. Plus les oſcillations ſont courtes, & plus elles ſont iſochrones, & celles qui ſont très-courtes ſe font à peu près dans les mêmes temps que ſi elles ſe faiſoient dans un milieu qui ne réſiſtât point. Mais les temps des oſcillations qui ſe font dans de plus grands arcs ſont un peu plus longs, à cauſe que la réſiſtance que le corps éprouve en deſcendant, par laquelle le temps eſt allongé, eſt plus grande, eu égard à la longueur parcourue en deſcendant, que la réſiſtance dans l'aſcenſion ſubſéquente, par laquelle réſiſtance le temps eſt diminué. Mais les temps des oſcillations tant les plus longues que les plus courtes, ſemblent être un peu augmentés par le mouvement du milieu; car le milieu réſiſte un peu moins aux corps retardés à raiſon de la vîteſſe, & un peu plus à ceux qui ſont accélérés qu'à ceux qui ſe meuvent uniformement : & cela, parce que le milieu, par le mouvement qu'il reçoit des corps en allant du même côté qu'eux, eſt plus agité dans le premier cas, & moins dans le ſecond; & que par conſéquent il conſpire plus ou moins avec le mouvement des corps. Il réſiſte donc plus aux pendules lorſqu'ils deſcendent, & moins lorſqu'ils remontent, à raiſon de la vîteſſe, & par ces deux cauſes le temps eſt allongé.

PROPOSITION XXVIII. THÉORÈME XXIII.

Si un pendule éprouve une réſiſtance en raiſon des momens du temps, lorſqu'il oſcille dans une cycloïde, cette réſiſtance ſera à la force de la gravité, comme l'excès de l'arc décrit dans ſa deſcenſion entiere ſur l'arc décrit dans l'aſcenſion ſubſéquente, eſt au double de la longueur du pendule.

Fig. 36. Que *B C* repréſente l'arc décrit dans la deſcenſion, *C a* l'arc

décrit dans l'aſcenſion, & Aa la différence de ces arcs ; & en ſuppoſant les conſtructions & les démonſtrations de la Prop. 25. la force qui preſſera le corps oſcillant, ſera dans un lieu quelconque D à la force de la réſiſtance, comme l'arc CD à l'arc CO, moitié de cette différence Aa. Donc la force qui preſſe le corps oſcillant dans la naiſſance de la cycloïde, ou dans le point le plus haut, c'eſt-à-dire, la force de la gravité, ſera à la réſiſtance, comme l'arc de cycloïde, entre le point le plus haut & le point le plus bas C, eſt à l'arc CO, c'eſt-à-dire, (ſi on double ces arcs) comme l'arc de toute la cycloïde, ou la double longueur du pendule à l'arc Aa. *C. Q. F. D.* Fig. 36.

PROPOSITION XXIX. PROBLÉME VI.

Suppoſé qu'un corps qui oſcille dans une cycloïde éprouve une réſiſtance en raiſon doublée de la vîteſſe ; trouver la réſiſtance à chacun des lieux.

Soit Ba l'arc décrit pendant une oſcillation entiere, C le point le plus bas de la cycloïde, & CZ la moitié de l'arc de la cycloïde entiere égale à la longueur du pendule, & qu'on cherche la réſiſtance que le corps éprouve dans un lieu quelconque D. Soit coupée la droite infinie OQ dans les points O, S, P, Q, ſelon cette loi, que (ſi on éleve les perpendiculaires OK, ST, PI, QE, & que du centre O, on décrive l'hyperbole $TIGE$ qui coupe les perpendiculaires ST, PI, QE en T, I & E, & dont les aſymptotes ſoient OK, OQ ; & que par le point I on tire KF parallele à l'aſymptote OQ & rencontrant l'aſymptote OK en K & les perpendiculaires ST, QE en L & F) l'aire hyperbolique $PIEQ$, ſoit à l'aire hyperbolique $PITS$, comme l'arc BC décrit dans la deſcenſion du corps, à l'arc Ca décrit dans ſon aſcenſion, & que l'aire IEF ſoit à l'aire ILT comme OQ à OS. Enſuite ſoit coupée par la perpendiculaire MN l'aire hyperbolique $PINM$ qui ſoit à l'aire hyperbolique $PIEQ$ comme l'arc CZ à l'arc BC décrit dans la deſcenſion. Si la perpendiculaire RG Fig. 37. & 38.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

coupe l'aire hyperbolique $PIGR$ qui ſoit à l'aire $PIEQ$ comme l'arc quelconque CD à l'arc BC décrit pendant la deſcenſion entiere ; la réſiſtance au lieu D ſera à la force de la gravité comme l'aire $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ à l'aire $PINM$.

Fig. 37. & 38.

Car comme les forces venant de la gravité par leſquelles le corps eſt preſſé dans les lieux Z, B, D, a ſont comme les arcs CZ, CB, CD, Ca, & que ces arcs ſont comme les aires $PINM, PIEQ, PIGR, PITS$; ſoient exprimées reſpectivement par ces aires tant les arcs que les forces. Soit de plus Dd le très-petit eſpace décrit par le corps en deſcendant, lequel ſoit repréſenté par l'aire très-petite $RGgr$ compriſe entre les paralleles RG, rg ; & ſoit prolongée rg en h, enſorte que $GHhg$ & $RGgr$ ſoient les décrémens contemporains des aires IGH, $PIGR$. Et l'incrément $GHhg - \frac{Rr}{OQ} IEF$, ou $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ} IEF$ de l'aire $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$, ſera au décrément $RGgr$ ou $Rr \times RG$ de l'aire $PIGR$, comme $HG - \frac{IEF}{OQ}$ à RG ; & par conſéquent comme $OR \times HG - \frac{OR}{OQ} IEF$ à $OR \times GR$ ou $OP \times PI$, c'eſt-à-dire, (à cauſe des quantités égales $OR \times HG$, $OR \times HR - OR \times GR$, $OR HK - OPIK$, $PIHR$ & $PIGR + IGH$) comme $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ} IEF$ à $OPIK$. Donc, ſi on appelle Y l'aire $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ & que le décrément $RGgr$ de l'aire $PIGR$ ſoit donné, l'incrément de l'aire Y ſera comme $PIGR - Y$.

Que ſi V repréſente la force de la gravité proportionnelle à l'arc CD à décrire, par laquelle force le corps eſt preſſé en D, & que l'on appelle la réſiſtance R ; $V - R$ ſera la force totale par laquelle le corps eſt preſſé en D. L'incrément de la vîteſſe

eſt

eſt donc comme $V-R$ & comme la particule de temps dans laquelle il ſe fait conjointement : mais cette vîteſſe elle-même eſt directement comme l'incrément de l'eſpace décrit en même temps, & inverſement comme cette même particule de temps. Ainſi la réſiſtance étant, par l'hypotèſe, comme le quarré de la vîteſſe, l'incrément de la réſiſtance (par le Lemme 2.) ſera comme la vîteſſe & comme l'incrément de la vîteſſe conjointement, c'eſt-à-dire, comme le moment de l'eſpace & $V-R$ conjointement ; & par conſéquent, ſi le moment de l'eſpace eſt donné, comme $V-R$, c'eſt-à-dire, comme $PIGR-Z$, en écrivant pour la force V la quantité qui l'exprime $PIGR$, & en exprimant la réſiſtance R par quelqu'autre aire Z. Fig. 37. & 38.

Donc, l'aire $PIGR$ décroiſſant uniformement par la ſouſtraction des momens donnés, l'aire Y croîtra dans la raiſon de $PIGR-Y$, & l'aire Z dans la raiſon de $PIGR-Z$. Et par conſéquent, ſi les aires Y & Z commencent en même temps, & qu'elles ſoient égales vers leur commencement, elles continueront à être égales par l'addition des momens égaux, & décroiſſant enſuite par des momens égaux, elles s'évanouiront en même temps. Et réciproquement, ſi elles commencent & s'évanouiſſent en même temps, elles auront des momens égaux, & ſeront toujours égales : & cela parce que ſi la réſiſtance Z augmente, la vîteſſe diminue auſſi avec l'arc Ca que le corps décrit dans ſon aſcenſion ; & le point dans lequel tout le mouvement ainſi que toute la réſiſtance ceſſe en s'approchant davantage du point C, la réſiſtance s'évanouira plutôt que l'aire Y. Et le contraire arrivera ſi la réſiſtance diminue.

Or comme l'aire Z commence & finit où la réſiſtance eſt nulle, c'eſt-à-dire, dans le commencement du mouvement, où l'arc CD égale l'arc CB, & où la droite RG tombe ſur la droite QE, & à la fin du mouvement où l'arc CD égale l'arc CA, & où la droite RG tombe ſur la droite ST. L'aire Y ou $\frac{OR}{OQ}IEF-IGH$ commence & finit lorſqu'elle eſt nulle, c'eſt-à-dire, lorſque

$\frac{OR}{OQ}$ *IEF* & *IGH* ſont égales, c'eſt-à-dire, (par la conſtruction) lorſque la droite *RG* tombe ſucceſſivement ſur les droites *QE* & *ST*. Donc ces aires commencent & s'évanouiſſent en même temps, & par conſéquent elles ſont toujours égales. Donc l'aire $\frac{OR}{OQ}$ *IEF*—*IGH* eſt égale à l'aire *Z*, qui repréſente la réſiſtance, & par conſéquent elle eſt à l'aire *PINM*, qui repréſente la gravité, comme la réſiſtance à la gravité. *C. Q. F. D.*

Fig. 37. & 38.

Cor. 1. La réſiſtance eſt donc à la gravité dans le lieu le plus bas *C*, comme l'aire $\frac{OP}{OQ}$ *IEF* à l'aire *PINM*.

Cor. 2. Et elle devient la plus grande lorſque l'aire *PIHR* eſt à l'aire *IEF* comme *OR* à *OQ*. Car, dans ce cas, ſon moment (c'eſt-à-dire, *PIGR*—*Y*) devient nul.

Cor. 3. On connoît auſſi par-là la vîteſſe à chacun des lieux : car elle eſt en raiſon ſouſdoublée de la réſiſtance, & au commencement du mouvement elle eſt égale à la vîteſſe du corps qui oſcilleroit dans la même cycloïde ſans éprouver de réſiſtance.

Au reſte, à cauſe que le calcul par le moyen duquel on peut trouver par cette Propoſition la vîteſſe & la réſiſtance eſt très-difficile, j'ai cru qu'il étoit à propos d'ajouter la Propoſition ſuivante.

PROPOSITION XXX. THÉORÉME XXIV.

Fig. 39. *Si la droite* aB *eſt égale à l'arc de cycloïde que le corps décrit en oſcillant, & qu'à chacun de ſes points* D *on éleve des perpendiculaires* DK *qui ſoient à la longueur du pendule comme la réſiſtance que le corps éprouve dans les points correſpondans de l'arc eſt à la force de la gravité : je dis que la différence entre l'arc décrit dans toute la deſcenſion & l'arc décrit dans toute l'aſcenſion ſubſéquente, multipliée par la moitié de la ſomme de ces mêmes*

arcs, ſera égale à l'aire BK a, *déterminée par toutes les perpendiculaires* D K.

Fig. 39.

Car ſoit repréſenté, tant l'arc de cycloïde décrit dans une oſcillation entiere par la droite *a B* qui lui eſt égale, que l'arc qui ſeroit décrit dans le vuide par la longueur *A B*. Soit coupée *A B* en deux parties égales au point *C*, ce point *C* repréſentera le point le plus bas de la cycloïde, & *C D* ſera comme la partie de la force de la gravité par laquelle le corps eſt preſſé en *D* ſuivant la tangente de la cycloïde, & elle aura la même raiſon à la longueur du pendule que la force en *D* à la force de la gravité. Soit donc repréſentée cette force par la longueur *C D* & la force de la gravité par la longueur du pendule, ſi on prend *D K* ſur *D E* qui ſoit à la longueur du pendule dans la raiſon de la réſiſtance à la gravité, *D K* exprimera la réſiſtance. Du centre *C* & de l'intervale *C A* ou *C B* ſoit tracé le demi cercle *B E e A*. Que le corps décrive dans un eſpace de temps très-petit l'eſpace *D d*, ayant élevé les perpendiculaires *D E*, *de*, qui rencontrent la circonférence en *E* & en *e*, elles ſeront comme les vîteſſes que le corps, en deſcendant dans le vuide, acquéreroit aux lieux *D* & *d*. Ce qui eſt clair (par la Prop. 52. Liv. 1.) Soient ces vîteſſes exprimées par les perpendiculaires *D E*, *de*; & ſoit *DF* la vîteſſe que le corps acquiert en *D* en tombant de *B* dans un milieu réſiſtant. Si du centre *C* & de l'intervalle *CF* on décrit le cercle *F f M* qui rencontre les droites *de* & *A B* en *f* & *M*, *M* ſera le lieu auquel il monteroit enſuite s'il n'éprouvoit point de réſiſtance ultérieure, & *df* ſeroit la vîteſſe qu'il acquéreroit en *d*. Donc, ſi *Fg* repréſente le moment de la vîteſſe que le corps *D* perd en parcourant le très-petit eſpace *D d* par la réſiſtance du milieu; & qu'on prenne *CN=cg*; *N* ſera le lieu auquel le corps remonteroit enſuite s'il n'éprouvoit point de réſiſtance ultérieure, & *MN* ſera le décrément de l'aſcenſion produit par la diminution de cette vîteſſe. Abbaiſſant *Fm* perpendiculairement ſur *df*, le décrément *Fg* de la vîteſſe *D F* cauſé par la réſiſtance *D K* ſera

Du Mouvement des Corps.

à l'incrément fm de cette même vîteſſe produit par la force CD comme la force génératrice DK à la force génératrice CD. Mais à cauſe des triangles ſemblables Fmf, Fhg, FDC, on a $fm:Fm$ ou $Dd::CD:DF$; & par conſéquent, $Fg:Dd::DK:DF$. Et auſſi $Fh:Fg::DF:CF$; & par conſéquent, Fh ou $MN:Dd::DK:CF$ ou CM. Donc la ſomme de toutes les $MN\times CM$ ſera égale à la ſomme de toutes les $Dd\times DK$. Au point mobile M ſoit toujours ſuppoſé une ordonnée élevée à angle droit, égale à l'indéterminée CM, laquelle parcoure par un mouvement continu toute la ligne Aa; & le trapeze décrit par ce mouvement ou le rectangle $Aa\times\frac{1}{2}aB$ qui lui eſt égal ſera toujours égal à la ſomme de toutes les $MN\times CM$, & par conſéquent à la ſomme de toutes les $Dd\times DK$, c'eſt-à-dire, à l'aire $BKVTa$. *C. Q. F. D.*

Fig. 39.

Cor. Ainſi on peut connoître à peu près par la loi de la réſiſtance & par la différence Aa des arcs Ca, CB la proportion de la réſiſtance à la gravité.

Car ſi la réſiſtance DK eſt uniforme, la figure $BKTa$ ſera un rectangle ſous Ba & DK; & delà, le rectangle ſous $\frac{1}{2}Ba$ & Aa ſera égal au rectangle ſous Ba & DK, & DK ſera égal à $\frac{1}{2}Aa$; c'eſt pourquoi, comme DK repréſente la réſiſtance, & que la longueur du pendule repréſente la gravité, la réſiſtance ſera à la gravité comme $\frac{1}{2}Aa$ à la longueur du pendule; ce qui eſt entierement conforme à ce qui a été démontré dans la Prop. 28.

Si la réſiſtance eſt comme la vîteſſe, la figure $BKTa$ ſera à peu près une ellipſe. Car ſi le corps dans un milieu non réſiſtant décrivoit dans une oſcillation entiere la longueur AB, la vîteſſe dans un lieu quelconque D ſeroit comme le diametre AB du cercle décrit, dont DE eſt l'ordonnée. Donc, comme BA dans un milieu réſiſtant, & Ba dans un milieu non réſiſtant, ſont décrites en temps égaux à peu près; & que les vîteſſes à chacun des points de la longueur Ba ſont aux vîteſſes dans les points correſpondans de la lon-

gueur BA, comme Ba à BA; la vîteſſe au point D dans un milieu réſiſtant ſera comme l'ordonnée du cercle ou de l'ellipſe décrits ſur le diametre aB; donc la figure $BKVTa$ ſera une élipſe à peu près. Comme la réſiſtance eſt ſuppoſée proportionnelle à la vîteſſe, ſi OV repréſente la réſiſtance dans le point du milieu O; l'ellipſe $BRVSa$ décrite du centre O, & avec les diametres OB, OV ſera égale à peu près à la figure $BKVTa$, & au rectangle $Aa \times BO$ qui lui eſt égal. Donc $Aa \times BO$ eſt à $OV \times BO$ comme l'aire de cette ellipſe eſt à $OV \times BO$: c'eſt-à-dire, que Aa eſt à OV, comme l'aire du demi cercle au quarré du rayon, ou comme 11 à 7 environ : & par conſéquent $\frac{7}{11}Aa$ ſeront à la longueur du pendule comme la réſiſtance qu'éprouve en O le corps oſcillant eſt à ſa gravité. Fig. 39.

Que ſi la réſiſtance DK eſt en raiſon doublée de la vîteſſe, la figure $BKVTa$ ſera preſque une parabole dont le ſommet ſera V & l'axe OV, donc elle ſera égale à peu près au rectangle $\frac{2}{3}Ba \times OV$. Mais le rectangle $\frac{1}{2}Ba \times Aa$ eſt égal au rectangle $\frac{2}{3}Ba \times OV$, donc $OV = \frac{3}{4}Aa$: & par conſéquent la réſiſtance qu'éprouve en O le corps oſcillant eſt à ſa propre gravité comme $\frac{3}{4}Aa$ à la longueur du pendule.

Je penſe que ces concluſions ſont aſſez éxactes pour la pratique. Car lorſque l'ellipſe ou la parabole $BRVSa$ coïncide avec la figure $BRVTa$ dans le point du milieu V, ſi elle la ſurpaſſe vers l'un ou l'autre côté BRV ou VSa elle en eſt ſurpaſſée vers le côté oppoſé, ce qui les rend égales à peu près.

PROPOSITION XXXI. THÉORÉME XXV.

Si la réſiſtance que le corps qui oſcille éprouve à chaque partie proportionnelle des arcs décrits augmente ou diminue dans une raiſon donnée ; la différence entre l'arc décrit dans la deſcenſion & l'arc décrit dans l'aſcenſion ſubſéquente augmentera ou diminuera dans la même raiſon. Fig. 39.

Car cette différence vient de la retardation qu'éprouve le pendule par la réſiſtance du milieu, ainſi elle eſt comme toute la

Du Mouvement des Corps.

retardation & comme la réſiſtance retardative qui lui eſt proportionnelle.

Fig. 39.

Dans la Propoſition précédente le rectangle ſous la droite $\frac{1}{2}aB$ & la différence Aa de ces arcs CB, Ca étoit égale à l'aire $BTKa$. Cette aire, ſi la longueur aB reſte la même, augmentera ou diminuera dans la raiſon des ordonnées DK; c'eſt-à-dire, en raiſon de la réſiſtance; elle eſt donc comme la longueur aB & comme la réſiſtance conjointement. Donc le rectangle ſous Aa & $\frac{1}{2}aB$ eſt comme aB & comme la réſiſtance conjointement, & par conſéquent Aa eſt comme la réſiſtance, *C. Q. F. D.*

Cor. 1. D'où, ſi la réſiſtance eſt comme la vîteſſe, la différence des arcs dans le même milieu ſera comme l'arc entier décrit: & réciproquement.

Cor. 2. Si la réſiſtance eſt en raiſon doublée de la vîteſſe, cette différence ſera en raiſon doublée de l'arc entier: & réciproquement.

Cor. 3. Et généralement, ſi la réſiſtance eſt en raiſon triplée, ou dans une autre raiſon quelconque de la vîteſſe, la différence ſera dans la même raiſon de l'arc entier: & réciproquement.

Cor. 4. Et ſi la réſiſtance eſt en partie en raiſon ſimple de la vîteſſe, & en partie en raiſon doublée de cette même vîteſſe, la différence ſera en partie dans la raiſon de l'arc total, & en partie en raiſon doublée de ce même arc: & réciproquement. Ce ſera la même loi & la même raiſon de réſiſtance par rapport à la vîteſſe que celle de cette différence par rapport à la longueur de l'arc.

Cor. 5. Donc le pendule décrivant ſucceſſivement des arcs inégaux, ſi on peut trouver la proportion de l'incrément & du décrément de cette différence relativement à la longueur de l'arc décrit, on aura la raiſon de l'incrément & du décrément de la réſiſtance relativement à la vîteſſe plus ou moins grande.

SCHOLIE GÉNÉRALE.

On peut trouver par le moyen de ces Propoſitions la réſiſtance de toutes ſortes de milieux lorſqu'on connoît les oſcillations des pendules dans ces milieux. J'ai trouvé, par exemple, la réſiſtance de l'air par les expériences ſuivantes.

Je ſuſpendis par un fil très-délié à un crochet aſſez ferme un globe de bois du poids de $57\frac{7}{12}$ onces romaines, & dont le diametre étoit de $6\frac{7}{8}$ pouces anglois, enſorte qu'entre le crochet & le centre d'oſcillation du globe il y avoit une diſtance de $10\frac{1}{2}$ pieds; je marquai ſur le fil un point éloigné de 10 pieds & un pouce du centre de ſuſpenſion; & je plaçai vis-à-vis de ce point une régle partagée en pouces, par le moyen deſquels je marquois la longueur des arcs décrits par le pendule. Enſuite je comptai les oſcillations dans leſquelles le globe perdoit la huitieme partie de ſon mouvement. Si le pendule étoit écarté de la verticale à la diſtance de 2 pouces, & qu'enſuite on le laiſſât tomber, enſorte qu'il décrivît en deſcendant un arc de deux pouces, & que dans ſa premiere oſcillation entiere compoſée de cette deſcenſion & de l'aſcenſion ſubſéquente, il parcourut un arc d'environ quatre pouces; ce pendule en 164 oſcillations perdoit la huitieme partie de ſon mouvement, enſorte qu'à la derniere chute il décrivoit ſeulement un arc de $1\frac{3}{4}$ de pouces. S'il parcouroit 4 pouces dans ſa premiere chute il perdoit la huitieme partie de ſon mouvement en 121 oſcillations, enſorte que dans ſa derniere aſcenſion il ne décrivoit plus qu'un arc de $3\frac{1}{2}$ pouces. Si dans ſa premiere chute il avoit parcouru un arc de 8, 16, 32, ou 64 pouces, il perdoit la huitieme partie de ſon mouvement en 69, $35\frac{1}{2}$, $18\frac{1}{2}$, $9\frac{2}{3}$ oſcillations reſpectivement. Donc la différence entre les arcs décrits dans la premiere deſcenſion & dans la derniere aſcenſion étoit, dans le premier cas, dans le ſecond, dans le troiſieme, dans le quatrieme, dans le cinquieme & dans le ſixieme, de $\frac{1}{4}$,

$\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 pouces reſpectivement. En diviſant ces différences par le nombre des oſcillations faites dans chacun de ces cas, on trouvera que dans une des oſcillations moyennes dans leſquelles des arcs de $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 pouces ont été décrits, les différences entre l'arc deſcendu & l'arc ſubſéquent remonté, ſeront $\frac{1}{656}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{69}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{37}$, $\frac{24}{29}$ parties de pouces reſpectivement. Mais ces différences, dans les plus grandes oſcillations, ſont en raiſon doublée des arcs décrits à peu prés, & dans les plus petites elles ſont un peu plus grandes que dans cette raiſon & par conſéquent, (par le Cor 2. de la Prop. 31. de ce Livre) la réſiſtance de ce globe lorſqu'il ſe meut le plus vîte eſt à peu près en raiſon doublée de la vîteſſe; & lorſqu'il ſe meut le plus lentement elle eſt un peu plus grande que dans cette raiſon.

A préſent que V repréſente la plus grande vîteſſe dans une oſcillation quelconque, & que A, B, C ſoient des quantités données, & que la différence des arcs ſoit $AV+BV^{\frac{3}{2}}+CV^2$. Puiſque les plus grandes vîteſſes dans une cycloïde ſont comme la moitié des arcs décrits en oſcillant, & que dans le cercle elles ſont comme les cordes de la moitié de ces arcs; elles ſont donc plus grandes dans la cycloïde que dans le cercle, lorſque les arcs décrits ſont égaux, & cela dans la raiſon de la moitié de ces arcs à leurs cordes; mais les temps ſont plus longs dans le cercle que dans la cycloïde, en raiſon réciproque de la vîteſſe; ainſi il eſt clair que les différences des arcs (qui ſont comme la réſiſtance, & le quarré du temps conjointement) ſont à peu prés les mêmes dans l'une & l'autre courbe: car dans la cycloïde ces différences devroient augmenter avec la réſiſtance en raiſon doublée à peu près de l'arc à la corde, puiſque la vîteſſe eſt augmentée dans cette raiſon ſimple, & elles devroient diminuer, ainſi que le quarré des temps, dans cette même raiſon doublée. Donc pour faire la réduction à la cycloïde, il faut prendre les mêmes différences des arcs que celles qui ont été obſervées dans le

le cercle, & ſuppoſer les plus grandes vîteſſes proportionnelles aux arcs entiers, ou à leurs moitiés, c'eſt-à-dire aux nombres $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 & 16. Ecrivant donc dans le ſecond, le quatriéme & le ſixiéme cas les nombres 1, 4 & 16, au lieu de V, nous aurons $\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$ pour la différence des arcs dans le ſecond cas; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$ dans le quatriéme; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$ dans le ſixiéme. On tire de ces équations par la réduction & la comparaiſon qu'exige l'analyſe $A = 0$, 0000916, $B = 0$, 0010847, & $C = 0$, 0029558. La différence des arcs eſt donc comme 0, 0000916 V + 0, 0010847 $V^{\frac{3}{2}}$ + 0, 0029558 V^2: & par conſéquent, comme (par le Cor. de la Prop. 30. appliqué à ce cas) la réſiſtance qu'éprouve le globe au milieu de l'arc décrit en oſcillant (auquel point la vîteſſe eſt V) eſt à ſon poids, comme $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ eſt à la longueur du pendule; ſi au lieu de A, B & C, on écrit les nombres trouvés, la réſiſtance que le globe éprouvera ſera à ſon poids comme 0, 0000583 V + 0, 0007593 $V^{\frac{3}{2}}$ + 0, 0022169 V^2 eſt à la longueur du pendule entre le centre de ſuſpenſion & la regle, c'eſt-à-dire, à 121 pouces. D'où, comme V dans le ſecond cas repréſente 1, dans le quatriéme 4, & dans le ſixiéme 16: la réſiſtance ſera au poids du globe dans le ſecond cas, comme 0, 0030345 à 121; dans le quatriéme comme 0, 041748 à 121 & dans le ſixiéme comme 0, 61705 à 121.

L'arc, que le point marqué ſur le fil décrivoit étoit dans le ſixiéme cas de $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ ou $119\frac{1}{29}$ pouces. Et par conſéquent, comme le rayon étoit de 121 pouces, & la longueur du pendule entre le point de ſuſpenſion & le centre du globe de 126 pouces, l'arc que le centre du globe décrivoit étoit de $124\frac{5}{31}$ pouces. Mais comme la plus grande vîteſſe du corps oſcillant, à cauſe de la réſiſtance de l'air, ne ſe trouve pas dans le point le

plus bas de l'arc décrit, mais à peu près dans le milieu de l'arc total : elle ſera à peu près la même que ſi le globe avoit décrit dans ſa chute entiere dans un milieu non réſiſtant la moitié $62\frac{3}{62}$ pouces de cet arc, & cela, dans une cycloïde à laquelle nous avons réduit ci-deſſus le mouvement du pendule : & par conſéquent, cette vîteſſe ſera égale à la vîteſſe que le globe pourroit acquérir en tombant perpendiculairement de la hauteur du ſinus verſe de cet arc. Mais dans une cycloïde, ce ſinus verſe eſt à cet arc de $62\frac{3}{62}$ pouces, comme ce même arc à la double longueur du pendule qui eſt de 252 pouces, & il eſt par conſéquent de 15, 278 pouces. Donc cette vîteſſe eſt celle que le corps peut acquérir en tombant lorſqu'il parcourt dans ſa chute un eſpace de 15, 278 pouces. Avec une telle viteſſe le corps éprouve une réſiſtance qui eſt à ſon poids comme 0, 61705 à 121, ou (ſi on fait attention ſeulement à cette partie de la réſiſtance qui eſt en raiſon doublée de la vîteſſe) comme 0, 56752 à 121.

J'ai trouvé par une expérience d'hydroſtatique que le poids d'un globe de bois étoit au poids d'un globe d'eau de même volume comme 55 à 97 : par conſéquent 121 eſt à 213, 4 dans la même raiſon, ainſi la réſiſtance du globe d'eau, mû avec la vîteſſe dont on a parlé, ſera à ſon poids comme 0, 56752 à 213, 4, c'eſt-à-dire, comme 1 à $376\frac{1}{10}$. Ainſi, comme le poids du globe d'eau, dans le temps que le globe décrit une longueur de 30, 556 pouces avec une vîteſſe uniformement continuée, pourroit produire cette même vîteſſe dans le globe tombant, il eſt clair que la force de la réſiſtance continuée uniformement pendant ce temps peut ôter une vîteſſe qui ſera moindre dans la raiſon de 1 à $376\frac{1}{10}$, c'eſt-à-dire, qui ſera la $\frac{1}{376\frac{1}{10}}$ partie de la vîteſſe totale. Et par conſéquent, ce globe, dans le temps dans lequel il pourroit parcourir par une vîteſſe uniformement continuée la longueur de ſon demi diamétre, ou $3\frac{7}{16}$ pouces perdroit la $\frac{1}{3342}^{e}$ partie de ſon mouvement.

Je comptai auſſi les oſcillations dans leſquelles le pendule perdoit la quatriéme partie de ſon mouvement. Dans la table ſuivante, les chiffres d'en-haut marquent la longueur de l'arc décrit dans ſa premiere chute, exprimée en pouces & en parties de pouces : les chiffres du milieu marquent la longueur de l'arc décrit dans la derniere aſcenſion ; & le nombre des oſcillations eſt marqué par les chiffres d'en-bas. J'ai décrit cette expérience comme la plus exacte qui ait été faite, puiſqu'il y eſt marqué comment le pendule perdoit la huitiéme partie de ſon mouvement. J'en laiſſe le calcul à faire à ceux qui voudront le tenter.

Premiere chute.	2	4	8	16	32	64
Derniere aſcenſion.	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Nombre des oſcillations.	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{3}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Enſuite, je ſuſpendis au même fil un globe de plomb de deux pouces de diamétre, & du poids de $26\frac{1}{4}$ onces romaines, enſorte qu'entre le centre du globe & le point de ſuſpenſion il y avoit un intervalle de $10\frac{1}{2}$ pieds, & je comptai les oſcillations dans leſquelles il perdit une partie donnée de ſon mouvement. Dans les tables ſuivantes, la premiere marque le nombre des oſcillations dans leſquelles il perdit la huitiéme partie de ſon mouvement total, & la ſeconde le nombre des oſcillations dans leſquelles il en perdit la quatriéme partie.

PREMIERE TABLE.

Premiere chute.	1	2	4	8	16	32	64
Derniere aſcenſion.	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
Nombre des oſcillations.	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

SECONDE TABLE.

Premiere chute.	1	2	4	8	16	32	64
Derniere aſcenſion.	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
Nombre des oſcillations.	510	518	420	318	204	121	70

En prenant dans la premiere table, la troiſiéme, la cinquiéme & la ſeptiéme obſervation, & repréſentant les plus grandes vîteſſes dans ces obſervations en particulier, par les nombres 1, 4, 16, reſpectivement, & en général par la quantité V comme ci-deſſus : on aura, dans la troiſiéme obſervation $\frac{\frac{1}{2}}{193} = A + B + C$, dans la cinquiéme $\frac{2}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, dans la ſeptiéme $\frac{8}{30} = 16A + 64B + 256C$. Et ces équations réduites donnent $A = 0,001414$; $B = 0,000297$; $C = 0,000879$, d'où l'on tire que la réſiſtance du globe mu avec la vîteſſe V eſt dans la même raiſon à ſon poids, qui étoit de $26\frac{1}{4}$ onces ; que, $0,0009\ V + 0,000208\ V^{\frac{3}{2}} + 0,000659\ V^2$ à la longueur du pendule qui eſt de 121 pouces. Et ſi l'on conſidere ſeulement cette partie de la réſiſtance qui eſt en raiſon doublée de la vîteſſe, elle ſera au poids du globe comme $0,000659\ V^2$ eſt à 121 pouces. Mais cette partie de la réſiſtance étoit dans la premiere expérience au poids du globe de bois qui étoit de $57\frac{7}{22}$ onces ; comme $0,002217\ V^2$ à 121 : & delà on tire la réſiſtance du globe de bois à la réſiſtance du globe de plomb (leurs vîteſſes étant les mêmes) comme $57\frac{7}{22} \times 0,002217$ à $26\frac{1}{4} \times 0,000659$, c'eſt-à-dire, comme $7\frac{1}{3}$ à 1. Les diamétres de ces deux globes étoient $6\frac{7}{8}$ & 2 pouces, dont les quarrés ſont l'un à l'autre comme $47\frac{1}{4}$ & 4, ou $11\frac{13}{16}$ & 1 à peu près. Donc, les réſiſtances des globes qui ont la même vîteſſe, ſeront dans une moindre raiſon que la raiſon doublée des diamétres. Mais nous n'avons pas encore conſidéré la réſiſtance du fil, qui certainement étoit aſſez conſidérable, & qui doit être ſouſtraite de la réſiſtance trouvée des pendules. Je n'ai pu la déterminer exactement, mais cependant je l'ai trouvée plus grande que la troiſiéme partie de la réſiſtance du plus petit pendule entier ; & par-là j'ai connu que les réſiſtances des globes, ôtant la réſiſtance du fil, ſont à peu près en raiſon doublée des diamé-

tres. Car la raiſon de $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ à $1 - \frac{1}{3}$ ou de $10\frac{1}{2}$ à 1 ne s'éloigne pas beaucoup de la raiſon doublée des diamétres qui eſt celle de $11\frac{13}{16}$ à 1.

