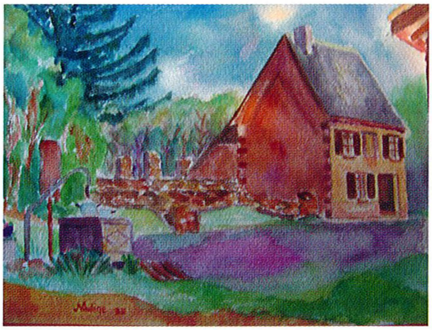
JEAN-FRANÇOIS DANTZER

MATHÉMATIQUES POUR L'AGRÉGATION INTERNE ANALYSE & PROBABILITÉS

COURS & EXERCICES CORRIGÉS



VUIBERT

JEAN-FRANÇOIS DANTZER

MATHÉMATIQUES
POUR L'AGRÉGATION INTERNE
ANALYSE & PROBABILITÉS

COURS & EXERCICES CORRIGÉS

VUIBERT

Également aux éditions Vuibert :

Florence HUBERT & John HUBBARD,
Calcul scientifique pour l'agrégation
Volume 1 : Équations algébriques, traitement du signal et géométrie effective, 432 pages
Volume 2 : Équations différentielles et équations aux dérivées partielles, 304 pages

G.H. HARDY & E.M. WRIGHT,
Introduction à la théorie des nombres,
traduction de François SAUVAGEOT, introduction de Catherine GOLDSTEIN,
coédition Springer, 608 pages

Marc BRIANE & Gilles PAGÈS,
Théorie de l'intégration. Cours & exercices. Licence & Master de mathématiques, 336 pages

Pierre DUGAC,
Histoire de l'analyse,
préface de Jean-Pierre KAHANE, 432 pages

Claudine ROBERT & Olivier COGIS,
Théorie des graphes. Problèmes, théorèmes, algorithmes, 256 pages

Jean-Étienne ROMBALDI,
Interpolation & approximation. Analyse pour l'Agrégation, 384 pages

Henri ROUDIER,
Algèbre linéaire. Cours & exercices, CAPES & Agrégation, 740 pages

Société mathématique de France, sous la direction de Jean-Michel KANTOR,
Où en sont les mathématiques ? relié, 448 pages

Emmanuel TRÉLAT,
Contrôle optimal. Théorie & application, 288 pages

... et des dizaines d'autres ouvrages de sciences et d'histoire des sciences :

www.vuibert.fr

Illustration de couverture : aquarelle de Nadine Rombaldi

Composition de l'auteur
Relecture, correction, maquette et mise en page : Sébastien Mengin
Coordination technique : Alain Luguet
Couverture : Mademoiselle

ISBN 978 2 7117 4026 0

Table des matières

Avant-propos

Ce livre, destiné en premier lieu aux candidats à l'agrégation interne de mathématiques, peut être fort utile aux candidats aux concours de l'agrégation et du CAPES externe. Il traite, quasiment en totalité, les parties analyse et probabilités du programme de l'agrégation interne.

Le cours est décrit en détail, les théorèmes et propositions sont démontrés. Les exercices, tous corrigés, permettent de mieux intégrer les notions étudiées. De nombreuses applications, entièrement détaillées, parfois transversales, c'est-à-dire inter-chapitres ou inter-domaines, complètent le cours.

La première partie du livre (chapitres 1 à 6) est consacrée aux notions de topologie nécessaires à la lecture de ce livre.

Concernant les mathématiques appliquées, outre un cours complet de probabilités, deux chapitres d'analyse numérique ont été rédigés en adéquation avec les besoins des candidats aux concours précités : le chapitre 11, vitesse et accélération de convergence de suites réelles et le chapitre 24, calcul de valeurs approchées d'une intégrale.

Remerciements : je souhaite vivemement remercier Jean-Étienne Rombaldi et Jean-François Marckert qui, avec beaucoup de dévouement, m'ont conseillé à volonté tant sur le plan mathématique que sur le plan de l'éditeur de textes scientifiques LaTeX. Je souhaite remercier Catherine Tardy, Pierre Husson et Christine Chambroux, stagiaires de l'agrégation interne qui, grâce à leur lecture attentive du polycopié, m'ont permis de rectifier un certain nombre d'erreurs. Je remercie Marie-Anne Galli, qui par ses questions et ses remarques pertinentes, m'a permis d'améliorer certaines notions étudiées dans ce livre. Je voudrais enfin remercier Marc Jammet et les Éditions Vuibert qui ont accepté de publier ce livre.

Chapitre 1

Topologie sur les espaces métriques

Introduction

Ce premier chapitre, ainsi que les chapitres 2 à 6, regroupe l'ensemble des définitions et propriétés relatives aux espaces métriques utilisées dans ce livre. Les constructions des corps $\mathbb{R}$ (munis de la relation d'ordre usuelle) et $\mathbb{C}$ sont admises : on admet ainsi le théorème 1.1 et le théorème 4.2, page 42. L'importance des bornes supérieures et inférieures m'a incité à les rappeler.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ représente soit $\mathbb{R}$, le corps des nombres réels, soit $\mathbb{C}$, le corps des nombres complexes.

1.1 Rappels

Définition : On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est majorée s'il existe un réel M vérifiant :

$$\forall a \in A, \quad a \leq M.$$

Le réel M est appelé majorant de la partie A.

Théorème admis 1.1 *Toute partie A de $\mathbb{R}$, non vide et majorée, admet un plus petit majorant appelé borne supérieure de A et noté* $\sup A$

Proposition 1.2 *La borne supérieure d'une partie A, non vide et majorée de $\mathbb{R}$, est caractérisée par :*

$$\begin{cases} \forall a \in A, \quad a \leq \sup A, \\ \forall \varepsilon > 0, \quad \exists a \in A / \quad a > \sup A - \varepsilon. \end{cases}$$

Cette proposition donne une caractérisation de la borne supérieure. La première assertion indique que $\sup A$ est un majorant de A et la seconde indique que $\sup A$ en est le plus petit. On notera qu'il existe une caractérisation à l'aide de suites. On pourra lire à ce sujet la proposition 2.6, page 20.

Notation : Si A est une partie non majorée de $\mathbb{R}$, on pose

$$\sup A = +\infty.$$

Définition : On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est minorée s'il existe un réel m vérifiant :

$$\forall a \in A, \quad a \geq m.$$

Le réel m est appelé minorant de la partie A.

Théorème admis 1.3 *Toute partie A de $\mathbb{R}$, non vide et minorée, admet un plus grand minorant appelé borne inférieure de A et noté* $\inf A$.

Proposition 1.4 *La borne inférieure d'une partie A, non vide et minorée de $\mathbb{R}$, est caractérisée par :*

$$\begin{cases} \forall a \in A, & a \geq \inf A, \\ \forall \varepsilon > 0, & \exists a \in A / \quad a < \inf A + \varepsilon. \end{cases}$$

Notation : Si A est une partie non minorée de $\mathbb{R}$, on pose

$$\inf A = -\infty.$$

Définition : On dit qu'une partie de $\mathbb{R}$ est bornée si elle est minorée et majorée.

Exercice 1.1 Montrer que

$$\mathbb{R}^{+*} = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}.$$

est une partie de $\mathbb{R}$ minorée de borne inférieure 0.

Solution. $\mathbb{R}^{+*}$ est une partie minorée par 0. Soit ε un réel strictement positif. Le réel $\frac{\varepsilon}{2}$ est strictement positif. On a

$$\frac{\varepsilon}{2} < 0 + \varepsilon.$$

Ainsi, 0 est la borne inférieure de $\mathbb{R}^{+*}$. ♣

On peut donc noter que inf A n'appartient pas toujours à A. Il en est de même pour une borne supérieure.

Définition :

1. Si la borne supérieure d'une partie A non vide et majorée appartient à A, cette borne supérieure est également appelée maximum de A et notée $\max A$.
2. Si la borne inférieure d'une partie A non vide et minorée appartient à A, cette borne inférieure est également appelée minimum de A et notée $\min A$.

Exercice 1.2 Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$, non vides et majorées. On note

$$A+B=\{z\in\mathbb{R};\quad \exists x\in A\quad \exists y\in B,\quad z=x+y\}.$$

Montrer que $A+B$ est une partie majorée et non vide de $\mathbb{R}$ et que $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

Solution. Il est évident que $A+B$ est non vide. Le réel $\sup A+\sup B$ est un majorant de $A+B$. En effet, considérons z un élément de $A+B$. Il existe x élément de A et y élément de B tels que $z=x+y$. On a

$$z=x+y\leq\sup A+\sup B.$$

Vérifions que $\sup A+\sup B$ est le plus petit majorant de $A+B$. Soit ε un réel strictement positif. Il existe un élément a de A et un élément b de B vérifiant

$$a>\sup A-\varepsilon,$$

et

$$b>\sup B-\varepsilon.$$

Le réel (a+b) est un élément de $A+B$ vérifiant

$$a+b>\sup A+\sup B-2\varepsilon.$$

$\sup A+\sup B$ est ainsi la borne supérieure de $A+B$. ♣

Exercice 1.3 Soit $f:[0,1]\to[0,1]$, une application croissante.
Montrer qu'il existe un réel x_0 appartenant à $[0,1]$ vérifiant $f(x_0)=x_0$. Dans ce cas, on dit que x_0 est un point fixe de l'application f. On pourra introduire l'ensemble

$$A=\{x\in[0,1]/f(x)\geq x\}.$$

Solution. L'ensemble A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide car elle contient 0. Elle est majorée par 1. Elle admet donc une borne supérieure que l'on note $\sup A$. Ce réel appartient au segment $[0;1]$. En effet, le réel 0 étant élément de A et 1 étant un majorant de A, on a

$$0 \leq \sup A \leq 1.$$

L'application f étant croissante

$$\forall a \in A, \quad a \leq f(a) \leq f(\sup A).$$

Ainsi, le réel $f(\sup A)$ est un majorant de A. On en déduit que

$$f(\sup A) \geq \sup A.$$

L'application f étant croissante, on obtient

$$f\,[f(\sup A)] \geq f[\sup A].$$

Cette dernière inégalité signifie que $f(\sup A)$ est élément de A :

$$f(\sup A) \leq \sup A.$$

Le réel $\sup A$ est ainsi un point fixe.

♣

1.2 Distance

Pour définir une distance, il suffit de considérer un ensemble. On peut remarquer qu'aucune loi ou structure sur l'ensemble n'est exigée.

Définition : Soit E un ensemble non vide. On appelle distance sur E toute application

$$d : E \times E \to \mathbb{R}^+$$

vérifiant :

1. $\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$
2. $\forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = d(y,x).$
3. $\forall (x,y,z) \in E^3, \quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$

Le couple (E,d) est appelé espace métrique.

Exemples :

1. Sur $\mathbb{R}$, l'application $(x,y) \mapsto |x-y|$ est une distance.
2. Pour tout ensemble E, la distance d définie par

$$d(x,y) = 0 \quad \text{si} \quad x = y, \qquad d(x,y) = 1 \quad \text{si} \quad x \neq y,$$

est appelée distance discrète sur E. L'espace métrique (E,d) est appelé espace métrique discret.

1.2.1 Diamètre d'une partie, distance entre deux parties

Définition : Soit (E, d) un espace métrique. Si A est une partie de E non vide, on appelle diamètre de A l'élément de $[0, +\infty]$ défini par

$$\delta(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} d(x, y).$$

On dit que A est bornée si $\delta(A) < +\infty$.

Définition : Soient A et B deux parties non vides d'un espace métrique. On appelle distance entre A et B le réel

$$d(A, B) = \inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}} d(x, y).$$

Lorsque x est un élément de E, on appelle distance de x à A, le réel

$$d(x, A) = d(\{x\}, A) = \inf_{y\in A} d(x, y).$$

Remarque 1.1 *Attention, on peut avoir $A \cap B = \emptyset$ et $d(A, B) = 0$. Il suffit pour cela de considérer, par exemple, dans $\mathbb{R}$, le singleton $\{0\}$ et $\mathbb{R}^{+*}$.*

1.2.2 Espace métrique produit

Proposition 1.5 *On considère n espaces métriques $(E_1, d_1), \cdots, (E_n, d_n)$. L'application*

$$\begin{array}{rccl} d_{prod}: & (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & ((x_1, x_2, \cdots, x_n), (y_1, y_2, \cdots, y_n)) & \longmapsto & \max_{i\in\{1,\cdots,n\}} d_i(x_i, y_i) \end{array}$$

est une distance sur $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ appelée métrique produit.

1.3 Norme

Les espaces métriques sur lesquels on travaille en général en analyse sont soit des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tels que $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), les espaces fonctionnels..., soit des parties de ces ensembles : intervalle réel, cercle, sphère... La structure d'espace vectoriel nous permet de définir une norme. Nous pouvons ensuite construire, à partir de cette norme, une distance induite.

Définition : Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E toute application

$$\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$$

vérifiant :

1. $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in E, \quad \|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|.$
3. $\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Muni d'une norme, E est appelé espace vectoriel normé. (en abrégé e.v.n.).

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^n$, en notant $x = (x_1, x_2, \cdots x_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$, on a les normes suivantes :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

   On peut remarquer que pour $n = 1$, ces trois normes sont égales. C'est cette norme qui sera utilisée sur $\mathbb{R}$.

2. On considère $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, bornées et à valeurs réelles. L'application $\|.\|_\infty$ définie par :

$$\forall f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|,$$

   est une norme sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

Pour 1, on laissera au lecteur le soin de vérifier que, sur $\mathbb{R}^n$, les applications $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes. L'application $\|.\|_2$ est la norme euclidienne issue du produit scalaire indiqué dans l'exemple 1 de la section 1.4.2. page 8. Le dernier exemple est traité, dans un cadre un peu plus général, dans l'exercice 2.1. page 21.

Proposition 1.6 *Soit E est un espace vectoriel normé de norme $\|.\|$. L'application*

$$E \times E \to \mathbb{R}^+$$
$$(x, y) \mapsto \|x - y\|,$$

est une distance sur E.

La preuve de cette proposition découle des propriétés d'une norme.

Proposition 1.7 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Une partie non vide A de E est bornée si et seulement si il existe un réel positif M vérifiant*

$$\forall x \in A, \quad \|x\| \leq M.$$

Preuve.

1. Supposons qu'il existe un réel M positif vérifiant
$$\forall x \in A, \quad \|x\| \leq M.$$
Alors,
$$\forall (x,y) \in A^2, \quad d(x,y) = \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2M.$$
A est donc une partie bornée de E.
2. Réciproquement, supposons A bornée. Choisissons a un élément de A. Alors,
$$\forall x \in A, \quad \|x\| \leq \|x-a\| + \|a\| \leq \delta(A) + \|a\|.$$
Nous pouvons choisir le réel $M = \delta(A) + \|a\|$.

♣

1.4 Produit scalaire, norme euclidienne, norme hermitienne

Dans cette section, nous définissons le produit scalaire sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le produit scalaire permet de définir une norme induite. Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est plus « sophistiqué » qu'un espace vectoriel normé. Il dispose en particulier d'outils tels que l'orthogonalité, dont il est inutile de vanter l'utilité.
Attention, nous devons ici distinguer les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1.4.1 Définitions

Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E, toute application
$$< .,. > \quad : E \times E \to \mathbb{R}$$
étant,

1. symétrique *i. e.* $\forall (x,y) \in E^2, \quad <y,x> = <x,y>$
2. linéaire à droite *i. e.* $\forall (x,y_1,y_2) \in E^3, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad <x, \lambda y_1 + \mu y_2> = \lambda <x,y_1> + \mu <x,y_2>$
3. positive *i. e.* $\forall x \in E, \quad <x,x> \in \mathbb{R}^+$
4. définie *i. e.* $\forall x \in E, \quad <x,x> = 0 \implies x = 0.$

Remarque 1.2 *Les propriétés 1 et 2 permettent de dire que le produit scalaire réel est linéaire à gauche, donc bilinéaire.*

Définition : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E, toute application

$$<.,.> \quad : E \times E \to \mathbb{C}$$

étant,

1. à symétrie hermitienne *i. e.* $\forall (x,y) \in E^2, \quad <y,x> = \overline{<x,y>}$
2. linéaire à droite *i. e.* $\forall (x,y_1,y_2) \in E^3, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \quad <x, \lambda y_1 + \mu y_2> = \lambda <x, y_1> + \mu <x, y_2>$
3. positive *i. e.* $\forall x \in E, \quad <x,x> \in \mathbb{R}^+$
4. définie *i. e.* $\forall x \in E, \quad <x,x> = 0 \implies x = 0.$

Définition : Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien.

Définition : On dit que deux éléments de E, x et y, sont orthogonaux si

$$<x,y> = 0.$$

Remarque 1.3 *Les propriétés du produit scalaire (réel ou complexe) permettent d'écrire :*

$$\forall x \in E, \quad <\vec{0}, x> = <x, \vec{0}> = 0.$$

En particulier, $<\vec{0}, \vec{0}> = 0$.

1.4.2 Exemples

1. L'application qui, à tout couple (x,y) d'éléments de $\mathbb{R}^n$ (en notant $x = (x_1, x_2; \cdots x_n)$ et $y = (y_1, y_2; \cdots y_n)$, associe le réel
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients sur $\mathbb{R}$. L'application qui, à tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ associe
$$\int_0^1 P(x)Q(x)dx,$$
est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Soit $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions définies et continues sur le segment $[0,1]$ à valeurs complexes. L'application qui, à tout couple (f,g)

d'éléments de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{C})$, associe

$$\int_0^1 \overline{f(x)}g(x)dx,$$

est un produit scalaire.

Preuve.

1. La preuve est évidente.
2. Les trois premières propriétés du produit scalaire sont évidentes à vérifier. Prouvons la quatrième :
   Soit P est un polynôme vérifiant

   $$< P, P >= \int_0^1 P^2(x)dx = 0.$$

   L'application P^2 étant continue et positive sur le segment $[0,1]$, nous avons

   $$\forall x \in [0,1], \quad P^2(x) = 0.$$

   Le polynôme P admettant une infinité de racines est le polynôme nul.
3. Cette dernière preuve simple est laissée au lecteur.

♣

1.4.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Notation : Soit E un espace vectoriel préhilbertien. Notons (par abus pour l'instant) pour tout élément x de E,

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}.$$

Nous montrerons que cette application $\|.\|$ est une norme sur E. Pour cela, nous avons besoin de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

Proposition 1.8 *Inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit E un espace vectoriel préhilbertien. On a*

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad |< x, y >| \leq \|x\|.\|y\|$$

Il y a égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont liés.

Preuve. Si x est nul, le résultat est évident. Supposons désormais x non nul. Nous proposons deux preuves. La première, classique, est restreinte au cas réel.

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
   Considérons l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & \lambda & \longmapsto & \|\lambda x + y\|^2. \end{array}$$

En utilisant la bilinéarité et la symétrie du produit scalaire réel :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda) =< \lambda x + y, \lambda x + y >= \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda < x, y > + \|y\|^2.$$

La fonction f est une fonction polynôme du second degré à valeurs positives. Son discriminant simplifié est négatif. C'est-à-dire,

$$< x, y >^2 - \|x\|^2.\|y\|^2 \leq 0.$$

D'où le résultat. Nous remarquons que nous avons égalité si et seulement si le discriminant est nul, c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel λ_0 vérifiant $f(\lambda_0) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs x et y sont liés.

2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
   Le vecteur y peut-il se décomposer en somme d'un vecteur colinéaire à x et d'un vecteur orthogonal à x ? Résolvons pour cela, dans $(\mathbb{K}, E)$, le système d'inconnue (λ, z)

$$\begin{cases} y = \lambda x + z, \\ < x, z >= 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = \lambda x + z, \\ < x, y - \lambda x >= 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = y - \frac{<x,y>}{\|x\|^2} x, \\ \lambda = \frac{<x,y>}{\|x\|^2}. \end{cases}$$

On obtient une unique solution. La décomposition est donc unique. Notons

$$y = \lambda x + z$$

cette décomposition. Celle-ci étant unique, les vecteurs x et y sont liés si et seulement si le vecteur z est nul.
On a

$$\|y\|^2 = |\lambda|^2 \|x\|^2 + \|z\|^2 = \frac{|< x, y >|^2}{\|x\|^4} \|x\|^2 + \|z\|^2$$

et

$$\|x\|^2 \|y\|^2 = |< x, y >|^2 + \|x\|^2.\|z\|^2 \geq |< x, y >|^2.$$

On obtient l'inégalité désirée. On remarque que l'on a une égalité si et seulement si z est nul, c'est-à-dire si et seulement si les vecteurs x et y sont liés.

♣

Proposition 1.9 *Soit E un espace vectoriel préhilbertien. L'application définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :*

$$x \mapsto \sqrt{< x, x >},$$

est une norme appelée norme euclidienne si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Preuve.

1.
$$\sqrt{< x, x >} = 0 \Leftrightarrow < x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

2.
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x \in E, \quad \sqrt{< \lambda x, \lambda x >} = \sqrt{|\lambda|^2 < x, x >} = |\lambda| \sqrt{< x, x >}.$$

3. (a) cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 &=< x + y, x + y > \\ &= \|x\|^2 + 2 < x, y > + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

   (b) cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,
$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 &=< x + y, x + y > \\ &= \|x\|^2 + 2\Re(< x, y >) + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2| < x, y > | + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|.\|y\| + \|y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

   D'où,
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

♣

Exemple : La norme euclidienne associée au produit scalaire indiqué dans le premier exemple page 8, est la norme $\|.\|_2$ indiquée en exemple page 6.

Proposition 1.10 *Soit E un espace vectoriel préhilbertien. On a,*
$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right).$$
Cette égalité est appelée identité du parallélogramme.

Exercice 1.4 Montrer que, dans les exemples de la page 6, les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ ne sont pas euclidiennes.

Solution. Pour les vecteurs $x = (1, 0, 0, \cdots, 0)$ et $y = (0, 1, 0, \cdots, 0)$, par exemple, l'identité du parallélogramme n'est pas vérifiée. ♣

1.5 Topologie d'un espace métrique

On se replace, jusqu'à la fin du chapitre, dans le cadre général des espaces métriques. On considère (E, d) l'un d'eux.

1.5.1 Boule, sphère

Définition : Pour tout x élément de E et pour tout réel r strictement positif, on appelle,

1. boule ouverte de centre x et de rayon r, l'ensemble $B(x,r) = \{y \in E/d(x,y) < r\}$,
2. boule fermée de centre x et de rayon r, l'ensemble $B_f(x,r) = \{y \in E/d(x,y) \leq r\}$,
3. sphère de centre x et de rayon r, l'ensemble $S(x,r) = \{y \in E/d(x,y) = r\}$.

1.5.2 Ouverts

Définition : On dit qu'une partie Ω de E est un ouvert de E si, pour tout élément x de Ω, il existe une boule ouverte de centre x incluse dans Ω.

Proposition 1.11 *1. Les parties $\emptyset$ et E sont des ouverts de E.*

2. La réunion d'une famille non vide d'ouverts de E est un ouvert de E.

3. L'intersection d'une famille finie non vide d'ouverts de E est un ouvert de E.

Preuve.

1. Pour l'ensemble vide, aucune vérification n'est à faire. Toute boule ouverte de E est incluse dans E, donc E est un ouvert de lui-même.
2. On considère $(\theta_i)_{i\in I}$, un ensemble d'ouverts de E indicés par un ensemble I non vide. Soit x un élément de $(\cup_{i\in I}\theta_i)$. Il existe i_0 élément de I tel que x appartienne à l'ouvert θ_{i_0} et un réel strictement positif r, vérifiant
$$B(x,r) \subset \theta_{i_0}.$$
Donc
$$B(x,r) \subset \cup_{i\in I}\theta_i.$$
$(\cup_{i\in I}\theta_i)$ est un ouvert de E.
3. Soient n un entier strictement positif, $\theta_1, \cdots, \theta_n$, n ouverts de E et x un élément appartenant à leur intersection $(\cap_{i=1}^{n}\theta_i)$. Alors,
$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \exists r_i > 0/ \quad B(x, r_i) \subset \theta_i.$$

Soit
$$r = \min\{r_1, \cdots, r_n\}.$$
Le réel r est strictement positif et
$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset \theta_i.$$
D'où
$$B(x,r) \subset \cap_{i=1}^n \theta_i.$$
$(\cap_{i=1}^n \theta_i)$ est donc un ouvert de E.

♣

Exemple : Une boule ouverte de E est un ouvert de E.

Preuve. On considère $B(x,r)$ la boule ouverte de E de centre x et de rayon r. Soit y un élément de cette boule. Le réel $(r - d(x,y))$ est strictement positif. Montrons que la boule de centre y et de rayon $(r - d(x,y))$ est incluse dans la boule $B(x,r)$. Soit z un élément de $B(y, r - d(x,y))$. On a,
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + r - d(x,y) = r.$$
Ceci prouve que $B(y, r - d(x,y))$ est incluse dans $B(x,r)$ et que cette dernière est un ouvert de E. ♣

Remarque 1.4 *Une intersection infinie d'ouverts peut ne pas être un ouvert. Par exemple, dans* $\mathbb{R}$, $\cap_{n\in\mathbb{N}^*}]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[= \{0\}$ *n'est pas ouvert de* $\mathbb{R}$.

Voisinage

> **Définition :** Soit x un élément de E. On dit qu'une partie V de E est un voisinage de x s'il existe une boule ouverte de centre x contenue dans V.

Exemple : L'intervalle $[0,1]$ est un voisinage de $\frac{1}{2}$.

1.5.3 Fermés

Si A est une partie de E, on notera A^c son complémentaire dans E.

> **Définition :** On dit qu'une partie F de E est un fermé de E si F^c, son complémentaire dans E, est un ouvert de E.

À noter qu'il existe une caractérisation séquentielle des fermés. (Voir section 2.3.3, page 23).

Proposition 1.12 *1. Les parties $\emptyset$ et E sont des fermés de E.*

2. L'intersection d'une famille non vide de fermés de E est un fermé de E.

3. La réunion d'une famille finie non vide de fermés de E est un fermé de E.

Preuve.

1. $\emptyset^c = E$ et $E^c = \emptyset$.
2. On considère $(F_i)_{i\in I}$, un ensemble de fermés de E indicés par un ensemble I non vide et leur intersection $\cap_{i\in I} F_i$:
$$(\cap_{i\in I} F_i)^c = (\cup_{i\in I} F_i^c).$$
Ce dernier ensemble est un ouvert de E en tant qu'union d'ouverts de E.
3. Soient n un entier strictement positif, $F_1, \cdots, F_n$, n fermés de E. On a,
$$(\cup_{i=1}^n F_i)^c = \cap_{i=1}^n F_i^c.$$
Cet ensemble est un ouvert de E en tant qu'intersection finie d'ouverts de E.

♣

Exemple : Une boule fermée est un fermé.

Preuve. On considère x un élément de E, r un réel strictement positif et $B_f(x,r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r. Montrons que son complémentaire dans E est un ouvert. Soit y élément de $B_f^c(x,r)$. Le réel $(d(x,y) - r)$ est strictement positif. Vérifions que la boule ouverte de centre y et de rayon $(d(x,y) - r)$ est incluse dans $B_f^c(x,r)$. Soit z élément de $B(y, d(x,y) - r)$. On a,
$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < d(x,z) + d(x,y) - r,$$
d'où,
$$d(x,z) > r.$$
On vient de montrer que $B(y, d(x,y) - r)$ est incluse dans $B_f^c(x,r)$. Cette dernière est un ouvert de E. ♣

Remarque 1.5 *Une union infinie de fermés peut ne pas être un fermé. Par exemple, dans $\mathbb{R}$, $\cup_{n\in\mathbb{N}^*}] - \infty, \frac{-1}{n}] =] - \infty, 0[$ n'est pas fermé.*

1.5.4 Adhérence, intérieur

Théorème-définition 1.13 *Soit A une partie de E. L'intersection des fermés contenant A est un fermé appelé adhérence de A, noté $\overline{A}$. De plus,*

1. $A \subset \overline{A}$.

2. $A = \overline{A}$ si et seulement si A est un fermé de E.

Preuve. Soit A une partie de E. Notons $(F_i)_{i\in I}$ l'ensemble des fermés de E contenant A. Remarquons qu'il existe de tels fermés car E en est un. L'adhérence de A est définie par,

$$\overline{A} = \cap_{i\in I} F_i.$$

Une intersection quelconque de fermés est un fermé,l'adhérence de A est donc un fermé de E.

1. On a,
$$\forall i \in I, \quad A \subset F_i,$$
donc
$$A \subset \cap_{i\in I} F_i = \overline{A}.$$
2. (a) Si $A = \overline{A}$, alors A est fermé car $\overline{A}$ l'est.
   (b) $\overline{A}$ est inclus dans tout fermé contenant A. Donc, si A est fermé, on a $\overline{A} \subset A$. Puisque $A \subset \overline{A}$, on obtient $A = \overline{A}$.

♣

Voici une caractérisation des points appartenant à l'adhérence d'une partie A de E. Il existe également une caractérisation séquentielle (section 2.3.2, page 22).

Proposition 1.14 *Soit A une partie de E. Un élément x de E appartient à $\overline{A}$ si et seulement si* $d(x, A) = 0$ i. e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A, \quad d(a, x) < \varepsilon.$$

Preuve. Montrons la contraposée :

$$x \in (\overline{A})^c \Leftrightarrow d(x, A) > 0.$$

1. Supposons que x appartienne à l'ouvert $(\overline{A})^c$. Il existe un réel strictement positif r vérifiant
$$B(x, r) \subset (\overline{A})^c.$$
A étant inclus dans $\overline{A}$, on en déduit qu'aucun élément de A n'appartient à $B(x, r)$. Donc
$$\forall a \in A, \quad d(x, a) \geq r \quad \text{et} \quad d(x, A) \geq r > 0.$$
2. Soit x un élément de E vérifiant $d(x, A) > 0$. Par simplification, notons $d(x, A) = \alpha$.
On a,
$$\forall a \in A, \quad d(a, x) \geq \alpha.$$
Aucun élément de A n'appartient à $B(x, \alpha)$, A est donc inclus dans le fermé $(B(x, \alpha))^c$. $\overline{A}$ étant le plus petit fermé contenant A, on a
$$\overline{A} \subset (B(x, \alpha))^c.$$
On en déduit que x n'appartient pas à $\overline{A}$.

Définition : Une partie A de E est dite dense dans E si $\overline{A} = E$.

Théorème-définition 1.15 *Soit A une partie de E. L'union des ouverts contenus dans A est un ouvert appelé intérieur de A et noté $\overset{\circ}{A}$.*

Preuve. Soit A une partie de E. On peut remarquer que l'ensemble des ouverts de E contenus dans A est non vide car $\emptyset$ en est un. L'intérieur de A est ainsi défini. Une union quelconque d'ouverts est un ouvert, donc l'intérieur de A est un ouvert de E. ♣

1.5.5 Métrique induite

Proposition-définition 1.16 *Soit (E, d) un espace métrique et E' une partie non vide de E. La restriction de l'application d à la partie $E' \times E'$ permet de définir une distance sur E' appelée distance induite.*

Proposition 1.17 *On considère un espace métrique (E, d) et E' une partie non vide de E et l'espace métrique E' muni de la distance induite.*

1. *Les ouverts de E' sont les ensembles de la forme $\theta \cap E'$, θ étant un ouvert de E.*
2. *Les fermés de E' sont les ensembles de la forme $F \cap E'$, F étant un fermé de E.*

Chapitre 2

Suites dans un espace métrique

2.1 Définitions, convergence

Définition : Soit (E,d) un espace métrique. On appelle suite dans E, une application définie sur $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) à valeurs dans E. Elle est souvent notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Les définitions suivantes sont données pour des suites définies sur $\mathbb{N}$.

Définition : Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est
* Constante si
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n,$$
* Stationnaire si
$$\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, \quad u_{n+1} = u_n.$$
* Périodique s'il existe un entier strictement positif p vérifiant,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+p} = u_n.$$

Théorème-définition 2.1 *Soit $l \in E$. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \quad d(u_n, l) < \varepsilon. \tag{2.1}$$
Cet élément de E est unique. On l'appelle limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Remarque 2.1 *Dans l'assertion (2.1), les deux dernières inégalités peuvent être strictes ou larges.*

Preuve. Montrons l'unicité de la limite d'une suite convergente. Considérons l et l', deux éléments de E, limite d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad d(u_n, l) < \varepsilon,$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_1, \quad d(u_n, l') < \varepsilon.$$

Soit $n_2 = \max(n_0, n_1)$. On a,

$$d(l, l') \leq d(l, u_{n_2}) + d(u_{n_2}, l') < 2\varepsilon.$$

On en déduit que $d(l, l') = 0$. La limite, si elle existe est unique. ♣

Exemple : Soit a un nombre réel vérifiant $|a| < 1$. La suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n$$

est une suite convergente vers 0.
En effet, considérons un réel strictement positif ε. On supposera dans un premier temps $a \neq 0$. On a, sachant que $\ln(|a|)$ est strictement négatif

$$|a^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow n \ln(|a|) < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln(|a|)}.$$

On notera, pour tout réel x, $E(x)$ la partie entière de x et x^+ le réel $\max\{x, 0\}$. Choisissons $n_0 = (E(\frac{\ln \varepsilon}{\ln(|a|)} + 1))^+$. Nous obtenons

$$\forall n \geq n_0, \quad |a^n - 0| < \varepsilon.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers 0.
Le cas $a = 0$ est laissé au lecteur.

Définition : Une suite non convergente est divergente.

Définition : On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si la partie de E, $\{u_n / n \in \mathbb{N}\}$, est bornée.

Proposition 2.2 *Une suite convergente est bornée.*

Preuve. Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un élément l de E.

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad d(u_n, l) \leq 1.$$

Notons,

$$M = \max\{d(u_0, l), \cdots, d(u_{(N-1)}, l), 1\}.$$

Nous obtenons

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad d(u_p,u_q) \leq d(u_p,l) + d(l,u_q) \leq 2M.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. ♣

2.2 Suites dans un espace vectoriel normé

Dans cette section, l'ensemble sur lequel nous travaillons est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), donc muni d'une loi de composition interne, l'addition, et d'une loi de composition externe, la multiplication par un scalaire (réel ou complexe). Considérons donc $(E,+,.)$ un espace vectoriel.

Notation : On note

$$\mathcal{A}(\mathbb{N},E)$$

l'ensemble des suites à valeurs dans E.

Définition : Dans l'ensemble $\mathcal{A}(\mathbb{N},E)$, on définit

1. Une loi de composition interne notée + : la somme de deux suites $U=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $U+V=(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Une loi de composition externe notée . : le produit de la suite U par le scalaire λ est la suite $\lambda.U=(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Proposition 2.3 *L'ensemble $\mathcal{A}(\mathbb{N},E)$, muni des lois + et . définies en 2.2, est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

On munit désormais E d'une norme $\|.\|$ et de la métrique associée à cette norme.

Proposition 2.4 *On considère l, l' deux éléments de E et λ, λ' deux scalaires. Soient U, V deux suites à valeurs dans E convergentes respectivement vers l et l'. Alors la suite*

$$\lambda U + \lambda' V$$

est convergente vers

$$\lambda l + \lambda' l'.$$

Preuve. Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists n_0, \quad / \forall n \geq n_0, \|u_n - l\| < \varepsilon,$$

$$\exists n_1, \quad / \forall n \geq n_1, \|v_n - l'\| < \varepsilon.$$

Soit $n_2 = \max\{n_0,n_1\}$. On obtient, pour tout entier n supérieur à n_2,

$$\|(\lambda u_n+\lambda' v_n)-(\lambda l+\lambda' l')\| \leq |\lambda|\|u_n-l\|+|\lambda'|.\|v_n-l'\| \leq (|\lambda|+|\lambda'|)\varepsilon < (|\lambda|+|\lambda'|+1)\varepsilon.$$

Ceci prouve la convergence de $\lambda U + \lambda' V$ vers $\lambda l + \lambda' l'$. ♣

Corollaire 2.5 *L'ensemble des suites à valeurs dans E, convergentes pour la norme $\|.\|$, est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{A}(\mathbb{N}, E), +, .)$.*

2.3 Caractérisation séquentielle

Plusieurs notions ont été précédemment caractérisées à l'aide du fameux ε : borne supérieure, borne inférieure, adhérence. Dans cette section, nous donnons une caractérisation de ces notions à l'aide des suites. Il est important de connaître ces deux types de caractérisation. En effet, pour certaines résolutions d'exercices, ou démonstrations de théorèmes, il est préférable d'utiliser les epsilon, tandis que, pour d'autres, on utilisera les suites. La section est complétée avec la caractérisation séquentielle d'une partie fermée. On verra d'autres caractérisations séquentielles, en particulier celles de la continuité et de la limite, section 3.4, page 35.

2.3.1 Caractérisation séquentielle des bornes supérieure et inférieure

Proposition 2.6 *Soit A une partie non vide, majorée de $\mathbb{R}$ et M un majorant de A. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *M est la borne supérieure de A.*
2. *Il existe une suite d'éléments de A convergente vers M.*
3. *Il existe une suite croissante d'éléments de A convergente vers M.*

Preuve.

1. $1 \Rightarrow 3$
   Soit M la borne supérieure de A. Pour tout entier naturel n, choisissons un élément a_n de A vérifiant
   $$M - \frac{1}{2^n} < a_n \leq M.$$
   Notons b_n l'élément de A défini par $b_n = \max\{a_0, \cdots, a_n\}$. La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M - \frac{1}{2^n} < a_n \leq b_n \leq M.$$
   donc
   $$|M - b_n| < \frac{1}{2^n}.$$
   La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de A convergente vers M.
2. $3 \Rightarrow 2$
   Évident

3. $2 \Rightarrow 1$
Considérons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'éléments de A convergente vers M, majorant de A. Soit ε un réel strictement positif. Il existe un entier naturel n_0 vérifiant
$$|M - a_{n_0}| < \varepsilon \quad \text{donc} \quad a_{n_0} > M - \varepsilon.$$
Ceci prouve que M est la borne supérieure de A.

♣

Proposition 2.7 *Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ et m un minorant de A. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
1. *m est la borne inférieure de A.*
2. *Il existe une suite d'éléments de A convergente vers m.*
3. *Il existe une suite décroissante d'éléments de A convergente vers m.*

Preuve. La preuve est laissée au lecteur. ♣

Exercice 2.1 On considère X un ensemble non vide, $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel réel normé et $\mathcal{B}(X, E)$ l'espace vectoriel des applications définies sur X à valeurs dans E et bornées. Montrer que l'application $\|.\|_\infty$ définie par :
$$\forall f \in \mathcal{B}(X,E), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|,$$
est une norme sur $\mathcal{B}(X, E)$.

Solution.
1. $$\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_{x\in X} \|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in X, \quad \|f(x)\| = 0 \Leftrightarrow f = 0.$$
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{B}(X, E)$.
$$\forall x \in X, \quad \|\lambda f(x)\| = |\lambda|\|f(x)\| \le |\lambda|\|f\|_\infty.$$
$|\lambda|\|f\|_\infty$ est donc un majorant de $\{\|\lambda f(x)\|/x \in X\}$. Montrons qu'il est borne supérieure de cet ensemble. Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(\|f(x_n)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|f\|_\infty$. La suite $(\|\lambda f(x_n)\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|\lambda|\|f\|_\infty$. Ceci prouve que $|\lambda|\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|\lambda f(x)\|$, c'est-à-dire
$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty.$$
3. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{B}(X, E)$. On a
$$\forall x \in X, \quad \|(f+g)(x)\| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

$(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)$ est donc un majorant de $\{\| (f+g)(x)\| / x \in X\}$. La borne supérieure étant le plus petit des majorants,

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

On vient de montrer que l'application $\|.\|_\infty$ est une norme de l'espace vectoriel $\mathcal{B}(X, E)$. ♣

2.3.2 Caractérisation séquentielle de l'adhérence

Grâce à la proposition 1.14 page 15, nous avons une première caractérisation des points adhérents à une partie A d'un espace métrique (E, d). En voici une caractérisation séquentielle.

Proposition 2.8 *Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E. Un élément x de E appartient à $\overline{A}$, l'adhérence de A, si et seulement si il existe une suite de points de A qui converge vers x.*

Preuve. Soit x un élément de $\overline{A}$. Nous savons, d'après la proposition 1.14. page 15, que $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = 0$. Soit n un entier naturel. Choisissons un élément a_n de A vérifiant,

$$d(x, a_n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers x.
Réciproquement, on considère un élément x de E et une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente vers x. Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \quad d(a_{n_0}, x) < \varepsilon.$$

On en déduit que $d(x, A) = 0$ et que x est un élément de $\overline{A}$. ♣

Corollaire 2.9 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide.*

1. *Si A est majorée alors*
$$\sup A \in \overline{A},$$
2. *Si A est minorée alors*
$$\inf A \in \overline{A}.$$

Preuve. Il suffit d'utiliser les propositions 2.6 et 2.8. ♣

Exercice 2.2 1. On considère E un espace vectoriel normé, x un élément de E et r un réel strictement positif. Montrer que

$$\overline{B(x, r)} = B_f(x, r).$$

2. Montrer que cette propriété n'est pas toujours vraie si l'on se place dans un espace métrique.

Solution.

1. On a $\overline{B(x,r)} \subset B_f(x,r)$ car $B_f(x,r)$ est un fermé contenant $B(x,r)$, donc son adhérence. Montrons l'inclusion inverse. Soit y un élément de $B_f(x,r)$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définie par
$$\forall n > 0, \quad y_n = x + (1 - \frac{1}{n})(y - x)$$
est une suite d'éléments de $B(x,r)$ convergente vers y. Donc y appartient à $\overline{B(x,r)}$. Nous avons prouvé que $B_f(x,r) \subset \overline{B(x,r)}$. La double inclusion étant démontrée,
$$\overline{B(x,r)} = B_f(x,r).$$
2. Considérons un ensemble E, contenant au moins deux éléments, muni de la distance discrète (voir exemple 2 page 4). Soit x un élément de E. Nous avons
$$B(x,1) = \{x\}.$$
On remarque que $\{x\}$ est un fermé de E, car $\{x\} = B_f(x, \frac{1}{2})$. Donc
$$\{x\} = B(x,1) = \overline{B(x,1)}.$$
Or
$$B_f(x,1) = E.$$

♣

2.3.3 Caractérisation séquentielle d'un fermé

Proposition 2.10 *Une partie F d'un espace métrique (E,d) est fermée si et seulement si toute suite de points de F convergente, converge vers un élément de F.*

Preuve. Considérons F une partie fermée de E et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F convergente vers un élément de E noté l. D'après la proposition 2.8, page 22. l est un élément de $\overline{F}$. F étant fermé, on a $F = \overline{F}$. D'où l est élément de F.
Réciproquement, on considère une partie F de E, telle que toute suite de points de F convergente, converge vers un élément de F. Montrons que F est fermé, c'est-à-dire $F = \overline{F}$. Soit x un élément de $\overline{F}$. Nous savons, d'après la proposition précédente, qu'il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F convergente vers x. D'après notre hypothèse, x est élément de F. D'où $\overline{F} \subset F$. L'inclusion inverse étant toujours vérifiée, on a $\overline{F} = F$. ♣

2.4 Suites extraites, sous-suites

Définition : Soient (E, d) un espace métrique et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On dit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite (ou une sous-suite) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'éléments de E. Les suites $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$... sont des suites extraites de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Remarque 2.2 *On peut vérifier par une récurrence immédiate que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geq n.$$

Cette propriété sera utilisée dans plusieurs preuves.

Proposition 2.11 *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E converge vers un élément l, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.*

Preuve. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E convergente vers un élément l de E et une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad d(u_n, l) < \varepsilon.$$

On a,

$$\forall n \geq N, \quad \varphi(n) \geq n \geq N.$$

On déduit que

$$\forall n \geq N, \quad d(u_{\varphi(n)}, l) < \varepsilon,$$

puis que la suite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers l. ♣

Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E. On dit qu'un élément a de E est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il est limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples :

1. On considère la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n+1}).$$

Les réels 1 et (-1) sont valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ car la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 1 et la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vers (-1).

2. L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le segment $[-1; 1]$. Pour la preuve, on pourra voir l'exercice 7.8 page 82.

Proposition 2.12 *Une suite convergente admet exactement une valeur d'adhérence.*

La preuve est immédiate d'après la proposition 2.11.

Remarque 2.3 *La réciproque est fausse. Il suffit de considérer la suite de réels $((n)^{(-1)^n})_{n\in\mathbb{N}}$ admettant 0 comme seule valeur d'adhérence. Elle est divergente car non majorée.*

Exercice 2.3 On considère une suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ à valeurs dans un espace métrique (E, d).

1. On suppose que les deux sous-suites $(u_{2n})_{(n\in\mathbb{N})}$ et $(u_{2n+1})_{(n\in\mathbb{N})}$ sont convergentes. À quelle condition la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est-elle convergente ?
2. On suppose que les trois sous-suites $(u_{2n})_{(n\in\mathbb{N})}$, $(u_{2n+1})_{(n\in\mathbb{N})}$ et $(u_{3n})_{(n\in\mathbb{N})}$ sont convergentes. Montrer que la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente.

Solution.

1. Notons l la limite de la suite $(u_{2n})_{(n\in\mathbb{N})}$ et l' la limite de la suite $(u_{2n+1})_{(n\in\mathbb{N})}$. Montrons que la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente si et seulement si $l = l'$.
   (a) Supposons $l = l'$.
   Soit ε un réel strictement positif. Alors,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, d(u_{2n}, l) < \varepsilon,$$

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_1, d(u_{2n+1}, l) < \varepsilon.$$

   Soit $n_2 = \max(2n_0, 2n_1 + 1)$. On a

$$\forall n \geq n_2, \quad d(u_n, l) < \varepsilon.$$

   La suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est donc convergente, de limite l.
   (b) Si $l \neq l'$, la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ admet au moins deux valeurs d'adhérence distinctes. Elle ne peut converger.

2. Notons l la limite de la suite $(u_{2n})_{(n\in\mathbb{N})}$, l' la limite de la suite $(u_{2n+1})_{(n\in\mathbb{N})}$ et l'' la limite de la suite $(u_{3n})_{(n\in\mathbb{N})}$.
La suite $(u_{6n})_{(n\in\mathbb{N})}$ est une suite extraite des suites convergentes $(u_{2n})_{(n\in\mathbb{N})}$ et $(u_{3n})_{(n\in\mathbb{N})}$. Elle est donc convergente et,

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} u_{6n} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = l, \\ \lim_{n\to+\infty} u_{6n} = \lim_{n\to+\infty} u_{3n} = l''. \end{cases}$$

D'où $l = l''$. De même, la suite $(u_{6n+3})_{(n\in\mathbb{N})}$ est une suite extraite des suites convergentes $(u_{3n})_{(n\in\mathbb{N})}$ et$(u_{2n+1})_{(n\in\mathbb{N})}$, donc

$$\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} u_{6n+3} = \lim_{n\to+\infty} u_{3n} = l'', \\ \lim_{n\to+\infty} u_{6n+3} = \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = l'. \end{cases}$$

D'où $l'' = l'$. Les suites $(u_{2n})_{(n\in\mathbb{N})}$ et $(u_{2n+1})_{(n\in\mathbb{N})}$ ayant même limite, la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente.

♣

Exercice 2.4 Montrer qu'une suite périodique et convergente est constante.

Solution. On considère une suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ convergente vers un élément l et périodique de période p, où p est un entier strictement positif.
Soit k un entier naturel. Montrons que $u_k = l$. Toute suite extraite de la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente vers l et en particulier la suite extraite $(u_{(k+pn)})_{(n\in\mathbb{N})}$. Cette suite est constante de valeur commune u_k. Donc $u_k = l$. On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = l.$$

♣

Voici une caractérisation de l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite. Cette propriété sera utilisée par exemple pour déterminer, suivant les valeurs du réel θ, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos n\theta)_{n\in\mathbb{N}}$ (Exercice 7.8 page 82).

Proposition 2.13 *Soient (E,d) un espace métrique et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie sur E. On note, pour tout entier naturel p, A_p la partie de E définie par*

$$A_p = \{u_n; n \geq p\} = \{u_p, u_{p+1}, \cdots\}.$$

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$\mathcal{VA} = \cap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}.$$

Preuve. Considérons l une valeur d'adhérence de la suite.
Il existe $(u_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ une suite extraite convergente vers l. Considérons un entier naturel p. La suite $(u_{\varphi(n+p)})_{(n\in\mathbb{N})}$ est une suite extraite de la suite $(u_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$. Elle est convergente vers l. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n+p) \geq n+p \geq p.$$

La suite $(u_{\varphi(n+p)})_{(n\in\mathbb{N})}$ est une suite d'éléments de A_p. D'après la proposition 2.8 page 22, la limite l appartient à $\overline{A_p}$. On en déduit que

$$l \in \cap_{p\in\mathbb{N}} \overline{A_p}.$$

Réciproquement, considérons l appartenant à $\cap_{p\in\mathbb{N}}\overline{A_p}$. Construisons par récurrence une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ soit convergente vers l. On détermine cette application φ, d'une part par son premier terme

$$\varphi(0) = \min\{m \in \mathbb{N}/d(l, u_m) \leq 1\}$$

(remarquons que $\{m \in \mathbb{N}/d(l, u_m) \leq 1\}$ est non vide car $d(l, A_0) = 0$ (proposition 1.14, page 15))
et, d'autre part, par la relation de récurrence :

$$\varphi(n+1) = \min\{m \geq \varphi(n) + 1/d(l, u_m) \leq \frac{1}{2^{n+1}}\}.$$

Remarquons, comme précédemment, que $\{m \geq \varphi(n) + 1/d(l, u_m) \leq \frac{1}{2^{n+1}}\}$ est non vide puisque $d(l, A_{(\varphi(n)+1)}) = 0$.
L'application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ainsi construite est strictement croissante. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(u_{\varphi(n)}, l) \leq \frac{1}{2^n}.$$

La suite $(u_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ converge vers l. L'élément l est donc une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ♣

Exercice 2.5 On considère une suite périodique à valeurs dans un espace métrique (E, d). Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est égal à son ensemble image.

Solution. Notons q la période de cette suite. L'ensemble image est

$$\{u_0, u_1, \cdots, u_{q-1}\}.$$

En reprenant les notations de la proposition 2.13, nous avons, pour tout entier naturel p,

$$A_p = \{u_p, u_{p+1}, \cdots, u_{p+q-1}\} = \{u_0, u_1, \cdots, u_{q-1}\}.$$

Ces ensembles étant des parties fermées de E,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \overline{A_p} = \{u_0, u_1, \cdots, u_{q-1}\}.$$

Ainsi, l'ensemble des valeurs d'adhérence et égal à

$$\cap_{p=0}^{+\infty} \overline{A_p} = \{u_0, u_1, \cdots, u_{q-1}\}.$$

♣

Chapitre 3

Continuité et limite dans les espaces métriques

3.1 Continuité ponctuelle, continuité sur un espace métrique

Définition : Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, $f : E \to E'$ une application et a un élément de E. On dit que f est continue en a si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in E, \quad d(x, a) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Remarque 3.1 *Les deux dernières inégalités peuvent être strictes ou larges. Il en sera de même pour les définitions données dans les sections 3.2 et 3.3.*

Exemple : On considère f l'application définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f: \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto \sqrt{x}. \end{array}$$

Soit a un réel strictement positif. Montrons que f est continue en a. On a,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x - a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x - a|}{\sqrt{a}}.$$

Pour un réel ε strictement positif fixé, on peut choisir $\alpha = \varepsilon\sqrt{a}$. L'application est ainsi continue en a.
Je laisse le soin au lecteur de montrer que l'application f est continue en 0.

Définition : Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques, $f : E \to E'$ une application. On dit que f est continue sur E si f est continue en tout point de E.

Exemple : L'application f définie dans l'exemple précédent est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Définition : Soient (E,d), (E',d') deux espaces métriques et une application $f : E \to E'$. On dit que f est un homéomorphisme si f est bijective, continue et si f^{-1} est continue. On dit alors que (E,d) et (E',d') sont homéomorphes.

Exercice 3.1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

Solution. Soit a un réel non nul. Montrons que f est continue en ce point. On considère ε un réel strictement positif. Prenons

$$\alpha = \min\{\frac{|a|}{2}, \frac{\varepsilon a^2}{2}\}$$

Soit x un réel vérifiant $|x-a| \leq \alpha$. L'inégalité

$$|a| \leq |x| + |a-x|$$

entraîne

$$|x| \geq |a| - |x-a| \geq \frac{|a|}{2}.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad |x-a| < \alpha \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{|ax|} \leq \frac{2|x-a|}{a^2} < \varepsilon.$$

L'application f est continue en tout point a de $\mathbb{R}^*$ donc sur $\mathbb{R}^*$. ♣

Remarque 3.2 *On remarque que dans l'exercice précédent, pour chaque réel strictement positif ε, le réel α proposé dépend de la valeur du réel a. Lorsque l'on fait l'étude de la continuité d'une application définie sur un espace métrique (E,d), si, pour chaque ε, le choix de α peut être indépendant de l'élément de E choisi, on dit que la fonction est uniformément continue sur E. Voici la définition dans la section suivante.*

3.2 Continuité uniforme sur un espace métrique

Définition : Une application $f : (E,d) \to (E',d')$ est uniformément continue sur E si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) < \alpha \Rightarrow d'(f(x),f(y)) < \varepsilon.$$

Voici une catégorie importante de fonctions uniformément continues : les fonctions lipschitziennes.

Définition :

1. Soit $k \in \mathbb{R}^{+*}$. On dit que $f : (E,d) \to (E',d')$ est k-lipschitzienne si
$$\forall (x,y) \in E^2, \quad d'(f(x),f(y) \leq kd(x,y).$$
2. On dit que f est contractante si f est k-lipschitzienne, avec $k < 1$.

Exemple : On peut vérifier, grâce à l'inégalité des accroissements finis, que toute fonction définie sur un intervalle I, à valeurs réelles, dérivable sur I et de dérivée bornée sur I, est lipschitzienne sur I.

Proposition 3.1 *Une application définie sur E, lipschitzienne, est uniformément continue sur E.*

Preuve. Pour un réel strictement positif donné ε, il suffit de choisir $\alpha = \frac{\varepsilon}{k}$. ♣

Exercice 3.2 Soit (E,d) un espace métrique et a un élément de E. Montrer que l'application f définie sur E par

$$\begin{array}{rccl} f: & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & d(a,x) \end{array}$$

est une application lipschitzienne de rapport 1.

Solution. Soient x et y deux éléments de E. D'après l'inégalité triangulaire,

$$d(a,x) \leq d(a,y) + d(y,x),$$

d'où,

$$d(a,x) - d(a,y) \leq d(y,x).$$

De même, on a,

$$d(a,y) \leq d(a,x) + d(x,y)$$

d'où,

$$-d(x,y) \leq d(a,x) - d(a,y).$$

Le réel $d(x,y)$ étant positif, on en déduit

$$|d(a,x) - d(a,y)| \leq d(x,y).$$

L'application f est lipschitzienne de rapport 1. ♣

Proposition 3.2 *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. L'application*

$$\begin{aligned} E &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

est lipschitzienne de rapport 1 donc uniformément continue sur E.

Preuve. Il suffit d'utiliser le résultat précédent en prenant $a = 0$. ♣

Exercice 3.3 On considère (E, d) un espace métrique et l'espace $E \times E$ muni de la métrique produit (proposition 1.5 page 5) que l'on notera d_{prod}. Montrer que l'application g définie sur $E \times E$ par

$$\begin{array}{rccc} g: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y). \end{array}$$

est une application lipschitzienne.

Solution. Soient (x,y) et (x',y') deux éléments de $E \times E$. Nous avons

$$d(x,y) \leq d(x,x') + d(x',y') + d(y',y).$$

Ainsi,

$$d(x,y) - d(x',y') \leq d(x,x') + d(y',y).$$

De même,

$$d(x',y') - d(x,y) \leq d(x,x') + d(y',y).$$

On en déduit que

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y',y) \leq 2.d_{prod}((x,y),(x',y')).$$

L'application g est lipschitzienne de rapport 2. ♣

Exercice 3.4 On considère (E, d), (E', d') deux espaces métriques et f une application définie et continue sur E, à valeurs dans E'. On considère également l'espace $E \times E$ muni de la métrique produit (proposition 1.5 page 5) que l'on notera d_{prod}. Montrer que l'application h, définie sur $E \times E$ par

$$\begin{array}{rccl} h: & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x, y) & \longmapsto & d'(f(x), f(y)). \end{array}$$

est une application continue sur $E \times E$.

Solution. On considère (x_0, y_0) un élément de $E \times E$. Montrons que h est continue en (x_0, y_0). Pour tout couple (x, y) de E, nous avons

$$d'(f(x_0), f(y_0)) \leq d'(f(x_0), f(x)) + d'(f(x), f(y)) + d'(f(y), f(y_0)).$$

Ainsi,

$$d'(f(x_0), f(y_0)) - d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x_0), f(x)) + d'(f(y), f(y_0)).$$

De même,

$$d'(f(x), f(y)) - d'(f(x_0), f(y_0)) \leq d'(f(x_0), f(x)) + d'(f(y), f(y_0)).$$

On en déduit que

$$|d'(f(x_0), f(y_0)) - d'(f(x), f(y))| \leq d'(f(x_0), f(x)) + d'(f(y), f(y_0)).$$

Soit ε un réel strictement positif. L'application f étant continue en x_0 et y_0, il existe deux réels strictement positifs α_{x_0} et α_{y_0} vérifiant

$$\forall x \in E, \quad d(x_0, x) \leq \alpha_{x_0} \Rightarrow d'(f(x_0), f(x)) \leq \varepsilon,$$

$$\forall y \in E, \quad d(y_0, y) \leq \alpha_{y_0} \Rightarrow d'(f(y_0), f(y)) \leq \varepsilon.$$

On définit le réel strictement positif α_0 par $\alpha_0 = \min\{\alpha_{x_0}, \alpha_{y_0}\}$. Ainsi,

$$\forall (x, y) \in E \times E, \quad d_\infty((x_0, y_0), (x, y)) \leq \alpha_0 \Rightarrow |d'(f(x_0), f(y_0)) - d'(f(x), f(y))| \leq 2\varepsilon.$$

On en conclut que h est continue en (x_0, y_0), puis sur $E \times E$. ♣

3.3 Limite d'une fonction en un point

Nous savons que l'étude de la continuité d'une fonction peut s'effectuer en tout point de son ensemble de définition. Nous allons voir, dans cette section, que l'étude de l'existence d'une limite d'une fonction peut s'effectuer non seulement en tout point de l'ensemble de définition mais, également, en tout point de son adhérence. Par exemple, si une fonction f est définie sur un intervalle $]a, b[$, l'étude de la continuité se fait en chaque point de $]a, b[$. En revanche, on peut étudier l'existence d'une limite en chaque point de l'adhérence de l'intervalle $]a, b[$, c'est-à-dire sur le segment $[a, b]$.

Définition : Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, A une partie de E et $f : A \to E'$ une application. On considère x_0 un élément de E appartenant à l'adhérence de A et l un élément de E'. On dit que f admet l pour limite lorsque x tend vers x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in A, \quad d(x_0, x) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), l) < \varepsilon.$$

Proposition 3.3 *Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, A une partie de E et $f : A \to E'$ une application. On considère x_0 un élément de E appartenant à l'adhérence de A. Si l'application f admet une limite en x_0, celle-ci est unique et on la note*

$$\lim_{x \to x_0} f(x).$$

Preuve. Supposons que l et l' deux éléments de E' soient limite de l'application f en un point x_0 adhérent à la partie A. Soit ε un réel strictement positif. D'après la définition de la limite, on peut trouver deux réels strictement positifs α_1 et α_2 vérifiant,

$$\forall x \in A, \quad d(x_0, x) < \alpha_1 \Rightarrow d'(f(x), l_1) < \varepsilon,$$

$$\forall x \in A, \quad d(x_0, x) < \alpha_2 \Rightarrow d'(f(x), l_2) < \varepsilon.$$

Considérons un élément a de A vérifiant $d(x_0, a) < \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$. Il existe un tel élément car x_0 étant adhérent à A, on a $d(x_0, A) = 0$. Nous obtenons,

$$d'(l_1, l_2) \leq d'(l_1, f(a)) + d'(f(a), l_2) < 2\varepsilon.$$

On en déduit que $d(l, l') = 0$ et l'unicité de la limite. ♣

3.3.1 Continuité et limite

Proposition 3.4 *Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, $f : E \to E'$ une application et a un élément de E. L'application f est continue en a si et seulement si f admet une limite en a. On a alors*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Preuve. Supposons que f admette en a une limite notée $l (\in E')$. D'après la définition de la limite

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in E, \quad d(a, x) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), l) < \varepsilon.$$

a étant un élément de E l'ensemble de définition et $d(a, a)$ étant nul, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \quad d'(f(a), l) < \varepsilon.$$

On en déduit que

$$l = f(a).$$

En remplaçant l par $f(a)$, on obtient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in E, \quad d(a, x) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

L'application f est ainsi continue en a.
La réciproque est évidente. ♣

3.4 Caractérisation séquentielle de la limite et de la continuité

3.4.1 Caractérisation séquentielle de la limite

Cette proposition, comme la proposition 3.7, sont importantes. Elles indiquent que, pour tout problème de limite ou de continuité, on peut travailler, soit avec les ε, soit avec les suites.

Proposition 3.5 *Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, A une partie de E et $f : A \to E'$ une application. On considère x_0 un élément de E appartenant à l'adhérence de A et l un élément de E'. L'application f admet pour limite l lorsque x tend vers x_0 si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente vers x_0, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.*

Preuve.

1. Supposons que f admette l pour limite lorsque x tend vers x_0.
   On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente vers x_0. Montrons que la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers l. Soit ε un réel strictement positif :
   $$\exists \alpha > 0, \quad \forall x \in A, \quad d(x, x_0) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), l) < \varepsilon.$$
   La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente vers x_0,
   $$\exists n_0 \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \geq n_0, \quad d(a_n, x_0) < \alpha.$$
   On en déduit que
   $$\forall n \geq n_0, \quad d'(f(a_n), l) < \varepsilon.$$
   La suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
2. Supposons que f n'admette pas l pour limite lorsque x tend vers x_0.
   C'est-à-dire,
   $$\exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in A/ \quad d(x_0, x) < \alpha \quad \text{et} \quad d'(f(a), l) \geq \varepsilon.$$

Pour tout entier naturel n, choisissons un élément a_n de A vérifiant

$$d(x_0, a_n) < \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad d'(l, f(a_n)) \geq \varepsilon.$$

On vient de construire une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente vers x_0, mais la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l. Ce qui termine la preuve.

♣

Exercice 3.5 On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Montrer que cette application n'admet pas de limite en 0.

Solution. La suite $(\frac{1}{n\pi})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite convergente vers 0. Or

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(\frac{1}{n\pi}) = (-1)^n.$$

La suite $(f(\frac{1}{n\pi}))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente. On en déduit que l'application f n'admet pas de limite en 0. ♣

Proposition 3.6 *Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques, A une partie de E et $f : A \to E'$ une application. On considère x_0 un élément de E appartenant à l'adhérence de A. Si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente vers x_0, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, alors l'application f admet une limite lorsque x tend vers x_0.*

Preuve. Considérons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente vers x_0. Soit l la limite de la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = l.$$

Montrons que, pour toute suite $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente vers x_0, la suite $(f(a'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers l. Par hypothèse, nous savons que la suite $(f(a'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Notons l' sa limite :

$$\lim_{n\to+\infty} f(a'_n) = l'.$$

Montrons que $l = l'$. Construisons pour cela la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'élements de A de la façon suivante,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} b_{2n} = a_n, \\ b_{2n+1} = a'_n. \end{cases}$$

D'après l'exercice 2.3, page 25, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers x_0. La suite $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers un élément de E' que l'on note l_b. Les suites $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(f(a'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ étant des suites extraites de la suite $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$, elles sont convergentes vers l_b. Nous obtenons,

$$\begin{cases} l = l_b, \\ l' = l_b. \end{cases}$$

D'où $l = l'$. Nous avons montré en utilisant la proposition 3.5 que l'application f admet l pour limite en x_0. ♣

3.4.2 Caractérisation séquentielle de la continuité

Proposition 3.7 *Soient (E,d) et (E',d') deux espaces métriques et $f : E \to E'$ une application. On considère a un élément de E. L'application f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E convergente vers a, la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.*

Preuve. Il suffit d'appliquer les propositions 3.4 et 3.5. ♣

3.5 Caractérisation topologique de la continuité

Définition : Soit $f : E \to E'$ une application et A une partie de E'. On appelle image réciproque par f de A, notée $f^{-1}(A)$, l'ensemble

$$f^{-1}(A) = \{x \in E / f(x) \in A\}.$$

Proposition 3.8 *Soit $f : (E,d) \to (E',d')$ une application; Les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue sur E.*
2. *Pour tout ouvert θ de E', $f^{-1}(\theta)$ est un ouvert de E.*
3. *Pour tout fermé F de E', $f^{-1}(F)$est un fermé de E.*

Preuve. On notera B les boules ouvertes de l'espace métrique (E,d) et B' celles de l'espace métrique (E',d')

1. $1 \Rightarrow 2$
   On considère θ un ouvert de E'. Soit x un élément de $f^{-1}(\theta)$. $f(x)$ étant un élément de θ, il existe un réel r strictement positif tel que

$$B'(f(x), r) \subset \theta.$$

L'application f étant continue en x, il existe un réel α strictement positif vérifiant

$$\forall y \in E, \quad d(x,y) < \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < r.$$

On en déduit que

$$f\left(B(x,\alpha)\right) \subset B'(f(x), r) \subset \theta.$$

et

$$B(x,\alpha) \subset f^{-1}(\theta).$$

Cette dernière partie est ainsi un ouvert de E.