Comme la réſiſtance du fil eſt moins remarquable dans les plus grands globes, j'ai eſſayé auſſi cette expérience avec un globe dont le diamétre étoit de $18\frac{3}{4}$ pouces. La longueur du pendule entre le point de ſuſpenſion & le centre d'oſcillation étoit de $122\frac{1}{2}$ pouces, & entre le point de ſuſpenſion & le nœud fait dans le fil de $109\frac{1}{2}$ pouces. L'arc décrit par le nœud du pendule dans ſa premiere chute étoit de 32 pouces, & celui de ſa derniere aſcenſion décrit par le même nœud, étoit après cinq oſcillations, de 28 pouces. La ſomme de ces arcs, ou l'arc total décrit dans une oſcillation moyenne étoit de 60 pouces. La différence de ces arcs étant de 4 pouces, ſa dixieme partie, ou la différence entre l'aſcenſion & la deſcenſion étoit de $\frac{2}{5}$ de pouce dans une oſcillation moyenne. Comme le rayon $109\frac{1}{2}$ eſt au rayon $122\frac{1}{2}$ ainſi l'arc total de 60 pouces décrit dans une oſcillation moyenne par le nœud, eſt à l'arc total de $67\frac{1}{8}$ pouces décrit par le centre du globe dans une oſcillation moyenne; & comme la différence $\frac{2}{5}$ eſt à la nouvelle différence 0, 4475. Si on augmentoit la longueur du pendule dans la raiſon de 126 à $122\frac{1}{2}$, la longueur de l'arc décrit reſtant la même, le temps d'oſcillation augmenteroit & la vîteſſe du pendule diminueroit dans cette raiſon ſousdoublée, mais la différence 0, 4475 des arcs décrits dans l'aſcenſion & la deſcenſion ſubſéquente reſteroit la même. Enſuite, ſi l'arc décrit augmentoit en raiſon de $124\frac{3}{31}$ à $67\frac{1}{8}$ cette différence 0, 4475 augmenteroit dans cette raiſon doublée, & par conſéquent elle deviendroit 1, 295. Tout ceci auroit lieu, en ſuppoſant la réſiſtance du pendule en raiſon doublée de la vîteſſe. Donc, ſi le pendule décrivoit un arc total de $124\frac{3}{31}$ pouces, & que ſa longueur entre le point de ſuſpenſion & le centre d'oſcillation fut de 126 pouces, la différence des arcs décrits dans la deſcenſion, & l'aſcenſion ſubſéquente ſeroit de 1, 5295 pouces. Et cette dif-

férence multipliée par le poids du globe qui forme le pendule lequel étoit de 208 onces, donne 318, 136. De plus, lorſque le centre d'oſcillation du pendule de bois, dont on a parlé ci-deſſus, étoit diſtant de 126 pouces du point de ſuſpenſion, il décrivoit un arc total de $124\frac{3}{31}$ pouces, & la différence des arcs décrits dans la deſcenſion & l'aſcenſion ſubſéquente étoit $\frac{126}{121} \times \frac{8}{9\frac{2}{3}}$, qui étant multipliée par le poids du globe qui étoit de $57\frac{7}{22}$ donnoit 49, 396. J'ai multiplié ces différences par les poids des globes afin de trouver leurs réſiſtances. Car ces différences viennent des réſiſtances, ainſi, elles ſont comme les réſiſtances directement & comme les poids inverſement. Ces réſiſtances ſont donc comme les nombres 318, 136 & 49, 396. Mais la partie de la réſiſtance du plus petit globe laquelle eſt en raiſon doublée de la vîteſſe, étoit à la réſiſtance totale, comme 0, 56752 à 0, 61675, c'eſt-à-dire, comme 45, 453, à 49, 396; & la partie de la réſiſtance du plus grand globe eſt preſque égale à toute ſa réſiſtance; donc ces parties ſont comme 318, 136 & 45, 453 à peu près, c'eſt-à-dire, comme 7 à 1. Or les diamétres des globes ſont $18\frac{3}{4}$ & $6\frac{7}{8}$ dont les quarrés $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ ſont comme 7, 438 & 1, c'eſt-à-dire, à peu près, comme les réſiſtances 7 & 1 des globes. La différence des raiſons eſt plus grande que celle qui peut venir de la réſiſtance du fil. Donc les parties de ces réſiſtances qui ſont, dans des globes égaux, comme les quarrés des vîteſſes; ſont auſſi, les vîteſſes étant égales, comme les quarrés des diamétres des globes.

Au reſte, le plus grand des globes dont je me ſuis ſervi dans ces expériences n'étoit pas parfaitement ſphérique, & par cette raiſon, dans le calcul que je viens de rapporter, j'ai négligé, afin d'être plus court, quelques fractions trop petites; ne m'embarraſſant pas beaucoup de faire un calcul rigoureux, dans une expérience dont l'exactitude n'étoit pas pouſſée aſſez loin. Je ſouhaiterois cependant, à cauſe que la démonſtration du vuide dé-

pend de ces expériences, qu'on les fit plus exactement, ſur une plus grande quantité, & avec de plus grands globes. Si on prend des globes en proportion géométrique, c'eſt-à-dire, dont les diamétres ſoient de 4, 8, 16, 32 pouces; on pourra connoître par la progreſſion des expériences ce qui doit arriver dans de plus grands globes.

Pour comparer les réſiſtances des différens fluides entr'eux, j'ai tenté les expériences ſuivantes. J'ai fait un petit vaiſſeau de bois, long de quatre pieds, haut & large d'un pied, j'ai rempli ce vaiſſeau d'eau de fontaine, & j'ai fait oſciller le pendule lorſqu'il étoit plongé dans ce vaiſſeau, qui étoit ouvert. Un globe de plomb du poids de $166\frac{1}{6}$ onces, & de $3\frac{1}{8}$ de diamétre, oſcilloit comme il eſt marqué dans la table ſuivante, la longueur du pendule depuis le point de ſuſpenſion juſqu'à un point marqué ſur le fil étant de 126 pouces, & de $134\frac{3}{8}$ pouces juſqu'au centre d'oſcillation.

Meſure en pouces de l'arc décrit dans la premiere chute par le point marqué ſur le fil.	64	32	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Meſure en pouces de l'arc décrit dans la derniere aſcenſion.	48	24	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Différence en pouces des arcs laquelle eſt proportionnelle au mouvement perdu.	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Nombre des oſcillations dans l'eau.			$\frac{29}{60}$	$1\frac{1}{5}$	3	7	$11\frac{1}{4}$	$12\frac{2}{3}$	$13\frac{1}{3}$
Nombre des oſcillations dans l'air.	$85\frac{1}{2}$		287	535					

Dans l'expérience de la quatriéme colonne, les quantités de mouvement perdues dans 535 oſcillations dans l'air étoient égales à celles qui furent perdues dans $1\frac{1}{5}$ dans l'eau, les oſcillations étoient donc un peu plus promptes dans l'air que dans l'eau. Mais ſi on accéléroit les oſcillations dans l'eau dans une raiſon, telle que le mouve-

ment des pendules fut égal en vîteſſe dans l'un & l'autre milieu, le nombre des oſcillations dans leſquelles il perdroit ſon mouvement dans l'eau demeureroit comme auparavant de 1 & $\frac{1}{5}$, à cauſe que la réſiſtance augmente, & que le quarré du temps diminue dans la même raiſon doublée. Les pendules qui ont des vîteſſes égales perdent donc des quantités égales de mouvement en 535 oſcillations dans l'air, & en $1\frac{1}{5}$ dans l'eau; donc la réſiſtance du pendule dans l'eau eſt à ſa réſiſtance dans l'air comme 535 à $1\frac{1}{5}$. C'eſt là la proportion des réſiſtances totales dans le cas de la quatriéme colonne.

Que $AV + CV^2$ repréſente à préſent la différence des arcs décrits dans la deſcenſion & l'aſcenſion ſubſéquente par un globe mu dans l'air avec la plus grande vîteſſe V; comme la plus grande vîteſſe dans le cas de la quatriéme colonne eſt à la plus grande vîteſſe dans le cas de la premiere comme 1 à 8; & que cette différence des arcs dans le cas de la quatriéme colonne eſt à la différence dans le cas de la premiere comme $\frac{2}{535}$ à $\frac{16}{85\frac{1}{2}}$ ou comme $85\frac{1}{2}$ à 4280 : écrivant dans ces cas 1 & 8 pour les vîteſſes, $85\frac{1}{2}$, & 4280 pour les différences des arcs, on aura $A + C = 85\frac{1}{2}$ & $8A + 64C = 4280$, ou $A + 8C = 535$; donc par la réduction des équations on aura $7C = 449\frac{1}{2}$, & $C = 64\frac{3}{14}$, & $A = 21\frac{5}{7}$: & par conſéquent, la réſiſtance étant comme $\frac{7}{11}AV + \frac{3}{4}CV^2$, elle deviendra comme $13\frac{6}{11}V + 48\frac{9}{16}V^2$. C'eſt pourquoi dans le cas de la quatriéme colonne où la vîteſſe étoit 1, la réſiſtance totale eſt à ſa partie proportionnelle au quarré de la vîteſſe, comme $13\frac{6}{11} + 48\frac{9}{16}$ ou $61\frac{12}{17}$ à $48\frac{9}{16}$; & par conſéquent la réſiſtance du pendule dans l'eau, eſt à cette partie de la réſiſtance dans l'air, laquelle eſt proportionnelle au quarré de la vîteſſe (& cette réſiſtance eſt ſeule à conſidérer dans les mouvemens les plus prompts) comme $61\frac{12}{17}$ à $48\frac{9}{16}$ & 535 à $1\frac{1}{5}$ conjointement, c'eſt-à-dire, comme 571 à 1. Si tout le fil du pendule oſcillant étoit plongé dans l'eau, ſa réſiſtance ſeroit encore

plus

plus grande ; enſorte que la réſiſtance du pendule qui oſcille dans l'eau, laquelle eſt proportionnelle au quarré de la vîteſſe, & qui doit être ſeule conſidérée dans les corps mûs le plus vîte, eſt à la réſiſtance de ce même pendule entier lorſqu'il oſcille dans l'air avec la même vîteſſe, comme 850 à 1 environ, c'eſt-à-dire, comme la denſité de l'eau à la denſité de l'air à peu près.

Il falloit prendre dans ce calcul cette partie de la réſiſtance du pendule dans l'eau, qui étoit comme le quarré de la vîteſſe, mais (ce qui paroîtra peut-être extraordinaire) la réſiſtance dans l'eau augmentoit dans une raiſon plus que doublée de la vîteſſe. Et en en cherchant la raiſon, j'ai trouvé que le vaiſſeau dans lequel je faiſois oſciller ce pendule étoit trop étroit pour la grandeur du globe du pendule, & qu'il s'oppoſoit un peu à cauſe de ſa petiteſſe au mouvement que l'eau faiſoit pour céder, car lorſque le globe ſuſpendu, dont le diamétre étoit d'un pouce, étoit plongé; la réſiſtance augmentoit à peu près en raiſon doublée de la vîteſſe. Je l'ai éprouvé en formant un pendule de deux globes, dont l'inférieur qui étoit le plus petit oſcilloit dans l'eau, pendant que le ſupérieur, qui étoit le plus grand, & qui étoit attaché au même fil, fort près de la ſurface de l'eau, oſcilloit dans l'air, & aidoit au mouvement oſcillatoire qu'il faiſoit durer plus longtemps; le ſuccès de ces expériences eſt marqué dans la table ſuivante.

Arc décrit dans la premiere chute.	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
Arc décrit dans la derniere aſcenſion.	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
Différence des arcs proportionnels au mouvement perdu.	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
Nombre des oſcillations.	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{12}$	$21\frac{7}{7}$	34	53	$62\frac{1}{7}$

Pour comparer entr'elles les réſiſtances des milieux, j'ai fait oſciller des pendules de fer dans du mercure. La longueur du fil de fer étoit preſque de trois pieds, & le diamétre du globe du

pendule étoit d'un tiers de pouce environ. J'avois attaché au même fil de fer, fort près de la ſurface du mercure, un autre globe de plomb aſſez grand pour faire durer le mouvement du pendule plus long-temps. Et j'avois rempli alternativement d'eau commune, & de mercure le petit vaſe qui tenoit environ trois livres de mercure, afin de faire oſciller alternativement le pendule dans l'un & l'autre fluide, & de pouvoir trouver, par ce moyen, la proportion des réſiſtances; je trouvai que la réſiſtance du vif-argent étoit à celle de l'eau comme 13 ou 14 à 1 environ: c'eſt-à-dire, comme la denſité du vif-argent à celle de l'eau. Lorſque je ſuſpendois un globe un peu plus grand, lorſque je me ſervois, par exemple, d'un globe dont le diamétre étoit de $\frac{1}{3}$ ou de $\frac{2}{3}$ de pouces, la réſiſtance du vif-argent étoit à celle de l'eau comme 12 ou 10 à 1 environ. Mais je me fie davantage à la premiere expérience, à cauſe que dans ces dernieres le vaſe étoit un peu petit pour la groſſeur du globe qui y étoit plongé, & qu'en augmentant le globe il auroit auſſi fallu augmenter le vaſe. J'aurois fait auſſi des expériences ſemblables dans de plus grands vaſes, & dans d'autres liqueurs tant froides que chaudes, & ſur des métaux fondus, s'il ne m'avoit pas paru ſuffiſamment certain, par les expériences que je viens de décrire, que la réſiſtance que des corps mus très-vîte éprouvent eſt à peu près proportionnelle à la denſité des fluides dans leſquels ils ſe meuvent. Je dis à peu près & non exactement, parce qu'il n'eſt pas douteux que les fluides qui ont plus de ténacité réſiſtent plus, à denſité pareille, que ceux qui ſont plus fluides; ainſi l'huile froide réſiſte plus que la chaude, l'huile chaude plus que l'eau de pluie, & l'eau plus que l'eſprit de vin. Mais dans les liquides fluides, comme l'air, l'eau ou douce ou ſalée, l'eſprit de vin, l'eſprit de térébentine, l'eſprit de ſel, l'huile chaude & dégagée de ſa partie groſſiere par la diſtillation, l'huile de vitriol, le mercure, les métaux fondus, & enfin dans toutes les eſpéces de liquides, s'il y en a qui ſoient aſſez fluides pour conſerver plus long-temps que le vaſe dans lequel ils

ſont le mouvement qu'on leur a imprimé, & qui étant verſés ſe ſéparent facilement en gouttes, je ne doute point que les réſiſtances n'obſervent la regle que je viens de rapporter : ſur-tout ſi on fait les expériences ſur de plus grands globes ſuſpendus, & qui ſoient mus plus vîte.

Enfin, comme pluſieurs croyent qu'il y a une certaine matiere éthérée très-ſubtile qui traverſe librement les pores des corps & tous leurs interſtices ; & que cette matiere qui flue dans les pores des corps doit cauſer une réſiſtance : pour connoître ſi la réſiſtance que les corps qui ſe meuvent éprouvent s'exerce toute entiere ſur leur ſuperficie externe, ou ſi les ſuperficies de leurs parties internes éprouvent une réſiſtance ſenſible, j'imaginai l'expérience ſuivante. Je ſuſpendis à un fil long de 11 pieds & attaché à un crochet d'acier très-ferme par le moyen d'un anneau auſſi d'acier, une petite boëte de ſapin ronde, enſorte que cela compoſoit un pendule de 11 pieds. Le crochet qui étoit très-pointu par en haut étoit concave & tranchant, afin que l'anneau qui tenoit à ce crochet par ſa partie ſupérieure put ſe mouvoir très-librement ; & c'étoit à la partie inférieure de cet anneau que le fil étoit attaché. Ce pendule étant ainſi compoſé je l'élevai à la hauteur de 6 pieds environ, dans un plan perpendiculaire à la partie interne du crochet, de peur que lorſque le pendule oſcilleroit l'anneau ne vacillat le long du crochet. Car le point de ſuſpenſion dans lequel l'anneau touche le crochet doit demeurer immobile. Je marquois exactement la hauteur à laquelle j'élevois le pendule, enſuite le laiſſant tomber, je marquois trois autres hauteurs auſquelles il revenoit à la fin de la premiere, de la ſeconde & de la troiſieme oſcillation. Je répétai ſouvent cette expérience afin d'être ſur que ces hauteurs fuſſent exactement marquées. Cela fait, je remplis la boëte de plomb & des métaux les plus peſans ; mais je peſai auparavant la boëte vuide avec la partie du fil qui l'entouroit, & la moitié du fil qui étoit tendu entre le crochet & la boëte. Car ce fil par ſa tenſion agit toujours ſur le

pendule, pour le tirer hors de ſa poſition perpendiculaire, avec la moitié de ſon poids. J'ajoutai à ce poids celui de l'air contenu dans la boëte, & tous ces poids enſemble faiſoient à peu près la 78^e partie de celui de la boëte lorſqu'elle étoit pleine de métal. Or comme la boëte, lorqu'elle étoit pleine de métal, augmentoit la longueur du pendule en tendant le fil par ſon poids, j'acourcis ce fil afin que la longueur du pendule fut la même qu'auparavant. Enſuite, élevant le pendule au même lieu d'où je l'avois premierement fait tomber, je comptai 77 oſcillations environ, juſqu'à ce que la boëte fut revenue à la ſeconde hauteur que j'avois marquée, & enſuite 77 autres juſqu'à ce qu'elle fut revenue à la troiſiéme hauteur, & encore 77 juſqu'à ce qu'elle fut revenue à la quatriéme : d'où je conclus, que la réſiſtance entiere de la boëte pleine n'étoit pas à la réſiſtance de la boëte vuide dans une plus grande raiſon que de 78 à 77. Car ſi les réſiſtances avoient été égales dans l'un & l'autre cas, la boëte pleine, ayant 78 fois plus de force d'inertie que la boëte vuide, auroit dû conſerver ſon mouvement 78 fois plus long-temps, & par conſéquent, le pendule auroit dû faire toujours dans ce cas 78 oſcillations avant de retourner aux hauteurs marquées ; mais il n'en fit que 77.

Donc, ſi A repréſente la réſiſtance de la ſuperficie externe de la boëte, & B la réſiſtance des parties internes de la boëte vuide ; & que les réſiſtances des parties internes des corps qui ont la même vîteſſe, ſoient comme la matiere ou le nombre des particules qui éprouvent la réſiſtance : la réſiſtance des parties internes de la boéte pleine ſera 78 B : donc la réſiſtance totale de la boëte vuide $A+B$ ſera à la réſiſtance totale de la boëte pleine $A+78B$, comme 77 à 78 ; d'où l'on tire $A+B : 77B :: 77 : 1$, donc, $A+B : B :: 77 \times 77 : 1$, ce qui donne $A : B :: 5928 : 1$. Donc la réſiſtance des parties internes de la boëte vuide eſt 5000 fois moindre que la réſiſtance de ſa ſuperficie externe, & davantage. C'eſt ainſi que nous avons examiné l'hypotèſe dans laquelle on prétend que la plus grande réſiſtance de la boëte pleine ne vient

d'aucune cauſe inconnue, mais ſeulement de l'action de quelque fluide très-ſubtil renfermé entre les parties du métal.

J'ai rapporté de mémoire cette expérience, car le papier ſur lequel j'en avois écrit le détail a été perdu. Ainſi j'ai été forcé d'obmettre les fractions dont je ne me ſouvenois plus, n'ayant pas le loiſir de la répéter. Comme je m'étois ſervi d'abord d'un crochet qui étoit trop foible, le retardement de la boëte pleine arrivoit plutôt. Et en en cherchant la raiſon, je trouvai que c'étoit parce que le crochet trop foible cédoit au poids de la boëte, & qu'obéiſſant à ſes oſcillations, il ſe plioit de côté & d'autre. Je pris donc un crochet plus fort, enſorte que le point de ſuſpenſion demeurât immobile, & alors tout ſe paſſa comme je l'ai décrit ci-deſſus.

SEPTIÈME SECTION.

Des mouvemens des fluides & de la réſiſtance des projectiles.

PROPOSITION XXXII. THÉORÉME XXVI.

Si deux ſyſtêmes ſemblables de corps ſont compoſés d'un nombre égal de particules, & que les particules correſpondantes ſoient reſpectivement ſemblables & proportionnelles dans l'un & l'autre ſyſtême, qu'elles ſoient poſées de même entr'elles, qu'elles ayent entre elles une raiſon donnée de denſité, & qu'elles commencent à ſe mouvoir entr'elles ſemblablement dans des temps proportionnels, c'eſt-à-dire, celles qui ſont dans un même ſyſtême entr'elles, & ſi les particules d'un même ſyſtême ne ſe touchent point, excepté dans les momens où elles ſe réfléchiſſent, enfin ſi elles ne s'attirent ni ne ſe fuyent mutuellement que par des forces accélératrices qui ſoient inverſement comme les diamétres des particules correſpondantes, & directement comme les quarrés des viteſſes : je dis, que les particules de ces ſyſtêmes continueront à ſe mouvoir entr'elles de la même maniere dans des temps proportionnels.

Je dis que les corps ſemblables, & poſés de même, ſe meu-

vent entr'eux de la même maniere dans des temps proportionnels lorſque leur poſition entr'eux eſt toujours la même à la fin de ces temps : comme lorſqu'on compare, par exemple, les particules d'un ſyſtême avec les particules correſpondantes de l'autre. Il ſuit delà, que les temps dans leſquels les parties ſemblables & proportionnelles des figures ſemblables ſeront décrites par des particules correſpondantes ſeront des temps proportionnels. Donc ſi on a deux ſyſtêmes de cette ſorte, les particules correſpondantes ayant commencé à ſe mouvoir de la même maniere continueront de même juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent. Car ſi aucune force n'agiſſoit ſur elles, elles avanceroient uniformement en ligne droite par la premiere loy du mouvement. Mais ſi elles agiſſoient l'une ſur l'autre mutuellement par quelques forces, & que ces forces fuſſent inverſement comme les diamétres des particules correſpondantes, & directement comme les quarrés des vîteſſes ; les poſitions des particules étant ſemblables, & les forces étant proportionnelles, les forces totales qui agiroient alors ſur les particules correſpondantes, étant compoſées des forces qui agiſſent ſur chacune des particules (par le ſecond corollaire des loix) auroient des déterminations ſemblables à celles qu'elles auroient ſi elles tendoient à des centres placés ſemblablement entre ces particules ; & les forces totales ſeroient entr'elles comme chacune des forces compoſantes, c'eſt-à-dire, inverſement comme les diamétres des particules correſpondantes, & directement comme les quarrés des vîteſſes : & elles feroient par conſéquent que les particules correſpondantes continueroient à décrire des figures ſemblables.

Tout cela arrivera ainſi (par les corol. 1. & 8. de la Prop. 4. L. 1.) pourvu que les centres ſoient en repos. Mais s'ils ſe meuvent, comme leurs ſituations demeurent les mêmes entre les particules des ſyſtêmes, à cauſe qu'ils ſont mus d'une maniere ſemblable ; il arrivera des changemens ſemblables dans les figures que ces particules décrivent. Donc les mouvemens des particules ſemblables correſpondantes ſeront ſemblables juſqu'à leurs premieres rencontres, &

par conſéquent les rencontres & les réfléxions ſeront ſemblables, & enſuite (par ce qui a déja été démontré) elles auront les mêmes mouvemens entr'elles, juſqu'à ce qu'elles ſe rencontrent de nouveau; & ainſi de ſuite à l'infini. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Delà, ſi deux corps quelconques, ſemblables & ſitués de même par rapport aux particules correſpondantes des ſyſtêmes, commencent à ſe mouvoir de même entre ces particules dans des temps proportionnels, & que leurs grandeurs & leurs denſités entr'elles ſoient comme les grandeurs & les denſités des particules correſpondantes : elles continueront à ſe mouvoir de même dans des temps proportionnels. C'eſt la même choſe pour les plus grandes parties de l'un & l'autre ſyſtême que pour les particules.

Cor. 2. Et ſi toutes les parties ſemblables & poſées de même des ſyſtêmes ſont en repos entr'elles : & que deux d'entr'elles, plus grandes que les autres, & qui ſe correſpondent mutuellement dans l'un & l'autre ſyſtême, commencent à ſe mouvoir d'une façon quelconque d'un mouvement ſemblable, & ſelon des lignes poſées de même : elles produiront des mouvemens ſemblables dans les autres parties des ſyſtêmes, & elles continueront à ſe mouvoir de même entr'elles dans des temps proportionnels ; & par conſéquent à décrire des eſpaces proportionnels à leurs diamétres.

PROPOSITION XXXIII. THÉORÉME XXVII.

Les mêmes choſes étant poſées, je dis que les parties les plus grandes des ſyſtêmes éprouvent une réſiſtance en raiſon compoſée, de la raiſon doublée de leurs vîteſſes, de la raiſon doublée de leurs diamétres, & de la raiſon de la denſité des parties du ſyſtême.

Car la réſiſtance vient en partie des forces centripétes ou centrifuges par leſquelles les particules des ſyſtêmes agiſſent les unes ſur les autres, & en partie des rencontres & des réfléxions des particules, & des parties les plus grandes. Les réſiſtances du premier genre ſont entr'elles comme les forces motrices entieres qui

les produiſent, c'eſt-à-dire, comme les forces accélératrices entieres, & les quantités de matiere dans les parties correſpondantes; ou, ce qui revient au même par l'hypotèſe, comme les quarrés des vîteſſes directement, & les diſtances des particules correſpondantes inverſement, & comme les quantités de matiere dans les particules correſpondantes directement: c'eſtpourquoi, les diſtances des particules d'un ſyſtême étant aux diſtances correſpondantes des particules de l'autre ſyſtême, comme le diamétre d'une particule, ou d'une partie dans le premier ſyſtême au diamétre d'une particule ou d'une partie dans l'autre ſyſtême, & que les quantités de matiere ſont comme les denſités des parties, & les cubes des diamétres, les réſiſtances ſont l'une à l'autre comme les quarrés des vîteſſes, les quarrés des diamétres, & les denſités des particules des ſyſtêmes. *C. Q. F. D.*

Les réſiſtances du ſecond genre ſont comme les nombres des réflexions correſpondantes, & les forces conjointement. Mais les nombres des réflexions ſont entr'eux comme les vîteſſes des parties correſpondantes directement, & inverſement comme les eſpaces entre ces réflexions. Les forces des réflexions ſont comme les vîteſſes, les grandeurs, & les denſités des parties correſpondantes conjointement, c'eſt-à-dire, comme les vîteſſes, les cubes des diamétres & les denſités des parties. Et en compoſant toutes ces raiſons, les réſiſtances des parties correſpondantes ſont entr'elles conjointement comme les quarrés des vîteſſes, les quarrés des diamétres & les denſités des parties. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc, ſi ces ſyſtêmes ſont deux fluides élaſtiques comme l'air, & que leurs parties ſoient en repos entr'elles: que deux corps ſemblables & proportionnels aux parties des fluides, quant à la grandeur & à la denſité, & poſés de même entre ces parties, ſoient jettés d'une façon quelconque, ſuivant des lignes poſées de même; & que les forces accélératrices, par leſquelles les particules de ces fluides agiſſent mutuellement les unes ſur les autres, ſoient inverſement comme les diamétres des corps jettés, & directement

directement comme les quarrés des vîteſſes : ces corps produiront, dans les fluides, des mouvemens ſemblables, & ils y décriront, dans des temps proportionnels, des eſpaces proportionnels à leurs diamétres.

Cor. 2. Ainſi un corps qui ſe meut avec une grande vîteſſe dans le même fluide éprouve une réſiſtance en raiſon doublée de ſa vîteſſe à peu près. Car ſi les forces, par leſquelles les particules éloignées agiſſent mutuellement les unes ſur les autres, étoient augmentées en raiſon doublée de la vîteſſe, ſa réſiſtance ſeroit dans la même raiſon doublée exactement; donc dans un milieu dont les parties éloignées n'agiſſent aucunement les unes ſur les autres, la réſiſtance eſt exactement en raiſon doublée de la vîteſſe.

Soient A, B, C trois milieux compoſés de parties ſemblables, égales & diſpoſées régulierement à des diſtances égales; que les parties des milieux A & B ſe fuient mutuellement avec des forces qui ſoient entr'elles comme T & V, & que celles du milieu C ſoient deſtituées entierement de ces ſortes de forces. Si quatre corps égaux D, E, F, G ſe meuvent dans ces milieux, les deux premiers D & E dans les deux premiers A & B, & les deux autres F & G dans le troiſiéme C; & que la vîteſſe du corps D ſoit à la vîteſſe du corps E, & la vîteſſe du corps F à la vîteſſe du corps G en raiſon ſouſdoublée des forces T aux forces V: la réſiſtance du corps D ſera à la réſiſtance du corps E, & la réſiſtance du corps F à la réſiſtance du corps G en raiſon doublée des vîteſſes; & par conſéquent, la réſiſtance du corps D ſera à la réſiſtance du corps F comme la réſiſtance du corps E à la réſiſtance du corps G. Suppoſez que ces corps D & F ayent des vîteſſes égales ainſi que les corps E & G; en augmentant les vîteſſes des corps D & F dans une raiſon quelconque, & diminuant les forces des particules du milieu B dans la même raiſon doublée, le milieu B approchera tant qu'on voudra de la forme & de la condition du milieu C, & par conſéquent, les réſiſtances

des corps égaux *E* & *G*, qui ont des vîteſſes égales dans ces milieux, approcheront ſans ceſſe de l'égalité, enſorte que leur différence deviendra enfin plus petite que toute différence donnée. Donc, comme les réſiſtances des corps *D* & *F* ſont entr'elles comme les réſiſtances des corps *E* & *G*, elles approcheront auſſi ſans ceſſe de même de l'égalité. Donc les réſiſtances des corps *D* & *F* ſont à peu près égales lorſqu'ils ſe meuvent très-vîte : & par conſéquent, comme la réſiſtance du corps *F* eſt en raiſon doublée de ſa vîteſſe, la réſiſtance du corps *D* ſera dans la même raiſon à peu près.

Cor. 3. La réſiſtance d'un corps, qui ſe meut très-vîte dans un milieu quelconque élaſtique, eſt la même à peu près que ſi les parties du fluide n'avoient aucune force centrifuge, & qu'elles ne ſe fuyaſſent pas mutuellement : pourvu que la force élaſtique du fluide ſoit l'effet des forces centrifuges des particules, & que la vîteſſe ſoit ſi grande que les forces n'ayent pas aſſez de temps pour agir.

Cor. 4. Donc, comme les réſiſtances des corps ſemblables qui ont des vîteſſes égales, & dont les parties qui ne ſont pas contigues ne ſe fuyent pas mutuellement, ſont comme les quarrés des diamétres ; les réſiſtances des corps qui ont des vîteſſes égales & qui ſe meuvent très-vîte ſont auſſi, dans un fluide élaſtique, comme les quarrés des diamétres à peu près.

Cor. 5. Comme les corps ſemblables, égaux, & qui ont des vîteſſes égales dérangent, dans des milieux qui ont la même denſité, des quantités égales de matiere en temps égaux, & leur impriment une égale quantité de mouvement lorſque les particules de ces milieux ne ſe fuient point mutuellement, ſoit que ces particules ſoient très-petites & en grand nombre, ſoit qu'elles ſoient plus grandes & que leur nombre ſoit moindre, & que réciproquement (par la troiſieme loi du mouvement) ces corps éprouvent une réaction égale de cette même matiere, c'eſt-à-dire, que cette matiere leur réſiſte également : il eſt clair auſſi, que dans les

fluides élaſtiques de la même denſité, les réſiſtances que les corps éprouvent ſont égales, à peu près, lorſqu'ils ſe meuvent très-vîte; ſoit que ces fluides ſoient compoſés de particules très-groſſieres, ou qu'ils le ſoient des plus ſubtiles de toutes. Car la ſubtilité du milieu ne diminue pas beaucoup la réſiſtance des projectiles qui ſe meuvent très-vîte.

Cor. 6. Tout cela ſe paſſe ainſi dans les fluides dont la force élaſtique eſt l'effet des forces centrifuges des parties. Mais ſi cette force vient d'une autre cauſe, comme de l'extenſion des parties telle que celle qu'on remarque dans la laine ou dans les branches des arbres, ou de quelqu'autre cauſe quelconque, qui rende le mouvement des parties entr'elles moins libre : alors la fluidité du milieu étant moindre, la réſiſtance ſera plus grande que dans les précédens corollaires.

PROPOSITION XXXIV. THÉORÉME XXVIII.

Si un globe & un cylindre de diamétres égaux ſe meuvent avec une vîteſſe égale, dans le ſens de l'axe du cylindre, dans un milieu rare & compoſé de parties égales, & ſituées librement à des diſtances égales les unes des autres, la réſiſtance du globe ſera ſouſdouble de celle du cylindre.

Car l'action du milieu ſur le corps étant la même (par le Cor. 5. des loix) ſoit qu'il ſe meuve dans un milieu en repos, ſoit que les particules de ce milieu viennent choquer ce corps ſuppoſé en repos avec la même vîteſſe : commençons par conſidérer ici le corps comme étant en repos, & voyons avec quelle force ce milieu, qui eſt ſuppoſé ſe mouvoir, agira ſur lui.

Que C repréſente donc le centre d'un corps ſphérique $ABKI$ dont le demi diamétre eſt CA, que les particules du milieu frappent ce corps ſphérique avec une vîteſſe donnée ſelon des lignes paralleles à AC: & que FB ſoit une de ces droites. Soit priſe ſur cette ligne la ligne LB égale au demi diamétre CB, & ſoit Fig. 40.

Du Mouvement des Corps.

Fig. 40.

menée BD qui touche la ſphere en B. Sur KC & BD ſoient abbaiſſées les perpendiculaires BE, LD, la force avec laquelle une particule de ce milieu frappe le globe en B, en tombant obliquement ſelon la droite FB, ſera à la force avec laquelle la même particule frapperoit perpendiculairement en b le cylindre $ONGQ$ décrit autour du globe & ayant pour axe ACI, comme LD eſt à LB, ou BE à BC. De plus, l'efficacité de cette force pour mouvoir le globe ſuivant ſon incidence FB ou AC, eſt à ſon efficacité pour mouvoir ce globe du côté vers lequel elle eſt déterminée, c'eſt-à-dire, du côté de la droite BC ſelon laquelle elle preſſe le corps directemeut, comme BE eſt à BC. Et en compoſant ces raiſons, l'efficacité d'une particule ſur le globe, lorſqu'elle y tombe obliquement ſelon la droite FB, pour le mouvoir du côté de ſon incidence, eſt à l'efficacité de cette même particule lorſqu'elle tombe perpendiculairement ſur le cylindre ſelon la même droite, pour le mouvoir du même côté, comme BE^2 eſt à BC^2. C'eſt pourquoi, ſi ſur bE qui eſt perpendiculaire à la baſe circulaire NAO du cylindre, & égale au rayon AC, on prend $bH = \frac{BE^2}{BC}$, bH ſera à bE comme l'effet de la particule ſur le globe eſt à ſon effet ſur le cylindre. Et par conſéquent, le ſolide formé par toutes les droites bH, ſera au ſolide formé par toutes les droites bE, comme l'effet de toutes les particules ſur le globe eſt à l'effet de toutes les particules ſur le cylindre. Mais le premier de ces ſolides eſt un paraboloïde dont le ſommet eſt C, l'axe CA, & le paramétre CA; & le dernier eſt le cylindre circonſcript à ce paraboloïde. De plus, il eſt connu que le paraboloïde eſt la moitié du cylindre circonſcript; donc la force totale du milieu ſur le globe eſt la moitié de la force totale de ce même milieu ſur le cylindre. Et par conſéquent, ſi les particules qui compoſent le milieu étoient en repos, & que le globe & le cylindre ſe muſſent avec la même vîteſſe, la réſiſtance que le globe éprouveroit ſeroit ſouſdouble de celle du cylindre. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

On peut comparer par la même méthode les autres figures entr'elles quant à la réſiſtance qu'elles éprouvent, & trouver celles qui ſont les plus propres à conſerver longtemps leur mouvement dans des milieux réſiſtans. Si par exemple, on veut conſtruire, ſur la baſe circulaire *CEBH*, décrite du centre *O* & du rayon *OC*, un cône tronqué *CBGF*, dont la hauteur ſoit *OD*, & qui ſoit de tous les cônes tronqués, conſtruits ſur la même baſe & la même hauteur, & qui ſe meuvent ſuivant leur axe du côté de *D*, celui qui éprouve la moindre réſiſtance; coupez en deux parties égales la hauteur *OD* en *Q*, & prolongez *OQ* en *S*, en ſorte que $QS = QC$, & *CFGB* ſera le cône tronqué demandé. Fig. 41.