2. $2 \Rightarrow 1$
Considérons un élément a de E et montrons que f est continue en a. Soit ε un réel strictement positif. La boule $B'(f(a), \varepsilon)$ est un ouvert de E', donc $f^{-1}[B'(f(a), \varepsilon)]$ est un ouvert de E contenant a. Il existe un réel α strictement positif tel que

$$B(a,\alpha) \subset f^{-1}[B'(f(a), \varepsilon)].$$

On en déduit que

$$\forall x \in B(a,\alpha), \quad f(x) \in B'(f(a), \varepsilon).$$

Ainsi,

$$\forall x \in E, \quad d(a,x) < \alpha \Rightarrow d'(f(a), f(x)) < \varepsilon.$$

On en déduit que f est continue en a, puis sur E.

3. $2 \Leftrightarrow 3$
Il suffit d'utiliser les complémentaires puisque, si A est une partie de E', on a

$$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c.$$

♣

Corollaire 3.9 *Soient (E,d), (E',d') et (E'',d'') trois espaces métriques et deux applications $f : E \to E'$ et $g : E' \to E''$. Si f est continue sur E et g est continue sur E' alors l'application $g \circ f$ est continue sur E.*

3.6 Applications à valeurs dans un espace vectoriel normé

Dans cette section, on considère (A,d) un espace métrique, $(E,+,.)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et A' une partie non vide de A.

Notation : On note

$$\mathcal{A}(A', E)$$

l'ensemble des applications définies sur A' à valeurs dans E.

Définition : Dans l'ensemble $\mathcal{A}(A', E)$, on définit

1. Une loi de composition interne notée $+$: pour tout couple (f, g) de $\mathcal{A}(A', E)$, on définit $(f + g)$, l'élément de $\mathcal{A}(A', E)$ par :

$$\forall x \in A', \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

2. Une loi de composition externe, notée . : pour tout élément f de $\mathcal{A}(A', E)$ et tout scalaire λ, on définit λf, l'élément de $\mathcal{A}(A', E)$ par :

$$\forall x \in A', \quad \lambda f(x) = \lambda . f(x).$$

Proposition 3.10 *L'ensemble $\mathcal{A}(A', E)$ muni des lois $+$ et . est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*

On munit désormais E d'une norme.

Proposition 3.11 *On considère (A, d) un espace métrique, $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, A' une partie non vide de A et a un élément de A adhérent à A'. Si f et g sont deux applications définies sur A' à valeurs dans E admettant une limite en a, alors pour tous scalaires λ et λ', l'application $\lambda f + \lambda' g$ admet*

$$\lambda \lim_a f + \lambda' \lim_a g$$

pour limite en a.

Preuve. Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists \alpha_0 > 0, \quad / \forall x \in A', \quad d(x, a) < \alpha_0 \Rightarrow \|f(x) - \lim_a f\| < \varepsilon,$$

$$\exists \alpha_1 > 0, \quad / \forall x \in A', \quad d(x, a) < \alpha_1 \Rightarrow \|g(x) - \lim_a g\| < \varepsilon,$$

Soit $\alpha_2 = \min\{\alpha_0, \alpha_1\}$. On obtient, pour tout élément x de A' vérifiant $d(x, a) < \alpha_2$,

$$\|(\lambda f(x) + \lambda' g(x)) - (\lambda \lim_a f + \lambda' \lim_a g)\| \leq |\lambda| \|f(x) - \lim_a f\| + |\lambda'| . \|g(x) - \lim_a g\|$$

$$\leq (|\lambda| + |\lambda'|)\varepsilon < (|\lambda| + |\lambda'| + 1)\varepsilon.$$

Ceci prouve que l'application $(\lambda f + \lambda' g)$ admet pour limite $(\lambda \lim_a f + \lambda' \lim_a g)$ lorsque x tend vers a. ♣

Corollaire 3.12 *L'ensemble des applications définies sur A', à valeurs dans E, admettant une limite en a est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{A}(A', E), +, .)$.*

Corollaire 3.13 *L'ensemble des applications définies sur A, à valeurs dans E, continues en un point a de A est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{A}(A, E), +, .)$.*

Corollaire 3.14 *L'ensemble des applications continues sur A à valeurs dans E est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{A}(A,E),+,.)$.*

Exercice 3.6 Soient f et g deux applications définies et continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.

1. Montrer que l'application $|f|$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que les applications $\max(f,g)$ et $\min(f,g)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. L'application valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$, d'après la proposition 3.2 page 32. L'application $|f|$ est continue comme composée de deux applications continues.
2. On obtient le résultat en remarquant que

$$\max(f,g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}, \qquad \min(f,g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}.$$

♣

Exercice 3.7 Soit f une application définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On appelle épigraphe de f, noté $\mathcal{E}_f$, l'ensemble

$$\mathcal{E}_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad /y \geq f(x).\}$$

Montrer que si l'application f est continue sur $\mathbb{R}$, son épigraphe est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Solution. Soit g l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & y - f(x). \end{array}$$

L'application g est continue sur $\mathbb{R}^2$. On en déduit que

$$\mathcal{E}_f = g^{-1}(\mathbb{R}^+)$$

est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$. ♣

Chapitre 4

Espaces métriques complets

4.1 Définitions

4.1.1 Suites de Cauchy

Définition : Soient (E, d) un espace métrique et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall p \geq N, \forall q \geq N, \quad d(u_p, u_q) < \varepsilon.$$

Proposition 4.1 *1. Une suite convergente est une suite de Cauchy.*

2. Une suite de Cauchy est bornée.

Preuve.

1. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers l, élément de E. Soit ε un réel strictement positif. Il existe un entier positif N vérifiant

$$\forall n \geq N, \quad d(u_n, l) < \varepsilon.$$

D'où,

$$\forall p \geq N, \forall q \geq N, \quad d(u_p, u_q) \leq d(u_p, l) + d(l, u_q) < 2\varepsilon.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

2. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy. Il existe un entier naturel N tel que,

$$\forall p \geq N, \forall q \geq N, \quad d(u_p, u_q) \leq 1.$$

Notons,

$$M = \max\{d(u_0, u_N), \cdots, d(u_{(N-1)}, u_N), 1\}.$$

Nous obtenons

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad d(u_p, u_q) \leq d(u_p, u_N) + d(u_N, u_q) \leq 2M.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi bornée.

♣

4.1.2 Espaces métriques complets

Définition : On dit qu'un espace métrique (E,d) est complet si toute suite de Cauchy est convergente.

4.2 Exemples d'espaces métriques complets

4.2.1 Espaces vectoriels normés de dimension finie

On *admettra* que $\mathbb{R}$, muni de la norme usuelle, est complet.

Théorème admis 4.2 $\mathbb{R}$ *muni de la norme usuelle est un espace métrique complet.*

Ce pavé étant admis, on pourra en déduire

Proposition 4.3 *Les espaces* $\mathbb{R}^p$ *(*$p \in \mathbb{N}^*$*) munis de la norme* $\|.\|_\infty$ *sont complets.*

Preuve. On considère dans $\mathbb{R}^p$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, une suite de Cauchy notée $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_{1,n}, x_{2,n}, \cdots, x_{p,n}))_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons que cette suite est convergente. On a

$$\forall k \in \{1, \cdots p\}, \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \quad |x_{k,n} - x_{k,m}| \leq \|X_n - X_m\|_\infty.$$

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy, on en déduit que pour tout entier k compris entre 1 et p, la suite réelle $(x_{k,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy, donc convergente vers un réel l_k. Montrons que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $L = (l_1, l_2, \cdots, l_p)$. Soit ε un réel strictement positif. Pour tout entier k compris entre 1 et p,

$$\exists N_k \in \mathbb{N} / \quad \forall n \geq N_k, \quad |x_{k,n} - l_k| < \varepsilon.$$

Soit $N = \max\{N_1, N_2, \cdots, N_p\}$. On a,

$$\forall n \geq N, \forall k \in \{1, 2, \cdots, p\}, \quad |x_{k,n} - l_k| < \varepsilon.$$

D'où

$$\forall n \geq N, \quad \|X_n - L\|_\infty < \varepsilon.$$

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L. $(\mathbb{R}^p, \|.\|_\infty)$ est donc un e.v.n. complet. ♣

On peut montrer de la même manière la proposition suivante.

Proposition 4.4 *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension p ($p \in \mathbb{N}^*$) et $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ une base de E. On considère $\|.\|_\infty$ la norme définie sur E par :*

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots |x_p|\},$$

où $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ sont les coordonnées de x dans la base $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$. L'espace vectoriel normé $(E, \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé complet.

On montre, dans la section 12.4 du chapitre 12 à partir de la page 164, la proposition suivante

Proposition 4.5 *Tout espace vectoriel réel normé de dimension finie est complet.*

Remarque 4.1 *L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$, muni de la distance induite, n'est pas un espace métrique complet. Pour la preuve, on pourra s'appuyer sur la solution de l'exercice 7.3, page 75.*

4.2.2 Espace fonctionnel

Proposition 4.6 *On considère X un ensemble non vide, $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel réel normé et $\mathcal{B}(X, E)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées, définies sur X et à valeurs dans E. On munit $\mathcal{B}(X, E)$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par*

$$\forall f \in \mathcal{B}(X, E), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

Si l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est complet, alors l'espace $(\mathcal{B}(X, E), \|.\|_\infty)$ est aussi complet.

Preuve. Remarque : Nous savons, d'après l'exercice 2.1. page 21, que l'application $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(X, E)$.
Considérons $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{B}(X, E)$.

$$\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \quad \|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \|f_n - f_p\|_\infty.$$

On en déduit que, pour tout élément x de X, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E, de Cauchy donc convergente dans E. On note f l'application définie sur X par

$$\forall x \in X, \quad f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

Montrons que f est une application bornée. L'application qui, à un vecteur associe sa norme, étant continue (proposition 3.2, page 32), on obtient,

$$\forall x \in X, \lim_{n \to +\infty} \|f_n(x)\| = \|f(x)\|.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant de Cauchy est bornée. Considérons un réel M vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_\infty \leq M.$$

C'est-à-dire,

$$\forall x \in X, \forall n \in \mathbb{N}, \|f_n(x)\| \leq M.$$

On en déduit que

$$\forall x \in X, \quad \|f(x)\| = \lim_{n\to+\infty} \|f_n(x)\| \leq M.$$

L'application f est bornée. C'est donc un élément de $\mathcal{B}(X, E)$. Montrons qu'elle est limite dans $(\mathcal{B}(X, E), \|.\|_\infty)$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, \quad \|f_n - f_p\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Fixons n un entier naturel supérieur ou égal à n_0. Nous avons

$$\forall x \in X, \quad \lim_{p\to+\infty} \|f_n(x) - f_p(x)\| = \|f_n(x) - f(x)\|.$$

Or,

$$\forall x \in X, \forall p \geq n_0, \quad \|f_n(x) - f_p(x)\| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que

$$\forall x \in X, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon.$$

D'où,

$$\forall n \geq n_0, \quad \|f_n - f\| \leq \varepsilon.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente dans $(\mathcal{B}(X, E), \|.\|_\infty)$ vers f. L'espace vectoriel normé $(\mathcal{B}(X, E), \|.\|_\infty)$ est donc complet. ♣

4.2.3 Partie fermée d'un espace métrique complet

Proposition 4.7 *Soient (E, d) un espace métrique complet et F une partie de E. L'espace métrique (F, d) est complet si et seulement si F est une partie fermée de E.*

Preuve.

1. Supposons F partie fermée de E.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de Cauchy de F donc de E. Cette suite est convergente dans E, donc dans F car F est un fermé de E. L'espace métrique (F, d) est complet.

2. Supposons (F, d), espace métrique complet.
Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite d'éléments de F convergente vers un élément de E. Cette suite est une suite de Cauchy de E donc de F. (F, d), étant un espace métrique complet, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de F. On conclut à l'aide de la proposition 2.10, page 23, que F est un fermé de E.

♣

Exemple : Tout segment de $\mathbb{R}$ muni de la métrique usuelle est un espace métrique complet. Il en est de même des intervalles de la forme $[a, +\infty[$, $]-\infty, a]$ où a est un réel.

Exercice 4.1 On considère $(\mathcal{B}([-1,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$, l'espace vectoriel des applications bornées définies sur l'intervalle $[-1,1]$ et à valeurs réelles. On munit cet espace de la norme sup $\|.\|_\infty$. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $\mathcal{B}([-1,1],\mathbb{R})$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1,1], \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{x}{2}\right)^k.$$

1. Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.
2. On considère le sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales de $(\mathcal{B}([-1,1],\mathbb{R})$. Montrer que ce sous-espace, muni de la norme sup, n'est pas complet.

Solution.

1. $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1,1], \quad P_n(x) = \frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2}{2-x} - \frac{1}{2^n}\frac{x^{n+1}}{2-x}.$$

   Soit f l'élément de $\mathcal{B}([-1,1],\mathbb{R})$ défini par

   $$\forall x \in [-1,1], \quad f(x) = \frac{2}{2-x}.$$

   Nous avons,

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1,1], \quad |P_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{2^n}.$$

   D'où,

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|P_n - f\|_\infty \le \frac{1}{2^n}$$

   La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi convergente vers f
2. La suite de fonctions polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans $\mathcal{B}([-1,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_\infty$. Sa limite n'est pas une fonction polynôme. Le sous-espace des fonctions polynômes n'est pas un fermé de $\mathcal{B}([-1,1],\mathbb{R})$. Muni de la norme $\|.\|_\infty$, Il n'est donc pas complet.

♣

Remarque 4.2 *On considère $[a,b]$ un segment. En reprenant l'exemple et les notations de la section 4.2.2, $(\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé complet. On note $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs réelles. On montrera dans le chapitre 16, théorème 16.4, que $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est une partie fermée de $(\mathcal{B}([a,b],\mathbb{R})$. D'après la proposition 4.7, l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est complet.*

4.3 Propriétés des espaces métriques complets

4.3.1 Fermés emboîtés

Proposition 4.8 *Soient (E, d) un espace métrique complet et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fermés non vide de E, telle que $\lim_{n\to+\infty} \delta(F_n) = 0$. Alors il existe un élément x de E tel que $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.*

Preuve. Pour tout entier naturel n, choisissons un élément x_n du fermé F_n. Montrons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente. L'espace métrique (E, d) étant complet, il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy. Soit ε un réel strictement positif fixé. Il existe un naturel N tel que

$$\delta(F_N) < \varepsilon.$$

Cette suite de fermés étant décroissante,

$$\forall n \geq N, \quad x_n \in F_n \subset F_N,$$

donc

$$\forall n \geq N, \forall p \geq N, \quad d(x_n, x_p) < \varepsilon.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc convergente. On note x sa limite. Soit p un entier naturel fixé. La suite $(x_n)_{n\geq p}$ est une suite convergente d'éléments du fermé F_p. Sa limite x appartient à ce fermé . Donc

$$x \in \cap_{p\in\mathbb{N}} F_p.$$

Considérons y élément de $\cap_{p\in\mathbb{N}} F_p$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(x, y) \leq \delta(F_n).$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty}(\delta(F_n)) = 0$, on obtient $d(x, y) = 0$ et $x = y$. D'où

$$\{x\} = \cap_{p\in\mathbb{N}} F_p.$$

♣

4.3.2 Théorème du point fixe

Théorème 4.9 *(Du point fixe) Soit (E, d) un espace métrique complet et une application $f : E \to E$ contractante, c'est-à-dire qu'il existe un réel $k \in [0, 1[$ vérifiant*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(f(x), f(y)) \leq k.d(x, y).$$

Alors f admet un unique point fixe.

La preuve de ce théorème est effectuée page 134 dans le chapitre 10 consacré aux suites définies par une récurrence.

4.3.3 Prolongement d'une fonction uniformément continue

Proposition 4.10 *Soient (E, d) un espace métrique, (E', d') un espace métrique* complet, *A une partie dense de E et $f : A \to E'$ une application uniformément continue sur A. Alors f se prolonge de manière unique en une application uniformément continue sur E.*

Remarque 4.3 *Remarquons l'importance de l'uniforme continuité. En effet, dans l'exercice 3.1. page 30, la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ mais ne peut se prolonger par continuité en 0. On en déduit qu'elle n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^*$.*

Preuve. Soit x_0 un élément de E. Montrons que l'application f admet une limite en x_0. (Ceci est clair si x_0 appartient à A.) A étant dense dans E, tout élément de E est adhérent à A. Utilisons la proposition 3.6, page 36. Considérons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente vers x_0. Montrons que la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E'.
Soit ε un réel strictement positif. L'application f étant uniformément continue sur A, choisissons un réel strictement positif α vérifiant

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad d(x, y) \leq \alpha \Rightarrow d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente donc de Cauchy, choisissons un entier n_0 vérifiant,

$$\forall p \geq n_0, \forall p \geq n_0, \quad d(a_p, a_q) \leq \alpha.$$

On obtient,

$$\forall p \geq n_0, \forall p \geq n_0, \quad d'(f(a_p), f(a_q)) \leq \varepsilon.$$

La suite $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (E', d') espace métrique complet. Elle est convergente vers un élément de E'. Nous avons montré en utilisant la proposition 3.6 que l'application f admet une limite en x_0. Nous pouvons maintenant définir sur E, à valeurs dans E', l'application g par

$$\forall x \in E, \quad g(x) = \lim_{a \to x} f(a).$$

L'application f étant continue sur A, nous avons

$$\forall a \in A, \quad g(a) = f(a).$$

L'application g prolonge f sur E. Montrons qu'elle est uniformément continue sur E.
Soit ε un réel strictement positif. Il existe un réel α strictement positif vérifiant

$$\forall (a, b) \in A^2, \quad d(a, b) \leq \alpha \Rightarrow d'(f(a), f(b)) \leq \varepsilon.$$

Soient x et y deux éléments de E vérifiant

$$d(x, y) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergentes respectivement vers x et y. La suite

$$d(a_n, b_n)$$

est convergente vers le réel $d(x, y)$ inférieur à $\frac{\alpha}{2}$. Il existe donc un naturel n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad d(a_n, b_n) \leq \alpha.$$

Ainsi,

$$\forall n \geq n_0, \quad d'(f(a_n), f(b_n)) \leq \varepsilon.$$

Or la suite $(d'(f(a_n), f(b_n)))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $d'(g(x), g(y))$. On en déduit, en passant à la limite que

$$d'(g(x), g(y)) \leq \varepsilon.$$

En résumé,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) \leq \frac{\alpha}{2} \Rightarrow d'(g(x), g(y)) \leq \varepsilon.$$

L'application g est donc un prolongement uniformément continu de f sur E.
Montrons enfin l'unicité de ce prolongement uniformément continu. Supposons qu'il existe g_1 et g_2 deux prolongements uniformément continus de f sur E. L'application $h = d'(g_1, g_2)$ est une application continue sur E et nulle sur A. Soit x un élément quelconque de E. Considérons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente vers x. On a,

$$h(x) = \lim_{n\to+\infty} h(a_n) = 0.$$

D'où $h = 0$ et $g_1 = g_2$. Le prolongement uniformément continu de f sur E est unique. ♣

Proposition 4.11 *Soient (E, d) un espace métrique, (E', d') un espace métrique* complet, *A une partie dense de E et $f : A \to E'$ une application k-lipschitzienne sur A ($k \in \mathbb{R}^+$). Alors f se prolonge de manière unique en une application k-lipschitzienne sur E.*

Exemple : Nous avons vu (exemple 3.2, page 31) que toute application à valeur réelle dérivable sur un intervalle ouvert $]a, b[$, et de dérivée bornée, est lipschtizienne. On en déduit qu'elle est prolongeable par une fonction lipschitzienne sur $[a, b]$.

Preuve. Soit k un réel positif et f une application k-lipschitzienne sur A à valeurs dans E'. Elle est uniformément continue sur A. D'après la proposition précédente, il existe une unique application uniformément continue sur E prolongeant f. Cette application est l'application g définie dans la preuve précédente. Montrons qu'elle est k-lipschitzienne sur E. Soient x et y deux éléments de E. Considérons deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergentes respectivement vers x et y.

Alors les suites $d(a_n, b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $d'(f(a_n), f(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes avec

$$\lim_{n\to+\infty} d(a_n, b_n) = d(x, y), \qquad \lim_{n\to+\infty} d'(f(a_n), f(b_n)) = d'(g(x), g(y)).$$

Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d'(f(a_n), f(b_n)) \leq kd(a_n, b_n).$$

Donc, en passant à la limite,

$$d'(g(x), g(y)) \leq kd(x, y).$$

L'application g est l'unique prolongement de f sur E qui soit k-lipschitzien. ♣

Chapitre 5

Espaces métriques compacts

5.1 Définition, exemples

> **Définition :** Propriété de Bolzano-Weierstrass.
> Un espace métrique (E, d) est compact si toute suite de E admet une sous-suite convergente.

Exemple : L'ensemble $\mathbb{R}$, muni de la norme usuelle, n'est pas un espace métrique compact. En effet, considérons la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = n.$$

Considérons maintenant $(u_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_\varphi(n) = \varphi(n) \geq n.$$

La suite extraite $(u_\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée donc non convergente.

Voici un exemple très important de compacts.

Théorème 5.1 *Tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est compact.*

Preuve. On considère un segment $[a, b]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie sur ce segment. Le segment $[a, b]$, muni de la distance induite, est un espace métrique complet car il est un fermé de $\mathbb{R}$, lui-même complet. En remarquant que, pour tout segment $[\alpha, \beta]$, on a

$$\{n \in \mathbb{N}/u_n \in [\alpha, \beta]\} = \{n \in \mathbb{N}/u_n \in [\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]\} \cup \{n \in \mathbb{N}/u_n \in [\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]\},$$

on en déduit que, si l'ensemble située à gauche de l'égalité est infini, alors au moins l'un des deux situés à droite l'est aussi. On considère la suite décroissante de segments $([a_p, b_p])_{p\in\mathbb{N}}$ définie par

$$[a_0, b_0] = [a, b]$$

puis pour tout entier naturel p,

$$[a_{p+1}, b_{p+1}] = \begin{cases} \left[a_p, \frac{a_p+b_p}{2}\right] & \text{si l'ensemble } \{n \in \mathbb{N}/u_n \in [a_p, \frac{a_p+b_p}{2}]\} \quad \text{est infini,} \\ \left[\frac{a_p+b_p}{2}, b_p\right] & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette suite décroissante de fermés vérifie $\lim_{p\to+\infty} \delta([a_p, b_p]) = 0$. D'après la proposition 4.8, page 46, il existe un réel l vérifiant

$$\{l\} = \cap_{p\in\mathbb{N}}[a_p, b_p].$$

Sachant, que pour tout naturel p, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}/ \quad u_n \in [a_p, b_p]\}$ est infini, on peut définir $(u_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n+1) = \min\{k > \varphi(n)/u_k \in [a_n, b_n]\}. \end{cases}$$

Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(u_{\varphi(n)}, l) \leq \frac{b-a}{2^n}.$$

On en déduit que la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente vers l. Le segment $[a, b]$ est un compact. ♣

5.2 Propriétés d'un espace métrique compact

Proposition 5.2 *Un espace métrique compact est complet.*

Considérons (E, d) un espace métrique compact et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de cet espace. Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}/ \quad \forall p \geq n_0, \forall q \geq n_0, \quad d(u_p, u_q) < \varepsilon.$$

L'espace E étant compact la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ convergente vers un élément l de E :

$$\exists N \in \mathbb{N}/ \quad \varphi(N) \geq n_0 \quad \text{et} \quad d(u_{\varphi(N)}, l) < \varepsilon.$$

Donc,

$$\forall p \geq n_0, \quad d(u_p, l) \leq d(u_p, u_{\varphi(N)}) + d(u_{\varphi(N)}, l) < 2\varepsilon.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et l'espace métrique (E, d) est complet.

Proposition 5.3 *Un espace métrique compact est borné.*

Preuve. On considère un espace métrique compact (E,d) et a un élément de E. Supposons dans un premier temps que l'ensemble

$$\{d(a,x)/x \in E\}$$

soit non majoré. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, choisissons un élément a_n de E vérifiant

$$d(a,a_n) \geq n.$$

L'espace métrique (E,d) étant compact, il existe une suite extraite $(a_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ convergente vers un élément l de E. Nous savons (voir exercice 3.2, page 31) que, pour l'application qui à tout élément x de E associe $d(a,x)$, est lipschitzienne donc continue sur E. Ainsi, la suite $(d(a,a_{\varphi(n)}))_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} d(a,a_{\varphi(n)})) = d(a,l).$$

Ceci est impossible car la suite $(d(a,a_{\varphi(n)}))_{(n\in\mathbb{N})}$ est non bornée. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(a,a_{\varphi(n)}) \geq \varphi(n) \geq n.$$

On en déduit que l'ensemble

$$\{d(a,x)/x \in E\}$$

est borné. Il existe un réel positif M vérifiant

$$\forall x \in E, \quad d(a,x) \leq M.$$

Donc,

$$\forall x \in E, \forall y \in E, \quad d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) \leq 2M.$$

Un espace métrique compact est ainsi borné. ♣

Proposition 5.4 *Soient (E,d) un espace métrique et A une partie de E.*

1. *Si A est une partie compacte de E, alors A est un fermé borné de E.*
2. *Si E est compact et A une partie fermée de E, alors A est compacte.*

Preuve.

1. Si A est une partie compacte de E, alors A est bornée, d'après la proposition précédente. Montrons que A est une partie fermée de E. Considérons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, convergente vers un élément l de E. A étant compacte, il existe une suite extraite $(a_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ convergente dans A. Or la limite de cette suite extraite est égale à l. Donc l est un élément de A. D'après la caractérisation séquentielle des fermés (proposition 2.10, page 23), A est un fermé de E.
2. Soient (E,d) un espace métrique compact et A une partie fermée de E. On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A donc de E. Il existe une suite extraite $(a_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ convergente dans E. Les éléments de cette suite appartiennent au fermé A, la limite également. La suite extraite $(a_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ est donc convergente dans A. A est une partie compacte de E.

♣

5.3 Produit d'espaces compacts

Proposition 5.5 *Soient E_1 et E_2 deux espaces métriques compacts. Alors l'espace produit $E_1 \times E_2$ muni de la métrique produit est compact.*

Preuve. Considérons $X_p = (x_p, y_p)$ une suite d'éléments de $E_1 \times E_2$. L'espace E_1 étant compact, il existe une suite $(x_{\varphi_1(p)})_{(n\in\mathbb{N})}$ extraite de la suite $(x_p)_{(p\in\mathbb{N})}$ et convergente dans E_1 vers un élément x. La suite $(y_{\varphi_1(p)})_{(p\in\mathbb{N})}$ est une suite du compact E_2. Il existe $(y_{\varphi_1\circ\varphi_2(p)})_{(p\in\mathbb{N})}$ suite extraite convergente dans E_2 vers un élément y. On en déduit que$(X_{\varphi_1\circ\varphi_2(p)})_{(p\in\mathbb{N})}$ suite extraite de la suite $X_p = (x_p, y_p)$, converge, dans $E_1 \times E_2$ muni de la métrique produit, vers (x, y). ♣

Proposition 5.6 *On considère n espaces métriques compacts E_1, $E_2 \cdots E_n$. Alors l'espace produit $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ muni de la métrique produit est compact.*

La preuve peut se faire par récurrence en utilisant la proposition précédente.

5.4 Caractérisation des compacts d'un espace vectoriel de dimension finie muni d'une norme sup

Proposition 5.7 *Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension n ($n \in \mathbb{N}^*$) et $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base de E. On considère $\|.\|_\infty$ la norme définie sur E par :*

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots |x_n|\},$$

où $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$. Une partie de E munie de la norme $\|.\|_\infty$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Preuve. La condition est nécessaire d'après la proposition 5.4.
Montrons d'abord, que pour tout réel r strictement positif, $B_f(0, r)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon r est une partie compacte de $(E, \|.\|_\infty)$. On considère l'application φ définie sur l'espace métrique $([-r, r]^n, \|.\|_\infty)$ à valeurs dans l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|_\infty)$ définie par

$$\forall (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in [-r, r]^n, \quad \varphi(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k.$$

L'application φ est isométrique donc lipschitzienne de rapport 1 et donc continue. L'espace métrique $([-1, 1]^n, \|.\|_\infty)$ est compact donc, d'après la proposition 5.9, l'image de φ, $B_f(0, r)$, est un compact.

Considérons maintenant A une partie fermée et bornée de $(E, \|.\|_\infty)$. Il existe un réel strictement positif r tel que A soit incluse dans $B_f(0,r)$. A fermé de E est un fermé de $B_f(0,r)$ compact. On en déduit que A est compacte. ♣

Corollaire 5.8 *Un intervalle de $\mathbb{R}$ est un compact si et seulement si c'est un segment.*

5.5 Compacts et continuité

Proposition 5.9 *Soient (E,d) un espace métrique compact, (F,d') un espace métrique et $f : E \to F$ une application continue. Alors $f(E)$ est une partie compacte de F.*

Preuve. Considérons $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(E)$ et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = f(x_n).$$

E étant compact, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ convergente vers un élément l de E. L'application f étant continue sur E, la suite $(f(x_{\varphi(n)}))_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente et

$$lim_{n\to+\infty} y_{\varphi(n)} = lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l).$$

La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente. $f(E)$ est compact. ♣

Corollaire 5.10 *Toute application définie et continue sur un espace métrique compact à valeurs dans un espace métrique est bornée.*

Proposition 5.11 *Soient (E,d) un espace métrique compact, (F,d') un espace métrique et $f : E \to F$ une application continue. Si f est injective, alors f réalise un homéomorphisme entre E et $f(E)$.*

Preuve. L'application f étant injective, f réalise une bijection entre E et $f(E)$. Notons f^{-1} l'application réciproque. Soit E' une partie fermée de E. Nous avons $(f^{-1})^{-1}(E') = f(E')$. La partie E' est compact puisque partie fermée d'un compact. L'application f étant continue, $f(E')$ est un compact donc partie fermée de $f(E)$. On vient de montrer que l'image réciproque d'un fermé de E par l'application f^{-1} est un fermé de $f(E)$. f^{-1} est donc une application continue. ♣

Proposition 5.12 *Soient E un espace compact et $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes : Il existe deux éléments a et b de E vérifiant*

$$f(a) = \inf_{x\in E} f(x), \quad f(b) = \sup_{x\in E} f(x).$$

Preuve. $f(E)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}$, donc bornée. $f(E)$ admettant une borne supérieure, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E vérifiant

$$\sup_{x\in E} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n).$$

E étant un espace compact, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ convergente vers un élément b de E. L'application f étant continue

$$f(b) = \lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)})) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \sup_{x\in E} f(x).$$

On procède de même pour la borne inférieure. ♣

Nous verrons dans le chapitre 6, que le théorème 6.7 page 62 indique que l'image, par une application continue à valeurs réelles, d'un intervalle est un intervalle. En utilisant les propositions 5.9, 5.11 et le corollaire 5.8, nous pouvons énoncer

Corollaire 5.13 *Soit f une application définie et continue sur un segment $[a,b]$ à valeurs réelles. L'image par l'application f du segment $[a,b]$ est un segment $[c,d]$.*
De plus si f est injective, f réalise un homéomorphisme entre les segments $[a,b]$ et $[c,d]$.

Proposition 5.14 *(Heine) Soient (E,d) un espace métrique compact, (F,d') un espace métrique et $f : E \to F$ une application continue. Alors f est uniformément continue sur E.*

Preuve. L'ensemble produit $E \times E$, muni de la métrique produit, est un espace métrique compact. On définit sur cet espace, l'application h par

$$\begin{array}{rccc} h: & E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x,y) & \longmapsto & d'(f(x),f(y)). \end{array}$$

Cette application est continue sur $E \times E$ (voir exercice 3.4 page 33). Soit ε un réel strictement positif. On considère la partie de $E \times E$ définie par

$$h^{-1}([\varepsilon,+\infty[) = \{(x,y) \in E \times E/d'(f(x),f(y)) \geq \varepsilon\}.$$

On suppose dans un premier temps que cette partie est non vide. Elle est fermée dans l'espace compact $E \times E$. Elle est donc compacte. On définit sur cette partie l'application continue g par

$$\begin{array}{rccc} g: & h^{-1}([\varepsilon,+\infty[) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x,y) & \longmapsto & d(x,y). \end{array}$$

L'application g est bornée et atteint ses bornes. La borne inférieure, que l'on note α, est strictement positive car, pour tout élément (x,y) de $h^{-1}([\varepsilon,+\infty[)$, on $d(x,y) > 0$. Ainsi,

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad d(x,y) < \alpha \Rightarrow d'(f(x),f(y)) < \varepsilon.$$

Si l'on suppose que l'ensemble $h^{-1}([\varepsilon, +\infty[)$ est vide alors, pour tout réel strictement positif α, la propriété précédente est vérifiée.
L'application f est ainsi uniformément continue sur E. ♣

Corollaire 5.15 *Une application définie et continue sur un segment, à valeurs dans un espace métrique, est uniformément continue.*

Exercice 5.1 Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue et périodique, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Solution. Considérons T une période de l'application f. Nous savons, d'après la proposition 5.14, que la restriction de f au segment $[-T, 2T]$ est une application uniformément continue.
Fixons un réel strictement positif ε.

$$\exists \alpha > 0, \forall (x,y) \in [-T, 2T]^2, \quad |x - y| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Notons $\alpha' = \min(\alpha, T)$. Considérons deux réels x et y vérifiant

$$|x - y| < \alpha'.$$

En notant E, la fonction partie entière,

$$E\left(\frac{x}{T}\right) \leq \frac{x}{T} < E\left(\frac{x}{T}\right) + 1,$$

d'où,

$$0 \leq x - T.E\left(\frac{x}{T}\right) < T.$$

En remarquant que $y - T.E\left(\frac{x}{T}\right) = y - x + x - T.E\left(\frac{x}{T}\right)$, on obtient,

$$-T \leq -\alpha' < y - T.E\left(\frac{x}{T}\right) < \alpha' + T \leq 2T.$$

Sachant que

$$|(x - TE\left(\frac{x}{T}\right)) - (y - TE\left(\frac{x}{T}\right)) = |x - y| < \alpha' \leq \alpha,$$

on obtient,

$$|f(x) - f(y)| = \left|f\left(\left(x - TE\left(\frac{x}{T}\right)\right) - f\left(y - TE\left(\frac{x}{T}\right)\right)\right)\right| < \varepsilon.$$

L'application f est ainsi uniformément continue sur $\mathbb{R}$. ♣

5.6 Applications

1. **Théorème 5.16** *Toutes les normes définies sur un même espace vectoriel réel de dimension finie sont équivalentes.*

   Ce théorème est démontré page 164.

2. **Proposition 5.17** *Une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est convergente si et seulement si elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.*

   Pour la preuve, on pourra voir la proposition 7.10 page 73 et la remarque 7.2.
   Par contraposée, on obtient :

   Proposition 5.18 *Une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ est divergente si et seulement si elle vérifie l'une des deux conditions suivantes :*
   elle est non bornée,
   elle est bornée et admet au moins deux valeurs d'adhérence.

3. **Théorème 5.19** *(D'Alembert Gauss) Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

Chapitre 6

Espaces connexes

6.1 Définition

Définition : Soit (E,d) un espace métrique. On dit que (E,d) est connexe si les seules parties, à la fois ouvertes et fermées, sont $\emptyset$ et E.

Proposition 6.1 *Un espace métrique (E,d) est connexe si et seulement si il n'existe pas de partition de E en deux ouverts.*

6.2 Connexité et continuité

Proposition 6.2 *On considère (E,d) et (E',d') deux espaces métriques. Si E est connexe et f est une application continue de E vers E', alors $f(E)$ est connexe.*

Preuve. Soit θ un ouvert-fermé de $f(E)$. D'après la proposition 3.8, page 37, $f^{-1}(\theta)$ est un ouvert-fermé de E. D'où

$$f^{-1}(\theta) = \emptyset \quad \text{ou} \quad f^{-1}(\theta) = E.$$

Donc

$$\theta = \emptyset \quad \text{ou} \quad \theta = f(E).$$

$f(E)$ est connexe. ♣

6.3 Une caractérisation des connexes, applications

On considère l'ensemble $\{0,1\}$ muni de la distance usuelle. Nous remarquons que toute partie de cet ensemble est ouverte et fermée. C'est le plus simple espace métrique non connexe. Il est un outil précieux pour étudier la connexité d'un espace métrique.

Proposition 6.3 *Un espace métrique (E,d) est connexe si et seulement si toute application continue $f : E \to \{0,1\}$ est constante.*

Preuve. Supposons E connexe. Soit f une application continue. $f(E)$ étant connexe et $\{0;1\}$ ne l'étant pas, nous avons

$$f(E) = \{0\} \quad \text{ou} \quad f(E) = \{1\}.$$

L'application f est donc constante.
Supposons E non connexe. Il existe θ_0, θ_1 deux ouverts de E, non vides, tels que

$$\theta_0 \cup \theta_1 = E \quad \text{et} \quad \theta_0 \cap \theta_1 = \emptyset.$$

Considérons l'application f définie sur E par

$$\begin{cases} \forall x \in \theta_0, & f(x) = 0, \\ \forall x \in \theta_1, & f(x) = 1. \end{cases}$$

L'image réciproque par f de tout ouvert est un ouvert. En effet,

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad f^{-1}(\{0\}) = \theta_0, \quad f^{-1}(\{1\}) = \theta_1, \quad f^{-1}(\{0;1\}) = E.$$

Cette application f est continue et non constante. ♣

Proposition 6.4 *Soit A une partie connexe d'un espace métrique (E,d). Si une partie B de E vérifie $A \subset B \subset \overline{A}$, alors B est connexe.*

Preuve. Soit f une application continue sur B à valeurs dans $\{0,1\}$. La restriction de f à A est continue donc constante sur A. Il existe un élément $c \in \{0,1\}$ tel que pour tout $a \in A$, $f(a) = c$. Si b appartient à B donc à l'adhérence de A, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A convergente vers b. f étant continue, on obtient $f(b) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = c$. L'application f est constante sur B. On en déduit que B est un connexe de E. ♣

Proposition 6.5 *Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de connexes d'un espace métrique (E,d) telle que*

$$\exists i_0 \in I, \forall i \in I, \quad C_i \cap C_{i_0} \neq \emptyset.$$

Alors $\cup_{i\in I} C_i$ est connexe.

Preuve. Considérons une application f définie et continue sur $\cup_{i\in I} C_i$ à valeurs dans $\{0,1\}$. Soit i élément de I. La restriction de f au connexe C_i est continue donc constante. Notons a_i, la valeur de cette constante. Choisissons x_i élément de $C_i \cap C_{i_0}$. Nous avons,

$$f(x_i) = a_i = a_{i_0}.$$

Donc
$$\forall x \in C_i, \quad f(x) = a_{i_0}.$$
On en déduit :
$$\forall x \in \cup_{i\in I} C_i, \quad f(x) = a_{i_0}.$$
L'application f est constante et $\cup_{i\in I} C_i$ est connexe. ♣

6.4 Les parties connexes de $\mathbb{R}$

Commençons par donner la définition d'un intervalle.

Définition : Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle si
$$\forall (x,y) \in I^2, \forall z \in \mathbb{R}, \quad x < z < y \Rightarrow z \in I.$$

Théorème 6.6 *Les parties connexes de* $\mathbb{R}$ *sont les intervalles de* $\mathbb{R}$.

Preuve. Soit C une partie de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que C ne soit pas un intervalle de $\mathbb{R}$. Il existe $(a,b) \in C^2$ et $x \notin C$ vérifiant
$$a < x < b.$$
Alors $(]-\infty, x[\cap C)$ et $(]x, +\infty[\cap C)$ sont deux ouverts non vides de C formant une partition de C. C n'est donc pas connexe.
2. On suppose que C soit un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une application continue sur C à valeurs dans $\{0,1\}$. Soient a et b deux éléments de C vérifiant $a < b$. Montrons que $f(a) = f(b)$. On note
$$A = \{t \in [a,b] / f(t) = f(a)\}.$$
A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée par b. Sa borne supérieure t_0 est un réel appartenant à $[a,b]$, donc à C. En tant que borne supérieure, t_0 est limite d'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A. Grâce à la continuité de f, on obtient $f(t_0) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) = f(a)$. Supposons $t_0 < b$. La suite $(t_0 + \frac{1}{2^n})$ converge vers t_0. Il existe un rang n_0 vérifiant
$$\forall n \geq n_0, \quad \left(t_0 + \frac{1}{2^n}\right) \in [a,b] \setminus A$$
donc
$$\forall n \geq n_0, \quad \left| f\left(t_0 + \frac{1}{2^n}\right) - f(t_0)\right| = 1.$$
Ceci est impossible puisque f est continue en t_0. Donc $t_0 = b$ et $f(b) = f(a)$. L'application f est constante et C est connexe.

♣

6.5 Fonctions continues sur un intervalle

Définition : Soient I un intervalle réel et f une application définie I, à valeurs réelles. On dit que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires si, pour tout intervalle J *inclus dans* I, $f(J)$ est un intervalle.

Remarque 6.1 *La propriété « $f(I)$ est un intervalle » est plus faible que la propriété des valeurs intermédiaires. En voici un exemple : On considère l'application f définie sur le segment* $[0,4]$ *par*

$$\begin{cases} \forall x \in [0,2], & f(x) = 3x, \\ \forall x \in]2,4], & f(x) = -x+4. \end{cases}$$

Nous avons

$$f([0,4]) = [0,6] \cup [0,2] = [0,6].$$

L'image par l'application f de l'intervalle $[0,4]$ *est l'intervalle* $[0,6]$. *En revanche, l'image par f de l'intervalle* $[1,4]$ *n'est pas un intervalle. En effet,*

$$f([1,4]) = [3,6] \cup [0,2[.$$

Théorème 6.7 *Soient I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue sur I à valeurs réelles. Alors l'application f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

Preuve. Soit J un intervalle inclus dans I. La restriction de l'application f à l'intervalle J est continue. D'après la proposition précédente, $f(J)$ est un intervalle. On en déduit que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires. ♣

6.6 Connexité par arcs

Définition : Soit (E,d) un espace métrique. On appelle chemin de E toute application continue $\gamma : [0,1] \to (E,d)$. L'image $\gamma([0,1])$ du chemin s'appelle un arc, $\gamma(0)$ l'origine, $\gamma(1)$ son extrémité.

Définition : Soit (E,d) un espace métrique. On dit que E est connexe par arcs si pour tout $(a,b) \in E^2$, il existe un arc inclus dans E d'origine a et d'extrémité b.

Exemple : Toute partie convexe non vide d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

Théorème 6.8 *Un espace connexe par arcs est connexe.*

Preuve. On considère (E, d) un espace métrique connexe par arcs. Considérons f une application continue de E vers $\{0,1\}$. Soient a et b deux éléments de E. Il existe γ un chemin de E vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. L'application $f \circ \gamma$ est une application continue de l'intervalle $[0;1]$ vers $\{0,1\}$. Cette application est constante. Donc,

$$f(b) = f(\gamma(1)) = f(\gamma(0)) = f(a).$$

On en déduit que f est constante et que E est connexe. ♣

6.6.1 Applications

Proposition 6.9 *Soit f une application à valeurs réelles, définie et continue sur un intervalle I. Notons I' l'intervalle image. Alors f réalise une bijection de I sur I' si et seulement si l'application f est strictement monotone.*

Preuve. Remarquons que f réalise une bijection de I sur I' si et seulement si elle est injective.
Si l'application f est strictement monotone, elle est injective.
Supposons f injective. Considérons T_I la partie de I^2 définie par

$$T_I = \{(x, y) \in I^2 / x < y\}.$$

T_I est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ donc connexe. Considérons l'application g définie sur T_I par

$$\forall (x, y) \in T_I, \quad g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Cette application est continue sur T_I, donc $g(T_I)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle. La fonction f étant injective, cet intervalle ne contient pas 0. Nous avons alors deux cas

- Soit $g(T)$ est inclus dans $\mathbb{R}^{+*}$, alors l'application est strictement croissante.
- Soit $g(T)$ est inclus dans $\mathbb{R}^{-*}$, alors l'application est strictement décroissante.

♣

Proposition 6.10 *(de Darboux) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Alors l'application f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.*

Preuve. Soit J un intervalle inclus dans I. Considérons T_J la partie de J^2 définie par

$$T_J = \{(x, y) \in J^2 / x < y\}.$$

T_J est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ donc connexe. Considérons l'application g définie sur T_J par

$$\forall (x, y) \in T_J, \quad g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Cette application est continue sur T_J, donc $g(T_J)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$. Montrons que

$$g(T_J) \subset f'(J) \subset \overline{g(T_J)}.$$

Soit (x, y) un élément de T_J. On remarque, en utilisant le théorème des accroissements finis, que le réel

$$g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

appartient à $f'(J)$. On obtient

$$g(T_J) \subset f'(J).$$

Soit x un élément de J. Considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $J \setminus \{x\}$ convergente vers x. D'après la proposition 3.5, page 35, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = f'(x).$$

Le réel $f'(x)$ appartient donc à l'adhérence de $g(T_J)$. Ainsi,

$$f'(J) \subset \overline{g(T_J)}.$$

D'après la proposition 6.4, page 60, $f'(J)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$ donc un intervalle. ♣

Exercice 6.1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée non continue en 0.
2. En déduire qu'il existe des fonctions définies sur un intervalle, non continues et vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires.

Solution.

1. L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

   et

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

   L'application f' est discontinue en 0 car $\lim_{n\to+\infty} f'(\frac{1}{2\pi n}) = -1$.
2. L'application f' est une dérivée, donc vérifie la propriété des valeurs intermédiaires et est discontinue en 0.

♣

La proposition suivante permet de répondre à la question : « Que faut-il à une application vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires pour être continue ? »

Proposition 6.11 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. f est continue sur I si et seulement si :*

1. *f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires,*
2. *pour tout réel y, $f^{-1}(\{y\})$ est un fermé de I.*

Preuve. Si f est une application continue, les assertions 1 et 2 (voir proposition 3.8, page 37) sont vérifiées.
Considérons maintenant une application f définie sur un intervalle I, vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires et discontinue en un point x élément de I. Il existe un réel ε vérifiant

$$\forall \alpha > 0, \exists y \in I / |y - x| < \alpha \quad \text{et} \quad |f(y) - f(x)| > \varepsilon.$$

On peut ainsi constuire une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |y_n - x| < \frac{1}{n+1}, \quad |f(y_n) - f(x)| > \varepsilon.$$

Soit

$$\mathbb{N}_1 = \{n \in \mathbb{N} / f(y_n) > f(x)\}, \quad \mathbb{N}_2 = \{n \in \mathbb{N} / f(y_n) < f(x)\}.$$

Nous avons $\mathbb{N}_1 \cup \mathbb{N}_2 = \mathbb{N}$. Donc soit $\mathbb{N}_1$, soit $\mathbb{N}_2$, est une partie de $\mathbb{N}$ de cardinal infini. Supposons, par exemple, que $\mathbb{N}_1$ le soit. Il existe alors $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ suite extraite de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |y_{\varphi(n)} - x| < \frac{1}{n+1}, \quad f(y_{\varphi(n)}) - f(x) > \varepsilon.$$

L'application f vérifiant la propriété des valeurs intermédiaires, choisissons pour tout entier naturel n, un réel z_n compris entre x et $y_{\varphi(n)}$ vérifiant

$$f(z_n) = f(x) + \varepsilon.$$

L'ensemble

$$A = f^{-1}(f(x) + \varepsilon)$$

n'est pas un fermé car la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A est convergente vers x n'appartenant pas à A. Ce qui termine la preuve. ♣

Cette proposition nous permet de démontrer le résultat suivant :

Proposition 6.12 *On considère un intervalle I et une application f définie sur I et à valeurs réelles. Si*

1. *$f(I)$ est un intervalle,*
2. *f est strictement monotone,*

alors f est continue sur I.

Preuve. Pour montrer que l'application f est continue sur I, utilisons la proposition 6.11. Supposons, sans perdre de généralité, f strictement croissante.

1. Soit J un intervalle inclus dans I. On considère a et b deux éléments de J vérifiant $a < b$. Considérons un réel λ vérifiant
$$f(a) < \lambda < f(b).$$
L'ensemble $f(I)$ étant un intervalle, le réel λ appartient à celui-ci. On en déduit qu'il existe un élément c de I vérifiant
$$f(c) = \lambda.$$
L'application f étant strictement croissante, nous obtenons,
$$a < c < b.$$
On en déduit que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires.
2. Soit y un élément de $f(I)$. L'application f étant strictement monotone, elle est injective. L'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est ainsi un singleton donc un fermé de I.

On déduit, d'après la proposition 6.11, que l'application f est continue sur I. ♣

6.7 Homéomorphismes d'intervalles

Proposition 6.13 *Soit I un intervalle et $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une application continue sur I. Si f est strictement monotone, elle réalise un homéomorphisme entre I et $f(I)$.*

Preuve. Ceci est la conséquence des propositions 6.9 et 6.12 ♣

Exemples :

1. Soit n un entier naturel non nul. L'application
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^n, \end{aligned}$$
est continue, strictement croissante, vérifiant $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ dont la réciproque est continue sur $\mathbb{R}^+$. Cette réciproque est appelée fonction racine $n^{ième}$ et notée
$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt[n]{x}. \end{aligned}$$
2. La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Elle induit une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. Sa réciproque est une fonction continue sur $[-1, 1]$ strictement croissante et appelée « Arc sinus » et notée arcsin.

3. La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$. Elle induit une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$. Sa réciproque est une fonction continue sur $[-1, 1]$ strictement décroissante et appelée « Arc cosinus » et notée arccos.
4. La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Elle induit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Sa réciproque est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante, appelée « Arc tangente » et notée arctan.
5. On appelle « cosinus hyperbolique » et on note ch l'application définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{array}{rccc} \mathrm{ch}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & [1, +\infty[\\ & x & \longmapsto & \frac{e^x+e^{-x}}{2} \end{array}$$
Cette application est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$. Sa restriction à cet intervalle réalise une bijection de l'intervalle $\mathbb{R}^+$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Sa réciproque est une application continue définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ à valeurs sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$. Elle est appelée « Argument cosinus hyperbolique » et notée $\arg\mathrm{ch}$.
6. On appelle « sinus hyperbolique » et on note sh l'application définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{array}{rccc} \mathrm{sh}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{e^x-e^{-x}}{2} \end{array}$$
Cette application est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même. Sa réciproque est une application continue définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Elle est appelée « Argument sinus hyperbolique » et notée $\arg\mathrm{sh}$.

6.8 Composantes connexes

Théorème-définition 6.14 *Soit (E, d) un espace métrique. On considère sur E la relation*
$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \quad (\exists C \text{ connexe de } E \text{ tel que } x \in C, \quad y \in C).$$
Cette relation est une relation d'équivalence. Une classe d'équivalence est appelée composante connexe.

Preuve.

1. Pour tout x élément de E, $\{x\}$ est connexe et $x\mathcal{R}x$. La relation $\mathcal{R}$ est réflexive.
2. $\forall (x, y) \in E^2, \quad x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$. La relation $\mathcal{R}$ est symétrique.
3. On considère x, y et z trois éléments de E vérifiant $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$. Il existe un connexe C contenant x et y et un connexe C' contenant y et z. $C \cup C'$ est l'union de deux connexes d'intersection non vide. Il est donc connexe. x et z lui appartiennent. Ainsi, $x\mathcal{R}z$. La relation $\mathcal{R}$ est transitive.

♣

Proposition 6.15 *Une composante connexe est un connexe.*

Preuve. La relation $\mathcal{R}$ est donc une relation d'équivalence. Soit x un élément de E. La classe d'équivalence de x est l'union de tous les connexes contenant x. Il est évident que l'intersection de chacun de ces connexes avec le connexe $\{x\}$ est non vide. D'après la proposition 6.5, cette union de connexes est un connexe. Une classe d'équivalence est donc connexe. ♣

Proposition 6.16 *Un espace métrique est connexe si et seulement s'il n'a qu'une seule composante connexe.*

Preuve. On considère un espace métrique (E, d).

1. Supposons que E n'ait qu'une seule composante connexe. Donc E est une composante connexe. Nous savons qu'une composante connexe est un connexe. Donc E est connexe.
2. Supposons que E ait au moins deux composantes connexes. Considérons a et b deux éléments de E n'appartenant pas à la même composante. Ils ne sont pas en relation et il n'existe aucun connexe les contenant. Donc E n'est pas un connexe.

♣

Remarque 6.2 *On peut également définir les composantes connexes par arcs. Il suffit de reprendre toute la section en remplaçant le mot « connexe » par « connexe par arcs ».*

Chapitre 7

Suites réelles

7.1 Définition, structure

Définition : On appelle suite réelle, une application définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est souvent notée $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Définition : Dans l'ensemble E des suites réelles, on définit

1. Deux lois de compositions internes :
   la somme de deux suites $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $U + V = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
   le produit de deux suites $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $U \times V = (u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

   Une loi de composition externe
   produit de la suite U par le réel λ la suite $\lambda.U = (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Proposition 7.1 *Le triplet $(E, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
Le quadruplet $(E, +, \times, .)$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$.

7.2 Convergence

Théorème-définition 7.2 *On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l si*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}/\forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| < \varepsilon.$$

Ce réel est unique. On l'appelle limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l.$$

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Rappel :

Définition : On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \quad \forall p \geq n_0, \quad |u_n - u_p| < \varepsilon.$$

D'après le théorème admis 4.2, page 42, nous avons la proposition :

Proposition 7.3 *Une suite réelle est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Proposition 7.4 *Une suite réelle convergente est bornée.*

Remarque 7.1 *Le théorème-définition 7.2 et la proposition 7.4 ne sont que les cas particulier du théorème-définition 2.1, page 17 et de la proposition 2.2, page 18, appliqués au cas des suites réelles.*

Définition : Une suite non convergente est divergente.

Exercice 7.1 Soit $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
Montrer que $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ converge si et seulement si elle est stationnaire.

Solution. On considère une suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et convergente donc de Cauchy. Il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n - u_{n_0}| < \frac{1}{2}.$$

Tous les éléments de la suite étants des nombres entiers, on obtient

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n = u_{n_0}.$$

La suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est stationnaire.
La réciproque est évidente. ♣

Proposition 7.5 *On considère deux suites $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes respectivement vers les réels l et l'. Alors les suites $U + V$ et $U \times V$ sont convergentes vers, respectivement, les réels $l + l'$ et $l \times l'$. Si $l' \neq 0$, la suite $\frac{U}{V}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\frac{l}{l'}$.*

Preuve. On considère deux suites $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes respectivement vers les réels l et l'. Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_1, \quad |u_n - l| < \varepsilon,$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_2, \quad |v_n - l'| < \varepsilon.$$

Considérons le naturel $n_0 = \max(n_1, n_2)$.

1. $$\forall n \geq n_0, \quad |u_n + v_n - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| < 2\varepsilon.$$

   La suite $U + V$ est convergente vers le réel $l + l'$

2. La suite V est convergente donc bornée. Il existe un réel strictement positif M vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| \leq M.$$
   Donc,
$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n v_n - ll'| \leq |u_n v_n - l v_n| + |l v_n - ll'|$$
$$\leq |v_n||u_n - l| + |l||v_n - l'| \leq (M + |l|)\varepsilon.$$
   Le réel $(M + |l|)$ étant une constante strictement positive, on en déduit que la suite $U \times V$ est convergente vers ll'.

3. Nous supposons désormais que $l' \neq 0$. La proposition 7.6 nous permet de dire que, à partir d'un certain rang, les éléments de la suite V sont non nuls, donc la suite $\frac{U}{V}$ est définie à partir de ce rang. L'application définie sur $\mathbb{R}^*$, qui à x associe $\frac{1}{x}$, est continue sur son ensemble de définition et en particulier en l'. La suite $\frac{1}{V}$ est donc convergente vers $\frac{1}{l'}$ (voir proposition 3.4, page 34). En utilisant la propriété précédente sur le produit de deux suites, on en déduit que la suite $\frac{U}{V}$ est convergente vers $\frac{l}{l'}$.

♣

Proposition 7.6 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers un réel l. Alors,*

1. $l > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad u_n > 0.$

2. $l < 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \quad u_n < 0.$

Les contraposées sont les suivantes

Proposition 7.7 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers un réel l. Alors,*

1. $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \quad u_n \geq 0 \Rightarrow l \geq 0.$

2. $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \quad u_n \leq 0 \Rightarrow l \leq 0.$

Preuve. Preuve de la proposition 7.6

1. Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $l > 0$. On considère le réel strictement positif $\frac{l}{2}$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| < \frac{l}{2},$$

c'est-à-dire

$$\forall n \geq n_0, \quad -\frac{l}{2} + l < u_n < \frac{l}{2} + l.$$

En particulier,

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n > \frac{l}{2} > 0.$$

2. Il suffit de travailler avec la suite $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et appliquer la propriété précédente.

♣

Corollaire 7.8 *On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes respectivement vers les réels l et l'.*

1. *Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ alors $l \leq l'$.*
2. *Si M est un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $l \leq M$.*
3. *Si m est un minorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $l \geq m$.*

Preuve. Il suffit d'utiliser les propositions précédentes avec les suites respectives

1. $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
2. $(M - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
3. $(u_n - m)_{n\in\mathbb{N}}$.

♣

Proposition 7.9 *On considère $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$, $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ et $(w_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ trois suites vérifiant*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Si les suites $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ et $(w_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ convergent vers un même réel l, alors la suite $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente et converge vers l.

Preuve. Soit ε un réel strictement positif. Il existe un entier naturel n_0 vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad l - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq l + \varepsilon,$$

donc

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

La suite $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente vers l. ♣

7.2.1 Caractérisation des suites réelles convergentes

Proposition 7.10 *Une suite* réelle $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ *est convergente si et seulement si elle est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence.*

Preuve. Nous savons que, dans tout espace métrique, une suite convergente est bornée et n'a qu'une seule valeur d'adhérence (Voir la proposition 2.2, page 18 et la proposition 2.12, page 25). Montrons que la réciproque est vraie si l'on se place dans $\mathbb{R}$. On considère une suite réelle $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ bornée, n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence notée l. Choisissons un réel positif M vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M.$$

Considérons ε un réel strictement positif et le sous-ensemble A_ε de $\mathbb{N}$ défini par

$$A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N}, \quad u_n \notin]l-\varepsilon, l+\varepsilon[\}.$$

Supposons que A_ε soit un ensemble infini. On peut alors extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{\varphi(n)} \notin]l-\varepsilon, l+\varepsilon[.$$

La suite $(u_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ est donc une suite dont les éléments appartiennent à

$$F = [-M, M] \cap (]l-\varepsilon, l+\varepsilon[)^c,$$

partie fermée bornée de $\mathbb{R}$, donc compacte. On peut en extraire une sous-suite $(u_{\varphi\circ\varphi'(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ convergente vers un nombre réel noté l'. Ce réel l' appartient à F car c'est un fermé de $\mathbb{R}$. Donc $|l-l'| \geq \varepsilon$ et nous obtenons deux valeurs d'adhérence distinctes, ce qui est impossible. L'ensemble A_ε est donc fini. Soit n_0 un majorant strict de cet ensemble. On obtient

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| < \varepsilon.$$

La suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est donc convergente vers l. ♣

Remarque 7.2 *La proposition précédente n'est pas toujours vérifiée sur un espace métrique quelconque. On pourra trouver un contre-exemple sur un espace vectoriel de dimension infinie dans l'exercice 12.1, page 165. Elle est vraie sur tout espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$. La preuve est identique : Il suffit de remplacer l'intervalle ouvert $]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$ par la boule ouverte de centre l et de rayon ε et de remplacer la valeur absolue par une norme.*

Par contraposée de la proposition précédente, nous obtenons

Proposition 7.11 *Une suite* réelle *est divergente si et seulement si elle vérifie l'une des deux conditions suivantes :*
elle est non bornée,
elle est bornée et admet au moins deux valeurs d'adhérence.

7.3 Suites monotones, suites adjacentes

Définition : On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est
croissante si :
$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} \geq u_n,$$
décroissante si :
$$\forall n \geq 0, \quad u_{n+1} \leq u_n,$$
monotone si elle est croissante ou décroissante.

Proposition 7.12 *Une suite réelle*
croissante et majorée est convergente vers $M = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$,
décroissante et minorée est convergente vers $m = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Preuve. Considérons une suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ croissante et majorée. Notons M sa borne supérieure. Soit ε un réel strictement positif. Il existe un naturel n_0 tel que
$$M - \varepsilon \leq u_{n_0}.$$
La suite étant croissante et M étant un majorant de la suite
$$\forall n \geq n_0, \quad M - \varepsilon \leq u_{n_0} \leq u_n \leq M.$$
Donc
$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n - M| \leq \varepsilon.$$
La suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente vers M.
On procède de même pour les suites décroissantes et minorées. ♣

Définition : Deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre est décroissante et si la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

Proposition 7.13 *Deux suites adjacentes sont convergentes vers une limite commune notée* l, *avec*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq l \leq v_p,$$
si la suite croissante est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Preuve. Considérons deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes. Supposons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(-v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes, donc la suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. Cette dernière est par hypothèse convergente vers 0. D'après la proposition précédente,
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(u_n - v_n) = \lim_{n\in\mathbb{N}}(u_n - v_n) = 0.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

En utilisant la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0 et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0 : elles sont toutes deux convergentes. Et,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

On obtient l'inégalité indiquée dans la proposition grâce à la proposition 7.12 ♣

Exercice 7.2 On pose, pour tout $n \geq 1$, $a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $a_n \leq 2-\frac{1}{n}$. (On pourra minorer, sur des segments judicieusement choisis, l'intégrale de la fonction $t \to \frac{1}{t^2}$.)
2. En déduire que la suite $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ converge.

Solution.

1. La fonction $t \to \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc

$$\forall k \geq 2, \quad \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^2} = \frac{1}{k^2}.$$

   D'où,

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, \quad a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} \\ &= 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t^2} = 2 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

   Pour $n = 1$, nous avons égalité.
2. La suite $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est croissante, majorée par 2 donc convergente.

♣

Exercice 7.3 On définit deux suites $(u_n)_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ et $(v_n)_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}.$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes. On note l leur limite commune.

2. Prouver que l n'est pas rationnel. (On pourra supposer $l = \frac{p}{q}$ et exploiter l'encadrement $u_q < l < v_q$.)
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{n!} e^{1-x} dx$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$.

4. En déduire que
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = e,$$
et que e est un nombre irrationnel.

Solution.

1.
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}.$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$$
$$= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!}.$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n - u_n = \frac{1}{n!},$$
donc la suite $(v_n - u_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$ est convergente vers 0.
On en déduit que les suites $(u_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$ et $(v_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$ sont adjacentes. Elles sont donc convergentes vers une limite notée l.

2. Supposons que la limite commune l soit un nombre rationnel. Il existe deux entiers strictement positifs vérifiant $l = \frac{p}{q}$. Les suites $(u_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$ et $(v_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$ étant strictement monotones, on a
$$u_q < l < v_q.$$
On en déduit
$$\left(\sum_{k=0}^{q} \frac{qq!}{k!}\right) < pq! < \left(\sum_{k=0}^{q} \frac{qq!}{k!}\right) + 1.$$
On remarque que ces trois nombres sont trois entiers naturels dont le plus petit et le plus grand sont consécutifs. Ceci est impossible, donc l n'est pas un nombre rationnel.

3. Le résultat est évident à l'aide d'une intégration par partie.

4.
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + \sum_{k=1}^{n} (I_{k-1} - I_k) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} I_k - \sum_{k=1}^{n} I_k = 1 + I_0 - I_n.$$

La suite $(I_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente vers 0. En effet,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}.$$

D'où

$$l = \lim_{n\to+\infty} u_n = 1 + I_0 = 1 - 1 + e = e.$$

Ceci prouve que e est un nombre irrationnel.

♣

7.4 Limite supérieure, limite inférieure

Les définitions de la limite supérieure et limite inférieure d'une suite bornée sont données sous forme d'un exercice.

Exercice 7.4 Soit $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \sup_{p\geq n} u_p \quad \text{et} \quad w_n = \inf_{p\geq n} u_p.$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est décroissante minorée et la suite $(w_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ croissante majorée. On en déduit que ces deux suites sont convergentes et on note
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} w_n = \liminf_{n\to+\infty} u_n$$
2. Montrer que ces deux limites sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$. (On pourra utiliser la proposition 2.13, page 26.)
3. Montrer que, pour toute valeur d'adhérence l de la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$, on a
$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \leq l \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n.$$
4. En déduire que la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ converge si et seulement si
$$\liminf_{n\to+\infty} u_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n.$$

Solution.

1. Considérons, pour tout entier naturel n, l'ensemble A_n défini par
$$A_n = \{u_p; p \geq n\} = \{u_n, u_{n+1}, u_{n+2} \cdots\}.$$
La suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est bornée : Considérons M un majorant de cette suite et m un minorant. Alors,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq \inf A_n \leq \sup A_n \leq M,$$

c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leq w_n \leq v_n \leq M.$$

Les suites $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ et $(w_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ sont bornées.
Soit n un entier naturel. On a,

$$A_n = A_{n+1} \cup \{u_n\},$$

donc

$$A_{n+1} \subset A_n.$$

La borne supérieure de A_n est un majorant de A_n, donc de A_{n+1}. La borne supérieure étant le plus petit des majorants,

$$v_{n+1} = \sup A_{n+1} \leq \sup A_n = v_n.$$

La suite $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est décroissante, minorée donc convergente.
De même, $w_n = \inf A_n$, minorant de A_n est également minorant de A_{n+1}. La borne inférieure étant le plus grand des minorants, on obtient,

$$w_{n+1} = \inf A_{n+1} \geq \inf A_n = w_n.$$

La suite $(w_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est croissante, majorée donc convergente.

2. Pour tout entier naturel q, v_q et w_q sont les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble A_q. D'après le corollaire 2.9, page 22,

$$v_q \in \overline{A_q} \quad \text{et} \quad w_q \in \overline{A_q}.$$

Soit p un entier naturel.

$$\forall q \geq p, \quad A_q \subset A_p,$$

d'où,

$$\forall q \geq p, \quad \overline{A_q} \subset \overline{A_p}.$$

On en déduit que $(v_q)_{q\geq p}$ et $(w_q)_{q\geq p}$ sont des suites d'éléments de $\overline{A_p}$. Cet ensemble étant un fermé de $\mathbb{R}$, il contient les limites des deux suites, c'est-à-dire $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ et $\liminf_{n\to+\infty} u_n$. Ceci étant vrai pour tout entier naturel p, on obtient

$$\limsup_{n\to+\infty} u_n \in \cap_{p\in\mathbb{N}}\overline{A_p}$$

et

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \in \cap_{p\in\mathbb{N}}\overline{A_p}.$$

D'après la proposition 2.13, page 26, $\limsup_{n\to+\infty} u_n$ et $\liminf_{n\to+\infty} u_n$ sont des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$.

3. Soit l une valeur d'adhérence de $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$. Il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ convergente vers l. On a,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{\varphi(n)} \leq u_{\varphi(n)} \leq v_{\varphi(n)}.$$

En passant à la limite,

$$\liminf_{n\to+\infty} u_n \leq l \leq \limsup_{n\to+\infty} u_n.$$

4. Si $(u_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ est une suite convergente, elle n'a qu'une seule valeur d'adhérence. D'où
$$\liminf_{n \to +\infty} u_n = \limsup_{n \to +\infty} u_n.$$
Réciproquement, supposons
$$\liminf_{n \to +\infty} u_n = \limsup_{n \to +\infty} u_n.$$
Toute valeur d'adhérence l vérifie
$$\liminf_{n \to +\infty} u_n \leq l \leq \limsup_{n \to +\infty} u_n.$$
La suite $(u_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ n'admet donc qu'une seule valeur d'adhérence. Elle est de plus bornée donc convergente. (Voir proposition 7.10. page 73.)

♣

7.5 Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$

Exercice 7.5 Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Le but de cet exercice est de montrer que G est, soit de la forme $a\mathbb{Z}$ où a est un réel, soit dense dans $\mathbb{R}$.

1. Étudier le cas $G = \{0\}$.
   On suppose désormais que $G \neq \{0\}$.
2. Vérifier que
$$(G \cap \mathbb{R}^{+*})$$
   est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. On note alors m sa borne inférieure.
3. On suppose m strictement positif. Montrer que m appartient à G puis que $G = m\mathbb{Z}$.
4. On suppose $m = 0$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

Solution.

1. $G = 0\mathbb{Z}$.
2. Soit g un élément non nul de G. On a
$$|g| \in (G \cap \mathbb{R}^{+*}).$$
   Donc $(G \cap \mathbb{R}^{+*})$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0. Notons m sa borne inférieure. Ce réel est supérieur ou égal à 0.
3. On suppose m réel strictement positif. Montrons qu'il appartient à G. Tout d'abord, remarquons que
$$\forall g \in G, \quad 0 \leq g < m \Rightarrow g = 0$$

et

$$\forall (g_1, g_2) \in G^2, \quad |g_1 - g_2| < m \Rightarrow g_1 = g_2.$$

D'après la proposition 2.7, page 21, il existe une suite $(g_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ d'éléments de G convergente vers m. Cette suite est une suite de Cauchy. On peut choisir un entier naturel n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |g_n - g_{n_0}| < m.$$

Donc

$$\forall n \geq n_0, \quad g_n = g_{n_0}.$$

La suite $(g_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est stationnaire à partir du rang n_0. On a,

$$g_{n_0} = \lim_{n\to+\infty} g_n = m.$$

Ceci prouve que m est élément de G. $m\mathbb{Z}$ est le sous-groupe additif de $(\mathbb{R}, +)$ engendré par m. Ainsi, $m\mathbb{Z} \subset G$.
Montrons réciproquement que $G \subset m\mathbb{Z}$. Soit g un élément de G. En notant $E(x)$ la partie entière du réel x, on a

$$E\left(\frac{g}{m}\right) \leq \frac{g}{m} < E\left(\frac{g}{m}\right) + 1,$$

donc

$$0 \leq g - mE\left(\frac{g}{m}\right) < m.$$

$g - mE\left(\frac{g}{m}\right)$ est un élément de G vérifiant la double inégalité ci-dessus. Il est donc nul. On obtient

$$g = mE\left(\frac{g}{m}\right).$$

Ce dernier élément appartient à $m\mathbb{Z}$. Ainsi,

$$G = m\mathbb{Z}.$$

4. On suppose désormais $m = 0$. Soit x un réel et ε un réel strictement positif. Il existe un élément g_ε de G vérifiant

$$0 < g_\varepsilon < \varepsilon.$$

Nous avons

$$E\left(\frac{x}{g_\varepsilon}\right) \leq \frac{x}{g_\varepsilon} < E\left(\frac{x}{g_\varepsilon}\right) + 1,$$

donc,

$$0 \leq x - E\left(\frac{x}{g_\varepsilon}\right) g_\varepsilon < g_\varepsilon < \varepsilon.$$

En remarquant que $E\left(\frac{x}{g_\varepsilon}\right) g_\varepsilon$ est un élément de G, on en déduit que G est dense dans $\mathbb{R}$.

♣

Exercice 7.6 Soit f une application définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, continue en 0 et admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes. Montrer que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Solution. Considérons G le sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ engendré par 1 et $\sqrt{2}$.

$$G = \{p + q\sqrt{2}/(p,q) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Supposons que G soit de la forme $a\mathbb{Z}$. Il existerait alors deux entiers non nuls k et k' vérifiant

$$1 = k.a \qquad \sqrt{2} = k'.a.$$

On aurait

$$\sqrt{2} = \frac{k'}{k} \in \mathbb{Q}.$$

Cela est impossible. Donc G est dense dans $\mathbb{R}$.
Considérons un réel x. Il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de G convergente vers x. La fonction f étant continue en 0, la suite $(f(x-g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, avec

$$\lim_{n\to+\infty} f(x-g_n) = f(0).$$

Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x-g_n) = f(x).$$

La suite $(f(x-g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante et égale à $f(x)$. On obtient $f(x) = f(0)$. L'application f est constante. ♣

7.6 Étude de la suite $\cos n\theta$ ($\theta \in \mathbb{R}$)

Exercice 7.7 Le but de cet exercice est la recherche de l'ensemble des réels θ pour lesquels la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$, définie par $u_n = \cos n\theta$, est convergente et de l'ensemble des réels θ pour lesquels la suite $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$, définie par $v_n = \sin n\theta$, est convergente.

1. (a) Écrire, pour tout entier n strictement positif, $(u_{n+1} - u_{n-1})$ en fonction de v_n.
   (b) Écrire, pour tout entier n strictement positif, $(v_{n+1} - v_{n-1})$ en fonction de u_n.
2. Conclure en discutant suivant les valeurs de $\sin\theta$.

Solution.

1. (a)
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - u_{n-1} = -2\sin n\theta \sin\theta = -2v_n \sin\theta,$$
   (b)
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_{n-1} = 2\cos n\theta \sin\theta = 2u_n \sin\theta.$$

2. (a) 1^{er} cas. $\sin\theta \neq 0$. Supposons que la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ soit convergente. Alors

$$\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_{n-1}) = 0.$$

Ce qui entraîne que la suite $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ converge vers 0. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}(v_{n+1}-v_{n-1}) = 0$$

puis

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

Et enfin,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(u_n^2+v_n^2\right) = 0.$$

Ce qui est impossible. On conclut que la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est divergente. Avec un raisonnement similaire, on montre que la suite $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est divergente.

(b) 2^{e} cas. $\sin\theta = 0$.

i. Si $\theta = 2k\pi$ où k est un entier, alors les suites $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ et $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ sont constantes et égales respectivement à 1 et 0.

ii. Si $\theta = (2k+1)\pi$ où k est un entier, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n \text{ et } v_n = 0.$$

La suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est divergente et la suite $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ convergente.

En conclusion, la suite $(\cos n\theta)_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente si et seulement si $\theta = 0$ à 2π près et la suite $(\sin n\theta)_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente si et seulement si $\theta = 0$ à π près.
♣

Exercice 7.8 L'objet de cet exercice est l'étude des valeurs d'adhérence de la suite définie par $u_n = \cos n\theta$, où θ est un réel fixé.

1. On suppose dans cette question $\frac{\theta}{\pi}$ rationnel. Montrer que la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est périodique. Que peut-on dire de l'ensemble de ses valeurs d'adhérence ? Pour quelles valeurs de θ la suite converge-t-elle ?
2. Comparer les ensembles suivants :

$$A = \{\cos n\theta / n \in \mathbb{N}\},$$

$$B = \{\cos(n\theta + 2p\pi) / n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}\}.$$

3. Vérifier que $G = \{n\theta + 2p\pi / n \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
On suppose désormais $\frac{\theta}{\pi}$ irrationnel.
4. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.
5. On considère pour tout entier naturel p, l'ensemble A_p défini par :

$$A_p = \{\cos n\theta / n \geq p\}.$$

(a) Montrer que A_0 puis que les ensembles A_p ($p \geq 0$) sont denses dans l'intervalle $[-1, 1]$.

(b) En déduire que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite est le segment $[-1, 1]$.

Solution.

1. On suppose que $\frac{\theta}{\pi}$ est rationnel. On pose $\frac{\theta}{\pi} = \frac{p}{q}$ avec $q > 0$. Alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2q} = u_n.$$
La suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est périodique. L'ensemble des valeurs d'adhérence est l'ensemble image de la suite. Elle est convergente si et seulement si elle est constante, c'est-à-dire si $\theta = 0$ à 2π près.

2. La fonction *cosinus* étant paire et 2π périodique, on a $A = B$.

3. Évident.

4. Supposons qu'il existe un réel m vérifiant $G = m\mathbb{Z}$. Il existe alors deux nombres entiers k et $k' \neq 0$ tels que
$$\theta = km, \quad 2\pi = k'm.$$
On obtient
$$\frac{\theta}{\pi} = \frac{2k}{k'} \in \mathbb{Q}.$$
Ceci est contraire à l'hypothèse. G n'est pas de la forme $m\mathbb{Z}$. Il est dense dans $\mathbb{R}$.

5. Pour tout entier naturel p, A_p est inclus dans le fermé $[-1, 1]$. Donc
$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \overline{A_p} \subset [-1, 1].$$
(a) On remarque que
$$A_0 = A = B = \cos(G).$$
Montrons que $[-1, 1] \subset \overline{A_0}$. Soit y un élément de $[-1, 1]$. Il existe un réel x vérifiant $y = \cos x$. G étant dense dans $\mathbb{R}$, il existe une suite $(g_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ d'éléments de G convergente vers x. La fonction *cosinus* est continue,
$$\lim_{n\to+\infty} (\cos g_n) = \cos x = y.$$
y appartient à $\overline{A_0}$. On en déduit que $\overline{A_0} = [-1, 1]$.
Montrons que la proposition
$$\mathcal{P}_p : '' \ \overline{A_p} = [-1, 1]'',$$
est vraie pour tout entier naturel p.

i. On vient de montrer que la proposition est vraie au rang 0.

ii. Soit p un entier naturel. Montrons

$$\mathcal{P}_p \Rightarrow \mathcal{P}_{p+1}.$$

Nous avons,

$$A_p \subset \overline{A_{p+1}} \cup \{\cos(p\theta)\}.$$

Cet ensemble étant un fermé, il contient l'adhérence de A_p. Ainsi,

$$[-1;1] \subset \overline{A_p} \subset \overline{A_{p+1}} \cup \{\cos(p\theta)\} \subset [-1;1].$$

On obtient

$$\overline{A_{p+1}} \cup \{\cos(p\theta)\} = [-1;1].$$

Puisque $[-1;1] \setminus \{\cos(p\theta)\}$ n'est pas un fermé, on a

$$\overline{A_{p+1}} = [-1;1].$$

On a ainsi montré que

$$\mathcal{P}_p \Rightarrow \mathcal{P}_{p+1}.$$

iii. On en déduit que la proposition $\mathcal{P}_p$ est vraie pour tout entier naturel p.

(b) En utilisant la proposition 2.13. page 26, l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est

$$\cap_{p=0}^{+\infty}\overline{A_p} = [-1;1].$$

♣

7.7 Moyennes de Cesaro

Exercice 7.9 On considère une suite réelle $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ et la suite $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La suite $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est appelée moyenne de Cesaro de la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$.

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ converge alors la suite $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ converge vers la même limite.
2. Montrer avec un contre-exemple que la réciproque est fausse.

Solution.

1. On note l la limite de la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$. On remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n - l = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - l).$$

Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0 \quad |u_n - l| < \varepsilon.$$

Donc,

$$\forall n \geq n_0,$$
$$|v_n - l| \leq \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - l)\right| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=n_0}^{n}|u_k - l| \leq \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - l)\right| + \varepsilon.$$

Le réel ε et l'entier n_0 étant fixés, la suite

$$n \to \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - l)\right|$$

est convergente vers 0. Donc

$$\exists n_1 \geq n_0, \forall n \geq n_1, \quad \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{n_0-1}(u_k - l)\right| < \varepsilon.$$

D'où,

$$\forall n \geq n_1, \quad |v_n - l| < 2\varepsilon.$$

La suite $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente vers l.

2. Nous avons vu, dans l'exercice 7.7, page 81 que si θ est un réel non nul (à 2π près), la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos(n\theta)$$

est divergente. Montrons que sa moyenne de Cesaro est convergente vers 0. Nous avons,

$$\forall n \in \mathbb{N},$$
$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) = \frac{1}{n+1}\Re\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}\right) = \frac{1}{n+1}\Re\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| \leq \frac{1}{n+1}\left|\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right| \leq \frac{1}{n+1}\left|\frac{2}{1-e^{i\theta}}\right|.$$

Cette suite est convergente vers 0.

♣

L'exercice suivant nous donne un exemple de suite bornée divergente dont la moyenne de Cesaro est également divergente.

Exercice 7.10 On considère la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ définie par :

$$u_n = (-1)^{E(\log_2 n)},$$

où $E(x)$ représente la partie entière de x. On considère la suite $(S_n)_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ des sommes partielles, définie pour $n \geq 1$ par,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

1. Montrer que la suite $(S_{2^{n+1}-1} - S_{2^n-1})_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ est géométrique.
2. En déduire la valeur de S_{2^n-1} pour tout entier strictement positif n.
   On considère la suite moyenne de Cesaro :

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

3. Montrer que la suite $(v_n)_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ a au moins deux valeurs d'adhérence. En déduire qu'elle est divergente.

Solution.

1.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_{2^{n+1}-1} - S_{2^n-1} &= \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} u_k \\ &= \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} (-1)^n \\ &= (-1)^n(2^{n+1} - 2^n) \\ &= (-2)^n.\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\forall n \geq 2, \quad S_{2^n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1}(S_{2^{k+1}-1} - S_{2^k-1}) + u_1 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}(-2)^k + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(-2)^k \\ &= \frac{1-(-2)^n}{3}.\end{aligned}$$

L'égalité est aussi vérifiée pour $n = 1$.

3. On remarque que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{(2^n-1)} = \frac{1}{2^n-1}.\frac{1-(-2)^n}{3} = \frac{2^n}{3(2^n-1)}.\left(\frac{1}{2^n} + (-1)^{n+1}\right).$$

On en déduit que les suites extraites $(v_{(2^{2n}-1)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_{(2^{2n+1}-1)})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent respectivement vers $\frac{-1}{3}$ et $\frac{1}{3}$. La suite $(v_n)_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ admet au moins deux valeurs d'adhérence. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente.

♣

7.8 Relations de comparaisons

Remarque 7.3 *La notion de comparaison de suites est importante et très utilisée en analyse, en particulier pour les séries. Cette section, placée en fin de chapitre, est d'une moindre utilité pour l'étude des suites et de leur convergence éventuelle. Seul le corollaire 7.21 peut être utile pour établir la convergence d'une suite vers un réel non nul. On peut noter, en outre, qu'une suite dominée ou négligeable devant une suite convergente vers 0 est également convergente vers 0.*

7.8.1 La relation $\mathcal{O}$

Définition : On dit que la suite $U = (u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est dominée par la suite $V = (v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ s'il existe un réel positif M et un entier positif n_0 tels que

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n| \leq M|v_n|.$$

Définition : On note $\mathcal{O}(V)$ l'ensemble des suites dominées par V.

Remarque 7.4 *Lorsqu'une suite U est dominée par une suite V, on pourra, par abus d'écriture, noter $U = \mathcal{O}(V)$ ou $u_n = \mathcal{O}(v_n)$.*

Exemples :

$V = \mathcal{O}(V)$.

$\mathcal{O}(1)$ est l'ensemble des suites bornées. On remarque, avec cet exemple, qu'une suite dominée par une suite convergente n'a aucune raison de converger.

$u_n = \mathcal{O}(\frac{1}{n})$ signifie que la suite (nu_n) est bornée.

7.8.2 La relation o

Définition : On dit que la suite $U = (u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est négligeable ou infiniment petite devant la suite $V = (v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \quad |u_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$

Définition : On note $o(V)$ l'ensemble des suites négligeables devant V.

Remarque 7.5 *Lorsqu'une suite U est négligeable devant une suite V, on pourra, par abus d'écriture, noter $U = o(V)$ ou $u_n = o(v_n)$.*

Exemple :
$o(1)$ est l'ensemble des suites convergentes vers 0.
$u_n = o(\frac{1}{n})$ signifie que la suite (nu_n) est convergente vers 0.

Proposition 7.14 *La suite $U = (u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est négligeable devant la suite $V = (v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ convergente vers 0 vérifiant,*

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_1, \quad u_n = a_n v_n.$$

Preuve. On suppose dans un premier temps que $u_n = o(v_n)$. On définit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \begin{cases} \frac{u_n}{v_n} \text{ si } v_n \neq 0, \\ 0 \text{ si } v_n = 0. \end{cases}$$

La suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ étant négligeable devant la suite $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \quad |u_n| \leq |v_n|.$$

Donc,

$$\forall n \geq n_1, \quad v_n = 0 \Rightarrow u_n = 0.$$

On obtient ainsi

$$\forall n \geq n_1, \quad u_n = a_n v_n.$$

Montrons que la suite $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente vers 0.
Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_\varepsilon, \quad |u_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$

Nous obtenons,

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad |a_n| \leq \varepsilon.$$

La suite $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est ainsi convergente vers 0.
La réciproque est évidente. ♣

Corollaire 7.15 *On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout n supérieur à n_0, on ait $v_n \neq 0$. Alors la suite $U = (u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est négligeable devant la suite $V = (v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

7.8.3 L'équivalence

Définition : On dit que la suite $U = (u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est équivalente à la suite $V = (v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ si $(U - V) = o(V)$. On note $U \sim V$.

De la proposition 7.14, découle la proposition suivante,

Proposition 7.16 *Une suite $U = (u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est équivalente à la suite $V = (v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ convergente vers 0 vérifiant,*

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_1, \quad u_n = v_n(1 + a_n).$$

On peut en déduire

Proposition 7.17 *Une suite $U = (u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est équivalente à la suite $V = (v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ si et seulement si il existe une suite $(\alpha_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ convergente vers 1 vérifiant,*

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_1, \quad u_n = \alpha_n v_n.$$

Corollaire 7.18 *La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.*

Corollaire 7.19 *Lorsque deux suites réelles sont équivalentes, si l'une est convergente, l'autre est aussi convergente vers la même limite.*

Proposition 7.20 *On suppose qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout n supérieur à n_0, on ait $v_n \neq 0$. Alors la suite $U = (u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est équivalente à la suite $V = (v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$

Corollaire 7.21 *Soit l un réel non nul. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers l si et seulement si*

$$u_n \sim l.$$

Remarque 7.6 *Attention ! La relation $\sim$ se manie avec précaution. En particulier, elle n'est pas compatible avec l'addition. Par exemple,*

$$n+2 \sim n+1, \quad -n \sim -n \text{ et pourtant } 2 \not\sim 1.$$

En revanche, $\sim$ est compatible avec le produit et la puissance : si $u_n \sim u'_n$ et si $v_n \sim v'_n$ alors $u_n v_n \sim u'_n v'_n$ et si les suites sont à termes strictement positifs $u_n^\alpha \sim {u'_n}^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
Elle n'est pas compatible avec la composition :

$$n \underset{+\infty}{\sim} n+1,$$

or

$$\exp n \underset{+\infty}{\not\sim} \exp(n+1).$$

Chapitre 8

Fonctions dérivables

8.1 Dérivation des fonctions vectorielles

Dans ce chapitre, on considère $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, I un intervalle ou un réunion finie d'intervalles tous non réduits à un point, t_0 un élément de I et f une application définie sur I à valeurs dans $\mathbb{E}$.

8.1.1 Définition

Définition : On dit que f est dérivable en t_0 si l'application

$$\frac{1}{h}.(f(t_0+h)-f(t_0))$$

admet une limite lorsque le réel h tend vers 0. Cette limite est appelée vecteur dérivé (ou nombre dérivé si $\mathbb{E}=\mathbb{R}$) de f en t_0 et noté $f'(t_0)$.

8.1.2 Développement limité d'ordre 1

Proposition 8.1 *Soit a un élément de $\mathbb{E}$. L'application f est dérivable en t_0, de vecteur dérivé a, si et seulement si il existe une application ε vérifiant*

$$f(t_0+h)=f(t_0)+ha+h\varepsilon(h),$$

avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=\vec{0}$.
On dit, dans ce cas, que l'application f admet un développement limité d'ordre 1 en t_0.

Preuve.

1. Supposons f dérivable en t_0, de vecteur dérivé a. Considérons la fonction ε définie pour h non nul et « assez petit » par

$$\varepsilon(h)=\frac{1}{h}.(f(t_0+h)-f(t_0))-a.$$

Nous avons
$$\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = \vec{0}.$$
Or,
$$h\varepsilon(h) = (f(t_0 + h) - f(t_0)) - ha.$$
D'où,
$$f(t_0 + h) = f(t_0) + ha + h\varepsilon(h),$$
avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = \vec{0}$.

2. Supposons réciproquement qu'il existe une fonction ε vérifiant $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = \vec{0}$ et
$$f(t_0 + h) = f(t_0) + ha + h\varepsilon(h).$$
Alors
$$\frac{1}{h}.(f(t_0 + h) - f(t_0)) = a + \varepsilon(h).$$
On en déduit que f est dérivable en t_0 de vecteur dérivé a.

♣

Corollaire 8.2 *Si f est dérivable en t_0, alors f est continue en t_0.*

Preuve. Il suffit d'utiliser le développement limité d'ordre 1. ♣

Remarque 8.1 *La réciproque est fausse puisque, par exemple, la fonction valeur absolue est une application 1-lipschitzienne, donc uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et pourtant non dérivable en 0.*

Exercice 8.1 Soient I un intervalle et t_0 un point de cet intervalle. On considère une application f définie sur I à valeurs dans un e.v.n. $\mathbb{E}$, dérivable en t_0 de dérivée $f'(t_0)$ et une application λ définie sur I à valeurs réelles, dérivable en t_0 de dérivée $\lambda'(t_0)$. Montrer que l'application λf est dérivable en t_0 avec
$$(\lambda f)'(t_0) = \lambda'(t_0)f(t_0) + \lambda(t_0)f'(t_0).$$

Solution. Pour h réel non nul, nous avons
$$\begin{aligned}&\frac{1}{h}.\left(\lambda(t_0 + h)f(t_0 + h) - \lambda(t_0)f(t_0)\right)\\ &= \lambda(t_0 + h).\frac{1}{h}.(f(t_0 + h) - f(t_0))\\ &\quad+\frac{\lambda(t_0 + h) - \lambda(t_0)}{h}.f(t_0).\end{aligned}$$
D'où le résultat. ♣

Définition : On dit que l'application f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. On appelle alors fonction dérivée de f, l'application notée f' définie sur I, qui à tout élément t de I associe le vecteur dérivée de f en t.

Exercice 8.2 Soit I un intervalle ou union finie d'intervalles de longueur non nulle. On suppose I symétrique par rapport à 0. On considère une application f définie sur I, à valeurs dans un e.v.n. et admettant une parité.

1. Soit x un élément de I. Montrer que si f est dérivable en x, alors f est dérivable en $(-x)$ et donner, suivant la parité de f, le vecteur dérivé en ce point.
2. Montrer que si l'application f est dérivable sur I, l'application dérivée f' admet une parité. Laquelle ?

Solution.

1. Soit x un point de dérivabilité.
   (a) Supposons l'application f paire. Pour tout réel h non nul tel que $(-x+h)$ appartienne à I,
   $$\frac{1}{h}.(f(-x+h)-f(-x)) = \frac{1}{h}.(f(x-h)-f(x)) = -\frac{1}{-h}.(f(x-h)-f(x)).$$
   Ainsi,
   $$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(-x+h)-f(-x)) = -f'(x).$$
   L'application f est dérivable en $(-x)$ de vecteur dérivé $f'(-x) = -f'(x)$.
   (b) Supposons l'application f impaire. Pour tout réel h non nul tel que $(-x+h)$ appartienne à I,
   $$\frac{1}{h}.(f(-x+h)-f(-x)) = \frac{1}{h}.(-f(x-h)+f(x)) = \frac{1}{-h}.(f(x-h)-f(x)).$$
   Ainsi,
   $$\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = f'(x).$$
   L'application f est dérivable en $(-x)$ de vecteur dérivé $f'(-x) = f'(x)$.
2. On déduit de la question précédente que si f est dérivable sur I, f' admet une parité opposée à celle de f.

♣

Exercice 8.3 Soit n un entier strictement positif et f l'application définie par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x|x|^n}{n+1}. \end{array}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner sa fonction dérivée.

Solution. Remarquons que l'application f est impaire. Nous avons

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Ainsi, f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec,

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'(x) = x^n = |x|^n.$$

D'après l'exercice 8.2, l'application f est dérivable sur $\mathbb{R}^{-*}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^{-*}, \quad f'(x) = f'(-(-x)) = f'(-x) = |x|^n.$$

Étude en 0 :

$$\forall x \neq 0, \quad \frac{f(x)}{x} = \frac{|x|^n}{n+1}.$$

Ainsi f est dérivable en 0, de dérivée nulle. On obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = |x|^n.$$

♣

8.1.3 Dérivée d'une fonction composée

Proposition 8.3 *On considère I, J deux intervalles, $(\mathbb{E}, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et deux applications f et g avec*

$$f : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ x & \longmapsto & f(x), \end{array}$$

$$g : \begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ y & \longmapsto & g(y). \end{array}$$

Soit x_0 un élément de I. Si f est dérivable en x_0 et g dérivable en $f(x_0)$, alors l'application composée $(g \circ f)$ est dérivable en x_0 avec,

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0).g'(f(x_0)).$$

Preuve. On a

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon_1(h)$$

avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon_1(h) = 0$ et

$$g(f(x_0) + k) = g(f(x_0)) + kg'(f(x_0)) + k\varepsilon_2(k)$$

avec $\lim_{k \to 0} \varepsilon_2(k) = 0$. D'où,

$$g(f(x_0 + h)) = g\left[f(x_0) + [f(x_0 + h) - f(x_0)]\right]$$

$= (g\circ f)(x_0)+[f(x_0+h)-f(x_0)]\, g'(f(x_0))+[f(x_0+h)-f(x_0)]\, \varepsilon_2\, [f(x_0+h)-f(x_0)]).$
$= (g\circ f)(x_0)+hf'(x_0)g'(f(x_0))+h\, [\varepsilon_1(h)g'(f(x_0))]+h\, [f'(x_0)+\varepsilon_1(h)]\, [\varepsilon_2(f(x_0+h)-f(x_0)]$

Nous avons

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h)g'(f(x_0)) = 0$$

et

$$\lim_{h\to 0} [f'(x_0)+h\varepsilon_1(h)]\, [\varepsilon_2(f(x_0+h)-f(x_0))] = 0.$$

D'où le résultat. ♣

Exercice 8.4 On considère deux applications f et g définies sur un intervalle I, à valeurs dans un espace préhilbertien réel E. Soit t_0 un élément de I.

1. On suppose f et g dérivables en t_0. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} S: & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & < f(t), g(t) > \end{array}$$

   est dérivable en t_0 et donner la dérivée de S en ce point.

2. On suppose f dérivable en t_0 avec $f(t_0) \neq \vec{0}$. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} N: & I & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & t & \longmapsto & \|f(t)\| \end{array}$$

   est dérivable en t_0 et donner la dérivée de N en ce point.

Solution.

1. Les applications f et g admettent un développement limité à l'ordre 1 en t_0 :

$$f(t_0+h) = f(t_0) + hf'(t_0) + h\varepsilon_1(h)$$

   et

$$g(t_0+h) = g(t_0) + hg'(t_0) + h\varepsilon_2(h)$$

   où ε_1, ε_2 sont deux applications vérifiant $\lim_{h\to 0} \varepsilon_1(h) = \vec{0}$ et $\lim_{h\to 0} \varepsilon_2(h) = \vec{0}$. Le produit scalaire étant une forme bilinéaire,

$$S(t_0+h) =< f(t_0) + hf'(t_0) + h\varepsilon_1(h), g(t_0) + hg'(t_0) + h\varepsilon_2(h) >$$

$$=< f(t_0), g(t_0) > +h\, (< f'(t_0), g(t_0) > + < f(t_0), g'(t_0) >) + h\varepsilon(h)$$

   où

$$\varepsilon(h) = h < f'(t_0), g'(t_0)+\varepsilon_2(h) > + < \varepsilon_1(h), g(t_0+h) > + < f(t_0), \varepsilon_2(h) > .$$

   Nous avons $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. L'application S admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0, elle est donc dérivable en ce point et

$$S'(t_0) =< f'(t_0), g(t_0) > + < f(t_0), g'(t_0) > .$$

2. On utilise le résultat précédent en prenant $g = f$. Ainsi,

$$\forall t \in I, \quad \|f(t)\| = \sqrt{< f(t), f(t) >} = \sqrt{S(t)}$$

et

$$S'(t_0) = 2 < f'(t_0), f(t_0) > .$$

L'application $x \mapsto \sqrt{x}$ étant dérivable en $\|f(t_0)\| \neq 0$ l'application N est dérivable en t_0 avec

$$N'(t_0) = \frac{1}{2\sqrt{S(t_0)}}.2 < f'(t_0), f(t_0) >= \frac{< f'(t_0), f(t_0) >}{\|f(t_0)\|}.$$

♣

8.1.4 Dérivées d'ordre supérieur

Définition : Si l'application f est dérivable sur un intervalle $J(\subset I)$ de longueur non nulle contenant t_0 et si l'application f' est dérivable en t_0, on dit que f est deux fois dérivable en t_0. On appelle alors vecteur dérivée seconde de f en t_0, le vecteur dérivée de f' en t_0 que l'on note $f''(t_0)$ ou $f^{(2)}(t_0)$.

On peut ainsi définir par récurrence, si elles existent, les dérivées successives de f en t_0, que l'on note $f^{(3)}(t_0), f^{(4)}(t_0), \cdots$

Définition : Soit k un entier strictement positif. On dit que l'application f est k fois dérivable sur I si elle est k fois dérivable en tout point de I. On appelle alors fonction dérivée $k^{ième}$ de f, l'application notée $f^{(k)}$ définie sur I qui à tout élément t de I associe le vecteur dérivée $k^{ième}$ de f en t.

Remarque 8.2 *Par convention, on notera $f^{(0)}$, l'application f.*

Définition : Soit k un entier naturel. On dit que l'application f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si elle est k fois dérivable sur I et si l'application $f^{(k)}$ est continue sur I.

Définition : On dit que l'application f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si, pour tout entier naturel k, elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Définition : Soient n un élément de $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et f une application définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J. On dit que f est un $\mathcal{C}^n$ difféomorphisme si f est bijective et si f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^n$.

8.1.5 Applications de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux

Subdivision

Définition :

1. On appelle subdivision d'un segment $[a, b]$ toute famille finie $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ d'éléments du segment $[a, b]$ telle que
$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b.$$
2. On appelle pas de la subdivision σ, le réel
$$\delta(\sigma) = \max_{0 \leq i \leq n-1} (a_{i+1} - a_i).$$
3. On dit qu'une subdivision σ' est plus fine qu'une subdivision σ si tous les éléments de σ appartiennent à σ'.

Définition : Soit k un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On dit qu'une application f définie sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{E}$, est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ et des applications $g_0, g_1 \cdots, g_{n-1}$ telles que pour tout entier i compris entre 0 et $(n-1)$, la fonction g_i soit définie et de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_i, a_{i+1}]$ avec
$$\forall x \in]a_i, a_{i+1}[, \quad g_i(x) = f(x).$$
On dit que la subdivision σ est adaptée à l'application f.
Si, pour tout entier i, compris entre 1 et $(n-1)$, l'application g_i est constante, on dit que l'application f est en escalier.

Remarque 8.3 *1. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur le segment $[a, b]$. On peut remarquer que si σ est une subdivision adaptée, alors toute subdivision plus fine est également une subdivision adaptée à f.*

2. On en déduit que si f et g sont deux applications de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur le segment $[a, b]$, dont σ et σ' sont des subdivisions adaptées respectivement à f et g, alors $(\sigma \cup \sigma')$ est une subdivision adaptée aux deux applications f et g.

Notation : On note $(\mathcal{C}_{\mathcal{M}}{}^k[a, b], \mathbb{E})$, l'ensemble des applications définie sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{E}$ et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

Proposition 8.4 *Pour tout élément k de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, l'ensemble $(\mathcal{C}_{\mathcal{M}}{}^k[a, b], \mathbb{E})$ est un sous-espace vectoriel de $((\mathcal{B}([a, b], \mathbb{E}), +, .)$ espace vectoriel des applications définies sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{E}$ et bornées.*

Notation : Pour $k = 0$, on pourra noter $(\mathcal{C}_{\mathcal{M}}[a,b], \mathbb{E})$, l'espace vectoriel des fonctions définies et continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{E}$.

Preuve. Soit k un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. La première étape consiste à montrer que tout élément de $({\mathcal{C}_{\mathcal{M}}}^k[a,b], \mathbb{E})$ est une application bornée sur $[a,b]$. Soit f un tel élément, $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision qui lui soit adaptée et des applications $g_1, g_2 \cdots, g_{n-1}$ telles que pour tout entier i compris entre 0 et $(n-1)$, l'application g_i soit définie et de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_i, a_{i+1}]$ avec

$$\forall x \in]a_i, a_{i+1}[, \quad g_i(x) = f(x).$$

Soit i un entier compris entre 1 et $(n-1)$. L'application g_i est continue donc bornée sur le segment $[a_i, a_{i+1}]$. Considérons M_i un réel vérifiant

$$\forall x \in [a_i, a_{i+1}], \quad \|g_i(x)\| \leq M_i.$$

Soit

$$M = \max\{M_1, \cdots, M_{n-1}, f(a_0), \cdots, f(a_n)\}.$$

On obtient,

$$\forall x \in [a,b], \quad \|f(x)\| \leq M.$$

Ainsi, $({\mathcal{C}_{\mathcal{M}}}^k[a,b], \mathbb{E})$ est inclus dans $(\mathcal{B}[a,b], \mathbb{E})$. Montrons qu'il en est un sous-espace. $({\mathcal{C}_{\mathcal{M}}}^k[a,b], \mathbb{E})$ est non vide puisqu'il contient la fonction nulle. Soient f, g deux éléments de $({\mathcal{C}_{\mathcal{M}}}^k[a,b], \mathbb{E})$, λ et μ deux réels. Il suffit de choisir une subdivision adaptée à f et g pour vérifier que l'application $(\lambda f + \mu g)$ appartient à l'espace vectoriel normé $({\mathcal{C}_{\mathcal{M}}}^k[a,b], \mathbb{E})$. ♣

Définition : Soit k un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{E}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux, si sa restriction à tout segment inclus dans I est de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux.

8.2 Cas où $\mathbb{E}$ est de dimension finie

8.2.1 Expression de la dérivée par rapport à une base

Soient $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de cet espace, f une application définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{E}$ et $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ les applications coordonnées de f par rapport à la base $\mathcal{B}$, c'est-à-dire

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i.$$

Proposition 8.5 *La fonction f est dérivable en t_0 élément de I si et seulement si les f_i le sont, et, dans ce cas,*

$$f'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t_0) e_i.$$

La preuve de cette proposition est effectuée page 179.

Corollaire 8.6 *On considère I un intervalle non réduit à un point, t_0 un élément de cet intervalle, n et p deux entiers strictement positifs et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices de n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Une application A définie sur I à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*

$$\begin{array}{rccl} A: & I & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p} \\ & t & \longmapsto & A(t) = (a_{ij}(t))_{\binom{1\leq i\leq n}{1\leq j\leq p}} \end{array}$$

est dérivable en t_0 si et seulement si pour tout $i \in \{1, 2\cdots, n\}$ et tout $j \in \{1, 2\cdots, p\}$, l'application a_{ij} est dérivable en t_0, de dérivée notée $a'_{ij}(t_0)$. La dérivée de A en t_0, notée $A'(t_0)$, vérifie alors

$$A'(t_0) = (a'_{ij}(t))_{\binom{1\leq i\leq n}{1\leq j\leq p}}$$

Proposition 8.7 *Soient n, p et q trois entiers strictement positifs, I un intervalle non réduit à un point et t_0 un élément de cet intervalle. Soient A et B deux applications*

$$\begin{array}{c} I \to \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ t \mapsto A(t) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{c} I \to \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \\ t \mapsto B(t) \end{array}$$

dérivables en t_0. L'application AB définie sur I à valeurs dans $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ est dérivable en t_0 et

$$(AB)'(t_0) = A(t_0)B'(t_0) + A'(t_0)B(t_0).$$

Preuve. Les applications A et B étant dérivables en t_0, elles admettent un développemnt limité d'ordre 1 :

$$A(t_0 + h) = A(t_0) + hA'(t_0) + h\varepsilon_A(h),$$
$$B(t_0 + h) = B(t_0) + hB'(t_0) + h\varepsilon_B(h),$$

où ε_A (respectivement ε_B) est une application qui admet pour limite la matrice nulle d'ordre (n, p) (resp (p, q)) lorsque h tend vers 0. On obtient

$$\begin{aligned} A(t_0 + h)B(t_0 + h) = A(t_0)B(t_0) &+ h(A'(t_0)B(t_0) + A(t_0)B'(t_0)) \\ &+ h\big[A(t_0)\varepsilon_B(h) + \varepsilon_A(h)B(t_0) + hA'(t_0)B'(t_0) \\ &\quad + hA'(t_0)\varepsilon_B(h) + h\varepsilon_A(h)B'(t_0) + h\varepsilon_A(h)\varepsilon_B(h)\big]. \quad (8.2) \end{aligned}$$

L'application entre crochets admet pour limite la matrice nulle lorsque h tend vers 0. L'application AB admet un développement limité d'ordre 1 en t_0, elle est donc dérivable en t_0 et admet pour dérivée en ce point la matrice

$$A'(t_0)B(t_0) + A(t_0)B'(t_0).$$

♣

8.2.2 Arc paramétré, arc géométrique

On considère n un entier strictement positif et k un élément de $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Définition : On appelle arc paramétré de $\mathbb{R}^n$ de classe C^k tout couple (I, f), où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^k. L'ensemble $f(I) \subset \mathbb{R}^n$ est appelé support de l'arc.

Définition : On dit que deux arcs paramétrés (I, f) et (J, g) de classe C^k sont C^k-équivalents s'il existe un C^k-difféomorphisme θ de J sur I tel que $g = f \circ \theta$.

Proposition-définition 8.8 *On définit ainsi une relation d'équivalence sur les arcs paramétrés. Chaque classe est appelée arc géométrique de classe C^k, tout représentant de classe est appelé paramétrage admissible de l'arc géométrique.*

Deux paramétrages admissibles d'un même arc géométrique ont même support, on parle donc de support d'un arc géométrique.

8.3 Cas des fonctions à valeurs réelles

8.3.1 Dérivée d'une application réciproque

Nous savons que si f est une application continue sur un intervalle I à valeurs réelles :

1. L'image de l'intervalle I par l'application f est un intervalle J (théorème 6.7, page 62).
2. f réalise une bijection de I sur J si et seulement si f est strictement monotone (proposition 6.9, page 63).
3. Dans ce cas, f réalise un homéomorphisme entre I et J (proposition 6.13, page 66).

Proposition 8.9 *On considère I, J deux intervalles et f une application dérivable et bijective de I sur J. L'application f^{-1} est dérivable en y élément de J si et seulement si le réel $f'\left(f^{-1}(y)\right)$ est non nul et dans ce cas*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}.$$

Preuve. Considérons $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de J convergente vers y et vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n \neq y.$$

L'application f^{-1} étant injective,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{-1}(y_n) \neq f^{-1}(y).$$

Nous savons que f^{-1} est continue sur J. La suite $\left(f^{-1}(y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers $f^{-1}(y)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{f\left[f^{-1}(y_n)\right] - f\left[f^{-1}(y)\right]}$$

$$= \frac{1}{\frac{f[f^{-1}(y_n)] - f[f^{-1}(y)]}{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}}.$$

L'application f étant dérivable sur I et en particulier en $\left(f^{-1}(y)\right)$, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f\left[f^{-1}(y_n)\right] - f\left[f^{-1}(y)\right]}{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)} = f'(f^{-1}(y)).$$

1. Si $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

   L'application f^{-1} est dérivable en y avec $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

2. Si $f'(f^{-1}(y)) = 0$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = +\infty \quad \text{ou} - \infty$$

   suivant le sens de variation de f. Dans ce cas, f^{-1} n'est pas dérivable en y.

♣

Exemples :

1. L'application Arc sinus est dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ avec,
$$\forall y \in]-1,1[, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},$$
2. L'application Arc cosinus est dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ avec,
$$\forall y \in]-1,1[, \quad \arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}},$$
3. L'application Arc tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec,
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$
4. L'application « Argument cosinus hyperbolique » est dérivable sur l'intervalle $]1,+\infty[$ avec
$$\forall y \in]1,+\infty[, \quad \operatorname{arg\,ch}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$
5. L'application « Argument sinus hyperbolique » est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec
$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{arg\,sh}'(y) = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

Preuve.

1. L'application sinus est dérivable sur le segment $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ de dérivée non nulle sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. L'application Arc sinus est dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ avec
$$\forall y \in]-1,1[, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)}.$$
Or,
$$\forall y \in]-1,1[, \quad \arcsin(y) \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[.$$
Ainsi,
$$\forall y \in]-1,1[, \quad \cos(\arcsin(y)) \geq 0.$$
D'où,
$$\forall y \in]-1,1[, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$
2. L'application cosinus est dérivable sur le segment $[0,\pi]$ de dérivée non nulle sur l'intervalle $]0,\pi[$. L'application Arc cosinus est dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ avec
$$\forall y \in]-1,1[, \quad \arccos'(y) = \frac{1}{-\sin(\arccos y)}.$$

Or,

$$\forall y \in]-1,1[, \quad \arccos(y) \in]0,\pi[.$$

Ainsi,

$$\forall y \in]-1,1[, \quad \sin(\arccos(y)) \geq 0.$$

D'où,

$$\forall y \in]-1,1[, \quad \arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos y)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

3. L'application tangente est dérivable et de dérivée non nulle sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$. L'application Arc tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)}.$$

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

4. Nous avons,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}(x).$$

Cette dérivée est nulle pour $x = 1$. L'application $\arg\mathrm{ch}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ avec,

$$\forall y \in]1,+\infty[, \quad \arg\mathrm{ch}'(y) = \frac{1}{\mathrm{sh}\left(\arg\mathrm{ch}(y)\right)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2\left(\arg\mathrm{ch}(y)\right)-1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

5. Nous avons,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}(x).$$

Cette dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. L'application $\arg\mathrm{sh}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arg\mathrm{sh}'(y) = \frac{1}{\mathrm{ch}\left(\arg\mathrm{sh}(y)\right)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{sh}^2\left(\arg\mathrm{sh}(y)\right)+1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.$$

♣

8.3.2 Dérivée en un *extremum* local

Théorème 8.10 *On considère un intervalle I, f une fonction définie sur I et à valeurs réelles et a un point de I. Si, l'on a*

1. *f admet un extremum local au point a,*
2. *le point a est un point* intérieur *à l'intervalle I,*
3. *f est dérivable au point a,*

alors $f'(a) = 0$.

Preuve. Sans perdre de généralité, supposons que la fonction f admette un maximum local en a. Le point a étant intérieur à I, il existe un réel strictement positif h tel que $a+h$ et $a-h$ appartiennent à I avec,

$$\forall x \in [a-h, a+h], \quad f(x) \leq f(a).$$

Ainsi, la suite définie pour tout entier strictement positif n par

$$\frac{f(a+\frac{h}{n}) - f(a)}{\frac{h}{n}}$$

est négative et convergente vers $f'(a)$. On en déduit que $f'(a) \leq 0$. De même la suite définie pour tout entier strictement positif n par

$$\frac{f(a-\frac{h}{n}) - f(a)}{\frac{-h}{n}}$$

est positive et convergente vers $f'(a)$. On en déduit que $f'(a) \geq 0$. Les deux inégalités permettent d'écrire que $f'(a) = 0$.

♣

Remarque 8.4 *1. L'hypothèse indiquant que le point a est intérieur à l'intervalle I est nécessaire. La fonction $f : x \mapsto x$ définie sur le segment* $[0;1]$ *admet un minimum en 0, un maximum en 1 et la dérivée est non nulle en ces points.*

*2. La réciproque de ce théorème est fausse comme le montre l'exemple de la fonction : $x \mapsto x^3$, dont la dérivée est nulle en 0 mais n'admet pas d'*extremum *en ce point.*

8.3.3 Les théorèmes de Rolle

Théorème 8.11 *(Premier théorème de Rolle) Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur un segment* $[a,b]$, *continue sur ce segment et dérivable sur l'intervalle ouvert* $]a,b[$ *avec* $f(a) = f(b)$, *alors il existe un point* $c \in]a,b[$ *tel que* $f'(c) = 0$.

Preuve. Si l'application f est constante alors

$$\forall x \in [a,b], \quad f'(x) = 0.$$

Supposons désormais f non constante. Il existe un réel x appartenant à l'intervalle $]a,b[$ tel que $f(x) \neq f(a)$. Supposons par exemple $f(x) > f(a)$. D'après la proposition 5.12, page 55, l'application f admet un maximum global en un point c. Ce point c est différent de a et b. Il appartient à l'intervalle $]a,b[$ et est donc intérieur au segment $[a,b]$. Nous avons, d'après le théorème précédent, $f'(c) = 0$. ♣

Remarque 8.5 *Le théorème n'est plus vérifié si* $\mathbb{E} \neq \mathbb{R}$. *Prenons, par exemple, la fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$ *par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = (\cos t, \sin t).$$

Cette application est dérivable sur $\mathbb{R}$ *avec*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = (-\sin t, \cos t).$$

Pour tout réel t, *le vecteur dérivé est non nul. Or* $f(0) = f(2\pi)$.

Définition : On considère f une application définie sur un intervalle I à valeurs réelles. On dit qu'un élément x de I est un zéro de f si $f(x) = 0$. Si p est un entier strictement positif, on dit que x est un zéro de f de multiplicité p si f est $(p-1)$ fois dérivable en x et

$$\forall k \in \{0, \cdots, (p-1)\}, \quad f^{(k)}(x) = 0.$$

Théorème 8.12 *(Second théorème de Rolle) Soient* n *un entier strictement positif et* f *une application à valeurs réelles,* n *fois dérivable sur un intervalle* I. *Si* f *a au moins* $(n+1)$ *zéros en comptant les ordres de multiplicité, alors*

1. *L'application* f', *dérivée de l'application* f, *admet au moins* n *zéros sur* I *en comptant les ordres de multiplicité.*
2. *L'application* $f^{(n)}$ *a au moins un zéro sur* I.

Preuve.

1. Il existe un entier k compris entre 1 et $(n+1)$, des éléments $x_1, x_2, \cdots x_k$ appartenant à I, vérifiant

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_k,$$

des entiers strictement positifs $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_k$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n+1,$$

tels que

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, k\}, \forall r \in \{0, 1, \cdots, (\alpha_i - 1)\}, \quad f^{(r)}(x_i) = 0.$$

Pour tout entier i compris entre 1 et k, le réel x_i est un zéro de f' de multiplicité $(\alpha_i - 1)$. D'autre part,

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, (k-1)\}, \quad f(x_i) = f(x_{i+1}) = 0.$$

D'après le premier théorème de Rolle,

$$\exists y_i \in]x_i, x_{i+1}[\quad \text{t.q.} \quad f'(y_i) = 0.$$

Nous remarquons que tous les points y_j sont distincts des points x_i. L'application f' admet au moins

$$\left(\sum_{i=1}^{k}(\alpha_i - 1)\right) + (k-1) = (n+1) - k + k - 1 = n$$

zéros en comptant les ordres de multiplicité.

2. La preuve se fait par une récurrence finie évidente.

♣

8.3.4 Le théorème des accroissements finis

Théorème 8.13 (Accroissements finis) *Si f est une fonction à valeurs réelles, définie sur un intervalle compact $[a,b]$ non réduit à un point, continue sur cet intervalle et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Preuve. Considérons l'application g définie sur $[a,b]$ par

$$\forall x \in [a,b], \quad g(x) = f(x) - (x-a)\frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Cette application est continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a,b[$ avec,

$$\forall x \in]a,b[, \quad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

En remarquant que $g(a) = g(b)$, et en utilisant le théorème de Rolle, nous pouvons dire qu'il existe un point c appartenant à $]a,b[$ vérifiant $g'(c) = 0$. Ce point vérifie ainsi

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

♣

Remarque 8.6 *Le théorème de Rolle est un cas particulier du théorème des accroissements finis. Celui-ci n'est donc pas vérifié si $\mathbb{E} \neq \mathbb{R}$. Dans le cas général, pour les fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé E, on a l'inégalité des accroissements finis (théorème 8.18).*

8.3.5 Applications du théorème des accroissements finis

Sens de variation d'une fonction

Du théorème des accroissements finis on peut déduire le résultat suivant.

Corollaire 8.14 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.*

1. *La fonction f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$) pour tout x dans I.*
2. *La fonction f est constante sur I si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout x dans I.*
3. *Si $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout x dans $I = [a, b]$, alors :*
$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Exercice 8.5 Soit α un réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \cos n^\alpha.$$
Le but de cet exercice est de montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est le segment $[-1;1]$.

1. Montrer que la suite $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et non majorée.
2. Montrer que la suite
$$((n+1)^\alpha - n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$$
est convergente vers 0.
Soit x un réel appartenant au segment $[-1;1]$. On considère θ, l'unique réel appartenant au segment $[0;\pi]$, vérifiant
$$x = \cos\theta.$$
3. Montrer que pour tout entier n strictement positif, l'ensemble
$$A_{n,\theta} = \{p \in \mathbb{N}^* / p^\alpha \leq \theta + 2n\pi\}$$
est non vide et de cardinal fini.
On considère alors l'application φ définie sur $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ par
$$\forall n \geq 1, \quad \varphi(n) = \max\{p \in \mathbb{N}^* / p^\alpha \leq \theta + 2n\pi\}.$$
4. Montrer que l'application φ est strictement croissante.
5. Montrer que la suite
$$((\theta + 2n\pi) - \varphi(n)^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$$
est convergente vers 0.
6. En déduire que la suite extraite
$$(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*}$$
est convergente vers x.

7. Conclure.

Solution.

1. Nous avons
$$\forall n \geq 1, \quad n^\alpha = \exp(\alpha \ln n).$$
La stricte croissance des applications exponentielle et logarithme ainsi que leur limite en $+\infty$ permettent de conclure.

2. Utilisons l'inégalité des accroissements finis :
$$\forall n \geq 1, \quad |(n+1)^\alpha - n^\alpha| \leq \sup_{x\in[n,n+1]} \alpha x^{\alpha-1} = \alpha n^{\alpha-1}.$$
D'où le résultat.

3. On considère n un entier strictement positif. Le nombre entier 1 appartient à $A_{n,\theta}$. Cet ensemble est non vide. La suite $(n^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et non majorée. Il existe un entier strictement positif p_0 vérifiant
$$\forall p \geq p_0, \quad p^\alpha > \theta + 2n\pi.$$
L'ensemble $A_{n,\theta}$ est une partie de $\mathbb{N}$ majorée par p_0 donc de cardinal fini.

4. Remarquons qu'en utilisant l'inégalité obtenue dans la question 2, nous avons
$$((n+1)^\alpha - n^\alpha) \leq 1.$$
Pour tout entier n strictement positif,
$$\begin{aligned} &\theta + 2(n+1)\pi \geq \theta + 2n\pi + 1 \\ &\geq (\varphi(n))^\alpha + 1 \geq (\varphi(n))^\alpha + [(\varphi(n)+1)^\alpha - (\varphi(n))^\alpha] = (\varphi(n)+1)^\alpha . \end{aligned} \tag{8.3}$$
On en déduit que l'entier $\varphi(n)+1$ appartient à $A_{n+1,\theta}$. Ainsi,
$$\varphi(n) + 1 \leq \varphi(n+1).$$
L'application φ est strictement croissante.

5. Pour tout entier strictement positif n, nous avons
$$(\varphi(n))^\alpha \leq \theta + 2n\pi < (\varphi(n)+1)^\alpha.$$
Ainsi,
$$0 \leq \theta + 2n\pi - (\varphi(n))^\alpha \leq (\varphi(n)+1)^\alpha - (\varphi(n))^\alpha.$$
Cette dernière suite est une suite extraite d'une suite convergente vers 0. Elle est également convergente vers 0. On en déduit que la suite
$$((\theta + 2n\pi) - \varphi(n)^\alpha)_{n\in\mathbb{N}^*}$$
est convergente vers 0.

6. Remarquons qu'en utilisant l'inégalité des accroissements finis, nous avons

$$\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad |\cos y_1 - \cos y_2| \leq |y_1 - y_2|.$$

Ainsi,

$$\forall n \geq 1, \quad \left|u_{\varphi(n)} - x\right| = |\cos\left((\varphi(n))^\alpha\right) - \cos\left(\theta + 2n\pi\right)| \leq |\theta + 2n\pi - (\varphi(n))^\alpha|$$

On en déduit que la suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}^*})$ est convergente avec,

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = x.$$

7. Notons $\mathcal{VA}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Nous venons de montrer que

$$[-1;1] \subset \mathcal{VA}.$$

D'autre part, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant minorée par (-1) et majorée par 1, toute valeur d'adhérence de la suite est comprise entre ces deux valeurs. On en déduit que

$$\mathcal{VA} = [-1;1].$$

♣

Limites et dérivation

Théorème 8.15 *Soit f une fonction à valeurs réelles, continue sur un intervalle I et dérivable sur $I \setminus \{c\}$ où c est un point de I. Si la fonction dérivée f' a une limite notée ℓ en c, alors f est dérivable en c avec $f'(c) = \ell$.*

Preuve. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I convergente vers c telle que pour tout entier naturel n, $a_n \neq c$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe, pour tout entier naturel n, un réel b_n strictement compris entre a_n et c vérifiant

$$\frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} = f'(b_n).$$

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers c car pour tout naturel n, nous avons $|c-b_n| < |c - a_n|$. On en déduit que la suite $(f'(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Nous obtenons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(c) - f(a_n)}{c - a_n} = l.$$

On en déduit que f est dérivable en c de nombre dérivée l. ♣

Remarque 8.7 *On peut remarquer qu'alors f' est continue en c.*

Corollaire 8.16 *Soient n un entier strictement positif, f une fonction à valeurs réelles, continue sur un intervalle I et n fois dérivable sur $I \setminus \{c\}$, où c est un point de I. On suppose qu'il existe un n-uplet $(l_1, l_2, \cdots, l_n)$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant*

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}, \quad \lim_{x \to c} f^{(k)}(x) = l_k.$$

Alors f est n fois dérivable en c et

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}, \quad f^{(k)}(c) = l_k.$$

Preuve. Il suffit d'effectuer une preuve par récurrence en utilisant le théorème précédent. ♣

Exercice 8.6 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = l$ alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$.

Solution. Soit ε un réel strictement positif. Il existe un réel positif x_0 vérifiant

$$\forall y \geq x_0, \quad |f'(y) - l| \leq \varepsilon.$$

En utilisant le théorème des accroissements finis, on obtient

$$\forall x \geq x_0, \quad l - \varepsilon \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq l + \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\left(\frac{x - x_0}{x}\right)(l - \varepsilon) + \frac{f(x_0)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \left(\frac{x - x_0}{x}\right)(l + \varepsilon) + \frac{f(x_0)}{x}.$$

Nous remarquons que les fonctions de droite et de gauche admettent, lorsque x tend vers $+\infty$, pour limite respective $(l+\varepsilon)$ et $(l-\varepsilon)$. Il existe donc un réel $x_1 \geq x_0$ vérifiant

$$\forall x \geq x_1, \quad l - 2\varepsilon \leq \left(\frac{x - x_0}{x}\right)(l-\varepsilon) + \frac{f(x_0)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \left(\frac{x - x_0}{x}\right)(l+\varepsilon) + \frac{f(x_0)}{x} \leq l + 2\varepsilon.$$

D'où le résultat. ♣

Exercice 8.7 Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Solution. Soit M un réel positif. Choisissons un réel x_0 vérifiant

$$\forall y \geq x_0, \quad f'(y) \geq M.$$

En utilisant le théorème des accroissements finis, nous obtenons

$$\forall x \geq x_0, \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq M,$$

donc,

$$\forall x \geq x_0, \quad \frac{f(x)}{x} \geq \frac{M(x - x_0)}{x} + \frac{f(x_0)}{x}.$$

L'application de droite admet M pour limite lorsque x tend vers $+\infty$. Il existe ainsi un réel $x_1 \geq x_0$ vérifiant

$$\forall x \geq x_1, \quad \frac{f(x)}{x} \geq \frac{M(x - x_0)}{x} + \frac{f(x_0)}{x} \geq M - 1.$$

D'où

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

♣

8.3.6 La formule de Taylor-Lagrange

Théorème 8.17 (formule de Taylor-Lagrange) *Soit n un entier naturel. Si f est une fonction à valeurs réelles, définie sur un segment $[a, b]$, de classe C^n sur ce segment et $(n+1)$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, alors il existe un point $c \in]a, b[$ tel que :*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b - a)^{n+1}.$$

Remarque 8.8 *Pour $n = 0$ on retrouve le théorème des accroissements finis. Ceci prouve que le théorème n'est plus vérifié si $\mathbb{E} \neq \mathbb{R}$.*

Preuve. On considère l'application g définie sur le segment $[a, b]$ par,

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b - x)^k + \frac{A}{(n+1)!}(b - x)^{n+1}.$$

Nous avons $g(b) = f(b)$. Le réel A est choisi tel que $g(a) = g(b) = f(b)$. L'application g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ avec

$$\forall x \in]a, b[, \quad g'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b - x)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b - x)^{k-1} - \frac{A}{n!}(b - x)^n$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b - x)^n - \frac{A}{n!}(b - x)^n = \frac{(b - x)^n}{n!}\left(f^{(n+1)}(x) - A\right).$$

Les hypothèses du théorème de Rolle sont vérifiées. Considérons un élément $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$. Nous obtenons

$$A = f^{(n+1)}(c).$$

En remplaçant A dans l'expression de g, par $f^{(n+1)}(c)$, puis en écrivant $f(b) = g(a)$, nous obtenons le résultat désiré. ♣

8.4 Cas des fonctions à valeurs dans un e.v.n.

8.4.1 Inégalité des accroissements finis

Théorème 8.18 *Soient f une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans un espace vectoriel normé E et g une fonction définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Si*

$$\forall x \in]a,b[, \quad \|f'(x)\| \leq g'(x)$$

alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a).$$

Preuve. Considérons ε un réel strictement positif et la fonction h_ε définie et continue sur $[a,b]$ par

$$\forall x \in [a,b], \quad h_\varepsilon(x) = \|f(x) - f(a)\| - (g(x) - g(a)) - \varepsilon(x-a) - \varepsilon.$$

Soit

$$A_\varepsilon = \{x \in [a,b]/h_\varepsilon(x) \leq 0\}.$$

A_ε est une partie de $\mathbb{R}$ non vide car elle contient a et est majorée par b. Elle admet une borne supérieure que l'on note $\sup A_\varepsilon$. Le réel a étant un élément de A_ε et le réel b étant un majorant de A_ε, nous avons

$$a \leq \sup A_\varepsilon \leq b.$$

1. Le réel $\sup A_\varepsilon$ est élément de A_ε. En effet, il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A_ε convergente vers $\sup A_\varepsilon$. L'application h_ε étant continue, la suite $(h_\varepsilon(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $h_\varepsilon(\sup A_\varepsilon)$. Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad h_\varepsilon(a_n) \leq 0.$$

   À la limite,

$$h_\varepsilon(\sup A_\varepsilon) \leq 0.$$

2. Vérifions que $\sup A_\varepsilon > a$. On a, $h_\varepsilon(a) = -\varepsilon$. L'application h_ε étant continue en a, il existe un réel strictement positif α vérifiant,

$$\forall x \in [a, a+\alpha], \quad h_\varepsilon(x) \leq -\frac{\varepsilon}{2} \leq 0.$$

   Donc $\sup A_\varepsilon \geq a + \alpha$.