D'où on tire, chemin faiſant, (l'angle *CSB* étant toujours aigu) que ſi le ſolide *ADBE* eſt formé par la révolution de la figure elliptique ou ovale *ADBE* autour de l'axe *AB*, & que la figure génératrice ſoit touchée par les trois droites *FG*, *GH*, *HI* dans les points *F*, *B* & *I*, ſelon cette loi, que *GH* ſoit perpendiculaire à l'axe dans le point de contact *B*, & que *FG*, *HI* faſſent avec la même ligne *GH* des angles *FGB*, *BHI* de 135 dégrés, le ſolide formé par la révolution de la figure *ADFGHIE* autour du même axe *AB* éprouvera moins de réſiſtance que le premier ſolide, pourvu que l'un & l'autre avancent ſuivant l'axe *AB*, & que *B* ſoit le côté qui précede dans l'un & dans l'autre, je ne crois pas cette propoſition inutile pour la conſtruction des vaiſſeaux. Fig. 42.

Que ſi la figure *DNFG* eſt une courbe d'une telle nature, que ſi par un de ſes points quelconques *N* on abaiſſe la perpendiculaire *NM* ſur l'axe *AB*, & que d'un point donné *G* on mene la droite *GR* qui ſoit parallele à la droite qui touche la figure en *N*, & qui coupe en *R* l'axe prolongé, on aura $MN : GR :: GR^3 : 4BR \times GB^2$; le ſolide formé par la révolution de cette figure autour de l'axe *AB* éprouvera une moindre réſiſtance,

Du Mouvement des Corps.

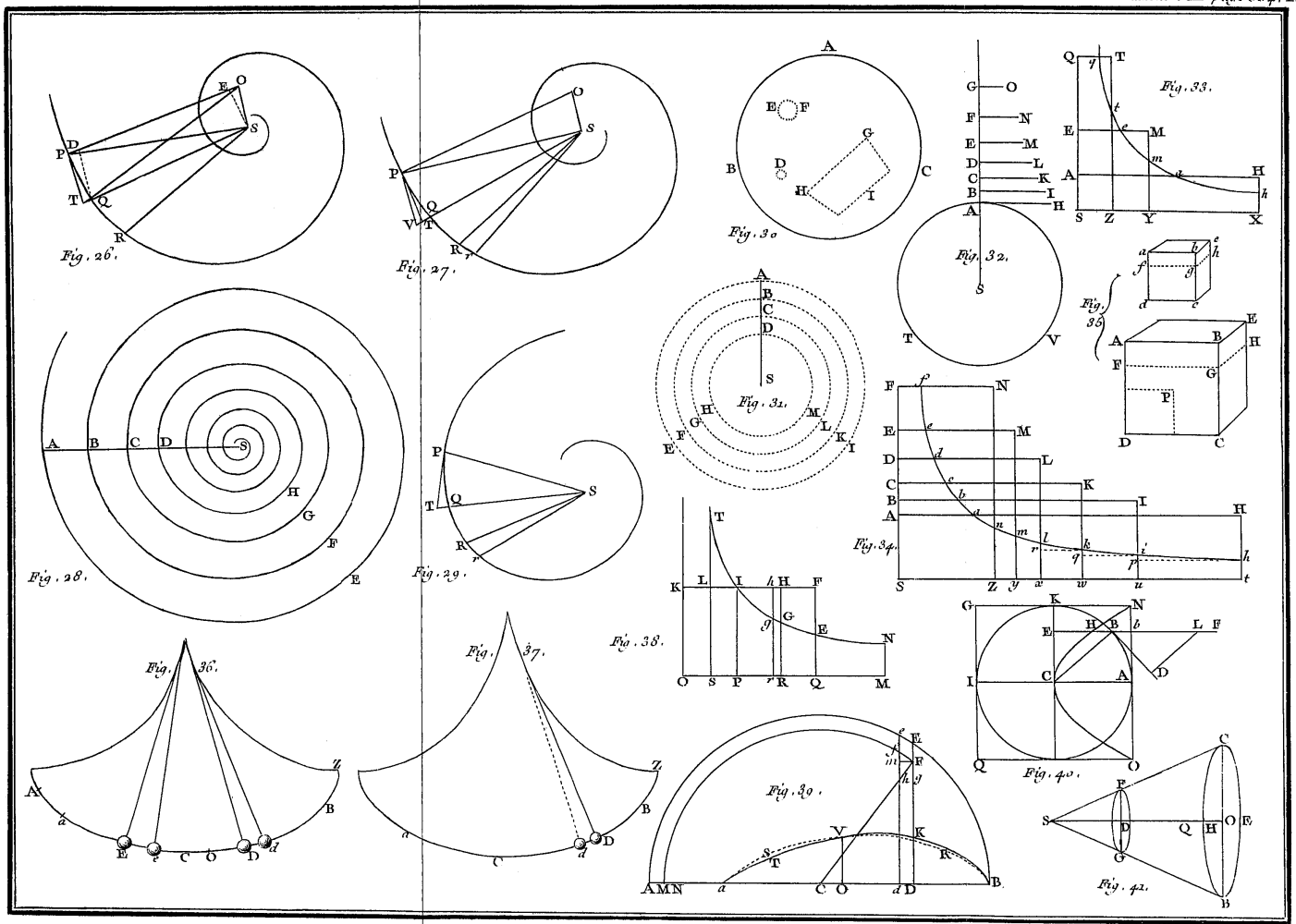
en ſe mouvant de *A* vers *B*, dans le milieu rare dont on a parlé, qu'aucun autre ſolide circulaire quelconque décrit ſur la même hauteur & la même baſe.

Fig. 42.

PROPOSITION XXXV. PROBLÈME VII.

On demande la réſiſtance qu'éprouve un globe qui ſe meut uniformement dans un milieu rare formé de très-petites particules égales, en repos, & ſituées librement à des diſtances égales les unes des autres.

Cas 1. Suppoſé que le cylindre qui a le même diamétre, & la même hauteur que le globe s'avance avec la même vîteſſe, dans le même milieu, & dans le ſens de ſon axe. Que les particules du milieu dans lequel le globe ou le cylindre ſe plonge rejailliſſent avec toute la force de la réflexion. Comme la réſiſtance que le globe éprouve, eſt (par la derniere Propoſition) la moitié de celle qu'éprouve le cylindre, le globe étant au cylindre comme 2 à 3, & le cylindre en tombant perpendiculairement ſur ces particules, qui rejailliſſent très-fortement, leur communiquant une vîteſſe double de la ſienne : le cylindre, dans le temps dans lequel il aura parcouru en avançant uniformement la moitié de la longueur de ſon axe, communiquera aux particules du milieu un mouvement, qui ſera au mouvement total du cylindre, comme la denſité du milieu eſt à la denſité du cylindre ; & le globe dans le temps dans lequel il parcourt toute la longueur de ſon diamétre en avançant uniformement communiquera le même mouvement à ces particules ; & dans le temps pendant lequel il parcourt les deux tiers de ſon diamétre il communiquera aux particules un mouvement qui ſera à ſon mouvement total, comme la denſité du milieu à la denſité du globe. Et par conſéquent, le globe éprouve une réſiſtance qui eſt à la force qui peut produire tout ſon mouvement ou le lui ôter, dans le temps qu'il met à parcourir les deux tiers de ſon diamétre en avançant uniformement, comme la denſité du milieu eſt à la denſité du globe.


Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41.

Cas 2. Suppoſons que les particules du milieu qui tombent ſur le globe ou ſur le cylindre ne ſoient pas réfléchies ; & que le cylindre en tombant perpendiculairement ſur ces particules leur communique la vîteſſe ſimple qui l'anime, il ſouffrira alors une réſiſtance qui ſera ſousſdouble de celle qu'il éprouve dans le premier cas, & la réſiſtance qu'éprouvera le globe ſera par conſéquent auſſi ſouſdouble de ce qu'elle étoit auparavant.

Cas 3. Suppoſons que les particules du milieu rejailliſſent de deſſus le globe par la force de la réflexion qu'on ſuppoſe n'être ni nulle, ni grande, mais moyenne ; la réſiſtance qu'éprouvera le globe ſera dans cette même raiſon, c'eſt-à-dire, moyenne entre la réſiſtance dans le premier cas, & la réſiſtance dans le ſecond. *C. Q. F. T.*

Cor. 1 Delà, ſi le globe & les particules ſont infiniment dures & privées de toute force élaſtique, & par conſéquent auſſi de toute force réfléchiſſante ; la réſiſtance que le globe éprouvera ſera à la force par laquelle tout ſon mouvement peut lui être communiqué ou ôté, dans le temps dans lequel un globe quadruple parcourt la troiſiéme partie de ſon diamétre, comme la denſité du milieu à la denſité du globe.

Cor. 2. La réſiſtance que le globe éprouve eſt, toutes choſes égales, en raiſon doublée de la vîteſſe.

Cor. 3. Cette réſiſtance eſt auſſi, toutes choſes égales, en raiſon doublée du diamétre.

Cor. 4. Cette réſiſtance eſt encore comme la denſité du milieu, toutes choſes égales.

Cor. 5. Et par conſéquent cette réſiſtance eſt dans la raiſon compoſée de la raiſon doublée de la vîteſſe, de la raiſon doublée du diamétre, & de la raiſon de la denſité du milieu.

Cor. 6. Le mouvement du globe & la réſiſtance qu'il éprouve, peuvent s'exprimer ainſi. Soit AB le temps dans lequel le globe peut perdre tout ſon mouvement par la réſiſtance qu'il éprouve, laquelle on ſuppoſe uniformement continuée. Soient élevées AD, Fig. 43.

Du Mouvement des Corps.

Fig. 43.

BC perpendiculairement ſur AB, & que BC exprime le mouvement total du corps, ſoit tracée, par le point C, l'hyperbole CF dont les aſymptotes ſoient AD, AB, & ſoit prolongée AB juſqu'à un point quelconque E. Soit élevée enſuite la perpendiculaire EF qui rencontre l'hyperbole en F, & ſoit achevé le parallélograme $CBEG$, enfin ſoit tirée AF qui rencontre BC en H. Si le globe dans un temps quelconque BE décrit dans un milieu non réſiſtant l'eſpace $CBEG$ par ſon mouvement primitif BC continué uniformement, lequel eſpace $CBEG$ eſt repréſenté par l'aire du parallélograme, le même corps, dans un milieu réſiſtant, décrira l'eſpace $CBEF$, repréſenté par l'aire de l'hyperbole, & ſon mouvement à la fin de ce temps ſera repréſenté par EF ordonnée à l'hyperbole, & alors il aura perdu la partie FG de ſon mouvement. Et la réſiſtance qu'il éprouvera à la fin du même temps ſera repréſentée par la longueur BH, la partie CH de la réſiſtance étant détruite. Tout cela eſt clair par les Cor. 1. & 5. de la Prop. 5. du Liv. 2.

Cor. 7. Delà, ſi le globe pendant le temps T perd tout ſon mouvement M par la réſiſtance R continuée uniformement : ce même globe perdra dans le temps t dans un milieu réſiſtant la partie $\frac{tM}{T+t}$ de ſon mouvement M, par la réſiſtance R décroiſſante en raiſon doublée de la vîteſſe, la partie $\frac{TM}{T+t}$ demeurant la même ; & il décrira un eſpace qui ſera à l'eſpace décrit par le mouvement uniforme M, dans le même temps t, comme le logarithme du nombre $\frac{T+t}{T}$ multiplié par le nombre 2, 302585092994 eſt au nombre $\frac{t}{T}$, à cauſe que l'aire hyperbolique $BCFE$ eſt au rectangle $BCGE$ dans cette Proportion.

SCHOLIE.

J'ai expoſé dans cette Propoſition la réſiſtance & la retardation des projectiles ſphériques dans les milieux qui ne ſont pas continus, & j'ai fait voir que cette réſiſtance eſt à la force par laquelle le mouvement total du globe peut être produit ou détruit, dans le temps qu'il employe à parcourir les deux tiers de ſon diamétre par une vîteſſe uniformement continuée, comme la denſité du milieu eſt à la denſité du globe, pourvu que le globe & les particules du milieu ſoient très-élaſtiques, & qu'elles ayent beaucoup de force réfléchiſſante : & enfin que cette force eſt deux fois moindre lorſque le globe & les particules du milieu ſont infiniment dures, & entierement incapables de réflexion. Dans les milieux continus tels que l'eau, l'huile chaude, & le vif-argent, dans leſquels le globe ne tombe pas immédiatement ſur toutes les particules réſiſtantes du fluide, mais preſſe ſeulement les particules les plus voiſines, celles-là en preſſent d'autres, & les autres d'autres encore, la réſiſtance eſt encore deux fois moindre. Le globe, dans de tels milieux très-fluides, éprouve une réſiſtance, qui eſt à la force qui peut lui ôter ou lui communiquer tout ſon mouvement, dans le temps dans lequel il peut parcourir les $\frac{3}{8}$ parties de ſon diamétre, par ſon mouvement uniformement continué, comme la denſité du milieu eſt à la denſité du globe. C'eſt ce que je tâcherai de faire voir dans les Propoſitions ſuivantes.

PROPOSITION XXXVI. PROBLÉME VIII.

Trouver le mouvement de l'eau qui s'écoule par un trou fait dans le fond d'un vaſe cylindrique.

Soit *ACDB* le vaſe cylindrique, *AB* ſon ouverture ſupérieure, *CD* le fond de ce vaſe parallele à l'horiſon, *EF* un trou circulaire fait dans le milieu de ce fond, *G* le centre de ce trou, Fig. 44.

Du Mouvement des Corps.

& GH l'axe du cylindre perpendiculaire à l'horiſon. Suppoſez un cylindre de glace $APQB$ de la même largeur que l'intérieur du vaſe, qui ait le même axe, & qui deſcende continuellement avec un mouvement uniforme; & que ſes parties, dans le moment qu'elles auront atteint la ſuperficie AB, ſe liquifient, & en ſe convertiſſant en eau, qu'elles s'écoulent dans le vaſe par leur gravité, & forment, en tombant, une cataracte ou colonne d'eau $ABNFEM$ qui paſſe par le trou EF & qui l'empliſſe entierement. Suppoſez que la vîteſſe avec laquelle cette glace deſcend ſoit uniforme, ainſi que celle de l'eau contigue dans le cercle AB, que cette vîteſſe ſoit celle que cette eau peut acquérir en tombant, & en parcourant dans ſa chute la hauteur IH, & que IH & HG ſoient en ligne droite. Par le point I ſoit menée la ligne KL parallele à l'horiſon & rencontrant en K & en L les côtés de la glace. La vîteſſe de l'eau qui s'écoule par le trou EF ſera la même que celle que l'eau peut acquérir en tombant de I, & en parcourant dans ſa chute la hauteur IG. Donc, par les Théorêmes de Galilée, IG ſera à IH en raiſon doublée de la vîteſſe de l'eau qui s'écoule par le trou, à la vîteſſe de l'eau dans le cercle AB, c'eſt-à-dire, en raiſon doublée du cercle AB au cercle EF; car les vîteſſes de l'eau qui paſſe dans le même temps, & en quantité égale par différens cercles ſont réciproquement comme les aires de ces cercles. Il s'agit ici de la vîteſſe de l'eau qui s'écoule vers l'horiſon. Quant au mouvement parallele à l'horiſon, par lequel les parties de l'eau qui tombent s'approchent l'une de l'autre, il ne doit point être conſidéré ici parce qu'il ne vient point de la gravité, & qu'il ne change rien au mouvement perpendiculaire à l'horiſon qni eſt produit par la gravité. Nous ſuppoſons cependant que les parties de l'eau ayent quelque cohérence, & que par leur cohéſion elles s'approchent l'une de l'autre en tombant, par des mouvemens paralleles à l'horiſon; enſorte qu'elles forment une ſeule cataracte, & qu'elles ne ſoient point diviſées en pluſieurs cataractes. Mais nous ne faiſons point at-

Fig. 44.

tention ici au mouvement parallele à l'horiſon qui eſt produit par cette cohéſion.

Fig. 44.

Cas 1. Concevez que toute la cavité du vaſe, laquelle environne l'eau tombante *ABNFEM*, ſoit pleine de glace, enſorte que l'eau paſſe à travers cette glace comme à travers un antonnoir. Si l'eau ne frotte point la glace, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi elle coule librement le long de la glace, & qu'à cauſe de ſon parfait poli, elle n'éprouve aucune réſiſtance par ſon frottement contre la glace, elle s'écoulera par le trou *EF* avec la même vîteſſe qu'auparavant, & tout le poids de la colonne d'eau *ABNFEM* ſera employé à produire cet écoulement comme auparavant, & le fond du vaſe ſoutiendra le poids de la glace qui environne la colonne.

Suppoſez que la glace ſe fonde dans le vaſe; l'écoulement de l'eau demeurera le même qu'auparavant, quant à la vîteſſe. Car elle ne ſera pas moindre, puiſque la glace qui eſt devenue eau fait effort pour deſcendre: & elle ne ſera pas plus grande parce que la glace devenue eau ne peut deſcendre qu'elle n'empêche l'autre eau, dont la chute eſt égale à la ſienne, de deſcendre, & la même force doit donner la même vîteſſe à l'eau qui s'écoule.

Mais le trou dans le fond du vaſe, doit être un peu plus grand qu'auparavant, à cauſe des mouvemens obliques des particules de l'eau qui s'écoule. Car toutes les particules de l'eau ne paſſent pas perpendiculairement par le trou; mais venant de toutes parts des côtés du vaſe & convergeant vers ce trou, elles y paſſent par des mouvemens obliques; & tendant toutes à s'échapper par embas leur mouvement conſpire avec celui de la veine d'eau qui paſſe perpendiculairement. Cette veine d'eau eſt un peu plus mince hors de l'ouverture que dans l'ouverture même, ſon diamétre & celui de l'ouverture, ſi je les ai bien meſurés, étant l'un à l'autre, à peu près, comme 5 à 6 ou comme $5\frac{1}{2}$ à $6\frac{1}{2}$. Je m'étois ſervi d'une lame plate très-mince percée dans le milieu, & dont l'ouverture circulaire avoit $\frac{1}{8}$ parties de pouces de diamétre. Et de

Du Mouvement des Corps.

peur que la veine d'eau qui s'écouloit ne fut accélérée en tombant, & ne devint plus mince par l'accélération, je n'attachai point cette lame au fond du vaſe, mais à un de ſes côtés, afin que la veine ſortit par une ligne parallele à l'horiſon. Enſuite lorſque le vaſe fut plein d'eau, j'ouvris le trou pour la laiſſer écouler; & le diamétre de la veine, meſuré exactement, étoit, à la diſtance de près d'un demi pouce de l'ouverture, de $\frac{21}{40}$ parties de pouces. Donc le diamétre de ce trou circulaire étoit au diamétre de la veine d'eau comme 25 à 21 à peu près. Par-là, l'eau en paſſant par l'ouverture convergeoit de toutes parts, & la veine devenoit enſuite plus mince & plus accélérée à la diſtance d'un demi pouce de l'ouverture que dans l'ouverture même, dans la raiſon de 25×25 à 21×21, ou de 17 à 12 à peu près, c'eſt-à-dire, environ dans la raiſon ſouſdoublée de deux à un. Et il eſt certain, par l'expérience, que la quantité de l'eau qui s'écoula en un temps donné par l'ouverture circulaire faite dans le fond du vaſe, eſt la même que celle qui doit s'écouler dans le même temps avec la vîteſſe dont on a parlé, non par cette ouverture, mais par une ouverture circulaire dont le diamétre eſt au diamétre de cette premiere ouverture comme 21 à 25. Donc cette eau qui s'écoule a, à peu près, la même vîteſſe en embas, dans cette même ouverture, qu'un corps grave peut acquérir en tombant & en parcourant dans ſa chute la moitié de la hauteur de l'eau ſtagnante dans le vaſe. Mais après être ſortie du vaſe, elle s'accélére en convergeant juſqu'à ce qu'elle ſoit arrivée à une diſtance du trou qui ſoit preſqu'égale à ſon diamétre, & qu'elle ait acquis une vîteſſe plus grande, en raiſon ſouſdoublée de 2 à 1 à peu prés, que celle qu'un corps grave peut acquérir en tombant & en parcourant à peu près dans ſa chute toute la hauteur de l'eau qui eſt en repos dans le vaſe.

Fig. 44.

Fig. 45.

Dans ce qui ſuit, le diamétre de la veine ſera donc repréſenté par la plus petite ouverture que nous nommerons *EF*. Soit ſuppoſé un plan *VW* parallele à l'ouverture *EF* & placé au-deſſus

d'elle à une diſtance égale à peu près au diamétre de cette ouverture, & ſoit dans ce plan *VW* une ouverture *ST* plus grande que la premiere; que la veine paſſe auſſi par cette ouverture, que cette veine empliſſe exactement l'ouverture inférieure *EF*, le diamétre de l'ouverture ſupérieure étant au diamétre de l'ouverture inférieure comme 25 à 21 à peu près. De cette façon la veine paſſera perpendiculairement par l'ouverture inférieure; & la quantité de l'eau qui s'écoulera ſera la même à peu près, eu égard à la grandeur de l'ouverture, que celle que la ſolution du Problême requiert. Enſorte qu'on peut regarder l'eſpace renfermé par ces deux plans & la veine d'eau qui s'écoule, comme le fond du vaſe. Afin que la ſolution du problême devienne plus ſimple & plus mathématique, il vaut mieux prendre le ſeul plan inférieur pour le fond du vaſe, & ſuppoſer que l'eau qui paſſoit à travers la glace, ou l'antonnoir, & qui s'écouloit du vaſe par l'ouverture *E F* faite dans le plan inférieur conſervoit toujours ſon mouvement, & la glace ſon état de repos. Soit donc, dans ce qui ſuivra, *ST* le diamétre du trou circulaire décrit du centre *Z* par lequel la cataracte s'écoule du vaſe lorſque toute l'eau contenue dans le vaſe eſt fluide. Et ſoit *EF* le diamétre du trou rempli exactement par la cataracte en tombant, ſoit que l'eau ſorte du vaſe par le trou ſupérieur *ST*, ſoit qu'elle tombe par les parois de la glace qui eſt dans le vaſe, comme à travers un antonnoir. Si le diamétre *ST* du trou ſupérieur eſt au diamétre *EF* du trou inférieur comme 25 à 21 à peu près, & que la diſtance perpendiculaire entre les plans des trous ſoit égale au diamétre du trou inférieur *EF*. La vîteſſe de l'eau, qui s'écoule du vaſe par le trou *ST*, ſera dans ce même trou celle que le corps peut acquérir en tombant de la moitié de la hauteur *IZ*: mais la vîteſſe de l'une & l'autre cataracte qui tombent ſera dans l'ouverture *EF* celle que le corps peut acquérir en tombant de toute la hauteur *IG*.

Fig. 45.

Cas 2. Si le trou *EF* n'eſt pas dans le milieu du fond du vaſe,

Du Mouvement des Corps.

mais qu'il ſoit placé quelqu'autre part : l'eau s'écoulera avec la même vîteſſe qu'auparavant, pourvû que la grandeur du trou ſoit la même. Car quoiqu'un corps grave employe un temps plus long à tomber à la même profondeur par une ligne oblique, que par une ligne perpendiculaire, il acquiert, dans l'un & l'autre cas, la même vîteſſe en tombant, comme *Galilée* l'a démontré.

Fig. 45.

Cas 3. La vîteſſe de l'eau qui s'écouleroit par une ouverture faite dans un des côtés du vaſe ſeroit encore la même. Car ſi l'ouverture eſt petite, & que l'intervalle entre les ſuperficies *AB* & *KL* ſoit preſque nul, le filet d'eau qui ſortira horiſontalement prendra une forme parabolique : & on connoîtra, par le paramétre de cette parabole, que la vîteſſe de l'eau qui s'écoule eſt celle qu'un corps pourroit acquérir en tombant de la hauteur *HG* ou *IG* de l'eau qui eſt en repos dans le vaſe. Et ayant fait l'expérience, j'ai trouvé que ſi la hauteur de l'eau qui eſt en repos dans le vaſe eſt de 20 pouces au-deſſus du trou, & que la hauteur du trou au-deſſus du plan parallele à l'horiſon ſoit auſſi de 20 pouces, le filet d'eau qui jaillira tombera dans ce plan, environ à la diſtance de 37 pouces de la perpendiculaire abbaiſſée de ce trou ſur le plan. Si on faiſoit abſtraction de la réſiſtance, le filet d'eau devroit tomber dans ce plan à la diſtance de quarante pouces, le paramétre de la parabole que ce filet d'eau formeroit étant de 80 pouces.

Cas 4. De plus, l'eau qui s'écoule ſortiroit avec la même vîteſſe ſi quelque cauſe la faiſoit jaillir en en-haut. Car un petit filet d'eau monteroit par un mouvement perpendiculaire à la hauteur *GH* ou *GI* de l'eau qui eſt en repos dans le vaſe, ſi ſon élévation n'étoit un peu diminuée par la réſiſtance de l'air, & par conſéquent elle s'écoule avec la vîteſſe qu'elle pourroit acquérir en tombant de cette hauteur. Chaque particule de l'eau qui eſt en repos dans le vaſe eſt également preſſée de tous côtés, (par la Prop. 19. du Liv. 2.) & en cédant à cette preſſion elle eſt portée avec la même force de toutes parts, ſoit qu'elle deſcende

par le trou fait dans le fond du vaſe, ſoit qu'elle s'écoule horiſontalement par un trou fait dans un de ſes côtés, ſoit qu'elle ſorte par un canal & qu'enſuite elle monte par un petit trou fait dans la partie ſupérieure du canal. La vîteſſe avec laquelle l'eau s'écoulera ſera celle que nous avons déterminée dans cette Propoſition ; c'eſt non ſeulement ce que l'on peut conclure par le raiſonnement, mais encore ce qui eſt évident par les expériences très-connues que nous venons de rapporter. Fig. 45.

Cas 5. La vîteſſe de l'eau qui s'écoule eſt la même, ſoit que la forme de l'ouverture ſoit circulaire, ſoit qu'elle ſoit quarrée, triangulaire, ou de figure quelconque, pourvu que ſa capacité ſoit la même. Car la vîteſſe de l'eau qui s'écoule ne dépend point de la figure de l'ouverture, mais de ſa hauteur au-deſſous du plan *KL*.

Cas 6. Si la partie inférieure du vaſe *ABCD* eſt plongée dans une eau dormante, & que la hauteur de l'eau dormante au-deſſus du fond du vaſe ſoit *GR* : la vîteſſe avec laquelle l'eau qui eſt dans le vaſe s'écoulera par l'ouverture *EF* dans l'eau ſtagnante ſera celle que l'eau pourroit acquérir en tombant de la hauteur *IR*. Car tout le poids de l'eau contenue dans le vaſe, & qui eſt au-deſſous de la ſuperficie de l'eau dormante, ſera ſoutenu en équilibre par le poids de l'eau dormante, donc, il accélérera très-peu le mouvement de l'eau qui deſcend dans le vaſe ; ce qu'on peut voir trés-clairement par les expériences, en meſurant les temps dans leſquels l'eau s'écoule.

Cor. 1. Delà, ſi la hauteur *CA* de l'eau eſt prolongée en *K*, enſorte que *AK* ſoit à *CK* en raiſon doublée, de l'aire du trou fait dans une partie quelconque du fond du vaſe à l'aire du cercle *AB* : la vîteſſe de l'eau qui s'écoule ſera égale à la vîteſſe que l'eau peut acquérir en tombant, & en parcourant dans ſa chute la hauteur *KC*.

Cor. 2. Et la force qui peut produire tout le mouvement de l'eau qui s'écoule eſt égale au poids de la colonne d'eau cylindri-

Du Mouvement des Corps.

que dont la baſe eſt l'ouverture EF, & la hauteur $2GI$ ou $2CK$. Car dans le temps que l'eau jailliſſante pourroit égaler cette colonne, elle pourroit acquérir, en tombant par ſon poids de la hauteur GI, la même vîteſſe que celle avec laquelle elle jaillit.

Fig. 45.

Cor. 3. Le poids de toute l'eau dans le vaſe $ABCD$ eſt à la partie de ce poids qui eſt employée à faire écouler l'eau comme la ſomme des cercles AB & EF au double du cercle EF. Car ſoit IO moyenne proportionnelle entre IH & IG; l'eau qui ſort par l'ouverture EF, pendant le temps qu'une goutte tombant de I employe à parcourir la hauteur IG, ſera égale au cylindre dont la baſe eſt le cercle EF & la hauteur $2IG$, c'eſt-à-dire, au cylindre dont la baſe eſt le cercle AB & la hauteur $2IO$, car le cercle EF eſt au cercle AB en raiſon ſouſdoublée de la hauteur IH à la hauteur IG, c'eſt-à-dire, dans la raiſon ſimple de la moyenne proportionnelle IO à la hauteur GI: & dans le temps qu'une goutte tombant de I peut parcourir la hauteur IH, l'eau qui s'écoule ſera égale au cylindre dont la baſe eſt le cercle AB & la hauteur $2IH$: & dans le temps dans lequel la goutte en tombant de I par H en G décrit la différence des hauteurs HG, l'eau qui ſort, c'eſt-à-dire, l'eau totale dans le ſolide $ABNFEM$ ſera égale à la différence des cylindres, c'eſt-à-dire, au cylindre dont la baſe eſt AB & la hauteur $2HO$. Et par conſéquent, l'eau totale contenue dans le vaſe $ABCD$ eſt à toute l'eau qui tombe dans le ſolide $ABNFEM$ comme HG à $2HO$, c'eſt-à-dire, comme $HO+OG$ à $2HO$, ou $IH+IO$ à $2IH$. Mais le poids de toute l'eau dans le ſolide $ABNFEM$ eſt employé à la faire écouler: & par conſéquent, le poids de toute l'eau du vaſe eſt à la partie de ce poids employée à produire l'écoulement, comme $IH+IO$ à $2IH$, & par conſéquent, comme la ſomme des cercles EF & AB au double du cercle EF.

Cor. 4. Et delà, le poids de toute l'eau contenue dans le vaſe $ABCD$ eſt à l'autre partie du poids que le fonds du vaſe ſoutient

tient, comme la ſomme des cercles *AB* & *EF* eſt à leur différence *EF*.

Cor. 5. La partie du poids que le fond du vaſe ſoutient, eſt à l'autre partie du poids qui eſt employée à l'écoulement de l'eau, comme la différence des cercles *AB* & *EF* eſt au double du plus petit cercle *EF*, ou comme l'aire du fond du vaſe au double de l'aire du trou. Fig. 45.

Cor. 6. Mais la partie du poids, par laquelle ſeule le fond eſt preſſé, eſt au poids total de l'eau qui incombe perpendiculairement ſur le fond, comme le cercle *AB* eſt à la ſomme des cercles *AB* & *EF*, ou comme le cercle *AB* eſt à l'excès du double du cercle *AB* ſur le fond du vaſe. Car la partie du poids par laquelle ſeule le fond eſt preſſé eſt (par le Cor. 4.) au poids de toute l'eau contenue dans le vaſe, comme la différence des cercles *AB* & *EF* eſt à la ſomme de ces mêmes cercles : & le poids de toute l'eau contenue dans le vaſe eſt au poids de toute l'eau incombante perpendiculairement ſur le fond, comme le cercle *AB* eſt à la différence des cercles *AB* & *EF*. Donc la partie du poids, par laquelle ſeule le fond eſt preſſé, eſt au poids de toute l'eau qui incombe perpendiculairement ſur le fond, comme le cercle *AB* eſt à la ſomme des cercles *AB* & *EF*, ou comme l'excès du double du cercle *AB* ſur le fond.

Cor. 7. Si dans le milieu du trou *EF* on place un petit cercle *PQ* décrit du centre *G* & parallele à l'horiſon : le poids de l'eau que ce petit cercle ſoutient eſt plus grand que la troiſiéme partie du poids du cylindre d'eau, dont la baſe eſt ce petit cercle & la hauteur *GH*. Car ſoit *ABNFEM* la cataracte ou la colonne d'eau qui tombe, & dont l'axe eſt *GH* comme ci-devant, & ſuppoſez que toute l'eau qui eſt dans le vaſe ſe géle, tant celle qui entoure la cataracte que celle qui eſt au-deſſus du petit cercle, & dont la fluidité n'eſt pas néceſſaire pour opérer la plus vîte deſcente de l'eau. Soit de plus, *PQH* la colonne d'eau congelée au-deſſus du petit cercle, dont le ſommet ſoit *H* & la hauteur Fig. 46.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

GH. Et ſuppoſez que cette cataracte vienne à tomber par ſon poids entier, & qu'elle n'incombe plus ſur *PHQ*, mais qu'elle coule ſans éprouver aucun frottement, ſi ce n'eſt, peut-être, vers le ſommet même de la glace vers lequel la cataracte dans le commencement de la chute commence à être un peu concave. Comme l'eau congelée *AMEC*, *BNFD* autour de la cataracte eſt convexe par la ſuperficie interne *AME*, *BNF* qui eſt du côté de la cataracte, de même cette colonne *PQH* ſera convexe vers la cataracte, & par conſéquent, elle ſera plus grande que le cône dont la baſe ſeroit le petit cercle *PQ* & la hauteur la ligne *GH*, c'eſt-à-dire, qu'elle ſera plus grande que le tiers du cylindre décrit ſur cette même baſe & ayant la même hauteur. Or ce petit cercle ſoutient le poids de cette colonne, c'eſt-à-dire, un poids qui eſt plus grand que le poids du cône, ou que celui de la troiſiéme partie de ce cylindre.

Fig. 46.

Cor. 8. Le poids de l'eau que le très-petit cercle *PQ* ſoutient, paroît être moindre que le poids des deux tiers du cylindre d'eau dont la baſe eſt le petit cercle & la hauteur *GH*: car les choſes poſées ci-deſſus ſubſiſtant, qu'on ſuppoſe décrite la moitié d'un ſphéroïde dont la baſe eſt ce petit cercle, & le demi axe ou la hauteur *HG*. Cette figure ſera égale aux deux tiers de ce cylindre, & renfermera la colonne d'eau congelée *PQH* dont le petit cercle *PQ* ſoutient le poids: car afin que le mouvement de l'eau ſoit fort direct, il faut que la ſuperficie externe de cette colonne concourre avec la baſe *PQ* ſous un angle un peu aigu, à cauſe que l'eau eſt perpétuellement accélérée en tombant, & qu'en vertu de ſon accélération la colonne devient plus mince; & comme cet angle eſt moindre qu'un droit, cette colonne, par embas, ſera renfermée dans l'intérieur du demi ſphéroïde, & elle ſe terminera en pointe par le haut, afin que le mouvement horizontal de l'eau ne ſoit pas infiniment plus prompt vers le ſommet du ſphéroïde que ſon mouvement vers l'horiſon. Et plus le cercle *PQ* ſera petit, plus le haut de la colonne ſera reſſerré;

lorſque ce cercle ſera infiniment diminué, l'angle PHQ diminuera auſſi à l'infini, & par conſéquent la colonne ſera renfermée dans l'intérieur du demi ſphéroïde. Cette colonne eſt donc moindre que le demi ſphéroïde, ou que les deux tiers du cylindre dont la baſe eſt ce petit cercle & la hauteur GH; or ce petit cercle ſoutient la force de l'eau, laquelle eſt égale au poids de cette colonne, puiſque le poids de l'eau environnante eſt employé à la faire écouler. Fig. 46.