3. Montrons enfin que $\sup A_\varepsilon = b$. Supposons pour cela que $\sup A_\varepsilon < b$. L'application f est dérivable en $\sup A_\varepsilon$ et l'application norme étant continue, on obtient,

$$\lim_{x \to \sup A_\varepsilon} \left\| \frac{f(x) - f(\sup A_\varepsilon)}{x - \sup A_\varepsilon} \right\| = \|f'(\sup A_\varepsilon)\|.$$

De plus, l'applicaton g étant dérivable en $\sup A_\varepsilon$, nous pouvons choisir un réel θ strictement positif, vérifiant pour tout x élément de $]\sup A_\varepsilon, \sup A_\varepsilon + \theta]$,

$$\frac{\|f(x) - f(\sup A_\varepsilon)\|}{x - \sup A_\varepsilon} \leq \|f'(\sup A_\varepsilon)\| + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{et} \quad \frac{g(x) - g(\sup A_\varepsilon)}{x - \sup A_\varepsilon} \geq g'(\sup A_\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous obtenons pour tout x élément de $[\sup A_\varepsilon, \sup A_\varepsilon + \theta]$,

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(x) \leq\ & \|f(x) - f(\sup A_\varepsilon)\| + \|f(\sup A_\varepsilon) - f(a)\| - (g(x) - g(\sup A_\varepsilon)) \\ & -(g(\sup A_\varepsilon) - g(a)) - \varepsilon(x - \sup A_\varepsilon) - \varepsilon(\sup A_\varepsilon - a) - \varepsilon \\ & \leq (x - \sup A_\varepsilon)\tfrac{\varepsilon}{2} + (x - \sup A_\varepsilon)\left(\|f'(\sup A_\varepsilon)\| - g'(\sup A_\varepsilon)\right) \\ & +(x - \sup A_\varepsilon)\tfrac{\varepsilon}{2} - \varepsilon(x - \sup A_\varepsilon) + h_\varepsilon(\sup A_\varepsilon) \\ & = (x - \sup A_\varepsilon)\left(\|f'(\sup A_\varepsilon)\| - g'(\sup A_\varepsilon)\right) + h_\varepsilon(\sup A_\varepsilon) \\ & \leq 0. \end{aligned}$$

Ceci est impossible, donc $\sup A_\varepsilon = b$. On conclut que,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \|f(b) - f(a)\| - (g(b) - g(a)) \leq \varepsilon(b - a + 1).$$

En passant à la limite,

$$\|f(b) - f(a)\| - (g(b) - g(a)) \leq 0.$$

♣

Corollaire 8.19 *Soit f une fonction définie sur $[a, b]$ à valeurs dans un espace vectoriel normé E, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. S'il existe un réel M vérifiant*

$$\forall x \in]a, b[, \quad \|f'(x)\| \leq M$$

alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b - a).$$

Preuve. Il suffit de considérer l'application g définie sur $[a, b]$ par

$$\forall x \in [a, b], \quad g(x) = Mx.$$

8.4.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 8.20 (inégalité de Taylor-Lagrange) *Si f est une fonction à valeurs dans un espace vectoriel normé $\mathbb{E}$ définie sur un intervalle compact $[a,b]$ non réduit à un point, de classe C^n sur cet intervalle et $(n+1)$ fois dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ avec $\|f^{(n+1)}\|$ majoré sur $]a,b[$ par un réel positif M_{n+1} alors :*

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \right\| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1},$$

$$\left\| f(a) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(a-b)^k \right\| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Remarque 8.9 *Cette inégalité a un certain nombre d'applications. Citons par exemple, l'estimation de l'erreur dans la méthode des rectangles, section 13.4.7, page 198.*

Preuve. Il suffit d'appliquer l'inégalité des accroissements finis théorème 8.18 avec, pour la première inégalité,

$$\forall x \in [a,b], \quad F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{-M_{n+1}}{(n+1)!}(b-x)^{n+1},$$

et pour la seconde inégalité,

$$\forall x \in [a,b], \quad F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(a-x)^k \quad \text{et} \quad G(x) = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

♣

8.4.3 La formule de Taylor avec reste intégral ($\mathbb{E}$ Banach)

On peut remarquer que, dans le cadre de la formule de Taylor-Lagrange, les applications sont à valeurs réelles. Pour la formule de Taylor avec reste intégral, le cadre est plus général puisque les applications sont à valeurs dans un espace de Banach (e.v.n. complet). Dans ce cas, la valeur du reste est donnée avec davantage de précision.

Théorème 8.21 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction à valeurs dans un espace de Banach de classe C^{n+1} sur un segment $[a,b]$, alors :*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(b-t)^n \, dt.$$

Preuve. La preuve se fait par récurrence sur n. Pour $n = 0$, la propriété est vraie car la fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

Soit n un entier naturel. Montrons que la proposition au rang n implique la proposition au rang $(n+1)$. L' application f étant de classe $\mathcal{C}^{n+2}$, nous pouvons intégrer par parties :

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt.$$

En remplaçant, on obtient la formule exacte au rang $(n+1)$. ♣

8.4.4 La formule de Taylor-Young

Nous remarquons que, pour ce théorème, les hypothèses sont plus faibles. Pour les formules de Taylor précédentes, nous obtenons une propriété globale, c'est-à-dire sur un intervalle. Pour la formule de Taylor-Young, la propriété est seulement locale c'est-à-dire au voisinage d'un point a.

Notation

On notera

$$o(x^n)$$

toute application définie sur un intervalle ouvert I contenant 0 et pouvant s'écrire sous la forme

$$x^n \varepsilon(x)$$

où ε est une application définie sur I à valeurs dans E telle que

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = \vec{0}.$$

Théorème 8.22 *(formule de Taylor-Young) Soient n un entier strictement positif et f une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un e.v.n. On suppose que f est n fois dérivable en un point a de I. Alors :*

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k + o((t-a)^n).$$

Preuve. Effectuons la preuve par récurrence. Pour $n = 1$, l'application f est dérivable une fois et nous retrouvons le développement limité de f en a à l'ordre 1. La propriété est vraie au rang 1.
Soit n un entier naturel strictement positif. Montrons que la proposition au rang

n implique la proposition au rang $(n+1)$. Considérons une application f, $(n+1)$ fois dérivable en a et R l'application définie sur I par

$$\forall t \in I, \quad R(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k.$$

Cette application est dérivable sur un voisinage de a avec

$$R'(t) = f'(t) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(t-a)^{k-1} = f'(t) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(f')^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k.$$

L'application f' est n fois dérivable en a et en utilisant la propriété au rang n, on a

$$R'(t) = o(t-a)^n.$$

Soit ε un réel strictement positif. Il existe un intervalle J centré en a tel que,

$$\forall t \in J, \quad \|R'(t)\| \leq \varepsilon |t-a|^n.$$

Considérons la fonction g, à valeurs réelles, définie sur J par

$$\forall t \in J, \quad g(t) = \frac{\varepsilon(t-a)|t-a|^n}{n+1}.$$

Cette application est dérivable sur J (voir exercice 8.3 page 93) avec

$$\forall t \in J, \quad g'(t) = \varepsilon |t-a|^n.$$

En utilisant l'inégalité des accroissements finis (théorème 8.18) et en discutant suivant la position de t par rapport à a, nous obtenons,

$$\forall t \in J, \quad \|R(t) - R(a)\| = \|R(t)\| \leq \frac{\varepsilon |t-a|^{n+1}}{n+1}.$$

On en déduit que

$$R(t) = o(t-a)^{n+1}.$$

♣

Exercice 8.8 On considère deux réels a et b et l'équation différentielle

$$y'' = ay' + by.$$

On note S l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle.

1. Vérifier que tout élément de S est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que S est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
3. Montrer que l'application φ définie par

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & S & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & y & \longmapsto & (y(0), y'(0)). \end{array}$$

   est linéaire et injective.

4. En déduire que S est un espace vectoriel de dimension au plus 2.

Solution.

1. Évident à l'aide d'une récurrence.
2. Évident.
3. Elle est trivialement linéaire. Montrons que le noyau est réduit à l'application nulle. Soit f un élément de ce noyau. On a ainsi $f(0) = f'(0) = 0$. On vérifie en utilisant l'équation et à l'aide d'une récurrence évidente que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(0) = 0.$$

Soit x un réel non nul. Pour tout entier naturel n, on note,

$$\|f^{(n)}\|_\infty = \sup_{t\in[0,x]} |f^{(n)}(t)|,$$

si x est positif et

$$\|f^{(n)}\|_\infty = \sup_{t\in[x,0]} |f^{(n)}(t)|,$$

si x est négatif.
D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, théorème 8.20, nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x)| \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty . |x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Montrons que la suite $\left(\frac{\|f^{(n)}\|_\infty . |x|^{n+1}}{(n+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0. Pour cela introduisons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = \|f\|_\infty, \\ u_1 = \|f'\|_\infty \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = |a|u_{n+1} + |b|u_n. \end{cases}$$

Montrons par une récurrence double que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f^{(n)}\|_\infty \leq u_n.$$

Considérons pour tout entier naturel n, la propriété,

$$\mathcal{P}_n : ' \; \|f^{(n)}\|_\infty \leq u_n \; \text{˘}.$$

Nous avons les propriétés $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$. Soit n un entier naturel. Montrons que

$$(\mathcal{P}_n \wedge \mathcal{P}_{n+1}) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+2}.$$

Si x est un réel strictement positif,

$$\forall t \in [0, x], \quad f^{(n+2)}(t) = af^{(n+1)}(t) + bf^{(n)}(t).$$

Ainsi,

$$\forall t \in [0, x], \quad |f^{(n+2)}(t)| \leq |a|u_{n+1} + |b|u_n = u_{n+2}$$

et

$$\|f^{(n+2)}\|_\infty \leq u_{n+2}.$$

Si le réel x est strictement négatif, on effectue une opération similaire sur le segment $[x, 0]$. On en déduit que nous avons la propriété $\mathcal{P}_n$ pour tout entier naturel n.

On remarque que si $a = b = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et nulle à partir du rang 2. Si $a^2 + b^2 \neq 0$, l'équation $X^2 - |a|X - |b| = 0$ admet deux solutions réelles distinctes que l'on notera α et β. Il existe deux réels λ et μ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq |\lambda||\alpha|^n + |\mu||\beta|^n$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\|f^{(n)}\|_\infty.|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq |\lambda x|\frac{|\alpha x|^n}{(n+1)!} + |\mu x|\frac{|\beta x|^n}{(n+1)!}.$$

La suite $\left(\frac{\|f^{(n)}\|_\infty.|x|^{n+1}}{(n+1)!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers 0. On en déduit que $f(x) = 0$ et que l'application f est nulle. Le noyau de φ étant réduit à l'application nulle, φ est injective.

4. La dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ étant égale à 2 et φ étant injective, on en déduit que la dimension de S est inférieure ou égale à 2.

♣

Chapitre 9

Comparaison locale ou asymptotique de fonctions

Préliminaire

Voici, pour ce chapitre, une définition légèrement abusive mais somme toute logique.

Définition : Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. On dit que $(+\infty)$ est adhérent de A si A est une partie non majorée.
2. On dit que $(-\infty)$ est adhérent de A si A est une partie non minorée.

Notation : On note

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}.$$

On rappelle la définition suivante :

Définition :

1. Soit x un réel. On dit qu'une partie $\mathcal{V}_x$ de $\mathbb{R}$ est un voisinage de x si elle contient un ouvert contenant x.
2. On dit qu'une partie $\mathcal{V}_{+\infty}$ de $\mathbb{R}$ est un voisinage de $(+\infty)$ si elle contient un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ où A est un réel.
3. On dit qu'une partie $\mathcal{V}_{-\infty}$ de $\mathbb{R}$ est un voisinage de $(-\infty)$ si elle contient un intervalle de la forme $]-\infty, A[$ où A est un réel.

9.1 Relations de comparaison

9.1.1 La relation $\mathcal{O}$

> **Définition :** On considère f et g deux applications à valeurs réelles définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et a élément de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A. On dit que f est dominée par g au voisinage de a s'il existe un réel positif M et un voisinage de a noté $\mathcal{V}_a$ tels que
>
> $$\forall x \in \mathcal{V}_a \cap A, \quad |f(x)| \leq M|g(x)|.$$

Remarque 9.1 *Lorsqu'une application f est dominée par une application g au voisinage de a, on pourra noter $f = \mathcal{O}_a(g)$ ou $f = \mathcal{O}(g)$ s'il n'y a pas risque de confusion.*

Exemple : $f = \mathcal{O}_a(1)$ si et seulement si f est une application bornée au voisinage de a.

9.1.2 La relation o

> **Définition :** On considère f et g deux applications à valeurs réelles, définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et a élément de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a si pour tout réel strictement positif ε, il existe un voisinage $\mathcal{V}_a$ de A tel que
>
> $$\forall x \in \mathcal{V}_a \cap A, \quad |f(x)| \leq \varepsilon|g(x)|.$$

Remarque 9.2 *Lorsqu'une application f est négligeable devant l'application g au voisinage de a, on pourra noter $f = o_a(g)$ ou $f = o(g)$ s'il n'y a pas risque de confusion.*

Exemples :
$f = o_a(1)$ si et seulement si f admet 0 pour limite en a.
$f = o(\frac{1}{x})$ en $+\infty$ signifie que l'application $x \mapsto xf(x)$ admet pour limite 0 en $+\infty$.

Proposition 9.1 *On considère f et g deux applications à valeurs réelles, définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et a élément de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A. L'application f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulement si il existe*

1. *une application ε à valeurs réelles définie sur A vérifiant*

$$\lim_{x \longrightarrow a} \varepsilon(x) = 0,$$

2. *un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a vérifiant*

$$\forall x \in \mathcal{V}_a \cap A, \quad f(x) = \varepsilon(x) g(x).$$

Preuve. On suppose, dans un premier temps, que $f = o_a(g)$. On définit sur A l'application ε par

$$\forall x \in A, \quad \varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ si } g(x) \neq 0, \\ 0 \text{ si } g(x) = 0. \end{cases}$$

L'application f étant négligeable devant g au voisinage de a, il existe $\mathcal{V}_a$ voisinage de a tel que

$$\forall x \in \mathcal{V}_a \cap A, \quad |f(x)| \leq |g(x)|.$$

Donc,

$$\forall x \in \mathcal{V}_a \cap A, \quad g(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

On obtient ainsi

$$\forall x \in \mathcal{V}_a \cap A, \quad f(x) = \varepsilon(x) g(x).$$

Montrons que l'application ε admet en a une limite nulle.
Soit α un réel strictement positif. Il existe un voisinage $\mathcal{V}'_a$ de A tel que

$$\forall x \in \mathcal{V}'_a \cap A, \quad |f(x)| \leq \alpha |g(x)|.$$

Soit $\mathcal{V}''_a = \mathcal{V}_a \cup \mathcal{V}'_a$. Notons que cet ensemble est un voisinage de a. Nous obtenons,

$$\forall x \in \mathcal{V}''_a \cap A, \quad |\varepsilon(x)| \leq \alpha.$$

Ainsi,

$$\lim_{x \longrightarrow a} \varepsilon(x) = 0.$$

La réciproque est évidente. ♣

Corollaire 9.2 *On considère f et g deux applications à valeurs réelles, définies sur une partie A de $\mathbb{R}$, et a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A. On suppose qu'il existe $\mathcal{V}_a$ voisinage de a vérifiant*

$$\forall x \in A \cup \mathcal{V}_a, \quad g(x) \neq 0.$$

L'application f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulement si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

9.1.3 L'équivalence

Définition : On considère f et g deux applications à valeurs réelles, définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et a élément de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A. On dit que f est équivalente à g au voisinage de a si

$$f - g = o_a(g).$$

On note

$$f \underset{a}{\sim} g.$$

De la proposition 9.1, découle la proposition suivante,

Proposition 9.3 *On considère f et g deux applications à valeurs réelles, définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et a élément de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A. L'application f est équivalente à g au voisinage de a si et seulement si il existe*

1. *une application α à valeurs réelles définie sur A vérifiant*

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 1,$$

2. *un voisinage $\mathcal{V}_a$ de a vérifiant*

$$\forall x \in \mathcal{V}_a \cap A, \quad f(x) = \alpha(x) g(x).$$

Corollaire 9.4 *La relation $\underset{a}{\sim}$ est une relation d'équivalence.*

Corollaire 9.5 *On considère f et g deux applications à valeurs réelles, définies sur une partie A de $\mathbb{R}$, et a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A. On suppose que les applications f et g sont équivalentes au voisinage de a. Si f admet une limite en a, alors g admet la même limite en ce point.*

Corollaire 9.6 *On considère f et g deux applications à valeurs réelles, définies sur une partie A de $\mathbb{R}$, et a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A. On suppose qu'il existe $\mathcal{V}_a$ voisinage de a vérifiant*

$$\forall x \in A \cup \mathcal{V}_a, \quad g(x) \neq 0.$$

Les applications f et g sont équivalentes au voisinage de a si et seulement si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Corollaire 9.7 *Soit l un réel non nul. Une application f admet pour limite l lorsque x tend vers a si et seulement si*

$$f \underset{a}{\sim} l.$$

Corollaire 9.8 *On considère f_1, f_2, g_1, g_2, quatre applications à valeurs réelles, définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et a élément de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A. Alors*

1. $$\left(f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{\sim} g_2\right) \Rightarrow f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2.$$

2. *On suppose qu'il existe $\mathcal{V}_a$ voisinage de a vérifiant*

$$\forall x \in A \cup \mathcal{V}_a, \quad f_2(x) g_2(x) \neq 0.$$

Alors,

$$\left(f_1 \underset{a}{\sim} g_1 \quad \text{et} \quad f_2 \underset{a}{\sim} g_2\right) \Rightarrow \frac{f_1}{f_2} \underset{a}{\sim} \frac{g_1}{g_2}.$$

Corollaire 9.9 *On considère f et g deux applications à valeurs réelles, définies sur une partie A de $\mathbb{R}$, et a un élément de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A. On suppose qu'il existe $\mathcal{V}_a$ voisinage de a vérifiant*

$$\forall x \in A \cup \mathcal{V}_a, \quad f(x) > 0, \quad g(x) > 0.$$

Alors,

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad f \underset{a}{\sim} g \Rightarrow f^r \underset{a}{\sim} g^r.$$

Remarque 9.3 *Attention! La relation $\sim$ se manie avec précaution. En particulier,*

1. *elle n'est pas compatible avec l'addition, :*

$$x + \sqrt{x} \underset{+\infty}{\sim} x, \quad -x \underset{+\infty}{\sim} -x + \ln x \text{ et pourtant } \sqrt{x} \underset{+\infty}{\not\sim} \ln x.$$

2. *Elle n'est pas compatible avec la composition :*

$$x \underset{+\infty}{\sim} x + 1,$$

or

$$\exp x \underset{+\infty}{\not\sim} \exp(x+1).$$

9.2 Développements asymptotiques

Définition : On considère f une application à valeurs réelles, définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et a élément de $\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A. On dit que f admet un développement asymptotique en a, s'il existe un entier naturel n et $(n+1)$ applications $f_0, f_1, \cdots, f_n$ définies sur A vérifiant

1. $$\forall k \in \{0, 1, \cdots (n-1)\}, \quad f_{k+1} = o_a(f_k).$$

2. $$f = f_0 + f_1 + \cdots + f_n + o_a(f_n).$$

Dans la section suivante, nous étudions le développement limité, cas particulier de développement asymptotique.

9.3 Développements limités

9.3.1 Définition, propriétés

Définition : On considère I un intervalle, a un point de I et f une application définie sur I et à valeurs réelles. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a, s'il existe un $(n+1)$-uplet de réels noté $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ tel que,

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o_a((x-a)^n).$$

Le polynôme P défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n$$

est appelé partie régulière du développement limité.

Remarque 9.4 *Dans la suite de la section, sans perdre de généralité, on supposera* $a = 0$.

Proposition 9.10 *Si f admet un développement limité d'ordre n, celui-ci est unique.*

Preuve. Supposons qu'une application f admette deux développements limités à l'ordre n distincts

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n).$$

Soit $p = \min\{k / a_k \neq b_k\}$. Nous obtenons

$$(a_p - b_p) + (a_{p+1} - b_{p+1})x + \cdots + (a_n - b_n)x^{n-p} = o(x^{n-p}).$$

Nous remarquons que, lorsque x tend vers 0, le terme de gauche tend vers $(a_p - b_p)$ et celui de droite vers 0. Ceci est impossible. ♣

Exemples : On considère les applications f_1, f_2 et f_3 définies par

$$f_1 : \begin{array}{ccc}]-\infty, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1-x} \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc}]-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1+x} \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1+x^2} \end{array}$$

Soit n un entier strictement positif. Nous avons

$$\forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

1. L'application f_1 admet un développement limité à l'ordre n. En effet,

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n \frac{x}{1-x}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

2. L'application f_2 admet un développement limité à l'ordre n. En effet,

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + x^n \frac{(-1)^{n+1} x}{1+x}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).$$

3. L'application f_3 admet un développement limité à l'ordre $(2n+1)$. En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + x^{2n+1} \frac{(-1)^{n+1} x}{1+x^2}.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + o(x^{2n+1}).$$

Proposition 9.11 *Soit f une application admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0.*
Si f est paire, tous les termes a_k d'indices impairs sont nuls.
Si f est impaire, tous les termes a_k d'indices pairs sont nuls.

Preuve. Soit f une application admettant au voisinage de 0, un développement limité à l'ordre n, avec

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Si l'application f est paire ou impaire, l'intervalle I est centré en 0. Soit g l'application définie sur I, par

$$\forall x \in I, \quad g(x) = f(-x).$$

L'application g admet le développement limité suivant à l'ordre n,

$$g(x) = a_0 - a_1 x + \cdots + (-1)^n a_n x^n + o(x^n).$$

Si f est paire, alors $f = g$.
Si f est impaire, alors $f = -g$.
L'unicité du développement limité à l'ordre n permet de conclure. ♣

Proposition 9.12 *Soit n un entier strictement positif. Si f admet un développement limité d'ordre $n \geq 1$ au voisinage de 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

et si $a_n \neq 0$ alors

$$f(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{n-1} x^{n-1} \underset{0}{\sim} a_n x^n$$

Preuve. Considérons ε une fonction admettant 0 pour limite lorsque x tend vers 0 et vérifiant

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x).$$

Alors,

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \setminus \{0\}, \quad \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{n-1} x^{n-1}}{a_n x^n} = \frac{a_n + \varepsilon(x)}{a_n}.$$

D'où,

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - \cdots - a_{n-1} x^{n-1}}{a_n x^n} = 1.$$

Exemple : En utilisant l'exemple précédent, nous obtenons

1. $$\frac{1}{1-x} - 1 \underset{0}{\sim} x,$$

2. $$\frac{1}{1-x} - 1 - x \underset{0}{\sim} x^2,$$

3. $$\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 \underset{0}{\sim} x^3.$$

9.3.2 Développement limité et dérivation

Proposition 9.13 *Soit n un entier strictement positif. Si f est n fois dérivable en 0, alors f admet au voisinage de 0 le développement limité suivant d'ordre n :*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Preuve. Immédiate avec la formule de Taylor-Young (théorème 8.22). ♣

Exemple :

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Remarques 9.5 *Attention ! La réciproque est fausse. Nous avons seulement la proposition 9.14 beaucoup plus faible.*
Soit n un entier strictement positif. Considérons l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = x^{n+1} \sin\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Cette application admet le développement limité suivant à l'ordre n

$$f(x) = o(x^n).$$

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = (n+1)x^n \sin\left(\frac{1}{x^n}\right) - n\cos\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

L'application f' n'est pas continue en 0. On en déduit que f n'est dérivable qu'une seule fois en 0.

Proposition 9.14 *Soit n un entier strictement positif. Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n),$$

alors $f(0) = a_0$, f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$.

Preuve. Soit f une application admettant un développement limité d'ordre n au voisinage de 0

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Nous remarquons que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2,

$$a_k x^k = o(x).$$

On en déduit que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + o(x).$$

l'application f admet un développement limité d'ordre 1. Le résultat est obtenu en utilisant la proposition 8.1, page 91. ♣

9.3.3 Opérations sur les développements limités

Proposition 9.15 *Soit n un entier strictement positif. Soit $f : I \to E$ une application dérivable sur I dont l'application dérivée f' admet en 0, le développement limité suivant à l'ordre n :*

$$f'(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

Alors l'application f admet au voisinage de 0, le développement limité d'ordre $n+1$ suivant :

$$f(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Preuve. Considérons P la fonction polynomiale définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = f(0) + a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}.$$

Soit ε un réel strictement positif. D'après l'hypothèse, il existe un réel α strictement positif tel que

$$\forall t \in I, \quad |t| < \alpha \Rightarrow \|f'(t) - P'(t)\| < \epsilon |t|^n.$$

Considérons la fonction g définie sur I par

$$\forall t \in I, \quad g(t) = \frac{\varepsilon t |t^n|}{n+1}.$$

Cette application est dérivable sur I avec

$$\forall t \in I, \quad g'(t) = \varepsilon |t|^n.$$

Soit x un réel vérifiant $|x| < \alpha$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis (théorème 8.18 page 112) au segment $[0, x]$ si x est positif, et au segment $[x, 0]$ si x est négatif, nous obtenons

$$\|f(x) - P(x)\| \leq \frac{\varepsilon |x^{n+1}|}{n+1}.$$

On en déduit le résultat

$$f(x) - P(x) = o(x^{n+1}).$$

♣

Exemples : Soit n un entier strictement positif. En utilisant les exemples de la page 125, nous obtenons,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^{n+1}).$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

Proposition 9.16 *Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles admettant des DL à l'ordre n en 0, ayant pour parties régulières respectives les polynômes $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ et $Q_n(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$.*

1. *Linéarité : si λ et μ sont deux constantes, la fonction $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est $\lambda P_n + \mu Q_n$.*
2. *Produit : la fonction fg admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est le produit $P_n Q_n$ tronqué à l'ordre n (cela signifie que l'on ne conserve que les termes dont le degré est inférieur ou égal à n).*
3. *Composition : Si $g(0) = 0$ alors la fonction composée $f \circ g$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est le polynôme $P_n \circ Q_n$ tronqué à l'ordre n.*

Preuve.

1. Évident
2. Remarquons que pour tout entier p strictement supérieur à n, nous avons

$$x^p = x^{p-n} x^n = o(x^n).$$

Décomposons le polynôme $P_n Q_n$ tel que

$$P_n Q_n = R_n + T_n,$$

où R_n est constitué des termes du produit P_nQ_n de degré inférieur ou égal à n et T_n est constitué des termes du produit P_nQ_n de degré strictement supérieur à n. D'après la remarque précédente,

$$T_n(x) = o(x^n).$$

Ainsi,

$$(fg)(x) \doteq (P_n(x)+o(x^n))(Q_n(x)+o(x^n)) = P_nQ_n(x)+o(x^n) = R_n(x)+o(x^n).$$

D'où le résultat.

3. Nous avons

$$f(y) = P(y) + (y)^n\varepsilon(y)$$

avec $\lim_{y\to 0}\varepsilon(y) = 0$. Donc,

$$(f \circ g)(x) = P(g(x)) + (g(x))^n\varepsilon(g(x))$$

(a) En utilisant la propriété précédente, on montre simplement par récurrence que pour tout entier k strictement positif, l'application $x \mapsto (g(x))^k$ admet un développement limité à l'ordre n, dont la partie régulière est le polynôme Q_n^k tronqué à l'ordre n.
On en déduit que l'application $x \mapsto P(g(x))$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie régulière est le polynôme $P_n \circ Q_n$ tronqué à l'ordre n.

(b) D'après la proposition 9.14,

$$g(x) = xg'(0) + x\varepsilon_1(x)$$

avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$.
Ainsi,

$$(g(x))^n\,\varepsilon(g(x)) = x^n\left(g'(0) + \varepsilon_1(x)\right)^n \varepsilon\left(g(x)\right).$$

Notons ε_2 l'application définie par

$$\varepsilon_2(x) = \left(g'(0) + \varepsilon_1(x)\right)^n \varepsilon\left(g(x)\right).$$

L'application g étant continue en 0 avec $g(0) = 0$, nous en déduisons que ε_2 admet une limite nulle en 0. Ainsi,

$$(g(x))^n\varepsilon(g(x)) = x^n\varepsilon_2(x) = o(x^n).$$

ce qui termine la preuve.

♣

Chapitre 10

Suites définies par une récurrence

10.1 Définitions, exemples

10.1.1 Suites récurrentes d'ordre 1

Définition : Soit E un ensemble non vide. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite récurrente d'ordre 1 si on peut la définir de la manière suivante,

$$\begin{cases} u_0 \in E, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n), \end{cases} \tag{10.4}$$

où f est une application définie sur E à valeurs dans E.

Remarque 10.1 Attention. *Il est important de noter que l'application f est à valeurs dans son ensemble de définition. Ceci est nécessaire pour que la suite soit bien définie.*

Exemples

1. Suites arithmétiques. On appelle ainsi les suites $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + a$ où $a \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est une suite arithmétique de raison a. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + na,$$

$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{n=k}^{n=k+l} u_n = \frac{1}{2}(l+1)(u_k + u_{k+l}).$$

2. Suites géométriques. On appelle ainsi les suites $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = qu_n$ où $q \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est une suite géométrique de raison q. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 q^n,$$

$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{n=k}^{n=k+l} u_n = u_k \frac{1-q^{l+1}}{1-q} \quad \text{si } q \neq 1,$$

$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2, \quad \sum_{n=k}^{n=k+l} u_n = u_0(l+1) \quad \text{si } q = 1.$$

3. Suites arithmético-géométriques. On appelle ainsi les suites $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ vérifiant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = au_n + b$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour l'étude de ce type de suites, si a est différent de 1, on pourra utiliser le réel $\frac{b}{1-a}$ unique point fixe de l'application $x \mapsto ax+b$. On peut ainsi vérifier que la suite $\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right).$$

Exercice 10.1 1. On considère une suite $(l_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ définie par

$$\begin{cases} l_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad l_{n+1} = 2(1-l_n). \end{cases}$$

Indiquer le comportement asymptotique de cette suite suivant les valeurs du réel l_0.

2. On considère une suite bornée $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ vérifiant :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right) = 1.$$

Le but de cette question est de montrer que la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente vers $\frac{2}{3}$.

(a) Montrer que si un réel l est valeur d'adhérence de $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ alors le réel $2(1-l)$ est également valeur d'adhérence.

(b) En déduire, en reprenant la suite $(l_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ de la question 1, que si l_0 est valeur d'adhérence de $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$, alors pour tout entier naturel n, l_n est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$.

(c) Conclure.

Solution.

1. Le réel $\frac{2}{3}$ est point fixe de l'application $x \mapsto 2(1-x)$. Ainsi la suite $(l_n - \frac{2}{3})_{(n\in\mathbb{N})}$ est une suite géométrique de raison (-2).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad l_n - \frac{2}{3} = (-2)^n(l_0 - \frac{2}{3}).$$

On en déduit que si $l_0 \neq \frac{2}{3}$, alors la suite $(l_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est non bornée avec

$$\lim_{n\to+\infty} |l_n| = +\infty.$$

Si $l_0 = \frac{2}{3}$, la suite est constante et égale à $\frac{2}{3}$.

2. (a) Notons $(v_n)_{(n\in\mathbb{N})}$, la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n + \frac{u_{2n}}{2}.$$

D'après l'hypothèse, cette suite est convergente vers 1.
Soit l une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$. On considère une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ convergente vers l. La relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2\varphi(n)} = 2(v_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)})$$

permet de dire que la suite $(u_{2\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente vers $2(1-l)$. Ce réel est donc valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$.

(b) On peut effectuer une preuve par récurrence évidente en utilisant le résultat précédent.

(c) La suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ étant bornée, elle est incluse dans une boule fermée de $\mathbb{R}$ donc un compact de $\mathbb{R}$. Ainsi,
- la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ admet au moins une valeur d'adhérence,
- l'ensemble de ces valeurs d'adhérence est bornée.

Si un réel différent de $\frac{2}{3}$ était valeur d'adhérence de la suite, il existerait une suite non bornée de valeurs d'adhérence, ce qui est impossible. Le réel $\frac{2}{3}$ est donc l'unique valeur d'adhérence. En utilisant la proposition 7.10 page 73, on en déduit que la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente vers $\frac{2}{3}$.

♣

10.1.2 Suites récurrentes d'ordre k ($k \in \mathbb{N}^*$)

Définition : Soit E un ensemble non vide. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite récurrente d'ordre k ($k \in \mathbb{N}^*$) si on peut la définir de la manière suivante,

$$\begin{cases} (u_0, u_1, \cdots, u_{k-1}) \in E^k, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+k} = f(u_n, u_{n+1}, \cdots, u_{n+k-1}), \end{cases}$$

où f est une application définie sur E^k à valeurs dans E.

Exemple : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n. \end{cases}$$

On vérifie que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n - 3^n.$$

10.2 Théorème du point fixe pour un espace métrique complet

Théorème 10.1 *(Du point fixe) Soit (E, d) un espace métrique complet et une application $f : E \to E$ une application contractante, c'est-à-dire qu'il existe un réel $k \in [0, 1[$ vérifiant*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(f(x), f(y)) \leq k.d(x, y).$$

Alors f admet un unique point fixe et toute suite de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in E, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n), \end{cases}$$

est convergente vers ce point fixe.

Preuve. Existence du point fixe.
On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E définie par u_0 élément de E et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Montrons que cette suite est de Cauchy. Par une récurrence évidente, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d(u_{n+1}, u_n) \leq k^n d(u_1, u_0).$$

Pour tous entiers positifs p et q tels que $p > q$, on a

$$d(u_q, u_p) \leq \sum_{n=q}^{p-1} d(u_{n+1}, u_n) \leq \sum_{n=q}^{p-1} k^n d(u_1, u_0)$$

$$= d(u_1, u_0) k^q \frac{1 - k^{p-q}}{1 - k} \leq d(u_1, u_0) k^q \frac{1}{1 - k}.$$

Cette dernière suite converge vers 0 lorsque q tend vers $+\infty$. Soit ε un réel strictement positif. Il existe un naturel N vérifiant,

$$\forall n \geq N, \quad 0 \leq d(u_1, u_0) k^n \frac{1}{1 - k} < \varepsilon.$$

D'où,

$$\forall p \geq N, \forall q \geq N, \quad d(u_p, u_q) < \varepsilon.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy donc convergente car (E, d) est un espace métrique complet. Notons l sa limite. D'une part

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = l.$$

D'autre part l'application f est continue car lipschitzienne. Ainsi,

$$\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l).$$

Ainsi, $f(l) = l$ et l est un point fixe.
Unicité du point fixe.
Considérons x et y deux points fixes de l'application f. Ces deux éléments vérifient

$$d(x, y) \leq kd(x, y),$$

donc

$$(1 - k)d(x, y) \leq 0$$

le réel $(1 - k)$ étant strictement positif, on a $d(x, y) \leq 0$, c'est-à-dire $x = y$. ♣

Voici un exercice préliminaire à la preuve de la proposition 10.2.

Exercice 10.2 Soient p un entier strictement positif, l un élément de E et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E tels que pour tout $r \in \{0, \cdots, p-1\}$ la suite extraite $(u_{np+r})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Solution. Soit ε un réel strictement positif :

$$\forall r \in \{0, \cdots, p-1\}, \quad \exists n_r \in \mathbb{N}, / \forall n \geq n_r, \quad d(u_{np+r}, l) < \varepsilon.$$

Soit

$$N = p \max\{n_0, n_1, n_2, \cdots, n_{p-1}\}.$$

Nous obtenons

$$\forall n \geq N, \quad d(u_n, l) < \varepsilon.$$

♣

La proposition suivante sera, en particulier, utilisée dans les chapitres 25, 26 et 27 pour établir l'existence et l'unicité de solutions de certaines équations différentielles, solutions vérifiant des conditions initiales (Condition de Cauchy).

Proposition 10.2 *Soient (E, d) un espace métrique complet, p un entier strictement positif et $f : E \to E$ tels que l'application $f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$ soit contractante. Alors f admet un unique point fixe et toute suite de la forme*

$$\begin{cases} u_0 \in E, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n), \end{cases}$$

est convergente vers ce point fixe.

Preuve. D'après le théorème précédent, l'application f^p admet un point fixe unique que l'on notera l. Montrons que cet élément est également unique point fixe de l'application f. On a

$$f(l) = f(f^p(l)) = f^{p+1}(l) = f^p(f(l)).$$

Nous remarquons que $f(l)$ est point fixe de f^p. Celui-ci étant unique, on obtient $f(l) = l$. D'autre part, f ne peut avoir deux points fixes distincts car tout point fixe de f est point fixe de f^p. Considérons une suite d'éléments de E définie par

$$\begin{cases} u_0 \in E, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Considérons, pour tout entier r compris entre 0 et $(p-1)$, la suite extraite

$$(u_{np+r})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Nous remarquons qu'une telle suite peut être définie par son premier terme u_r et par la relation de récurrence d'ordre 1

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{(n+1)p+r} = f^p(u_{np+r}).$$

On en déduit que, pour tout entier r compris entre 0 et $(p-1)$, la suite extraite $(u_{np+r})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers l. Le résultat de l'exercice 10.2 nous permet de dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers l. ♣

10.3 Théorème du point fixe pour un espace métrique compact

Théorème 10.3 *(Du point fixe) On considère (E, d) un espace métrique compact et une application $f : E \to E$ tels que*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y). \tag{10.5}$$

Alors f admet un unique point fixe et toute suite de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in E, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n), \end{cases}$$

est convergente vers ce point fixe.

Preuve. Établissons dans un premier temps l'existence et l'unicité du point fixe. Considérons l'application g définie sur E par

$$g: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & d(x, f(x)). \end{array}$$

L'application f est continue car lipschitzienne. L'application g est donc également continue sur E espace métrique compact. Elle est ainsi bornée et atteint ses bornes. Considérons un élément l de E vérifiant

$$\min_{x\in E} d(x, f(x)) = d(l, f(l)).$$

Si $f(l)$ était différent de l, nous aurions

$$d(f(l), f(f(l))) < d(l, f(l)) = \min_{x \in E} d(x, f(x)),$$

ce qui est impossible. Nous avons établi l'existence d'un point fixe.
Soient l et l' points fixes de l'application f. On a

$$d(f(l), f(l')) = d(l, l')$$

d'où

$$l = l'.$$

f admet donc un unique point fixe que l'on notera l. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 \in E, & \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = d(u_n, l).$$

Cette dernière suite est décroissante. En effet, soit n un entier naturel.

1. Si $u_n \neq l$,
$$d(u_{n+1}, l) = d(f(u_n), f(l)) < d(u_n, l).$$
2. Si $u_n = l$,
$$d(u_{n+1}, l) = d(u_n, l) = 0.$$

Cette suite est minorée par 0, donc convergente vers un réel que l'on note α.
L'espace métrique E étant compact, nous pouvons considérer $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergente vers un élément de E que l'on note l_1.
Nous avons,

$$\alpha = \lim_{n \to +\infty} v_{\varphi(n)} = \lim_{n \to +\infty} d(u_{\varphi(n)}, l) = d(l_1, l),$$

et

$$\alpha = \lim_{n \to +\infty} v_{\varphi(n)+1} = \lim_{n \to +\infty} d(u_{\varphi(n)+1}, l) = \lim_{n \to +\infty} d(f(u_{\varphi(n)}), l) = d(f(l_1), l).$$

D'après les hypothèses du théorème, nous obtenons

$$\alpha = d(l_1, l) = d(f(l_1), f(l)) = 0.$$

On en déduit que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers 0 et que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l'unique point fixe l.

♣

Remarque 10.2 *Remarquons que le théorème tombe en défaut si nous remplaçons dans l'hypothèse « compact » par « complet ». Choisissons $E = \mathbb{R}^+$. On considère l'application f définie par*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & x + \frac{1}{x+1} \end{array}$$

En dérivant cette fonction et en utilisant l'inégalité des accroissements finis, on remarque qu'elle vérifie l'hypothèse 10.5 mais n'admet pas de point fixe.

10.4 Suites réelles récurrentes d'ordre 1

10.4.1 Propriétés

Dans cette section, I représente un intervalle réel, f une application définie sur I à valeurs dans I et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n), \end{cases}$$

Voici deux propositions permettant de donner des précisions sur le comportement et la convergence éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 10.4 *1. Si l'application f est croissante sur I, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.*

2. Si l'application f est décroissante sur I, alors les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et$(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens de variation opposé.

Preuve.

1. Si l'application f est croissante, alors pour tout entier positif n, le signe du réel $(u_{n+2} - u_{n+1})$, c'est-à-dire $f(u_{n+1}) - f(u_n)$, est celui de $(u_{n+1} - u_n)$. La suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de signe constant.
   – Si $u_1 > u_0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
   – Si $u_1 < u_0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   On peut remarquer que, s'il existe un entier naturel p tel que $u_{p+1} = u_p$, alors u_p est point fixe de l'application f et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
2. Si l'application f est décroissante, alors l'application $f \circ f$ est croissante. On en déduit que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et$(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones. D'autre part, l'application f étant décroissante, les signes de $(u_3 - u_1)$ et de $(u_2 - u_0)$ sont opposés. Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et$(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc monotones de sens de variation opposé.

♣

Proposition 10.5 *Si la suite $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ est convergente vers un réel l appartenant à I et si f est continue en ce point, alors il est point fixe pour l'application f.*

Preuve. L'application f étant continue en l et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente vers l, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $f(l)$ (proposition 3.7, page 37). Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) = u_{n+1}.$$

On en déduit que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l et que celui-ci est un point fixe. ♣

Remarque 10.3 Attention ! *Si l'intervalle I n'est pas fermé, la limite l n'appartient pas toujours à celui-ci. Dans ce cas, l ne peut être point fixe. On pourra pour cela étudier l'exercice 10.4.*

10.4.2 Points fixes attractifs, points fixes répulsifs

Points fixes attractifs

Proposition 10.6 *Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I et l un point fixe de f appartenant à $\overset{\circ}{I}$. Si f est dérivable en l avec $|f'(l)| < 1$, on dit que l est un point fixe attractif. Il existe alors un réel α strictement positif tel que :*

Toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in]l-\alpha, l+\alpha[, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

est définie et converge vers l.

Preuve. On considère une application f définie sur un intervalle I, $l \in \overset{\circ}{I}$ un point fixe attractif de f, c'est-à-dire $f(l) = l$ et $|f'(l)| < 1$. On a

$$\lim_{t\to l}\left|\frac{f(t)-l}{t-l}\right| = |f'(l)|.$$

Soit r un réel appartenant à l'intervalle $]|f'(l)|, 1[$. Il existe un réel strictement positif α tel que

$$]l-\alpha, l+\alpha[\subset I,$$

et

$$\forall t \in]l-\alpha, l+\alpha[\setminus\{l\}, \qquad \left|\frac{f(t)-l}{t-l}\right| \leq r.$$

L'intervalle $]l-\alpha, l+\alpha[$ est stable par l'application f car

$$\forall t \in]l-\alpha, l+\alpha[, \quad 0 \leq |f(t)-l| \leq r\,|t-l| < r\alpha < \alpha.$$

Toute suite de la forme

$$\begin{cases} u_0 \in]l-\alpha, l+\alpha[, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

est donc bien définie. D'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq r|u_n - l|.$$

Par une récurrence évidente, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n - l| \leq r^n |u_0 - l|.$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers l. ♣

Points fixes répulsifs

Proposition 10.7 *Soient f une fonction numérique définie sur un intervalle I à valeurs dans I et l un point fixe de f appartenant à $\mathring{I}$. Si f est dérivable en l avec $|f'(l)| > 1$, on dit que l est un point fixe répulsif. Si une suite de la forme*

$$\begin{cases} u_0 \in I, & \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

est convergente vers ce point fixe répulsif l, alors elle est stationnaire. Si, de plus, l'application f est injective alors elle est constante.

Preuve. On considère une application f définie sur un intervalle I à valeurs dans I, $l (\in \mathring{I})$ un point fixe répulsif de f, c'est-à-dire $f(l) = l$ et $|f'(l)| > 1$. On a

$$\lim_{t \to l} \left| \frac{f(t) - l}{t - l} \right| = |f'(l)|.$$

Soit r un réel appartenant à l'intervalle $]1, |f'(l)|[$. Il existe un réel strictement positif α tel que

$$]l - \alpha, l + \alpha[\subset I,$$

et

$$\forall t \in]l - \alpha, l + \alpha[\setminus \{l\}, \qquad \left| \frac{f(t) - l}{t - l} \right| \geq r.$$

Donc,

$$\forall t \in]l - \alpha, l + \alpha[, \quad |f(t) - l| \geq r\,|t - l|\,.$$

On suppose la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers l. Il exite un entier naturel n_0 vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| < \alpha.$$

En conséquence,

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \geq r|u_n - l|.$$

Par une récurrence évidente, on obtient

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \geq r^{n - n_0} |u_{n_0} - l|.$$

Le réel r étant strictement supérieur à 1, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut être convergente vers l que si

$$|u_{n_0} - l| = 0.$$

Ainsi,

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n = l.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.
Si l'application f est injective, alors l'application f^{n_0} est également injective. De

$$f^{n_0}(u_0) = u_{n_0} = l = f^{n_0}(l),$$

on déduit que $u_0 = l$. ♣

10.4.3 Exercices

Exercice 10.3 Soit a un réel. Étudier la nature et le comportement de la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \cos(u_n). \end{cases}$$

Solution. Remarquons que

$$\cos(\mathbb{R}) = [-1;1] \quad \text{et} \quad \cos([-1;1]) \subset [0,1].$$

Le réel u_2 appartient au segment $[0;1]$. Il suffit donc d'étudier la restriction de la fonction cosinus au segment $[0;1]$:

$$\begin{array}{rccc} \cos : & [0;1] & \longrightarrow & [0;1] \\ & x & \longmapsto & \cos x. \end{array}$$

Nous avons

$$\forall x \in [0;1], \quad |\cos'(x)| = |\sin x| \leq \sin 1 < 1.$$

La fonction cosinus est ainsi contractante sur l'espace complet $[0;1]$. La fonction cosinus admet un unique point fixe α sur ce segment et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ce point fixe. La fonction cosinus étant décroissante sur le segment $[0;1]$, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent vers α. On a ainsi un majorant de l'erreur avec :

$$\forall n \geq 2, \quad |u_n - \alpha| \leq |u_n - u_{n+1}|.$$

♣

Exercice 10.4 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$, à valeurs dans ce même intervalle, par

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ & x & \longmapsto & \frac{x}{2} + \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right) \end{array}$$

1. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

est convergente vers un réel qui n'est pas un point fixe de f.

Solution.

1. Évident.
2. On vérifie simplement que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{2^n}.$$

Cette suite est convergente vers 0 qui n'est pas point fixe.

♣

Exercice 10.5 On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \longmapsto & \frac{e^{-x}}{x}. \end{array}$$

Soit a un réel strictement positif. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

Étudier, suivant la valeur de a, la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution. Supposons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Celle-ci étant à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, sa limite appartient à $\mathbb{R}^+$, l'adhérence de $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Nous avons

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers 0. En effet, on aurait

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = +\infty.$$

Ceci est impossible.

2. La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $\mathbb{R}^{+*}$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, cette limite est un point fixe de f.
3. Étude des points fixes de l'application f.
Un réel est point fixe de f si et seulement si il est un zéro de l'application

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \longmapsto & x^2 - e^{-x}. \end{array}$$

Après une étude rapide, on remarque que g réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ sur l'intervalle $]-1; +\infty[$. L'application f a donc un unique point fixe que l'on notera α. La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc ce point fixe α. L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec,

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'(x) = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}.$$

Or,

$$f'(\alpha) = \frac{-e^{-\alpha}(\alpha+1)}{\alpha^2} = -(\alpha+1).$$

Le réel α étant strictement positif, on a $|f'(\alpha)| > 1$. Il est point fixe répulsif de f. L'application f étant injective, nous savons, d'après la proposition 10.7, que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
En conclusion, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si $u_0 = \alpha$.

♣

Exercice 10.6 On considère l'application f définie par

$$f: \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & 2x^2-1. \end{array}$$

Le but de cet exercice est l'étude, suivant les valeurs du réel a appartenant au segment $[-1,1]$, du comportement asymptotique de la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = a, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$$

1. (a) Vérifier que l'application f admet exactement deux points fixes : 1 et $-\frac{1}{2}$.
   (b) En déduire que, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, sa limite est l'une de ces deux valeurs.
2. Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant au segment $[0,1]$ vérifiant
$$a = \cos(\alpha\pi).$$
3. Pour tout entier naturel n, écrire le réel u_n en fonction de n, α et de l'application cosinus.
4. Déterminer l'ensemble A_1 des réels a appartenant au segment $[-1,1]$, pour lesquels la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 1. Montrer que A_1 est une partie dénombrable dense du segment $[-1,1]$.
5. Déterminer l'ensemble $A_{\left(-\frac{1}{2}\right)}$ des réels a appartenant au segment $[-1,1]$, pour lesquels la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $-\frac{1}{2}$. Montrer que $A_{\left(-\frac{1}{2}\right)}$ est une partie dénombrable dense du segment $[-1,1]$.
6. En déduire l'ensemble A des réels a appartenant au segment $[-1,1]$ tels que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

7. Montrer que, si α est rationnel, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire

$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad u_{n+p} = u_n.$$

Solution.

1. (a) Il suffit de résoudre dans $[-1,1]$, l'équation $f(x) = x$. On obtient le résultat désiré.

   (b) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à valeurs dans le segment $[-1,1]$ est convergente, sa limite l appartient à ce segment, partie fermée de $\mathbb{R}$. L'application f étant continue sur son ensemble de définition et en particulier en l, celui-ci est un point fixe de f. Les seules limites sont donc 1 et $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

2. L'application

$$\begin{array}{rccc} g: & [0,1] & \longrightarrow & [-1,1] \\ & x & \longmapsto & \cos(\pi x), \end{array}$$

réalise une bijection strictement décroissante de $[0,1]$ sur $[-1,1]$. On en déduit qu'il existe un unique réel α appartenant au segment $[0,1]$ vérifiant $a = \cos(\alpha\pi)$.

3. Effectuons une preuve par récurrence. Considérons pour tout entier naturel n, la proposition

$$\mathcal{P}_n :'' u_n = \cos(2^n\alpha\pi)''.$$

Nous avons $\mathcal{P}_0$.
Soit n un entier naturel. Montrons que

$$\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}.$$

$$u_{n+1} = f(u_n) = 2.\cos^2(2^n\alpha\pi) - 1 = \cos(2.2^n\alpha\pi) = \cos(2^{n+1}\alpha\pi).$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \cos(2^n\alpha\pi).$$

4. Le réel 1 est un point fixe répulsif de l'application f car $f'(1) = 4$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 1, elle est stationnaire. Il existe alors un entier naturel n vérifiant

$$\cos(2^n\alpha\pi) = 1.$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 1 si et seulement si il existe deux entiers naturels n et p vérifiant

$$\alpha = \frac{p}{2^{n-1}},$$

c'est-à-dire si et seulement si α est un nombre dyadique. Notons $\mathcal{D}_{[0,1]}$, l'ensemble des nombres dyadiques appartenant au segment $[0,1]$. On obtient

$$A_1 = \{\cos(\alpha\pi)/\alpha \in \mathcal{D}_{[0,1]}\}.$$

L'ensemble $\mathcal{D}_{[0,1]}$ est dénombrable puisqu'il est inclus dans l'ensemble des nombres rationnels. L'ensemble A_1 est donc dénombrable. Montrons que A_1 est dense dans $[-1,1]$. Soit a un élément de ce segment. Considérons le réel α élément de $[0,1]$ vérifiant $a = \cos(\alpha\pi)$. Le réel α est limite d'une suite de nombres dyadiques $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{D}_{[0,1]}$. L'application cosinus étant continue en α, la suite $(\cos(\alpha_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} \cos(\alpha_n) = \cos(\alpha) = a.$$

A_1 est dense dans le segment $[-1,1]$.

5. Le réel $\left(-\frac{1}{2}\right)$ est un point fixe répulsif de l'application f car $f'(-\frac{1}{2}) = -2$. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\left(-\frac{1}{2}\right)$, elle est stationnaire. Il existe alors un entier naturel n vérifiant

$$\cos(2^n\alpha\pi) = -\frac{1}{2}.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\left(-\frac{1}{2}\right)$ si et seulement si le réel α vérifie l'une des deux propositions (10.6) ou (10.7) :

$$\exists (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad 2^n\alpha = \frac{2}{3} + 2p, \tag{10.6}$$

$$\exists (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad 2^n\alpha = \frac{4}{3} + 2p. \tag{10.7}$$

En remarquant que

$$(10.6) \Rightarrow (10.7),$$

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\left(-\frac{1}{2}\right)$ si et seulement si le réel α vérifie la proposition (10.7) :

$$\exists (n,p) \in \mathbb{N}^2, \quad \alpha = \frac{2}{3.2^{n-1}} + \frac{p}{2^{n-1}}.$$

Notons $\mathcal{D}'_{[0,1]}$, l'ensemble des nombres réels appartenant au segment $[0,1]$ et vérifiant la proposition (10.7). On obtient

$$A_{\left(-\frac{1}{2}\right)} = \{\cos(\alpha\pi) / \alpha \in \mathcal{D}'_{[0,1]}\}.$$

L'ensemble $\mathcal{D}'_{[0,1]}$ est dénombrable puisqu'il est inclus dans l'ensemble des nombres rationnels. L'ensemble $A_{\left(-\frac{1}{2}\right)}$ est donc dénombrable. Montrons que $A_{\left(-\frac{1}{2}\right)}$ est dense dans $[-1,1]$. Soit a un élément de ce segment. Considérons le réel α élément de $[0,1]$ vérifiant $a = \cos(\alpha\pi)$. On considère $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des approximations dyadiques par défaut de α. La suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_n = \frac{2}{3.2^{n-1}} + \alpha_{n-1}$$

est également convergente vers α. L'application cosinus étant continue en α, la suite $(\cos(\beta_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} \cos(\beta_n) = \cos(\alpha) = a.$$

Cette dernière suite est à valeurs dans $\mathcal{D}'_{[0,1]}$. L'ensemble $A_{\left(-\frac{1}{2}\right)}$ est dense dans le segment $[-1,1]$.

6.
$$A = A_1 \cup A_{(-\frac{1}{2})}$$
est l'ensemble des réels a appartenant au segment $[-1, 1]$, pour lesquels la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. A est une partie dénombrable et dense de $[-1, 1]$.

7. Écrivons le réel α à l'aide de son développement dyadique :
$$\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{2^k},$$
où pour tout entier naturel k, a_k appartient à $\{0; 1\}$. Remarquons que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \cos(2^n \pi \alpha) = \cos\left(\pi\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k.2^{n-k}\right) + \pi\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{2^{k-n}}\right)\right)$$
$$= \cos\left(\pi \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{a_k}{2^{k-n}}\right) = \cos\left(\pi \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{k+n}}{2^k}\right).$$
Si le réel α est rationnel, son développement dyadique est périodique à partir d'un certain rang, c'est-à-dire
$$\exists p \in \mathbb{N}^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad a_{n+p} = a_n.$$
Ainsi,
$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+p} = \cos\left(\pi\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{k+p+n}}{2^k}\right)\right) = \cos\left(\pi\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_{k+n}}{2^k}\right)\right) = u_n.$$

♣

Chapitre 11

Vitesse et accélération de convergence de suites réelles

11.1 Vitesse de convergence d'une suite réelle

Remarque 11.1 *Nous étudierons, dans les exercices 11.2 et 11.4, la vitesse de convergence de suites définies à l'aide de séries. La notion de série et la notation de la limite d'une série convergente sont indiquées ultérieurement, dans le chapitre 15.*

Définition : On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un réel l.

1. On suppose que la suite de terme général

$$\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l}$$

est convergente. On note λ sa limite.

   (a) Si $|\lambda| = 1$, on dit que la convergence est lente,

   (b) si $|\lambda| \in]0,1[$, on dit que la convergence est géométrique de rapport λ,

   (c) si $\lambda = 0$, on dit que la convergence est rapide.

2. Soit r un réel strictement supérieur à 1. On dit que la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l est d'ordre r si la suite

$$\frac{u_{n+1}-l}{|u_n-l|^r}$$

est bornée. On remarque, que dans ce cas, la convergence de la suite est rapide.

11.1.1 Premiers exemples de vitesse de convergence

Exercice 11.1 Donner les vitesses de convergence des suites de terme général :

1. $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{n^k}$, $(k \in \mathbb{N}^*)$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{\ln n}$.
2. q^n $(q \in]-1,1[)$.
3. $\frac{1}{n!}$.

Solution. De façon évidente, on trouve que la convergence vers 0 est

1. lente,
2. géométrique de rapport q,
3. rapide.

♣

Exercice 11.2 On sait (exercice 21.1) que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On considère $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles définie par

$$\forall n \geq 1, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. Montrer que
$$\forall n \geq 1, \quad \frac{1}{n+1} \leq \frac{\pi^2}{6} - S_n \leq \frac{1}{n}.$$
2. En déduire la vitesse de convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $\frac{\pi^2}{6}$.

Solution.

1.
$$\forall n \geq 1, \quad \frac{\pi^2}{6} - S_n = R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$
L'application $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ étant strictement décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$, nous avons
$$\forall k \geq 2, \quad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}.$$
Les trois séries correspondant aux termes ci-dessus sont convergentes. Ainsi, à la limite,
$$\forall n \geq 1, \quad \int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{t^2}.$$
On obtient ainsi le résultat désiré.

2. En utilisant le résultat de la première question, on obtient

$$\left(\frac{\pi^2}{6} - S_n\right) \sim \frac{1}{n}.$$

D'où,

$$\frac{\frac{\pi^2}{6} - S_{n+1}}{\frac{\pi^2}{6} - S_n} \sim \frac{n}{n+1} \sim 1.$$

Ainsi, la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers $\frac{\pi^2}{6}$ est lente.

♣

11.1.2 Suites convergentes vers e

Dans cette section, nous considérons trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (exercice 11.3) et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (exercice 11.4) convergentes toutes les trois vers le réel e. Pour chacune de ces suites, la convergence est respectivement, lente, géométrique de rapport $\frac{1}{2}$ et rapide.

Exercice 11.3 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

1. Montrer que cette suite est convergente et déterminer sa limite.
2. Quelle est la vitesse de convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
3. Même question avec la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \geq 0, \quad v_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$$

Solution.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs strictement positives.

$$\forall n \geq 1, \quad \ln(u_n) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Ainsi,

$$\ln(u_n) \sim \frac{n}{n} = 1.$$

La suite $(\ln u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers 1 et l'application exponentielle continue en 1. Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \exp(\ln(u_n)) = \exp(1) = e.$$

2. Effectuons le développement limité à l'ordre 1 en 0 de la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \longmapsto & (1+x)^{\frac{1}{x}} . \end{array}$$

Nous avons

$$\ln(f(x)) = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = 1 - \frac{x}{2} + o(x).$$

$$f(x) = \exp(\ln f(x)) = \exp(1-\frac{x}{2}+o(x)) = e.\exp(-\frac{x}{2}+o(x)) = e(1-\frac{x}{2}+o(x)).$$

On obtient

$$u_n = e - \frac{e}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

puis,

$$u_n - e \sim -\frac{e}{2n}$$

et

$$\frac{u_{n+1} - e}{u_n - e} \sim \frac{n}{n+1} \sim 1.$$

On en déduit que la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers e est lente.

3. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Elle converge vers e. En utilisant le développement limité d'ordre 1 en 0 de la fonction f définie dans la question précédente, on obtient le développement asymptotique suivant :

$$v_n = e - \frac{e}{2^{n+1}} + o\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Ainsi,

$$v_n - e \sim -\frac{e}{2^{n+1}},$$

$$\frac{v_{n+1} - e}{v_n - e} \sim \frac{1}{2}.$$

On en déduit que la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers e est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

♣

Exercice 11.4 On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers e et définie pour tout naturel n par

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Nous savons que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers e (exercice 7.3 ou proposition 18.17).

1. Montrer que pour tout entier naturel n, on a
$$\frac{1}{(n+1)!} < e - w_n < \frac{2}{(n+1)!}.$$
2. En déduire que la convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est rapide.
3. Soit r un réel strictement supérieur à 1. Montrer que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \frac{e - w_{n+1}}{(e - w_n)^r}$$
est non bornée.
En déduire que la convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers e ne peut être d'ordre r.

Solution.

1. On note $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des restes :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e - w_n = R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$
Il est évident que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} > \sum_{k=n+1}^{n+1} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}.$$
D'autre part,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\left(\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)\cdots k}\right)$$
$$< \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!}\left(\sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-n-1}}\right) = \frac{1}{(n+1)!}\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-n-1}}\right) = \frac{2}{(n+1)!}.$$
2. À l'aide des inégalités obtenues dans la question précédente, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2(n+2)} < \frac{e - w_{n+1}}{e - w_n} < \frac{2}{(n+2)}.$$
La convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers e est rapide.
3. En utilisant les inégalités de la première question, on obtient
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad t_n = \frac{e - w_{n+1}}{(e - w_n)^r} > \frac{((n+1)!)^r}{2^r (n+2)!} = \frac{1}{2^{r+1}} \prod_{k=2}^{n+1} \frac{k^r}{k+1}.$$
Ce dernier terme est un produit de réels strictement positifs. De plus,
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k^r}{k+1} = +\infty$$
nous permet de dire que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers plus l'infini et donc est non bornée. On en déduit que la convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut être d'ordre r.

♣

11.1.3 Suites convergentes vers π

Exercice 11.5 1. On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Montrer que cette suite est convergente vers π et déterminer sa vitesse de convergence.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \geq 0, \quad u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Montrer que cette suite est convergente vers π et déterminer sa vitesse de convergence.

Solution.

1. En utilisant le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction sinus, nous obtenons le développement asymptotique suivant de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$a_n = n\left(\frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = \pi - \frac{\pi^3}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers π. De plus,

$$a_n - \pi \sim -\frac{(\pi)^3}{6n^2} \quad \text{et} \quad \frac{a_{n+1}-\pi}{a_n - \pi} \sim \frac{n^2}{(n+1)^2} \sim 1.$$

La convergence est lente.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Elle est convergente vers π. Elle admet le développement asymptotique suivant :

$$u_n = 2^n\left(\frac{\pi}{2^n} - \frac{\pi^3}{6.2^{3n}} + o\left(\frac{1}{2^{3n}}\right)\right) = \pi - \frac{\pi^3}{6.2^{2n}} + o\left(\frac{1}{2^{2n}}\right).$$

Ainsi,

$$u_n - \pi \sim -\frac{\pi^3}{6.2^{2n}} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}-\pi}{u_n-\pi} = \frac{1}{4}.$$

La convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de rapport $\frac{1}{4}$.

♣

Remarque 11.2 *La construction de ces suites a pour but l'obtention d'une valeur approchée du réel π.* **Attention**, *pour donner la valeur d'un réel a_n ou d'un réel u_n, on doit s'interdire d'utiliser le nombre π. Il est donc difficile, voire impossible, d'exploiter la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Ce qui n'est pas le cas de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui peut* *être définie à l'aide d'une récurrence. En effet, considérons la suite $(c_n)_{n\in}$ définie par*

$$\forall n \geq 1, \quad c_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

Nous remarquons que cette suite est à valeurs réelles positives et strictement positives à partir du rang 2. Nous avons,

$$\forall n \geq 1, \quad c_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) - 1 = 2c_{n+1}^2 - 1.$$

Ainsi,

$$\forall n \geq 1, \quad c_{n+1} = \sqrt{\frac{c_n + 1}{2}}.$$

D'autre part,

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = u_{n+1}c_{n+1}.$$

Donc,

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{c_{n+1}}.$$

En conclusion,

$$\left\{\begin{array}{ll} c_1 = 0, & u_1 = 2, \\ \forall n \geq 1, & c_{n+1} = \sqrt{\frac{c_n+1}{2}} \\ \forall n \geq 1, & u_{n+1} = \frac{u_n}{c_{n+1}}. \end{array}\right. \tag{11.8}$$

On peut ainsi calculer les différentes valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

11.1.4 Suites convergentes vers un point fixe attractif

La définition des points fixes attractifs est donnée dans la section 10.4.2, page 139. On considère f une fonction numérique définie sur un intervalle I et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ et convergente vers l, un point fixe attractif de f. On supposera qu'à partir d'un certain rang, $u_n \neq l$. Étudions la vitesse de convergence de cette suite. Nous avons

$$\lim_{t\to l} \frac{f(t) - l}{t - l} = f'(l).$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente vers l, nous obtenons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} = f'(l).$$

Le réel l étant un point fixe attractif, nous avons $|f'(l)| < 1$. Deux cas se présentent :

1. $f'(l) \neq 0$.
   La vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de rapport $f'(l)$.

2. $f'(l) = 0$.
   La vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est rapide.
   Si l'on suppose que l'application f est p fois dérivable en l ($p \geq 2$) avec

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, (p-1)\}, \quad f^{(k)}(l) = 0,$$

   la formule de Taylor-Young à l'ordre p permet d'écrire :

$$\lim_{t\to l} \frac{f(t) - l}{(t-l)^p} = \frac{f^{(p)}(l)}{p!}.$$

   Donc,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1} - l}{(u_n - l)^p} = \frac{f^{(p)}(l)}{p!}.$$

   La vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l est d'ordre p.

11.2 Accélération de la convergence d'une suite

11.2.1 Définitions

Définition : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes vers un même réel l, on dit que la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est plus élevée que celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $v_n - l = o(u_n - l)$.

Définition : Accélérer la convergence d'une suite consiste à construire à partir de cette dernière une autre suite qui converge plus vite vers la même limite.

Remarque 11.3 *Nous proposons dans cette section deux méthodes d'accélération de convergence de suite à convergence géométrique :*

1. *La méthode de Richardson est préconisée lorsque l'on connait λ, le rapport de convergence géométrique, et que l'on autorise son utilisation dans les divers calculs.*
2. *Dans le cas contraire, la méthode d'Aitken sera utilisée.*

11.2.2 Méthode d'accélération de Richardson

Théorème 11.1 *On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un réel l avec une convergence géométrique de rapport λ ($0 < |\lambda| < 1$). Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_{n+1} - \lambda u_n}{1 - \lambda}$$

converge vers l plus vite que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette méthode d'accélération est appelée méthode d'accélération de Richardson.

Preuve. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire de suites convergentes donc convergente. Sa limite est

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{l-\lambda l}{1-\lambda} = l.$$

D'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n - l = \frac{u_{n+1} - \lambda u_n}{1-\lambda} - l = \frac{(u_{n+1} - l) - \lambda(u_n - l)}{1-\lambda}$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{v_n - l}{u_n - l} = \frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} - \lambda\right).$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n - l}{u_n - l} = 0.$$

La convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l est plus rapide que celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ♣

Quelle est alors la vitesse de convergence de la suite accélérée ? Étudions la situation dans un cas particulier.

Proposition 11.2 *On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettant un développement asymptotique de la forme*

$$u_n = l + a\lambda^n + o(\lambda^n),$$

où a est un réel non nul et $0 < |\lambda| < 1$. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l avec une convergence géométrique de rapport λ.

Preuve.

$$\frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} \sim \frac{a\lambda^{n+1}}{a\lambda^n} \sim \lambda.$$

D'où le résultat. ♣

Remarque 11.4 *Attention, la réciproque est fausse. On peut le vérifier par exemple avec les suites $(n\lambda^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(\frac{\lambda^n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

Proposition 11.3 *On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettant un développement asymptotique de la forme*

$$u_n = l + a\lambda^n + b\mu^n + o(\mu^n),$$

où a et b sont des réels non nuls et $0 < |\mu| < |\lambda| < 1$. Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, accélérée de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec la méthode de Richardson, admet un développement asymptotique de la forme

$$v_n = l + b'\mu^n + o(\mu^n),$$

où b' est un réel non nul. La convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l est géométrique de rapport μ.

Preuve.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_{n+1} - \lambda u_n}{1-\lambda} = l + \frac{b(\mu - \lambda)}{1-\lambda}\mu^n + o(\mu^n).$$

On pose $b' = \frac{b(\mu-\lambda)}{1-\lambda}$. Ce réel est non nul. D'après la proposition 11.2, la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l est géométrique de rapport μ. ♣

Remarque 11.5 *Pour utiliser la méthode de Richardson, il faut connaître la valeur de λ et pouvoir l'utiliser dans les calculs. S'il en est de même du réel a, on peut accélérer de façon plus simple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en définissant la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - a\lambda^n.$$

La convergence de cette nouvelle suite vers l est géométrique de rapport μ.

11.2.3 Itération de la méthode de Richardson

On peut itérer la méthode d'accélération de Richardson. Voici un exemple de double itération.

Proposition 11.4 *On considère une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admettant un développement asymptotique de la forme*

$$u_n = l + a\lambda^n + b\mu^n + c\gamma^n + o(\gamma^n),$$

où a, b *et* c *sont des réels non nuls et* $0 < |\gamma| < |\mu| < |\lambda| < 1$. *Alors*

1. *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* l *avec une convergence géométrique de rapport* λ. *On note* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite accélérée de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par la méthode de Richardson.*
2. *La suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet un développement asymptotique de la forme*

   $$v_n = l + b'\mu^n + c'\gamma^n + o(\gamma^n)$$

   où b' *et* c' *sont des réels non nuls. La convergence de la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* l *est géométrique de rapport* μ. *On note* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite accélérée de la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par la méthode de Richardson.*
3. *La suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet un développement asymptotique de la forme*

   $$w_n = l + c''\gamma^n + c + o(\gamma^n)$$

   où c'' *est un réel non nul. La convergence de la suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* l *est géométrique de rapport* γ.

Preuve. Il suffit de réitérer les calculs de la preuve précédente. ♣

Exercice 11.6 1. Donner un développement limité à l'ordre 7 de la fonction sinus en 0.

2. En déduire un développement asymptotique de

$$u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$$

et appliquer à cette suite une double accélération.

Solution.

1. Voici le développement limité à l'ordre 7 de la fonction sinus en 0 :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7).$$

2. Nous obtenons le développement asymptotique suivant :

$$u_n = \pi - \frac{\pi^3}{3!}\frac{1}{4^n} + \frac{\pi^5}{5!}\frac{1}{16^n} - \frac{\pi^7}{7!}\frac{1}{64^n} + o\left(\frac{1}{64^n}\right).$$

En utilisant la proposition précédente, on construit avec la méthode de Richardson les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} u_n = 2^n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right), \\ v_n = \dfrac{4u_{n+1} - u_n}{3}, \\ w_n = \dfrac{16v_{n+1} - v_n}{15}, \end{cases}$$

La convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers π est géométrique de rapports respectifs $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$ et $\frac{1}{64}$. N'oublions pas que les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se calculent à partir du système 11.8, page 153.

♣

11.2.4 Méthode d'accélération d'Aitken

Dans toute cette section, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers un réel l. On supposera non seulement que pour tout entier naturel n, on a $u_n \neq l$ mais aussi $u_{n+1} \neq u_n$. On suppose que la convergence est géométrique mais le rapport λ est supposé inconnu. Cette situation se produit par exemple lorsque l est un point fixe attractif d'une fonction f dont on ne connait pas la valeur exacte de $f'(l)$. On peut prendre l'exemple de la fonction cosinus admettant un seul point fixe l. Il est facile de vérifier que $-1 < -\sin l < 0$. Ce point fixe est ainsi un point fixe attractif. Toute suite définie par une récurrence de la forme $u_{n+1} = \cos u_n$ et convergente vers l a une vitesse de convergence géométrique dont on ne connait pas le rapport. La méthode d'accélération d'Aitken est alors adaptée. Elle s'appuie sur celle de Richardson en utilisant la proposition suivante :

Proposition 11.5 *La suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par*

$$\forall n \geq 1, \quad \lambda_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n - u_{n-1}}$$

converge vers λ.

Preuve.

$$\forall n \geq 1, \quad \lambda_n = \frac{(u_{n+1} - l) - (u_n - l)}{(u_n - l) - (u_{n-1} - l)} = \frac{\frac{u_{n+1}-l}{u_n-l} - 1}{1 - \frac{u_{n-1}-l}{u_n-l}}$$

On en déduit que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente avec,

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \frac{\lambda - 1}{1 - \frac{1}{\lambda}} = \lambda.$$

♣

Corollaire 11.6 *On peut trouver un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $\lambda_n \neq 1$.*

Preuve. Évident puisque la limite de la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est différente de 1. ♣

Théorème 11.7 *On considère la suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ définie à partir du rang n_0 par*

$$\forall n \geq n_0, \quad v_n = \frac{u_{n+1} - \lambda_n u_n}{1-\lambda_n}.$$

La suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est une accélération de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette méthode est appelée méthode d'accélération d'Aitken.

Preuve. La suite $(v_n)_{n\geq n_0}$ est convergente avec,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{l - \lambda l}{1-\lambda} = l.$$

D'autre part,

$$\forall \geq n_0, \quad v_n - l = \frac{u_{n+1} - \lambda_n u_n}{1-\lambda_n} - l = \frac{(u_{n+1} - l) - \lambda_n(u_n - l)}{1-\lambda_n}$$

et

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{v_n - l}{u_n - l} = \frac{1}{1-\lambda_n}\left(\frac{u_{n+1} - l}{u_n - l} - \lambda_n\right).$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n - l}{u_n - l} = 0.$$

La convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l est plus rapide que celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ♣

Chapitre 12

Espaces vectoriels normés

12.1 Définitions

Définition : Un espace vectoriel normé complet est appelé espace de Banach.

Définition : Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien.

Définition : Un espace vectoriel préhilbertien et complet est appelé espace de Hilbert.

Définition : On dit que le quadruplet $(\mathbb{E}, +, \times, .)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ si

1. $(\mathbb{E}, +, .)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$,
2. $(\mathbb{E}, +, \times)$ est un anneau,
3. $$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in \mathbb{E}^2, \quad \lambda.(u \times v) = (\lambda.u) \times v = u \times (\lambda.v).$$

Si, de plus, $\mathbb{E}$ admet un élément unité pour la loi $\times$, on dit que $(\mathbb{E}, +, \times, .)$ est une algèbre unitaire.

Définition : Soit $(\mathbb{E},+,\times,.)$ une algèbre. On dit qu'une application $\|.\|$ est une norme d'algèbre si

1. Elle est une norme pour l'espace vectoriel $(\mathbb{E},+,.)$.
2. Elle vérifie
$$\forall (u,v)\in \mathbb{E}^2,\quad \|u\times v\|\leq \|u\|.\|v\|.$$

On dit alors que $(\mathbb{E},+,\times,.)$ muni de $\|.\|$ est une algèbre normée.

Définition : On considère une algèbre $(\mathbb{E},+,\times,.)$ munie d'une norme d'algèbre $\|.\|$. Si $(\mathbb{E},+,.)$ muni de la norme $\|.\|$ est un espace vectoriel complet, on dit que $(\mathbb{E},+,\times,.)$ munie de $\|.\|$ est une algèbre de Banach.

12.2 Comparaisons de normes

Considérons un espace vectoriel E et deux normes sur E notées $\|.\|$ et $\|.\|'$. Pour les deux espaces vectoriels normés $(E,\|.\|)$ et $(E,\|.\|')$, les propriétés métriques peuvent être différentes. Donnons des exemples. Considérons $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions définies et continues sur le segment $[0,1]$. Considérons les normes $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ définies par

$$\forall f\in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\quad \|f\|_\infty=\sup_{t\in[0;1]}|f(t)|,$$

$$\forall f\in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\quad \|f\|_1=\int_0^1 |f(t)|dt.$$

Considérons la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in[0,1],\quad P_n(t)=\sqrt{n}.t^n.$$

On a

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \|P_n\|_1=\frac{\sqrt{n}}{n+1},\quad \|P_n\|_\infty=\sqrt{n}.$$

La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non bornée pour la norme $\|.\|_\infty$ mais convergente vers l'application nulle pour la norme $\|.\|_1$. Nous pouvons remarquer que

$$\forall f\in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\quad \|f\|_1\leq \|f\|_\infty.$$

Ceci permet de dire que, si une suite de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est bornée (respectivement convergente) pour la norme $\|.\|_\infty$, elle est bornée (respectivement convergente vers la même limite) pour la norme $\|.\|_1$. On dit que la norme $\|.\|_1$ est plus fine que la norme $\|.\|_\infty$.

Définition : Soient E un espace vectoriel, $\|.\|$ et $\|.\|'$ deux normes sur E. On dit que la norme $\|.\|$ est plus fine que la norme $\|.\|'$ s'il existe un réel strictement positif k vérifiant

$$\forall x\in E,\quad \|x\|\leq k\|x\|'.$$

Nous avons vu plus haut que la norme $\|.\|_\infty$ n'était pas plus fine que la norme $\|.\|_1$. Ceci nous permet d'introduire les normes équivalentes : nous dirons que deux normes sont équivalentes si chacune d'elles est plus fine que l'autre.

12.3 Normes équivalentes

Définition : Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sur un même espace vectoriel E sont dites équivalentes s'il existe deux réels strictement positifs k et k' vérifiant

$$\forall x \in E, \quad \|x\| \leq k\|x\|'$$

$$\forall x \in E, \quad \|x\|' \leq k'\|x\|.$$

Proposition 12.1 *Considérons un espace vectoriel E et deux normes équivalentes sur E notées $\|.\|$ et $\|.\|'$.*

1. *Une suite d'éléments de E est une suite de Cauchy pour la norme $\|.\|$ si et seulement si elle est de Cauchy pour la norme $\|.\|'$.*
2. *Une suite d'éléments de E est une suite convergente pour la norme $\|.\|$ si et seulement si elle est convergente pour la norme $\|.\|'$. La limite est commune pour les deux normes.*
3. *Une partie de E est fermée (respectivement ouverte) de E pour la norme $\|.\|$ si et seulement si elle est fermée (respectivement ouverte) pour la norme de $\|.\|'$.*
4. *L'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est complet si et seulement si l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|')$ l'est aussi.*
5. *Une partie de E est une partie compacte de E pour la norme $\|.\|$ si et seulement si c'est une partie compacte de E pour la norme $\|.\|'$.*
6. *Une partie de E est une partie connexe de E pour la norme $\|.\|$ si et seulement si c'est une partie connexe de E pour la norme $\|.\|'$.*
7. *Une application définie sur une partie de E à valeurs dans un espace métrique est continue pour la norme $\|.\|$ si et seulement si elle est continue pour la norme $\|.\|'$.*
8. *Une application définie sur un espace métrique à valeurs dans E est continue pour la norme $\|.\|$ si et seulement si elle est continue pour la norme $\|.\|'$.*

La preuve assez simple est laissée au lecteur.

Remarque 12.1 Attention ! *Les normes d'algèbre ne sont pas conservées.*

12.4 Espaces vectoriels normés de dimension finie

12.4.1 Normes équivalentes en dimension finie

Voici le très important théorème :

Théorème 12.2 *Toutes les normes définies sur un même espace vectoriel réel de dimension finie sont équivalentes.*

Preuve. Considérons $(e_1, e_2, \cdots e_n)$ une base de E et la norme $\|.\|_\infty$ définie par

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots |x_n|\},$$

où $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$.
Pour prouver le théorème, nous allons montrer que toute norme sur E est équivalente à la norme $\|.\|_\infty$.
Considérons donc $\|.\|$ une norme sur E. Nous avons

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|.\|e_i\| \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|.$$

Considérons le réel strictement positif $k = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|$. Ainsi,

$$\forall x \in E, \quad \|x\| \leq k\|x\|_\infty.$$

La norme $\|.\|$ est donc plus fine que la norme $\|.\|_\infty$.
Remarquons que nous travaillons avec deux normes distinctes. Pour énoncer une propriété topologique ou métrique (continuité, partie fermée, bornée, ...), il est donc important d'indiquer pour quelle norme nous avons une telle propriété.
Considérons S la sphère unité de E munie de la norme $\|.\|_\infty$, c'est-à-dire

$$S = \{x \in E, \quad \|x\|_\infty = 1\}.$$

S est une partie fermée et bornée de $(E, \|.\|_\infty)$. Elle est, d'après la proposition 5.7, page 54, une partie compacte de $(E, \|.\|_\infty)$. Considérons l'application φ définie sur S par

$$\begin{aligned} \varphi : S &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\|. \end{aligned}$$

Cette application est continue sur $(S, \|.\|_\infty)$ car lipschitzienne. En effet,

$$\forall (x, y) \in S^2, \quad |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\| \leq k\|x - y\|_\infty.$$

D'après la proposition 5.12, page 55, la fonction φ est bornée et atteint ses bornes.
Considérons x_0 un élément de S vérifiant,

$$\|x_0\| = \inf_{x \in S} \|x\|.$$

Notons m ce réel. Il est strictement positif car x_o, appartenant à S, est un vecteur non nul.
Pour tout élément x non nul de E, on peut écrire

$$x = \|x\|_\infty . \left(\frac{1}{\|x\|_\infty} x\right).$$

$\left(\frac{1}{\|x\|_\infty} x\right)$ étant un élément de S, on obtient,

$$\|x\| \geq \|x\|_\infty m.$$

D'où,

$$\|x\|_\infty \leq \frac{1}{m} \|x\|.$$

Cette inégalité étant évidente si x est le vecteur nul, ceci termine la preuve. ♣

Corollaire 12.3 *Tout espace vectoriel réel normé, de dimension finie, est complet.*

Preuve. Pour la preuve, il suffit d'utiliser la proposition 4.4, page 43 ainsi que la proposition 12.1. ♣

Corollaire 12.4 *Les parties compactes d'un espace vectoriel réel normé, de dimension finie sont les parties fermées bornées.*

Preuve. Pour la preuve, il suffit d'utiliser la proposition 5.7, page 54 ainsi que la proposition 12.1. ♣

Exercice 12.1 On considère l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.

1. Vérifier que l'application définie sur $\mathcal{F}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (f,g) \in \mathcal{F}^2, \quad < f, g >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{F}$. On munit désormais $\mathcal{F}$ de ce produit scalaire. On considère la suite $(f_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \cos(nx).$$

2. Vérifier que tous les éléments de la suite appartiennent à la sphère unité donc à la boule unité.
3. Montrer que, pour tous entiers strictement positifs distincts n et p, on a :

$$< f_n, f_p >= 0.$$

4. Vérifier que, pour tous entiers strictement positifs distincts n et p,
$$\|f_n - f_p\| = \sqrt{2}.$$
5. En déduire que la boule unité de l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ muni de la norme euclidienne n'est pas compacte.
6. Donner un exemple de suite bornée, divergente, ayant une seule valeur d'adhérence.

Solution.

1. L'application $< .,. >$ est symétrique et linéaire à droite et positive. Considérons un élément f de $\mathcal{F}$ non identiquement nul. Cette application f étant 2π-périodique est non identiquement nulle sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. L'application f^2 est continue, positive, non identiquement nulle sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Donc
$$< f, f >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx > 0.$$
On en déduit que $< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathcal{F}$.
2. Pour tout entier strictement positif n,
$$\|f_n\|^2 =< f_n, f_n >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(2nx))dx = 1.$$
3. Soient n et p deux entiers strictement positifs distincts. Les entiers $(n - p)$ et $(n + p)$ sont non nuls.
$$< f_p, f_n >= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(px)\cos(nx)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos((p + n)x) + \cos((p - n)x)]\, dx = 0.$$
4. $$\|f_p - f_n\|^2 = \|f_p\|^2 + \|f_n\|^2 - 2 < f_p, f_n >= 2.$$
D'où le résultat.
5. Considérons $(f_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N})}$ une suite extraite de la suite $(f_n)_{(n\in\mathbb{N})}$. Pour tous entiers naturels n et p distincts,
$$\|f_{\varphi(p)} - f_{\varphi(n)}\| = \sqrt{2}.$$
Cette suite extraite n'est pas une suite de Cauchy. Elle est donc divergente. On en déduit que la boule unité de $\mathcal{F}$ n'est pas compacte.
6. Considérons la suite $(g_n)_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad g_{2n} = 0 \quad \text{et} \quad g_{2n-1} = f_n.$$
Cette suite est bornée. La suite extraite $(g_{2n})_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ converge vers la fonction nulle. Celle-ci est valeur d'adhérence de la suite $(g_n)_{(n\in\mathbb{N}^*)}$. Montrons que c'est la seule. Considérons $(g_{\varphi(n)})_{(n\in\mathbb{N}^*)}$ une suite extraite convergente donc de Cauchy. Remarquons que, si n et p sont distincts,

$\|g_{\varphi(n)} - g_{\varphi(p)}\| = \sqrt{2}$ si $\varphi(n)$ et $\varphi(p)$ sont impairs,
$\|g_{\varphi(n)} - g_{\varphi(p)}\| = 1$ si $\varphi(n)$ et $\varphi(p)$ sont de parité distincte,
$\|g_{\varphi(n)} - g_{\varphi(p)}\| = 0$ si $\varphi(n)$ et $\varphi(p)$ sont pairs.
Il existe un naturel n_0, vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad \forall p \geq n_0, \quad \|g_{\varphi(n)} - g_{\varphi(p)}\| < 1.$$

Pour tout naturel n supérieur à n_0, $\varphi(n)$ est pair, c'est-à-dire

$$\forall n \geq n_0, \quad g_{\varphi(n)} = 0.$$

On en déduit que la suite extraite $(g_{\varphi(n)})_{(n \in \mathbb{N}^*)}$ converge vers la fonction nulle. Elle est ainsi la seule valeur d'adhérence de la suite $(g_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$.
En conclusion, la suite $(g_n)_{(n \in \mathbb{N}^*)}$ est bornée, n'admet qu'une seule valeur d'adhérence et est divergente.

♣

12.5 Applications linéaires continues

Dans cette partie, $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ désignent deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

12.5.1 Caractérisation des applications linéaires continues

Théorème 12.5 *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *f est lipschitzienne sur E,*
2. *f est uniformément continue sur E,*
3. *f est continue sur E,*
4. *f est continue en 0,*
5. *f est bornée sur la boule unité fermée de E,*
6. *f est bornée sur la sphère unité de E,*
7. $\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in E \quad \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E$.

Preuve.
$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$. Évident.
$4 \Rightarrow 5$. Supposons f continue en 0. Il existe un réel strictement positif α vérifiant

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1.$$

Pour tout élément y appartenant à la boule unité fermée de $(E, \|.\|_E)$, on a,

$$\|f(y)\|_F = \|\frac{1}{\alpha} f(\alpha y)\|_F = \frac{1}{\alpha}\|f(\alpha y)\|_F \leq \frac{1}{\alpha}.$$

Ainsi, f est bornée sur la boule unité fermée.

$5 \Rightarrow 6$. Évident.

$6 \Rightarrow 7$. Supposons f bornée sur la sphère unité de E, notée S. Considérons un réel positif M vérifiant

$$\forall y \in S, \quad \|f(y)\|_F \leq M.$$

Soit x un élément de E non nul.

$$\|f(x)\|_F = \|x\|_E \|f(\frac{1}{\|x\|_E}x)\|_F \leq M\|x\|_E.$$

L'inégalité étant évidente pour le vecteur nul, on obtient,

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E.$$

$7 \Rightarrow 1$.

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x-y)\|_F \leq M\|x-y\|_E.$$

♣

Exercice 12.2 On considère $\mathbb{R}[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels muni de la norme suivante

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \|P\| = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|.$$

Montrer que l'application φ qui, à un polynôme P, associe le réel $P'(0)$ est linéaire mais non continue.

Solution. Il est évident que l'application φ est linéaire. Considérons pour tout entier naturel n, le polynôme P_n défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P_n(x) = (1-x)^n.$$

On remarque que pour tout naturel n, P_n appartient à la sphère unité. D'autre part

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(P_n) = -n.$$

On en déduit que φ n'est pas bornée sur la sphère unité. D'après le théorème 12.5, φ est une application linéaire non continue. ♣

Proposition 12.6 *Soit f élément de $\mathcal{L}(E,F)$, continue sur E. Alors,*

$$\sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} < +\infty.$$

Preuve. On peut remarquer, d'après le théorème 12.5, que les trois bornes supérieures sont finies. Notons B et S, respectivement la boule unité fermée et la sphère unité de $(E, \|.\|_E)$.
S étant incluse dans B, on a

$$\sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|f(x)\|_F.$$

D'autre part, si a est un élément non nul de B,

$$\|f(a)\|_F = \|a\|_E.\|f(\frac{1}{\|a\|_E}a)\|_F \leq 1. \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F.$$

De plus, le réel $\|f(0)\|_F$ étant nul,

$$\sup_{\|x\|_E\leq 1} \|f(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F.$$

On obtient ainsi l'égalité

$$\sup_{\|x\|_E\leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F.$$

La sphére unité S étant incluse dans $E \setminus 0$, on a

$$\sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F \leq \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

D'autre part, si a est un élément non nul de E,

$$\frac{\|f(a)\|_F}{\|a\|_E} = \left\|f\left(\frac{1}{\|a\|_E}a\right)\right\|_F \leq \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F.$$

D'où

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F.$$

On obtient ainsi l'égalité

$$\sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F.$$

Ce qui termine la preuve. ♣

12.5.2 L'espace vectoriel normé $\mathcal{L}_c(E, F)$

Proposition 12.7 *L'ensemble des applications linéaires continues de E vers F est un espace vectoriel, noté $\mathcal{L}_c(E, F)$. L'application $\|.\|_{\mathcal{L}_C}$ définie sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ par*

$$\forall f \in \mathcal{L}_c(E, F), \quad \|f\|_{\mathcal{L}_C} = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F,$$

est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$ appelée norme subordonnée aux normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$.

Preuve. Il est évident que $\mathcal{L}_c(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E,F)$. Montrons que $\|.\|_{\mathcal{L}_C}$ est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$. On note S la boule unité de E.

1. $\|f\|_{\mathcal{L}_C} = 0 \Rightarrow \forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq 0.\|x\| \Rightarrow f = 0$. La réciproque est évidente
2. Soient f un élément de $\mathcal{L}_c(E,F)$ et λ un réel.
$$\forall x \in S, \quad \|\lambda f(x)\|_F = |\lambda|\|f(x)\|_F \leq |\lambda|\|f\|_{\mathcal{L}_C}.$$
Donc $|\lambda|\|f\|_{\mathcal{L}_C}$ est un majorant de l'ensemble $\{\|\lambda f(x)\|_F / x \in S\}$. Montrons que c'est la borne supérieure. Sachant que
$$\|f\|_{\mathcal{L}_C} = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F,$$
il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de S vérifiant
$$\lim_{n\to+\infty} \|f(x_n)\|_F = \|f\|_{\mathcal{L}_C}.$$
On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} \|\lambda f(x_n)\|_F = |\lambda|\|f\|_{\mathcal{L}_C}.$$
D'après la proposition 2.6, page 20
$$|\lambda|\|f\|_{\mathcal{L}_C} = \sup_{\|x\|_E=1} \|\lambda f(x)\|_F.$$
D'où,
$$|\lambda|\|f\|_{\mathcal{L}_C} = \|\lambda f\|_{\mathcal{L}_C}$$
3. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}_c(E,F)$.
$$\forall x \in S, \quad \|(f+g)(x)\|_F \leq \|f(x)\|_F + \|g(x)\|_F \leq \|f\|_{\mathcal{L}_C} + \|g\|_{\mathcal{L}_C}.$$
On en déduit
$$\|f+g\|_{\mathcal{L}_C} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_C} + \|g\|_{\mathcal{L}_C}.$$
$\|.\|_{\mathcal{L}_C}$ est ainsi une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.

♣

Corollaire 12.8 *On a,*
$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F \leq \|f\|_{\mathcal{L}_C}.\|x\|_E.$$

Preuve. Évident ♣

Corollaire 12.9 *Dans l'espace vectoriel des endomorphismes continus de* $\mathbb{E}$*, noté* $\mathcal{L}_C(\mathbb{E},\mathbb{E})$*, la norme subordonnée* $\|.\|_{\mathcal{L}_C}$ *est une norme d'algèbre.*

Preuve.

$$\forall u \in S, \quad \|(f \circ g)(u)\|_{\mathbb{E}} = \|f(g(u))\|_{\mathbb{E}} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_C} \|g(u)\|_{\mathbb{E}} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_C}.\|g\|_{\mathcal{L}_C}\|u\|_{\mathbb{E}}.$$

On obtient

$$\|f \circ g\|_{\mathcal{L}_C} \leq \|f\|_{\mathcal{L}_C}.\|g\|_{\mathcal{L}_C}.$$

Cette norme est une norme d'algèbre. ♣

Corollaire 12.10 *On considère n un entier strictement positif $\mathbb{K}$ représentant le corps des nombres réels ou celui des nombres complexes et $\mathbb{K}^n$ muni d'une norme notée $\|.\|$. L'algèbre des matrices carrées d'ordre à coefficients réels, notée $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de la norme $\|.\|_{\mathcal{M}_n}$ définie par*

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|A\|_{\mathcal{M}_n} = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|A.x\|}{\|x\|}$$

est une algèbre de Banach.

Preuve. L'espace vectoriel $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|.\|_{\mathcal{M}_n})$ est complet puisque de dimension finie (n^2). Pour montrer que $\|.\|_{\mathcal{M}_n}$ est une norme d'algèbre, il suffit de reprendre une preuve similaire à celle de la proposition 12.7. ♣

Remarque 12.2 *Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, de la norme infinie, notée $\|.\|_\infty$, c'est-à-dire pour tout élément $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$, on a*

$$\|A\|_\infty = \max_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} |a_{i,j}|.$$

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$M^2 = \begin{pmatrix} n & n & \cdots & n \\ n & n & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix}$$

En remarquant que $\|M\|_\infty = 1$ et que $\|M^2\|_\infty = n$, on en déduit que $\|.\|_\infty$ n'est pas une norme d'algèbre.

Proposition 12.11 *Si $(F, \|.\|_F)$ est un espace de Banach, alors $(\mathcal{L}_c(E,F), \|.\|_{\mathcal{L}_C})$ est un espace de Banach.*

Preuve. Considérons $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{L}_c(E,F), \|.\|_{\mathcal{L}_C})$. Nous avons,

$$\forall x \in E, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \|x\|_E.\|f_n - f_p\|_{\mathcal{L}_C}.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de Cauchy de $(\mathcal{L}_c(E,F), \|.\|_{\mathcal{L}_C})$, on en déduit que pour tout élément x de E, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet F, donc convergente. On peut ainsi définir sur E une application à valeurs dans F, que l'on notera f, telle que

$$\forall x \in E, \quad f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

La première étape est de vérifier que f est une application linéaire continue.

$$\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall(x,y) \in \mathbb{E}^2, \quad \lambda f(x) + \mu f(y) = \lambda \lim_{n\to+\infty} f_n(x) + \mu \lim_{n\to+\infty} f_n(y)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} f_n(\lambda x + \mu y) = f(\lambda x + \mu y).$$

L'application f est ainsi linéaire. Montrons qu'elle est continue. Nous savons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc bornée. Considérons un réel M vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f_n\|_{\mathcal{L}_C} \leq M.$$

Soit x un élément de la sphère unité. La norme étant une application continue,

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n(x)\|_F = \|f(x)\|_F.$$

Or M étant un majorant de cette suite, on obtient à la limite

$$\|f(x)\|_F \leq M.$$

L'application linéaire f est bornée sur la sphère unité donc continue. On peut maintenant dire que f est un élément de $\mathcal{L}_c(E,F)$. Montrons qu'elle est limite dans $(\mathcal{L}_c(E,F), \|.\|_{\mathcal{L}_C})$ de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit ε un réel strictement positif. Considérons un entier naturel n_0 vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad \forall p \geq n_0, \quad \|f_n - f_p\|_{\mathcal{L}_C} \leq \varepsilon.$$

Si x est un élément de la sphère unité de E,

$$\forall n \geq n_0, \quad \forall p \geq n_0, \quad \|f_n(x) - f_p(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

Fixons maintenant un entier naturel n supérieur ou égal à n_0. Alors

$$\lim_{p\to+\infty} \|f_n(x) - f_p(x)\|_F = \|f_n(x) - f(x)\|_F.$$

Cette suite réelle étant majorée à partir d'un certain rang par ε, à la limite, nous avons

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

D'où

$$\forall n \geq n_0, \quad \sup_{x \in S} \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

C'est-à-dire

$$\forall n \geq n_0, \quad \|f_n - f\|_{\mathcal{L}_C} \leq \varepsilon.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi convergente vers f.
L'espace vectoriel normé $(\mathcal{L}_c(E,F), \|.\|_{\mathcal{L}_C})$ est complet. ♣

12.5.3 Exemples de normes d'applications linéaires continues

Exercice 12.3 On considère un espace vectoriel normé E et f un endomorphisme continu de E de spectre S non vide. On rappelle que le spectre d'un endomorphisme est l'ensemble de ses valeurs propres. On note $\rho = \sup\{\ |\lambda| / \lambda \in S\}$ le rayon spectral.

1. Montrer que
$$\|f\|_{\mathcal{L}_C} \geq \rho.$$
On se place désormais dans $\mathbb{R}^2$. On note $\vec{u}_\theta = (\cos\theta, \sin\theta)$ $(\theta \in \mathbb{R})$.
2. On considère pour tout $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$, p_θ la projection sur la droite engendrée par $\vec{u}_0$, et de direction la droite engendrée par $\vec{u}_\theta$. Quel est son rayon spectral ?
3. Montrer que pour tout réel α,
$$p_\theta(\vec{u}_\alpha) = \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\sin\theta}\vec{u}_0.$$
4. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne. En déduire que
$$\|p_\theta\|_{\mathcal{L}_C} = \frac{1}{|\sin\theta|}.$$

Solution.

1. Soient λ une valeur propre de f et $\vec{u_\lambda}$ un vecteur normé et vecteur propre pour cette valeur propre. On a $\|f(\vec{u_\lambda})\| = |\lambda|$. Donc
$$\forall \lambda \in S, \quad |\lambda| \leq \sup_{\|\vec{u}\|=1} \|f(\vec{u}\| = \|f\|_{\mathcal{L}_C}.$$
On en déduit que $\rho \leq \|f\|_{\mathcal{L}_C}$.
2. Les valeurs propres de p_θ sont 0 et 1. Donc $\rho = 1$.

3. $(\vec{u}_0, \vec{u}_\theta)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$. Donc $\vec{u}_\alpha$ s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{u}_\alpha = a\vec{u}_0 + b\vec{u}_\theta$ où le couple de réels (a, b) est solution de :

$$\left\{\begin{array}{l} a + b\cos\theta = \cos\alpha \\ b\sin\theta = \sin\alpha \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = \frac{\sin\theta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta}{\sin\theta} \\ b = \frac{\sin\alpha}{\sin\theta} \end{array}\right.$$

D'où le résultat.

4.
$$\|p_\theta\|_{\mathcal{L}_C} = \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\theta}\right| = \frac{1}{|\sin\theta|}.$$

♣

Exercice 12.4 On considère $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs réelles muni de la norme uniforme. Pour tout $g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, on note φ_g la forme linéaire définie sur $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ par

$$\forall f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}), \quad \varphi_g(f) = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

1. Montrer que φ_g est continue avec

$$\|\varphi_g\| \leq \int_a^b |g(t)|dt.$$

2. Montrer que pour tout élément g de $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$,

$$\|\varphi_g\| = \int_a^b |g(t)|dt.$$

(On pourra supposer, dans un premier temps, que g est une fonction en escalier.)

Solution.

1.
$$\forall f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R}), \quad |\varphi_g(f)| \leq \int_a^b |f(t)g(t)|dt \leq \|f\|_\infty \int_a^b |g(t)|dt.$$

Donc φ_g est continue et

$$\|\varphi_g\| \leq \int_a^b |g(t)|dt.$$

2. Le résultat est évident si l'application g est nulle. On suppose désormais g non identiquement nulle.

Supposons d'abord que g soit une fonction en escalier sur $[a,b]$. On considère alors la fonction en escalier h définie par

$$h = \frac{g}{|g|}\mathbb{1}_{\{g\neq 0\}}.$$

On a

$$\varphi_g(h) = \int_a^b |g(t)|dt$$

avec $\|h\|_\infty = 1$. On déduit

$$\|\varphi_g\| = \int_a^b |g(t)|dt.$$

Supposons maintenant que g soit une fonction continue par morceaux. Soit ε un réel strictement positif. Il existe une application en escalier g_ε vérifiant $\|g - g_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$. On considère la fonction en escalier $h_\varepsilon = \frac{g_\varepsilon}{|g_\varepsilon|}\mathbb{1}_{\{g_\varepsilon\neq 0\}}$. On a $\|h_\varepsilon\|_\infty = 1$. D'autre part

$$\left|\int_a^b h_\varepsilon(t)g(t)dt - \int_a^b |g(t)|dt\right|$$

$$\leq \left|\int_a^b h_\varepsilon(t)[g(t) - g_\varepsilon(t)]dt\right| + \left|\int_a^b (|g_\varepsilon(t)| - |g(t)|)\,dt\right| \leq 2(b-a)\varepsilon.$$

Donc

$$\|\varphi_g\| \geq \frac{\left|\int_a^b h_\varepsilon(t)g(t)dt\right|}{\|h_\varepsilon\|_\infty} \geq \int_a^b |g(t)|dt - 2(b-a)\varepsilon.$$

On en déduit à l'aide de la première question que

$$\|\varphi_g\| = \int_a^b |g(t)|dt.$$

♣

Exercice 12.5 1. On considère une application f définie et continue sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs réelles et F la primitive de f s'annulant en 0. Vérifier que l'application définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par

$$x \mapsto \frac{F(x)}{x}$$

est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et admet une limite en 0.
On note G_f le prolongement par continuité en 0 de cette application.

2. Montrer que si l'application f est de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$, alors l'application G_f est également de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

On considère $\mathcal{L}^2_C(\mathbb{R}^+)$ l'espace préhilbertien des applications continues de carré intégrable sur $\mathbb{R}^+$, muni du produit scalaire

$$(f,g) \mapsto \int_{\mathbb{R}^+} f(t)g(t)dt.$$

(On peut voir à ce sujet la proposition 23.11, page 472)

3. Montrer que l'application Ψ définie par

$$\begin{array}{cccc} \Psi : & \mathcal{L}^2_C(\mathbb{R}^+) & \longrightarrow & \mathcal{L}^2_C(\mathbb{R}^+) \\ & f & \longmapsto & G_f \end{array}$$

est un endormorphisme continu de $\mathcal{L}^2_C(\mathbb{R}^+)$ de norme inférieure ou égale à 2.

4. On considère pour tout réel a strictement supérieur à $\frac{1}{2}$, l'élément de $\mathcal{L}^2_C(\mathbb{R}^+)$ défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_a(x) = \mathbb{1}_{[0,1[}(x) + \frac{\mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)}{x^a}.$$

Montrer que pour tout réel $a \in]\frac{1}{2}, 1[$, on a

$$\Psi(f_a) = \frac{1}{1-a}\left(f_a - af_1\right).$$

5. Montrer que $\lim_{a\to\frac{1}{2}} \|f_a\|_2 = +\infty$
6. En déduire que

$$\lim_{a\to\frac{1}{2}} \frac{\|\Psi(f_a)\|_2}{\|(f_a)\|_2} = 2$$

et que $\|\Psi\|_2 = 2$.

7. Montrer qu'il n'existe pas d'élément f de $\mathcal{L}^2_C(\mathbb{R}^+)$ non nul vérifiant

$$\|\Psi(f)\|_2 = 2\|f\|_2.$$

Solution.

1. L'application F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ d'application dérivée f. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit que l'application $x \mapsto \frac{F(x)}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que

$$f(0) = F'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)-F(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x}.$$

2. Effectuons une intégration par partie. En remarquant que $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)^2}{x} = 0$, nous obtenons

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \int_0^t G_f(x)dx = \int_0^t \frac{F(x)^2}{x^2}dx = -\frac{F(t)^2}{t} + 2\int_0^t G_f(x)f(x)dx$$

$$\leq 2\int_0^t G_f(x)f(x)dx \leq 2\sqrt{\int_0^t G_f^2(x)dx}\sqrt{\int_0^t f^2(x)dx}.$$

Cette dernière inégalité est l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Donc

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \sqrt{\int_0^t G_f^2(x)dx} \leq 2\sqrt{\int_0^t f^2(x)dx} \leq 2\sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(x)dx}.$$

On en déduit que G_f est de carré intégrable

3. Il est évident que Ψ est linéaire et que

$$\sqrt{\int_0^{+\infty} G_f^2(x)dx} \leq 2\sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(x)dx}.$$

Donc Ψ est un endomorphisme continu de $\mathcal{L}_C^2(\mathbb{R}^+)$ de norme inférieure ou égale à 2.

4. On peut remarquer que f_a est continue sur $\mathbb{R}^+$ et f_a^2 est équivalente en $+\infty$ à $\frac{1}{x^{2a}}$ intégrable car $2a > 1$. Donc f_a est bien un élément de $\mathcal{L}_C^2(\mathbb{R}^+)$.

$$\forall x \in [0,1], \quad \Psi(f)(x) = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{1-a}\left(f_a(x) - af_1(x)\right) = \frac{1-a}{1-a} = 1.$$

$$\begin{aligned}\forall x \geq 1, \quad \Psi(f_a)(x) &= \frac{1}{x}\left(1 + \int_1^x \frac{1}{t^a}dt\right) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{x^{a-1}} - 1\right)\right) \\ &= \frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{x^a} - \frac{a}{x}\right) = \frac{1}{1-a}\left(f_a(x) - af_1(x)\right).\end{aligned}$$

D'où le résultat.

5.
$$\forall a \in]\frac{1}{2}, 1[, \quad \|f_a\|_2^2 \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2a}}dx = \frac{1}{2a-1}.$$

Donc $\lim_{a\to\frac{1}{2}} \|f_a\|_2 = +\infty$

6. Pour tout réel $a \in]\frac{1}{2}, 1[$,

$$\frac{1}{1-a}\left(\frac{\|f_a\|_2 - a\|f_1\|_2}{\|(f_a)\|_2}\right) \leq \frac{\|\Psi(f_a)\|_2}{\|(f_a)\|_2} \leq \frac{1}{1-a}\left(\frac{\|f_a\|_2 + a\|f_1\|_2}{\|(f_a)\|_2}\right).$$

Les termes de gauche et de droite tendent vers 2 lorsque a tend vers $\frac{1}{2}$. On en déduit

$$\lim_{a\to\frac{1}{2}} \frac{\|\Psi(f_a)\|_2}{\|(f_a)\|_2} = 2$$

et avec le résultat de la question 3, on obtient $\|\Psi\|_2 = 2$.

7. Soit f un élément de $\mathcal{L}_C^2(\mathbb{R}^+)$ non nul vérifiant

$$\|\Psi(f)\|_2 = 2\|f\|_2.$$

On obtient avec la même intégration par partie que celle utilisée dans la question 3,

$$\int_0^{+\infty} \Psi(f)^2(x)dx = -\lim_{x\to+\infty} \frac{F^2(x)}{x} + 2\int_0^{+\infty} \Psi(f)(x)f(x)dx.$$

Ce qui permet d'écrire

$$4\|f\|_2^2 = \|\Psi(f)\|_2^2 \leq 2 < \Psi(f), f > \leq 2\|\Psi(f)\|_2\|f\|_2 = 4\|f\|_2^2.$$

Ces inégalités sont donc des égalités et $< \Psi(f), f > = \|\Psi(f)\|_2\|f\|_2$. Les deux vecteurs f et $\Psi(f)$ sont colinéaires et de même sens. L'égalité $\|\Psi(f)\|_2 = 2\|f\|_2$ impose alors $\Psi(f) = 2f$. C'est-à-dire

$$\forall x > 0, \quad 2f(x) = \frac{F(x)}{x}.$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ puisque quotient de deux fonctions dérivables. On obtient

$$\forall x > 0, \quad 2xf(x) = F(x)$$

puis, en dérivant,

$$\forall x > 0, \quad 2xf'(x) = -f(x)$$

la fonction f est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre $2xy' + y = 0$, dont l'ensemble solution est la droite dirigée par la fonction $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ de carré non intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On en déduit qu'il n'existe pas d'élément f de E non nul vérifiant $\|\Psi(f)\|_2 = 2\|f\|_2$.

♣

12.6 Espaces vectoriels normés de dimension finie

12.6.1 Applications linéaires

Proposition 12.12 *Toute application linéaire d'un espace vectoriel normé réel E de dimension finie dans un espace vectoriel normé réel F de dimension quelconque est continue.*

Preuve. On considère deux espaces vectoriels réels E et F, E étant de dimension finie. On considère également f une application linéaire définie sur E à valeurs dans F. Toutes les normes étant équivalentes sur E, la continuité de f est indépendante de la norme choisie sur E. Prenons une base $(e_1, e_2, \cdots e_n)$. de E et la norme $\|.\|_\infty$ définie par

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots |x_n|\},$$

où $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ sont les coordonnées de x dans la base $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$. On munit F d'une norme notée $\|.\|_F$. Nous avons

$$\forall x \in E, \quad \|f(x)\|_F = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\right\|_F \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F.$$

En particulier,

$$\forall x \in S, \quad \|f(x)\|_F \leq \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F.$$

L'application linéaire f est donc continue, de norme inférieure ou égale à

$$\sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_F.$$

♣

12.6.2 Continuité et dérivabilité des applications

Proposition 12.13 *On considère (A, d) un espace métrique, $(\mathbb{E}, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie n et une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de cet espace vectoriel. Soit f une application définie sur A à valeurs dans E que l'on peut écrire en faisant intervenir les fonctions coordonnées f_i,*

$$\forall t \in A, \quad f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) e_i.$$

Soit t_0, un élément de A.

1. *La fonction f est continue en t_0, si et seulement si les f_i le sont.*
2. *On suppose f définie sur I intervalle réel. La fonction f est dérivable en t_0, si et seulement si les f_i le sont et, dans ce cas, on a*

$$f'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t_0) e_i.$$

Preuve. Pour tout entier k compris entre 1 et n, les applications p_k et q_k

$$\begin{array}{rccc} p_k : & \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & x_k \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} q_k : & R & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & x & \longmapsto & x e_k, \end{array}$$

sont linéaires définies respectivement sur $\mathbb{E}$ et $\mathbb{R}$ espaces vectoriels de dimension finie. Elles sont donc continues respectivement sur $\mathbb{E}$ et $\mathbb{R}$.

1. En remarquant que,

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \quad f_i = p_i \circ f$$

et

$$f = \sum_{i=1}^{n} q_i \circ f_i$$

on en déduit que f est continue en t_0 de A si et seulement si pour tout entier i compris entre 1 et n, f_i est continue en t_0.

2. On suppose f définie sur I intervalle réel non réduit à un point. Soit t_0 un élément de I. On définit sur $I \setminus \{t_0\}$, l'application T par

$$\begin{array}{rccl} T: & I\setminus\{t_0\} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & t & \longmapsto & \frac{1}{t-t_0}\left(f(t)-f(t_0)\right) \end{array}$$

et pour tout entier i compris entre 1 et n, l'application T_i par

$$\begin{array}{rccl} T_i: & I\setminus\{t_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \frac{f_i(t)-f_i(t_0)}{t-t_0}. \end{array}$$

En remarquant que,

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \quad T_i = p_i \circ T$$

et

$$T = \sum_{i=1}^{n} q_i \circ T_i$$

on en déduit que T admet une limite lorsque t tend vers t_0 si et seulement pour tout entier i compris entre 1 et n, T_i admet une limite lorsque t tend vers t_0. Dans ce cas, on obtient

$$\lim_{t \to t_o} T(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i \left(\lim_{t \to t_o} T_i(t) \right).$$

C'est-à-dire

$$f'(t_0) = \sum_{i=1}^{n} f_i'(t_0) e_i.$$

♣

12.7 Formes linéaires

Définition : Soit E un espace vectoriel réel. On appelle forme linéaire sur E, toute application linéaire définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des formes linéaires de E forme un espace vectoriel appelé dual de E et noté E^*.

Exercice 12.6 Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé réel et f une forme linéaire sur $(E, \|.\|)$.

1. On suppose f continue. Montrer que $\ker f$ est fermé.
2. On suppose f non continue.
   (a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{(n \in \mathbb{N})}$ d'éléments de la sphère unité de E vérifiant
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x_n)| \geq 2^n.$$

(b) Soit x un élément de E. Montrer que $\left(x - \frac{f(x)}{f(x_n)} x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\ker f$ convergente vers x.

(c) En déduire que $\ker f$ est dense dans E.

3. En déduire que f est continue si et seulement si $\ker f$ est fermé dans E.

Solution.

1. On a
$$\ker f = f^{-1}(\{0\}).$$
d'après la proposition 3.8, page 37, $\ker f$ est une partie fermée de E.

2. (a) La forme linéaire f étant non continue, elle n'est pas bornée sur la sphère unité. On peut donc construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de la sphère vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x_n)| \geq 2^n.$$

(b)
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f\left(x - \frac{f(x)}{f(x_n)} x_n\right) = f(x) - f(x) = 0.$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\|\left(x - \frac{f(x)}{f(x_n)} x_n\right) - x\right\| \leq \frac{\|f(x)\|}{2^n}.$$
On en déduit que la suite $\left(x - \frac{f(x)}{f(x_n)} x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.

(c) Tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de $\ker f$. Celui-ci est dense dans E.

3. Si f est continue alors $\ker f$ est fermé d'après le 1.
Supposons $\ker f$ fermé et f non continue. Alors
$$\overline{\ker f} = E \quad \text{et} \quad \overline{\ker f} = \ker f.$$
On en déduit que $\ker f = E$ et $f = 0$. Ce qui est impossible car f est supposée non continue. On en déduit que $\ker f$ fermé implique f continue.

Remarque 12.3 *Les résultats de l'exercice 12.2, page 168, ainsi que les résultats de cet exercice nous permettent de dire que, dans l'espace $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme du sup sur $[0,1]$, le sous-espace*
$$\{P \in \mathbb{R}[X] / P'(0) = 0\}$$
est dense dans $\mathbb{R}[X]$.

♣

Proposition-définition 12.14 *L'ensemble des formes linéaires continues sur E est un sous-espace vectoriel du dual E^* de E. On l'appelle dual topologique de E et on le note E'. C'est un espace de Banach puisque $\mathbb{R}$ est complet.*

12.8 Prolongement d'une application linéaire continue

Proposition 12.15 *Soient E un espace vectoriel normé, E_1 un sous-espace dense de E et F un espace de Banach. Une application linéaire continue définie sur E_1 à valeurs dans F se prolonge de manière unique sur E en une application linéaire continue de même norme.*

Preuve. Soit f une application linéaire continue définie sur E_1 à valeurs dans F. Notons $\|f\|$ sa norme. f est une application $\|f\|$-lipschitzienne sur E_1. D'après la proposition 4.11, page 48, f est prolongeable de manière unique sur E par une fonction $\|f\|$-lipschitzienne que l'on notera g. Montrons que g est linéaire. D'après la preuve de la proposition 4.10, page 47, la fonction g est définie sur E par

$$\forall x \in E, \quad g(x) = \lim_{a \to x} f(a).$$

Soient λ, μ deux réels et x, y deux éléments de E. Considérons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites d'éléments de E_1 convergentes respectivement vers x et y. Nous avons

$$g(x) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \quad \text{et} \quad g(y) = \lim_{n\to+\infty} f(y_n).$$

L'application f étant linéaire

$$\lambda g(x) + \mu g(y) = \lambda \lim_{n\to+\infty} f(x_n) + \mu \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} (\lambda f(x_n) + \mu f(y_n)) = \lim_{n\to+\infty} f(\lambda x_n + \mu y_n).$$

Sachant que f admet une limite en $(\lambda x + \mu y)$ et que la suite $(\lambda x_n + \mu y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(\lambda x + \mu y)$, on a

$$g(\lambda x + \mu y) = \lim_{n\to+\infty} f(\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda g(x) + \mu g(y).$$

L'application g est ainsi une application linéaire continue de E vers F. Notons S_1, la sphère unité de E_1 et S, la sphère unité de E. D'après la proposition 4.11, page 48, g est $\|f\|$-lipshitzienne, donc

$$\|g\| \leq \|f\|.$$

Sachant que S_1 est incluse dans S et que f et g coïncident sur S_1,

$$\|g\| = \sup_{x\in S} \|g(x)| \geq \sup_{x\in S_1} \|g(x)| = \sup_{x\in S_1} \|f(x)| = \|f\|.$$

D'où

$$\|g\| = \|f\|.$$

Ceci termine la preuve. ♣

Chapitre 13

Intégration sur un segment

Dans tout le chapitre, on considère un segment $[a, b]$ non réduit à un point et un espace vectoriel normé *complet* noté $(\mathbb{E}, \|.\|)$.

13.1 Introduction

13.1.1 Le cadre

On se place dans

1. $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a, b], \mathbb{E}), +, .)$ l'espace vectoriel des applications continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{E}$. On munit cet espace de la norme uniforme définie par
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} \|f(x)\|_E.$$
2. $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{E})$ le sous-espace vectoriel de $(\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a, b], \mathbb{E}), +, .)$ constitué des applications en escalier définies sur $[a, b]$ et à valeurs dans E.
3. On utilisera également $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{E})$ le sous-espace vectoriel de $(\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a, b], \mathbb{E}), +, .)$ constitué des applications continues sur $[a, b]$ à valeurs dans E.

On pourra retrouver les différentes définitions à la page 97.

13.1.2 $(\mathcal{C}_{\mathcal{M}}[a, b], \mathbb{E}) = (\mathcal{C}[a, b], \mathbb{E}) + (\mathcal{E}[a, b], \mathbb{E})$

Proposition 13.1 *Pour toute application $f_{\mathcal{C}_{\mathcal{M}}}$ continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{E}$, il existe une application $f_{\mathcal{C}}$ continue sur $[a, b]$ et une application $f_{\mathcal{E}}$ en escalier sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{E}$, telles que :*
$$f_{\mathcal{C}_{\mathcal{M}}} = f_{\mathcal{C}} + f_{\mathcal{E}}.$$

Avant d'effectuer la preuve de cette proposition, définissons les fonctions indicatrices.

Définition : Soit F un ensemble quelconque et A une partie de F. On appelle fonction indicatrice de A l'application notée $\mathbb{1}_A$ définie sur F à valeurs dans $\{0,1\}$ par

$$\begin{cases} \mathbb{1}_A(x) = 1 & \text{si} \quad x \in A, \\ \mathbb{1}_A(x) = 0 & \text{si} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Preuve. Effectuons une démonstration par récurrence. Considérons pour tout entier naturel n, la proposition $\mathcal{P}_n$ suivante :
$\mathcal{P}_n$: « Toute application continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{E}$ admettant au plus n points de discontinuité est somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier, définies sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{E}$. »
La proposition $\mathcal{P}_0$ est trivialement vraie.
Soit n un entier strictement positif. Montrons que $\mathcal{P}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{P}_n$.
Soit f une fonction continue par morceaux dont l'ensemble $\mathbb{D}$ des points de discontinuité est composé de n éléments. Soit c l'un d'entre eux. Considérons $g_\mathcal{E}$ l'application en escalier définie sur $[a;b]$ par

$$\forall x \in [a,b], \quad g_\mathcal{E}(x) = f(c_-)\mathbb{1}_{[a,c[}(x) + f(c_+)\mathbb{1}_{]c,b]}(x) + f(c)\mathbb{1}_{\{c\}},$$

où $f(c_-)$ (respectivement $f(c_+)$) représente la limite à gauche (resp. à droite) de f en c. On conviendra que la fonction $\mathbb{1}_{[a,c[}$ (respectivement $\mathbb{1}_{]c,b]}$) est nulle si $c = a$ (resp. $c = b$). La fonction

$$f - g_\mathcal{E}$$

est une fonction continue par morceaux. Elle est continue en tout point de $[a,b]\backslash\mathbb{D}$. Elle est également continue en c. Elle a donc, au plus, $(n-1)$ points de discontinuité. Il existe ainsi une application $f_\mathcal{C}$ continue sur $[a,b]$ et une application $f_\mathcal{E}$ en escalier vérifiant :

$$f - g_\mathcal{E} = f_\mathcal{C} + f_\mathcal{E}.$$

D'où,

$$f = f_\mathcal{C} + f_\mathcal{E} + g_\mathcal{E}.$$

f est ainsi somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier. Ainsi,

$$\mathcal{P}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{P}_n.$$

Ceci conclut la preuve. ♣

13.1.3 $(\mathcal{E}([a,b],\mathbb{E}))$ sous-espace vectoriel dense de $(\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a,b],\mathbb{E}),\|.\|_\infty)$

Proposition 13.2 *L'ensemble $(\mathcal{E}([a,b],\mathbb{E}))$ est un sous-espace vectoriel dense de l'espace $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a,b],\mathbb{E}),+,.)$ muni de la norme uniforme $\|.\|_\infty$.*

Preuve. Le travail consiste à montrer que toute application continue par morceaux sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier. Dans un premier temps, considérons f une application définie et continue sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{E}$. Considérons pour tout entier n strictement positif, la fonction en escalier f_n définie par

$$\forall x \in [a,b], \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\mathbb{1}_{[a+\frac{k}{n}(b-a),a+\frac{k+1}{n}(b-a)[}(x)+f(b)\mathbb{1}_{\{b\}}(x).$$

La fonction f, continue sur le compact $[a,b]$, est, d'après le théorème 5.14, page 56, uniformément continue. Soit ε un réel strictement positif. Il existe un réel strictement positif α tel que

$$\forall (x,y) \in ([a,b])^2 \quad |x-y| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| \leq \varepsilon.$$

Choisissons un entier n_0 strictement positif vérifiant

$$n_0 \geq \frac{b-a}{\alpha}.$$

Alors pour tout entier $n \geq n_0$,

$$\frac{b-a}{n} \leq \alpha.$$

Ainsi,

$$\forall x \in [a,b], \quad \|f_n(x)-f(x)\| \leq \varepsilon.$$

D'où,

$$\forall n \geq n_0, \quad \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

On en déduit que la suite de fonctions en escalier $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $(\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a,b],\mathbb{E}),+,.)$ vers f pour la norme $\|.\|_\infty$. Supposons maintenant que $f_{\mathcal{C}\mathcal{M}}$ soit une application continue par morceaux. Il existe, d'après la proposition 13.1, une application continue $f_{\mathcal{C}}$ et une application en escalier $f_{\mathcal{E}}$ vérifiant

$$f_{\mathcal{C}\mathcal{M}} = f_{\mathcal{C}} + f_{\mathcal{E}}.$$

Considérons $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions en escalier convergente uniformément vers $f_{\mathcal{C}}$. Alors la suite de fonctions en escalier

$$(f_n + f_{\mathcal{E}})_{n\in\mathbb{N}}$$

converge uniformément vers $f_{\mathcal{C}\mathcal{M}}$. Ce qui termine la preuve. ♣

13.2 Construction de l'intégrale de Riemann sur un segment

13.2.1 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

Proposition-définition 13.3 *Soit f une fonction en escalier définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{E}$ et $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à f. On note f_i la valeur constante de f sur l'intervalle $]a_{i-1}, a_i[$. Alors la somme :*

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})f_i,$$

est indépendante du choix de σ. Cette valeur est notée $\int_a^b f(x)dx$ et on l'appelle intégrale sur $[a,b]$ de la fonction f.

13.2.2 Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier

Proposition 13.4 *L'application I définie sur $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{E})$ par*

$$\forall f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{E}), \quad I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

est une application linéaire sur $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{E})$ à valeurs dans $\mathbb{E}$.

Preuve. Soient f, g deux éléments de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{E})$ et deux réels α et β. On considère $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée aux fonctions f et g. Remarquons que cette subdivion est aussi adaptée à l'application en escalier $(\alpha f + \beta g)$.

$$\alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

$$= \alpha \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})f_i + \beta \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})g_i = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})(\alpha f_i + \beta g_i)$$

$$= \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx.$$

♣

Proposition 13.5 *Pour tout élément f de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{E})$, l'application $\|f\|$ est un élément de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et*

$$\left\|\int_a^b f(x)dx\right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|dx \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

Preuve. Soient f un élément de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{E})$ et $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à f. Nous remarquons que $\|f\|$ est une fonction en escalier définie sur $[a,b]$ à valeurs réelles. La subdivision σ est une subdivision adaptée à cette dernière fonction.

$$\left\|\int_a^b f(x)dx\right\| = \|\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})f_i\| \leq \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\|f_i\| = \int_a^b \|f(x)\|dx.$$

De plus,

$$\int_a^b \|f(x)\|dx = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\|f_i\| \leq \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\|f\|_\infty = (b-a)\|f\|_\infty.$$

♣

Corollaire 13.6 *L'application I définie sur $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{E})$ par*

$$\forall f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{E}), \quad I(f) = \int_a^b f(x)dx,$$

est une application linéaire continue sur $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{E})$ de norme $(b-a)$.

Preuve. Grâce à l'inégalité obtenue dans la proposition 13.5, l'application I est une application linéaire continue de norme au plus égale à $(b-a)$. L'égalité est obtenue pour toute fonction constante non nulle. La norme est donc $(b-a)$. ♣

Proposition 13.7 *Relation de Chasles :*

$$\forall c \in]a,b[, \forall f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{E}), \quad \int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Preuve. Évidente en choisissant pour f une subdivision adaptée contenant le point c. ♣

13.2.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Nous savons, d'après la proposition 13.2, que le sous-espace $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{E})$ est dense dans $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a,b],\mathbb{E})$ pour la norme $\|.\|_\infty$. Nous avons défini dans $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{E})$, l'intégrale application linéaire continue de norme $(b-a)$ dans la proposition-définition 13.3. L'espace vectoriel normé $\mathbb{E}$ étant *complet*, d'après la proposition 12.15, page 182, elle se prolonge de manière unique sur $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a,b],\mathbb{E})$ en une application linéaire continue de même norme.

Proposition 13.8 *Sachant que,*

1. *Le sous-espace $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{E})$ est dense dans $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a,b],\mathbb{E})$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$,*
2. *l'intégrale I est une application linéaire continue de norme $(b-a)$ à valeurs dans $\mathbb{E}$, espace complet,*

l'application linéaire I se prolonge de manière unique sur $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a,b],\mathbb{E})$ en une application linéaire continue de même norme. On notera

$$\forall f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a,b],\mathbb{E}), \quad I(f) = \int_a^b f(t)dt.$$

Remarque 13.1 1. *On dit qu'une application définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{E}$ est réglée si elle admet en tout point de l'intervalle $[a,b[$ une limite à droite et en tout point de l'intervalle $]a,b]$une limite à gauche. L'ensemble de ces applications est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{E})$, espace vectoriel des applications bornées définies sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{E}$.*

2. *Dans l'espace vectoriel normé $\mathcal{B}([a,b],\mathbb{E})$ muni de la norme uniforme, l'adhérence du sous-espace vectoriel des applications en escalier $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{E})$ est le sous-espace des applications réglées contenant strictement $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a,b],\mathbb{E})$.*
3. *On peut donc définir de la même façon que précédemment l'intégrale d'une application réglée.*

Définition : On définit $\int_b^a f(t)dt$ par,

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt.$$

13.3 Propriétés élémentaires de l'intégrale

Proposition 13.9 *Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux :*

1. *Relation de Chasles :*

$$\forall c \in]a,b[, \forall f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a,b],\mathbb{E}), \quad \int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt,$$

2. $\forall f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a,b],\mathbb{E}), \quad \left\|\int_a^b f(x)dx\right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|dx,$
3. $\forall f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a,b],\mathbb{R}), \quad f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t)dt \geq 0.$
4. $\forall f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \quad f \geq 0 \quad \text{et} \quad f \neq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx > 0.$

Preuve.

1. Soit f élément de $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a,b],\mathbb{E})$. Considérons $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{E})$ convergente pour la norme uniforme vers f. La suite des restrictions des applications f_n au segment $[a,c]$ (respectivement $[c,b]$) converge pour la norme uniforme vers la restriction de f au segment $[a,c]$ (respectivement $[c,b]$). D'après la relation de Chasles pour les applications en escalier, proposition 13.7.

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \int_a^b f_n(t)dt=\int_a^c f_n(t)dt+\int_c^b f_n(t)dt.$$

Les applications intégrales sur les segments $[a,c]$, $[c,b]$ et $[a,b]$ étant continues, en passant à la limite, on obtient

$$\int_a^b f(t)dt=\int_a^c f(t)dt+\int_c^b f(t)dt.$$

2. Soit f élément de $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a,b],\mathbb{E})$. Considérons $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{E})$ convergente pour la norme uniforme vers f. Sachant que,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt=\int_a^b f(t)dt$$

et que l'application norme sur $\mathbb{E}$ est continue, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\int_a^b f_n(t)dt\right\|=\left\|\int_a^b f(t)dt\right\|.$$

Les inégalités

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall t\in[a,b],\quad \big|\|f_n(t)\|-\|f(t)\|\big|\le\|f_n(t)-f(t)\|\le\|f_n-f\|_\infty,$$

permettent d'écrire que la suite $(\|f_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'applications en escalier définies sur $[a,b]$ à valeurs positives convergentes uniformément vers $\|f\|$, application continue par morceaux à valeurs réelles. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b\|f_n(t)\|\,dt=\int_a^b\|f(t)\|\,dt.$$

En utilisant les deux convergences précédentes et la proposition 13.5, on obtient l'inégalité désirée.

3. Pour cette dernière assertion, on suppose que les applications sont à valeurs réelles. Considérons f une application continue par morceaux, positive. On a

$$0\le\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx=\int_a^b f(x)dx.$$

4. Soit x_0 un point de $[a,b]$ vérifiant $f(x_0) > 0$. Il existe un segment $[c,d]$ inclus dans $[a,b]$, contenant le point x_0 et vérifiant

$$\forall t \in [c,d], \quad f(t) \geq \frac{f(x_0)}{2}.$$

Donc,

$$\int_a^b f(t)dt \geq \int_c^d f(t)dt \geq \frac{(d-c)f(x_0)}{2} > 0.$$

♣

13.4 Calcul d'une intégrale

13.4.1 Calcul à l'aide d'une primitive

Proposition 13.10 *Soient f une application définie, continue sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{E}$ et a un élément de I. Alors l'application F définie sur I par :*

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est dérivable sur cet intervalle de dérivée f.

Preuve. Considérons x un élément de I. Montrons que F est dérivable en x de vecteur dérivée $f(x)$. Soit ε un réel strictement positif. Considérons α un réel strictement positif vérifiant

$$\forall y \in I, \quad |x-y| \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon.$$

Alors, pour tout nombre réel h non nul tel que le réel $(x+h)$ appartienne à I et vérifiant $|h| \leq \alpha$,

$$\left\| \frac{1}{h}\left(F(x+h) - F(x)\right) - f(x) \right\| = \left\| \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)dt \right) - f(x) \right\|$$

$$= \left\| \frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right) \right\| \leq \frac{1}{|h|}\left| \int_x^{x+h} \varepsilon dt \right| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que F est dérivable en x, de dérivée $f(x)$. ♣

Corollaire 13.11 *Soit f une application définie, continue sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{E}$. Alors,*

1. *L'application f admet des primitives sur I.*
2. *Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I et pour toute primitive F_1 de f sur le segment $[a,b]$, on a*

$$\int_a^b f(x)dx = F_1(b) - F_1(a).$$

Cette dernière expression est notée

$$[F_1(x)]_a^b.$$

Preuve.

1. L'application F définie dans la proposition précédente est une primitive de f.
2. Soit F_1 une primitive de f sur l'intervalle $[a,b]$. Alors, l'application $(F-F_1)$ est dérivable sur I, de dérivée nulle. Cette application est constante sur l'intervalle I :

$$\forall x \in I, \quad F(x) - F_1(x) = F(a) - F_1(a) = -F_1(a).$$

En particulier, pour $x = b$,

$$\int_a^b f(t)dt - F_1(b) = -F_1(a).$$

D'où le résultat.