Cor. 9. Le poids de l'eau que le très-petit cercle PQ ſoutient, eſt égal au poids du cylindre d'eau dont la baſe eſt ce petit cercle & la hauteur $\frac{1}{2}\ GH$ à peu près. Car ce poids eſt moyen arithmétique entre le poids du cône, & celui du demi ſphéroïde dont on a parlé. Mais ſi ce petit cercle n'étoit pas extrêmement petit, & qu'on l'augmentât juſqu'à ce qu'il fut égal à l'ouverture EF, il ſoutiendroit le poids de toute l'eau qui s'appuie deſſus perpendiculairement, c'eſt-à-dire, le poids du cylindre d'eau, dont la baſe eſt ce petit cercle & la hauteur GH.

Cor. 10. Et (ſelon moi) le poids que ce petit cercle ſoutient eſt toujours au poids du cylindre d'eau, dont la baſe eſt ce petit cercle & la hauteur $\frac{1}{2}\ GH$, comme EF^2 eſt à $EF^2 - \frac{1}{2}\ PQ^2$, ou comme le cercle EF eſt à l'excès de ce cercle ſur la moitié du petit cercle PQ à peu près.

LEMME IV.

La réſiſtance d'un cylindre qui avance uniformement ſelon ſon axe, ne change point, ſoit que ſon axe ſoit augmenté ou diminué; elle eſt donc la même que la réſiſtance du cercle décrit ſur le même diamétre, & qui s'avance avec la même viteſſe ſelon une ligne droite perpendiculaire à ſon plan.

Car les côtés du cylindre s'oppoſent très-peu à ſon mouvement: & le cylindre ſe change en cercle ſi on diminue infiniment ſon axe.

PROPOSITION XXXVII. THÉORÉME XXIX.

La réſiſtance cauſée par la grandeur de la ſection tranſverſale d'un cylindre qui ſe meut uniformement ſelon ſon axe dans un milieu comprimé, infini, & non élaſtique, eſt à la force qui peut produire ou arrêter tout le mouvement qu'il a pendant qu'il parcourt le quadruple de ſon axe, comme la denſité du milieu eſt à la denſité du cylindre à peu près.

Fig. 47. Car ſi le vaſe $ABCD$ touche par ſon fond CD la ſuperficie de l'eau ſtagnante, & que l'eau s'écoule de ce vaſe dans l'eau ſtagnante par le canal cylindrique $EFTS$ perpendiculaire à l'horiſon, qu'on place le petit cercle PQ, qui eſt parallele à l'horiſon, où l'on voudra dans le milieu du canal, & qu'on prolonge CA en K, enſorte que AK ſoit à CK dans la raiſon doublée de la raiſon que l'excès de l'orifice EF du canal ſur le petit cercle PQ a au cercle AB : il eſt clair, (par le cas 5, le cas 6, & le Cor. 1. de la Prop. 36.) que la vîteſſe de l'eau qui paſſe par l'eſpace annulaire entre le petit cercle & les côtés du vaſe, ſera celle que l'eau peut acquérir en tombant, & en parcourant dans ſa chute la hauteur KC ou IG.

Et, (par le Cor. 10. de la Prop. 36.) ſi on ſuppoſe la largeur du vaſe infinie, enſorte que la petite ligne HI s'évanouiſſe, & que les hauteurs IG, HG deviennent égales ; la force de l'eau qui s'écoule dans le petit cercle ſera au poids du cylindre dont la baſe eſt ce petit cercle & la hauteur $\frac{1}{2}IG$, comme EF^2 eſt à $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ à peu près. Car la force de l'eau qui s'écoule par un mouvement uniforme dans tout le canal, ſera la même dans le petit cercle PQ en quelque lieu du canal qu'il ſoit placé.

Soit à préſent ſuppoſé que les ouvertures EF, ST du canal ſoient fermées, que le petit cercle monte dans ce fluide comprimé de toutes parts, & qu'il force, par ſon aſcenſion, l'eau ſupérieure de deſcendre par l'eſpace annulaire compris entre le petit

Fig. 47.

cercle & les côtés du canal : la vîteſſe du petit cercle qui monte, ſera à la vîteſſe de l'eau qui deſcend, comme la différence des cercles EF & PQ au cercle PQ, & la vîteſſe du petit cercle qui monte ſera à la ſomme des vîteſſes, c'eſt-à-dire, à la vîteſſe relative de l'eau deſcendante avec laquelle elle ſurpaſſe celle du cercle aſcendant, comme la différence des cercles EF, PQ eſt au cercle EF, ou comme $EF^2 - PQ^2$ eſt à EF^2. Soit cette vîteſſe relative égale à la vîteſſe avec laquelle on a fait voir ci-deſſus que l'eau paſſoit par ce même eſpace annulaire pendant que le petit cercle demeuroit immobile, c'eſt-à-dire, à la vîteſſe que l'eau peut acquérir en tombant & en parcourant dans ſa chute la hauteur IG : la force de l'eau dans le petit cercle qui monte ſera la même qu'auparavant, (par le Cor. 5. des Loix) c'eſt-à-dire, que la réſiſtance du petit cercle qui monte ſera au poids du cylindre d'eau dont la baſe eſt ce petit cercle & la hauteur $\frac{1}{2} IG$, comme EF^2 eſt à $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$ à peu près. Mais la vîteſſe du petit cercle ſera à la vîteſſe que l'eau peut acquérir en tombant & en parcourant dans ſa chute la hauteur IG, comme $EF^2 - PQ^2$ eſt à EF^2.

Qu'on augmente la largeur du canal à l'infini : les raiſons entre $EF^2 - PQ^2$ & EF^2, ainſi que la raiſon entre EF^2, & $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$ deviendront à la fin des raiſons d'égalité. Et par conſéquent la vîteſſe du petit cercle ſera alors celle que l'eau peut acquérir en tombant & en parcourant dans ſa chute la hauteur IG, mais ſa réſiſtance ſera égale au poids du cylindre dont la baſe eſt ce petit cercle & la hauteur la moitié de la hauteur IG, de laquelle hauteur le cylindre doit tomber pour acquérir la même vîteſſe que le petit cercle qui remonte ; & le cylindre parcourera avec cette viteſſe & dans le temps employé à tomber le quadruple de ſon axe. Mais la réſiſtance du cylindre qui s'avance avec cette vîteſſe ſelon ſon axe eſt la même que la réſiſtance du petit cercle (par le Lemme 4.). Donc elle eſt égale, à peu près, à la force qui peut produire le mouvement qu'il a

pendant qu'il parcourt le quadruple de ſon axe.

Si on augmente ou diminue l'axe du cylindre, ſon mouvement, ainſi que le temps employé à parcourir le quadruple de cet axe augmentera ou diminuera dans la même raiſon, donc cette force, qui peut produire ou détruire le mouvement augmenté ou diminué, pendant un temps pareillement augmenté ou diminué, ne changera point; & elle eſt par conſéquent égale à la réſiſtance du cylindre, car elle demeure toujours la même, par le Lemme 4.

Si la denſité du cylindre augmente ou diminue, ſon mouvement, ainſi que la force qui peut produire ou détruire le mouvement dans le même temps augmentera ou diminuera dans la même raiſon. Donc la réſiſtance d'un cylindre quelconque ſera à la force par laquelle tout ſon mouvement peut être produit ou détruit, pendant le temps qu'il employe à parcourir le quadruple de ſon axe, comme la denſité du milieu eſt à la denſité du cylindre à peu près. *C. Q. F. D.*

Le fluide doit être comprimé pour qu'il ſoit continu, & il doit être continu & non élaſtique, afin que toute la preſſion qui vient de ſa compreſſion ſe propage en un inſtant, & qu'agiſſant également ſur toutes les parties du corps mû, il ne change point ſa réſiſtance. La preſſion qui eſt l'effet du mouvement du corps eſt employée à mouvoir les parties du fluide, & produit de la réſiſtance. Mais la preſſion qui provient de la compreſſion du fluide, quelque forte qu'elle ſoit, ſi elle ſe propage en un inſtant, ne produit aucun mouvement dans les parties du fluide continu, ni aucun changement dans le mouvement; ainſi elle n'augmente ni ne diminue la réſiſtance. Aſſurément l'action du fluide qui vient de ſa compreſſion ne peut pas être plus forte dans les parties poſtérieures du corps mû que dans ſes parties antérieures, donc la réſiſtance dont on a parlé dans cette Propoſition ne peut diminuer & ne ſera pas plus forte dans les parties antérieures que dans les poſtérieures, pourvu que ſa propagation ſe faſſe avec

infiniment plus de vîteſſe que le mouvement du corps preſſé. Et ſi le fluide eſt continu, & qu'il ne ſoit point élaſtique, cette propagation ſe fera infiniment plus vîte & ſera inſtantanée.

Cor. 1. Les réſiſtances qu'éprouvent les cylindres qui s'avancent uniformement dans le ſens de leurs axes dans des milieux continus & infinis, ſont en raiſon compoſée de la raiſon doublée des vîteſſes, de la raiſon doublée des diamétres, & de la raiſon de la denſité des milieux.

Cor. 2. Si la largeur du canal n'eſt pas augmentée à l'infini, mais que le cylindre renfermé dans un milieu en repos avance dans le ſens de ſon axe, & qu'en même temps ſon axe coïncide avec celui du canal : la réſiſtance qu'il éprouvera ſera à la force par laquelle tout ſon mouvement peut être produit ou détruit, dans le temps qu'il employe à parcourir le quadruple de ſon axe, en raiſon compoſée de la raiſon ſimple de EF^2 à $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, de la raiſon doublée de EF^2 à $EF^2 - PQ^2$, & de la raiſon de la denſité du milieu à la denſité du cylindre. Fig. 47.

Cor. 3. Les mêmes choſes étant poſées, & la longueur L étant au quadruple de l'axe du cylindre dans une raiſon compoſée de la raiſon ſimple de $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ à EF^2 & de la raiſon doublée de $EF^2 - PQ^2$ à EF^2 : la réſiſtance qu'éprouvera le cylindre ſera à la force qui peut produire ou détruire tout ſon mouvement, pendant le temps employé à parcourir la longueur L, comme la denſité du milieu eſt à la denſité du cylindre.

SCHOLIE.

Dans cette Propoſition nous avons trouvé la réſiſtance qui vient de la grandeur de la ſection tranſverſale du cylindre ſeulement, & nous avons négligé la partie de la réſiſtance qui peut venir de l'obliquité des mouvemens. Car de même que dans le premier cas de la Prop. 36. l'obliquité des mouvemens, par leſquels les parties d'eau contenues dans le vaſe convergeoient de toutes parts vers l'ouverture EF, empêchoit l'écoulement de cette

eau par cette ouverture : ainſi dans cette Propoſition, l'obliquité des mouvemens, par leſquels les parties de l'eau preſſées par le bout antérieur du cylindre, cedent à la preſſion & divergent de tous côtés, retarde leur paſſage par les lieux qui ſont autour des parties antécédentes du cylindre en allant vers ſes parties poſtérieures, augmente la réſiſtance, & fait que le fluide eſt agité à une plus grande diſtance, & cela, à peu près, dans la même raiſon, que celle dans laquelle l'écoulement de l'eau hors du vaſe diminue, c'eſt-à-dire, en raiſon doublée de 25 à 21 à peu près. Et de même que dans le premier cas de cette Propoſition, nous avons fait enſorte que les parties de l'eau paſſaſſent en très-grand nombre perpendiculairement par l'ouverture EF, en ſuppoſant que toute l'eau contenue dans le vaſe qui étoit gelée autour de la cataracte, & dont le mouvement étoit oblique & inutile, demeuroit en repos : ainſi dans cette Propoſition, afin que l'obliquité des mouvemens ſoit ôtée, & que les parties de l'eau cédant très-facilement, par un mouvement direct & très-prompt, prêtent un paſſage très-facile au cylindre, & qu'il ne reſte que la réſiſtance qui vient de la grandeur de la ſection tranſverſale, laquelle on ne peut diminuer qu'en diminuant le diamétre du cylindre, il faut ſuppoſer que les parties du fluide, dont les mouvemens ſont obliques & inutiles, & qui cauſent de la réſiſtance, ſoient en repos entr'elles à chaque bout du cylindre, qu'elles coherent entr'elles, & qu'elles joignent le cylindre.

Fig. 48. Soient, $ABCD$ un rectangle, AE & BE deux arcs paraboliques ayant pour axe AB, & pour paramétre une ligne qui ſoit à l'eſpace HG, que le cylindre doit parcourir en tombant, pendant qu'il acquiert ſa vîteſſe, comme HG à $\frac{1}{2}AB$. Soient auſſi CF & DF deux autres arcs paraboliques, ayant pour axe CD, & un paramétre quadruple du précédent; la circonvolution de la figure autour de l'axe EF produira un ſolide, dont la partie du milieu $ABCD$ ſera le cylindre dont nous parlons, & les extrémités ABE & CDF renfermeront des parties du fluide qui ſeront en repos entr'elles

tr'elles, & qui s'étant durcies formeront deux corps ſolides qui ſeront adhérens aux deux bouts du cylindre comme une tête & une queue. Et la réſiſtance du ſolide *EACFDB*, qui s'avance vers *E* dans le ſens de ſon axe *FE*, ſera à peu près celle dont nous avons parlé dans cette Prop. c'eſt-à-dire, qu'elle aura à la force par laquelle tout le mouvement du cylindre peut-être détruit ou produit, pendant le temps qu'il employe à parcourir la longueur 4 *AC* d'un mouvement uniformement continué, la même raiſon à peu près, qu'à la denſité du fluide à la denſité du cylindre. Et par cette force la réſiſtance ne peut pas être moindre que dans la raiſon de 2 à 3 par le Cor. 7. de la Prop. 36. Fig. 48.

LEMME V.

Si un cylindre, une ſphere & un ſphéroïde, dont les largeurs ſont égales, ſont placés ſucceſſivement dans le milieu d'un canal cylindrique de façon que leurs axes coïncident avec l'axe du canal : ces corps s'oppoſeront également à l'écoulement de l'eau par le canal.

Car les eſpaces entre le canal & le cylindre, la ſphere & le ſphéroïde, par leſquels eſpaces l'eau paſſe, ſont égaux : & l'eau paſſe également par des eſpaces égaux.

Cela eſt ainſi en ſuppoſant que toute l'eau, dont la fluidité n'eſt pas néceſſaire pour que l'eau paſſe très-vîte ſe géle au-deſſus du cylindre, de la ſphere & du ſphéroïde, comme je l'ai expliqué dans le Cor. 7. de la Prop. 36.

LEMME VI.

Les mêmes choſes étant poſées, les corps dont on vient de parler ſont preſſés également par l'eau qui s'écoule par le canal.

C'eſt ce qui eſt clair, par le Lemme 5. & par la troiſiéme loi du mouvement, car l'eau & ces corps agiſſent mutuellement & également l'un ſur l'autre.

LEMME VII.

Si l'eau eſt en repos dans le canal, & que ces corps ſe meuvent avec une viteſſe égale dans le canal vers des côtés oppoſés, leurs réſiſtances ſeront égales entr'elles.

C'eſt ce qui eſt clair par le Lemme précédent, car les mouvemens relatifs demeurent les mêmes entr'eux.

SCHOLIE.

Il en eſt de même de tous les corps convexes & ronds dont les axes coïncident avec l'axe du canal. Il peut ſe trouver quelque différence par le plus ou le moins de frottement; mais nous avons ſuppoſé dans ces Lemmes que les corps étoient parfaitement polis, que la ténacité, & les frottemens du milieu étoient nuls, & que les parties du fluide, qui par leurs mouvemens obliques & inutiles peuvent troubler, retarder & empêcher l'écoulement de l'eau par le canal, étoient en repos entr'elles, comme ſi elles étoient durcies par la gelée, & qu'elles étoient attachées aux corps par leurs parties antérieures & poſtérieures, comme je l'ai fait voir dans le ſcholie de la Propoſition précédente. Dans les Propoſitions ſuivantes on traite de la moindre réſiſtance que peuvent éprouver les ſolides de circonvolution dont les plus grandes ſections ſont données. Les corps qui nâgent dans des fluides, lorſqu'ils ſe meuvent en ligne droite, font que le fluide s'éleve vers leurs parties antérieures, & s'abbaiſſent vers les poſtérieures, ſurtout ſi leurs formes ſont obtuſes; & que par là ils éprouvent une réſiſtance un peu plus grande que ſi la forme de leurs parties antérieures & poſtérieures étoit aigue. Et les corps mûs dans des fluides élaſtiques, s'ils ſont obtus par leurs extrémités, condenſent un peu plus le fluide vers leurs parties antérieures, & le dilatent un peu plus vers les poſtérieures; & par conſéquent, ils éprouvent une réſiſtance un peu plus grande

que s'ils étoient aigus par leurs extrémités. Dans ces Lemmes, & dans ces Propoſitions nous ne parlons pas des fluides élaſtiques, mais ſeulement de ceux qui ne le ſont pas ; nous ne parlons pas non plus des corps qui nâgent ſur les fluides, mais de ceux qui y ſont plongés entierement. Et lorſqu'on connoît la réſiſtance que ces corps éprouvent dans les fluides non élaſtiques, il ſuffira d'augmenter un peu cette réſiſtance, tant dans les fluides élaſtiques comme dans l'air, par exemple, que dans les ſuperficies des eaux ſtagnantes comme les marais & les mers.

PROPOSITION XXXVIII. THÉORÉME XXX.

La réſiſtance d'un globe qui avance uniformement dans un milieu infini, comprimé & non élaſtique, eſt à la force par laquelle tout ſon mouvement peut être détruit ou produit, pendant le temps qu'il employe à parcourir les $\frac{3}{8}$ parties de ſon diamétre, comme la denſité du fluide eſt à la denſité du globe à peu près.

Car le globe eſt au cylindre circonſcript comme 2 eſt à 3 ; & par conſéquent, la force qui peut détruire tout le mouvement du cylindre, pendant qu'il parcourt la longueur de 4 de ſes diamétres, détruira tout le mouvement du globe pendant qu'il parcourera les deux tiers de cette longueur, c'eſt-à-dire, $\frac{3}{8}$ parties de ſon propre diamétre. Et la réſiſtance du cylindre eſt à cette force, à peu près, comme la denſité du fluide eſt à la denſité du cylindre ou du globe, par les Lemmes 5, 6 & 7. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Les réſiſtances des globes dans des milieux infinis & comprimés, ſont en raiſon compoſée de la raiſon doublée de la vîteſſe, de la raiſon doublée des diamétres, & de la raiſon de la denſité des milieux.

Cor. 2. La plus grande vîteſſe avec laquelle un globe, par la force de ſon poids comparatif, peut deſcendre dans un milieu réſiſtant, eſt celle que ce même globe peut acquérir par le même poids, lorſqu'il tombe ſans éprouver de réſiſtance, & qu'il parcourt dans ſa chute un eſpace qui eſt aux $\frac{3}{4}$ de ſon diamétre,

comme la denſité du globe eſt à la denſité du fluide. Car le globe, dans le temps qu'il a employé à tomber, & par la vîteſſe qu'il aura acquiſe en tombant, décrira un eſpace qui ſera aux $\frac{3}{8}$ parties de ſon diamétre comme la denſité du globe à la denſité du fluide ; & la force du poids qui produit ce mouvement ſera à la force qui pourroit le produire dans le temps que le globe parcoureroit les $\frac{3}{8}$ parties de ſon diamétre avec la même vîteſſe, comme la denſité du fluide eſt à la denſité du globe. Donc, par cette Propoſition, la force du poids ſera égale à la réſiſtance, & par conſéquent elle ne peut accélérer le globe.

Cor. 3. La denſité du globe & ſa vîteſſe au commencement du mouvement étant données, ainſi que la denſité du fluide comprimé & en repos, dans lequel le globe ſe meut ; on a, pour un temps quelconque, la vîteſſe du globe, ſa réſiſtance & l'eſpace qu'il décrit, par le Cor. 7. de la Prop. 35.

Cor. 4. Un globe qui ſe meut dans un fluide comprimé en repos, & de la même denſité que lui, a plutôt perdu la moitié de ſon mouvement qu'il n'auroit décrit la longueur de deux de ſes diamétres, par le même Cor. 7. de la Prop. 35.

PROPOSITION XXXIX. THÉORÉME XXXI.

La réſiſtance d'un globe qui avance uniformement dans un fluide renfermé & comprimé dans un canal cylindrique, eſt à la force, par laquelle tout ſon mouvement peut être produit ou détruit, dans le temps pendant lequel il parcourt $\frac{3}{8}$ parties de ſon diamétre, dans une raiſon compoſée de la raiſon de l'orifice du canal à l'excès de cet orifice ſur la moitié du grand cercle du globe, de la raiſon doublée de l'orifice du canal à l'excès de cet orifice ſur le grand cercle du globe, & de la raiſon de la denſité du fluide à la denſité du globe à peu près.

Cette Propoſition eſt claire par le Cor. 2. de la Prop. 37. &

la démonſtration eſt du même genre que celle de la Prop. précédente.

SCHOLIE.

Dans les deux dernieres Propoſitions (comme dans le Lemme 5.) j'ai regardé comme gelée toute l'eau qui précede le globe & dont la fluidité augmente la réſiſtance qu'il éprouve. Si toute cette eau venoit à ſe fondre, la réſiſtance ſeroit un peu augmentée. Mais cette augmentation ſeroit très-peu de choſe dans ces Propoſitions & l'on peut la négliger, parce que la ſuperficie convexe du globe fait preſque le même effet que la glace.

PROPOSITION XL. PROBLÈME IX.

Trouver par les phénomenes la réſiſtance d'un globe qui ſe meut dans un milieu comprimé & très-fluide.

Soit A le poids du globe dans le vuide, B ſon poids dans un milieu réſiſtant, D ſon diamétre, F l'eſpace qui eſt à $\frac{4}{3}D$ comme la denſité du globe eſt à la denſité du milieu, c'eſt-à-dire, comme A eſt à $A-B$; que G ſoit le temps dans lequel le globe tombant par ſon poids B, ſans trouver de réſiſtance, parcourt l'eſpace F, & que H ſoit la vîteſſe que ce globe a acquiſe dans ſa chute. La vîteſſe H ſera la plus grande vîteſſe avec laquelle le globe peut deſcendre par ſon poids B dans un milieu réſiſtant, par le Cor. 2. de la Prop. 38. & la réſiſtance que le globe éprouve, en deſcendant avec cette vîteſſe, ſera égale à ſon poids B: mais la réſiſtance qu'il éprouve avec une autre vîteſſe quelconque ſera au poids B en raiſon doublée de cette vîteſſe à la plus grande vîteſſe H, par le Cor. 1. de la Prop. 38.

C'eſt là la réſiſtance qui vient de l'inertie de la matiere du fluide. Mais celle qui vient de l'élaſticité, de la ténacité, & du frottement de ſes parties, ſe trouve de cette maniere.

Soit un globe abandonné à lui-même en ſorte qu'il tombe par ſon poids B dans le fluide, & ſoit P le temps qu'il employe à

tomber, exprimé en ſecondes, ſuppoſant de même le temps G exprimé en ſecondes. Soit trouvé le nombre N qui répond au logarithme 0, 43429448 19 $\frac{2P}{G}$, & ſoit L le logarithme du nombre $\frac{N+1}{N}$: la vîteſſe acquiſe en tombant ſera $\frac{N-1}{N+1}H$, mais la hauteur décrite ſera $\frac{2PF}{G}-1$, 3862943611 $F+4$, 6051701 86 LF. Si le fluide eſt aſſez profond, on peut négliger le terme 4, 6051701 86 LF; & on aura $\frac{2PF}{G}-1$, 3862943611 F pour la hauteur décrite à peu près. Tout cela eſt clair, par la Prop. 9. du Livre ſecond & ſes corollaires, en ſuppoſant que le globe n'éprouve aucune autre eſpéce de réſiſtance que celle qui vient de l'inertie de la matiere. Car s'il éprouvoit quelqu'autre réſiſtance, il deſcendroit plus lentement, & par la rétardation on connoîtroit la quantité de cette réſiſtance.

Afin de connoître plus facilement la vîteſſe & la chute du corps qui tombe dans un fluide, j'ai dreſſé la table ſuivante, dont la premiere colonne repréſente les temps de la chute; la ſeconde, les vîteſſes acquiſes en tombant, la plus grande vîteſſe étant 10000000; la troiſiéme, l'eſpace parcouru en tombant pendant ces temps, $2F$ étant l'eſpace que le corps parcourt dans le temps G avec la plus grande vîteſſe, & la quatriéme, les eſpaces parcourus dans les mêmes temps avec cette plus grande vîteſſe. Les nombres dans la quatriéme colonne ſont $\frac{2P}{G}$, & en ſouſtrayant le nombre 1, 3862944-4, 6051702 L, on aura les nombres de la troiſiéme colonne, & il faudra multiplier ces nombres par l'eſpace F afin d'avoir les eſpaces parcourus en tombant.

J'ai ajouté une cinquiéme colonne aux quatre premieres, laquelle contient les eſpaces parcourus par le corps, dans ces mêmes temps, lorſqu'il tomboit dans le vuide par la force de ſon poids comparatif B.

Temps. P	*Viteſſes du corps tombant dans le fluide.*	*Eſpaces parcourus en tombant dans le fluide.*	*Eſpaces parcourus par le plus grand mouvement.*	*Eſpaces parcourus en tombant dans le vuide.*
0,001 G	99999$\frac{29}{30}$	0,000001 F	0,002 F	0,000001 F
0,01 G	999967	0,0001 F	0,02 F	0,0001 F
0,1 G	9966799	0,0099834 F	0,2 F	0,01 F
0,2 G	19737532	0,0397361 F	0,4 F	0,04 F
0,3 G	29131261	0,0886815 F	0,6 F	0,09 F
0,4 G	37994896	0,1559070 F	0,8 F	0,26 F
0,5 G	46211716	0,2402290 F	1,0 F	0,35 F
0,6 G	53704957	0,3402706 F	1,2 F	0,16 F
0,7 G	60436778	0,4545405 F	1,4 F	0,49 F
0,8 G	66403677	0,5815071 F	1,6 F	0,64 F
0,9 G	71629787	0,7196609 F	1,8 F	0,81 F
1 G	76159416	0,8675617 F	2 F	1 F
2 G	96402758	2,6500055 F	4 F	4 F
3 G	99505475	4,6186570 F	6 F	9 F
4 G	99932930	6,6143765 F	8 F	16 F
5 G	99990920	8,6137964 F	10 F	25 F
6 G	99998771	10,6137179 F	12 F	36 F
7 G	99999834	12,6137073 F	14 F	49 F
8 G	99999980	14,6137059 F	16 F	64 F
9 G	99999997	16,6137057 F	18 F	81 F
10 G	99999999$\frac{3}{5}$	18,6137056 F	20 F	100 F

SCHOLIE.

Afin de pouvoir trouver par expérience les réſiſtances des fluides, je fis un vaiſſeau de bois qui étoit quarré, & qui avoit de dedans en dedans 9 pouces de Londres de longueur & de largeur, & 9$\frac{1}{2}$ pieds de profondeur, je l'emplis d'eau de pluye; & ayant fait des globes de cire qui renfermoient du plomb au centre, je marquai les temps que ces globes mirent à tomber de la hauteur de 112 pouces. Le pied cube de Londres peſe 76 livres romaines d'eau de pluie, & un pouce cube de ce même pied peſe $\frac{19}{36}$ onces de cette livre ou 253 $\frac{1}{3}$ grains; & un globe d'eau d'un pouce de diamétre peſe 132, 645 grains dans l'air, ou 132, 8 grains dans le vuide; & un autre globe quelconque eſt comme l'excès de ſon poids dans le vuide ſur ſon poids dans l'eau.

Du Mouvement des Corps.

Expérience 1. Un globe, dont le poids étoit de $156\frac{1}{4}$ grains dans l'air, & de 77 dans l'eau employa 4 ſecondes à tomber de la hauteur de 112 pouces. Et ayant répété la même expérience, le réſultat fut le même.

Le poids de ce globe dans le vuide étoit de $156\frac{13}{38}$ grains, & l'excès de ce poids ſur le poids du globe dans l'eau eſt de $79\frac{13}{38}$ grains, d'où l'on tirera le diamétre du globe de 0, 84224 parties de pouces. Mais cet excès eſt au poids du globe dans le vuide, comme la denſité de l'eau eſt à la denſité du globe; & les $\frac{3}{8}$ parties du diamétre du globe (c'eſt-à-dire, 2, 24597 pouces) ſont à l'eſpace $2F$, qui ſera par conſéquent de 4, 4256 pouces dans la même raiſon. Le globe, dans le temps d'une ſeconde, parcourt $193\frac{1}{3}$ pouces, en tombant dans le vuide par la force de tout ſon poids, qui eſt de $156\frac{13}{18}$ grains, & par ſon poids, qui eſt dans l'eau de 77 grains, il parcourt dans l'eau dans le même temps lorſqu'il y tombe ſans éprouver de réſiſtance 95, 219 pouces; & dans le temps G, qui eſt à une ſeconde en raiſon ſouſdoublée de l'eſpace F, ou comme 2, 2128 pouces ſont à 95, 219 pouces, il parcourera 2, 2128 pouces, & il acquerera la vîteſſe H, qui eſt la plus grande avec laquelle il puiſſe deſcendre dans l'eau. Or le temps G eſt $0''$, 15244. Et dans ce temps G, avec cette plus grande vîteſſe H, le globe parcourera l'eſpace $2F$ qui eſt de 4, 4256 pouces; donc en 4 ſecondes il parcourera un eſpace de 116, 1245 pouces. Et en ſouſtrayant l'eſpace $1, 3862944F$, ou 3, 0676 pouces, il reſtera l'eſpace 113, 0569 pouces que le globe parcourera en tombant dans l'eau dans un très-grand vaſe pendant 4 ſecondes. Cet eſpace, à cauſe du peu de largeur du vaiſſeau de bois dont j'ai parlé, doit être diminué en une raiſon compoſée de la raiſon ſouſdoublée de l'orifice du vaſe à l'excès de cet orifice ſur la moitié du grand cercle du globe, & de la raiſon ſimple de ce même orifice à ſon excès ſur le grand cercle du globe, c'eſt-à-dire, dans la raiſon de 1 à 0, 9914. Ce qui étant fait on aura l'eſpace de 112, 08 pouces que le globe auroit dû parcourir à peu près, par la théorie,

rie, en 4 ſecondes, en tombant dans ce vaſe de bois lorſqu'il étoit plein d'eau & il en parcourut 112 dans l'expérience.

Exper. 2. Trois globes égaux, dont le poids de chacun étoit de $76\frac{1}{3}$ grains dans l'air, & de $5\frac{1}{16}$ grains dans l'eau, étant abandonnés à eux-mêmes dans l'eau, l'un après l'autre, parcoururent dans leur chute 112 pouces en 15 ſecondes.

En faiſant le calcul, on trouve le poids de chacun de ces globes dans le vuide de $76\frac{1}{12}$ grains, l'excès de ce poids ſur le poids dans l'eau de $71\frac{17}{48}$ grains, le diamétre de ces globes de 0, 81296 pouces, les $\frac{8}{3}$ parties de ce diamétre de 2, 16789 pouces, l'eſpace $2F$ de 2, 3217 pouces, l'eſpace que le corps parcourut en tombant, ſans éprouver de réſiſtance, dans le temps de 1″ par ſon poids qui étoit de $5\frac{1}{16}$ grains, de 12, 808 pouces, & le temps G de 0″, 301056. Donc le globe, par la plus grande vîteſſe avec laquelle il puiſſe deſcendre dans l'eau par la force de ſon poids qui étoit de $5\frac{1}{16}$ grains dans le temps de 0″, 301056 parcourera un eſpace de 2, 3217 pouces, & dans le temps de 15″ il parcourera un eſpace de 115, 678 pouces, & en ſouſtrayant l'eſpace 1, 3862944 F, ou 1, 609 pouces, il reſtera l'eſpace 114, 069 pouces que le globe devroit parcourir en tombant dans le même temps dans un plus grand vaiſſeau. Car il faut ôter, à cauſe du peu de largeur de notre vaiſſeau, un eſpace de 0, 895 pouces environ. Ainſi il reſtera un eſpace de 113, 174 pouces que le globe devoit parcourir à peu près par la théorie en tombant dans ce vaſe pendant le temps de 15″. Or il en parcourut 112 dans l'expérience, ainſi la différence eſt inſenſible.

Exper. 3. Trois globes égaux dont le poids de chacun étoit de 121 grains dans l'air, & d'un grain dans l'eau, étant abandonnés ſucceſſivement à eux-mêmes, parcoururent en tombant dans l'eau 112 pouces dans les temps de 46″, 47″ & 50″.

Par la théorie, ces globes devoient parcourir cette hauteur en 40″ environ. Pourquoi donc tomberent-ils plus lentement? Peut-être faut-il l'attribuer à ce que dans les mouvemens lents, la

proportion de la réſiſtance qui vient de la force d'inertie, à la réſiſtance qui vient des autres cauſes eſt moindre, peut-être auſſi cela doit-il être plûtôt attribué à quelques petites bulles qui s'attacherent au globe, ou à la raréfaction de la cire, cauſée, ou par la chaleur de la main qui jettoit le globe, ou par celle de l'air, ou enfin à quelques erreurs inſenſibles commiſes en peſant ces globes dans l'eau, je ne ſçai à laquelle de ces cauſes m'arrêter. Ainſi je conclus de cette expérience, qu'il faut que les globes dont on ſe ſert dans ces expériences peſent plus d'un grain dans l'eau pour les rendre certaines & qu'on puiſſe y ajouter foi.