♣

13.4.2 Cas où $\mathbb{E}$ est de dimension finie

Proposition 13.12 *On considère $\mathbb{E}$ espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de celui-ci. Soit f une application définie et continue sur un segment $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{E}$. On note $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$, les applications coordonnées de f dans la base $\mathcal{B}$. Alors,*

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b f_i(x)dx \right) e_i.$$

Preuve. Soit F une primitive de f sur le segment $[a,b]$. Notons $(F_1, F_2, \cdots, F_n)$, les applications coordonnées de F dans la base $\mathcal{B}$:

$$F = \sum_{i=1}^n F_i e_i.$$

L'application F étant dérivable sur $[a,b]$, nous savons, d'après la proposition 12.13, page 179, que les applications F_i le sont et

$$F' = \sum_{i=1}^{n} F_i' e_i.$$

Or,

$$F' = f = \sum_{i=1}^{n} f_i e_i.$$

Ainsi,

$$\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \quad F_i' = f_i.$$

On en déduit que pour tout entier compris entre 1 et n, l'application F_i est une primitive sur le segment $[a,b]$ de l'application continue f_i :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} (F_i(b) - F_i(a))\, e_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b f_i(t)dt \right) e_i.$$

♣

Corollaire 13.13 *Si f est un élément de $C_{\mathcal{M}}([a,b],\mathbb{C})$, on a*

1. $$\Re\left(\int_a^b f(x)dx\right) = \int_a^b \Re(f(x))dx$$
2. $$\Im\left(\int_a^b f(x)dx\right) = \int_a^b \Im(f(x))dx,$$
3. $$\overline{\left(\int_a^b f(x)dx\right)} = \int_a^b \overline{f(x)}dx.$$

13.4.3 Intégration par parties

Proposition 13.14 *(Intégration par parties). Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $g : [a,b] \to \mathbb{E}$ deux applications de classe C^1. Alors*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f.g]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Preuve. Nous avons, d'après l'exercice 8.1, page 92

$$\forall x \in [a,b], \quad (fg)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

Les trois applications $(fg)'$, $f'g$ et fg' étant continues sur $[a,b]$, elles admettent une intégrale sur ce segment et

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \int_a^b (fg)'(x)dx - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

♣

13.4.4 Changement de variables

Proposition 13.15 *On considère un segment* $[a,b]$*,* I *un intervalle,* $\mathbb{E}$ *e.v.n. complet,*

$$u : [a,b] \to I$$

une application de classe C^1 *et*

$$f : I \to \mathbb{E}$$

une application continue. *Alors*

$$\int_a^b u'(t)f(u(t))dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt.$$

Preuve. Considérons l'application F_1 définie par

$$\begin{array}{cccc} F_1 : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & x & \longmapsto & \int_a^x u'(t)f(u(t))dt. \end{array}$$

Cette application est dérivable sur $[a,b]$ avec

$$\forall x \in [a,b], \quad F_1'(x) = u'(x)f(u(x)).$$

Considérons l'application F_2 définie par

$$\begin{array}{cccc} F_2 : & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & x & \longmapsto & \int_{u(a)}^{u(x)} f(t)dt. \end{array}$$

On a $F_2 = F \circ u$ où

$$\begin{array}{cccc} F : & I & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & y & \longmapsto & \int_{u(a)}^{y} f(t)dt. \end{array}$$

L'application F_2 est donc dérivable sur $[a,b]$ avec

$$\forall x \in [a,b], \quad F_2'(x) = u'(x).F'(u(x)) = u'(x)f(u(x)).$$

Les deux applications F_1 et F_2 ont même dérivée sur le segment $[a,b]$ et sont égales en a. Ces deux applications sont égales et, en particulier, $F_1(b) = F_2(b)$. ♣

Corollaire 13.16 *On considère deux segments $[a,b]$, $[\alpha,\beta]$, $\mathbb{E}$ e.v.n. complet,*

$$u : [a,b] \to [\alpha,\beta]$$

une application de classe C^1 strictement monotone *du segment $[a,b]$ sur le segment $[\alpha,\beta]$ et*

$$f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{E}$$

une application continue par morceaux. *Alors*

1. *L'application $f \circ u$ est une application définie sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{E}$, continue par morceaux,*
2. $$\int_a^b u'(t)f(u(t))dt = \int_\alpha^\beta f(t)dt.$$

Preuve. On considère $(\alpha_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à l'application f et pour tout entier i compris entre 0 et $(n-1)$, l'application g_i définie, continue sur le segment $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ et coïncidant avec f sur l'intervalle $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$.
Nous effectuons la preuve dans le cas où l'application u est strictement croissante, le cas où u est strictement décroissante étant similaire. On note

$$\forall i \in \{0,1,\cdots,n\}, \quad a_i = u^{-1}(\alpha_i).$$

La suite $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ est une subdivision du segment $[a,b]$. D'autre part,

$$\forall i \in \{0,1,\cdots,n-1\}, \quad \begin{cases} \text{L'application} \quad (g_i \circ u) \quad \text{est continue sur le segment} \\ \qquad\qquad\qquad [a_i, a_{i+1}], \\ \forall t \in]a_i, a_{i+1}[, \quad (g_i \circ u)(t) = (f \circ u)(t). \end{cases}$$

L'application $(f \circ u)$ est donc une application continue par morceaux définie sur le segment $[a,b]$. L'application u' étant continue, l'application $u'.(f \circ u)$ est continue par morceaux. Ainsi,

$$\int_a^b u'(t).f(u(t))dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} u'(t).f(u(t))dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} u'(t).g_i(u(t))dt$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} g_i(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(t)dt.$$

♣

Remarque 13.2 *On peut remarquer que si u est une application de classe C^1 définie sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans un intervalle I et f une application continue par morceaux sur I, l'application $f \circ u$ n'est pas toujours une application* *continue par morceaux. Pour le vérifier, il suffit de prendre par exemple l'application u définie sur le segment* $[0,1]$ *par*

$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ \forall t \in]0,1], \quad u(t) = t^3 \sin\left(\frac{1}{t}\right) \end{cases}$$

et l'application f fonction indicatrice de l'intervalle $\mathbb{R}^+$.

Voici une première application.

13.4.5 Intégrale sur une période d'une application périodique

Proposition 13.17 *Soient T un réel strictement positif, f une application T- périodique, continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{E}$ e.v.n. complet. Alors,*

$$\forall (t_1, t_2) \in (\mathbb{R}^2), \quad \int_{t_1}^{t_1+T} f(x)dx = \int_{t_2}^{t_2+T} f(x)dx.$$

Preuve. Utilisons la relation de Chasles.

$$\int_{t_1}^{t_1+T} f(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx + \int_{t_2}^{t_2+T} f(x)dx + \int_{t_2+T}^{t_1+T} f(x)dx.$$

On supposera, sans perdre de généralité, que le réel t_1 est strictement inférieur à t_2. Effectuons le changement de variable suivant

$$\begin{array}{rccc} u: & [t_1, t_2] & \longrightarrow & [t_1+T, t_2+T] \\ & t & \longmapsto & t+T \end{array}.$$

Nous obtenons

$$\int_{t_1+T}^{t_2+T} f(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t+T)dt = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

En remplaçant dans l'égalité précédente, on obtient le résultat désiré.

♣

13.4.6 Sommes de Riemann

Proposition 13.18 *On considère $[a,b]$ un segment. On appelle subdivision pointée du segment $[a,b]$, un couple (σ,Θ) où $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq k}$ est une subdivision de $[a,b]$ et $\Theta = (\theta_i)_{1\leq i\leq k}$ une famille de points de $[a,b]$ tels que $\forall i \in [1,k]$, $\theta_i \in [a_{i-1},a_i]$. Soit f, une application continue par morceaux de $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{E}$. On pose :*

$$S(f,\sigma,\Theta) = \sum_{i=1}^{k}(a_i - a_{i-1})f(\theta_i).$$

Soit $(\sigma_n,\Theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de subdivisions pointées du segment $[a,b]$ telles que la suite des pas $(\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tende vers 0. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} S(f,\sigma_n,\Theta_n) = \int_a^b f(x)dx.$$

Preuve.

1. Montrons dans un premier temps que la propriété est vérifiée pour les applications de la forme

$$f: \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ x & \longmapsto & \mathbb{1}_{[c,d]}(x).u \end{array}$$

où $\mathbb{1}_{[c,d]}$ est la fonction indicatrice du segment $[c,d]$ avec éventuellement $c = d$ et u un élément de $\mathbb{E}$. Considérons (σ,Θ) une subdivision pointée du segment $[a,b]$ avec $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq k}$ et $\Theta = (\theta_i)_{1\leq i\leq k}$.
Soit i un entier compris entre 1 et n.

(a) Si les réels c et d n'appartiennent pas au segment $[a_{i-1},a_i]$, alors f est constante sur ce segment et

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)dt - (a_i - a_{i-1})f(\theta_i) = \int_{a_{i-1}}^{a_i} (f(t) - f(\theta_i))\,dt = 0.$$

(b) Si le segment $[a_{i-1},a_i]$ contient le réel c ou le réel d ou les deux, alors l'application $\mathbb{1}_{[c,d]}.u$ ne prenant que les valeurs 0 et u, on a

$$\left\|\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)dt - (a_i - a_{i-1})f(\theta_i)\right\| = \int_{a_{i-1}}^{a_i} \|f(t) - f(\theta_i)\|\,dt \leq \|u\|\delta.$$

Ainsi pour tout entier n strictement positif,

$$\left\|S(f,\sigma_n,\Theta_n) - \int_a^b f(x)dx\right\| \leq 4\|u\|\delta_n.$$

On en déduit que la suite $(S(f,\sigma_n,\Theta_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et

$$\lim_{n\to+\infty} S(f,\sigma_n,\Theta_n) = \int_a^b f(x)dx.$$

2. Considérons f une application en escalier. Alors, f peut s'écrire sous la forme

$$f = \sum_{m=1}^{p} f_m,$$

avec pour tout entier m compris entre 1 et p,

$$f_m = \mathbb{1}_{[c_m, d_m]} . u_m$$

où $[c_m, d_m]$ est un segment et u_m un élément de $\mathbb{E}$. Pour tout entier n strictement positif,

$$S(f, \sigma_n, \Theta_n) = \sum_{m=1}^{p} S(f_m, \sigma_n, \Theta_n).$$

On en déduit que la suite $(S(f, \sigma_n, \Theta_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente vers

$$\sum_{m=1}^{p} \int_a^b f_m(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

3. Soit enfin f une application continue par morceaux sur $[a, b]$. Nous savons que $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{E})$ est dense pour la norme uniforme dans $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a, b], \mathbb{E})$. Soit ε un réel strictement positif. Il existe une application en escalier g tel que

$$\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Alors, pour tout entier n strictement positif,

$$\|S(f, \sigma_n, \Theta_n) - S(g, \sigma_n, \Theta_n)\| \leq \sum_{i=1}^{k} (a_i - a_{i-1}) \|f(\theta_i) - g(\theta_i)\| \leq (b - a)\varepsilon.$$

et

$$\left\| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt \right\| \leq (b - a)\varepsilon.$$

L'application g est une application en escalier. Il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad \left\| S(g, \sigma_n, \Theta_n) - \int_a^b g(t)dt \right\| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout entier n supérieur à n_0,

$$\left\| S(f, \sigma_n, \Theta_n) - \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \|S(f, \sigma_n, \Theta_n) - S(g, \sigma_n, \Theta_n)\|$$

$$+ \left\| S(g, \sigma_n, \Theta_n) - \int_a^b g(t)dt \right\| + \left\| \int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt \right\| \leq (1 + 2(b - a))\, \varepsilon.$$

D'où le résultat.

♣

13.4.7 Exemple de somme de Riemann : la méthode des rectangles

Sans perdre de généralité, on se place sur le segment $[0,1]$ et dans l'espace $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([0,1],\mathbb{E})$. Dans notre exemple, chaque subdivision est régulière, c'est-à-dire que les segments déterminés par celle-ci ont même longueur. Pour chaque segment, le point choisi sera l'origine du segment. À toute application f élément de $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a,b],\mathbb{E})$, on associe ainsi la suite définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad S_k(f) = \frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1} f\left(\frac{i}{k}\right).$$

En utilisant le résultat de la proposition précédente, on obtient

$$\forall f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a,b],\mathbb{E}), \quad \int_0^1 f(t)dt = \lim_{k\to+\infty} S_k(f).$$

En supposant une certaine régularité de l'application f, nous obtenons le résultat suivant,

Théorème 13.19 *Pour toute fonction $f \in C^3([0,1],\mathbb{R})$ on a le développement asymptotique :*

$$S_k(f) = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{2k}(f(1)-f(0)) + \frac{1}{12k^2}(f'(1)-f'(0)) + O\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

Preuve. On considère k un entier strictement positif, i un entier positif strictement inférieur à k et t un point du segment $\left[\frac{i}{k},\frac{i+1}{k}\right]$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, théorème 8.20, page 114,

$$-\frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{3!k^3} \le f(t) - f\left(\frac{i}{k}\right) - \left(t-\frac{i}{k}\right)f'\left(\frac{i}{k}\right) - \frac{1}{2}\left(t-\frac{i}{k}\right)^2 f''\left(\frac{i}{k}\right) \le \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{3!k^3}.$$

Puis, en intégrant :

$$-\frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{3!k^4} \le \int_{\frac{i}{k}}^{\frac{i+1}{k}} f(t)\,dt - \frac{1}{k}f\left(\frac{i}{k}\right) - \frac{1}{2k^2}f'\left(\frac{i}{k}\right) - \frac{1}{3!}\frac{1}{k^3}f''\left(\frac{i}{k}\right) \le \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{3!k^4}$$

et en sommant les inégalités obtenues :

$$\left|\int_0^1 f(t)\,dt - S_k(f) - \frac{1}{2k}S_k(f') - \frac{1}{6k^2}S_k(f'')\right| \le \frac{\|f^{(3)}\|_\infty}{3!k^3}.$$

C'est-à-dire que :

$$S_k(f) = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{2k}S_k(f') - \frac{1}{6k^2}S_k(f'') + O\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

Un raisonnement analogue appliqué à f' et f'' donne :

$$S_k(f') = \int_0^1 f'(t)\,dt - \tfrac{1}{2k}S_k(f'') + O\left(\tfrac{1}{k^2}\right) = f(1) - f(0) - \tfrac{1}{2k}S_k(f'') + O\left(\tfrac{1}{k^2}\right),$$
$$S_k(f'') = \int_0^1 f''(t)\,dt + O\left(\tfrac{1}{k}\right) = f'(1) - f'(0) + O\left(\tfrac{1}{k}\right).$$

Et en définitive :

$$S_k(f) = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{2k}(f(1) - f(0)) + \frac{1}{12k^2}(f'(1) - f'(0)) + O\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

♣

Remarque 13.3 *Nous verrons que, si la fonction est de classe C^1 sur le segment $[0,1]$, on obtient la majoration d'erreur suivante (Chapitre 24, section 24.4, page 490).*

$$\left|\int_0^1 f(t)dt - S_k(f)\right| \le \frac{\|f'\|_\infty}{2k}.$$

Exemples :

1. Pour $f(t) = \frac{1}{1+t}$, on obtient :

$$\sum_{i=k}^{2k-1}\frac{1}{i} = \ln(2) + \frac{1}{4k} + \frac{1}{16k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

2. Pour $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{k}{k^2+i^2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4k} - \frac{1}{24k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right).$$

13.5 Les formules de la moyenne

Voici un exercice utile pour la preuve de la deuxième formule de la moyenne.

Exercice 13.1 Dans cet exercice, on considère un segment $[a,b]$ et $\mathbb{E}$ un espace vectoriel normé complet.
Soit f une application continue par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{E}$. Montrer que l'application définie sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{E}$ par

$$\begin{array}{rccc} F: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & t & \longmapsto & \int_a^t f(x)dx \end{array}$$

est lipschitzienne sur $[a,b]$.

Solution.

$$\forall (t_1, t_2) \in [a,b]^2, \quad \|F(t_1) - F(t_2)\| \leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \|f(t)\| dt \right| \leq |t_1 - t_2| \, \|f\|_\infty.$$

L'application F est lipschitzienne sur $[a,b]$ de rapport $\|f\|_\infty$.

♣

Proposition 13.20 *(Première formule de la moyenne). Soient f et g deux applications définies sur $[a,b]$ à valeurs réelles, f étant continue, g continue par morceaux et positive. Alors :*

$$\exists c \in [a,b], \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

Preuve. Considérons l'application h définie sur $[a,b]$ par

$$\begin{array}{rccl} h: & [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & f(t) \int_a^b g(x)dx. \end{array}$$

L'application f étant continue sur le compact, connexe $[a,b]$, l'intégrale de la fonction g étant positive, on en déduit que l'image de l'application h est le segment

$$h([a,b]) = \left[\left(\int_a^b g(x)dx \right) \inf_{t \in [a,b]} f(t); \left(\int_a^b g(x)dx \right) \sup_{t \in [a,b]} f(t) \right].$$

L'application g étant positive,

$$\forall x \in [a,b], \quad \inf_{t \in [a,b]} f(t)g(x) \leq f(x)g(x) \leq \sup_{t \in [a,b]} f(t)g(x).$$

En intégrant, nous obtenons,

$$\inf_{t \in [a,b]} f(t) \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \sup_{t \in [a,b]} f(t) \int_a^b g(x)dx.$$

Le réel $\int_a^b f(x)g(x)dx$ appartient à $h([a,b])$. Il existe un réel c élément de $[a,b]$ vérifiant

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = h(c) = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

♣

Proposition 13.21 *(Seconde formule de la moyenne). Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose f positive et décroissante. Alors,*

$$\exists c \in [a,b], \quad \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a^+) \int_a^c g(x)dx. \tag{13.9}$$

Preuve. On considère pour toute la preuve, une application g continue par morceaux définie sur le segment $[a, b]$, à valeurs réelles.

Soit G l'application définie par,

$$G : \begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \int_a^t g(x)dx. \end{array}$$

L'application G est continue sur le segment $[a, b]$ (exercice 13.1). L'image de cette application est donc le segment :

$$G([a, b]) = [m, M]$$

où

$$m = \min_{x\in[a,b]} G(x), \quad M = \max_{x\in[a,b]} G(x).$$

Le réel $f(a^+)$ étant positif, l'image du segment $[a, b]$ par l'application $t \mapsto f(a^+)G(t)$ est le segment :

$$[f(a^+)m, f(a^+)M].$$

L'existence du réel c vérifiant l'égalité (13.9) équivaut donc à la double inégalité,

$$mf(a^+) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mf(a^+).$$

1. Supposons, dans un premier temps que f soit une application en escalier sur $[a, b]$. Notons $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à cette application. Pour tout entier naturel i strictement inférieur à n, on note f_i la valeur constante de f sur l'intervalle $]a_i, a_{i+1}[$.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} f_i\left(G(a_{i+1}) - G(a_i)\right) = \sum_{i=1}^{n-1} G(a_i)\left(f_{i-1} - f_i\right) + f_{n-1}G(a_n).$$

   L'application f étant décroissante et f_{n-1} étant positive, on a

$$m\left(\sum_{i=1}^{n-1}(f_{i-1} - f_i) + f_{n-1}\right) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\left(\sum_{i=1}^{n-1}(f_{i-1} - f_i) + f_{n-1}\right).$$

   C'est-à-dire,

$$m.f(a^+) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M.f(a^+).$$

2. On suppose désormais f continue par morceaux sur $[a, b]$. On définit alors, pour tout entier strictement positif, l'application f_n définie sur $[a, b]$ par

$$\begin{cases} \forall k \in \{1, \cdots n\}, \forall t \in [a + \frac{k-1}{n}(b-a), a + \frac{k}{n}(b-a)[, \quad f_n(t) = f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right), \\ f_n(b) = f(b). \end{cases}$$

   Nous remarquons que ces applications sont en escalier, positives et décroissantes. Ainsi,

$$\forall n \geq 1, \quad m.f_n(a^+) \leq \int_a^b f_n(x)g(x)dx \leq M.f_n(a^+).$$

   Pour conclure, il suffit de montrer que

(a) $\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)g(t)dt = \int_a^b f(t)g(t)dt$.

(b) $\lim_{n\to+\infty} f_n(a^+) = f(a^+)$.

(a) Soit n un entier strictement positif. L'application f étant décroissante, nous avons pour tout entier k strictement positif et inférieur ou égal à n,

$$\forall t\in [a+\frac{k-1}{n}(b-a), a+\frac{k}{n}(b-a)[,$$

$$0\leq f(t)-f_n(t)\leq f\left(a+\frac{k-1}{n}(b-a)\right)-f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right).$$

Donc,

$$\begin{aligned}0\leq \int_{a+\frac{k-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{k}{n}(b-a)} &(f(t)-f_n(t))\,dt\\ &\leq \frac{1}{n}\left[f\left(a+\frac{k-1}{n}(b-a)\right)-f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)\right].\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall n\geq 1,\quad 0\leq \int_a^b (f(t)-f_n(t))\,dt\leq \frac{1}{n}\left(f(a)-f(b)\right),$$

$$\forall n\geq 1,\quad \left|\int_a^b (f_n(t)g(t)-f(t)g(t))\,dt\right|\leq \int_a^b |f_n(t)-f(t)|\,|g(t)|\,dt$$

$$=\int_a^b (f(t)-f_n(t))\,|g(t)|\,dt\leq \sup_{t\in[a,b]}|g(t)|\int_a^b (f(t)-f_n(t))\,dt$$

$$\leq \sup_{t\in[a,b]}|g(t)|\,\frac{1}{n}\left(f(a)-f(b)\right).$$

On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)g(t)dt=\int_a^b f(t)g(t)dt.$$

(b) Pour tout entier, n strictement positif, on a

$$f_n(a_+)=f\left(a+\frac{(b-a)}{n}\right).$$

D'où,

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(a^+)=f(a^+).$$

Ce qui termine la preuve.

13.6 Rectification d'un arc paramétré

13.6.1 Définition

Définition : Soient $\Gamma = ([a,b], f)$ un arc paramétré $\mathcal{C}^0$ (*i. e.* continue) de $\mathbb{R}^n$ et $\sigma = (a_i)_{0 \le i \le n}$ une subdivision de $[a,b]$. On appelle ligne polygonale γ_σ associée à σ la suite finie de sommets $M_i = f(a_i)$ $(0 \le i \le n)$. On appelle longueur de γ_σ le réel positif :

$$L(f_\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{M_i M_{i+1}} \right\| = \sum_{i=0}^{n-1} \| f(a_{i+1}) - f(a_i) \| .$$

Définition : On dit que l'arc paramétré continu $\Gamma = ([a,b], f)$ est rectifiable si :

$$\sup \{ L(f_\sigma) / \sigma \text{ subdivision de } [a,b] \} < +\infty.$$

Dans ce cas, cette borne supérieure est appelée longueur de l'arc paramétré $([a,b], f)$ et on la note $L([a,b], f) = L(\Gamma)$.

Proposition 13.22 *Le fait d'être rectifiable et la longueur d'un arc sont des propriétés géométriques pour les arcs continus.*

Preuve. On considère $\Gamma_1 = ([a,b], f)$ et $\Gamma_2 = ([\alpha,\beta], g)$ deux paramétrages admissibles d'un arc géométrique continu. Il existe θ un homéomorphisme entre $[\alpha,\beta]$ et $[a,b]$ vérifiant

$$g = f \circ \theta.$$

Cet homéomorphisme θ permet de réaliser une bijection de l'ensemble des subdivisions de $[\alpha,\beta]$ sur l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$ (si θ est décroissante alors cette bijection inverse l'ordre des points des subdivisions) et on a $L(f,[a,b]) = L(g,[\alpha,\beta])$. Cette valeur commune est appelée longueur de l'arc géométrique. ♣

13.6.2 Longueur d'un arc paramétré compact de classe $\mathcal{C}^1$

Théorème 13.23 *Si $\Gamma = ([a,b], f)$ est un arc paramétré compact de classe $\mathcal{C}^1$, alors il est rectifiable et sa longueur est donnée par :*

$$L(\Gamma) = \int_a^b \| f'(t) \| \, dt.$$

Preuve. On considère f une application de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On note $\Gamma = ([a,b], f)$ l'arc paramétré. Soit $\sigma = (a_i)_{0 \le i \le n}$ une subdivsion du segment $[a,b]$. On a,

$$\begin{aligned}L(f_\sigma) &= \sum_{i=0}^{n-1} \|f(a_{i+1}) - f(a_i)\| \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t)dt \right\| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|f'(t)\| dt = \int_a^b \|f'(t)\| dt.\end{aligned}$$

L'arc Γ est donc rectifiable.
L'application f' est continue sur le segment $[a,b]$ donc uniformément continue. Considérons ε un réel strictement positif. Il existe un réel strictement positif α vérifiant,

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2, \quad |x-y| \leq \alpha \Rightarrow \|f'(x) - f'(y)\| \leq \varepsilon.$$

Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision du segment $[a,b]$ de pas inférieur à α. Soit i un entier compris entre 0 et $(n-1)$. Montrons que

$$\left| \|f(a_{i+1} - f(a_i)\| - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|f'(t)\| dt \right| \leq 2(a_{i+1} - a_i)\varepsilon.$$

Pour cela, il suffit d'établir les deux inégalités :

$$\big| \|f(a_{i+1}) - f(a_i)\| - (a_{i+1} - a_i)\|f'(a_i)\| \big| \leq (a_{i+1} - a_i)\varepsilon$$

et

$$\left| (a_{i+1} - a_i)\|f'(a_i)\| - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|f'(t)\| dt \right| \leq (a_{i+1} - a_i)\varepsilon.$$

On définit l'application g_i par

$$\begin{array}{rccl} g_i : & [a_i, a_{i+1}] & \longrightarrow & E \\ & t & \longmapsto & f(t) - (t - a_i) f'(a_i). \end{array}$$

L'application g_i est dérivable avec

$$\forall t \in [a_i, a_{i+1}], \quad g_i'(t) = f'(t) - f'(a_i).$$

Donc

$$\forall t \in [a_i, a_{i+1}], \quad \|g_i'(t)\| \leq \varepsilon.$$

En utilisant un corollaire (8.19, page 113) de l'inégalité des accroissements finis, on obtient

$$\|g_i(a_{i+1}) - g_i(a_i)\| = \|f(a_{i+1}) - f(a_i) - (a_{i+1} - a_i) f'(a_i)\| \leq (a_{i+1} - a_i)\varepsilon.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}&\big| \|f(a_{i+1}) - f(a_i)\| - (a_{i+1} - a_i)\|f'(a_i)\| \big| \\ &\qquad \leq \|f(a_{i+1}) - f(a_i) - (a_{i+1} - a_i) f'(a_i)\| \leq (a_{i+1} - a_i)\varepsilon.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\left|(a_{i+1}-a_i)\|f'(a_i)\| - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|f'(t)\|dt\right| = \left|\int_{a_i}^{a_{i+1}} (\|f'(a_i)\| - \|f'(t)\|)\,dt\right| \leq (a_{i+1}-a_i)\varepsilon.$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et les deux dernières inégalités, on obtient

$$\left|\|f(a_{i+1}) - f(a_i)\| - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|f'(t)\|dt\right| \leq 2(a_{i+1}-a_i)\varepsilon.$$

On en déduit que,

$$\|f(a_{i+1}) - f(a_i)\| \geq \int_{a_i}^{a_{i+1}} \|f'(t)\|dt - 2(a_{i+1}-a_i)\varepsilon.$$

En sommant, on obtient

$$L(f_\sigma) \geq \int_a^b \|f'(t)\|dt - 2(b-a)\varepsilon.$$

Ceci prouve que

$$\sup\{L(f_\sigma)/\sigma \text{ subdivision de } [a,b]\} = \int_a^b \|f'(t)\|dt.$$

Ainsi,

$$L(\Gamma) = \int_a^b \|f'(t)\|dt.$$

♣

13.7 Exercices

Exercice 13.2 Soit f une fonction positive et continue sur $[a,b]$.

1. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)^n dt\right)^{\frac{1}{n}} = M \quad \text{où} \quad M = \sup_{t\in[a,b]} f(t).$$

2. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue à valeurs strictement positives sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_a^b f(t)^n g(t)dt\right)^{\frac{1}{n}} = M \quad \text{où} \quad M = \sup_{t\in[a,b]} f(t).$$

Solution.

1. Si $M = 0$, le résultat est évident. On suppose désormais pour cette question M strictement positif. On a,

$$\forall n \geq 1, \quad \left(\int_a^b f^n(t)dt\right)^{\frac{1}{n}} \leq (b-a)^{\frac{1}{n}}.M$$

Soit ε un réel strictement positif inférieur à M. L'application f étant continue sur le segment $[a,b]$, il existe un segment $[\alpha,\beta]$ de longueur non nulle inclus dans $[a,b]$ et vérifiant

$$\forall t \in [\alpha,\beta], \quad f(t) \geq M - \varepsilon.$$

Donc, pour tout entier n supérieur à 1,

$$\left(\int_a^b f(t)^n dt\right)^{\frac{1}{n}} \geq \left(\int_\alpha^\beta f(t)^n dt\right)^{\frac{1}{n}} \geq (M-\varepsilon)\,(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}}.$$

Sachant que

$$\lim_{n\to+\infty}(b-a)^{\frac{1}{n}}.M = M \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}}.(M-\varepsilon) = (M-\varepsilon)$$

on peut trouver un entier naturel n_0 vérifiant,

$\forall n \geq n_0$,

$$(M-2\varepsilon) \leq (\beta-\alpha)^{\frac{1}{n}}.(M-\varepsilon) \leq \left(\int_a^b f(t)^n dt\right)^{\frac{1}{n}} \leq (b-a)^{\frac{1}{n}}M \leq (M+\varepsilon).$$

D'où le résultat.

2. L'application g est continue sur le segment $[a,b]$ et strictement positive. La borne inférieure de g, que l'on note m_g, est atteinte donc strictement positive. On note M_g la borne supérieure de g. Pour tout entier supérieur à 1,

$$(m_g)^{\frac{1}{n}}\left(\int_a^b f(t)^n dt\right)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\int_a^b f(t)^n g(t)dt\right)^{\frac{1}{n}} \leq (M_g)^{\frac{1}{n}}\left(\int_a^b f(t)^n dt\right)^{\frac{1}{n}}$$

Les deux suites se trouvant à gauche et à droite des inégalités convergent vers la même limite M. Ceci prouve que la suite encadrée converge aussi vers M.

♣

Exercice 13.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

1. Écrire, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, une relation entre I_n et I_{n-2}.
2. Donner une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1.$$
4. En déduire la formule de Wallis :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}\right]^2 = \pi,$$
5. Montrer que
$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Solution.

1. Soit n entier naturel, supérieur ou égal à 2,
$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\cos^2 x)dx = I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos x \cos x dx \\ &= I_{n-2} - \frac{1}{n-1}\left[\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n-1} I_n = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n. \end{aligned}$$
D'où,
$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$
2. Par une récurrence simple, on obtient pour tout entier naturel n,
$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 2} I_0 \\ &= \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}, \\ I_{2n+1} &= \frac{(2n)(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3} I_1 \\ &= \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$
3. $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}], \quad 0 < \sin^{n+1} x \leq \sin^n x.$$
La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc strictement positive et décroissante. Ainsi,
$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}.$$
D'où le résultat.

4. Notons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite indiquée dans cette question. Nous avons

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{1}{n}\left[\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\right]^2.$$

D'autre part,

$$\forall n \geq 1, \quad \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}\right]^2 = \frac{2}{\pi}\frac{n}{2n+1}u_n,$$

nous permet d'écrire

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{2n+1}{2n}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}\pi.$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \pi.$$

5. En remarquant que

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{1}{n}(2n+1)^2 I_{2n+1}^2,$$

On obtient

$$\forall n \geq 1, \quad (2n+1)I_{2n+1}^2 = \frac{n}{2n+1}u_n.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}(2n+1)I_{2n+1}^2 = \frac{\pi}{2},$$

De plus la relation,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (2n)I_{2n}^2 = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)\left(\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\right)^2(2n+1)I_{2n+1}^2$$

permet d'écrire,

$$\lim_{n\to+\infty}(2n)I_{2n}^2 = \frac{\pi}{2},$$

La suite $(nI_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puisque la suite extraite des termes d'indices pairs et la suite extraite des termes d'indices impairs sont convergentes vers la même limite. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} nI_n^2 = \frac{\pi}{2}.$$

La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

D'où,

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

♣

Exercice 13.4 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$) une fonction continue sur $\mathbb{R}$, T-périodique et vérifiant,

$$\int_0^T \varphi(x)dx = 0.$$

1. Montrer que la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \int_0^t \varphi(x)dx,$$

   est périodique, continue sur $\mathbb{R}$ donc bornée.

2. Montrer que si :
   (a) f est une fonction indicatrice d'un segment (éventuellement de longueur nulle) inclus dans $[a,b]$,
   (b) f est une fonction en escalier sur l'intervalle $[a,b]$,
   (c) f est une fonction continue par morceaux sur l'intervalle $[a,b]$,

   alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt)dt = 0.$$

3. (Application : Lemme de Lebesgue) Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)e^{int}dt = 0.$$

Remarque 13.4 *Nous retrouverons ce dernier résultat dans le chapitre sur les séries de Fourier, proposition 21.7, page 382.*

Solution.

1. Nous savons, grâce à la proposition 13.10, page 190, que l'application ψ est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel t,

$$\psi(t) = \int_0^t \varphi(x)dx = \int_0^t \varphi(x+T)dx.$$

   Effectuons le changement de variable $u \mapsto x + T$.

$$\psi(t) = \int_T^{t+T} \varphi(u)du = \int_0^{t+T} \varphi(u)du = \psi(t+T).$$

   L'application ψ est T-périodique. De plus, l'application ψ étant continue sur le segment $[0,T]$,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\psi(t)| = \sup_{t\in[0,T]} |\psi(t)|.$$

2. (a) Soit $[c, d]$ un segment inclus dans le segment $[a, b]$ et n un entier strictement positif.

$$\int_a^b \mathbb{1}_{[c,d]}(t)\varphi(nt)dt = \int_c^d \varphi(nt)dt.$$

En utilisant le changement de variable $u \mapsto nt$,

$$\int_c^d \varphi(nt)dt = \frac{1}{n}\int_{nc}^{nd} \varphi(u)du = \frac{1}{n}\left(\psi(nd) - \psi(nc)\right).$$

Donc,

$$\left|\int_a^b \mathbb{1}_{[c,d]}(t)\varphi(nt)dt\right| \leq \frac{2\sup_{t\in[0,T]}|\psi(t)|}{n}.$$

D'où le résultat.

(b) L'application f étant en escalier, elle est combinaison linéaire de fonctions indicatrices de segment. La suite

$$\left(\int_a^b f(t)\varphi(nt)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est une combinaison linéaire de suites convergentes vers 0. Elle converge donc vers 0.

(c) Supposons f continue par morceaux. Soit ε un réel strictement positif. Il existe g une application en escalier, vérifiant

$$\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon,$$

où $\|.\|_\infty$ est la norme du sup sur le segment $[a, b]$. Alors, pour tout entier naturel n,

$$\left|\int_a^b g(t)\varphi(nt)dt - \int_a^b f(t)\varphi(nt)dt\right| \leq \varepsilon(b-a)\sup_{t\in[0,T]}|\varphi(t)|.$$

Il existe un entier n_0, vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad \left|\int_a^b g(t)\varphi(nt)dt\right| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que,

$$\forall n \geq n_0, \quad \left|\int_a^b f(t)\varphi(nt)dt\right| \leq \varepsilon[1 + (b-a)\sup_{t\in[0,T]}|\varphi(t)|].$$

Nous obtenons le résultat désiré.

3. L'application
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$$
est continue, 2π-périodique et vérifie,
$$\int_0^{2\pi} e^{it} dt = \left[\frac{1}{i} e^{it}\right]_0^{2\pi} = 0.$$
Il suffit d'appliquer les résultats précédents.

♣

Chapitre 14

Intégrales généralisées

Les fonctions indiquées dans ce chapitre sont continues par morceaux sur un intervalle de $\mathbb{R}$ (définition page 98), à valeurs dans $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

14.1 Définition de l'intégrale généralisée

Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, b[$

Définition : Soient $[a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty < a < b \leq +\infty$) et $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. Si l'application F définie, pour tout réel x de l'intervalle $[a, b[$, par :

$$\begin{array}{rccc} F: & [a,b[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \int_a^x f(t)dt, \end{array}$$

admet une limite finie lorsque x tend vers b, on dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\int_a^b f(t)dt$ converge et on note

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} F(x) = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Exercice 14.1 1. Pour quelles valeurs du réel α, l'intégrale généralisée

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

est-elle convergente ? Donner, dans ce cas, la valeur de l'intégrale.

2. Pour quelles valeurs du réel α, l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha}$$

est-elle convergente ? Donner, dans ce cas, la valeur de l'intégrale.

Solution.

1. Considérons F, l'application définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par

$$\begin{array}{rccc} F: & [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \int_1^x \frac{dt}{t^\alpha}. \end{array}$$

   (a) Cas où $\alpha = 1$.

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad F(x) = [\ln t]_1^x = \ln x.$$

   L'intégrale est divergente.

   (b) Cas où $\alpha \neq 1$.

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad F(x) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right).$$

   L'intégrale est convergente si et seulement si

$$\alpha > 1.$$

   Dans ce cas,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

2. Considérons G, l'application définie sur l'intervalle $[0,1[$ par

$$\begin{array}{rccc} G: & [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \int_0^x \frac{dt}{(1-t)^\alpha}. \end{array}$$

   (a) Cas où $\alpha = 1$.

$$\forall x \in [0,1[, \quad G(x) = [-\ln(1-t)]_0^x = -\ln(1-x).$$

   L'intégrale est divergente.

   (b) Cas où $\alpha \neq 1$.

$$\forall x \in [0,1,[, \quad G(x) = \frac{-1}{1-\alpha}\left[(1-t)^{1-\alpha}\right]_0^x = \frac{-1}{1-\alpha}((1-x)^{1-\alpha} - 1).$$

   L'intégrale est convergente si et seulement si

$$\alpha < 1.$$

   Dans ce cas,

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

♣

Exercice 14.2 Indiquer pour quelles valeurs du nombre complexe λ, l'intégrale généralisée

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} dt$$

est convergente. Donner, dans ce cas, la valeur de l'intégrale.

Solution. Considérons F, l'application définie sur l'intervalle $\mathbb{R}^+$ par

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & \int_0^x e^{\lambda t}. \end{array}$$

1. Cas où $\lambda = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad F(x) = x.$$

L'intégrale est divergente.

2. Cas où $\lambda \neq 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad F(x) = \left[\frac{1}{\lambda} e^{\lambda t}\right]_0^x = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\lambda x} - 1\right).$$

(a) Si $\Re(\lambda) > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} |F(x)| = +\infty.$$

L'intégrale est divergente.

(b) Si $\Re(\lambda) < 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = -\frac{1}{\lambda}.$$

L'intégrale est convergente et

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda}.$$

(c) Si $\Re(\lambda) = 0$, on a $\lambda = i\Im(\lambda) \neq 0$. Montrons que l'application

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & e^{i\Im(\lambda x)} \end{array}$$

n'admet pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = \frac{n\pi}{|\Im(\lambda)|}.$$

admet pour limite $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad g(x_n) = (-1)^n.$$

La suite $(g(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente, l'application g n'admet pas de limite en $+\infty$. Il en est de même pour l'application F. L'intégrale est donc divergente.

En conclusion, l'intégrale est convergente si et seulement si

$$\Re(\lambda) < 0$$

et, dans ce cas,

$$\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} dt = -\frac{1}{\lambda}.$$

♣

Proposition 14.1 *Soient $[a, b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty < a < b \leq +\infty$) et $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a, b[$. Pour tout $c \in]a, b[$, l'intégrale $\int_c^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si $\int_a^b f(t)dt$ l'est. Dans ce cas*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Preuve.

$$\forall x \in [a, b[, \quad \int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt.$$

Ceci prouve que, si l'une des deux intégrales généralisées converge, l'autre aussi. Dans ce cas, en passant à la limite,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

♣

Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $]a, b]$

Définition : Soient $]a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ (avec $-\infty \leq a < b < +\infty$) et $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $]a, b]$. Si l'application définie pour tout réel x de l'intervalle $]a, b]$ par

$$\int_x^b f(t)dt$$

admet une limite finie lorsque x tend vers a, on dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\int_a^b f(t)dt$ converge et on note

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to a} \int_x^b f(t)dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Exercice 14.3 1. Donner, suivant le réel α, la nature de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}.$$

2. Donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^1 \ln t dt.$$

Solution.

1. (a) Si $\alpha = 1$.

$$\forall x \in]0,1], \quad \int_x^1 \frac{dt}{t} = [\ln t]_x^1 = -\ln x.$$

Puisque

$$\lim_{x\to 0} (-\ln x) = +\infty,$$

l'intégrale est divergente.

(b) Si $\alpha \neq 1$.

$$\forall x \in]0,1], \quad \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - x^{1-\alpha}\right).$$

L'intégrale est convergente si et seulement si $\alpha < 1$. Dans ce cas,

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$

2.

$$\forall x \in]0,1], \quad \int_x^1 \ln t dt = [t \ln t - t]_x^1 = x - x\ln x - 1.$$

Puisque

$$\lim_{x\to 0}(x - x\ln x - 1) = -1,$$

l'intégrale est convergente et

$$\int_0^1 \ln t dt = -1.$$

♣

Proposition 14.2 *Soient* $]a,b]$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *(avec* $-\infty \leq a < b < +\infty$*) et* $f :]a,b] \to \mathbb{K}$ *une fonction continue par morceaux sur* $]a,b]$. *Pour tout* $c \in]a,b[$, *l'intégrale* $\int_a^c f(t)dt$ *est convergente si et seulement si* $\int_a^b f(t)dt$ *l'est. Dans ce cas*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Preuve. La preuve est similaire à celle de la proposition 14.1. ♣

Intégrale généralisée sur un intervalle ouvert

Proposition-définition 14.3 *Soient* $]a,b[$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *(avec* $-\infty \leq a < b \leq +\infty$*) et* $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue par morceaux sur* $]a,b[$*. On suppose qu'il existe* $c_0 \in]a,b[$ *tel que les intégrales*

$$\int_a^{c_0} f(t)dt \quad et \quad \int_{c_0}^b f(t)dt$$

soient convergentes. Alors, pour tout réel $c \in]a,b[$*, les intégrales*

$$\int_a^c f(t)dt \quad et \quad \int_c^b f(t)dt$$

convergent. On dit alors que $\int_a^b f(t)dt$ *est convergente et on note*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^{c_0} f(t)dt + \int_{c_0}^b f(t)dt.$$

Cette valeur est indépendante *du réel* c_0 *choisi dans l'intervalle* $]a,b[$*.*
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ *diverge.*

Preuve. Il suffit d'utiliser les propositions 14.1 et 14.2. ♣

Proposition 14.4 *Les propriétés élémentaires vérifiées par les intégrales sur un segment restent vraies pour les intégrales généralisées convergentes : linéarité, positivité.*

14.2 Cas des fonctions positives

Toutes les propriétés indiquées dans cette section le sont pour des intégrales généralisées définies sur un intervalle $[a,b[$. On obtient des propriétés identiques pour des intégrales généralisées définies sur un intervalle $]a,b]$.

Proposition 14.5 *Soit* f *une application continue par morceaux sur l'intervalle* $[a,b[$ *et à valeurs réelles positives. Alors* $\int_a^b f(t)dt$ *converge si et seulement si*

$$\exists M \geq 0, \forall x \in [a,b[, \quad \int_a^x f(t)dt \leq M. \tag{14.10}$$

Preuve.

1. Supposons que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ soit convergente. Soit x un réel apparte-

nant à l'intervalle $[a, b[$. L'application f étant positive,

$$\forall y \in]x, b[, \int_a^y f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^y f(t)dt \geq \int_a^x f(t)dt.$$

D'où,

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{y \to b} \int_a^y f(t)dt \geq \int_a^x f(t)dt.$$

Nous pouvons choisir $M = \int_a^b f(t)dt$.

2. Supposons réciproquement la propriété (14.10) vérifiée. Notons M_s le réel

$$M_s = \sup_{x \in [a,b[} \left\{ \int_a^x f(t)dt \right\}.$$

Soit ε un réel strictement positif. Il existe un réel c appartenant à l'intervalle $[a, b[$ vérifiant

$$M_s - \varepsilon < \int_a^c f(t)dt.$$

Alors,

$$\forall x \in [c, b[, \quad M_s - \varepsilon < \int_a^c f(t)dt \leq \int_a^x f(t)dt \leq M_s.$$

On en déduit que

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt = M_s.$$

L'intégrale est convergente et

$$\int_a^b f(t)dt = M_s$$

♣

Remarque 14.1 *L'application f étant à valeurs positives, l'application F est croissante. Si la propriété (14.10) n'est pas vérifiée, alors*

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty.$$

Dans ce cas, on notera

$$\int_a^b f(x)dx = +\infty.$$

Proposition 14.6 *Soient f et g deux applications continues par morceaux sur l'intervalle $[a, b[$ à valeurs réelles et vérifiant $0 \leq f \leq g$. Alors :*

1. *Si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.*
2. *Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.*

Preuve.

1. Considérons M un réel positif vérifiant
$$\forall x \in [a,b[, \quad \int_a^x g(t)dt \leq M.$$
Alors
$$\forall x \in [a,b[, \quad \int_a^x f(t)dt \leq \int_a^x g(t)dt \leq M.$$
On en déduit que $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.
2. Nous avons
$$\sup_{x\in[a,b[} \left\{ \int_a^x f(t)dt \right\} = +\infty \quad \text{donc} \quad \sup_{x\in[a,b[} \left\{ \int_a^x g(t)dt \right\} = +\infty.$$
On en déduit que $\int_a^b g(t)dt$ est divergente.

♣

Proposition 14.7 *Soient f et g deux fonctions réelles positives. On suppose qu'au voisinage de b, on a $f = O_b(g)$ (resp. $f = o_b(g)$). Alors :*

1. *Si $\int_a^b g(t)dt$ converge, $\int_a^b f(t)dt$ converge et $\int_x^b f(t)dt = O_b(\int_x^b g(t)dt)$ (resp. $\int_x^b f(t)dt = o_b(\int_x^b g(t)dt)$).*
2. *Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge, $\int_a^b g(t)dt$ diverge et $\int_a^x f(t)dt = O_b(\int_a^x g(t)dt)$ (resp. $\int_a^x f(t)dt = o_b(\int_a^x g(t)dt)$).*

Preuve. Les preuves sont effectuées lorsque $f = O_b(g)$. Elles sont relativement semblables lorsque $f = o_b(g)$. Supposons donc $f = O_b(g)$. Alors,
$$\exists K > 0, \exists c \in [a,b[, \forall t \in [c,b[\quad 0 \leq f(t) \leq Kg(t).$$

1. L'intégrale $\int_c^b Kg(t)dt$ étant convergente, $\int_c^b f(t)dt$ l'est aussi ainsi que $\int_a^b f(t)dt$. D'autre part pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[c,b[$, on a
$$\forall y \in [x,b[, \quad \int_x^y f(t)dt \leq K \int_x^y g(t)dt.$$
En passant à la limite lorsque y tend vers b,
$$\int_x^b f(t)dt \leq K \int_x^b g(t)dt.$$
D'où le résultat.
2. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est divergente donc $\int_c^b f(t)dt$ est également divergente. On en déduit que $\int_c^b Kg(t)dt$ est divergente, ainsi que $\int_c^b g(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$. L'application g étant positive, nous avons
$$\lim_{x\to b} \int_a^x g(t)dt = +\infty.$$

Il existe un réel c' appartenant à l'intervalle $[c, b[$ vérifiant,

$$\forall x \in [c', b[, \quad \int_a^x g(t)dt \geq \int_a^c f(t)dt.$$

Ainsi,

$$\forall x \in [c', b[, \quad \int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt$$
$$\leq \int_a^x g(t)dt + \int_c^x g(t)dt \leq (K+1)\int_a^x g(t)dt.$$

D'où le résultat.

♣

Proposition 14.8 *Soient f et g deux fonctions réelles positives. On suppose qu'au voisinage de b, $f \underset{b}{\sim} g$. Alors*

1. *Les intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.*
2. *(a) Si les intégrales convergent, $\int_x^b f(t)dt \underset{b}{\sim} \int_x^b g(t)dt$.*

   (b) Si les intégrales divergent, $\int_a^x f(t)dt \underset{b}{\sim} \int_a^x g(t)dt$.

Remarque 14.2 *La propriété reste vraie pour deux fonctions négatives. En revanche, elle tombe en défaut pour des fonctions de signe quelconque. Voir pour cela l'exercice 14.6.*

Preuve. Les deux applications f et g étant équivalentes au voisinage de b, nous avons $f = O_b(g)$ et $g = O_b(f)$. Les deux intégrales sont donc de même nature. Par définition de fonctions équivalentes, nous avons

$$|f - g| = o_b(g)$$

1. Si les deux intégrales

$$\int_a^b f(t)dt \quad \text{et} \quad \int_a^b g(t)dt$$

convergent, alors

$$\int_a^b |f(t) - g(t)|dt$$

est convergente et, d'après la proposition précédente 14.7,

$$\left(\int_x^b |f(t) - g(t)|\, dt\right) = o_b\left(\int_x^b g(t)dt\right).$$

L'inégalité,

$$\forall x \in [a, b[, \quad \left|\int_x^b f(t)dt - \int_x^b g(t)dt\right| \leq \int_x^b |f(t) - g(t)|\, dt$$

nous permet d'écrire

$$\left|\int_x^b f(t)dt - \int_x^b g(t)dt\right| = o_b\left(\int_x^b g(t)dt\right).$$

D'où le résultat.

2. Si les deux intégrales divergent, deux cas se présentent.
   (a) L'intégrale
   $$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$
   est convergente. Dans ce cas, l'application qui, à tout réel x élément de $[a, b[$ associe
   $$\left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^x g(t)dt\right|$$
   est bornée. Sachant que
   $$\lim_{x\to b}\int_a^x g(t)dt = +\infty,$$
   on obtient le résultat désiré.
   (b) L'intégrale
   $$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$
   est divergente. Nous obtenons, à l'aide de la proposition 14.7
   $$\left(\int_a^x |f(t) - g(t)|\,dt\right) = o_b\left(\int_a^x g(t)dt\right).$$
   L'inégalité
   $$\forall x \in [a, b[, \quad \left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^x g(t)dt\right| \leq \left(\int_a^x |f(t) - g(t)|\,dt\right)$$
   nous permet d'écrire
   $$\left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^x g(t)dt\right| = o_b\left(\int_a^x g(t)dt\right).$$
   Ceci termine la preuve.

♣

Exercice 14.4 Donner, suivant le réel α, la nature de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}dt.$$

Solution. Nous devons étudier la nature des intégrales

$$\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^\alpha}dt \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}dt.$$

Toutes les applications utilisées dans la solution sont *positives.*

1. Puisque $\frac{e^{-t}}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}$, l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^\alpha}dt$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$ (voir exercice 14.3).
2. Pour tout réel α,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{t^\alpha} = 0.$$

Donc, au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{e^{-t}}{t^\alpha} = o(e^{-\frac{t}{2}}).$$

On en déduit que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}dt$ est convergente, quel que soit le réel α. En conclusion,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha}dt$$

est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

♣

14.3 Propriétés des intégrales généralisées

Dans cette section, $\mathbb{K}$ représente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

14.3.1 Critère de Cauchy

Proposition 14.9 *(Critère de Cauchy pour les intégrales). Soit $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b[$. L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists c \in [a,b[, \forall (x,y) \in ([c,b[)^2, \quad \left|\int_x^y f(t)dt\right| < \varepsilon. \tag{14.11}$$

Preuve. Nous supposons que b est un nombre réel. Si $b = +\infty$, la preuve est similaire. Soit

$$\begin{array}{rccl} F: & [a,b[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \int_a^x f(t)dt. \end{array}$$

1. Supposons que la propriété (14.11) soit vérifiée. Montrons que l'application F admet une limite lorsque x tend vers b. Considérons une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

d'éléments de $[a, b[$ convergente vers b. Soit ε un réel strictement positif. Choisissons un réel $c \in [a, b[$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in ([c, b[)^2, \quad \left| \int_x^y f(t)dt \right| < \varepsilon.$$

Choisissons un entier n_0 vérifiant

$$\forall n \geq n_0 \quad a_n \in [c, b[.$$

Alors,

$$\forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, \quad |F(a_n) - F(a_p)| = \left| \int_{a_p}^{a_n} f(t)dt \right| < \varepsilon.$$

On en déduit que la suite $(F(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy donc convergente puisque $\mathbb{K}$ est complet. Il suffit d'utiliser la proposition 3.6, page 36, pour affirmer que F admet une limite en b et donc que l'intégrale converge.

2. Supposons que l'intégrale soit convergente, c'est-à-dire que l'application F admette une limite en b. Soit ε un réel strictement positif. Choisissons un réel $c \in [a, b[$ vérifiant

$$\forall x \in [c, b[, \quad |F(x) - \lim_{t\to b} F(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors

$$\forall (x, y) \in ([c, b[)^2, \quad \left| \int_x^y f(t)dt \right| = |F(y) - F(x)| < \varepsilon.$$

♣

Corollaire 14.10 *On considère deux réels a et b vérifiant $a < b$. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux et bornée sur $[a, b[$. Alors, l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.*

Preuve. Soit M un réel strictement positif vérifiant

$$\forall t \in [a, b[, \quad |f(t)| \leq M.$$

Soit ε un réel strictement positif. Il suffit alors de choisir

$$c = \max\left\{a; \left(b - \frac{\varepsilon}{M}\right)\right\}$$

et utiliser la proposition précédente. ♣

14.3.2 Intégrales absolument convergentes

Proposition-définition 14.11

$$Si \quad \int_a^b |f(t)|dt \quad \text{est convergente, alors} \int_a^b f(t)dt \quad \text{est convergente.}$$

On dit dans ce cas que l'intégrale généralisée de f est absolument convergente. Si l'intégrale généralisée de f est convergente mais non absolument convergente, on dit qu'elle est semi-convergente.

Preuve. Supposons que $\int_a^b |f(t)|dt$ soit convergente. Elle vérifie le critère de Cauchy. Soit ε un réel strictement positif. Choisissons un réel $c \in [a, b[$ vérifiant,

$$\forall (x, y) \in ([c, b[)^2, \quad \int_x^y |f(t)|dt < \varepsilon.$$

Alors

$$\forall (x, y) \in ([c, b[)^2, \quad \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq \left| \int_x^y |f(t)|dt \right| < \varepsilon.$$

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est donc convergente. ♣

Exercice 14.5 Indiquer la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Solution. Cette intégrale est convergente si et seulement si les deux intégrales

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

le sont.

1. Nous remarquons que

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0.$$

De plus,

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}.$$

L'intégrale I_2 est convergente.

2.

$$\forall x \in]0, 1], \quad \left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

D'après l'exercice 14.3, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ est convergente donc

$$\int_0^1 \left|\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| dx$$

l'est aussi. I_1 est ainsi absolument convergente. On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

est une intégrale convergente.

♣

14.3.3 Règle d'Abel

Proposition 14.12 *(Règle d'Abel) On considère deux fonctions f et g continues par morceaux sur l'intervalle $[a, b[$:*

1. *f est à valeurs réelles positives, décroissante, avec $\lim_{x\to b} f(x) = 0$,*
2. *g est à valeurs réelles ou complexes et*

$$\exists M > 0, \forall x \in [a, b[, \quad \left|\int_a^x g(t)dt\right| \leq M.$$

Alors $\int_a^b f(t)g(t)dt$ est convergente.

Preuve. On suppose dans un premier temps g à valeurs réelles.
Soit ε un réel strictement positif. Choisissons un réel $c \in [a, b[$ vérifiant

$$\forall x \in [c, b[, \quad 0 \leq f(x) \leq \varepsilon.$$

Considérons un couple (x, y) d'éléments de $[c, b[$ avec $x < y$. En appliquant la seconde formule de la moyenne (proposition 13.21, page 200), il existe un réel z appartenant à $[x, y]$ vérifiant

$$\int_x^y f(t)g(t)dt = f(x_+)\int_x^z g(t)dt.$$

On obtient

$$\left|\int_x^y f(t)g(t)dt\right| \leq 2M\varepsilon.$$

L'intégrale

$$\int_a^b f(t)g(t)dt$$

est convergente puisqu'elle vérifie le critère de Cauchy.
Si g est à valeurs complexes, on écrit $g = \Re(g) + i\Im(g)$. Les deux applications $\Re(g)$ et $\Im(g)$ vérifient les hypothèses indiquées dans la proposition. Les intégrales

$$\int_a^b f(t)\Re(g(t))dt \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t)\Im(g(t))dt$$

sont convergentes, donc

$$\int_a^b f(t)g(t)dt$$

l'est aussi. ♣

Exercice 14.6 1. Pour quelles valeurs du réel α strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ est-elle convergente ?

2. Pour quelles valeurs du réel α strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$ est-elle convergente ?
3. Pour quelles valeurs du réel α strictement positif, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$ est-elle convergente ?
4. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$ est divergente.
5. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ n'est pas absolument convergente.
6. Donner la nature de l'intégrale,

$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) dt.$$

Solution.

1. (a) Étude de la nature de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt.$$

L'application

$$f: \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x^\alpha} \end{array}$$

est positive décroissante et admet une limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$. D'autre part,

$$\forall x \geq 1, \quad \left|\int_1^x \sin t dt\right| = |\cos x - \cos 1| \leq 2.$$

Les hypothèses du critère d'Abel sont vérifiées. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ est convergente pour tout réel α strictement positif.

(b) Étude de la nature de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t^\alpha} dt.$$

$$\frac{\sin t}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha-1}}.$$

L'intégrale est convergente si et seulement si $\alpha - 1 < 1$, c'est-à-dire $\alpha < 2$. En conclusion,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$

est convergente si et seulement si

$$0 < \alpha < 2.$$

2. (a) On montre avec un raisonnement identique à celui de la question précédente que, pour tout réel α strictement positif, l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$$

est convergente.

(b) Étude de la nature de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\cos t}{t^\alpha} dt.$$

$$\frac{\cos t}{t^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{1}{t^\alpha}.$$

L'intégrale est convergente si et seulement si $\alpha < 1$. En conclusion,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$

est convergente si et seulement si

$$0 < \alpha < 1.$$

3.

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Donc, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^\alpha} dt$ est convergente si et seulement si les intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^\alpha} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$ le sont, c'est-à-dire $0 < \alpha < 1$.

4. Pour tout réel t,

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}.$$

En utilisant le critère d'Abel, on montre que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t} dt$$

est convergente. Or, l'intégrale,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$$

est divergente. On en déduit que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} dt$$

est divergente.

5.
$$\forall t \geq 1, \quad 0 \leq \frac{\sin^2 t}{t} \leq \left|\frac{\sin t}{t}\right|.$$

On en déduit que $\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ puis $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ sont divergentes et que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$
n'est pas absolument convergente.

6. Le développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 en 0 est
$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$$
où ε est une application ayant pour limite 0 en 0. Ainsi,
$$\ln\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\frac{\sin^2 t}{t} + \frac{\sin^2 t}{t}\varepsilon\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right).$$
D'après la première question, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ est convergente. D'autre part,
$$\left(\frac{1}{2}\frac{\sin^2 t}{t} + \frac{\sin^2 t}{t}\varepsilon\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{\sin^2 t}{t}$$
Ces fonctions sont à valeurs positives au voisinage de $+\infty$. Les deux intégrales
$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\frac{\sin^2 t}{t} + \frac{\sin^2 t}{t}\varepsilon\left(\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right)\right) dt \quad \text{et} \int_1^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{\sin^2 t}{t} dt$$
sont de même nature. La seconde étant divergente, la première l'est aussi. On en déduit que l'intégrale
$$\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) dt$$
est divergente. On peut remarquer que
$$\ln\left(1+\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$$
et leurs intégrales en $+\infty$ sont de natures différentes.

♣

14.3.4 Intégration par parties

Proposition 14.13 *(Intégration par parties). Soient f et g deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ de classe C^1 sur $[a,b[$.*

1. *Si $\lim_{x\to b} f(x)g(x)$ existe, les intégrales $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ et $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ sont de même nature.*
2. *Si ces intégrales convergent, on a :*

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [\lim_{x\to b} f(x)g(x) - f(a)g(a)] - \int_a^b f'(t)g(t)dt.$$

Preuve.

$$\forall x \in [a,b[, \quad \int_a^x f(t)g'(t)dt = \int_a^x (fg)'(t)dt - \int_a^x f'(t)g(t)dt,$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in [a,b[, \quad \int_a^x f(t)g'(t)dt = [f(x)g(x) - f(a)g(a)] - \int_a^x f'(t)g(t)dt.$$

En supposant que $f(x)g(x)$ admette une limite finie lorsque x tend vers b, la convergence de l'une des intégrales entraîne celle de l'autre. Dans ce cas, en passant à la limite, on obtient l'égalité indiquée dans la proposition. ♣

14.3.5 Changement de variable

Proposition 14.14 *(Changement de variable). Soient u une application de classe C^1 bijective strictement croissante de l'intervalle $[a,b[$ sur l'intervalle $[\alpha,\beta[$ et f une application continue par morceaux sur l'intervalle $[\alpha,\beta[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors les intégrales*

$$\int_a^b u'(t)f(u(t))dt \quad \text{et} \quad \int_\alpha^\beta f(t)dt$$

sont de même nature et égales en cas de convergence.

Preuve. On considère les applications F et G définies par,

$$\begin{array}{rccl} F: & [\alpha,\beta[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & y & \longmapsto & \int_\alpha^y f(t)dt, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} G: & [a,b[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \int_a^x u'(t)f(u(t))dt. \end{array}$$

D'après le corollaire 13.16, page 194, nous avons

$$\forall x \in [a,b[, \quad \int_a^x u'(t)f(u(t))dt = \int_\alpha^{u(x)} f(t)dt.$$

Ainsi,

$$G = F \circ u \quad \text{et} \quad G \circ u^{-1} = F.$$

1. Supposons que l'intégrale $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ soit convergente. Nous avons,

$$\lim_{x \to b} u(x) = \beta.$$

   Ainsi,

$$\lim_{x \to b} G(x) = \lim_{x \to b} (F \circ u)(x) = \lim_{y \to \beta} F(y) = \int_\alpha^\beta f(t)dt.$$

   L'intégrale $\int_a^b u'(t)f(u(t))dt$ est donc convergente et $\int_a^b u'(t)f(u(t))dt = \int_\alpha^\beta f(t)dt.$

2. Supposons que l'intégrale $\int_a^b u'(t)f(u(t))dt$ soit convergente. Nous avons,

$$\lim_{y\to\beta} u^{-1}(y) = b.$$

Ainsi,

$$\lim_{y\to\beta} F(y) = \lim_{y\to\beta} G\circ u^{-1}(y) = \lim_{x\to b} G(x) = \int_a^b u'(t)f(u(t))dt.$$

L'intégrale $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ est convergente et $\int_\alpha^\beta f(t)dt = \int_a^b u'(t)f(u(t))dt.$

♣

Exercice 14.7 Nous savons, d'après l'exercice 14.6, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ est convergente. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

On considère pour tout entier naturel n, les intégrales I_n et J_n définies par

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}dt, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}dt.$$

1. Vérifier que pour tout entier naturel n, les intégrales I_n et J_n sont convergentes.
2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt.$$

3. (a) Montrer que l'application f définie sur l'intervalle $]0,\frac{\pi}{2}]$ par

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,\frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \frac{1}{t}-\frac{1}{\sin t} \end{array}$$

est prolongeable par continuité en 0.

(b) En déduire, par exemple à l'aide du lemme de Lebesgue, exercice 13.4, page 209, que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} I_n.$$

4. Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall t \in]0,\frac{\pi}{2}], \quad \sum_{k=-n}^{k=n} \cos(2kt) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$$

5. En déduire la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Solution.

1.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \underset{0}{\sim} \frac{\sin(2n+1)t}{t} \underset{0}{\sim} (2n+1).$$
Ces deux applications sont prolongeables par continuité en 0. Les intégrales sont donc convergentes.

2. Effectuons le changement de variable $x = (2n+1)t$. Nous obtenons
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt.$$
On en déduit que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec
$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

3. (a)
$$f(t) = \frac{\sin t - t}{t \sin t} \underset{0}{\sim} \frac{-\frac{t^3}{6}}{t^2} \underset{0}{\sim} -\frac{t}{6}.$$
L'application f admet pour limite 0 lorsque t tend vers 0. Elle est prolongeable par continuité en 0.

   (b) Nous savons, d'après l'exercice 13.4, page 209 (lemme de Lebesgue), que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin(nt)dt = 0.$$
On en déduit que la suite $(I_n - J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente, on obtient
$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

4.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}], \sum_{k=-n}^{k=n} \cos(2kt) = \Re\left(\sum_{k=-n}^{k=n} e^{2ikt}\right).$$
Or pour tout réel t élément de $]0, \frac{\pi}{2}]$, le nombre e^{2ikt} est différent de 1. Ainsi,
$$\sum_{k=-n}^{k=n} e^{2ikt} = e^{-2int}\frac{e^{2(2n+1)it}-1}{e^{2it}-1} = \frac{e^{-2int}.e^{(2n+1)it}}{e^{it}} \times \frac{e^{(2n+1)it} - e^{-(2n+1)it}}{e^{it}-e^{-it}}$$
$$= \frac{e^{(2n+1)it} - e^{-(2n+1)it}}{e^{it}-e^{-it}} = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}.$$

5.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \sum_{k=-n}^{k=n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kt)dt = \frac{\pi}{2}.$$

On obtient ainsi,
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

♣

14.3.6 Comportement asymptotique

Quel est le comportement asymptotique au voisinage de $+\infty$ d'une application continue f si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente ? La proposition suivante nous indique que si la continuité est uniforme, alors l'application f admet 0 pour limite lorsque x tend vers $+\infty$. Si l'application est seulement continue sur $[a, +\infty[$, nous pouvons obtenir des comportements inattendus. Si l'application f est à valeurs réelles, elle peut être non bornée au voisinage de l'infini (exercice 14.8). Si l'application f est à valeurs complexes, elle peut même vérifier $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$ (exercice 14.9).

Proposition 14.15 *On considère une fonction f à valeurs dans $\mathbb{K}$, uniformément continue sur $[a, +\infty[$. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.*

Preuve. On suppose dans un premier temps f à valeurs réelles. Soit f une application uniformément continue sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Effectuons la preuve par contraposée. Supposons que la fonction f n'admette pas pour limite 0 lorsque x tend vers $+\infty$: il existe un réel strictement positif ε_0, vérifiant
$$\forall X \geq a, \exists x \geq X, \quad |f(x)| \geq \varepsilon_0.$$

L'application f étant uniformément continue sur $[a, +\infty[$, il existe un réel strictement positif α vérifiant,
$$\forall (x, y) \in ([a, +\infty[)^2, \quad |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Soit c un réel appartenant à l'intervalle $[a, +\infty[$. Il existe un réel x_c appartenant à l'intervalle $[c, +\infty[$ tel que
$$|f(x_c)| \geq \varepsilon_0.$$

Alors,
$$\forall y \in [x_c, x_c + \alpha], \quad |f(y) - f(x_c)| \leq \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

On en déduit que sur l'intervalle $[x_c, x_c + \alpha]$, l'application f garde le même signe. De plus,
$$\forall y \in [x_c, x_c + \alpha], \quad |f(y)| \geq \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Ainsi,

$$\left|\int_{x_c}^{x_c+\alpha} f(t)dt\right| = \int_{x_c}^{x_c+\alpha} |f(t)|dt \geq \frac{\alpha\varepsilon_0}{2}.$$

La propriété de Cauchy n'est pas vérifiée (proposition 14.9). L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est divergente. Ceci termine la preuve dans le cadre des fonctions à valeurs réelles. Si l'application f est à valeurs complexes, il suffit de décomposer f en partie réelle et imaginaire pour obtenir le même résultat. ♣

Exercice 14.8 On considère la fonction f, définie, continue et affine par morceaux sur $[1,+\infty[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(n) = f(n+\frac{1}{2}-\frac{1}{n2^n}) = f(n+\frac{1}{2}+\frac{1}{n2^n}) = f(n+1) = 0 \quad \text{et} \quad f(n+\frac{1}{2}) = n.$$

Montrer que $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

Solution. Pour tout entier naturel k strictement positif,

$$\int_k^{k+1} f(t)dt = \frac{1}{2^k}.$$

Donc pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1,

$$\int_1^n f(t)dt = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1.$$

L'application f étant positive, pour tout réel x supérieur à 1,

$$\int_1^x f(t)dt \leq \int_1^{E(x)+1} f(t)dt \leq 1.$$

On déduit la convergence de l'intégrale en utilisant la proposition 14.5.
On peut remarquer que l'intégrale est convergente bien que la fonction f ne soit pas bornée au voisinage de $+\infty$. ♣

Exercice 14.9 On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ par :

$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad f(x) = xe^{ix^3}$$

1. Vérifier que $\lim_{x\to+\infty} |f(x)| = +\infty$
2. Montrer que $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

Solution.

1.
$$\forall x \geq 1, \quad |f(x)| = |x|.$$

Ainsi,
$$\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = +\infty.$$

2. Utilisons la proposition d'intégration par parties pour les intégrales généralisées (proposition 14.13). On considère les applications g et h de classe C^1 sur $[1 + \infty[$ définies par,

$$\begin{array}{rccc} g: & [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{3i}e^{ix^3}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} h: & [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{x}. \end{array}$$

On a $f = g'h$. Or,
$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad |g(x)h(x)| = \frac{1}{3x},$$
donc, la fonction gh admet pour limite 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On en déduit, d'après la proposition 14.13, que les deux intégrales
$$\int_1^{+\infty} g'(x)h(x)dx \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} g(x)h'(x)dx$$
sont de même nature. Or,
$$\forall x \in [1,+\infty[, \quad |g(x)h'(x)| = \frac{1}{3x^2}.$$
La deuxième intégrale est absolument convergente donc convergente. On en déduit que l'intégrale
$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$
est convergente.

♣

Chapitre 15

Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé

Dans ce chapitre, on considère $(\mathbb{E}, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

15.1 Définitions

Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{E}$. On appelle série de terme général u_n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = u_o + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On note cette série $\sum_{n\geq 0} u_n$. Pour tout entier naturel n, u_n s'appelle le terme d'indice n. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{E}$. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas,

1. On note et on appelle somme de la série, l'élément de $\mathbb{E}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

2. On appelle suite des restes la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Proposition 15.1 *Si une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.*

Preuve.

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = S_n - S_{n-1}.$$

D'où le résultat. ♣

Remarque 15.1 *La réciproque est fausse. Voir, par exemple, le corollaire 15.7, en prenant $\alpha \in]0,1]$.*

15.2 Convergence des séries à termes réels positifs

Proposition 15.2 *Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes réels positifs converge si et seulement si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.*

Preuve. La série étant à termes positifs, la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Elle est donc convergente si et seulement si elle est majorée. ♣

Corollaire 15.3 *On considère deux séries réelles $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} u'_n$ telles que*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n \leq u'_n.$$

Si $\sum_{n\geq 0} u'_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ; si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} u'_n$ diverge.

Preuve. Notons $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} u'_n$. Nous avons

$$\forall n \geq n_0, \quad S_n - S_{n_0-1} \leq S'_n - S'_{n_0-1}.$$

Si la série $\sum_{n\geq 0} u'_n$ est convergente, alors la suite $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors majorée, donc convergente. La série$\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente. Supposons la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ divergente. Alors les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non majorées. La série $\sum_{n\geq 0} u'_n$ est divergente. ♣

Proposition 15.4 *On considère deux séries à termes positifs $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} u'_n$. On suppose que $u'_n = o(u_n)$ (respectivement $u'_n = O(u_n)$).*

1. *Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, alors $\sum_{n\geq 0} u'_n$ converge. De plus, les suites des restes, définies par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k, \quad R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u'_k$$

vérifient $R'_n = o(R_n)$ (respectivement $R'_n = O(R_n)$).

2. *Si $\sum_{n\geq 0} u'_n$ diverge, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge. De plus, les sommes partielles définies par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \quad S'_n = \sum_{k=0}^{n} u'_k$$

vérifient $S'_n = o(S_n)$ (respectivement $S'_n = O(S_n)$).

Preuve. Supposons d'abord que

$$u'_n = o(u_n).$$

Soit ε un réel strictement positif. Choisissons un entier n_0 vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u'_n \leq \varepsilon u_n.$$

1. Supposons que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ soit convergente. La suite des sommes partielles est majorée. Considérons S un majorant. Alors

$$\forall n \geq n_0, \quad S'_n = \sum_{k=0}^{n} u'_k \leq \sum_{k=0}^{n_0} u'_k + \varepsilon S.$$

La suite de ses sommes partielles $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. Les termes de la série $\sum_{n\geq 0} u'_n$ étant positifs, celle-ci est convergente.
D'autre part, pour tout entier $n \geq n_0$ on a,

$$\forall N \geq n+1, \quad \sum_{k=n+1}^{N} u'_k \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{N} u_k.$$

En passant à la limite lorsque N tend vers $+\infty$ on obtient,

$$\forall n \geq n_0, \quad R'_n \leq \varepsilon.R_n.$$

D'où, $R'_n = o(R_n)$.

2. Supposons que la série $\sum_{n\geq 0} u'_n$ soit divergente. La suite des sommes partielles $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée. Il en est de même de la suite $(S'_n - S'_{n_0})_{n\in\mathbb{N}}$. Or,

$$\forall n > n_0, \quad S_n - S_{n_0} = \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \geq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k=n_0+1}^{n} u'_k = \frac{1}{\varepsilon}(S'_n - S'_{n_0}).$$

On en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée et que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.
La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant non majorée et croissante, il existe un entier naturel $n_1 \geq n_0$ vérifiant

$$\forall n \geq n_1, \quad S_n \geq \frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{n_0} u'_k.$$

Alors,

$$\forall n \geq n_1, \quad S'_n = \sum_{k=0}^{n_0} u'_k + \sum_{k=n_0+1}^{n} u'_k \leq \varepsilon S_n + \varepsilon \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k \leq 2\varepsilon S_n.$$

D'où, $S'_n = o(S_n)$.

Si $u'_n = O(u_n)$, il existe un réel strictement positif K et un entier naturel n_0 vérifiant,

$$\forall n \geq n_0, \quad u'_n \leq K u_n.$$

Il suffit de remplacer dans la preuve ε par K pour obtenir les résultats désirés. ♣

Proposition 15.5 *On considère deux séries à termes positifs $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} u'_n$. On suppose*

$$u'_n \sim u_n.$$

Alors,

1. *les deux séries sont de même nature ;*
2. *si les deux séries convergent, les suites des restes, définies par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k, \quad R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u'_k$$

   sont équivalentes.
3. *Si les deux séries divergent, les sommes partielles définies par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \quad S'_n = \sum_{k=0}^{n} u'_k$$

   sont équivalentes.

Preuve.

1. En utilisant la proposition 7.17, page 89, on a $u_n = O(u'_n)$ et $u'_n = O(u_n)$. On en déduit, à l'aide de la proposition précédente, que les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.
2. Supposons les deux séries convergentes. D'après la définition de deux suites équivalentes (définition 7.8.3, page 89),

$$|u_n - u'_n| = o(u'_n).$$

La série $\sum |u_n - u'_n|$ est convergente. Notons $(R''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses restes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R''_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k - u'_k|.$$

Pour tout entier naturel n,

$$\forall N > n, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{N} (u_k - u'_k)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{N} |u_k - u'_k|.$$

En passant à la limite, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n - R'_n| \leq R''_n.$$

D'après la proposition précédente, nous avons

$$R''_n = o(R'n).$$

Donc,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0, \quad |R_n - R'_n| \leq R''_n \leq \varepsilon R'_n.$$

On en déduit que $(R_n - R'_n) = o(R'_n)$, ainsi

$$R_n \sim R'_n.$$

3. Supposons les deux séries divergentes.
   (a) Supposons la suite $(S_n - S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente. Nous savons que $|u_n - u'_n| = o(u'_n)$ et d'après la proposition précédente $S''_n = o(S'_n)$ où

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S''_n = \sum_{k=0}^{n} |u_k - u'_k|.$$

   Donc pour tout réel strictement positif ε,

   $$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |S_n - S'_n| \leq S''_n \leq \varepsilon S'_n.$$

   On en déduit que $(S_n - S'_n) = o(S'_n)$.
   (b) Supposons la suite $(S_n - S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente. Elle est alors bornée. La suite $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite $+\infty$. La suite $\left(\frac{S_n - S'_n}{S'_n}\right)$ est convergente vers 0. On en déduit que, dans ce ca aussi, $(S_n - S'_n) = o(S'_n)$.

Ceci permet de conclure :

$$S_n \sim S'_n.$$

Proposition 15.6 *Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue par morceaux, décroissante sur $[1,+\infty[$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, la suite définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) - \int_1^n f(t)dt.$$

Alors,

1. *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.*
2. *La série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature.*
3. *Si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ diverge, on a $S_n = \sum_{k=1}^n f(k) \sim \int_1^n f(t)dt$.*
4. *Si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ est convergente et si la convergence de la suite $\left(\int_n^{+\infty} f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est lente, alors $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \sim \int_n^{+\infty} f(t)dt$.*

Remarques 15.2
1. *On pourra trouver les différentes définitions de vitesse de convergence d'une suite au début du chapitre 11, page 147.*
2. *On peut remarquer que le résultat du 4 tombe en défaut si la vitesse de convergence de la suite $\left(\int_n^{+\infty} f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas lente. On peut considérer par exemple l'application $t \mapsto e^{-t}$.*

Preuve.

1. L'application f étant décroissante, nous avons,

$$\forall k \geq 1, \forall t \in [k, k+1], \quad f(k+1) \leq f(t) \leq f(k),$$

d'où,

$$\forall k \geq 1, \quad f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k).$$

Nous en déduisons que

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt \right) + f(n) \geq 0.$$

De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(t)dt \leq 0.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée donc convergente.

2. On considère l'application F définie par

$$F : \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \int_1^x f(t)dt \end{array}$$

et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles :

$$\forall n \geq 1, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

Nous avons la relation

$$\forall n \geq 1, \quad S_n = u_n + F(n).$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant convergente, les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont de même nature.

(a) Supposons l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ convergente. L'application F admet une limite finie en $+\infty$. La suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. Il en est de même de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et de la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$.

(b) Supposons la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ convergente. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant convergente, la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est aussi. Notons M un majorant de cette dernière. L'application f étant positive,

$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad \int_1^x f(t)dt \leq \int_1^{E(x)+1} f(t)dt = F\left(E(x)+1\right) \leq M.$$

Il suffit d'utiliser la proposition 14.5, page 218 pour établir la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)dt$.

3. Supposons la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ divergente. Cette série étant à termes positifs, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. D'autre part, la suite $(S_n - F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n - F(n)}{S_n} = 0.$$

On en déduit que $(S_n - F(n)) = o(S_n)$ et $S_n \sim F(n)$.

4. Nous avons établi au début de la preuve que

$$\forall k \geq 1, \quad f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k).$$

Donc,

$$\forall k \geq 2, \quad \int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt.$$

Soit n un entier strictement positif. D'après la double inégalité précédente,

$$\forall N > n, \quad \int_{n+1}^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leq \int_n^N f(t)dt.$$

D'après l'hypothèse, ces trois suites de variable N sont convergentes. En passant à la limite, on obtient

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt.$$

Sachant que la suite $\left(\int_n^{+\infty} f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge lentement vers 0, on obtient

$$\frac{\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt}{\int_n^{+\infty} f(t)dt} \leq \frac{R_n}{\int_n^{+\infty} f(t)dt} \leq 1,$$

puis

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{\int_n^{+\infty} f(t)dt} = 1.$$

Ainsi,

$$R_n \sim \int_n^{+\infty} f(t)dt.$$

♣

Nous reprenons les notations de la proposition précédente.

Corollaire 15.7 *(Séries de Riemann.) Soit α un nombre réel. La série de Riemann*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge si et seulement si $\alpha > 1$. De plus,

1. *Si $\alpha \in]0,1[$,*
$$S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$
2. *Si $\alpha = 1$,*
$$S_n \sim \ln n.$$
3. *Si $\alpha > 1$,*
$$R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Preuve. Si α est un réel négatif ou nul, le terme général de la série ne converge pas vers 0. La série est divergente. Si α est strictement positif, l'application $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue et décroissante sur $[1,+\infty[$. Les hypothèses de la proposition précédente sont vérifiées.

1. Si $\alpha = 1$,
$$\int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n.$$
L'intégrale et la série sont divergentes et
$$S_n \sim \ln n.$$
Si α est un réel strictement positif et différent de 1,
$$\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$

On en déduit que l'intégrale et la série sont convergentes si et seulement si $\alpha > 1$.

2. Si $\alpha \in]0, 1[$,
$$\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$
Ainsi,
$$S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

3. Si $\alpha > 1$, alors
$$\forall n \geq 1, \quad \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$
La vitesse de convergence de cette suite est lente puisque la suite de terme général
$$\frac{\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}}{\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1}$$
est convergente vers 1. En utilisant la proposition précédente, nous obtenons
$$R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

♣

Corollaire 15.8 *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par*
$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n,$$
est convergente. Sa limite est notée γ et appelée constante d'Euler.

Proposition 15.9 *(Règle de D'Alembert). Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs telle que*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda.$$
Alors

1. si $\lambda < 1$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ;

2. si $\lambda > 1$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Preuve.

1. Supposons $\lambda < 1$. Choisissons un réel k appartenant à l'intervalle $]\lambda, 1[$. Il existe un entier naturel n_0 vérifiant
$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k.$$

Donc

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} \leq k u_n.$$

On montre par une récurrence évidente que

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n \leq k^{n-n_0} u_{n_0}.$$

La série de terme général $k^{n-n_0} u_{n_0}$ est une série géométrique convergente. Il suffit d'utiliser le corollaire 15.3 pour conclure.

2. Supposons $\lambda > 1$. Choisissons un réel k appartenant à l'intervalle $]1, \lambda[$. Il existe un entier naturel n_0 vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq k.$$

Donc

$$\forall n \geq n_0, \quad u_{n+1} \geq k u_n.$$

On montre par une récurrence évidente que

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq k^{n-n_0} u_{n_0} \leq u_n.$$

La série de terme général $k^{n-n_0} u_{n_0}$ est une série géométrique divergente. Il suffit d'utiliser le corollaire 15.3 pour conclure.

♣

Proposition 15.10 *(Règle de Cauchy). Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs telle que*

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lambda.$$

Alors

1. *si $\lambda < 1$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ;*
2. *si $\lambda > 1$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.*

Preuve.

1. Supposons $\lambda < 1$. Choisissons un réel k appartenant à l'intervalle $]\lambda, 1[$. Il existe un entier naturel n_0 vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad \sqrt[n]{u_n} \leq k.$$

Donc

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \leq k^n.$$

Il suffit d'utiliser le corollaire 15.3 pour conclure.

2. Supposons $\lambda > 1$. Choisissons un réel k appartenant à l'intervalle $]1, \lambda[$. Il existe un entier naturel n_0 vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad \sqrt[n]{u_n} \geq k.$$

Donc

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n \geq k^n.$$

Il suffit d'utiliser le corollaire 15.3 pour conclure.

♣

15.3 Convergence des séries à termes réels

Théorème 15.11 *(Critère des séries alternées.) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs, décroissante et tendant vers 0. Alors la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ converge et la suite des restes R_n définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$$

vérifie

$$|R_n| \leq a_{n+1}.$$

Preuve. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles. Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+3} \geq 0,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1}.$$

Les deux suites extraites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc convergentes vers la même limite. On en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers cette limite commune. La série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n$ est convergente. Les deux suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ étant adjacentes

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k.$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad -a_{2n+1} \leq R_{2n} \leq 0.$$

De même,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k \leq \sum_{k=0}^{2n+2} (-1)^k a_k,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq R_{2n+1} \leq a_{2n+2}.$$

On en déduit que,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |R_n| \leq a_{n+1}.$$

15.4 Séries à valeurs dans un Banach

15.4.1 Critère de Cauchy

Définition : On dit qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à valeurs dans un espace vectoriel normé $\mathbb{E}$ est de Cauchy si elle vérifie la propriété :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \quad q \geq p \geq N \Rightarrow \left\| \sum_{k=p}^{q} u_k \right\| < \varepsilon.$$

On remarque qu'une série est de Cauchy si et seulement si la suite des sommes partielles est une suite de Cauchy.

Théorème 15.12 *(critère de Cauchy pour les séries.) Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à valeurs dans un espace vectoriel normé complet est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Preuve. On considère une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à valeurs dans un espace vectoriel normé complet. Elle est de Cauchy si et seulement si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles est de Cauchy donc si et seulement si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, c'est-à-dire si et seulement si la série est convergente. ♣

15.4.2 Série absolument convergente

Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{E}$. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente si la série numérique $\sum \|u_n\|$ est convergente.

Théorème 15.13 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé complet. Si la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.*

Preuve. Nous avons pour tout couple d'entiers naturels (p, q) vérifiant $q > p$

$$\left\| \sum_{k=p}^{q} u_k \right\| \leq \sum_{k=p}^{q} \|u_k\|.$$

La série $\sum_{n\geq 0} \|u_n\|$ est convergente, elle vérifie donc le critère de Cauchy. On en déduit, avec l'inégalité précédente, que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy. Travaillant dans un espace vectoriel normé complet, cette série est convergente. ♣

Théorème 15.14 *(Règle d'Abel.) Soit $\sum_{n\geq 0} u'_n$ une série à valeurs dans un espace vectoriel normé complet $(\mathbb{E}, \|.\|)$. On suppose que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u'_n = \alpha_n u_n$$

où

$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive, décroissante et convergente vers 0,

la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est bornée.

Alors la série $\sum_{n\geq 0} u'_n$ est convergente.

Preuve. Il suffit de montrer que la suite des sommes partielles $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S'_n = \sum_{k=0}^{n} u'_k$$

est convergente.

$$\forall n \geq 2, \quad S'_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (S_k - S_{k-1}) + \alpha_0 u_0 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_k - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_{k-1} + \alpha_0 u_0$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} S_k + \alpha_0 u_0 = \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k + \alpha_n S_n - \alpha_1 u_0 + \alpha_0 u_0.$$

La suite $(\alpha_n S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0 puisque la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 et que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. La suite $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si la suite $(A_n)_{n\geq 2}$ définie par

$$\forall n \geq 2, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k$$

l'est aussi. Montrons que cette dernière est une suite de Cauchy. Soit M un réel positif vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|S_n\| \leq M.$$

Par hypothèse, la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente vers 0. Soit ε un réel strictement positif. Considérons un entier naturel n_0 vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq \alpha_n \leq \varepsilon.$$

Alors,

$$\forall n \geq n_0, \forall p > n, \quad \|A_p - A_n\| = \left\| \sum_{k=n}^{p-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) S_k \right\|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{p-1} M(\alpha_k - \alpha_{k+1}) = M(\alpha_n - \alpha_p) \leq M\alpha_n \leq M\varepsilon.$$

Nous venons de montrer que la suite $(A_n)_{n\geq 2}$ est convergente puisqu'elle est à valeurs dans un espace de Banach et vérifie le critère de Cauchy. On en déduit que la suite $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la série $\sum_{n\geq 0} u'_n$ sont convergentes. ♣

15.4.3 Série commutativement convergente

Définition : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé. On dit que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est commutativement convergente si elle est convergente et si pour toute permutation σ de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, la série $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ est convergente avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Proposition 15.15 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans un espace vectoriel normé complet. Si la série numérique $\sum_{n\geq 0} u_n$ est absolument convergente, elle est commutativement convergente.*

Preuve. Pour tout entier naturel n, l'ensemble des entiers naturels inférieur ou égal à n sera noté $[[0,n]]$.
Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série absolument convergente et ε un réel strictement positif. Considérons un entier naturel n_0 vérifiant

$$\forall p \geq n_0, \forall q \geq p, \quad \sum_{n=p}^{q} \|u_n\| \leq \varepsilon.$$

On en déduit en passant à la limite que

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \|u_n\| \leq \varepsilon.$$

Soit σ une permutation de l'ensemble $\mathbb{N}$. Notons I, l'ensemble

$$I = \sigma^{-1}\left([[0,n_0]]\right).$$

L'ensemble I est de cardinal (n_0+1), donc fini. Notons n_1 son maximum. Considérons un entier n vérifiant $n \geq n_1$. On a,

$$I \subset [[0,n]]$$

Notons J le complémentaire de I dans l'ensemble $[[0,n]]$:

$$J = [[0,n]] \setminus I.$$

Alors,

$$\sum_{r=0}^{n} u_{\sigma(r)} = \sum_{r\in I} u_{\sigma(r)} + \sum_{r\in J} u_{\sigma(r)} = \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{r\in J} u_{\sigma(r)}.$$

Remarquons que $\sigma(J)$ est un ensemble de cardinal fini, d'entiers supérieurs à n_0. Notons p le minimum de J et q le maximum de J. Ainsi $n_0 \leq p \leq q$ et

$$\left\|\sum_{r\in J} u_{\sigma(r)}\right\| \leq \sum_{r\in J} \|u_{\sigma(r)}\| \leq \sum_{k=p}^{q} \|u_k\| \leq \varepsilon.$$

D'où,

$$\left\|\sum_{r=0}^{n} u_{\sigma(r)} - \sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right\| = \left\|\sum_{k\in I} u_{\sigma(r)} - \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k\in J} u_{\sigma(r)}\right\|$$

$$\leq \left\|\sum_{k=0}^{n_0} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right\| + \left\|\sum_{k\in J} u_{\sigma(r)}\right\| \leq 2\varepsilon.$$

On en déduit que la série $\sum_{r\geq 0} u_{\sigma(r)}$est convergente avec

$$\sum_{r=0}^{+\infty} u_{\sigma(r)} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

La série $\sum_{k\geq 0} u_k$ est donc commutativement convergente. ♣

Remarque 15.3 *La réciproque est vraie pour les séries à valeurs réelles ou complexes :*
Une série réelle ou complexe comutativement convergente est absolument convergente. La réciproque est fausse dans le cadre général d'un espace de Banach. Un contre-exemple est cité dans la remarque 15.4, page 257.

Corollaire 15.16 *La nature et la limite éventuelle d'une série à termes réels positifs est indépendante de l'ordre de sommation.*

15.4.4 Familles sommables

La définition de la somme d'une série repose sur le fait que l'ensemble des indices est $\mathbb{N}$ et donc un ensemble canoniquement ordonné. Dans de nombreux problèmes, et en particulier pour les probabilités discrètes que l'on verra dans un chapitre ultérieur, l'ordre des termes ne joue aucun rôle. Le besoin se fait aussi sentir de définir la somme d'une famille indexée par un ensemble I dénombrable, indépendamment du choix d'une relation d'ordre dans I.

Proposition-définition 15.17 *On considère $(x_i)_{i\in I}$ une famille indicée par un ensemble I dénombrable. On dit que cette famille est sommable s'il existe une bijection σ de $\mathbb{N}$ sur I telle que la série*

$$\sum_{n\geq 0} x_{\sigma(n)}$$

soit absolument convergente. Dans ce cas, pour toute bijection σ' de $\mathbb{N}$ sur I la série

$$\sum_{n\geq 0} x_{\sigma'(n)}$$

est absolument convergente avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma'(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}.$$

On note alors

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)}.$$

Proposition admise 15.18 *(associativité généralisée) On considère I un ensemble dénombrable, $(I_k)_{k\in K}$ une partition de I et $(x_i)_{i\in I}$ une famille indicée par I. La famille $(x_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si pour tout élement k de K, la famille $(x_i)_{i\in I_k}$ est sommable et si la famille $\left(\sum_{i\in I_k} x_i\right)_{k\in K}$ est sommable. Dans ce cas, on obtient*

$$\sum_{i\in I} x_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} x_i\right).$$

15.4.5 Produit de Cauchy de deux séries à valeurs dans une algèbre de Banach

Définition : Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à valeurs dans une algèbre. On appelle produit de Cauchy (ou produit de convolution) de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ avec la série $\sum_{n\geq 0} v_n$, la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ où $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=o}^{n} u_p v_{n-p}$.

Théorème 15.19 *Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries à valeurs dans une algèbre de Banach, absolument convergentes. Alors le produit de Cauchy de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ avec la série $\sum_{n\geq 0} v_n$, noté $\sum_{n\geq 0} w_n$, est une série absolument convergente et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Preuve. Pour cette preuve, on considère pour tout entier naturel n, les ensembles T_n et C_n définis par

$$T_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 / p + q \leq n\} \quad \text{et} \quad C_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 / p \leq n, \quad q \leq n\}.$$

On remarque que pour tout entier naturel n,

$$T_n \subset C_n \subset T_{2n}.$$

On note ainsi les différentes sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k, \quad S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k, \quad S''_n = \sum_{k=0}^{n} w_k.$$

D'une part

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S''_n = \sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{p=0}^{k} u_p v_{k-p} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{p+q=k} u_p v_q = \sum_{(p,q)\in T_n} u_p v_q.$$

D'autre part,

$$S_n S'_n = \left(\sum_{p=0}^{n} u_p\right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{n} v_q\right) = \sum_{(p,q)\in C_n} u_p v_q.$$

1. On suppose dans un premier temps que les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont à termes réels positifs. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{(p,q)\in T_n} u_p v_q \leq \sum_{(p,q)\in C_n} u_p v_q \leq \sum_{(p,q)\in T_{2n}} u_p v_q,$$

c'est-à-dire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S''_n \leq S_n S'_n \leq S''_{2n}.$$

Par hypothèse, la suite $(S_n S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$. La suite $(S''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, majorée donc convergente : la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ est convergente. D'après la double inégalité précédente et en passant à la limite, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n \leq \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$

D'où le résultat.

2. On suppose maintenant que les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont à valeurs dans une algèbre de Banach. Par hypothèse, ces séries sont absolument convergentes. En appliquant la première partie de la preuve, on peut dire que la série de terme général $\sum_{k=0}^{p} \|u_k\|.\|v_{p-k}\|$ est convergente avec

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{p} \|u_k\|.\|v_{p-k}\| = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \|u_p\|\right) . \left(\sum_{q=0}^{+\infty} \|v_q\|\right) .$$

C'est-à-dire,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} \|u_k\|.\|v_{p-k}\| = \lim_{n\to+\infty} \left(\left(\sum_{p=0}^{n} \|u_p\|\right) . \left(\sum_{q=0}^{n} \|v_q\|\right)\right) .$$

C'est-à-dire,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{(p,q)\in T_n} \|u_p\|.\|v_q\| = \lim_{n\to+\infty} \sum_{(p,q)\in C_n} \|u_p\|.\|v_q\|.$$

Cette limite commune étant réelle et pour tout entier naturel, l'ensemble T_n étant inclus dans l'ensemble C_n on a,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{(p,q)\in C_n\setminus T_n} \|u_p\|.\|v_q\| = 0.$$

Revenons aux sommes partielles des séries initiales. Par hypothèse la suite $(S_nS'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|S_nS'_n - S''_n\| = \left\| \sum_{(p,q)\in C_n} u_pv_q - \sum_{(p,q)\in T_n} u_pv_q \right\| = \left\| \sum_{(p,q)\in C_n\setminus T_n} u_pv_q \right\|$$

$$\leq \sum_{(p,q)\in C_n\setminus T_n} \|u_pv_q\| \leq \sum_{(p,q)\in C_n\setminus T_n} \|u_p\|.\|v_q\|.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} (S_nS'_n - S''_n) = 0.$$

La suite $(S''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de même limite que celle de la suite $(S_nS'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. D'où, le résultat.

♣

15.5 Exemples d'espaces $l^p(\mathbb{R})$

15.5.1 Espaces $l^2(\mathbb{R})$

Proposition 15.20 *On considère $l^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série*

$$\sum_{n\geq 0} u_n^2$$

soit convergente.

1. *$l^2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux éléments de $l^2(\mathbb{R})$, la série $\sum_{n\geq 0} u_n.v_n$ est absolument convergente.*
3. *L'application définie sur $l^2(\mathbb{R}) \times l^2(\mathbb{R})$ par*

$$((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.v_n,$$

est un produit scalaire sur $l^2(\mathbb{R})$. On note $\|.\|_2$ la norme euclidienne correspondante.

Preuve.

1. Montrons que $l^2(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
   (a) $l^2(\mathbb{R})$ est non vide puisque la suite nulle en est un élément.
   (b) Considérons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $l^2(\mathbb{R})$. En utilisant l'inégalité
   $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2),$$
   on vérifie que la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $l^2(\mathbb{R})$.
   (c) Il est évident que $l^2(\mathbb{R})$ est stable par multiplication par un réel.

   L'ensemble $l^2(\mathbb{R})$ est donc un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
2. En utilisant l'inégalité,
   $$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad ab \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2),$$
   on en déduit
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2+v_n^2)$$
   et la convergence absolue de la série $\sum_{n\geq 0} u_n v_n$.
3. Il est évident que l'application citée dans la proposition est bilinéaire symétrique définie positive. Elle est donc un produit scalaire.

♣

Proposition 15.21 *L'espace vectoriel* $(l^2(\mathbb{R}), \|.\|_2)$ *est un espace de Hilbert.*

Preuve. On considère $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $l^2(\mathbb{R})$. Pour tous entiers naturels p et n, on note $u_{p,n}$ l'élément de U_p d'indice n. Soit ε un réel strictement positif. Choisissons un entier naturel p_0 vérifiant

$$\forall p \geq p_0, \forall q \geq p_0, \quad \|U_p - U_q\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{p,n} - u_{q,n})^2} \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a,

$$\forall p \geq p_0, \forall q \geq p_0, \quad |u_{p,n} - u_{q,n}| \leq \varepsilon.$$

On en déduit que, pour tout entier naturel n, la suite réelle $(u_{p,n})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy donc convergente vers un réel que l'on notera γ_n.
Montrons que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $l^2(\mathbb{R})$. La suite $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$, étant une suite de Cauchy, est bornée. Soit M un réel vérifiant

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \|U_p\|_2^2 \leq M.$$

Soit N un entier naturel. On a

$$\lim_{p\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_{p,n}^2 = \sum_{n=0}^{N} \gamma_n^2.$$

Or,

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} u_{p,n}^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_{p,n}^2 \leq M,$$

entraîne, en passant à la limite

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} \gamma_n^2 \leq M.$$

La suite des sommes partielles de cette série à termes positifs est majorée. La série $\sum \gamma_n^2$ est donc convergente. La suite $\Gamma = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $l^2(\mathbb{R})$.
Montrons pour terminer que la suite de Cauchy $(U_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente vers Γ.
Soit ε un réel strictement positif. Choisissons p_1 un entier naturel vérifiant

$$\forall p \geq p_1, \forall q \geq p_1, \quad \|U_p - U_q\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{p,n} - u_{q,n})^2 \leq \varepsilon.$$

Soit N et p deux entiers naturels. Alors,

$$\lim_{q\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (u_{p,n} - u_{q,n})^2 = \sum_{n=0}^{N} (u_{p,n} - \gamma_n)^2.$$

On suppose désormais $p \geq p_1$.

$$\forall q \geq p_1, \quad \sum_{n=0}^{N} (u_{p,n} - u_{q,n})^2 \leq \|U_p - U_q\|_2^2 \leq \varepsilon.$$

Ainsi, en passant à la limite, lorsque q tend vers $+\infty$

$$\forall p \geq p_1, \quad \sum_{n=0}^{N} (u_{p,n} - \gamma_n)^2 \leq \varepsilon.$$

La majoration des sommes partielles permet d'écrire,

$$\forall p \geq p_1, \quad \|U_p - \Gamma\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{p,n} - \gamma_n)^2 = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} (u_{p,n} - \gamma_n)^2 \leq \varepsilon.$$

On en déduit que la suite de Cauchy $(U_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est convergente vers Γ.
$(l^2(\mathbb{R}), \|.\|_2)$ est un espace de Hilbert. ♣

Remarque 15.4 *Pour tout entier naturel p, on considère la suite $U_p = (u_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{p+1} 1_{\{p\}}(n).$$

Pour tout entier naturel p, la suite U_p est un élément de $l^2(\mathbb{R})$ de norme $\|U_p\|_2 = \frac{1}{p+1}$. La série $\sum_{p \geq 0} U_p$ n'est donc pas absolument convergente. On montre pourtant qu'elle est commutativement convergente dans $l^2(\mathbb{R})$ vers la suite $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1}{n+1}.$$

15.5.2 Espaces $l^1(\mathbb{R})$

Proposition 15.22 *On considère l'ensemble $l^1(\mathbb{R})$ des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que la série*

$$\sum_{n \geq 0} |u_n|$$

soit convergente.

1. *$l^1(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
2. *L'application définie sur $l^1(\mathbb{R})$ par*

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|,$$

est une norme sur $l^1(\mathbb{R})$ notée $\|.\|_1$.

3. *L'espace $(l^1(\mathbb{R}), \|.\|_1)$ est un espace de Banach.*

La preuve est laissée au lecteur.

15.6 Exercices

Exercice 15.1 Indiquer pour quelles valeurs du complexe q, la série géométrique de raison q et de premier terme égal à 1 est convergente. Donner, dans ce cas, la somme de la série.

Solution.

1. Si $q = 1$,
$$S_n = n + 1.$$
La série est divergente.
2. Si $q \neq 1$,
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$
La série est convergente si et seulement si la suite $(q^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Le nombre complexe q étant différent de 1, elle converge si et seulement si
$$|q| < 1.$$
Dans ce cas, la somme de la série est le nombre
$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

♣

Exercice 15.2 Soit p un entier strictement positif. On considère $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de $\mathbb{R}^p$. On munit $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ de la norme $\|.\|_{\mathcal{L}}$ définie par
$$\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p), \quad \|f\|_{\mathcal{L}} = \sup_{\|u\|=1} \|f(u)\|$$
où $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^p$. Nous savons proposition 12.7, page 169 que cette norme est une norme d'algèbre.
On considère, pour cet exercice, un élément f de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ de norme strictement inférieure à 1, c'est-à-dire
$$\|f\|_{\mathcal{L}} < 1.$$
Pour tout entier naturel n, on note $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$. Le but de cet exercice est d'étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 0} f^n$. On note $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles.

1. Montrer que la suite définie pour tout entier naturel n par
$$(Id - f) \circ S_n$$
est convergente et indiquer sa limite.

2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} f^n$ est convergente et indiquer sa limite.
3. On considère g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$, défini par

$$\begin{cases} g(1;0) = (0;5) \\ g(0;1) = (0;0) \end{cases}$$

   (a) Calculer $\|g\|_{\mathcal{L}}$ si l'on munit $\mathbb{R}^n$ de sa norme euclidienne canonique.
   (b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 0} g^n$ est convergente et indiquer sa limite.

Solution.

1. Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (Id - f) \circ S_n = \sum_{k=0}^{n}(f^k - f^{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} f^k - \sum_{k=1}^{n+1} f^k = Id - f^{n+1}.$$

La norme $\|.\|_{\mathcal{L}}$ étant une norme d'algèbre,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f^n\|_{\mathcal{L}} \leq \|f\|_{\mathcal{L}}^n.$$

Ainsi, la suite $|(Id - f) \circ S_n|_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec,

$$\lim_{n\to+\infty} (Id - f) \circ S_n = Id.$$

2. Le réel 1 n'est pas valeur propre de f puisque par hypothèse $\|f\|_{\mathcal{L}} < 1$. On en déduit que $(Id - f)$ est un endomorphisme inversible de $\mathbb{R}^n$. On note $(Id - f)^{-1}$ l'endomorphisme inverse. L'application

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \\ & h & \longmapsto & (Id - f)^{-1} \circ h \end{array}$$

est une application linéaire continue (car $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ est de dimension finie). La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente avec

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (Id - f)^{-1} \circ (id - f) \circ S_n = (Id - f)^{-1}.$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f^n = (Id - f)^{-1}.$$

3. (a)

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \|g(a,b)\| = 5|a| \leq 5\|(a,b)\|.$$

De plus,

$$\|g(1,0)\| = 5\|(1,0)\|.$$

On en déduit que

$$\|g\|_{\mathcal{L}} = 5.$$

(b) Nous avons $g^2 = 0$. Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} g^n$ est convergente avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty} g^n = Id + g.$$

♣

Exercice 15.3 Déterminer la nature des séries de terme général

1. $u_n = \ln \frac{n^2+n+1}{n^2+n-1}$,
2. $v_n = \frac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.

Solution. Nous remarquons que les deux séries sont à termes positifs.

1. $$\forall n \geq 1, \quad u_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n^2+n-1}\right).$$

   Ainsi,
   $$u_n \sim \frac{2}{n^2+n-1} \sim \frac{2}{n^2}.$$
   La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.
2. $$v_n \sim \frac{1}{n}.$$
   La série $\sum_{n\geq 0} v_n$ est divergente.

♣

Exercice 15.4 Montrer que la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$$

est convergente et calculer sa somme.

Solution.

$$\forall n \geq 1, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers 1. Il en est de même de la série.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

♣

Exercice 15.5 On considère une fonction à valeurs réelles définie et dérivable sur l'intervalle $[1, +\infty[$. On suppose que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et que la dérivée f' est bornée sur $[1, +\infty[$.

1. Vérifier que la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ est divergente et montrer que
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \sim \int_1^n f(t)dt.$$
2. Application : Donner un équivalent des suites définies pour tout entier naturel n par
   (a)
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k,$$
   (b)
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}.$$

Solution.

1. La suite $(f(n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, donc la série $\sum_{n \geq 1} f(n)$ est divergente. Soit M un réel positif vérifiant
$$\forall x \in [1, +\infty[, \quad |f'(x)| \leq M.$$
Alors,
$$\forall n \geq 2, \quad \left| \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \right| = \left| \int_{n-1}^{n} (f(t) - f(n))dt \right| \leq \int_{n-1}^{n} |f(t) - f(n)|\, dt \leq M.$$
Ainsi,
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)}{f(n)} = 0$$
et
$$\left(\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \right) = o(f(n)).$$
Nous obtenons,
$$\int_{n-1}^{n} f(t)dt \sim f(n).$$
D'après la proposition 15.5, nous avons
$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \sim \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)dt.$$
Ces suites ont pour limite $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$,
$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \sim \sum_{k=2}^{n} f(k) \sim \int_1^n f(t)dt.$$

2. Les fonctions $t \mapsto \ln t$ et $t \mapsto \sqrt{t}$ vérifient les propriétés énoncées au début de l'exercice.
   (a)
   $$\int_1^n \ln t dt = [t \ln t - t]_1^n = n \ln n - n + 1 \sim n \ln n.$$
   D'où,
   $$\sum_{k=1}^{n} \ln k \sim n \ln n.$$
   (b)
   $$\int_1^n \sqrt{t} dt = \frac{2}{3}(n\sqrt{n} - 1) \sim \frac{2}{3} n\sqrt{n}.$$
   D'où,
   $$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \sim \frac{2}{3} n\sqrt{n}.$$

♣

Exercice 15.6 Donner, suivant la valeur du réel α, la nature de la série :
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n\alpha}{n}.$$

Solution.

1. Si $\alpha = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) alors la série est la série de terme général $\frac{1}{n}$. Elle est divergente.
2. Si α n'est pas un multiple entier de 2π, montrons que la série est convergente en utilisant la règle d'Abel. La suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente vers 0. Montrons que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha,$$
   est bornée.
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \Re\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik\alpha}\right).$$
   La suite $(e^{in\alpha})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $e^{i\alpha} \neq 1$. Donc,
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \Re\left(e^{i\alpha}\frac{1 - e^{in\alpha}}{1 - e^{i\alpha}}\right) \quad \text{et} \quad |S_n| \leq \frac{2}{|1 - e^{i\alpha}|}.$$
   La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos n\alpha}{n}$ est convergente.

♣

Exercice 15.7 Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ avec :

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Solution. Utilisons en 0, le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.

$$\forall n \geq 2, \quad u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

où ε est une application ayant pour limite 0 en 0. D'après le critère des séries alternées, la série de terme général

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

est convergente. L'équivalence

$$-\frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim -\frac{1}{2n}$$

permet d'affirmer que les deux séries correspondantes, dont les termes sont négatifs à partir d'un certain rang, sont de même nature. Elles sont toutes deux divergentes. On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est divergente. On peut remarquer que

$$u_n \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

et les deux séries correspondantes ne sont pas de même nature. ♣

Exercice 15.8 Étudier, suivant la valeur du réel α strictement positif, la nature des séries de terme général :

1. $u_n = e^{\frac{(-1)^n}{n^\alpha}} - 1,$
2. $v_n = \cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) - 1,$
3. $w_n = u_n + v_n.$

Solution.

1. À l'aide du développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction exponentielle, nous obtenons le développement asymptotique suivant :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

D'après le critère des séries alternées, la série de terme général

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$$

est convergente. D'autre part,

$$\frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) \sim \frac{1}{2n^{2\alpha}}.$$

Les séries correspondantes, à termes positifs, sont de même nature. Elles sont convergentes si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$. La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

2. À l'aide du développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction cosinus, nous obtenons le développement asymptotique suivant :

$$v_n = \frac{-1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right).$$

Nous avons

$$v_n \sim \frac{-1}{2n^{2\alpha}}.$$

La série $\sum_{n\geq 1} v_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

3. À l'aide des développements limités en 0 à l'ordre 4 de la fonction exponentielle et de la fonction cosinus, nous obtenons le développement asymptotique suivant :

$$w_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{(-1)^n}{6n^{3\alpha}} + \frac{1}{12n^{4\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right).$$

Les séries de terme général

$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{(-1)^n}{6n^{3\alpha}}$$

sont convergentes puisqu'elles vérifient le critère des séries alternées. On a

$$\frac{1}{12n^{4\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right) \sim \frac{1}{12n^{4\alpha}}.$$

Les deux séries correspondantes sont de même nature. Elles sont convergentes si et seulement si $\alpha > \frac{1}{4}$. La série $\sum_{n\geq 1} w_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > \frac{1}{4}$.

♣

Exercice 15.9 Donner la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}.$$

Solution. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Considérons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{2n} + u_{2n+1}.$$

On note $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k = S_{2n+1}.$$

Or,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{\sqrt{2n}-1} - \frac{1}{\sqrt{2n+1}+1} = \frac{2+\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}\right)}{\left(\sqrt{2n}-1\right)\left(\sqrt{2n+1}+1\right)} \sim \frac{2}{2n} \sim \frac{1}{n}.$$

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est divergente, la suite des sommes partielles $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}} = (S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ également. On en déduit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente ainsi que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$. ♣

Exercice 15.10 Montrer que pour tout réel θ, la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\cos n\theta}{2^n},$$

est convergente et calculer sa somme.

Solution.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos k\theta}{2^k} = \Re\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{2^k}\right) = \Re\left(\frac{1-\left(\frac{ei\theta}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{ei\theta}{2}}\right).$$

Or,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{ei\theta}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{ei\theta}{2}} = \frac{1}{1-\frac{ei\theta}{2}} = \frac{2}{2-e^{i\theta}}.$$

L'application qui, à un nombre complexe associe sa partie réelle étant continue sur $\mathbb{C}$, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec,

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \Re\left(\frac{2}{2-e^{i\theta}}\right) = \Re\left(\frac{2\left((2-\cos\theta)+i\sin\theta\right)}{5-4\cos\theta}\right) = \frac{2\,(2-\cos\theta)}{5-4\cos\theta}.$$

D'où,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{2^n} = \frac{2\,(2-\cos\theta)}{5-4\cos\theta}.$$

♣

Exercice 15.11 1. Vérifier que pour tout réel positif a, la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{a^n}{n!}$$

est convergente.
On considère $(\mathbb{E}, +, \times, .)$ une algèbre de Banach unitaire dont la norme est notée $\|\cdot\|$.

2. Soit A un élément de $\mathbb{E}$. Montrer que la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$$

est convergente. On notera $\exp(A)$ la somme de cette série.

3. Montrer que si A et B sont deux éléments de $\mathbb{E}$ qui commutent, alors

$$\exp(A+B) = \exp(A) \times \exp(B).$$

4. En déduire que pour tout élément A de $\mathbb{E}$, $\exp(A)$ est un élément inversible de $\mathbb{E}$.

Solution.

1. Évident si $a = 0$. Si le réel a est strictement positif, il suffit d'utiliser le critère de D'Alembert.
2. Soit A un élément de $\mathbb{E}$. Nous avons,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \frac{\|A\|^n}{n!}.$$

La série $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ est une série absolument convergente à valeurs dans une algèbre de Banach donc convergente.

3. Soient A et B deux éléments de $\mathbb{E}$. Le produit de Cauchy de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ avec la série $\sum_{n\geq 0} \frac{B^n}{n!}$ est la série $\sum_{n\geq 0} c_n$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k A^k B^{n-k}.$$

Par hypothèse, les deux éléments A et B commutent. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \frac{(A+B)^n}{n!}.$$

Il suffit alors d'utiliser le théorème 15.19 page 253, pour obtenir,

$$\exp(A+B) = \exp(A). \exp(B).$$

4. On note I l'élémént unité de cette algèbre. Nous avons $\exp(0) = I$. Ainsi,

$$\forall A \in \mathbb{E}, \quad I = \exp(0) = \exp(A). \exp(-A) = \exp(-A). \exp(A).$$

On en déduit que $\exp(A)$ est inversible, d'inverse $\exp(-A)$.

♣

Exercice 15.12 Existe-t-il une relation d'inclusion entre $l^1(\mathbb{R})$ et $l^2(\mathbb{R})$?

Solution. Montrons que

$$l^1(\mathbb{R}) \subset l^2(\mathbb{R}).$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $l^1(\mathbb{R})$. La série $\sum_{n\geq 0} |u_n|$ est convergente. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0. Il existe un entier naturel n_0 vérifiant,

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n| \leq 1.$$

Ainsi,

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq u_n^2 \leq |u_n|.$$

La série $\sum_{n\geq 0} u_n^2$ est convergente et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est élément de $l^2(\mathbb{R})$.
Remarquons que l'inclusion est stricte car la suite $(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à $l^2(\mathbb{R})$ mais pas à $l^1(\mathbb{R})$. ♣

Chapitre 16

Suites de fonctions. Divers types de convergence

16.1 Convergence simple

Définition : On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction f, toutes définies sur un ensemble X et à valeurs dans un espace métrique (E,d). On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur X si, pour tout réel x élément de X, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $f(x)$, c'est-à-dire

$$\forall x \in X, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_x \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N_x, \quad d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon$$

16.2 Convergence uniforme

16.2.1 Définition

Définition : On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction f, toutes définies sur un ensemble X à valeurs dans un espace métrique (E,d). On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in X, \quad d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon.$$

Proposition 16.1 *On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction f, toutes définies sur un ensemble X à valeurs dans un espace métrique (E,d). La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X si et seulement si :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} (d(f_n(x), f(x))) = 0$$

16.2.2 Critère de Cauchy uniforme. Cas des e.v.n. complets

Définition : On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un ensemble X à valeurs dans un espace métrique (E,d). On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur X si :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N},\quad \forall n\geq N, \forall p\geq N,\quad \forall x\in X,\quad d(f_n(x), f_p(x))\leq\varepsilon$$

Proposition 16.2 *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un ensemble X à valeurs dans un espace métrique (E,d) vérifie le critère de Cauchy uniforme sur X si et seulement si :*

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N},\quad \forall n\geq N, \forall p\geq N,\quad \sup_{x\in X} (d(f_n(x), f_p(x)))\leq\varepsilon.$$

On suppose pour la proposition suivante que l'espace métrique (E,d) est *complet.*

Proposition 16.3 *Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un ensemble X, à valeurs dans un espace métrique complet (E,d), converge uniformément sur X si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme sur cet ensemble.*

Preuve. Considérons une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un ensemble X, à valeurs dans un espace métrique complet (E,d) et vérifiant le critère de Cauchy uniforme sur cet ensemble. Alors, pour tout réel x appartenant à X, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Cette suite est à valeurs dans l'espace métrique complet (E,d) . Elle est donc convergente. On peut alors définir sur X, l'application f par

$$\begin{array}{rccl} f: & X & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & \lim_{n\to+\infty} f_n(x). \end{array}$$

Montrons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X. Soit ε un réel strictement positif.

$$\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N, \forall p\geq N, \forall x\in X,\quad d(f_n(x), f_p(x))\leq\varepsilon$$

Pour tout entier n supérieur à N et tout réel x de l'ensemble X, nous avons

$$\lim_{p\to+\infty} d(f_n(x), f_p(x)) = d(f_n(x), f(x)).$$

On en déduit, en passant à la limite,

$$\forall n \geq N, \forall x \in X, \quad d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X.
Réciproquement, considérons une suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergentes uniformément sur un ensemble X vers une application f. Soit ε un réel strictement positif. Il existe un entier naturel N vérifiant,

$$\forall n \geq N, \forall x \in X, \quad d(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc,

$$\forall n \geq N, \forall p \geq N, \forall x \in X, \quad d(f_n(x), f_p(x)) \leq d(f_n(x), f(x)) + d(f(x), f_p(x)) \leq \varepsilon.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy sur X. ♣

16.2.3 Propriétés des limites

Théorème 16.4 *On considère (E, d), (E', d') deux espaces métriques, x_0 un point de E et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur E, continues en x_0, à valeurs dans E' et convergentes uniformément sur E vers une fonction f. Alors f est continue en x_0.*

Preuve. Soit ε un réel strictement positif. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant uniformément convergente sur E, choisissons un entier naturel N vérifiant,

$$\forall x \in E, \quad d'(f_N(x), f(x)) \leq \varepsilon.$$

L'application f_N étant continue en x_0, choisissons un réel α strictement positif vérifiant,

$$\forall x \in E, \quad d(x, x_0) \leq \alpha \Rightarrow d'(f_N(x), f_N(x_0)) \leq \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout élément x de E vérifiant $d(x, x_0) \leq \alpha$, on a

$$d'(f(x), f(x_0)) \leq d'(f(x), f_N(x)) + d'(f_N(x), f_N(x_0)) + d'(f_N(x_0), f(x_0)) \leq 3\varepsilon.$$

L'application f est continue au point x_0. ♣

Corollaire 16.5 *On considère $(\mathbb{K}, d)$ un espace métrique* compact, *$(\mathbb{F}, \|.\|)$ un espace de* Banach *et $C(\mathbb{K}, \mathbb{F})$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{K}$ à valeurs dans $\mathbb{F}$. L'application $\|.\|_\infty$ définie sur $C(\mathbb{K}, \mathbb{F})$ par,*

$$\forall f \in C(\mathbb{K}, \mathbb{F}), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{K}} \|f(x)\|$$

est une norme. Muni de cette norme, $C(\mathbb{K}, \mathbb{F})$ est un espace de Banach.

Preuve. D'après le corollaire 5.10, page 55, $\mathcal{C}(\mathbb{K},\mathbb{F})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\mathbb{K},\mathbb{F})$. D'après la proposition 4.6, page 43, $\mathcal{B}(\mathbb{K},\mathbb{F})$ l'espace vectoriel des fonctions bornées sur $\mathbb{K}$ à valeurs dans $\mathbb{F}$ muni de la norme uniforme est complet puisque $\mathbb{F}$ l'est. Le théorème précédent nous indique que $\mathcal{C}(\mathbb{K},\mathbb{F})$ en est une partie fermée. Donc $(\mathcal{C}(\mathbb{K},\mathbb{F}), \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé complet donc de Banach. ♣

Pour la fin de cette section, $\mathbb{F}$ représente un espace vectoriel normé *complet.*

Théorème 16.6 *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur un segment $[a,b]$, à valeurs dans un espace de Banach $\mathbb{F}$ et convergente uniformément sur ce segment vers une fonction f. Alors,*

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Preuve. D'après le théorème précédent, l'application f est continue sur le segment $[a,b]$, donc l'intégrale de f sur ce segment est définie. Soit ε un réel strictement positif. Choisissons un entier naturel N vérifiant,

$$\forall n \geq N, \forall t \in [a,b], \quad \|f_n(t) - f(t)\| \leq \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\forall n \geq N, \quad \left\|\int_a^b f_n(t)dt - \int_a^b f(t)dt\right\| \leq \int_a^b \|f_n(t) - f(t)\|\, dt \leq (b-a)\varepsilon.$$

D'où, le résultat. ♣

Remarque 16.1 *On considère l'espace vectoriel $\mathcal{C}_\mathcal{M}([a,b],\mathbb{F})$ des applications continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans l'e.v.n. complet $\mathbb{F}$. On munit cet espace de la norme uniforme. Nous avons vu (proposition 13.8, page 188) que l'application*

$$\begin{array}{rccl} I: & \mathcal{C}_\mathcal{M}([a,b],\mathbb{F}) & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ & f & \longmapsto & \int_a^b f(t)dt \end{array}$$

est une application linéaire continue.
Dans le théorème précédent, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f. L'application I étant continue, la suite $(I(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $I(f)$.

Théorème 16.7 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle I à valeurs dans un espace de Banach $\mathbb{F}$. On suppose que*

1. *Il existe un élément x_0 de I tel que la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.*
2. *La suite de fonctions $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.*

Alors,

1. *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f de classe C^1 vérifiant*
$$f' = \lim_{n\to+\infty} f'_n.$$
2. *Si l'intervalle I est borné, la convergence est uniforme.*

Preuve. Pour tout entier naturel n, l'application f_n étant de classe C^1 nous avons,

$$\forall x \in I, \quad f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'_n(t)dt.$$

Nous noterons l la limite de la suite $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ et g la limite de la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit ε un réel strictement positif. D'après les hypothèses, il existe un entier N vérifiant

1. $$\forall n \geq N, \quad \|f_n(x_0) - l\| \leq \varepsilon,$$
2. $$\forall n \geq N, \forall x \in I, \quad \|f'_n(x) - g(x)\| \leq \varepsilon.$$

L'application g est continue puisque limite uniforme d'applications continues. Nous pouvons alors définir sur I l'application

$$\begin{array}{rccl} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ & x & \longmapsto & l + \int_{x_0}^{x} g(t)dt. \end{array}$$

Cette application est de classe C^1 puisque dérivable sur I de dérivée g. Soit x un élément de I,

$$\forall n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \|f_n(x_0) - l\| + \int_{x_0}^{x} \|f'_n(t) - g(t)\|\, dt \leq \varepsilon(1 + \|x - x_0\|).$$

Ainsi,

1. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f.
2. Si I est un intervalle borné, la convergence est uniforme. En effet si l'on note $L(I)$, la longueur de l'intervalle,
$$\forall n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon(1 + L(I)).$$

♣

16.3 Produit de convolution. Approximations de l'unité

Dans cette section $\mathbb{K}$ représente soit $\mathbb{R}$ soit $\mathbb{C}$.

Notation : On note $\mathcal{CMBI}(\mathbb{R},\mathbb{K})$, l'espace vectoriel des applications bornées définies et continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est absolument convergente.
Soit T un réel strictement positif. On note $\mathcal{CMT}(\mathbb{R},\mathbb{K})$, les éléments de $\mathcal{CM}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ T-périodiques. Dans cette section, sur le produit de convolution et les approximations de l'unité, nous allons travailler conjointement dans les deux espaces $\mathcal{CMBI}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ et $\mathcal{CMT}(\mathbb{R},\mathbb{K})$, les techniques d'analyse et de calcul étant similaires.

16.3.1 Produit de convolution

Proposition-définition 16.8 *On considère deux applications f et g éléments de $\mathcal{CMBI}(\mathbb{R},\mathbb{K})$. Alors pour tout réel x, l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$$

est absolument convergente. On peut alors définir l'application notée $f*g$ par

$$\begin{array}{rccl} (f*g): & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt. \end{array}$$

On a, de plus,

$$f*g = g*f.$$

L'application $f*g$ est appelée produit de convolution de f par g.

Preuve.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t)g(x-t)| \leq \|g\|_\infty |f(t)|,$$

l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)g(x-t)|dt$$

est donc convergente pour tout réel x. L'application $f*g$ est définie sur $\mathbb{R}$. Il suffit d'effectuer le changement de variable $u = x - t$ pour vérifier que $f*g = g*f$. ♣

Proposition-définition 16.9 *Soient T un réel strictement positif et f et g éléments de $\mathcal{CMT}(\mathbb{R},\mathbb{K})$. On définit l'application $f * g$ par*

$$\begin{array}{rccl} (f*g): & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)g(x-t)dt. \end{array}$$

Alors,

1. *$f * g$ est une application T-périodique.*
2. *$f * g = g * f$.*

L'application $f * g$ est appelée produit de convolution de f par g.

Preuve.

1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f*g)(x+T) = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)g(x+T-t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)g(x-t)dt = (f*g)(x).$$

2. Effectuons le changement de variable $u = x - t$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f*g)(x) = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)g(x-t)dt = -\int_{x+\frac{T}{2}}^{x-\frac{T}{2}} f(x-u)g(u)du$$

$$= \int_{x-\frac{T}{2}}^{x+\frac{T}{2}} f(x-u)g(u)du = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x-u)g(u)du = (g*f)(x).$$

♣

16.3.2 Approximation de l'unité

Les produits de convolution dans chacun des espaces $\mathcal{CMBI}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ et $\mathcal{CMT}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ n'admettent pas d'unité, c'est-à-dire d'élément neutre pour la loi *. Dans cette sous-section, nous allons définir l'approximation de l'unité. Cette appellation est justifiée par la proposition 16.10

Définition : On appelle approximation de l'unité, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{CMBI}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ vérifiant,

1.

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t)|dt \leq M$$

2.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = 1.$$

3.

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_{|t|>\alpha} |f_n(t)|dt = 0.$$

Exercice 16.1 On considère f un élément de $\mathcal{CMBI}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1.$$

On définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, \quad f_n(t) = nf(nt).$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité.

Solution. Soit n un entier strictement positif. Il est évident que f_n appartient à $\mathcal{CMB}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$. En utilisant le changement de variable $x = nt$, d'une part, on vérifie l'appartenance de f_n à l'espace vectoriel $\mathcal{CMBI}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ car,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |nf(nt)|dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |f_n(t)|dt$$

et, d'autre part,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} nf(nt)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Soit α un réel strictement positif.

$$\forall n \geq 1, \quad \int_{\alpha}^{+\infty} |f_n(t)|dt = \int_{\alpha}^{+\infty} |nf(nt)|dt = \int_{n\alpha}^{+\infty} |f(x)|dx.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\alpha}^{+\infty} |f_n(t)|dt = 0.$$

De même

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{-\alpha} |f_n(t)|dt = 0.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est ainsi une approximation de l'unité. ♣

Définition : Soit T un réel strictement positif. On appelle approximation de l'unité T-périodique, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{CMT}(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ vérifiant,

1.
$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f_n(t)|dt \leq M$$

2.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f_n(t)dt = 1.$$

3.
$$\forall \alpha \in]0, \frac{T}{2}[, \quad \lim_{n\to+\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{-\alpha} |f_n(t)|dt + \int_{\alpha}^{+\frac{T}{2}} |f_n(t)|dt \right) = 0.$$

Proposition 16.10 *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une approximation de l'unité (respectivement approximation de l'unité T-périodique) et f un élément de $\mathcal{CMBI}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ (resp. $\mathcal{CMT}(\mathbb{R},\mathbb{K})$).*

1. *Si x est un point de continuité de f, alors la suite $((f_n * f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et*
$$\lim_{n\to+\infty}(f_n * f)(x) = f(x).$$
2. *Si f est uniformément continue sur un intervalle I, la suite $(f_n * f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I.*
3. *Si, pour tout entier naturel n, l'application f_n est paire alors, la suite $(f_n * f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ avec*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty}(f_n * f)(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right).$$

Preuve. La preuve est faite dans le cadre d'une approximation de l'unité, la preuve dans le cadre d'une approximation de l'unité T-périodique étant similaire.

1. Soit x un réel donné.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (f_n * f)(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)f(x-t)dt - \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)f(x)dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\left(f(x-t) - f(x)\right)dt.$$
On suppose f continue en x. Soit ε un réel strictement positif. Il existe un réel α strictement positif vérifiant
$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad |h| \leq \alpha \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| \leq \varepsilon.$$
Donc,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |(f_n * f)(x) - f(x)| \leq \int_{-\alpha}^{+\alpha} \varepsilon|f_n(t)|dt + 2\|f\|_\infty \int_{|t|>\alpha} |f_n(t)|dt$$
$$\leq \varepsilon M + 2\|f\|_\infty \int_{|t|>\alpha} |f_n(t)|dt.$$
Le réel M est un réel vérifiant la condition 1 dans la définition précédente. Choisissons un entier naturel n_0 vérifiant,
$$\forall n \geq n_0, \quad \int_{|t|>\alpha} |f_n(t)| \leq \varepsilon.$$
Alors,
$$\forall n \geq n_0, \quad |(f_n * f)(x) - f(x)| \leq (M + 2\|f\|_\infty)\varepsilon.$$
On obtient le résultat désiré.