Exper. 4. J'entrepris les expériences que je viens de décrire pour découvrir les réſiſtances des fluides, avant d'avoir la théorie que j'ai expoſée dans les Prop. précédentes. Enſuite, pour examiner cette théorie, je fis un vaiſſeau de bois de $8\frac{2}{3}$ pouces de large de dedans en dedans: & de 15 pieds $\frac{1}{3}$ de profondeur. Enſuite, je fis quatre globes compoſés de cire & de plomb renfermé dans le centre, le poids de chacun de ces globes étoit de $139\frac{1}{4}$ grains dans l'air, & de $7\frac{1}{8}$ grains dans l'eau. Je les laiſſai tomber de ſorte que je pouvois remarquer, par le moyen d'un pendule qui battoit les demi ſecondes, les temps qu'ils employoient à tomber dans l'eau. Lorſque je peſai ces globes, & que je les fis tomber, j'avois eu ſoin qu'ils fuſſent froids depuis quelque temps; parce que la chaleur raréfie la cire, & que cette raréfaction diminue ſon poids dans l'eau, & que de plus la cire que la chaleur a raréfiée ne retourne pas dans le moment qu'elle eſt réfroidie à ſa premiere denſité. Ces globes étoient entierement plongés dans l'eau avant de tomber; de peur que le poids de la partie qui n'auroit pas été plongée n'eut accéléré leur chute dans le premier inſtant. Et lorſqu'ils étoient entierement plongés & en repos, je les laiſſois tomber avec bien de la précaution, de peur que ma main ne leur donnât quelqu'impulſion. Ils tomberent ſucceſſivement en $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51 oſcillations, & parcoururent en tombant 15 pieds & 2 pouces. Le temps étant alors un peu plus

froid que lorſque j'avois peſé les globes, je répétai l'expérience un autre jour, & ils tomberent en 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53 oſcillations. Et un troiſieme jour ils tomberent en $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53 oſcillations. Et enfin, ayant répété très-ſouvent cette expérience, les globes tomberent le plus ordinairement en $49\frac{1}{4}$ & 50 oſcillations. Et quand ils employerent plus de temps, je ſoupçonne qu'ils étoient retardés parce qu'ils frottoient contre les parois du vaſe.

En faiſant le calcul par la théorie, on trouve que le poids du globe dans le vuide eſt de $139\frac{2}{5}$ grains. L'excès de ce poids ſur le poids dans l'eau de $132\frac{11}{40}$ grains. Le diamétre du globe de 0, 99868 pouces. Les $\frac{2}{3}$ de ſon diamétre de 2, 66315 pouces. L'eſpace $2F$ de 2, 8066 pouces. L'eſpace que le globe qui péſoit $7\frac{1}{8}$ grains parcouroit en tombant dans une ſeconde ſans éprouver de réſiſtance de 9, 88164 pouces. Et le temps G de $0''$ 376843. Donc le globe, avec la plus grande vîteſſe avec laquelle il puiſſe tomber dans l'eau par la force du poids de $7\frac{1}{8}$ grains, dans le temps de $0''$, 376843, parcourt un eſpace de 2,8066 pouces, & dans le temps de $1''$ un eſpace de 7, 44766 pouces, & dans le temps de $25''$ ou de 50 oſcillations, il parcourt un eſpace de 186, 1915 pouces. Souſtrayant l'eſpace 1, 386294 F, ou 1, 9454 pouces, il reſtera l'eſpace 184, 2461 pouces que le globe décriroit dans le même temps dans un vaſe très-large. A cauſe du peu de largeur de celui dont je me ſuis ſervi, il faut donc diminuer cet eſpace en raiſon compoſée de la raiſon ſouſdoublée de l'orifice du vaſe à l'excès de cet orifice ſur la moitié du grand cercle du globe, & de la raiſon ſimple de ce même orifice à ſon excès ſur le grand cercle du globe; & on aura l'eſpace 181, 86 pouces, que le globe auroit du parcourir, à peu près, dans ce vaſe ſelon la théorie pendant 50 oſcillations. Et il parcourut 182 pouces à peu près dans $49\frac{1}{2}$ ou 50 oſcillations.

Exper. 5. Quatre globes du poids de $154\frac{3}{8}$ grains chacun dans l'air, & de $21\frac{1}{2}$ grains dans l'eau, ayant été jettés pluſieurs fois, tomboient dans le temps de $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30 oſcillations, & quelquefois en 31, 32 & 33 oſcillations, & ils parcouroient en tombant 15 pieds 2 pouces.

Par la théorie ils devoient parcourir cette hauteur en 29 oſcillations à peu près.

Exper. 6. Cinq globes du poids de $212\frac{3}{8}$ grains dans l'air, & de $79\frac{1}{2}$ grains dans l'eau ayant été jettés pluſieurs fois tomboient en 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18 oſcillations d'une hauteur de 15 pieds & 2 pouces.

Par la théorie ils devoient tomber en 15 oſcillations à peu près.

Exper. 7. Quatre globes qui péſoient $293\frac{3}{8}$ grains dans l'air, & $35\frac{7}{8}$ grains dans l'eau ayant été jettés pluſieurs fois tomboient en $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33 oſcillations, & parcouroient un eſpace de 15 pieds un pouce & demi.

Par la théorie ils auroient dû tomber en 28 oſcillations à peu près.

En cherchant la cauſe pourquoi, de pluſieurs globes égaux en poids & en grandeur, les uns tomboient plus vîte, & les autres plus lentement, j'ai trouvé celle-ci; que ces globes, dans le premier moment qu'ils étoient abandonnés à eux-mêmes & qu'ils commençoient à tomber, oſcilloient autour de leurs centres, parce que celui de leurs côtés qui étoit peut-être un peu plus peſant deſcendoit le premier & cauſoit un mouvement oſcillatoire. Car le globe doit communiquer une plus grande quantité de ſon mouvement à l'eau par ces oſcillations, que s'il deſcendoit ſans oſciller; & en communiquant ce mouvement à l'eau, il perd une partie du mouvement propre qui doit le faire deſcendre: & il doit être par conſéquent plus ou moins retardé ſelon qu'il fera de plus grandes ou de plus petites oſcillations. De plus, le globe s'éloigne toujours du côté qui lui a fait commencer ſes oſcillations, & en s'éloignant, il s'approche des parois du vaſe, & peut quelquefois frotter contr'eux. Cette oſcillation eſt plus forte dans les globes plus péſans, & les plus grands globes communiquent plus de mouvement à l'eau. C'eſt pourquoi, afin de diminuer ces oſcillations, je fis de nouveaux globes compoſés de même de cire & de plomb, & je mis du plomb à un côté du globe près

de ſa ſuperficie, & je laiſſai enſuite tomber ce globe de ſorte que le côté le plus péſant étoit le plus bas, autant qu'il étoit poſſible, quand le corps commença à deſcendre. De cette ſorte, les oſcillations étoient beaucoup plus petites qu'auparavant, & les globes tomberent en des temps bien moins inégaux comme dans les expériences ſuivantes.

Exper. 8. Quatre globes qui péſoient chacun 139 grains dans l'air, & $6\frac{1}{2}$ grains dans l'eau, ayant été abandonnés à eux-mêmes pluſieurs fois, tomberent dans des oſcillations dont le nombre ne paſſa pas 52, & ne fut pas au-deſſous de 50, & le plus ſouvent, ils tomberent en 51 oſcillations à peu près, & parcoururent 182 pouces.

Par la théorie, ils devoient tomber en 52 oſcillations environ.

Exper. 9. Ayant fait la même expérience pluſieurs fois ſur quatre globes qui péſoient $273\frac{1}{4}$ grains dans l'air, & $140\frac{3}{4}$ dans l'eau, ils tomberent dans des oſcillations dont le nombre ne paſſa pas 13 & n'alla pas au-deſſous de 12 & ils parcoururent un eſpace de 182 pouces.

Par la théorie, ces globes devoient tomber en $11\frac{1}{3}$ oſcillations à peu près.

Exper. 10. La même expérience ayant été faite pluſieurs fois ſur quatre globes qui peſoient 384 grains dans l'air, & $119\frac{1}{2}$ dans l'eau, ils emploierent à tomber les temps de $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19 oſcillations, & ils parcoururent 181 pouces $\frac{1}{2}$. Lorſqu'ils mirent 19 oſcillations à tomber, j'entendis quelquefois les coups qu'ils donnoient contre les parois du vaſe avant de parvenir au fond.

Par la théorie, ils auroient dû tomber en 15 oſcillations $\frac{5}{9}$ à peu près.

Exper. 11. Ayant laiſſé tomber pluſieurs fois trois globes égaux qui peſoient 48 grains dans l'air, & $3\frac{29}{32}$ dans l'eau, ils mirent $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46 oſcillations à tomber, & le plus ſouvent ils tomboient en 44 & 45 oſcillations, & parcouroient un eſpace de $182\frac{1}{2}$ pouces environ.

Ils devoient tomber par la théorie en $46\frac{5}{9}$ oſcillations à peu près.

Exper. 12. Je fis tomber pluſieurs fois trois globes égaux qui peſoient 141 grains dans l'air, & $4\frac{3}{8}$ grains dans l'eau, & ils parcoururent 182 pouces en 61, 62, 63, 64 & 65 oſcillations.

Par la théorie, ils devoient tomber en $64\frac{1}{2}$ oſcillations à peu près.

Il eſt clair par ces expériences, que lorſque ces globes tomboient lentement comme dans les expériences 2, 4, 5, 8, 11 & 12, les temps de leurs chutes s'accordoient aſſez avec les temps que donne la théorie, mais que lorſqu'ils tomboient plus vîte, comme dans les expériences 6, 9 & 10, la réſiſtance qu'ils éprouvoient étoit un peu plus grande que dans la raiſon doublée des vîteſſes. Car ces globes oſcilloient un peu en tombant: & ces oſcillations ceſſent bientôt dans les globes légers, & qui tombent lentement à cauſe du peu de mouvement; mais dans les globes plus grands & plus peſans, elles durent plus long-temps à cauſe que le mouvement a plus de force, & ce mouvement oſciilatoire ne peut être arrêté par l'eau qui environne le globe qu'après que le corps a fait pluſieurs oſciilations. Il ſe peut encore faire que les globes ſoient moins preſſés par le fluide vers leurs parties poſtérieures lorſqu'ils ont plus de vîteſſe; & ſi on augmentoit continuellement la vîteſſe, ils laiſſeroient à la fin un eſpace vuide derriere eux, à moins qu'on n'augmentât en même temps la compreſſion du fluide. Or (par les Prop. 32 & 33.) la compreſſion du fluide doit augmenter en raiſon doublée de la vîteſſe, pour que la réſiſtance ſoit dans cette même raiſon doublée. Mais comme cela n'arrive pas, les globes qui ont plus de vîteſſe ſont un peu moins preſſés par leurs parties poſtérieures, & le défaut de cette preſſion fait que la réſiſtance qu'ils éprouvent eſt un peu plus grande que dans la raiſon doublée de la vîteſſe.

La théorie s'accorde donc avec les phénomenes des corps qui tombent dans l'eau, il nous reſte à examiner ce qui arrive à ceux qui tombent dans l'air.

Exper. 13. Du haut de l'Egliſe de S. Paul de Londres au mois de Juin 1710. on laiſſa tomber en même temps deux globes de verre, l'un plein de vif-argent, & l'autre plein d'air; & en tombant ils parcouroient 220 pieds de Londres. Une table de bois étoit ſuſpendue par un de ſes côtés par des pivots de fer, & par l'autre elle s'appuyoit ſur un vérouil de bois; & les deux globes étant poſés deſſus tomboient en même temps, & en tirant le vérouil par le moyen d'un fil de fer, ils tomboient juſqu'à terre, & la table étant ſeulement ſoutenue par ces pivots, faiſoit la baſcule, & dans le même inſtant un pendule qui battoit les ſecondes, étant mis en mouvement par le fil de fer commençoit à oſciller. Les diamétres & les poids des globes, ainſi que les temps de leurs chutes, étoient tels qu'ils ſont marqués dans la table ſuivante.

Globes pleins de mercure.			*Globes pleins d'air.*		
Poids.	*Diamétres.*	*Temps de la chute.*	*Poids.*	*Diamétres.*	*Temps de la chute.*
908 *grains.*	0,8 *pouces.*	4″	510 *grains.*	5,1 *pouces.*	8″ $\frac{1}{2}$
983	0,8	4−	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4+	515	5,0	8 $\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	8 $\frac{1}{2}$
784	0,75	4+	641	5,2	8

Au reſte, les temps des chutes que nous avons obſervés dans ces expériences doivent être corrigés. Car les globes pleins de mercure devoient parcourir en 4″ (par la théorie de Galilée) 257 pieds de Londres, & ils n'en parcoururent que 220 en 3″ 42‴. Il falloit donc que la table de bois employât quelque temps à faire la baſcule lorſqu'on tiroit le vérouil, & que par-là elle s'oppoſât au commencement à la chute des globes. Car ces globes étoient poſés, à peu près, dans le milieu de cette table, & ils étoient un peu plus près de ſon axe que le vérouil, & par-là, le temps de la chute fut allongé de 18‴ environ; ce qui doit être corrigé en ôtant du temps de la chute ces 18‴, ſurtout pour

les plus grands globes qui demeuroient un peu plus longtemps ſur la table quand elle ſe déployoit, à cauſe de la grandeur de leurs diamétres. Cette correction étant faite, les temps dans leſquels les ſix plus grands globes tombérent, ſe trouvent de $8''\ 12'''$, $7''\ 42'''$, $7''\ 57'''$, $8''\ 12'''$, & $7''\ 42'''$.

Le cinquiéme des globes pleins d'air avoit 5 pouces de diamétre, & péſoit 483 grains, & il tomba en $8''\ 12'''$ & parcourut pendant ce temps 220 pieds. Le poids d'un globe d'eau égal à ce globe eſt de 16600 grains; & le poids d'une quantité d'air de même volume que ce globe eſt de $\frac{16600}{860}$ grains ou de $19\frac{3}{10}$ grains. Donc le poids de ce globe dans le vuide étoit de $502\frac{3}{10}$ grains. Et ce poids eſt au poids d'un volume d'air égal à ce globe, comme $502\frac{3}{10}$ grains à $19\frac{3}{10}$. Or, 2 *F* ſont à $\frac{8}{5}$ du diamétre de ce globe, c'eſt-à-dire, à $13\frac{1}{3}$ pouces dans cette raiſon. Donc 2 *F* deviennent 28 pieds 11 pouces. Ce globe en tombant dans le vuide, par la force de tout ſon poids qui étoit de $502\frac{3}{10}$ grains, parcourut, dans une ſeconde, $193\frac{1}{3}$ pouces, comme ci-deſſus, & avec un poids de 483 grains il parcourut 185, 905 pouces, & avec le même poids de 483 grains il parcourut auſſi dans le vuide l'eſpace *F* ou 14 pieds $5\frac{1}{2}$ pouces en $57''\ 58^{iv}$, & il acquit dans ce temps la plus grande vîteſſe avec laquelle il peut deſcendre dans l'air. Avec cette vîteſſe, ce globe en $8''\ 12'''$ parcoureroit un eſpace de 245 pieds $5\frac{1}{3}$ pouces. En ôtant 1, 3863 *F* ou 20 pieds $0\frac{1}{2}$ pouces, il reſtera 225 pieds 5 pouces. Le globe en tombant devoit donc parcourir cet eſpace en $8''\ 12'''$ par la théorie. Mais il parcourut 220 pieds dans l'expérience, ainſi la différence eſt inſenſible.

Ayant fait un calcul ſemblable au précédent pour les autres globes pleins d'air, j'ai dreſſé la table ſuivante.

Poids des globes.	*Diamétres.*	*Temps employés à parcourir 220 pieds en tombant.*	*Eſpaces qui devoient être parcourus ſelon la théorie.*	*Différences.*
510 *grains.*	5,1 *pouc.*	8″ 12‴	226 *pieds* 11 *p.*	6 *p.* 11 *p.*
642	5,2	7 42	230 9	10 9
599	5,1	7 42	227 10	7 10
515	5	7 57	224 5	4 5
483	5	8 12	225 5	5 5
641	5,2	7 42	230 7	10 7

Exp. 14. Au mois de Juillet 1719. le docteur *Deſaguliers* recommença ces expériences en cette ſorte. Il donna à des veſſies de cochon une forme ſphérique, en les plaçant dans des ſpheres de bois, car en ſouflant de l'air dans ces veſſies, après les avoir mouillées, il les forçoit d'emplir la concavité de ces ſpheres. Enſuite ayant ſéché ces veſſies & ayant ôté le bois qui les entouroit & qui pouvoit ſe démonter, il les laiſſa tomber d'un lieu qu'on avoit pratiqué dans le plus haut de la voute de la même Egliſe enſorte que ces veſſies tomboient alors de la hauteur de 272 pieds; & il laiſſa tomber dans le même inſtant un globe de plomb qui péſoit environ deux livres romaines. Pendant ce temps il y avoit des perſonnes qui étoient placées au ſommet du temple d'où on laiſſoit tomber ces globes, & qui marquoient les temps qui s'écouloient pendant les chutes, il y avoit d'autres perſonnes placées ſur le pavé de l'Egliſe qui marquoient la différence qui ſe trouvoit entre le temps de la chute de la veſſie & celui de la chute du globe de plomb. Ces temps étoient meſurés par des oſcillations de pendules qui battoient les demi-ſecondes. Un de ceux qui étoient en bas avoit un horloge à reſſort qui battoit les quarts de ſeconde; un autre avoit une autre machine faite avec ſoin à laquelle étoit adapté un pendule qui battoit les quarts de ſeconde. Un de ceux qui étoient au haut de l'Egliſe avoit une machine ſemblable. Ces inſtrumens étoient faits de ſorte que leurs mouvemens commencoient & s'arrêtoient quand on vouloit. Le globe de plomb tomboit en 4 ſecondes &

un quart à peu près. Et en ajoutant ce temps à la différence du temps dont on a parlé, on avoit le temps que la veſſie employoit à tomber. Les temps dans leſquels cinq veſſies tomberent, ſurpaſſerent la premiere fois le temps de la chute du globe de plomb de $14\frac{3}{4}''$, $12\frac{3}{4}''$, $14\frac{5}{8}''$, $17\frac{3}{4}''$ & $16\frac{7}{8}''$, & la ſeconde fois de $14\frac{1}{2}''$, $14\frac{1}{4}''$, $14''$, $19''$ & $16\frac{3}{4}''$. Ajoutant $4\frac{1}{4}''$ qui eſt le temps que le globe de plomb employa à tomber, les temps entiers dans leſquels les cinq veſſies tomberent étoient la premiere fois de $19''$, $17''$, $18\frac{7}{8}''$, $22''$ & $21\frac{1}{8}''$; & la ſeconde fois de $18\frac{3}{4}''$, $18\frac{1}{2}''$, $18\frac{1}{4}''$, $23\frac{1}{4}''$ & $21''$. Et les temps marqués par ceux qui étoient au haut de l'Egliſe étoient la premiere fois de $19\frac{3}{8}''$, $17\frac{1}{4}''$, $18\frac{3}{4}''$, $22\frac{1}{8}''$ & $21\frac{5}{8}''$ & la ſeconde fois de $19''$, $18\frac{5}{8}''$, $18\frac{3}{8}''$, $24''$ & $21\frac{1}{4}''$. Au reſte, les veſſies ne tomboient pas toujours en ligne droite, & quelquefois elles voltigeoient & oſcilloient de côté & d'autre en tombant ce qui prolongeoit les temps de leurs chutes quelquefois d'une demi-ſeconde, & quelquefois d'une ſeconde entiere. La ſeconde & la quatriéme veſſie tomberent plus droit la premiere fois; & la ſeconde fois ce furent la premiere & la quatriéme. La cinquiéme veſſie étoit ridée, & ſes rides retardoient uu peu ſa chute. Je concluois les diamétres des veſſies de leurs circonférences que je meſurois avec un fil dont je entourois. J'ai comparé la théorie avec les expériences dans les la table ſuivante, en ſuppoſant la denſité de l'air à la denſité de l'eau de pluye comme 1 à 860, & comptant les eſpaces que les globes devoient parcourir en tombant ſelon la théorie.

Poids des Veſſies.	*Diamétres.*	*Temps employés à tomber de la hauteur de 272 pieds.*	*Eſpaces qui devoient être parcourus pendant ces temps ſelon la théorie.*	*Différence entre la théorie & l'expérience.*
128 *grains.*	5,28 *pou.*	$19''$	271 *pieds* 11 *p.*	−0 *pieds* 1 *p.*
156	5,19	17	272 $0\frac{1}{2}$	+0 $0\frac{1}{2}$
$137\frac{1}{2}$	5,3	$18\frac{1}{2}$	272 7	+0 7
$97\frac{1}{2}$	5,26	22	277 4	+5 4
$99\frac{1}{8}$	5	$21\frac{1}{8}$	282 0	+10 0

Notre théorie déterminoit donc preſque exactement toute la réſiſtance qu'éprouvoient les globes mûs, tant dans l'eau que dans l'air, & cette réſiſtance eſt proportionnelle (lorſque les vîteſſes des globes ſont égales ainſi que leurs grandeurs) à la denſité des fluides.

Dans le ſcholie qui ſuit la ſixiéme ſection, j'ai fait voir par les expériences des pendules, que les globes égaux qui ont des vîteſſes égales éprouvent, lorſqu'ils ſe meuvent dans l'air, dans l'eau, & dans le vif-argent, des reſiſtances qui ſont comme les denſités de ces fluides. Mais je l'ai fait voir ici plus exactement par les expériences des corps qui tombent dans l'air & dans l'eau ; car les pendules à chaque oſcillation excitent dans le fluide un mouvement qui eſt toujours contraire au retour du pendule, & la réſiſtance qui vient de ce mouvement, ainſi que celle qui vient du fil auquel le pendule eſt ſuſpendu, font qu'il éprouve une réſiſtance plus grande que celle qu'ont donné les expériences des corps qui tombent. Car par les expériences des pendules qu'on a rapportées dans ce ſcholie, un globe de même denſité que l'eau devroit perdre la $\frac{1}{3342}$ partie de ſon mouvement, en parcourant dans l'air la longueur de ſon demi diamétre. Mais par la théorie qu'on a expoſée dans cette ſeptiéme ſection, & qui eſt confirmée par les expériences des corps qui tombent, le même globe, en parcourant la même longueur, ne devroit perdre que la $\frac{1}{4586}$ partie de ſon mouvement, en ſuppoſant que la denſité de l'eau ſoit à celle de l'air comme 860 à 1. Donc les réſiſtances étoient plus grandes dans les expériences des pendules (par les cauſes dont on vient de parler) que dans les expériences des globes tombans, & cela en raiſon de 4 à 3 environ. Mais comme les réſiſtances que les pendules qui oſcillent dans l'air, dans l'eau & dans le vif-argent, éprouvent, ſont augmentées de la même maniere par des cauſes ſemblables, la proportion des réſiſtances dans ces milieux eſt donnée aſſez exactement, tant par les expériences des pendules que par celles des corps qui tombent. Et on en peut conclure que les réſiſtances qu'éprouvent les corps qui ſe meuvent dans des fluides quel-

Du Mouvement des Corps.

conques très-ſubtils, ſont (toutes choſes égales) comme les denſités de ces fluides.

Ces choſes étant ainſi poſées, on peut déterminer à-préſent quelle partie de ſon mouvement un globe quelconque jetté dans un fluide quelconque perdra à peu près dans un temps donné. Soit D le diamétre du globe, V ſa vîteſſe dans le commencement du mouvement, & T le temps dans lequel le globe décrira dans le vuide avec la vîteſſe V un eſpace, qui ſoit à l'eſpace $\frac{8}{5} D$ comme la denſité du globe eſt à la denſité du fluide : & ce globe, étant jetté dans ce fluide, perdra dans un autre temps quelconque t la partie $\frac{tV}{T+t}$ de ſa vîteſſe, & il conſervera la partie $\frac{TV}{T+t}$ & décrira un eſpace qui ſera à l'eſpace qu'il parcoureroit dans le vuide, dans le même temps, avec la vîteſſe V ſuppoſée uniforme, comme le logarithme du nombre $\frac{T+t}{T}$ multiplié par le nombre 2, 30258093 eſt au nombre $\frac{t}{T}$, par le Cor. 7. de la Prop. 35.

Dans les mouvemens lents la réſiſtance peut être un peu moindre à cauſe que la figure d'un globe eſt un peu plus propre au mouvement que celle d'un cylindre décrit ſur le même diamétre. Et dans les mouvemens plus prompts la réſiſtance peut être un peu plus grande à cauſe que l'élaſticité & la compreſſion du fluide n'augmentent pas en raiſon doublée de la vîteſſe. Mais je ne fais pas attention ici à ces minuties.

Quand même l'air, l'eau, le vif-argent & d'autres fluides ſemblables ſeroient ſubtiliſés à l'infini, & qu'ils compoſeroient des milieux infiniment fluides, ils n'en réſiſteroient pas moins aux globes projettés. Car la réſiſtance dont on a parlé dans les Prop. précédentes vient de l'inertie de la matiere ; & l'inertie eſt eſſentielle aux corps, & eſt toujours proportionnelle à leur quantité de matiere. On peut à la vérité diminuer, par la diviſion des parties du fluide, la réſiſtance qui vient de la tenacité & du frotte-

ment des parties ; mais cette diviſion des parties de la matiere ne diminue point ſa quantité ; & la quantité de la matiere reſtant la même, la force d'inertie reſte la même ; & la réſiſtance dont on a parlé ici eſt toujours proportionnelle à la force d'inertie. Afin que cette réſiſtance diminue, il faut donc diminuer la quantité de matjere dans les eſpaces dans leſquels le corps ſe meut. C'eſt pourquoi les eſpaces céleſtes dans leſquels les globes des planettes & des comettes ſe meuvent ſans ceſſe librement en tout ſens ſans aucune diminution ſenſible de leur mouvement doivent être vuides de tout fluide corporel, ſi on en excepte peut-être quelques vapeurs très-légeres & les rayons de lumiere qui les traverſent.

Les projectiles excitent donc du mouvement dans les fluides, lorſqu'ils s'y meuvent, & ce mouvement vient de l'excès de la preſſion du fluide ſur les parties antérieures du projectile ſur la preſſion que ſes parties poſtérieures éprouvent, & il ne peut pas être moindre dans les milieux infiniment fluides que dans l'air, l'eau & le vif-argent, à raiſon de la quantité de matiere que chacun contient. Mais cet excès de la preſſion n'excite pas ſeulement, à raiſon de ſa quantité, un mouvement dans le fluide, il agit encore ſur le projectile pour retarder ſon mouvement, & par conſéquent la réſiſtance dans tout fluide eſt comme le mouvement excité dans ce fluide par le projectile, & elle ne peut pas être moindre dans un milieu rempli de matiere éthérée à raiſon de ſa denſité, que dans l'air, dans l'eau & dans le vif-argent à raiſon de la denſité de ces fluides.

HUITIÉME SECTION.

De la propagation du mouvement dans les fluides.

PROPOSITION XLI. THÉORÉME XXXII.

La preſſion ne ſe propage point en ligne droite dans un fluide, à moins que ſes parties ne ſoient placées en ligne droite.

Fig. 49. Si les particules a, b, c, d, e ſont placées en ligne droite, la preſſion peut ſe propager directement de a à e; mais la particule e preſſera obliquement les particules f & g placées obliquement, & ces particules f & g ne ſoutiendront point cette preſſion à moins qu'elles ne ſoient ſoutenues par les particules plus éloignées h & k; or en étant ſoutenues, elles les preſſent, & ces particules h & k ne peuvent pas ſoutenir cette preſſion, ſi elles ne ſont ſoutenues elles-mêmes par les particules ultérieures l & m qu'elles preſſent à leur tour, & ainſi de ſuite à l'infini. Donc la preſſion qui s'eſt ainſi communiquée, premierement aux particules qui n'étoient pas poſées en ligne droite produira une déviation, & elle ſe propagera obliquement à l'infini : après avoir commencé à ſe propager obliquement elle continuera encore ſa déviation, ſi elle tombe ſur des particules ultérieures qui ne ſoient pas poſées en ligne droite; & cela autant de fois qu'elle rencontrera des particules qui ne ſeront pas placées exactement en ligne droite. *C. Q. F. D.*

Cor. Si quelque partie de la preſſion, propagée dans un fluide d'un point donné, eſt interceptée, la partie reſtante, qui n'eſt point interceptée agira derriere l'obſtacle. Ce qui peut ſe démontrer ainſi.

Que la preſſion ſoit propagée du point A vers tous les côtés, & ce-

la, s'il eſt poſſible, ſelon des lignes droites, & que l'obſtacle *NBCK* percé en *BC* intercepte toute cette preſſion qui paſſe par le trou circulaire *BC*, excepté la partie *APQ* qui paſſe par le trou conique. Que le cône *APQ* ſoit partagé en tranches par les plans tranſverſaux *de*, *fg*, *hi*; & que pendant que le cône *ABC*, en propageant la preſſion, preſſe dans la ſuperficie *de* la tranche conique ultérieure *degf*, & que cette tranche preſſe la tranche voiſine *fghi* dans la ſuperficie *fg*, & que cette ſeconde tranche en preſſe une troiſieme, & ainſi de ſuite à l'infini. Il eſt clair (par la troiſiéme loi du mouvement) que la premiere tranche *defg* ſera autant preſſée dans la ſuperficie *fg* par la réaction de la ſeconde tranche *fghi*, qu'elle preſſe elle-même cette ſeconde tranche. Donc la tranche *degf* eſt preſſée des deux côtés entre le cône *Ade* & la tranche *fhig*, & par conſéquent (par le Cor 6. de la Prop. 19.) elle ne peut conſerver ſa figure à moins qu'elle ne ſoit preſſée de tous côtés par une force égale : donc elle ſera forcée de céder vers les côtés *df*, *eg* par le même effort par lequel elle preſſe les ſuperficies *de*, *fg*; & comme elle n'eſt point ſolide mais entierement fluide elle ſe répandra alors à moins qu'il n'y ait un fluide ambiant qui s'oppoſe à ſon effort. Donc par l'effort qu'elle fait pour ſe répandre, elle preſſera d'un même effort, tant le fluide ambiant vers les côtés *df*, *eg*, que la tranche *fghi*; & par conſéquent la preſſion ne ſe propagera pas moins vers les côtés *df*, *eg*, dans les eſpaces *NO*, *KL* à droite & à gauche, que de la ſuperficie *fg* vers *PQ*. *C. Q. F. D.* Fig. 50.

PROPOSITION XLII. THÉORÉME XXXIII.

Tout mouvement propagé dans un fluide s'éloigne de la ligne droite dans des eſpaces immobiles. Fig. 50.

Cas 1. Que le mouvement ſoit propagé du point *A* par le trou *BC*, & qu'il continue, s'il eſt poſſible, dans l'eſpace conique *BCQP*, ſelon des lignes droites qui divergent du point *A*. Sup-

Du Mouvement des Corps.

Fig. 50.

poſons premierement que ce mouvement ſoit un mouvement d'ondulation excité dans la ſuperficie d'une eau ſtagnante & ſoient de, fg, hi, kl, &c. les éminences de chacune de ces ondes diſtinguées l'une de l'autre par autant de cavités. Comme l'eau eſt plus haute dans les éminences des ondes que dans les parties immobiles KL, NO du fluide ; elle s'écoulera par conſéquent des extrémités e, g, i, l, &c. d, f, h, k, &c. des ſommets de ces éminences, vers KL & NO : & comme elle eſt plus baſſe dans les cavités de ces ondes que dans les parties immobiles KL, NO du fluide, elle s'écoulera de ces parties immobiles dans ces cavités. Par le premier écoulement de l'éminence des ondes, & par l'autre les cavités ſe dilateront çà & là, & s'étendront vers KL & NO. Et parce que le mouvement des ondes de A vers PQ ſe fait par un écoulement continu des éminences dans les cavités prochaines, & que par conſéquent il n'a pas plus de vîteſſe que n'en peut donner la chute ; & que la chute de l'eau de côté & d'autre ſe doit faire vers KL & NO avec la même vîteſſe, la dilatation des ondes ſera propagée d'un côté & de l'autre vers KL & NO avec la même vîteſſe, avec laquelle ces ondes elles-mêmes s'étendent de A vers PQ en ligne droite. Donc tout l'eſpace de côté & d'autre vers KL & NO ſera occupé par les ondes dilatées $rfgr$, $shis$, $tklt$, $vmnv$, &c. *C. Q. F. D.*

On peut ſe convaincre que cela ſe paſſe ainſi dans les eaux ſtagnantes.

Cas 2. Suppoſons à-préſent que de, fg, hi, kl, mn repréſentent des pulſions imprimées du point A & continuées ſucceſſivement dans un milieu élaſtique. Suppoſons de plus que ces pulſions ſoient propagées par des condenſations & des raréfactions ſucceſſives du milieu, enſorte que la partie la plus denſe d'une pulſion quelconque occupe la ſuperficie ſphérique décrite autour du centre A, & qu'il y ait des intervalles égaux entre les pulſions ſucceſſives. Que les lignes de, fg, hi, kl, &c. repréſentent les parties les plus denſes des pulſions, leſquelles ſe propagent par le

trou-

trou *B C*; comme le milieu eſt plus denſe dans ce lieu que dans les eſpaces d'un côté & de l'autre vers *K L* & *N O*, il ſe dilatera tant vers ces eſpaces *K L* & *N O* ſitués des deux côtés que vers les eſpaces les plus rares qui ſont entre les pulſions; ce qui le rendant toujours plus rare vers ces intervales & plus denſe vers les pulſions, le fera participer à tous ces mêmes mouvemens. Fig. 50.

Et parce que le mouvement progreſſif des pulſions vient du relâchement continuel des parties les plus denſes vers les intervales antécédens les plus rares; & que ces pulſions doivent s'étendre de côté & d'autre avec la même vîteſſe à peu près vers les parties *K L*, *N O* du milieu, leſquelles ſont en repos; ces pulſions ſe dilateront d'un côté & de l'autre dans les eſpaces immobiles *KL*, *NO*, avec la même vîteſſe à peu près avec laquelle elles ſont propagées directement du centre *A*; & par conſéquent elles occuperont l'eſpace entier *K L O N*. *C. Q. F. D.*

On l'éprouve ainſi dans les ſons, car le ſon s'entend quoiqu'il y ait une montagne entre le corps ſonore & nous, & lorſqu'il entre dans une chambre par une fenêtre, il ſe répand dans toute la chambre, enſorte qu'on l'entend de tous ſes coins, non pas tant parce qu'il eſt réfléchi par les murailles de la chambre oppoſées au lieu où on l'entend, que parce qu'il y arrive en droiture de la fenêtre, autant qu'on en peut juger par les ſens.

Cas 3. Suppoſons enfin qu'un mouvement d'un genre quelconque ſoit propagé de *A* par l'ouverture *B C*: comme cette propagation ne ſe peut faire ſi les parties du milieu les plus proches du centre *A* ne preſſent & ne meuvent les parties ſituées au-delà; ces parties preſſées étant fluides, elles ſe répandront de toutes parts vers les lieux où elles ſont moins preſſées, & elles ſe répandront vers toutes les parties du milieu qui ſont en repos, tant vers les latérales *K L*, *N O*, que vers les antérieures *P Q*, & par ce moyen, tout le mouvement qui a paſſé premierement par l'ouverture *B C*, commencera à ſe dilater & à s'étendre en ligne

droite de cette ouverture comme de ſon origine & comme d'un centre vers toutes les parties. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION XLIII. THÉORÉME XXXIV.

Tout corps vibrant propagera de toutes parts en ligne droite dans un milieu élaſtique le mouvement des pulſions ; & dans un milieu non élaſtique il excitera un mouvement circulaire.

Cas 1. Les parties du corps vibrant en s'étendant & ſe contractant alternativement preſſeront & pouſſeront en s'étendant les parties du milieu qui les touchent, & en les preſſant elles les condenſeront ; & enſuite en ſe contractant elles laiſſeront ces parties comprimées en liberté de s'étendre & de s'éloigner les unes des autres. Donc les parties du milieu qui touchent ce corps vibrant, s'étendront & ſe contracteront tour à tour, comme les parties de ce corps : & par la même raiſon que les parties de ce corps excitent des ondulations dans les parties de ce milieu qui le touchent, ces parties produiront à leur tour de ſemblables ondulations dans celles auſquelles elles ſont contigues, leſquelles en exciteront dans les parties qui en ſont les plus éloignées, & ainſi de ſuite à l'infini. Et comme les premieres parties de ce milieu ſont condenſées lorſque les parties du corps vibrant s'étendent, & qu'elles s'étendent lorſque les parties de ce corps ſe contractent, de même les autres parties du milieu ſont condenſées toutes les fois que les parties du corps s'étendent, & elles s'étendent toutes les fois que ce corps ſe contracte. Et par conſéquent elles ne ſe condenſeront & ne s'étendront pas toutes en même temps (car ſi elles conſervoient ainſi des diſtances déterminées entr'elles, elles ne ſe raréfieroient point & elles ne ſe condenſeroient point tour à tour) mais en s'approchant l'une de l'autre par la condenſation, & en s'en éloignant par l'extenſion, il y en aura quelques-unes qui s'éloigneront pendant que d'autres reviendront ; & cela alternativement à l'infini. Les parties qui vont en s'éloignant & qui en allant ſe condenſent par leur mouvement progreſſif, dans lequel elles frappent con-

tre les obſtacles, cauſent des pulſions; & par conſéquent les pulſions ſucceſſives de tout corps vibrant ſe propageront en ligne droite. Et cela à des intervalles les uns des autres à peu prés égaux à cauſe de l'égalité des intervalles des temps dans leſquels le corps à chacune de ſes vibrations excite chacune des pulſions. Et quoique les parties du corps vibrant aillent & reviennent vers un côté déterminé, cependant les pulſions qui ſe propagent de là dans le milieu ſe dilateront vers les côtés, par la Prop. précédente; & elles ſe propageront en tout ſens dans des ſuperficies à peu près ſphériques & concentriques en partant de ce corps à reſſort comme du centre commun. Nous avons quelque exemple de cela dans l'eau, car ſi on la remue avec le bout du doigt, ce mouvement ſe continue non ſeulement de côté & d'autre dans le ſens dans lequel le doigt s'eſt mû, mais il s'y continue par des eſpéces de cercles concentriques qui environnent le doigt dans l'inſtant, & qui ſe propagent de tous côtés; car la peſanteur du fluide tient lieu de force élaſtique.

Cas 2. Si le milieu n'eſt pas élaſtique : comme alors ſes parties ne peuvent être condenſées par les vibrations des parties du corps vibrant qui les preſſent, le mouvement ſe propagera en un inſtant du côté vers lequel le milieu cédera le plus facilement, c'eſt-à-dire, du côté vers lequel le corps vibrant laiſſeroit ſans cela du vuide derriere lui. Ce cas eſt le même que celui d'un corps projetté dans un milieu quelconque. Le milieu en cédant aux projectiles ne s'en écarte pas à l'infini; mais en ſe mouvant circulairement il va remplir la place que le corps laiſſe derriere lui. Donc toutes les fois qu'un corps à reſſort s'avance vers quelque côté, le milieu, en cédant, s'avance par un cercle vers le côté que le corps abandonne; & toutes les fois que le corps revient à ſon premier lieu, il en repouſſe le milieu qui revient alors à celui qu'il occupoit auparavant. Quand le corps vibrant ne ſeroit pas roide, mais abſolument flexible, ſi cependant il demeure de même grandeur, comme il ne peut preſſer par

ſes vibrations le milieu dans un lieu quelconque qu'il ne lui cede de la place en même temps quelqu'autre part; il arrivera que le milieu s'écartant des lieux où il eſt preſſé, s'avancera toujours en rond vers les parties qui lui cedent. *C. Q. F. D.*

Cor. Ceux-là ſe trompent donc qui croyent que l'agitation des parties de la flamme cauſe ſeule la propagation de la preſſion en ligne droite dans le milieu ambiant. Cette preſſion ne vient pas ſeulement du mouvement des parties de la flamme, mais encore de la dilatation du total.

PROPOSITION XLIV. THÉORÉME XXXV.

Si de l'eau deſcend & monte alternativement dans les branches K L, M N *d'un canal; & qu'on ait un pendule dont la longueur entre le point de ſuſpenſion & le centre d'oſcillation ſoit égale à la moitié de la longueur de la colonne d'eau qui eſt dans le canal: je dis que l'eau montera & deſcendra dans ce canal dans les mêmes temps dans leſquels ce pendule oſcillera.*

Fig. 51. & 52. Je meſure la longueur de la colonne d'eau dans le ſens des axes du canal & des branches, & je la ſuppoſe égale à la ſomme de ces axes; je néglige la réſiſtance de l'eau qui vient de ſon frottement contre les branches du canal. Que AB, CD repréſentent donc la moyenne hauteur de l'eau dans l'une & l'autre branche; & lorſque l'eau montera dans la branche KL à la hauteur EF elle deſcendra dans la branche MN à la hauteur GH. Soit P le corps ſuſpendu, VP le fil auquel il tient, V le point de ſuſpenſion, $RPQS$ la cycloïde que le pendule décrit, P ſon point le plus bas, PQ un arc égal à la hauteur AE. La force par laquelle le mouvement de l'eau eſt alternativement accéléré & retardé, eſt l'excès du poids de l'eau dans l'une ou l'autre branche ſur ſon poids dans la branche oppoſée: donc, lorſque l'eau monte à la hauteur EF dans la branche KL, & que dans l'autre branche elle deſcend en GH, cette force eſt double du poids de l'eau $EABF$, & par conſéquent elle eſt au poids de toute l'eau comme AE ou PQ à VP ou PR. Mais la

force par laquelle le corps P eſt accéléré & retardé dans la cycloïde à un lieu quelconque Q eſt (par le Cor. de la Prop. 51.) à ſon poids total, comme ſa diſtance PQ du lieu le plus bas P, à la longueur PR de la cycloïde. Ainſi les forces motrices de l'eau & du pendule, lorſqu'ils parcourent les eſpaces égaux AE, PQ, ſont comme les poids à mouvoir. Donc, ſi l'eau & le pendule ſont en repos dans le commencement, ces forces les feront mouvoir également dans des temps égaux, & feront que par un mouvement réciproque l'eau & le pendule iront & reviendront dans les mêmes temps. *C. Q. F. D.* Fig. 51. & 52.

Cor. 1. Donc toutes les aſcenſions & deſcenſions de l'eau ſont iſochrones, ſoit que le mouvement ſoit plus prompt ou plus lent.

Cor. 2. Si la longueur de toute la colonne d'eau dans le canal eſt de $6\frac{1}{9}$ pieds de Paris, l'eau deſcendra dans une ſeconde & montera dans une autre ſeconde; & ainſi de ſuite alternativement à l'infini. Car un pendule de $3\frac{1}{18}$ pieds fait une oſcillation dans une ſeconde.

Cor. 3. La longueur de la colonne d'eau étant augmentée ou diminuée, le temps de ſes oſcillations augmentera ou diminuera en raiſon ſouſdoublée de cette longueur.

PROPOSITION XLV. THÉORÈME XXXVI.

La viteſſe des ondes eſt en raiſon ſouſdoublée de leur largeur.

C'eſt ce qui ſuit de la conſtruction de la Propoſition ſuivante.

PROPOSITION XLVI. PROBLÈME X.

Trouver la viteſſe des ondes.

Il faut prendre un pendule dont la longueur entre le point de ſuſpenſion & le centre d'oſcillation ſoit égale à la largeur des ondes : & dans le même temps dans lequel le pendule achevera chaque oſcillation, les ondes parcoureront en avançant un eſpace preſque égal à leur largeur.

J'appelle largeur des ondes l'eſpace tranſverſal qui eſt entre

Du Mouvement des Corps.

leur moindre ou leur plus grande élévation. Que *ABCDEF* repréſente une eau ſtagnante dont la ſuperficie monte & deſcende par des ondes ſucceſſives ; que *A*, *C*, *E*, &c. ſoient les éminences de ces ondes, & *B*, *D*, *F* &c les cavités intermédiaires qui les ſéparent, comme le mouvement des ondes ſe fait par l'aſcenſion & la deſcenſion ſucceſſive de l'eau, enſorte que ſes parties *A*, *C*, *E*, &c. qui ſont les plus hautes deviennent enſuite les plus baſſes ; & que la force motrice qui fait monter les parties les plus baſſes & deſcendre les plus hautes, eſt le poids de l'eau élevée ; cette aſcenſion & cette deſcenſion alternatives ſeront analogues au mouvement d'oſcillation de l'eau dans le canal, & elles obſerveront les mêmes loix par rapport au temps : & par conſéquent (par la Prop. 44.) ſi les diſtances entre les lieux les plus hauts *A*, *C*, *E*, & les plus bas *B*, *D*, *F* des ondes ſont égales au double de la longueur du pendule ; les parties les plus hautes *A*, *C*, *E*, deviendront les plus baſſes dans le temps d'une oſcillation, & dans le temps d'une autre oſcillation elles redeviendront les plus hautes. Donc il y aura le temps de deux oſcillations entre chacune de ces ondes ; c'eſt-à-dire, que chacune de ces ondes parcourera ſa largeur dans le temps que le pendule employera à faire deux oſcillations ; mais dans ce même temps un pendule, dont la longueur ſeroit quadruple & qui par conſéquent ſeroit égal à la largeur de ces ondes, feroit une oſcillation. Donc, &c. *C. Q. F. T.*

Fig. 53.

Cor. 1. Donc les ondes qui ont $3\frac{1}{19}$ pieds de Paris de largeur en avançant dans une ſeconde parcoureront leur largeur ; & par conſéquent dans une minute elles parcoureront $183\frac{1}{3}$ pieds, & dans une heure 11000 pieds environ.

Cor. 2. Et la vîteſſe des plus grandes ou des moindres ondes augmentera ou diminuera en raiſon ſouſdoublée de leur largeur.

Cela eſt ainſi dans l'hypotèſe que toutes les parties de l'eau montent & deſcendent en ligne droite ; mais cette aſcenſion & cette deſcenſion ſe font plutôt par des cercles, ainſi par cette Propoſition le temps n'eſt déterminé qu'à peu près.

PROPOSITION XLVII. THÉORÉME XXXVII.

Des pulſions étant propagées dans un fluide, chacune des particules de ce fluide, qui vont & qui viennent par un mouvement réciproque très-prompt, ſont toujours accélérées & retardées ſuivant les loix des oſcillations des pendules.

Que AB, BC, CD, &c. repréſentent les diſtances égales des pulſions ſucceſſives; ABC l'eſpace dans lequel s'exécutent les mouvemens de ces pulſions propagées de A vers B; ſoient E, F, G trois points phyſiques du milieu en repos placés ſur la ligne AC à des diſtances égales les uns des autres; Ee, Ff, Gg les eſpaces égaux très-petits dans leſquels ces points vont & viennent à chaque vibration par un mouvement réciproque; ϵ, φ, γ, les lieux quelconques intermédiaires de ces mêmes points; & EF, FG des petites lignes phyſiques, ou les parties linéaires du milieu qui ſont entre ces points & qui ſont tranſportées ſucceſſivement dans les lieux $\epsilon\varphi$, $\varphi\gamma$, & ef, fg. Soit tirée PS égale à la ligne Ee: & ſoit cette ligne PS partagée en deux parties égales au point O, & du centre O & de l'intervale OP ſoit décrit le cercle $SIPi$. Que ſa circonférence entiere & ſes parties repréſentent le temps entier d'une vibration avec ſes parties proportionnelles; enſorte que le temps quelconque PH ou $PHSh$ étant écoulé, ſi on tire HL ou hl perpendiculaire ſur PS, & qu'on prenne $E\epsilon$ égale à PL ou à Pl, le point phyſique E ſe trouvera en ϵ. Par cette loi un point quelconque E allant de E par ϵ à e, & revenant enſuite de e par ϵ à E, achevera chacune de ſes vibrations avec les mêmes dégrés de retardation & d'accélération que le pendule qui oſcille. Il s'agit donc de prouver que chaque point phyſique du milieu doit être agité par un tel mouvement. Suppoſons que le milieu ſoit mû de cette ſorte par quelque cauſe, & voyons ce qui doit ſuivre de cette ſuppoſition. Fig. 54. & 55.

Dans la circonférence $PHSh$ ſoient pris les arcs égaux HI, IK ou hi, ik, qui ayent à la circonférence entiere la raiſon que

DU MOUVEMENT DES CORPS.

Fig. 54. & 55.

les droites égales EF, FG ont à l'intervale entier BC des pulſions. Et ayant abaiſſé les perpendiculaires IM, KN ou im, kn; parce que les points E, F, G ſont ſucceſſivement agités par des mouvemens ſemblables, & que pendant ce temps ils achevent leurs vibrations entieres compoſées de l'allée & du retour pendant que les pulſions ſe communiquent de B à C; ſi PH ou $PHSh$ repréſente le temps écoulé depuis le commencement du mouvement du point E, PI ou $PHSi$ repréſentera le temps écoulé depuis le commencement du mouvement du point F, & PK ou $PHSk$, le temps écoulé depuis le commencement du mouvement du point G; & par conſéquent $E\varepsilon$, $F\varphi$, $G\gamma$ ſeront égaux reſpectivement à PL, PM, PN, ou à Pl, Pm, Pn, le premier dans l'allée, & le ſecond dans le retour de ces points. D'où $\varepsilon\gamma$, ou $EG+G\gamma-E\varepsilon$ dans l'allée ſera égal à $EG-LN$, & dans le retour à $EG+ln$. Mais $\varepsilon\gamma$ eſt la largeur ou l'expanſion de la partie du milieu EG dans le lieu $\varepsilon\gamma$; & par conſéquent l'expanſion de cette partie dans l'allée eſt à ſon expanſion moyenne, comme $EG-LN$ à EG; & dans le retour comme $EG+ln$ ou $EG+LN$ à EG. C'eſt pourquoi, LN étant à KH comme IM au rayon OP, & KH étant à EG comme la circonférence $PHShP$ à BC, c'eſt-à-dire, (ſi on prend V pour le rayon du cercle, dont la circonférence eſt égale à l'intervale des pulſions BC,) comme OP à V; & par conſéquent LN étant à EG comme IM à V; l'expanſion de la partie EG ou du point phyſique F dans le lieu $\varepsilon\gamma$ eſt à l'expanſion moyenne de cette partie dans ſon premier lieu EG, comme $V-IM$ à V dans l'allée, & comme $V+im$ à V dans le retour. D'où, la force élaſtique du point F dans le lieu $\varepsilon\gamma$ eſt à ſa force élaſtique moyenne dans le lieu EG, comme $\frac{1}{V-IM}$ à $\frac{1}{V}$ dans l'allée, mais dans le retour elle eſt comme $\frac{1}{V+im}$ à $\frac{1}{V}$. Et par le même raiſonnement les forces élaſtiques des points phyſiques E & G dans l'allée

l'allée, ſont comme $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ à $\frac{1}{V}$; & la différence des forces à la force élaſtique moyenne du milieu comme $\frac{HL-KN}{VV-V\times HL-V\times KN+HL\times KN}$ à $\frac{1}{V}$. C'eſt-à-dire, comme $\frac{HL-KN}{VV}$ à $\frac{1}{V}$, ou comme $HL-KN$ à V, en ſuppoſant (à cauſe des limites étroites dans leſquelles ſe font les vibrations) HL & KN indéfiniment plus petites que la quantité V. Comme cette quantité V eſt donnée, la différence des forces eſt comme $HL-KN$, c'eſt-à-dire, (à cauſe des proportionnelles $HL-KN$ à HK, & OM à OI ou OP, & des données HK & OP) comme OM; ou, ce qui revient au même, ſi Ff eſt coupée en deux également en Ω, comme $\Omega\varphi$. Et, par le même argument, la différence des forces élaſtiques des points phyſiques ε & γ dans le retour de la petite ligne phyſique $\varepsilon\gamma$ eſt comme $\Omega\varphi$. Mais cette différence, (c'eſt-à-dire, l'excès de la force élaſtique du point ε ſur la force élaſtique du point γ) eſt la force par laquelle la petite ligne phyſique $\varepsilon\gamma$ du milieu, laquelle eſt entre deux, eſt accélérée dans l'allée & retardée dans le retour; & par conſéquent, la force accélératrice de la petite ligne phyſique $\varepsilon\gamma$ eſt comme ſa diſtance au point de milieu Ω de la vibration. Donc le temps eſt exprimé exactement par l'arc PI. (Selon la Prop. 38. du Liv. 1.) Et la partie linéaire $\varepsilon\gamma$ du milieu ſe mouvera ſelon la loi preſcrite, c'eſt-à-dire, ſelon les loix des pendules oſcillans : il en eſt de même de toutes les parties linéaires dont le milieu entier eſt compoſé. *C. Q. F. D.*

Cor. Il eſt clair delà, que le nombre des pulſions propagées eſt le même que le nombre des vibrations du corps vibrant, & qu'il n'augmente point dans leur progrès. Car la petite ligne phyſique $\varepsilon\gamma$, dans le moment qu'elle reviendra à ſon premier lieu, ſera en repos; & elle ne ſe mouvera point enſuite, à moins que le choc du corps vibrant ou celui des pulſions qui ſe propagent depuis ce corps, ne lui communique un nouveau mouvement.

Elle ſera donc en repos dans le moment que les pulſions qui viennent du corps vibrant ceſſeront d'être propagées.

PROPOSITION XLVIII. THÉORÉME XXXVIII.

Les vîteſſes des pulſions qui ſe propagent dans un milieu élaſtique ſont en raiſon compoſée de la raiſon ſouſdoublée de la force élaſtique directement, & de la raiſon ſouſdoublée de la denſité inverſement ; en ſuppoſant la force élaſtique du fluide proportionnelle à ſa condenſation.

Cas 1. Si les milieux ſont homogènes, & que les diſtances des pulſions ſoient égales entr'elles dans ces milieux, mais que le mouvement ſoit plus grand dans un des milieux : les contractions & les dilatations des parties analogues ſeront comme ces mêmes mouvemens. Mais cette proportion n'eſt pas exacte ; cependant ſi les contractions & les dilatations ſont très-grandes, elle ne ſera pas loin de l'être & on pourra la prendre phyſiquement pour telle. Mais les forces élaſtiques motrices ſont comme les contractions & les dilatations ; & les vîteſſes des parties égales qui ont été produites en même temps ſont comme les forces. Donc les parties égales & correſpondantes des pulſions correſpondantes achevent enſemble leur allée & leur retour dans des eſpaces proportionnels aux contractions & aux dilatations, & cela avec des vîteſſes qui ſont comme ces eſpaces : & par conſéquent les pulſions, qui dans le temps de l'allée & du retour parcourent en avançant leur largeur entiere, & qui ſuccédent toujours à la place des pulſions précédentes, avancent avec une vîteſſe égale dans l'un & l'autre milieu à cauſe de l'égalité des diſtances.

Cas 2. Si les diſtances ou les longueurs des pulſions ſont plus grandes dans un milieu que dans l'autre ; ſuppoſons que les parties correſpondantes décrivent des eſpaces proportionnels aux largeurs des pulſions à chaque fois qu'elles vont & qu'elles viennent : alors leurs contractions ainſi que leurs dilatations ſeront égales. Donc ſi les milieux ſont homogènes, les forces motrices élaſti-

ques qui les agitent d'un mouvement réciproque ſeront auſſi égales. Mais la matiere que ces forces doivent mouvoir eſt comme la largeur des pulſions : & l'eſpace dans lequel elles doivent achever leur allée & leur retour eſt dans la même raiſon. Le temps d'une allée & d'un retour eſt donc en raiſon compoſée de la raiſon ſouſdoublée de la matiere & de la raiſon ſouſdoublée de l'eſpace, & par conſéquent il eſt comme l'eſpace. Mais les pulſions pendant les temps d'une allée & d'un retour parcourent leurs largeurs, c'eſt-à-dire, des eſpaces proportionnels aux temps ; donc leurs vîteſſes ſont égales.

Cas 3. Donc dans les milieux dont la force élaſtique & la denſité ſont les mêmes, toutes les pulſions ont la même vîteſſe. Et ſi on augmente ou la denſité ou la force élaſtique du milieu, comme la force motrice augmente en raiſon de la force élaſtique, & la matiere qu'il faut mouvoir en raiſon de la denſité : le temps dans lequel les mêmes mouvemens s'exécuteront comme auparavant, augmentera en raiſon ſouſdoublée de la denſité, & diminuera en raiſon ſouſdoublée de la force élaſtique. Et par conſéquent la vîteſſe des pulſions ſera en raiſon compoſée de la raiſon ſouſdoublée de la denſité du milieu inverſement, & de la raiſon ſouſdoublée de la force élaſtique directement. *C. Q. F. D.*

Cette Propoſition deviendra encore plus évidente par la conſtruction de la Propoſition ſuivante.

PROPOSITION XLIX. PROBLÉME XI.

La denſité & la force élaſtique du milieu étant données, trouver la vîteſſe des pulſions.

Suppoſons que le milieu ſoit comprimé comme notre air par un poids qui incombe deſſus ; & que *A* ſoit la hauteur du milieu homogène dont le poids eſt égal au poids incombant, & dont la denſité ſoit la même que celle du milieu comprimé dans lequel les pulſions ſont propagées. Qu'on ſuppoſe un pendule, dont la longueur entre le point de ſuſpenſion & le centre d'oſcillation Fig. 54. & 55.

Du Mouvement des Corps.

Fig. 54. & 55.

ſoit A : & dans le temps que ce pendule employera à faire une oſcillation entiere compoſée de l'allée & du retour, la pulſion en avançant parcourera un eſpace égal à la circonférence du cercle dont le rayon eſt A.

Car les conſtructions de la Propoſition 47. étant conſervées, ſi une ligne phyſique quelconque EF, en décrivant à chaque vibration un eſpace PS, eſt preſſée dans les extrémités P & S de ſon allée & de ſon retour par une force élaſtique égale à ſon poids; elle achevera chacune de ſes vibrations dans le temps dans lequel cette même ligne pourroit oſciller dans une cycloïde dont le périmétre ſeroit égal à toute la longueur PS : & cela parce que des forces égales doivent faire parcourir dans le même temps à des corpuſcules égaux des eſpaces égaux. C'eſt pourquoi comme les temps des oſcillations ſont en raiſon ſouſdoublée de la longueur des pendules, & que la longueur du pendule eſt égale à la moitié de l'arc de la cycloïde entiere; le temps d'une vibration ſera au temps de l'oſcillation du pendule dont la longueur eſt A, en raiſon ſouſdoublée de la longueur $\frac{1}{2}PS$ ou PO à la longueur A. Mais la force élaſtique qui preſſe la petite ligne phyſique EG lorſqu'elle eſt dans les extrémités P & S, étoit (dans la démonſtration de la Prop. 47.) à la force élaſtique entiere, comme $HL - KN$ à V, c'eſt-à-dire, (lorſque le point K tombe ſur P) comme HK à V : & cette force entiere, c'eſt-à-dire, le poids incombant par lequel la petite ligne EG eſt comprimée, eſt au poids de cette petite ligne comme la hauteur A du poids incombant eſt à la longueur EG de la petite ligne ; donc, la force par laquelle la petite ligne, EG eſt preſſée dans les lieux P & S, eſt au poids de cette petite ligne, comme $HK \times A$ à $V \times EG$, ou comme $PO \times A$ à VV, car HK étoit à EG comme PO à V. Ainſi, comme les temps, dans leſquels les corps égaux ſont pouſſés dans des eſpaces égaux, ſont réciproquement en raiſon ſouſdoublée des forces, le temps d'une vibration produite par la preſſion de la force élaſtique ſera au temps d'une vibration pro-

duite par la force du poids, en raiſon ſouſdoublée de VV à $PO \times A$, & ce temps eſt par conſéquent au temps de l'oſcillation du pendule dont la longueur eſt A, en raiſon ſouſdoublée de VV à $PO \times A$ & en raiſon ſouſdoublée de PO à A conjointement; c'eſt-à-dire, dans la raiſon entiere de V à A. Mais dans le temps d'une vibration entiere compoſée de l'allée & du retour, la pulſion, en avançant, parcourt ſa largeur entiere BC. Donc le temps dans lequel la pulſion parcourt l'eſpace BC, eſt au temps d'une oſcillation entiere, compoſée de l'allée & du retour, comme V eſt à A, c'eſt-à-dire, comme BC eſt à la circonférence du cercle dont le rayon eſt A. Donc le temps dans lequel la pulſion parcourera l'eſpace BC, eſt dans la même raiſon au temps dans lequel elle parcourera la longueur égale à cette circonférence; donc, dans le temps d'une telle oſcillation, la pulſion parcourera une longueur égale à cette circonférence. *C. Q. F. D.* Fig. 54. & 55.

Cor. 1. La vîteſſe des pulſions eſt celle que les graves acquierent en tombant d'un mouvement également accéléré, & en parcourant dans leur chute la moitié de la hauteur A. Car dans le temps de cette chute la pulſion parcourera avec la vîteſſe qu'un corps auroit acquiſe en tombant un eſpace qui ſera égal à toute la hauteur A; donc dans le temps d'une oſcillation entiere compoſée de l'allée & du retour, elle parcourera un eſpace égal à la circonférence du cercle dont le rayon eſt A: donc le temps de la chute eſt au temps de l'oſcillation comme le rayon du cercle eſt à ſa circonférence.

Cor. 2. Ainſi, cette hauteur A étant directement comme la force élaſtique du fluide, & inverſement comme ſa denſité; la vîteſſe des pulſions ſera en raiſon compoſée de la raiſon ſouſdoublée de la denſité inverſement, & de la raiſon ſouſdoublée de la force élaſtique directement.

PROPOSITION L. PROBLÈME XII.

Trouver les diſtances des pulſions.

Il faut trouver le nombre des vibrations qu'un corps excite par ſes trémulations dans un temps donné. Et il faut diviſer par ce nombre l'eſpace que la pulſion peut parcourir dans le même temps, & le quotient ſera la largeur d'une pulſion. *C. Q. F. T.*

SCHOLIE.

Ces dernieres Propoſitions peuvent s'appliquer au mouvement de la lumiere & des ſons. Car la lumiere ſe propageant en ligne droite ne peut conſiſter dans la ſeule action. (Selon les Prop. 41 & 42.) Et quant aux ſons, comme ils viennent des corps ſonores ils ne ſont en effet (Prop. 43.) que les pulſions de l'air propagées, c'eſt ce qui eſt confirmé par les vibrations que les ſons excitent dans les corps voiſins, ſurtout s'ils ſont forts & graves, tels que ceux des tambours. Car les vibrations les plus promptes & les plus courtes ſont celles qui s'excitent le plus difficilement. Or, que les ſons, quels qu'ils ſoient, excitent des vibrations dans les cordes qui ſont à l'uniſſon des corps ſonores, c'eſt ce qui eſt connu de tout le monde, & ce qui eſt auſſi confirmé par la vîteſſe du ſon. Les poids ſpécifiques de l'eau de pluie & du vif-argent ſont l'un à l'autre comme 1 à $13\frac{1}{3}$ environ, & lorſque le mercure eſt à la hauteur de 30 pouces anglois dans le barométre, les poids ſpécifiques de l'air & de l'eau de pluye ſont alors l'un à l'autre comme 1 à 870 environ : donc les poids ſpécifiques de l'air & du vif-argent ſont entr'eux comme 1 à 11890, donc la hauteur du vif-argent étant de 30 pouces dans le barométre, la hauteur de l'air uniforme, dont le poids peut comprimer notre air d'ici-bas, ſera de 356700 pouces, ou de 29725 pieds anglois. C'eſt cette hauteur que nous avons nommée *A* dans la conſtruction du Problême précédent. La circonférence du cercle dont le rayon eſt de 29725

pieds en a 186768 & comme on ſçait qu'un pendule de $39\frac{1}{5}$ pouces fait une oſcillation compoſée de ſon allée & de ſon retour en deux ſecondes, un pendule qui auroit 29725 pieds ou 356700 pouces devroit faire une ſemblable oſcillation en $190\frac{3}{4}''$; donc, pendant ce temps, le ſon parcourera 186768 pieds, & 979 pieds en une ſeconde.

Au reſte, dans ce calcul, je n'ai point eu d'égard à l'épaiſſeur des particules ſolides de l'air par leſquelles le ſon ſe communique en un inſtant. Car le poids de l'air étant au poids de l'eau comme 1 à 870, & les ſels étant preſque deux fois plus denſes que l'eau; ſi on ſuppoſe que les particules de l'air ſont à peu près de la même denſité que les particules de l'eau ou des ſels, & que la rareté de l'air vienne ſeulement des intervalles qui ſont entre ſes particules: le diamétre d'une particule d'air ſera à l'intervalle entre les centres des particules comme, 1 à 9 ou 10 à peu près, & à l'intervalle entre les particules comme 1 à 8 ou 9. Et par conſéquent, il faut ajouter à 979 pieds que le ſon doit parcourir en une ſeconde, ſelon le calcul précédent, $\frac{979}{9}$ pieds ou 109 pieds à peu près, à cauſe de l'épaiſſeur des particules de l'air: & alors le ſon parcourera 1088 pieds environ en une ſeconde.

Ajoutez à cela, que comme les vapeurs cachées dans l'air ont un autre reſſort, & qu'elles ſont d'un autre ton, elles participent à peine au mouvement de l'air pur qui propage les ſons. Or lorſque ces parties ſont en repos, ce mouvement eſt propagé plus vîte par le ſeul air pur, & cela en raiſon ſouſdoublée de la rareté de la matiere; enſorte que ſi l'atmoſphere eſt compoſée de dix parties d'air pur & d'une partie de vapeurs, le mouvement des ſons ſera plus prompt, dans la raiſon ſouſdoublée de 11 à 10, c'eſt-à-dire, à peu près, dans la raiſon de 21 à 20, que s'il étoit compoſé de onze parties d'air pur: donc la vîteſſe du mouvement du ſon ci-devant trouvée doit être augmentée dans cette raiſon. Ce qui fait que le ſon doit parcourir 1142 pieds en une ſeconde.

Cela doit être ainſi dans le printemps & dans l'automne, lorſque l'air eſt raréfié par une chaleur modérée, & que ſa force élaſtique eſt ſenſiblement augmentée. Mais dans l'hyver, où l'air eſt condenſé par le froid, & où ſa force élaſtique eſt diminuée, le mouvement du ſon doit être plus lent en raiſon ſouſdoublée de la denſité de l'air; & au contraire, dans l'été il doit être plus prompt; or on ſçait par expérience que le ſon parcourt à peu près 1142 pieds de Londres & 1070 pieds de Paris en une ſeconde.

La vîteſſe des ſons étant connue, on connoîtra les intervalles des vibrations *M. Sauveur* a trouvé par ſes expériences, qu'un tuyau ouvert, long environ de cinq pieds de Paris, rend un ſon du même ton que celui d'une corde qui fait cent vibrations en une ſeconde. Il ſe fait donc environ 100 vibrations à peu près dans un eſpace de 1070 pieds de Paris que le ſon parcourt en une ſeconde; & par conſéquent une vibration occupe un eſpace d'environ $10\frac{7}{10}$ pieds de Paris, c'eſt-à-dire, deux fois la longueur du tuyau. D'où il eſt vraiſemblable que les largeurs des vibrations des ſons dans tous les tuyaux ouverts, ſont égaux au double de la longueur des tuyaux.

De plus, on voit (par le Cor. de la Prop. 47. de ce Livre) pourquoi les ſons ceſſent dans l'inſtant que les mouvemens du corps ſonore viennent à ceſſer. Et pourquoi nous ne les entendons pas plus long-temps lorſque nous ſommes éloignés du corps ſonore que lorſque nous en ſommes très-près. On voit auſſi, par les principes qu'on a poſés, pourquoi les ſons augmentent dans les porte-voix. Car tout mouvement réciproque a coutume d'augmenter à chaque réflexion par la même cauſe qui le produit. Ainſi le mouvement ſe perd plus tard & ſe réfléchit plus fortement dans les tubes qui s'oppoſent à la dilatation du ſon, & par conſéquent, il s'augmente par le mouvement nouveau imprimé à chaque réflexion. Ce ſont-là les principaux phénomenes des ſons.

SECTION

NEUVIÈME SECTION.

Du mouvement circulaire des fluides.

HYPOTHESE.

La réſiſtance qui vient du défaut de lubricité des parties d'un fluide doit être, toutes choſes égales, proportionnelle à la vîteſſe avec laquelle les parties de ce fluide peuvent être ſéparées les unes des autres.

PROPOSITION LI. THÉORÈME XXXIX.

Si un cylindre ſolide infiniment long, tourne autour d'un axe donné de poſition par un mouvement uniforme, dans un fluide homogène & infini, que le fluide ſoit tourné en rond par cette ſeule impulſion, & que chaque partie du fluide continue uniformement dans ſon mouvement; les temps périodiques des parties du fluide ſeront comme leurs diſtances de l'axe du cylindre.

Soit *AFL* un cylindre mû circulairement & uniformement autour de ſon axe *S*, & que le fluide ſoit partagé en un nombre infini d'orbes cylindriques concentriques & ſolides de la même épaiſſeur, par des cercles concentriques *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP*, &c. Ce fluide étant homogène, les impreſſions que les orbes contigues feront les unes ſur les autres ſeront (par l'hypotèſe) comme leurs tranſlations réciproques, & comme les ſuperficies contigues dans leſquelles ſe font ces impreſſions. Si l'impreſſion faite dans quelque orbe eſt plus forte ou plus foible dans ſa partie concave que dans ſa partie convexe; la plus forte impreſſion prévaudra, & elle accélérera ou retardera le mouvement de l'orbe, ſelon qu'elle ſera dirigée, eu égard à ſon mouvement, vers le même côté, ou vers le côté oppoſé. Donc, pour Fig. 56.

Du Mouvement des Corps.

que chaque orbe perſévere uniformement dans ſon mouvement, les impreſſions qui viennent de part & d'autre, doivent être égales entr'elles & avoir des directions oppoſées. Donc, les impreſſions étant comme les ſuperficies contigues, & leurs tranſlations réciproques, ces tranſlations ſeront inverſement comme les ſuperficies, c'eſt-à-dire, inverſement comme les diſtances de ces ſuperficies à l'axe. Mais les différences des mouvemens angulaires autour de l'axe ſont comme ces tranſlations diviſées par les diſtances, ou comme les tranſlations directement & les diſtances inverſement, c'eſt-à-dire, en compoſant ces raiſons, inverſement comme les quarrés des diſtances. Donc, ſi à chaque partie de la droite infinie $SABCDEQ$ on éleve les perpendiculaires Aa, Bb, Cc, Dd, Ee &c. réciproquement proportionnelles aux quarrés de ces parties SA, SB, SC, SD, SE &c. & que par les extrémités des perpendiculaires on imagine une ligne hyperbolique; les ſommes de ces différences, c'eſt-à-dire, tous les mouvemens angulaires, ſeront comme les ſommes correſpondantes des lignes Aa, Bb, Cc, Dd, Ee &c. c'eſt-à-dire, en ſuppoſant que pour former un milieu uniformement fluide on augmente le nombre des orbes & qu'on diminue leur largeur à l'infini, comme les aires hyperboliques AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ &c. analogues à ces ſommes. Et les temps réciproquement proportionnels à ces mouvemens angulaires ſeront auſſi réciproquement proportionnels à ces aires. Donc, le temps périodique d'une particule quelconque D eſt réciproquement comme l'aire DdQ, c'eſt-à-dire, (par la quadrature connue des courbes) directement comme la diſtance SD. *C. Q. F. D.*

Fig. 56.

Cor. 1. Delà, les mouvemens angulaires des particules d'un fluide ſont réciproquement comme leurs diſtances à l'axe du cylindre, & leurs vîteſſes abſolues ſont égales.

Cor. 2. Si un fluide eſt contenu dans un vaſe cylindrique d'une longueur infinie, & qu'il contienne un autre cylindre intérieur, que ces deux cylindres tournent autour de leur axe com-

mun, que les temps de leurs révolutions ſoient comme leur demi diamétre, & que chacune des parties du fluide continue dans ſon mouvement, les temps périodiques de chacune des particules ſeront comme leurs diſtances à l'axe des cylindres.

Cor. 3. Si on ôte ou qu'on ajoute à un cylindre & à un fluide mû de cette ſorte un mouvement quelconque angulaire commun; comme par ce nouveau mouvement le frottement réciproque des parties du fluide n'eſt pas altéré, les mouvemens de ces parties entr'elles ne changeront pas. Car les tranſlations réciproques des parties dépendent de leur frottement. Donc une partie quelconque conſervera ſon mouvement lorſque ce mouvement ſera tel qu'il ne ſera pas plus accéléré que retardé par le frottement produit dans des parties oppoſées.

Cor. 4. Donc, ſi on ôte de ce ſyſtême entier compoſé du fluide & des cylindres tout le mouvement angulaire du cylindre extérieur, on aura le mouvement du fluide dans un cylindre en repos.

Cor. 5. Donc, ſi le fluide & le cylindre extérieur, étant en repos, le cylindre intérieur tourne uniformement; il communiquera un mouvement circulaire au fluide qui l'environne immédiatement, & ce mouvement ſe propagera peu à peu dans tout le fluide; & il ne ceſſera point d'augmenter juſqu'à ce que chaque partie du fluide ait acquis le mouvement dont on a parlé dans le Cor. 4.

Cor. 6. Comme le fluide fait effort pour propager ſon mouvement encore plus loin, le cylindre extérieur ſera auſſi mû circulairement par cet effort, à moins qu'il ne ſoit fortement retenu; & ſon mouvement s'accélérera juſqu'à ce que les temps périodiques de l'un & l'autre cylindre ſoient égaux entr'eux. Si le cylindre extérieur eſt fortement retenu, il s'efforcera de retarder le mouvement du fluide; & à moins que le cylindre intérieur, par quelque mouvement imprimé du dehors, ne conſerve ce mouvement, il ceſſera peu à peu par l'effort du cylindre extérieur.

Tout ceci peut s'éprouver dans une eau profonde ſtagnante.

PROPOSITION LII. THÉORÉME XL.

Si une ſphere ſolide tourne d'un mouvement uniforme, autour d'un axe donné de poſition, dans un fluide homogène & infini, que le fluide ſoit mû circulairement par cette ſeule impulſion; & que chaque partie de ce fluide continue uniformement dans ſon mouvement: les temps périodiques des parties du fluide ſeront comme les quarrés de leurs diſtances au centre de la ſphére.

Fig. 56. *Cas* 1. Soit *AFL* une ſphere mûe circulairement d'un mouvement uniforme autour de ſon axe *S*, & que le fluide ſoit partagé en un nombre infini d'orbes concentriques de même épaiſſeur par des cercles concentriques *BGM*, *CHN*, *DIO*, *EKP* &c. Suppoſez que ces orbes ſoient ſolides; comme le fluide eſt homogène, les impreſſions que les orbes contigues font les unes ſur les autres ſeront (par l'hypothèſe) comme leurs tranſlations réciproques, & comme les ſuperficies contigues ſur leſquelles ſe font ces impreſſions. Si l'impreſſion eſt plus forte ou plus foible dans quelque orbe vers ſa partie concave que vers ſa partie convexe; l'impreſſion la plus forte prévaudra, & elle accélérera ou retardera la vîteſſe de l'orbe ſelon qu'elle ſera dirigée du même côté ou d'un côté oppoſé à la direction de ſon mouvement. Donc, pour que chaque orbe continue uniformement dans ſon mouvement, les impulſions de part & d'autre doivent être égales entr'elles, & ſe faire vers des côtés oppoſés. Ainſi les impreſſions étant comme les ſuperficies contigues & comme leurs tranſlations réciproques; ces tranſlations ſeront inverſement comme les ſuperficies, c'eſt-à-dire, inverſement comme les quarrés des diſtances des ſuperficies au centre. Mais les différences des mouvemens angulaires autour de l'axe ſont comme ces tranſlations diviſées par les diſtances, ou comme ces tranſlations directement & les diſtances inverſement; c'eſt-à-dire, en compoſant ces raiſons, comme les cubes des diſtances inverſement. C'eſt-pourquoi, ſi à chacune des parties de la droite infinie *SABCDEQ* on éleve les perpendiculaires *Aa*,

Bb, *Cc*, *Dd*, *Ee* &c. réciproquement proportionnelles aux cubes de ces parties *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE* &c. Les ſommes des différences, c'eſt-à-dire, les mouvemens entiers angulaires, ſeront comme les ſommes correſpondantes des lignes *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, *Ee* &c. c'eſt-à-dire, (ſi le nombre des orbes augmente & que leur largeur diminue infiniment afin de former un milieu uniformement fluide) comme les aires hyperboliques *AaQ*, *BbQ*, *CcQ*, *DdQ*, *EeQ*, &c. analogues à ces ſommes. Et les temps périodiques réciproquement proportionnels aux mouvemens angulaires ſeront auſſi réciproquement proportionnels à ces aires. Donc le temps périodique d'un orbe quelconque *DIO* eſt réciproquement comme l'aire *DdQ*, c'eſt-à-dire, directement comme le quarré de la diſtance *SD*. Et c'eſt ce que j'ai voulu premierement démontrer. Fig. 56.

Cas 2. Du centre de la ſphere ſoit mené un grand nombre de droites infinies leſquelles faſſent avec l'axe des angles donnés, & qui ſe ſurpaſſent les uns les autres de différences données ; ſuppoſez que ces droites, en tournant autour de l'axe, coupent les orbes en un nombre innombrable d'anneaux ; chacun de ces anneaux aura quatre anneaux qui lui ſeront contigus, un intérieur, un extérieur, & deux autres aux côtés. Un quelconque de ces anneaux, par le frottement intérieur & extérieur, ne peut-être preſſé également dans des parties oppoſées ſi ce n'eſt par un mouvement qui ſe faſſe ſelon la loi du premier cas ; c'eſt ce qui eſt clair par la démonſtration de ce premier cas. Et par conſéquent, la ſérie quelconque d'anneaux, allant en ligne droite à l'infini depuis la ſphere, ſe mouvera ſelon la loi du premier cas, à moins que le frottement des anneaux latéraux ne s'y oppoſe. Mais dans le mouvement qui ſe fait ſelon cette loi, le frottement des anneaux latéraux eſt nul ; ainſi il n'empêchera point que le mouvement ne ſe faſſe ſelon cette loi. Si les anneaux, qui ſont également éloignés du centre, tournoient plus vîte ou plus lentement vers les pôles que vers l'écliptique ; les plus lents ſe-

roient accélérés, & les plus prompts ſeroient retardés par le frottement mutuel, & par là les temps périodiques deviendroient toujours égaux, ſelon la loi du cas premier. Ce frottement n'empêche donc pas que le mouvement ne ſe faſſe ſelon la loi du premier cas, & par conſéquent, cette loi aura lieu : c'eſt-à-dire, que les temps périodiques de chacun des anneaux ſeront comme les quarrés de leurs diſtances au centre du globe. Ce que j'avois à démontrer en ſecond lieu.

Cas 3. Soit à-préſent un de ces anneaux diviſé par des ſections tranſverſales en des particules innombrables qui forment une ſubſtance abſolument & uniformement fluide ; comme ces ſections n'ont point de rapport à la loi du mouvement circulaire, mais ſeulement à la conſtitution du fluide, le mouvement circulaire continuera comme auparavant. Ainſi les aſpérités de tous ces anneaux (leſquels ſont ſuppoſés très-petits) ne changeront point par ces ſections, non plus que la force de leurs frottemens mutuels ou bien ils changeront également. Ainſi la proportion des cauſes demeurant la même, la proportion des effets ſubſiſtera auſſi, c'eſt-à-dire, la proportion des mouvemens & des temps périodiques. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Delà, les mouvemens angulaires des parties du fluide autour de l'axe de la ſphere, ſont réciproquement comme les quarrés des diſtances au centre de la ſphere, & les vîteſſes abſolues ſont réciproquement comme ces mêmes quarrés diviſés par les diſtances à l'axe.

Cor. 2. Si un globe tourne d'un mouvement uniforme, dans un milieu en repos, homogène & infini, autour d'un axe donné de poſition, il communiquera au fluide un mouvement de tourbillon, & ce mouvement ſe continuera peu à peu à l'infini ; & il ne ceſſera point d'être accéléré dans chaque partie du fluide, juſqu'à ce que les temps périodiques de chacune de ces parties ſoient comme les quarrés des diſtances au centre du globe.

Cor. 3. Parce que les parties intérieures du tourbillon, à cauſe de ſa plus grande vîteſſe, preſſent & frottent les extérieures, que

par cette action elles leur communiquent perpétuellement du mouvement, & que ces parties extérieures communiquent auſſi en même temps la même quantité de mouvement à d'autres parties qui leur ſont extérieures, & que par là elles conſervent toujours leur quantité de mouvement ſans aucune variation ; il eſt clair, que le mouvement ſe communique ſans ceſſe du centre à la circonférence du tourbillon, & qu'il eſt abſorbé dans l'infinité de cette circonférence. La matiere du tourbillon contenue entre deux ſuperficies ſphériques quelconques concentriques, n'eſt donc jamais accélérée, parce que tout le mouvement que la matiere intérieure reçoit eſt toujours transféré à la matiere extérieure.

Cor. 4. Donc, afin que le mouvement du tourbillon ſe conſerve le même, il faut un principe actif par lequel le globe reçoive toujours la même quantité de mouvement qu'il imprime à la matiere du tourbillon ; & ſans un tel principe, il faut néceſſairement que le globe & les parties intérieures du tourbillon, communiquant ſans ceſſe leur mouvement aux extérieures, & n'en recevant point de nouveau, perdent leur mouvement peu à peu, & qu'ils ceſſent enfin de tourner.

Cor. 5. Si un autre globe nâgeoit du centre de ce tourbillon, à une certaine diſtance & que dans le même temps il tournât continuellement, par quelque force, autour d'un axe dont l'inclinaiſon fut donnée ; par ce mouvement le fluide ſeroit forcé de tourner en tourbillon ; & ce nouveau tourbillon très-petit commenceroit à tourner avec le globe autour du centre de l'autre tourbillon, & peu à peu ſon mouvement ſe propageroit à l'infini, comme celui du premier tourbillon. Par la même raiſon qui fait que ce nouveau globe ſeroit emporté par le mouvement du premier tourbillon, le premier globe ſeroit auſſi emporté par le mouvement du ſecond tourbillon, enſorte que ces deux globes tourneroient autour de quelque point intermédiaire, & qu'ils ſe fuiroient mutuellement par leur mouvement circulaire, à moins qu'ils ne fuſſent rapprochés par quelqu'autre force. Enſuite, ſi

les forces continuellement imprimées, par leſquelles ces globes continuent à ſe mouvoir, venoient à ceſſer, & que les loix de la mécanique permiſſent toutes ces ſuppoſitions, le mouvement de ces globes diminueroit peu à peu (par la raiſon indiquée dans les Cor. 3. & 4.) & enfin les tourbillons ſeroient en repos.

Cor. 6. Si pluſieurs globes tournent conſtamment dans des lieux donnés autour d'axes donnés de poſition, & avec des vîteſſes déterminées, il ſe formera autant de tourbillons à l'infini. Car chacun de ces globes, par la même raiſon que le mouvement de l'un d'entr'eux ſe propage à l'infini, propagera auſſi ſon mouvement à l'infini, enſorte que chaque partie du fluide infini ſera agitée du mouvement qui réſulte des actions de tous ces globes. Donc ces tourbillons ne ſeront pas terminés par des limites certaines, mais ils ſe mêleront peu à peu les uns les autres; & les globes par les actions de ces tourbillons les uns ſur les autres ſeront perpétuellement dérangés de leur place, comme on l'a fait voir dans le Cor. précédent; & par conſéquent, ils ne conſerveront point entr'eux une poſition fixe, à moins qu'ils ne ſoient retenus par quelqu'autre force. Mais les forces qui ſont continuellement imprimées à ces globes, & qui conſervent leur mouvement, venant à ceſſer, la matiere ceſſera peu à peu de former des tourbillons, & ſera à la fin en repos, par la raiſon aſſignée dans les Cor. 3. & 4.

Cor. 7. Si un fluide homogène eſt enfermé dans un vaſe ſphérique, & qu'il ait un mouvement de rotation uniforme autour d'un globe placé dans le centre, que ce globe & ce vaſe tournent du même côté autour du même axe, & que leurs temps périodiques ſoient comme les quarrés de leurs demi diamétres: les parties du fluide ne continueront pas à ſe mouvoir ſans accélération ni retardation, à moins que leurs temps périodiques ne ſoient comme les quarrés des diſtances au centre du tourbillon. Car un tourbillon ne peut ſubſiſter par une autre loi.

Cor. 8. Si le vaſe, le fluide qui y eſt renfermé, & le globe conſervent ce mouvement, & que de plus ils tournent d'un mouvement

vement angulaire commun autour d'un axe quelconque donné ; comme par ce nouveau mouvement le frottement des parties du fluide entr'elles ne change pas, les mouvemens de ces parties entre elles ne changeront pas non plus. Car les tranſlations réciproques des parties dépendent de leur frottement. Ainſi une partie quelconque perſévérera dans le mouvement qui eſt néceſſaire pour que le frottement qu'elle éprouve d'un côté ne la retarde pas plus que celui qu'elle éprouve de l'autre ne l'accélere.

Cor. 9. Ainſi ſi le vaſe eſt en repos, & que le mouvement du globe ſoit donné, le mouvement du fluide le ſera auſſi. Car concevez un plan qui paſſe par l'axe du globe, & qui ſe meuve en un ſens contraire ; & ſuppoſez que la ſomme du temps de ſa révolution & de celle du globe, ſoit au temps de la révolution du globe, comme le quarré du demi diamétre du vaſe eſt au quarré du demi diamétre du globe : les temps périodiques des parties du fluide ſeront alors, par rapport à ce plan, comme les quarrés de leurs diſtances au centre du globe.

Cor. 10. Donc ſi le vaſe & le globe ſe meuvent autour d'un même axe ou bien autour de quelque axe différent, avec une vîteſſe quelconque donnée, on aura le mouvement du fluide. Car ſi de tout le ſyſtême on ôte le mouvement angulaire du vaſe, tous les mouvemens demeureront les mêmes entr'eux comme auparavant, par le Cor. 8. & ces mouvemens ſeront donnés par le Cor. 9.

Cor. 11. Si le vaſe & le fluide ſont en repos, & que le globe tourne d'un mouvement uniforme, le mouvement ſe communiquera peu à peu à tout le fluide renfermé dans le vaſe, & le vaſe ſera mû circulairement par ce mouvement, à moins qu'il ne ſoit fortement retenu, & le fluide & le vaſe ne ceſſeront point d'être accélérés juſqu'à ce que leurs temps périodiques ſoient égaux aux temps périodiques du globe. Si le vaſe eſt retenu par quelque force, ou bien qu'il tourne par un mouvement conſtant & uniforme quelconque, le milieu parviendra peu à peu à l'état de mouvement dont on a parlé dans les Cor. 8. 9. & 10. & il

ne reſtera jamais dans aucun autre état. Enſuite, ſi les forces qui faiſoient tourner le globe & le vaſe avec des mouvemens déterminés ceſſent d'agir, & que tout le ſyſtême ſoit abandonné aux loix de la méchanique ; le globe & le vaſe agiront l'un ſur l'autre par le moyen du fluide, & ils ne ceſſeront point de ſe communiquer mutuellement leurs mouvemens par le moyen de ce fluide, juſqu'à ce que leurs temps périodiques ſoient égaux entre eux, & que le ſyſtême entier tourne tout enſemble comme feroit un corps ſolide.

SCHOLIE.

Dans tout ceci, je ſuppoſe le fluide compoſé d'une matiere dont la denſité & la fluidité ſoient uniformes. Dans un tel fluide, un même globe avec le même mouvement, & dans le même temps, exciteroit des mouvemens égaux & ſemblables, à des diſtances égales, dans quelque lieu du fluide qu'il fut placé. La matiere par ſon mouvement circulaire fait effort pour s'éloigner de l'axe du tourbillon, & par conſéquent elle preſſe toute la matiere qui eſt au-delà. Cette preſſion rend le frottement des parties plus fort, & leur ſéparation plus difficile ; & elle diminue, par conſéquent, la fluidité de la matiere. De plus, ſi les parties du fluide ſont plus épaiſſes dans quelque endroit, la fluidité y ſera moindre, à cauſe de la diminution du nombre des ſuperficies qui ſéparent ces parties les unes des autres. Je ſuppoſe que dans les cas de cette eſpéce, on ſupplée par quelque moyen au défaut de fluidité qui vient du manque de lubricité des parties, ou de quelque retardement. Car ſans cela, la matiere étant plus cohérente dans les lieux où elle eſt moins fluide, elle ſe mouveroit plus lentement, & par conſéquent elle recevroit le mouvement plus difficilement, & le propageroit plus longtemps que la proportion aſſignée ci-deſſus ne le demande. Si la forme du vaſe n'eſt pas ſphérique, les particules ſe mouveront dans des lignes qui ne ſeront pas circulaires, mais conformes à la figure du vaſe, & les temps périodi-

ques ſeront comme les quarrés des moyennes diſtances au centre à peu près. Les mouvemens ſeront plus lents dans les lieux entre la circonférence & le centre où les eſpaces ſont plus grands, & ils ſeront plus prompts dans les lieux où ces eſpaces ſeront plus étroits, & cependant les particules qui auront le plus de vîteſſe n'en tendront pas moins à la circonférence : car quoiqu'elles décrivent des arcs moins courbes, l'effort qu'elles font pour s'éloigner du centre ne ſera diminué par cette moindre courbure qu'autant qu'il ſera augmenté par l'augmentation de la vîteſſe. En allant des eſpaces plus étroits dans ceux qui ſont plus larges, elles s'éloigneront un peu plus du centre, & en s'éloignant leur mouvement ſera retardé ; enſuite, en repaſſant des eſpaces les plus larges dans les plus étroits leur mouvement ſera accéléré, & ainſi chacune de ces particules ſera perpétuellement retardée & accélérée tour à tour. Cela ſe paſſera ainſi dans un vaſe ſolide. Mais la forme d'un tourbillon dans un fluide infini ſe connoîtra par le Cor. 6. de cette Propoſition.

J'ai cherché les propriétés des tourbillons dans cette Propoſition, afin de connoître s'il étoit poſſible d'expliquer les phénomènes céleſtes par les tourbillons. Il eſt certain, par les obſervations, que les temps périodiques des planettes qui tournent autour de Jupiter, ſont en raiſon ſeſquiplée de leurs diſtances au centre de cette planette ; & la même régle a lieu pour les planettes qui tournent autour du ſoleil. Ainſi cette régle étant obſervée aſſez exactement par toutes les planettes autant que les obſervations aſtronomiques ont pu le faire voir juſqu'à préſent, elle eſt une loi de la nature. Or, ſi les planettes qui tournent autour de Jupiter & du Soleil étoient tranſportées par des tourbillons, ces tourbillons devroient auſſi obſerver la même loi en tournant. Mais les temps périodiques des particules des tourbillons ſont en raiſon doublée de leurs diſtances au centre du mouvement : & cette raiſon ne peut être diminuée & devenir la raiſon ſeſquiplée, à moins que la matiere du tourbillon ne ſoit

d'autant plus fluide, qu'elle s'éloigne plus du centre, ou que la réſiſtance, cauſée par le défaut de lubricité des parties du fluide, n'augmente, par l'augmentation de la vîteſſe avec laquelle les parties du fluide ſont ſéparées les unes des autres, dans une plus grande raiſon que celle dans laquelle cette vîteſſe elle-même augmente. Or l'un & l'autre répugne à la raiſon. Car les parties les plus épaiſſes & les moins fluides iroient à la circonférence, ſi elles ne péſoient pas vers le centre ; & quoique j'aye ſuppoſé pour les démonſtrations au commencement de cette ſection, que la réſiſtance étoit proportionnelle à la vîteſſe, il eſt vraiſemblable cependant qu'elle augmente dans une moindre raiſon que la vîteſſe. Ce qui étant accordé, il eſt certain que les temps périodiques des parties du tourbillon ſeront dans une plus grande raiſon que la raiſon doublée des diſtances au centre. Que ſi les tourbillons (comme c'eſt l'opinion de quelques-uns) ſe meuvent plus vîte près du centre, & enſuite plus lentement juſqu'à un certain éloignement, & enfin de nouveau plus promptement près de la circonférence ; il eſt certain qu'ils ne pourront obſerver ni la raiſon ſeſquiplée des diſtances, ni aucune proportion déterminée. C'eſt donc aux Philoſophes à voir comment ils pourront expliquer cette loi de la raiſon ſeſquiplée par le moyen des tourbillons.

PROPOSITION LIII. THÉORÈME XLI.

Les corps, qui ſont emportés par des tourbillons & dont les orbites rentrent en elles-mêmes, ſont de même denſité que ces tourbillons, & ſe meuvent ſelon la même loi que leurs parties, quant à la vîteſſe & à la direction.

Car ſi quelque petite partie d'un tourbillon, dont les particules ou les points phyſiques conſervent entr'elles une certaine poſition, eſt ſuppoſée ſe congeler : comme cette particule ne change, ni quant à ſa denſité, ni quant à la force imprimée, ni quant à la figure, elle ſe mouvera par la même loi qu'auparavant : & réci-

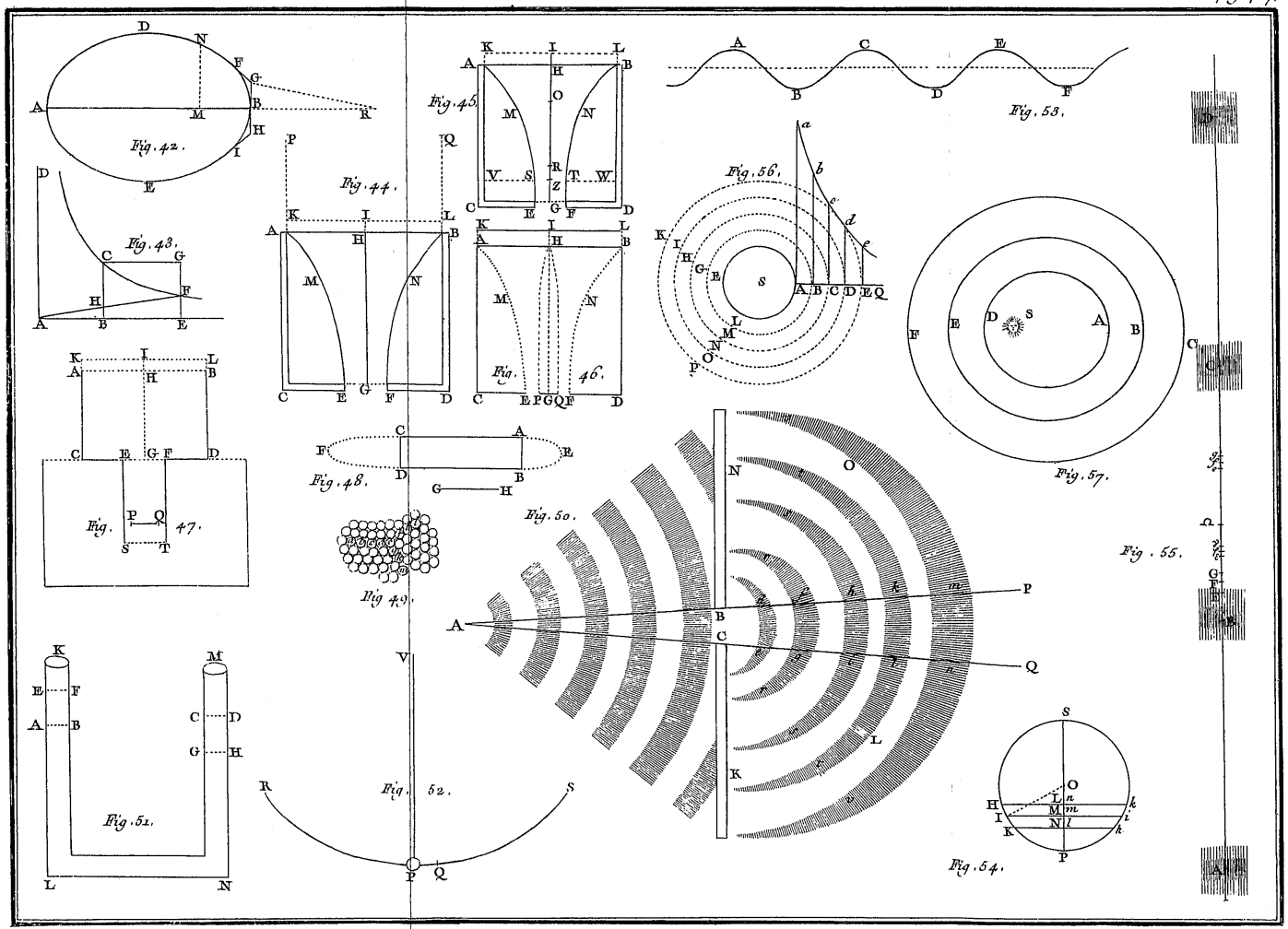
proquement, ſi la partie congelée & ſolide eſt de même denſité que le reſte du tourbillon, & qu'elle ſoit rendue fluide; elle ſe mouvera de la même maniere qu'auparavant, à moins que ſes particules rendues fluides ne ſe mûſſent entr'elles. Négligeant donc ce mouvement des particules entr'elles comme ne contribuant en rien au mouvement progreſſif du tout, le mouvement total ſera le même qu'auparavant. Mais ce mouvement ſera le même que le mouvement des autres parties du tourbillon également éloignées du centre, parce que cette particule ſolide qui eſt devenue fluide devient une partie du tourbillon ſemblable aux autres parties. Donc, ſi cette partie ſolide eſt de la même denſité que la matiere du tourbillon, elle aura le même mouvement que les parties de ce tourbillon, & ſera dans un repos relatif avec la matiere ambiante. Si elle eſt plus denſe, alors elle fera plus d'effort pour s'éloigner du centre du tourbillon qu'elle n'en faiſoit auparavant; ainſi, en ſurpaſſant la force du tourbillon par laquelle cette particule étoit auparavant retenue dans ſon orbite comme en équilibre, elle s'éloignera du centre, & décrira en tournant une ſpirale, & par conſéquent ſon orbite ne reviendra plus ſur elle même. Et par le même raiſonnement, ſi elle eſt moins denſe, elle s'approchera du centre; & par conſéquent l'orbite que décrira cette particule ne reviendra point ſur elle-même, à moins qu'elle ne ſoit de la même denſité que le fluide. Et il a été démontré que dans ce cas elle obſerveroit dans ſa révolution la même loi que les parties du fluide également diſtantes du centre du tourbillon. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc, un ſolide qui eſt emporté par un tourbillon, & qui décrit une orbite qui rentre en elle-même, eſt dans un repos relatif avec le fluide dans lequel il nâge.

Cor. 2. Et ſi ce tourbillon eſt d'une denſité uniforme, ce corps pourra faire ſa révolution à une diſtance quelconque du centre du tourbillon.

SCHOLIE.

Fig. 57. Il eſt donc certain que les planettes ne ſont point tranſportées par des tourbillons de matiere. Car les planettes qui tournent autour du ſoleil, ſelon l'hypotèſe de Copernic, font leurs révolutions dans des ellipſes qui ont le Soleil dans un de leurs foyers, & elles parcourent des aires proportionnelles au temps. Mais les parties d'un tourbillon ne peuvent ſe mouvoir ainſi. Que *AD*, *BE*, *CF* repréſentent trois orbes décrits autour du Soleil *S*, dont le plus extérieur *CF* ſoit concentrique au Soleil, & que les aphélies des deux intérieurs ſoient *A* & *B*, & leurs périhélies *D* & *E*. Le corps qui fait ſa révolution dans l'orbe *CF*, en décrivant des aires proportionnelles au temps, ſe meut d'un mouvement uniforme. Mais le corps qui fait ſa révolution dans l'orbe *BE*, ſe mouvera plus lentement dans l'aphélie *B*, & plus vîte dans le périhélie *E*, ſelon les loix aſtronomiques ; cependant, ſelon les loix de la méchanique, la matiere du tourbillon doit ſe mouvoir plus vîte dans l'eſpace plus étroit entre *A* & *C* que dans l'eſpace plus large entre *D* & *F* ; c'eſt-à-dire, que le corps révolvant ira plus vîte dans l'aphélie que dans le périhélie. Ce qui eſt contraire l'un à l'autre. Ainſi dans le commencement du ſigne de la Vierge, où Mars commence à être dans ſon aphélie, la diſtance entre les orbes de Mars & de Venus eſt à la diſtance de ces mêmes orbes dans le commencement du ſigne des Poiſſons comme 3 à 2 à peu près, & par conſéquent, la matiere du tourbillon entre ces orbes devroit aller plus vîte dans le commencement des Poiſſons que dans le commencement de la Vierge dans la raiſon de 3 à 2. Car plus l'eſpace par lequel une même quantité de matiere paſſe dans le même temps eſt étroit, & plus elle doit avoir de vîteſſe. Donc, ſi la terre eſt emportée par une matiere céleſte avec laquelle elle ſoit dans un repos relatif, & qu'elle tourne avec cette matiere autour du Soleil, ſa vîteſſe au commencement du ſigne des Poiſſons doit être à ſa vîteſſe au commen-


Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 45.
Fig. 46.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 53.
Fig. 54.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.

cement du ſigne de la Vierge en raiſon ſeſquialtere. Donc le mouvement diurne apparent du Soleil devroit être de 70 minutes plus vîte dans le commencement de la Vierge, & plus lent de 48 minutes dans le commencement des Poiſſons. Or, il eſt certain, (par les obſervations) que le mouvement diurne apparent du Soleil eſt plus vîte dans le commencement des Poiſſons que dans le commencement de la Vierge, & que par conſéquent la terre va plus vîte dans le commencement de la Vierge que dans le commencement des Poiſſons. Ainſi l'hypotèſe des tourbillons répugne à tous les phénomènes aſtronomiques, & paroît plus propre à les troubler qu'à les expliquer. Mais on peut comprendre par ce qui a été dit dans le premier livre comment ces mouvemens peuvent s'exécuter ſans tourbillons dans des eſpaces libres. Et cela ſera encore mieux expliqué dans le troiſiéme livre.

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE ALPHABÉTIQUE
DES MATIERES

Contenues dans les Principes Mathématiques de la Philoſophie Naturelle.

AVERTISSEMENT.

On a mis à la fin de ce premier Volume la Table générale des Matieres des Principes, quoique leur troiſiéme Livre ſoit contenu dans le ſecond Volume; ainſi quand on trouvera le troiſiéme Livre indiqué, il faudra recourir à ce ſecond Volume. A l'égard des citations elles doivent s'entendre ainſi, III. *x.* 484 *ſignifient Liv. III. Prop. X. pag.* 484. *Les Prop. ſont marquées en chiffres romains italiques, les pages en chiffres arabes.*

A.

AIR, ſa denſité, à une hauteur quelconque, ſe conclut de la Prop. 22. du Liv. 2. on fait voir ce qu'elle eſt à la hauteur d'un demi diamétre de la terre. III. *xlj.* 153

A quelle cauſe on peut attribuer ſa force élaſtique. II. *xxiij.*

Comparaiſon de ſa peſanteur avec celle de l'eau. III. *ibid.*

Sa réſiſtance: on la meſure par les expériences des pendules. II. *xxxj.*

Et par la théorie des corps tombans, on la détermine plus exactement. II. *IV. Sch.* 40

AIRES (comparaiſon des) que les corps qui circulent décrivent par des rayons tirés au centre, avec les temps employés à les décrire. I. *ij. iij. lviij. lxv.*

ANGLES de contact ne ſont pas tous du même genre, mais les uns ſont infiniment plus petits que les autres. I. *Lem. II. Sch.*

APSIDES, on examine leur mouvement. I. *Sect. 9.*

ATTRACTION (démonſtration de l') univerſelle des corps. III. *vij.*

Certitude de cette démonſtration. II. *iv.* 17

L'auteur n'a jamais aſſigné la cauſe de cette attraction, ni la façon dont elle s'exécute. I. 7. 167. 200. III. 179

C.

CENTRE, le commun centre de gravité de pluſieurs corps ne change point ſon état de repos ou de mouvement par l'action de ces corps entr'eux. I. 25

Le centre commun de gravité de la terre, du Soleil & de toutes les planetes eſt en repos. III. *xj.*

C'eſt ce qui eſt confirmé par le Cor. 2. de la Prop. 14. Liv. 3.

Le centre commun de gravité de la terre & de la Lune parcourt en une année le grand orbe. III. 31

A quelle diſtance ce commun centre eſt de la Lune & de la terre. III. 101

Centre des forces par leſquelles les corps qui tournent ſont retenus dans leur orbite.

Par quel indice on trouve ce centre des aires. I. *iij.* 54

Comment on trouve ce centre en connoiſſant les vîteſſes des corps qui tournent. I. *v.*

CERCLES, par quelle loi d'une force centripéte tendante à un point quelconque donné, un corps peut décrire en tournant la circonférence d'un cercle. I. *iv. vij. viij.*

CHALEUR, il eſt reconnu que la chaleur allonge une barre de fer. III. *xliv.*

Quelle eſt la chaleur du Soleil à différentes diſtances. III. *xlj.*

Quelle elle eſt dans Mercure. III. *viij. Cor.* 4.

Quelle elle étoit dans la cométe de 1680. lorſque cette cométe étoit dans ſon périhélie. III. *xlj.*

CIEUX, ils ſont deſtitués de toute réſiſtance ſenſible, III. *x. xlj.* & par conſéquent ils ſont vuides de tout fluide corporel. II. *xl.* Ils donnent paſſage à la lumiere ſans lui faire éprouver aucune réfraction. III. *xlj.*

COMETES, elles ſont du genre des planetes, & non de celui des météores. III. *xl. xlj.* 143

Elles ſont placées au-deſſus de la Lune, & elles ſont dans la région des planetes. III. *xxxix.*

Comment on peut déterminer à peu près leurs diſtances par les obſervations. III. *Lem. IV.* 110

On en a obſervé une plus grande quantité dans l'hémiſphére vers le Soleil que dans l'hemiſphére oppoſé, & pourquoi. III. 117

Elles brillent par la lumiere du Soleil qu'elles réfléchiſſent. *ibid.*

Dans quelle proportion eſt ordinairement cette lumiere. III. 113

Elles ſont entourées de grands atmoſphéres immenſes. III. 114 & 118

On croit que celles qui approchent le plus près du Soleil, ſont pour la plûpart les plus petites. III. 160

Pourquoi elles ne ſont point renfermées dans le zodiaque, (comme les planetes) mais parcourent toutes les régions du Ciel. III. 171

Elles peuvent quelquefois tomber dans le Soleil & lui ſervir d'un nouvel aliment. III. 172

On imagine quel eſt leur uſage. III. 157 & 172

Elles ſe meuvent dans des ſections coniques qui ont leur foyer dans le centre du Soleil, & elles décrivent des aires proportionnelles au temps par un rayon tiré au Soleil, & quoiqu'elles ſe meuvent dans des ellipſes ſi leur orbe rentre en lui-même, cependant ces orbes approchent infiniment d'être paraboliques. III. *xl.*

On trouve leur trajectoire parabolique par le moyen de trois obſervations données : III. *xlj.* & on corrige cette trajectoire trouvée. III. *xlij.*

Comment on trouve le lieu d'une cométe dans une trajectoire parabolique, pour un temps donné. III. *xlj.*

On compare la vîteſſe d'une cométe avec celle d'une planete. *ibid.*

Leurs queuës.

Elles ſont oppoſées au Soleil. III. *xlj.* 150

Elles ſont les plus grandes & les plus brillantes, immédiatement après leur paſſage dans le voiſinage du Soleil. III. *xlj.* 149

La matiere qui les compoſe eſt extrêmement rare. III. *xlj.* 152

Origine & nature de ces queuës. III. 113

Dans quel eſpace de temps elles s'élévent de la tête des cométes. III. *xlj.* 152

Cométe des années 1664 & 1665.

On examine ſon mouvement obſervé, & on le compare avec la théorie. III. *xlij.* 163

Cométe des années 1680 & 1681.

Son mouvement obſervé. III. *xlj.*

On le calcule pour un orbe parabolique. III. 135

Et pour un orbe elliptique. III. 138

On trace ſa trajectoire & ſa queuë pour tous les lieux. III. 143

Cométe de l'année 1682.

On compare ſon mouvement avec la théorie. III. 168

On croit que cette même cométe avoit déja paru en 1607. & que par conſéquent ſon temps périodique eſt de 75 ans. III. 171

Cométe de l'année 1683.

Comparaiſon de ſon mouvement avec la théorie. III. 167

Cométe de 1723.

Comparaiſon de ſon mouvement avec la théorie. III. 169

COURBES, on les diſtingue en géométriques rationnelles, & géométriques irrationnelles. I. 118

Comment on peut trouver la courbure des figures. III. *xxvij.* 60. II. *x.* 273

CYCLOIDE ou EPICYCLOIDE, leur rectification. I. *xlviij. xlix.*

Leur évolution. I. *l.* 162

CYLINDRE (attraction d'un) compoſé de particules attirantes, & dont les forces attractives ſont réciproquement comme les quarrés des diſtances. I. 229

D.

DEGRE'S, on donne la meſure des degrés du méridien terreſtre, & on fait voir par la théorie combien leur différence eſt petite. III. *xx.*

DESCENTE, quelle eſt la deſcente des corps graves dans le vuide. III. 35

On compare les eſpaces décrits, les temps employés à les décrire, & les vîteſſes acquiſes en les décrivant dans l'aſcenſion, & la deſcenſion rectiligne des corps, en ſuppoſant une force centripete d'un genre quelconque. I. *Sect. 7.*

Deſcenſion & aſcenſion des corps dans des milieux réſiſtans. II. *iij. viij. ix. xl. xiij. xiv.*

DIEU. (nature de) III. 175, 176, &c.

E.

ELLIPSE, par quelle loi de force centripete tendante au centre de la figure cette courbe eſt décrite par le corps. I. *x.*

Par quelle loi un corps qui tourne peut décrire cette courbe avec une force centripete qui tend à un de ſes foyers. I. *xj.*

EQUINOXES. (préceſſion des)

On aſſigne les cauſes de ce mouvement. III. *xxj.*

Et on tire de ces cauſes la quantité de ce mouvement. III. *xxxix.*

ESPACE abſolu & relatif. I. 8, 9, 10

Il n'eſt pas également plein. III. 21

ETOILES FIXES, on démontre qu'elles ſont en repos. III. 31

A quelles cauſes on doit attribuer leur radiation & leur ſcintillation. III. 148, &c.

D'où peuvent venir les nouvelles étoiles. III. 172

On s'apperçoit qu'il faut admettre une eſpéce de fluide très-ſubtil qui pénétre tous les corps, & qui demeure caché dans leur ſubſtance, afin de pouvoir expliquer pluſieurs phénoménes de la nature. III. 179

F.

FLUIDE. (définition du) II. 301

On fait voir quelles loix ſuivent la denſité & la compreſſion des fluides. II. *Sect. 5.*

On détermine le mouvement des fluides qui s'écoulent par un trou fait dans un vaſe. II. *xxxvj.*

FORCES, leur compoſition & leur décompoſition. I. 19

FORCES ATTRACTIVES (on détermine les) des corps ſphériques compoſés de particules qui attirent ſelon une loi quelconque. I. *Sect. 12.*

Et celles des corps qui ne ſont pas ſphériques, & qui ſont compoſés de particules attirantes ſelon une loi quelconque. *ibid.*

FORCE CENTRIFUGE (quelle eſt la) des corps ſous l'équateur. III. 35

FORCE CENTRIPETE. (on définit la) I. 3

On définit ce qu'on entend par ſa quantité abſolue. I. 5

Ce qu'on entend par ſa quantité accélératrice. I. 5

Et par ſa quantité motrice. I. 6

On fait ſçavoir comment on peut connoître ſa proportion à une force quelconque connue. I. *56. Sch.*

Un corps qui circule autour d'un centre immobile dans un eſpace non réſiſtant, fait découvrir les forces centripetes. I. *Sect. 2. & 3.*

Les forces centripetes tendantes à un point quelconque, & par leſquelles une figure quelconque peut être décrite par un corps qui circule étant données, les forces centripetes tendantes à un autre point quelconque, & par leſquelles la même figure peut être décrite dans le même temps périodique ſont auſſi données. I. *vij. Cor. 3.* 61

Les forces centripetes par leſquelles une figure quelconque eſt décrite par un corps qui circule étant données, on aura auſſi les forces qu'il faut pour décrire une nouvelle figure dans laquelle les ordonnées ont une raiſon donnée avec celles de la premiere figure, & font avec l'axe un autre angle quelconque pourvû que chaque

temps périodique demeure le même. I. *Sch.* 65

On fait voir quelles figures peuvent être décrites par des forces centripetes décroiſſantes en raiſon doublée des diſtances. I. *xxij. Cor.* 1. I. 170 *Cor.* 2.

La force centripete étant comme le cube de l'ordonnée, & tendante à un centre des forces très-éloigné, le corps ſe mouvra dans la ſection conique quelconque donnée. I. 51. *Sch.*

Si elle eſt comme le cube de l'ordonné, & tendante à un centre de forces très-éloigné, le corps ſe mouvra dans une hyperbole. 234, à la fin.

FUME'E, on explique en paſſant l'aſcenſion de la fumée dans une cheminée. III. 155

G.

GRAVITE', elle eſt d'un autre genre que la force magnétique. III. 21 *Cor.* 3. Elle eſt mutuelle entre la terre & ſes parties. III. 32. à la fin.

Sa cauſe n'eſt point aſſignée. III. 178 à la fin.

Elle a lieu dans toutes les planetes. III. *v. Cor.* 1.

Et elle décroît hors de leur ſuperficie en raiſon doublée de la diſtance au centre. III. *viij.*

Et de leur ſuperficie vers le centre, elle décroît dans la raiſon ſimple des diſtances à peu près. III. *ix.*

Elle a lieu dans tous les corps, & elle eſt proportionnelle dans chacun d'eux à leur quantité de matiere. III. *vij.*

C'eſt par la force de la gravité que la Lune eſt retenue dans ſon orbite. III. *iv.*

H.

HYDROSTATIQUE, on donne les principes de l'hydroſtatique. II. *Sect.* 9.

HYPERBOLE, par quelle loi de force centrifuge tendante à éloigner le corps qui ſe meut dans cette figure du centre de la figure, cette courbe peut être décrite. I. *x. Sch.* 65

Par quelle loi de force centrifuge, tendante à éloigner le corps du foyer de cette figure, ce corps peut la décrire dans ſon mouvement. I. *xij.* 69

Par quelle loi de force centripete tendante au foyer de la figure, cette courbe peut être décrite par le corps qui ſe meut dans cette figure. I. *xij.*

HYPOTHESE, cette philoſophie les rejette de quelque eſpéce qu'elles ſoient. III. 179

I.

INERTIE, définition de la force d'inertie. I. 2

JUPITER, ſon temps périodique. III. 9

Sa diſtance au Soleil. *ibid.*

Son diamétre apparent. III. 6

Son diamétre véritable. III. 24

Quantité de la force attractive. *ibid.*

Poids des corps à ſa ſuperficie. *ibid.*

Sa denſité. *ibid.*

Sa quantité de matiere. *ibid.*

De quelle quantité ſon mouvement eſt troublé par ſa ſaturne. III. 30

On trouve par le calcul la proportion de ſes diamétres. III. 39

Et on la compare avec les obſervations. *ibid.*

En combien de temps il tourne ſur ſon axe. III. 38

L.

LIEU, on le définit & on le diſtingue en abſolu & relatif. I. 8

On trouve pour un temps donné les lieux des corps mûs dans des ſections coniques. I. *Sect.* 6.

LUMIERE, ſa propagation n'eſt pas inſtantanée. I. *xcvj. Sch.*

Elle n'eſt point l'effet de l'agitation d'un milieu éthéré quelconque. II. 410. *Sch.*

Sa viteſſe eſt différente dans différens milieux. I. *xcv.*

On explique comment ſe fait une ſorte de réflexion. I. *xcvj.*

On explique la réfraction. I. *xliv.*

Elle ne ſe fait pas dans le ſeul point de l'incidence. I. 239

Incurvation des rayons en paſſant près des bords des corps, découverte par les expériences. I. 238. *Sch.*

LUNE, on détermine par le calcul la figure du corps de la Lune. III. *xxxviij.*

On explique ſes librations. III. *xvij.*

Quel eſt ſon diamétre apparent, moyen, médiocre. III. 100. *Cor.* 3.

Quel eſt ſon diamétre véritable. *Ibid. Cor.* 4.

Poids des corps à ſa ſurface. *Ibid. Cor.* 4.

Sa denſité. *Ibid. Cor.* 3.

Sa quantité de matiere. *Ibid. Cor.* 4.

Combien ſa diſtance médiocre à la terre contient de grands diamétres de la terre.

III. 101. *Cor.* 7. 10. & combien elle en contient de médiocres. III. 102. *Cor.* 8.

Quelle eſt la quantité de ſa force pour mouvoir les eaux de la mer. III. *xxvij.*

Elle ne peut être ſenſible dans les expériences des pendules, ni dans aucune expérience quelconque d'hydroſtatique. III. 100. *Cor.* 2.

Son temps périodique. III. 101. *Cor.* 7.

Temps de ſa révolution ſynodique. III. *xxvj.* 59

On déduit ſes mouvemens & leurs inégalités de leurs cauſes. III. *xxij.* 46 *& ſuiv.*

La Lune va plus lentement dans le périhélie de la terre où ſon orbe eſt dilaté, & plus vîte dans l'aphélie de la terre où ſon orbe eſt contracté. *ibid.*

Elle ſe meut plus lentement dans les ſyzygies de l'apogée avec le Soleil où ſon orbe eſt contracté. III. *xxxv. Sch.* Elle ſe meut plus lentement dans les ſyzygies du nœud avec le Soleil, & plus vîte dans les ſyzygies, & elle décrit une aire dans une moindre raiſon que le temps dans le premier cas, & plus grande dans le ſecond par un rayon tiré à la terre. III. *xxij.*

On calcule l'inégalité de ces aires. III. *xxvj.* 56

Elle a un orbe plus courbe, & elle s'éloigne plus de la terre dans le premier cas, & dans le ſecond elle s'approche plus de la terre, & elle a un orbe moins courbe. III. *xxij.* 46

On détermine par le calcul la figure de cet orbe & la proportion de ſes diamétres. III. *xxviij.* 60

Et on propoſe enſuite une méthode de trouver la diſtance de la Lune à la terre par ſon mouvement horaire. III. *xxvij.*

Son apogée ſe meut plus lentement dans l'aphélie de la terre, & plus vîte dans ſon périhélie. III. *xxxv.* 88

Son apogée avance le plus lorſque le Soleil eſt dans les ſyzygies, & il rétrograde dans les quadratures. *ibid.*

Son excentricité eſt la plus grande dans les ſyzygies de l'apogée avec le Soleil, & la moindre dans les quadratures. *ibid.*

Les nœuds ſe meuvent plus lentement dans l'aphélie de la terre, & plus vîte dans ſon périhélie. *ibid.*

Les nœuds ſont en repos dans leurs ſyzygies avec le Soleil, & rétrogradent trés-vîte dans les quadratures. *ibid.*

On calcule par la théorie de la gravité les mouvemens des nœuds, & l'inégalité de ces mouvemens. III. *xxx. xxxj. xxxij. xxxiij.*

L'inclinaiſon de ſon orbe à l'écliptique eſt la plus grande dans les ſyzygies des nœuds avec le Soleil, & la plus petite dans les quadratures. I. *lxvj. Cor.* 10.

On calcule par la théorie de la gravité les variations de cette inclinaiſon. III. *xxiv. xxxv.*

Equations des mouvemens lunaires pour les uſages aſtronomiques. III. 88. *& ſuiv.*

Mouvement moyen de la Lune.

Equation annuelle. *Ibid.* 89

Premiere équation ſemeſtre. *Ibid.* 91

Seconde équation ſemeſtre. 91

Premiere équation du centre. *Ibid.* 92

Seconde équation du centre. *Ibid.* 93, 94

Premiere variation de la Lune. III. *xxix.* 63

Mouvement moyen de l'apogée.

Son équation annuelle. III. *xxxv.* 90

Equation ſemeſtre.

Son équation ſemeſtre. *Ibid.* 90

Mouvement moyen des nœuds. *Ibid.* 90

Leur équation annuelle. *Ibid.* 90

Leur équation ſemeſtre. III. *xxxiij.* 79

Inclinaiſon de l'orbite à l'écliptique.

Son équation ſemeſtre. 88

Par quelle méthode on peut établir la théorie des mouvemens lunaires ſur les obſervations. *Ibid.* 94

M.

MAGNETIQUE. (force) I. 32. II. 316. III. 22. 102

MARS, ſon temps périodique. III. 9

Sa diſtance au Soleil. *ibid.*

Mouvement de ſon aphélie. III. *xiv. Sch.*

MATIERE, on définit ce qu'on entend par ſa quantité. I. 2

On définit ce qu'on entend par force réſidente dans la matiere, ou force d'inertie. *ibid.*

On définit ce qu'on entend par force imprimée dans la matiere. 3

Comment peut-on connoître ſon extenſion, ſa dureté, ſon impénétrabilité, ſa mobilité, ſa force d'inertie, ſa gravité. III. 2. III. 179

La matiere ſubtile de Deſcartes eſt réfutée. III. *xxxj. Sch.* 343.

MECHANIQUES, on démontre & on explique ce qu'on appelle les puiſſances méchaniques. I. 29, 30, 34

MER, on déduit le flux de la mer de ſes cauſes. III. *xxiv. xxvj. xxxvij.*

MERCURE, ſon temps périodique. III. 9

Sa diſtance au Soleil. *ibid.*

Mouvement de ſon aphélie. III. *xiv. Sch.*

METHODE des premieres & dernieres raiſons. I. *Sect.* 1.

Pour transformer les figures en d'autres qui ſoient du même genre analytique. I. *Lem. XXII.* 99

Des fluxions. II. *Lem. II.* 250

D'interpolation. III. *Lem. V & VI.* 120, 122

Pour trouver les quadratures approchées de toutes les courbes. *Ibid.* 120

Des ſéries convergentes appliquée à la ſolution des Problêmes les plus difficiles. I. 146, 147, 234

MOUVEMENT, on définit ce qu'on entend par ſa quantité, I. 2, abſolu & relatif. 9 *& ſuiv.* On démontre par des exemples comment on peut diſtinguer ces deux ſortes de mouvemens l'un de l'autre. 13

Loix du mouvement. 17 *& ſuiv.*

Compoſition & réſolution des mouvemens. 19

On fait voir par quelle expérience on peut connoître exactement après la réflexion les mouvemens des corps qui ſe choquent. 27 *& ſuiv.*

Mouvement des corps.

Dans les ſections coniques excentriques. I. *Sect.* 1.

Dans des orbes mobiles. I. *Sect.* 9.

Dans des ſuperficies données, & du mouvement réciproque des pendules. I. *Sect.* 10.

Du mouvement des corps qui s'attirent réciproquement. I. *Sect.* 11.

Des mouvemens des corps très-petits qui ſont agités par des forces centripetes, qui tendent à chacune des parties de quelque corps d'une maſſe beaucoup plus grande. I. *Sect.* 14.

Des mouvemens des corps qui éprouvent des réſiſtances en raiſon de la vîteſſe. II. *Sect.* 1.

En raiſon doublée de la vîteſſe. II. *Sect.* 2.

Partie en raiſon de la vîteſſe, & partie dans ſa raiſon doublée. II. *Sect.* 3.

Des corps qui ſe meuvent dans des milieux par la ſeule force réſidente en eux. II. *j. ij. v. vj. vij. xxxv.*

Des corps qui montent ou deſcendent en ligne droite dans des milieux réſiſtans, par la force uniforme de la gravité. II. *iij. viij. ix. xl.*

Des corps projettés dans des milieux réſiſtans. II. *iv. x. xj.*

Des corps qui circulent dans des milieux réſiſtans. II. *Sect.* 4.

Des pendules qui oſcillent dans des milieux réſiſtans. II. *Sect.* 6.

Mouvement & réſiſtance des fluides. II. *Sect.* 7.

Mouvement propagé dans des fluides. II. *Sect.* 8.

Mouvement circulaire ou de tourbillons des fluides. II. *Sect.* 9.

Le monde n'a point été formé par des cauſes méchaniques. III. *Sch. gen.* 174.

N.

NAVIRE, propoſition qui peut être de quelque utilité pour leur conſtruction. II. *xxxiv. Sch.*

O.

OMBRE, l'ombre de la terre doit être augmentée dans des éclipſes de Lune à cauſe de la réfraction de l'atmoſphere. III. *94 vers la fin.*

ONDES, on trouve la vîteſſe des ondes propages dans la ſuperficie d'une eau ſtaguante. II. *xlvj.*

OPTIQUE, détermination des verres elliptiques que Deſcartes avoit cachée. I. *xcvij.*

Solution plus générale du Problême de Deſcartes. I. *xcviij.*

ORBITES, détermination des orbites que les corps décrivent en partant d'un lieu donné avec une vîteſſe donnée & ſelon une ligne droite donnée, lorſque la force centripete eſt réciproquement comme le quarré de la diſtance, & qu'on connoît la quantité abſolue de cette force. I. *xvij.*

Que les corps décrivent lorſque les forces centripetes ſont réciproquement comme les cubes des diſtances. I. *ix. xlj. Cor.* 3. *xliv. Cor.* 5.

Quelles ſont celles que les corps ſollicités par des forces centripetes quelconques décrivent. I. *Sect.* 8.

P.

PARABOLE, par quelle loi de force centripete tendante à ſon foyer cette figure eſt décrite par le corps qui s'y meut. I. *xiij.*

PENDULES, on explique les propriétés des pendules. I. *l. lj. lij. liij.* II. *Sect. 6.*

On compare entr'elles, tant par la théorie de la gravité, que par les obſervations, les diverſes longueurs des pendules iſochrones dans les différentes latitudes des lieux. III. *xx.*

PHILOSOPHIE, régles à obſerver en philoſophant. III. 2

PLANETES, elles ne ſont point tranſportées par des tourbillons corporels. II. 424-426. III. 174

PLANETES PRINCIPALES, environnent le Soleil III. 8

Elles ſe meuvent dans des ellipſes ayant le centre du Soleil dans un de leur foyer. III. *xiij.*

Elles décrivent des aires proportionnelles au tems par un rayon tiré au Soleil. III. *xiij.*

Elles ſont leurs révolutions dans des temps périodiques qui ſont en raiſon ſeſquiplée de leurs diſtances au Soleil. III. *viij. xiij.* & I. *xv.*

Elles ſont retenues dans leurs orbites par la force de gravité qui tend au Soleil, & laquelle eſt réciproquement comme le quarré de la diſtance à ſon centre. III. *ij. v.*

PLANETES SECONDAIRES, elles ſe meuvent dans des ellipſes qui ont le centre de leur planete principale pour un de leurs foyers; elles décrivent des aires proportionnelles au temps par un rayon tiré à leur planete principale. III. *5 & ſuiv.* III. *xxij.*

Elles ſont leurs révolutions dans des temps périodiques qui ſont en raiſon ſeſquiplée de leurs diſtances à leurs planetes principales. *Ibid.* & I. 15

Elles ſont retenues dans leurs orbites par la force de la gravité qui tend à leur planete principale, & eſt réciproquement comme le quarré de la diſtance à leur centre. III. *j. iij. iv. v.*

PLANETES, leurs temps périodiques. III. 5, 9

Leurs diſtances au Soleil. *Ibid.*

Les aphélies & les nœuds de leurs orbites ſont preſque en repos. III. *xiv.*

On détermine leurs orbes. III. *j. v. vj.*

On trouve leurs lieux dans ces orbes. I. *xxxj.*

Leur denſité eſt proportionnelle à la chaleur qu'elles reçoivent du Soleil. III. *viij. Cor.* 4.

Leurs rotations diurnes ſont uniformes. III. *xvij.*

Leurs axes ſont plus courts que les diamétres de leur équateur. III. *viij.*

POIDS DES CORPS ſur la terre, ſur le Soleil, ou ſur une planete quelconque, ſont à égales diſtances de leurs centres comme les quantités de matiere de ces corps. III. *vj.*

Ils ne dépendent point de leurs formes ni de leur texture. III. *vj. Cor.* 1.

On les trouve pour les différentes régions de la terre, & on les compare entr'eux. III. *xx.*

PROBLEMES (ſolution de) de Kepler par la trochoïde & par approximation. I. *xxxj.*

Conſtruction géométrique & ſolution ſynthétique du Problême des quatre lignes des anciens, rapporté par Pappus, & que Deſcartes a tenté par le calcul algébrique. I. 90, 91

PROJECTILES, ils ſe meuvent dans une parabole ſi on fait abſtraction de la réſiſtance du milieu. I. 27, 28, *x. Sch. ciij. Sch.* II. *x. exemp. ſeconde.* 2

Quel eſt leur mouvement dans les milieux réſiſtans. II. *iv. x.*

PULSIONS, on détermine les largeurs ou intervalles des pulſions de l'air par leſquelles elles ſont propagées. II. *l. Sch. vers la fin.*

Q.

QUADRATURE (on ne peut avoir la) d'aucune ovale en termes finis. I. *Lem. XXVIII.*

QUALITE'S (des corps), comment on peut les connoître, & quand il faut les admettre. III. 3

R.

RAISON (définition de la) ſeſquiplée. I. 45

REPOS, du repos vrai, & du repos relatif. I. 9 *& ſuiv.*

RESISTENCE (quantité de la) dans les milieux qui ne ſont pas continus. II. *xxxv.*

Dans les milieux continus. II. *xxxviij.*
Dans des milieux d'un genre quelconque. II. *xxxv. Sch.*
La théorie des réſiſtances eſt confirmée par les expériences des pendules. II. *xxx. xxxj. & Sch. ſuiv.*
Par les expériences des corps qui tombent. II. *xl. & Sch. ſuiv.*
La réſiſtance des milieux eſt comme leur denſité, toutes choſes égales. II. 340 *& ſuiv.* II. *xxxiij. xxxv. xxxviij.* II. 391
En raiſon doublée du diamétre des corps ſphériques auſquels ils réſiſtent, toutes choſes égales. II. 346 *& ſuiv.* II. *xxxiij. xxxv. xxxviij. fig. de la pag.* 379
La réſiſtance des fluides eſt de trois ſortes, car elle vient ou de l'inertie de la matiere fluide, ou de la ténacité de ſes parties, ou du frottement. II. *xiv. Sch.*
La réſiſtance des fluides eſt preſque toute du premier genre. II. 390
Et elle ne peut être diminué par la ſubtilité des parties du fluide, ſa denſité reſtant la même. II. 392
Proportion de la réſiſtance d'un globe à celle d'un cylindre dans des milieux non continus. II. *xxxiv.*
Et dans les milieux comprimés. III. 374 *Lem. VII.*
Réſiſtance d'un globe dans les milieux qui ne ſont pas continus. II. *xxxv.*
Et dans les milieux comprimés. II. *xxxviij.*
Comment on peut la trouver par l'expérience. II. *xl.*
Comment on peut diminuer la réſiſtance qu'un cone tronqué éprouve dans un fluide. II. *xxxiv. Sch.*
Quel eſt le ſolide de la moindre réſiſtance. *ibid.*

S.

SATELLITE, plus grande élongation héliocentrique au centre de Jupiter de ſon dernier ſatellite. III. *viij.*
Plus grande élongation heliocentrique du ſatellite d'Hughens au centre de Saturne. *ibid.*
Temps périodiques des ſatellites de Jupiter, & leurs diſtances au centre de cette planete. III. 5
Temps périodiques des ſatellites de Saturne, & leurs diſtances au centre de Saturne. III. 7
On fait voir comment on peut déduire les inégalités des mouvemens des ſatellites de Jupiter & de Saturne, de celles des mouvemens de la Lune. III. *xxiij.*
SATURNE, ſon temps périodique. III. 9
Sa diſtance au Soleil. *ibid.*
Son diamétre apparent. *ibid.*
Son diamétre au vrai. III. *viij.*
Quelle eſt la quantité de ſa force attractive. *ibid.*
Poids des corps à ſa ſurface. *ibid.*
Sa denſité. *ibid.*
Quantité de ſa matiere. *ibid.*
Quelle eſt l'altération que Jupiter cauſe dans ſon mouvement. III *xiij.*
Diamétre apparent de l'anneau qui l'entoure. III. 8
SECTIONS CONIQUES; par quelle loi de force centripete tendant à un point quelconque donné, ces figures ſont décrites par les corps qui s'y meuvent. I. *xvij. Sch.*
Deſcription géométrique de ces courbes lorſque les foyers ſont donnés. I. *Sect.* 4.
Lorſque les foyers ne ſont pas donnés. I. *Sect.* 5.
Lorſque les centres ou les aſymptotes ſont donnés. I. *xxvij. Sch.*
SOLEIL, il ſe meut autour du centre commun de gravité de toutes les planetes. III. *xij.*
Son temps périodique autour de ſon axe. III. *xviij.*
Son diamétre moyen apparent. III. *xxxvj. Cor.* 3.
Son diamétre vrai. III. *viij.*
Sa paralaxe horizontale. *ibid.*
Il y a une paralaxe menſtruale. III. *xxiij. à la fin.*
Quelle eſt la quantité de ſa force attractive. III. *viij.*
Poids des corps à ſa ſurface. *ibid.*
Sa denſité. *ibid.*
Sa quantité de matiere. *ibid.*
Quelle eſt ſa force pour troubler les mouvemens de la Lune. III. *iij. xxv.*
Quelle eſt ſa force pour élever les eaux de la mer. III. *xxxvj.*
SONS. (on explique la nature des) II. *xliij. xlvij. juſqu'à l.*
Ils ſe détournent de la ligne droite en ſe propageant. III. *xlij.*
Cette propagation ſe fait par l'agitation de l'air, III. *l. Sch.*

On

On trouve par le calcul quelle eſt leur vîteſſe. *Ibid.*

Elle doit être, ſelon la théorie, un peu plus grande l'été que l'hyver. *Ibid. vers le milieu.*

Le ſon ceſſe auſſi-tôt que le mouvement du corps ſonore vient à ceſſer. *Ibid. vers la fin.*

On l'augmente par le moyen des porte-voix. *Ibid.*

SPHEROIDE (attraction d'un) dont les particules ont des forces qui ſont réciproquement comme les quarrés des diſtances. I. *xcj. Cor.* 2.

SPIRALE, on fait voir par quelle loi de force centripete tendante au centre, une ſpirale qui coupe tous ſes rayons ſous un angle donné peut être décrite par un corps qui tourne. I. *ix. xcj. xv. xvj.*

SUBSTANCES (les) de toutes les choſes ſont cachées. III. *Sch. 9. à la fin.*

T.

TEMS abſolu & relatif. I. 8

On trouve l'équation aſtronomique du temps par les horloges à pendules, & par les eclipſes des ſatellites de Jupiter. I. 10

Quels ſont les temps périodiques des corps qui tournent dans les ellipſes lorſque les forces centripetes tendent au foyer. I. *xv.*

TERRE (meſure de la) par Norwood. III. *xix*, par Picart. *Ibid.*

On détermine ſa figure, la proportion de ſes diamêtres & de la meſure des degrés de Méridien. III. *xix. xx.*

Excès de ſa hauteur à l'équateur ſur ſa hauteur aux Poles. III. *xix. vers le mil. xx. à la fin.*

Son plus grand & ſon plus petit diamêtre. III. *xix. vers le mil.* ſon diamêtre moyen. *Ibid. &c.*

Le Globe de la terre eſt plus denſe que s'il étoit entiérement compoſé d'eau. III. *x.*

Nutation de ſon axe. III. *xxj.*

On démontre le mouvement annuel dans le grand orbe. III. *xij. xiij.* III. 152

Quelle eſt la quantité de ſon excentricité III. *xxxv. Sch.*

Quelle eſt la quantité du mouvement de ſon aphélie. III. *xiv. Sch.* 10

TOURBILLON. On examine leur nature & la maniere dont on les employe. II. *Sec. 9.* III. *Sch. génér. de la fin. p.* 173

V.

VUIDE (il y a du), ou bien (ſi on veut que tous les eſpaces ſoient pleins) ils ne le ſont pas également. II. *xl. Sch. à la fin.* III. *6. Cor. 4.*

VITESSE (plus grande) qu'un globe puiſſe acquérir en tombant dans un milieu réſiſtant. II. *xxxviij. Cor.* 2.

Quelles ſont les vîteſſes des corps mûs dans des ſections coniques, lorſque les forces centripetes tendent au foyer. I. *xvj.*

VENUS: Son tems périodique. III. 9

Sa diſtance au Soleil. *Ibid.*

Mouvement de ſon aphélie. III. *xiv. Sch.*

ACHEVÉ D'IMPRIMER
EN FÉVRIER 1990
PAR L'IMPRIMERIE
DE LA MANUTENTION
A MAYENNE
N° 8-90
Dépôt légal : Février 1990



ÉDITIONS JACQUES GABAY

RÉIMPRESSIONS

Niels Henrik ABEL
• *Œuvres complètes (2 tomes)*

Jean D'ALEMBERT
• *Traité de dynamique*

André-Marie AMPÈRE
• *Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques*

Paul APPELL
• *Traité de Mécanique rationnelle (5 tomes)*

Paul BARBARIN
• *La Géométrie non euclidienne*

Ludwig BOLTZMANN
• *Leçons sur la théorie des gaz*

Emile BOREL
• *Leçons sur les séries divergentes*

Léon BRILLOUIN
• *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*
• *La science et la théorie de l'information*

Louis de BROGLIE
• *Ondes et mouvements*

Georg CANTOR
• *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*

Sadi CARNOT
• *Réflexions sur la puissance motrice du feu*

Elie CARTAN
• *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*

Augustin-Louis CAUCHY
• *Analyse algébrique*

Michel CHASLES
• *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*
• *La dualité et l'homographie*

R. DELTHEIL & D. CAIRE
• *Géométrie* et *Compléments de géométrie*

Pierre FERMAT
• *Précis des Œuvres mathématiques et de l'Arithmétique de Diophante*

Joseph FOURIER
• *Théorie analytique de la chaleur*

Maurice FRÉCHET
• *Les espaces abstraits*

Évariste GALOIS
• *Œuvres mathématiques*

Carl Friedrich GAUSS
• *Recherches arithmétiques*

Jacques HADAMARD
• *Leçons de géométrie élémentaire (2 tomes)*

Hermann von HELMHOLTZ
• *Optique physiologique (2 tomes)*
• *Théorie physiologique de la musique*

Camille JORDAN
• *Traité des substitutions et des équations algébriques*
• *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique (3 tomes)*

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
• *Sélection de grands textes*

Stephen C. KLEENE
• *Logique mathématique*

Joseph-Louis LAGRANGE
• *Mécanique analytique*

Trajan LALESCO
• *La géométrie du triangle*

Henri LEBESGUE
• *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*
• *Les coniques*
• *Leçons sur les constructions géométriques*

Alexandre LIAPOUNOFF
• *Problème général de la stabilité du mouvement*

André LICHNEROWICZ
• *Éléments de calcul tensoriel*

Ernst LINDELÖF
• *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*

Ernst MACH
• *La Mécanique*

James Clerk MAXWELL
• *Traité d'Électricité et de Magnétisme (2 tomes)*

Gaspard MONGE
• *Géométrie descriptive*

John von NEUMANN
• *Les fondements mathématiques de la Mécanique quantique*

Isaac NEWTON
• *Principes mathématiques de la philosophie naturelle (2 tomes)*

Julius PETERSEN
• *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de géométrie*

Emile PICARD
• *Traité d'Analyse (3 tomes)*

Henri POINCARÉ
• *Calcul des probabilités*
• *La Mécanique nouvelle (Théorie de la Relativité)*
• *Théorie du potentiel newtonien*
• *Théorie des tourbillons*
• *Théorie mathématique de la lumière (2 tomes)*
• *Figures d'équilibre d'une masse fluide*
• *Électricité et Optique*

George POLYA
• *Comment poser et résoudre un problème*

Erwin SCHRÖDINGER
• *Mémoires sur la Mécanique ondulatoire*

Paul TANNERY
• *Pour l'histoire de la science hellène*
• *La géométrie grecque*

François TISSERAND
• *Traité de Mécanique céleste (4 tomes)*
• *Leçons sur la détermination des orbites*

Georges VALIRON
• *Equations fonctionnelles - Applications*

Vito VOLTERRA
• *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*

Diffusion-Distribution : JACQUES GABAY
151 bis, rue Saint-Jacques 75005 PARIS
Téléphone : (1) 43 54 64 64 - Télex : 203 521
Fax : (1) 43 54 87 00

ISBN 2-87647-070-5