2. On remarque que, si la continuité de f est uniforme sur un intervalle I, en reprenant la preuve de la première partie, on peut choisir α puis n_0 indépendamment de chaque réel de l'intervalle I. La convergence est ainsi uniforme sur I.
3. Pour tout entier naturel n, l'application f_n étant paire
$$\int_{-\infty}^{0} f_n(t)dt = \int_{0}^{+\infty} f_n(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = \frac{1}{2}.$$
Soit x un réel. Montrons que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{0}^{+\infty} f_n(t)f(x-t)dt = \frac{1}{2}f(x^-).$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\int_{0}^{+\infty} f_n(t)f(x-t)dt - \frac{1}{2}f(x^-)\right| = \left|\int_{0}^{+\infty} f_n(t)\left(f(x-t)-f(x^-)\right)dt\right|$$
$$\leq \int_{0}^{+\infty} |f_n(t)|.\left|f(x-t)-f(x^-)\right|dt.$$
Soit ε un réel strictement positif. Il existe un réel α strictement positif, vérifiant
$$\forall t \in]0,\alpha], \quad \left|f(x-t)-f(x^-)\right| \leq \varepsilon.$$
On obtient
$$\int_{0}^{+\infty} |f_n(t)|.\left|f(x-t)-f(x^-)\right|dt \leq \varepsilon\int_{0}^{\alpha}|f_n(t)|\,dt + 2\,\|f\|_\infty\int_{\alpha}^{+\infty}|f_n(t)|\,dt$$
$$\leq \varepsilon M + 2\,\|f\|_\infty\int_{\alpha}^{+\infty}|f_n(t)|\,dt.$$
La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une approximation de l'unité, il existe un entier n_0 vérifiant,
$$\forall n \geq n_0, \quad \int_{\alpha}^{+\infty}|f_n(t)|\,dt \leq \varepsilon.$$
Ainsi,
$$\forall n \geq n_0, \quad \left|\int_{0}^{+\infty} f_n(t)f(x-t)dt - \frac{1}{2}f(x^-)\right| \leq (M + 2\,\|f\|_\infty)\varepsilon.$$
On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{0}^{+\infty} f_n(t)f(x-t)dt = \frac{1}{2}f(x^-).$$
On montre de même que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{0} f_n(t)f(x-t)dt = \frac{1}{2}f(x^+).$$
On en déduit alors que
$$\lim_{n\to+\infty}(f_n * f)(x) = \frac{1}{2}\left(f(x^-)+f(x^+)\right).$$

Quelle est la nature de la suite $((f_n * f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque l'application f n'est pas continue au point x ? La proposition précédente nous donne la réponse si les applications f_n sont paires. Dans les autres cas, le comportement dépend essentiellement de l'approximation de l'unité choisie. L'exercice suivant expose divers cas.

Exercice 16.2 Soit f un élément de $\mathcal{CMBI}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ admettant au moins un point de discontinuité x vérifiant

$$f(x_+) \neq f(x_-).$$

On considère $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites d'applications numériques de variable réelle, définies par

$$\forall n \geq 1, \quad g_n = n.\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]},$$

$$\forall n \geq 1, \quad h_n = n.\mathbb{1}_{[-\frac{1}{n},0]}.$$

1. Vérifier que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont deux approximations de l'unité.
2. Montrer que les suites $((g_n * f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $((h_n * f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes avec

$$\lim_{n\to+\infty}(g_n * f)(x) = f(x^-) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(h_n * f)(x) = f(x^+).$$

3. Soit λ un réel. On considère $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'applications numériques de variable réelle, définie par

$$\forall n \geq 1, \quad k_n = \lambda g_n + (1-\lambda)h_n.$$

   (a) Vérifier que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité.
   (b) Vérifier que la suite $((k_n * f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec

$$\lim_{n\to+\infty}(k_n * f)(x) = \lambda f(x^-) + (1-\lambda)f(x^+).$$

4. On considère $(l_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'applications numériques de variable réelle, définie par

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} l_{2n-1} = g_n, \\ l_{2n} = h_n. \end{cases}$$

   (a) Vérifier que $(l_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité.
   (b) Vérifier que la suite $((l_n * f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente.

Solution.

1. On considère les applications $g = \mathbb{1}_{[0;1]}$ et $h = \mathbb{1}_{[-1;0]}$. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = ng(nx) \quad \text{et} \quad h_n(x) = nh(nx).$$

   Il suffit de reprendre les résultats de l'exercice 16.1 pour conclure.

2.
$$\forall n \geq 1, \quad (g_n * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) f(x-t)dt = n \int_0^{\frac{1}{n}} f(x-t)dt,$$

$$\forall n \geq 1, \quad (g_n * f)(x) - f(x^-) = n \int_0^{\frac{1}{n}} f(x-t)dt - f(x^-)$$

$$= n \int_0^{\frac{1}{n}} (f(x-t) - f(x^-))dt.$$

Soit ε un réel strictement positif. Choisissons un réel strictement positif α vérifiant
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad 0 < t \leq \alpha \Rightarrow |f(x-t) - f(x^-)| \leq \varepsilon.$$
Choisissons un entier strictement positif n_0 vérifiant $\frac{1}{n_0} \leq \alpha$. Alors,

$$\forall n \geq n_0, \quad \left|(g_n * f)(x) - f(x^-)\right| \leq n \int_0^{\frac{1}{n}} \varepsilon dt = \varepsilon.$$

D'où,
$$\lim_{n\to+\infty} (g_n * f)(x) = f(x^-).$$

On montrerait de même,

$$\lim_{n\to+\infty} (h_n * f)(x) = f(x^+).$$

3. (a) Évident

   (b) Pour tout entier n strictement positif,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k_n(t) f(x-t)dt = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t) f(x-t)dt + (1-\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) f(x-t)dt$$

$$= \lambda (g_n * f)(x) + (1-\lambda)(h_n * f)(x).$$

En utilisant la question précédente, on déduit que la suite $((k_n * f)(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente avec,

$$\lim_{n\to+\infty} (k_n * f)(x) = \lambda f(x^-) + (1-\lambda) f(x^+).$$

Les deux réels $f(x_+)$ et $f(x_-)$ étant distincts, on peut remarquer que

$$\{\lambda f(x^-) + (1-\lambda) f(x^+) / \lambda \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

4. (a) Évident

   (b) $f(x^-)$ et $f(x^+)$ sont deux valeurs d'adhérence distinctes de la suite$((l_n * f)(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Elle est ainsi divergente.

♣

Exercice 16.3 Dans cet exercice, on considère un segment $[a, b]$. Pour tout entier naturel n, on définit l'application g_n par

$$g_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & \mathbb{1}_{[-(b-a),(b-a)]}(t).\left(1 - \left(\frac{t}{b-a}\right)^2\right)^n \end{array},$$

puis l'application f_n par

$$f_n = \frac{g_n}{\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)dt}.$$

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité.
   On considère f une application définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, nulle en dehors du segment $[a, b]$ et dont la restriction à l'intervalle $]a, b[$ est continue.
2. Montrer que pour tout entier naturel n la restriction de l'application $f_n * f$ à l'intervalle $[a, b]$ est une fonction polynomiale.
3. En déduire que sur tout segment inclus dans l'intervalle $]a, b[$ la suite de fonctions polynomiales $f_n * f$ converge uniformément vers f.

Solution.

1. Pour tout entier naturel n, l'application f_n est continue et positive et bornée sur $\mathbb{R}$, d'intégrale 1 sur cet intervalle. Montrons que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation de l'unité. Il suffit pour cela de vérifier la troisième condition de la définition.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(t)dt \geq \int_0^{(b-a)} g_n(t)dt \geq \int_0^{(b-a)} \left(1 - \left(\frac{t}{b-a}\right)\right)^n dt = \frac{b-a}{n+1}$$

Soit α un réel strictement positif que l'on peut supposer inférieur à $(b - a)$. L'application g_n étant paire,

$$\int_{|t|>\alpha} g_n(t)dt = 2\int_\alpha^{b-a} \left(1 - \left(\frac{t}{b-a}\right)^2\right)^n dt \leq 2\int_\alpha^{b-a} \left(1 - \left(\frac{\alpha}{b-a}\right)^2\right)^n dt$$
$$\leq 2(b-a)\left(1 - \left(\frac{\alpha}{b-a}\right)^2\right)^n.$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \int_{|t|>\alpha} f_n(t)dt \leq 2(n+1)\left(1 - \left(\frac{\alpha}{b-a}\right)^2\right)^n.$$

Nous pouvons conclure en remarquant que

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1)\left(1 - \left(\frac{\alpha}{b-a}\right)^2\right)^n = 0.$$

2.
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f_n * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x-t)f(t)dt = \int_a^b f_n(x-t)f(t)dt.$$

La restriction de la fonction f_n au segment $[-(b-a),(b-a)]$ est une fonction polynomiale de degré $2n$. En remarquant que,
$$\forall (x,t) \in [a,b]^2, \quad -(b-a) \leq x-t \leq b-a$$
la fonction définie sur $[a,b]^2$ par $(x,t) \mapsto f_n(x-t)$ est polynomiale dont le degré en x est $2n$. Il existe ainsi $(2n+1)$ fonctions polynomiales $P_0, P_1, \cdots, P_{2n}$ vérifiant
$$\forall (x,t) \in [a,b]^2, \quad f_n(x-t) = \sum_{k=0}^{2n} x^k P_k(t).$$
Donc,
$$\forall x \in [a,b], \quad (f_n * f)(x) = \int_a^b f_n(x-t)f(t)dt = \sum_{k=0}^{2n} x^k \left(\int_a^b P_k(t)f(t)dt \right).$$
La restriction de $(f_n * f)$ au segment $[a,b]$ est une fonction polynomiale.

3. L'application f est continue sur l'intervalle $]a,b[$ donc uniformément continue sur chaque segment inclus dans $]a,b[$. D'après la proposition 16.10, la suite de fonctions polynomiales $f_n * f$ converge uniformément vers f sur chaque segment inclus dans $]a,b[$.

♣

De cet exercice, on peut déduire le

16.3.3 Théorème de Weierstrass

Théorème 16.11 *(Weierstrass) Toute application f continue sur un segment $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est limite uniforme sur ce segment de fonctions polynômes.*

Preuve. Soit f une application continue sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On considère l'application $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors du segment $[a-1,b+1]$ avec
$$\begin{cases} \forall x \in [a,b], & \tilde{f}(x) = f(x) \\ \forall x \in [a-1,a[, & \tilde{f}(x) = f(a) \\ \forall x \in]b,b+1], & \tilde{f}(x) = f(b) \end{cases}$$
Il suffit alors d'appliquer les résultats obtenus dans l'exercice précédent. ♣

Il existe d'autres preuves de ce théorème, en particulier une preuve probabiliste, page 454.

16.4 Convergences en moyennes

Proposition 16.12 *Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$. L'application $\|.\|_1$ définie sur $C([a,b],\mathbb{R})$ par :*

$$\forall f \in C([a,b],\mathbb{R}), \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|dt,$$

est une norme sur $C([a,b],\mathbb{R})$ appelée norme 1.

Preuve. Évident. ♣

Définition : Si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norme 1 vers une fonction f, on dit qu'elle converge en moyenne vers f.

Proposition 16.13 *Soient a et b deux réels vérifiant $a < b$. L'application $< .,. >$ définie sur $(C([a,b],\mathbb{R}))^2$ par :*

$$\forall (f,g) \in (C([a,b],\mathbb{R}))^2, \quad < f,g >= \int_a^b f(t)g(t)dt,$$

est un produit scalaire sur $C([a,b],\mathbb{R})$. La norme euclidienne associée est notée $\|.\|_2$ et appelée norme 2.

Preuve. Évident. ♣

Définition : Si une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norme 2 vers une fonction f, on dit qu'elle converge en moyenne quadratique vers f.

Exercice 16.4 Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par

$$\forall t \in [0,1], \quad f_n(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{t}\right) & si \quad t \in [\frac{1}{n\pi}, 1] \\ 0 & si \quad t \in [0, \frac{1}{n\pi}[\end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout entier strictement positif n, l'application f_n est continue sur le segment $[0,1]$.
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans l'espace $C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme 1 ou de la norme 2.
3. Montrer que cette suite n'est pas convergente dans l'espace $C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme 1 ou de la norme 2.

4. En déduire que les espaces vectoriels normés $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_1)$ et $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_2)$ ne sont pas complets.

Solution.

1. Soit n un entier strictement positif. La restriction de l'application f_n à l'intervalle $[0, \frac{1}{n\pi}[$ est continue. Il en est de même pour l'intervalle $]\frac{1}{n\pi}, 1]$. De plus
$$\lim_{t\to\left(\frac{1}{n\pi}\right)^-} f(t) = \lim_{t\to\left(\frac{1}{n\pi}\right)^+} f(t) = 0 = f\left(\frac{1}{n\pi}\right).$$
L'application f_n est continue sur le segment $[0,1]$.
2. Soient n et p deux entiers strictement positifs vérifiant $p > n$. Nous remarquons que
$$\forall t \in [0, \frac{1}{p\pi}] \cup [\frac{1}{n\pi}, 1], \quad f_n(t) = f_p(t).$$
D'où,
$$\|f_n - f_p\|_1 = \int_{\frac{1}{p\pi}}^{\frac{1}{n\pi}} \left|\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| dt \leq \left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{p\pi}\right) \leq \frac{1}{n\pi}.$$
$$\|f_n - f_p\|_2 = \sqrt{\int_{\frac{1}{p\pi}}^{\frac{1}{n\pi}} \left(\sin\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2 dt} \leq \sqrt{\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{1}{p\pi}\right)} \leq \sqrt{\frac{1}{n\pi}}.$$
On en déduit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de l'espace $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_1)$ et de l'espace $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_2)$.
3. Soit g un élément de $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant
$$\exists t_0 \in]0,1], \quad g(t_0) \neq \sin\left(\frac{1}{t_0}\right).$$
Il existe alors un segment $[a,b]$ inclus dans l'intervalle $]0,1]$ et contenant t_0 tel que
$$\forall t \in [a,b], \quad \left|g(t) - \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| \geq \frac{\left|g(t_0) - \sin\left(\frac{1}{t_0}\right)\right|}{2}.$$
Soit n_0 un entier strictement supérieur à $\frac{1}{a\pi}$. Alors,
$$\forall n \geq n_0, \quad \|g - f_n\|_1 \geq \int_a^b |g(t) - f_n(t)| dt$$
$$= \int_a^b \left|g(t) - \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right| dt \geq \frac{(b-a)}{2} \left|g(t_0) - \sin\left(\frac{1}{t_0}\right)\right|.$$
On en déduit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers g dans l'espace $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_1)$. Donc si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge dans cet espace, sa limite, que l'on note f, vérifie
$$\forall t \in]0,1], \quad f(t) = \sin\left(\frac{1}{t}\right).$$

Une telle application n'admet pas de limite en 0. Elle ne peut être continue sur le segment $[0,1]$. On en déduit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas convergente dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_1)$. On peut faire un travail similaire pour montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas convergente dans $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_2)$.

4. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de Cauchy mais non convergente dans les espaces $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_1)$ et $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}),\|.\|_2)$. Ils ne sont donc pas complets.

♣

16.5 Comparaison des différents types de convergence

On considère, dans cette section, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ et f un élément de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Proposition 16.14 *Pour tout élément f de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, on a :*

1. $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$,
2. $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$
3. $\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty$.

Preuve.

1. Utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|.1dt \leq \|f\|_2.\|1\|_2 = \sqrt{b-a}\|f\|_2.$$
2. $$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt} \leq \sqrt{\int_a^b \|f\|_\infty^2 dt} = \sqrt{b-a}\|f\|_\infty.$$
3. Il suffit d'utiliser les deux inégalités précédentes pour obtenir la troisième.

♣

Proposition 16.15 *Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur le segment $[a,b]$ alors elle converge,*

1. *simplement sur $[a,b]$,*
2. *en moyenne sur $[a,b]$,*
3. *en moyenne quadratique sur $[a,b]$.*

Preuve. Il suffit d'utiliser la proposition 16.14 ♣

Proposition 16.16 *Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers f sur le segment $[a,b]$ alors elle converge en moyenne vers f.*

Preuve. Il suffit d'utiliser la proposition 16.14 ♣

Chapitre 17

Séries de fonctions

17.1 Définition

Définition : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un ensemble X et à valeurs dans un espace vectoriel $\mathbb{F}$. On appelle série de fonctions de terme général f_n, la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = f_o + f_1 + \cdots + f_n = \sum_{k=0}^{n} f_k.$$

On note cette série $\sum_{n\geq 0} f_n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n s'appelle le terme d'indice n, S_n s'appelle la somme partielle d'indice n de la série $\sum_{n\geq 0} f_n$.

17.2 Divers types de convergence d'une série de fonctions

Définition : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un ensemble X et à valeurs dans un espace vectoriel normé $(\mathbb{F}, \|.\|)$. On dit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge

1. simplement sur X si pour tout x élément de X, la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ est convergente.
2. absolument sur X si la série $\sum_{n\geq 0} \|f_n\|$ converge simplement sur X.
3. uniformément sur X si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur X.

Proposition 17.1 *On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une fonction f, toutes définies sur un ensemble X à valeurs dans un espace vectoriel normé $(\mathbb{F}, \|.\|)$. La série $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur X si et seulement si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in X} \|\sum_{k=0}^{n} f_k(x) - f(x)\| = 0$$

Preuve. Immédiat d'après la proposition 16.1 page 270. ♣

Proposition 17.2 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un ensemble X à valeurs dans un espace vectoriel normé $(\mathbb{F}, \|.\|)$. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur X si et seulement si*

1. *La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur X,*
2. *la suite $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ des restes converge uniformément vers 0 sur X.*

17.3 Convergence normale d'une série de fonctions

Définition : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un ensemble X à valeurs dans un espace vectoriel normé $(\mathbb{F}, \|.\|)$. La série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur un ensemble X si la série

$$\sum_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty = \sum_{n\geq 0} \sup_{x\in X} \|f_n(x)\|$$

est convergente.

Proposition 17.3 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un ensemble X à valeurs dans un espace vectoriel normé $(\mathbb{F}, \|.\|)$. Une série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur un ensemble X si et seulement si il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant*

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \quad \|f_n(x)\| \leq a_n$,
2. *la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est convergente.*

Preuve.

1. Supposons la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ normalement convergente sur X. Il suffit alors de choisir
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \sup_{x\in X} \|f_n(x)\| .$$

2. Supposons qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \quad \|f_n(x)\| \leq a_n$,
   (b) la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est convergente.

   Nous avons alors
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x\in X} \|f_n(x)\| \leq a_n.$$
   la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ étant convergente, il en est de même de la série
   $$\sum_{n\geq 0} \sup_{x\in X} \|f_n(x)\|.$$
   La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ est normalement convergente sur X.

♣

Théorème 17.4 *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un ensemble X à valeurs dans un espace vectoriel normé* complet $(\mathbb{F}, \|.\|)$. *Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur X alors elle converge uniformément sur X.*

Preuve. On suppose la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ normalement convergente sur X. La série numérique
$$\sum_{n\geq 0} \sup_{x\in X} \|f_n(x)\|$$
est convergente, donc de Cauchy. Soit ε un réel strictement positif.
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \forall p \geq n_0, \quad p > n \Rightarrow \sum_{k=n}^{p} \sup_{x\in X} \|f_k(x)\| \leq \varepsilon.$$
Soient n et p deux entiers supérieurs à n_0 vérifiant $p > n$. Alors,
$$\forall x \in X, \quad \|S_p(x) - S_n(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{p} \sup_{x\in X} \|f_k(x)\| \leq \varepsilon.$$
D'où
$$\sup_{x\in X} \|S_p(x) - S_n(x)\| \leq \varepsilon.$$
La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme sur X. L'espace vectoriel normé $(\mathbb{F}, \|.\|)$ étant *complet*, elle est uniformément convergente sur X ainsi que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$. ♣

17.4 Propriétés des séries de fonctions uniformément convergentes

Théorème 17.5 *On considère* $(\mathbb{E}, d)$ *un espace métrique,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies et continues sur* $\mathbb{E}$*, à valeurs dans un espace vectoriel normé* $(\mathbb{F}, \|.\|)$*. Si la série* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *est uniformément convergente sur* $\mathbb{E}$ *vers une fonction* S*, alors* S *est continue sur* $\mathbb{E}$*.*

Preuve. Évident d'après le théorème 16.4, page 271. ♣

Théorème 17.6 *On considère* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions définies et continues sur un segment* $[a;b]$ *à valeurs dans* $\mathbb{F}$ *espace vectoriel normé* complet. *Si la série* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *est uniformément convergente sur* $[a;b]$*, alors*

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt.$$

Preuve. Évident d'après le théorème 16.6, page 272. ♣

Théorème 17.7 *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de classe* C^1 *sur un intervalle* I *à valeurs dans* $\mathbb{F}$ *espace vectoriel normé* complet. *On suppose*

1. *qu'il existe* $x_0 \in I$ *tel que la série* $\sum_{n\geq 0} f_n(x_0)$ *converge.*
2. *que la série de fonctions* $\sum_{n\geq 0} f'_n$ *converge uniformément sur* I*.*

Alors,

1. *la série* $\sum_{n\geq 0} f_n$ *converge simplement vers une fonction* S *de classe* C^1 *vérifiant*

$$\forall x \in I, \quad S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x).$$

2. *Si l'intervalle* I *est borné, la convergence est uniforme.*

Preuve. Évident d'après le théorème 16.7, page 273. ♣

17.5 Critère d'Abel uniforme

On suppose pour le théorème suivant que $(\mathbb{F}, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé complet.

Théorème 17.8 *Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs dans un espace vectoriel normé* complet $\mathbb{F}$ *et (g_n) une suite de fonctions à valeurs réelles, toutes deux définies sur un intervalle I, vérifiant*

1. $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad \|\sum_{p=0}^{n} f_p(x)\| \leq M,$
2. *la suite (g_n) converge uniformément sur I vers 0 en décroissant.*

Alors la série $\sum_{n\geq 0} g_n f_n$ converge uniformément sur I.

Preuve. Notons pour tout entier naturel n, les applications S_n et T_n définies sur I par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} g_k f_k.$$

Nous devons montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.

$$\forall n \geq 2, \quad T_n = \sum_{k=0}^{n} g_k f_k = \sum_{k=1}^{n} g_k(S_k - S_{k-1}) + g_0 f_0 = \sum_{k=1}^{n} g_k S_k - \sum_{k=1}^{n} g_k S_{k-1} + g_0 f_0$$

$$= \sum_{k=1}^{n} g_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} g_{k+1} S_k + g_0 f_0 = \sum_{k=1}^{n-1} (g_k - g_{k+1}) S_k + g_n S_n - g_1 f_0 + g_0 f_0.$$

Nous avons

$$\forall x \in I, \quad \|S_n(x) g_n(x)\| \leq M \|g_n(x)\|.$$

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant uniformément convergente sur I vers la fonction nulle, la suite $(S_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi. Il suffit maintenant de prouver que la suite $(A_n)_{n\geq 2}$ définie par

$$\forall n \geq 2, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n-1} (g_k - g_{k+1}) S_k$$

est uniformément convergente sur I. Pour cela nous allons montrer qu'elle vérifie le critère de Cauchy uniforme sur I. Soit M un réel positif vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \|S_n\| \leq M.$$

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente vers 0 en décroissant. Soit ε un réel strictement positif. Considérons un entier naturel n_0 vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in I, \quad 0 \leq g_n(x) \leq \varepsilon.$$

Alors,

$$\forall n \geq n_0, \forall p > n, \forall x \in I, \quad \|A_p(x) - A_n(x)\| = \left\| \sum_{k=n}^{p-1} (g_k(x) - g_{k+1}(x)) S_k(x) \right\|$$

$$\leq \sum_{k=n}^{p-1} M(g_k(x) - g_{k+1}(x)) = M(g_n(x) - g_p(x)) \leq M g_n(x) \leq M\varepsilon.$$

Nous venons de montrer que la suite $(A_n)_{n\geq 2}$ vérifie le critère de Cauchy uniforme. L'espace vectoriel normé $(\mathbb{F}, \|.\|)$ étant complet, on en déduit qu'elle est uniformément convergente sur I ainsi que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La série $\sum_{n\geq 0} g_n f_n$ est donc uniformément convergente sur I. ♣

17.6 Exercices

Exercice 17.1 On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit sur $\mathbb{R}^+$ la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 0} a_n \mathbb{1}_{[n,n+1[}.$$

1. Montrer que cette série est simplement convergente sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction que l'on déterminera.
2. À quelle condition sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la série est-elle uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$?
3. À quelle condition sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la série est-elle normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$?

Solution. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles.

1. Soit x un réel positif. Alors,

$$\forall n < E(x), \quad S_n(x) = 0, \quad \text{et} \quad \forall n \geq E(x), \quad S_n(x) = a_{E(x)}.$$

La suite des sommes partielles $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et convergente vers $a_{E(x)}$. La série $\left(\sum_{n\geq 0} a_n \mathbb{1}_{[n,n+1[}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers $a_{E(x)}$.

2. D'après la proposition 17.2, la série converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si la série des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$ vers 0.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \mathbb{1}_{[k,k+1[}(x).$$

Soit n un entier naturel,

$$\forall x < n+1, \quad R_n(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \geq n+1, \quad R_n(x) = a_{E(x)}.$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |R_n(x)| = \sup_{k\geq n+1} |a_k|.$$

La série converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sup_{k\geq n+1} |a_k|$$

est convergente vers 0. Vérifions que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0 si et seulement si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(a) Supposons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers 0. Soit ε un réel strictement positif. Il existe un entier positif n_0 tel que

$$u_{n_0} = \sup_{k\geq n_0} |a_k| \leq \varepsilon.$$

On obtient

$$\forall n \geq n_0, \quad |a_n| \leq \varepsilon.$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

(b) Supposons réciproquement la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente vers 0. Soit ε un réel strictement positif. Il existe un entier positif n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \quad |a_n| \leq \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\forall n \geq n_0, \quad u_n = \sup_{k\geq n} |a_k| \leq \varepsilon.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

En conclusion, la série $\sum_{n\geq 0} a_n \mathbb{1}_{[n,n+1[}$ est uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

3. Par définition, la série de fonction $\sum_{n\geq 0} a_n \mathbb{1}_{[n,n+1[}$ converge normalement sur $\mathbb{R}^+$ si la série

$$\sum_{n\geq 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^+} \left|a_n \mathbb{1}_{[n,n+1[}(x)\right| = \sum_{n\geq 0} |a_n|$$

est convergente.

♣

Exercice 17.2 Montrer que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + \sin nx}$$

est C^1 sur $\mathbb{R}$.

Solution. On définit la suite d'applications $(f_n)_{n\geq 2}$ par,

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n^2 + \sin nx}.$$

D'une part, la série numérique $\sum_{n\geq 2}(f_n)(0)$ est convergente. D'autre part,

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = \frac{-n\cos nx}{(n^2 + \sin nx)^2}.$$

Ainsi,

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n'(x)| = \frac{n}{(n^2-1)^2}.$$

Or,

$$\frac{n}{(n^2-1)^2} \sim \frac{1}{n^3}.$$

La série $\sum_{n\geq 2} f_n'$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier supérieur ou égal à 2, f_n' est continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{-n\cos nx}{(n^2+\sin nx)^2}.$$

♣

Exercice 17.3 Étudier l'ensemble de définition, la continuité et la dérivabilité de la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x^2+n^2}.$$

Solution. On définit la suite d'applications $(f_n)_{n\geq 1}$ par,

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}.$$

Pour tout entier n supérieur à 1, l'application f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec,

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = \frac{-2x}{(x^2+n^2)^2}.$$

Soit a un réel strictement positif.

$$\forall x \in [-a,a], \quad |f_n'(x)| \leq \frac{2a}{n^4}.$$

La série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ est normalement convergente sur l'intervalle $[-a,a]$. En remarquant que la série $\sum_{n\geq 1} f_n(0)$ est convergente, on en déduit que l'application f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle de la forme $]-a,a[$ où a est un réel strictement positif. L'application f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\cup_{a>0}]-a,a[=\mathbb{R}$ avec,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2x}{(x^2+n^2)^2}.$$

♣

Exercice 17.4 Montrer que la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)},$$

est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Solution. On définit la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ par

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)}.$$

Remarquons que

$$\forall n \geq 1, \quad f_n(0) = 0.$$

Donc f est définie en 0 avec $f(0) = 0$. D'autre part, pour tout réel x non nul,

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)} \sim \frac{1}{xn^{\frac{3}{2}}}.$$

On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est convergente et que f est définie sur $\mathbb{R}$. On peut remarquer que l'application f est impaire. Pour montrer sa dérivabilité sur $\mathbb{R}^*$, il suffit de montrer sa dérivabilité sur $\mathbb{R}^{+*}$.

$$\forall n \geq 1, \forall x > 0, \quad f_n'(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}.$$

Donc,

$$\forall n \geq 1, \forall x > 0, \quad |f_n'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1+nx^2}{(1+nx^2)^2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+nx^2}.$$

Soit a un réel strictement positif.

$$\forall n \geq 1, \forall x \in]a, +\infty[, \quad |f_n'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+na^2}.$$

Or,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+na^2} \sim \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}a^2}.$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ est normalement convergente sur l'intervalle $]a, +\infty[$ et que l'application f est dérivable sur cet intervalle. L'application f est ainsi dérivable sur l'ouvert

$$\cup_{a>0}]a, +\infty[= \mathbb{R}^{+*}$$

avec,

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}.$$

L'application f étant impaire, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, de fonction dérivée paire. D'où,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1 - nx^2}{(1 + nx^2)^2}.$$

♣

Cet exercice est un exercice préliminaire à l'exercice suivant 17.6.

Exercice 17.5 On considère (D, d) un espace métrique, $(\mathbb{E}, +, \times, .)$ une algèbre de Banach de norme notée $\|.\|$, f et g deux applications définies sur D à valeurs dans $\mathbb{E}$.

1. Soit x un élément de D. Montrer que si f et g sont continues en x, alors l'application $f \times g$ est continue en x.
   On suppose dans les deux questions suivantes que D est un intervalle de $\mathbb{R}$ que l'on notera I. On considère x un élément de I et on suppose f et g dérivables en ce point.
2. Montrer que l'application $f \times g$ est dérivable en x et donner la dérivée en ce point.
3. Soit n un entier strictement positif. On note f^n, l'application $f^n = \underbrace{f \times \cdots \times f}_{n \text{ fois}}$.
   Vérifier que f^n est dérivable en x et indiquer sa dérivée dans le cas où $f(x)$ et $f'(x)$ commutent.

Solution.

1. Soit ε un réel strictement positif. Choisissons un réel α strictement positif vérifiant

$$\forall y \in D, \quad d(x, y) \leq \alpha \Rightarrow \begin{cases} \|f(y) - f(x)\| \leq \min\{\varepsilon, 1\}, \\ \|g(y) - g(x)\| \leq \min\{\varepsilon, 1\}. \end{cases}$$

   Soit y un élément de D vérifiant $d(x, y) \leq \alpha$.

$$\begin{aligned} &\|f(y) \times g(y) - f(x) \times g(x)\| \\ &\leq \|f(y) \times g(y) - f(x) \times g(y)\| + \|f(x) \times g(y) - f(x) \times g(x)\| \\ &\leq \|g(y)\|.\|f(y) - f(x)\| + \|f(x)\|.\|g(y) - g(x)\| \leq (\|g(y)\| + \|f(x)\|) .\varepsilon \\ &\leq (\|f(x)\| + \|g(x)\| + 1) .\varepsilon \end{aligned}$$

   L'application $f \times g$ est ainsi continue en x.

2. Les applications f et g étant dérivables en x, elles admettent un développement limité en ce point.

$$f(x + h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon_1(h),$$

$$g(x + h) = g(x) + hg'(x) + h\varepsilon_2(h),$$

où ε_1 et ε_2 sont deux applications définies sur un voisinage réel de 0, à valeurs dans $\mathbb{E}$ et admettant une limite nulle en 0. Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x+h) \times g(x+h) &= [f(x) + hf'(x) + h\varepsilon_1(h)] \times [g(x) + hg'(x) + h\varepsilon_2(h)] \\ &= f(x) \times g(x) + h\left[f'(x)g(x) + f(x) \times g'(x)\right] + h\varepsilon_3(h) \end{aligned}$$

où ε_3 est définie par

$$\varepsilon_3(h) = f(x) \times \varepsilon_2(h) + hf'(x) \times g'(x) + \varepsilon_1(h) \times g(x+h).$$

Cette dernière application admet une limite nulle lorsque h tend vers 0. L'application $f \times g$ admet ainsi un développement limité d'ordre 1 en x. Elle est donc dérivable en x avec

$$(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x).$$

3. Évident, à l'aide d'une preuve par récurrence en utilisant la question précédente. Dans le cas où $f(x)$ et $f'(x)$ commutent, on obtient

$$(f^n(x))' = nf'(x)f^{n-1}(x) = nf^{n-1}(x)f'(x).$$

♣

Exercice 17.6 On considère l'application exponentielle définie par

$$\begin{array}{rccc} exp: & \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & A & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \end{array}$$

Cette application a déjà été définie dans l'exercice 15.11 page 266.

1. Montrer que l'application exponentielle est continue sur $\mathbb{E}$.
2. On considère I un intervalle réel et f une application définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{E}$. On suppose que les applications f et f' commutent. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & I & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & t & \longmapsto & \exp(f(t)) \end{array}$$

est dérivable sur I et indiquer sa dérivée.

Solution.

1. On considère R un réel strictement positif et B_R, la boule ouverte de centre 0 et de rayon R. D'après la première question de l'exercice précédent, pour tout entier naturel n, l'application
$$A \mapsto \frac{A^n}{n!}$$
est continue sur $\mathbb{E}$. D'autre part,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall A \in B_R, \quad \left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \frac{\|A\|^n}{n!} \leq \frac{R^n}{n!}.$$
La série $\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ est normalement convergente sur B_R. On en déduit, en utilisant le théorème 17.5, que l'application exponentielle est continue sur B_R puis sur $\bigcup_{R>0} B_R = \mathbb{E}$.
2. Soit $[a,b]$ un segment inclus dans I. Montrons que la restriction de l'application Ψ à $[a,b]$ est dérivable sur ce segment. Pour cela, utilisons le théorème 17.7. Pour tout entier naturel n, notons g_n, l'application définie par
$$g_n : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ t & \longmapsto & \frac{f^n(t)}{n!}. \end{array}$$
   (a) Nous savons que, pour tout réel t élément de $[a,b]$, la série
   $$\sum_{n\geq 0} g_n(t)$$
   est convergente.
   (b) Les applications f et f' commutant, nous pouvons utiliser le résultat de la seconde question de l'exercice précédent. Ainsi, pour tout entier naturel n, l'application g_n est dérivable sur $[a,b]$ avec
   $$\forall n \geq 1, \forall t \in [a,b], \quad g_n'(t) = \frac{f'(t)f^{n-1}(t)}{(n-1)!} = \frac{f^{n-1}(t)f'(t)}{(n-1)!}.$$
   L'application f étant de classe C^1, elle est, de même que sa dérivée f', bornée sur le segment $[a,b]$. On note
   $$M_0 = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\|, \quad M_1 = \sup_{t\in[a,b]} \|f'(t)\|.$$
   Ainsi,
   $$\forall n \geq 1, \forall t \in [a,b], \quad \|g_n'(t)\| \leq \frac{M_1 M_0^{n-1}}{(n-1)!}.$$
   On en déduit que la série
   $$\sum_{n\geq 1} g_n'(t)$$

est normalement convergente sur $[a,b]$. La restriction de l'application Ψ au segment $[a,b]$ est dérivable avec

$$\forall t \in [a,b], \quad \Psi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f'(t)f^{n-1}(t)}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f'(t)f^n(t)}{n!}$$
$$= f'(t) \times \exp(f(t)) = \exp(f(t)) \times f'(t).$$

On en déduit que Ψ est dérivable sur I avec

$$\forall t \in I, \quad \Psi'(t) = f'(t) \times \exp(f(t)) = \exp(f(t)) \times f'(t).$$

♣

17.7 La fonction zeta de Riemann

Exercice 17.7 Pour tout $s > 1$, on pose

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

1. Montrer que ζ est une fonction de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et exprimer sa dérivée.
2. En effectuant une comparaison série-intégrale, montrer que

$$\forall s > 1, \quad \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{s-1} \leq \zeta(s).$$

3. En déduire que $\lim_{s\to+\infty} \zeta(s) = 1$ et que $\zeta(s) \underset{1+}{\sim} \frac{1}{s-1}$.
4. Le but de cette dernière question est d'obtenir le développement asymptotique suivant lorsque s tend vers 1^+ :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1),$$

où γ désigne la constante d'Euler (voir corollaire 15.8 page 245). On définit pour cela, pour tout entier strictement positif n, l'application u_n par

$$u_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \end{array}$$

(a) Montrer que

$$\forall s > 0, \forall n \geq 1, \quad 0 \leq u_n(s) \leq \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s}.$$

(b) Soit A un réel strictement positif. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est uniformément convergente sur l'intervalle $[A,+\infty[$.

(c) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(d) Vérifier que

$$\forall s > 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}.$$

(e) Conclure.

Solution.

1. Nous savons que la fonction ζ est définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ par

$$\forall n \geq 1, \forall s \in]1, +\infty[, \quad f_n(s) = \frac{1}{n^s}.$$

Pour tout entier n strictement positif, l'application f_n est dérivable sur $]1, +\infty[$ avec,

$$\forall s \in]1, +\infty[, \quad f_n'(s) = \frac{-\ln n}{n^s}.$$

Soit a un réel strictement positif.

$$\forall n \geq 1, \forall s \in]1 + 2a, +\infty[, \quad |f_n'(s)| \leq \frac{\ln n}{n^{1+2a}}.$$

Or,

$$\frac{\ln n}{n^{1+2a}} = o(\frac{1}{n^{1+a}}).$$

Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1} f_n'$ est normalement convergente sur l'intervalle$]1 + 2a, +\infty[$. De plus, pour tout entier strictement positif n, l'application f_n' est continue sur cet intervalle. On en déduit que l'application ζ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur

$$]1, +\infty[= \cup_{a>0}]1 + 2a, +\infty[$$

avec

$$\forall s \in]1, +\infty[, \quad \zeta'(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^s}.$$

2. Soient s un réel strictement positif et k un entier strictement positif. L'application $s \mapsto \frac{1}{n^s}$ étant décroissante sur le segment $[k, k+1]$, on a

$$\frac{1}{(k+1)^s} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{k^s}. \tag{17.12}$$

Pour tout réel s strictement supérieur à 1, les séries de termes général $\frac{1}{k^s}$ et $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s}$ étant convergentes, nous avons à la limite,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^s} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s},$$

c'est-à-dire

$$\forall s > 1, \quad \zeta(s) - 1 \le \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \le \zeta(s).$$

Un calcul évident nous donne,

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{s-1}.$$

3. En utilisant l'inégalité de gauche et en remarquant que pour tout réel s strictement supérieur à 1, $\zeta(s)$ est la somme d'une série à termes positifs de premier terme égal à 1, on obtient

$$\forall s > 1, \quad 1 \le \zeta(s) \le 1 + \frac{1}{s-1}.$$

D'où,

$$\lim_{s \to +\infty} \zeta(s) = 1.$$

En utilisant l'inégalité obtenue dans la question précédente :

$$\forall s > 1, \quad \frac{1}{s-1} \le \zeta(s) \le \frac{1}{s-1} + 1.$$

D'où,

$$\forall s > 1, \quad 1 \le (s-1)\zeta(s) \le s.$$

On en déduit que

$$\zeta(s) \underset{1+}{\sim} \frac{1}{s-1}.$$

4. (a) Évident d'après les inégalités établies en (17.12).

   (b) Montrons que la suite des sommes partielles vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $[A, +\infty[$. Soient n et p deux entiers strictement positifs vérifiant $n < p$.

$$\forall s \ge A, \quad |S_p(s) - S_n(s)| = \sum_{k=n+1}^{p} u_k(s) \le \sum_{k=n+1}^{p} \left(\frac{1}{k^s} - \frac{1}{(k+1)^s} \right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{(p+1)^s} \le \frac{1}{(n+1)^s} \le \frac{1}{(n+1)^A}.$$

   Soit ε un réel strictement positif. Soit n_0 un entier vérifiant

$$\frac{1}{(n_0+1)^A} \le \varepsilon.$$

   Alors,

$$\forall n \ge n_0, \forall p \ge n_0, \forall s \in [A, +\infty[, \quad |S_p(s) - S_n(s)| \le \varepsilon.$$

   La suite des sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $[A, +\infty[$. Il en est de même de la série $\sum_{n \ge 1} u_n$.

(c) Soit A un réel strictement positif. Montrons que pour tout entier strictement positif, l'application u_n est continue sur l'intervalle $[A, +\infty[$.
Pour tout entier n strictement positif, l'application $s \mapsto \frac{1}{n^s}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
L'application f définie par

$$f: \begin{array}{ccc} [A,+\infty[\times[n,n+1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (s,t) & \longmapsto & \frac{1}{t^s} \end{array}$$

est continue sur $[A,+\infty[\times[n,n+1]$. De plus,

$$\forall (s,t) \in [A,+\infty[\times[n,n+1], \quad 0 \leq g(s,t) \leq \frac{1}{t^A}.$$

Cette dernière application est continue donc intégrable sur le segment $[n, n+1]$. On en déduit, d'après le théorème 23.14, page 477 que l'application F, définie par

$$F: \begin{array}{ccc} [A,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ s & \longmapsto & \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \end{array}$$

est continue sur $[A, +\infty[$.
Ainsi, pour tout entier strictement positif n, l'application u_n est continue sur l'intervalle $[A, +\infty[$. La série $\sum_{n\geq 1} u_n(s)$ étant uniformément convergente sur $[A, +\infty[$, elle est continue sur cet intervalle. On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ est continue sur

$$\bigcup_{A>0}]A, +\infty[= \mathbb{R}^{+*}.$$

(d) Si s est un réel strictement supérieur à 1, les séries de terme général $\frac{1}{n^s}$ et $\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s}$ sont convergentes respectivement vers $\zeta(s)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{s-1}$.
Ainsi,

$$\forall s > 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}.$$

(e) On a $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = \gamma$. L'application $\sum_{n\geq 1} u_n$ est continue en 1. Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) + o(1) = \gamma + o(1).$$

En remplaçant, on obtient le développement asymptotique en 1^+ :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1).$$

Chapitre 18

Séries entières

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ représente soit le corps des nombres réels soit le corps des nombres complexes.

18.1 Séries entières, rayon et domaine de convergence

Définition : On appelle série entière de variable réelle (resp. complexe), toute série de fonctions de la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n,$$

où x est une variable réelle (resp. complexe) et (a_n) est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition-définition 18.1 *Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On note E, l'ensemble défini par*

$$E = \{r \geq 0/(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \textit{soit une suite bornée}\}. \tag{18.13}$$

Cet ensemble est non vide et minoré par 0. L'élément de $[0, +\infty]$

$$R = \sup E$$

est appelé rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$.

Proposition 18.2 *On considère $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de variable réelle ou complexe de rayon de convergence R. Soit x un élément de $\mathbb{K}$.*

1. *Si $|x| < R$ alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est absolument convergente,*
2. *si $|x| > R$ alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est divergente.*

Preuve.

1. Soit x un élément de $\mathbb{K}$ vérifiant $|x| < R$. Il existe alors un réel r strictement positif appartenant à E, vérifiant,
$$|x| < r \leq R.$$
On note M un majorant de la suite $(|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n x^n| = |a_n r^n|.\left|\frac{x}{r}\right|^n \leq M\left|\frac{x}{r}\right|^n.$$
La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est absolument convergente.
2. Soit x un élément de $\mathbb{K}$ vérifiant $|x| > R$. Alors le réel $|x|$ n'appartient pas à E. La suite $(a_n|x|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant non bornée, la suite $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers 0. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est divergente.

♣

Proposition 18.3 *Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ une série entière de variable réelle ou complexe.*

1. *Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors*
$$R \geq 1.$$
2. *Si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors*
$$R \leq 1.$$

Preuve.

1. Le réel 1 appartient à E, l'ensemble défini en (18.13), page 303. Il est donc inférieur ou égal à R, sa borne supérieure.
2. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n 1^n$ est divergente donc non absolument convergente. D'après la proposition précédente, $1 \geq R$.

♣

Exercice 18.1 Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ si pour tout entier naturel n,

1. a_n est la $n^{ième}$ décimale du nombre e.
2. a_n est le cardinal de l'ensemble des nombres premiers positifs inférieurs ou égaux à n.
3. $a_n = \cos n$.

Solution.

1. Pour tout entier naturel n, a_n est un entier compris entre 1 et 9. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Ainsi, $R \geq 1$. D'autre part, le réel e étant non décimal, pour tout naturel n_0, il existe un entier $n \geq n_0$ vérifiant $a_n \geq 1$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers 0. D'où $R \leq 1$. En conclusion $R = 1$.

2. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'étant pas bornée, la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ est divergente. Ainsi, $R \leq 1$. Remarquons que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq a_n \leq n.$$
Donc,
$$\forall r \in [0,1[, \quad \lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0.$$
On en déduit que
$$[0,1[\subset E.$$
Ainsi $R \geq 1$. En conclusion $R = 1$.

3. La suite $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Elle est divergente d'après l'exercice 7.7, page 81 ou l'exercice 7.8, page 82. Nous obtenons $R = 1$.

♣

18.2 Règles de calcul du rayon de convergence

Proposition 18.4 *On considère $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe et α un réel strictement positif. Alors les séries entières*
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n, \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} n^\alpha a_n x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_n}{n^\alpha} x^n$$
ont le même rayon de convergence.

Preuve. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On considère E l'ensemble défini en (18.13), page 303 et E' l'ensemble défini par
$$E' = \{r \geq 0/(n^\alpha a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{soit une suite bornée}\}.$$
On note $R = \sup E$ et $R' = \sup E'$.
Il est évident que l'ensemble E' est inclus dans E. Ainsi, R est un majorant de E'. On obtient
$$R' \leq R.$$

1. Si $R = 0$, alors $R' = R = 0$.

2. Supposons $0 < R < +\infty$.
Soit ε un réel strictement positif et inférieur à R. Choisissons un élément r de E vérifiant
$$R - \frac{\varepsilon}{2} < r \leq R.$$

La suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée. Nous avons

$$r - \frac{\varepsilon}{2} > R - \varepsilon > 0.$$

La suite $(n^\alpha a_n (r - \frac{\varepsilon}{2})^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n^\alpha a_n (r - \frac{\varepsilon}{2})^n = (a_n r^n).n^\alpha \left(\frac{r - \frac{\varepsilon}{2}}{r}\right)^n$$

est convergente vers 0. Le réel $(r - \frac{\varepsilon}{2})$ est élément de E'. Ainsi,

$$\forall \varepsilon \in]0, R[, \quad \exists r' \in E' / \quad r' > R - \varepsilon.$$

Le réel R est le plus petit majorant de E'. D'après la proposition 1.2, page 1, on obtient

$$R = R'.$$

3. $R = +\infty$.
Soit A un réel positif. Choisissons un élément r de E vérifiant $r \geq A + 1$. Alors, la suite $(n^\alpha a_n (r-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0. L'élément $(r-1)$ supérieur à A appartient à E'. On en déduit que E' est non majoré. Ainsi, $R' = +\infty$.
Pour terminer, en remarquant que

$$\forall n > 0, \quad a_n = n^\alpha . \left(\frac{a_n}{n^\alpha}\right),$$

on déduit que les trois rayons de convergence sont égaux.

♣

Proposition 18.5 *(Règle de D'Alembert) On considère $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière réelle ou complexe. Si*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lambda$$

avec $\lambda \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est

$$R = \frac{1}{\lambda}$$

(en convenant $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Preuve. Soit r un réel strictement positif. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1} r^{n+1}}{a_n r^n}\right| = \lambda r.$$

D'après la règle de D'Alembert (proposition 15.9, page 245), si $r < \frac{1}{\lambda}$ alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ est absolument convergente. Si $r > \frac{1}{\lambda}$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ n'est pas absolument convergente. On en déduit, à l'aide de la proposition 18.2, que $R = \frac{1}{\lambda}$.
♣

Proposition 18.6 *(Règle de Cauchy) On considère $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière réelle ou complexe. Si*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$$

avec $\lambda \in [0, +\infty]$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est

$$R = \frac{1}{\lambda}$$

(en convenant $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Preuve. Soit r un réel positif. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n r^n|} = \lambda r.$$

D'après la règle de Cauchy (proposition 15.10, page 246), si $r < \frac{1}{\lambda}$ alors la série $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ est absolument convergente. Si $r > \frac{1}{\lambda}$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$ n'est pas absolument convergente. On en déduit, à l'aide de la proposition 18.2 que $R = \frac{1}{\lambda}$.
♣

18.3 Dérivation d'une série entière

Proposition 18.7 *Une série entière de variable réelle converge normalement sur tout segment de la forme $[-a, a]$ où a est un réel strictement positif et strictement inférieur à R, son rayon de convergence.*

Preuve. On considère $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et a un réel strictement positif et strictement inférieur à R. Soit r un réel élément de E vérifiant $a < r \leq R$. Alors,

$$\forall x \in [-a, a], \forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n x^n| \leq |a_n| a^n.$$

La série numérique de terme général $(|a_n| a^n)$ est convergente. En effet, notons M un réel positif vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| r^n \leq M.$$

Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |a_n| a^n \leq |a_n| r^n \left(\frac{a}{r}\right)^n \leq M \left(\frac{a}{r}\right)^n.$$

On en déduit que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur le segment $[-a, a]$. ♣

Théorème 18.8 *On considère la série entière de variable réelle*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

de rayon de convergence R strictement positif. Alors f est dérivable sur l'intervalle $]-R, R[$. De plus, on a,

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Cette série a pour rayon de convergence R.

Preuve. D'après la proposition 18.4, le rayon de convergence de la série

$$\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$$

est égal à R. Considérons a un réel positif et strictement inférieur à R. Considérons, pour tout entier n, l'application f_n définie par

$$f_n : \begin{array}{ccc}]-R; R[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & a_n x^n \end{array}$$

Alors,

1. La série $\sum_{n \geq 0} f_n(0)$ est convergente.
2. La série $\sum_{n \geq 0} f_n'$ est normalement convergente sur le segment $[-a, a]$.

On déduit du théorème 17.7, page 290 que la restriction de l'application f au segment $[-a; a]$ est dérivable et

$$\forall x \in]-a; a[, \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Donc f est dérivable sur

$$\cup_{0<a<R}]-a; a[=]-R; R[$$

avec

$$\forall x \in]-R; R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

D'où le résultat. ♣

Corollaire 18.9 *On considère la série entière de variable réelle*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

de rayon de convergence R strictement positif. Alors f est de classe C^∞ sur l'intervalle $]-R, R[$. On a pour tout entier strictement positif k,

$$\forall x \in]-R, R[, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$$

Ces séries ont pour rayon de convergence R.

Preuve. Il suffit d'effectuer une récurrence évidente en utilisant le théorème précédent. ♣

Proposition 18.10 *On considère une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et un nombre complexe z_0. On suppose que la série*

$$\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n$$

est convergente. Alors la série entière de variable t, $\sum_{n\geq 0} a_n z_0^n t^n$ converge uniformément sur le segment $[0,1]$ et la somme est continue sur ce segment.

Preuve. On note, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k z_0^k$. Pour tout réel $t \in [0,1]$ et tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant, $1 \leq p < q$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=p}^{q} a_k z_0^k t^k &= \textstyle\sum_{k=p}^{q}(R_{k-1} - R_k)t^k = \sum_{k=p}^{q} R_{k-1}t^k - \sum_{k=p}^{q} R_k t^k \\
&= \textstyle\sum_{k=p-1}^{q-1} R_k t^{k+1} - \sum_{k=p}^{q} R_k t^k \\
&= t^p R_{p-1} - t^q R_q + \textstyle\sum_{k=p}^{q-1}(t^{k+1} - t^k)R_k.
\end{aligned}$$

Soit ε un réel strictement positif. Considérons un entier strictement positif n_0 vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad |R_n| \leq \varepsilon.$$

Pour tous entiers p et q strictement supérieurs à n_0 vérifiant $p < q$, on a

$$\begin{aligned}
\forall t \in [0;1], \quad \left|\textstyle\sum_{k=p}^{q} a_k z_0^k t^k\right| &\leq |t^p R_{p-1}| + |t^q R_q| + \left|\textstyle\sum_{k=p}^{q-1}(t^{k+1} - t^k)R_k\right|. \\
&\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \textstyle\sum_{k=p}^{q-1}(t^k - t^{k+1}) \\
&\leq 3\varepsilon.
\end{aligned}$$

La série $\sum a_n z_0^n t^n$ est uniformément de Cauchy sur le segment $[0;1]$ donc uniformément convergente sur le même segment. Pour la continuité, il suffit d'appliquer le théorème 17.5, page 290. ♣

Corollaire 18.11 *Soient (a_n) et (b_n) deux suites complexes. On pose $c_n = \sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que les séries de termes généraux a_n, b_n et c_n convergent. Alors*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\right).$$

Preuve. Les rayons de convergence des trois séries entières

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n, \quad \sum_{n\geq 0} b_n x^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} c_n x^n$$

sont supérieurs ou égaux à 1. Ainsi, pour tout réel $x \in [0;1[$, les séries $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ convergent absolument. D'après le théorème 15.19, page 253,

$$\forall x \in [0;1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n . \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n.$$

D'après la proposition précédente, les sommes de chacune des séries entières sont continues sur le segment $[0;1]$. Donc,

$$\forall x \in [0;1], \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n . \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n.$$

On obtient, pour $x = 1$, le résultat désiré. ♣

Exercice 18.2 Donner l'ensemble de définition et expliciter les fonction f_k pour k compris entre 1 et 5 :

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad f_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n \qquad f_3(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$f_4(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} \qquad f_5(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Solution. En utilisant le critère de D'Alembert, on remarque que les cinq premiers rayons de convergence sont égaux à 1, et le dernier à $(+\infty)$.

1. L'ensemble de définition de f_1 est l'intervalle $]-1;1[$. La série est géométrique de raison x.

$$\forall x \in]-1;1[, \quad f_1(x) = \frac{1}{1-x}.$$

2. L'ensemble de définition de f_2 est l'intervalle $]-1;1[$. D'après le théorème 18.8, f_1 est dérivable sur l'intervalle $]-1;1[$ avec
$$\forall x \in]-1;1[, \quad f_1'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$
Donc,
$$\forall x \in]-1;1[, \quad x f_1'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n} = f_2(x).$$
Ainsi,
$$\forall x \in]-1;1[, \quad f_2(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$
3. L'ensemble de définition de f_3 est l'intervalle $[-1;1[$.
$$\forall x \in]-1;1[, \quad f_3'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$
$f_3(0) = 0$ permet d'écrire
$$\forall x \in]-1;1[, \quad f_3(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln(1-x).$$
D'après la proposition 18.10, l'application f_3 est continue sur le segment $[-1;0]$. Ainsi,
$$\forall x \in [-1;1[, \quad f_3(x) = -\ln(1-x).$$
On remarque ainsi que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$
4. L'ensemble de définition de f_4 est l'intervalle $[-1;1]$.
$$\forall x \in]-1;1[, \quad f_4'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = f_3(x).$$
Or, $f_4(0) = 0$. Ainsi,
$$\forall x \in]-1;1[, \quad f_4(x) = \int_0^x -\ln(1-t)dt = (1-x)\ln(1-x) + x.$$
D'après la proposition 18.10, l'application f_4 est continue sur le segment $[-1;1]$. Ainsi,
$$\forall x \in [-1;1[, \quad f_4(x) = (1-x)\ln(1-x) + x,$$
avec $f_4(1) = 1$.

5. L'application f_5 est définie sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_5'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = f_5(x).$$

Nous avons $f_5(0) = 1$. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_5(x) = \exp x.$$

Ce résultat est cohérent avec la définition de l'exponentielle définie dans une algèbre de Banach dans le chapitre 19.

♣

18.4 Opérations de séries entières

18.4.1 Somme de séries entières

Définition : On appelle série entière somme de deux séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$, la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

Proposition 18.12 *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a, R_b et R_{a+b} le rayon de la série somme. Alors,*

1. $R_{a+b} \geq \min\{R_a, R_b\}$,

2. $R_{a+b} = \min\{R_a, R_b\}$ si $R_a \neq R_b$,

Preuve.

1. Pour tout nombre complexe z vérifiant $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, la série

$$\sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$$

est absolument convergente. Ainsi,

$$R_{a+b} \geq \min\{R_a, R_b\}.$$

2. Supposons $R_a \neq R_b$. Alors pour tout réel r vérifiant $\min\{R_a, R_b\} < r < \max\{R_a, R_b\}$, la série $\sum_{n\geq 0}(a_n + b_n) z^n$ est divergente comme somme d'une série convergente et d'une série divergente. Ainsi, $R_{a+b} \leq \min\{R_a, R_b\}$. On en déduit que $R_{a+b} = \min\{R_a, R_b\}$.

18.4.2 Produit de Cauchy de séries entières

Définition : On appelle produit de Cauchy des deux séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$, la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n x^n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Proposition 18.13 *Soient $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons respectifs R_a, R_b et R_c le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$, produit de Cauchy des deux séries entières. Alors,*

1. $R_c \geq \min\{R_a; R_b\}$
2. $\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| < \min\{R_a, R_b\} \Rightarrow$
$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$

Preuve. Considérons z un nombre complexe vérifiant $|z| < \min\{R_a, R_b\}$. Alors les séries numériques

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} b_n z^n$$

sont absolument convergentes. Le produit de Cauchy de ces deux séries numériques est la série $\sum_{n\geq 0} C_n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (a_k b_{n-k}) z^n = c_n z^n.$$

Nous obtenons le résultat désiré en appliquant le théorème 15.19, page 253. ♣

18.5 Fonctions développables en série entière

Définition : On dit qu'une fonction f est développable en série entière, au voisinage de 0, s'il existe un réel strictement positif α et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Proposition 18.14 *Si une fonction f est développable en série entière sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$, alors f est C^∞ sur cet intervalle, le développement est unique et*

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Preuve. Soit f une application développable en série entière. Considérons α un réel strictement positif et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

D'après le corollaire 18.9, l'application f est de classe C^∞ sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$. D'autre part, d'après ce même corollaire

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^{(k)}(0) = k! a_k.$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

♣

Remarque 18.1 *Soit g l'application définie par $g(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. On montre que l'application g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout entier positif k, $g^{(k)}(0) = 0$. Or pour tout réel x non nul, $g(x)$ est un réel strictement positif. On en déduit que g n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.*

Proposition 18.15 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de 0. Une fonction f définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ de classe C^∞ est développable en série entière sur un voisinage de 0 si et seulement si il existe un réel strictement positif α tel que la suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, \quad R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

est simplement convergente vers l'application nulle sur $]-\alpha, \alpha[$.

Preuve. Supposons qu'il existe un réel strictement positif α tel que la suite de fonctions (R_n) soit convergente vers l'application nulle sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$. Alors la série entière $\sum_{n\geq 0\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est convergente sur cet intervalle avec

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

L'application f est donc développable en série entière.
Supposons réciproquement que l'application f soit développable en série entière. Il existe un réel strictement positif α tel que la série entière $\sum_{n\geq 0\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ soit convergente vers f sur l'intervalle $]-\alpha;\alpha[$. La suite de fonctions $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers l'application nulle sur l'intervalle $]-\alpha;\alpha[$. ♣

Proposition 18.16 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant un voisinage de 0. On considère une application f définie sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ de classe C^∞ et R_n l'application définie dans la proposition précédente. Alors,*

$$\forall x \in I, \quad |R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}(x)|x^{n+1}|}{(n+1)!},$$

où pour tout entier naturel n et tout élément x de I, $M_{n+1}(x)$ est un majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur le segment $[0,x]$ si x est positif et $[x,0]$ si x est négatif.

Preuve. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange théorème 8.20 page 114 sur le segment $[0;|x|]$ à l'application f si le réel x est positif et à l'application $g : x \mapsto f(-x)$ si le réel x est négatif. ♣

18.6 Développement en série entière

18.6.1 D.s.e. des fonctions usuelles

Proposition 18.17 *1.*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

2.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

3.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

4.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

5.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

7. En particulier, lorsque α prend les valeurs $-1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$

(a)
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$$

(b)
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1.3\cdots(2n-3)}{2.4\cdots(2n)}x^n$$

(c)
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1.3\cdots(2n-1)}{2.4\cdots(2n)}x^n$$

8.
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

9.
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Remarque 18.2 *1. Le développement en série entière de l'application arct gente converge pour $x = 1$. Ainsi, en utilisant la proposition 18.10, n obtenons,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

2. L'application Arctangente est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, mais n'est développ en série entière que sur l'intervalle $]-1;1]$.

Preuve.

1.
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp^{(n)}(t) = \exp t.$$

D'après la proposition 18.16,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad |R_n(x)| \leq \frac{\exp(x^+).|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

où $x^+ = \max(x;0)$. Pour tout réel x, la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0. L'application exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec pour coefficients,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{\exp^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{n!}.$$

Nous remarquons que ce résultat est cohérent avec la définition de l'exponentielle définie dans une algèbre de Banach dans le chapitre 19.

2. Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

D'après la proposition 18.16,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour tout réel x, la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0. L'application cosinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec pour coefficients,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{\cos^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}.$$

c'est-à-dire, pour tout entier naturel p,

$$\begin{cases} a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p)!}, \\ a_{2p+1} = 0. \end{cases}$$

3. Nous avons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

D'après la proposition 18.16,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \quad |R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour tout réel x, la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0. L'application sinus est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec pour coefficients,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n!}.$$

c'est-à-dire, pour tout entier naturel p,

$$\begin{cases} a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}, \\ a_{2p} = 0. \end{cases}$$

4. Nous avons,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$
Il suffit d'utiliser le développement en série entière de l'application exponentielle.
5. Même remarque que précédemment avec
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
6. On considère pour tout réel α, l'application f_α définie sur $]-1;1[$ par
$$\forall x \in]-1;1[, \quad f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha.$$
L'application f_α est dérivable sur $]-1;1[$ avec
$$\forall x \in]-1;1[, \quad f'_\alpha(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}.$$
Ainsi f_α est l'unique solution sur l'intervalle $]-1;1[$ de l'équation différentielle et de la condition initiale suivante
$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ (1+x)y' - \alpha y = 0 \end{cases} \tag{18.14}$$
Existe-t-il une série entière solution de ce système ? Considérons une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1,
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$
L'application S est solution du système si et seulement si $a_0 = 1$ et
$$\forall x \in]-1;1[, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n = 0,$$
c'est-à-dire,
$$\forall x \in]-1;1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha a_n x^n = 0.$$
S est solution du système si et seulement si
$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = \alpha \\ \forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = \left(\frac{\alpha - n}{n+1}\right) a_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \geq 1, \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \end{cases}$$
La série entière
$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$
admet, d'après le critère de D'Alembert, pour rayon de convergence 1. Elle est donc l'unique solution du système différentiel (18.14) sur l'intervalle $]-1;1[$.

7.
$$\forall x \in]-1;1[, \quad \ln(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n dt.$$

Cette série entière est normalement convergente sur le segment $[0;x]$ si $x \in [0;1[$ ou sur le segment $[x;0]$ si $x \in]-1;0[$. Nous pouvons donc intervertir somme et intégrale.

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Utilisons les mêmes arguments pour l'application suivante :

8.
$$\forall x \in]-1;1[, \quad \arctan x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n} dt$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

♣

Exercice 18.3 On considère l'application f définie sur l'intervalle $]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[$ par

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ \forall x \in]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[\backslash\{0\}, \quad f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}. \end{cases}$$

Montrer que l'application f est développable en série entière sur l'intervalle $]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[$ et donner son développement.

Solution. En utilisant le d.s.e. de l'application $y \mapsto \sqrt{1+y}$ sur $]-1;1[$, nous obtenons

$$\forall x \in]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[, \quad \sqrt{1-4x} = 1 - 2x - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1.3\cdots(2n-3)}{2.4\cdots(2n)} 4^n x^n$$

$$= 1 - 2x - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1.3\cdots(2n-3)}{n!} 2^n x^n$$

$$= 1 - 2x - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2n.(2n-2)!}{n!^2} x^n = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n.(2n-2)!}{n!^2} x^n.$$

Ainsi,

$$\forall x \in]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[,\quad 1-\sqrt{1-4x}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n.(2n-2)!}{n!^2}x^n.$$

Et,

$$\forall x \in]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[\backslash\{0\},\quad f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n-2)!}{n.(n-1)!^2}x^{n-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n+1).n!^2}x^n.$$

Nous remarquons que l'égalité est vérifiée pour $x=0$. Ainsi,

$$\forall x \in]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[,\quad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{C_{2n}^n}{n+1}x^n.$$

♣

18.6.2 D.s.e. des fractions rationnelles

Exercice 18.4 Soit a un complexe non nul.

1. Montrer que la fonction de variable réelle f définie par

$$f(x)=\frac{1}{a-x}$$

est développable en série entière sur l'intervalle $]-|a|,|a|[$.

2. Soit p un entier strictement positif. Montrer que la fonction f_p définie par :

$$f_p(x)=\frac{1}{(a-x)^p}$$

est développable en série entière sur l'intervalle $]-|a|,|a|[$ avec

$$\forall x \in]-|a|,|a|[,\quad f_p(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}C_{n+p-1}^{p-1}\left(\frac{1}{a}\right)^{n+p}x^n.$$

On pourra pour cela calculer les dérivées successives de la fonction f.

Solution.

1.
$$\forall x \in]-|a|;|a|[,\quad f(x)=\frac{1}{a}.\frac{1}{1-\frac{x}{a}}=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{a^{n+1}}x^n.$$

2. l'application f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-|a|;|a|[$ et à l'aide d'une récurrence simple, on montre que pour tout entier naturel p, on a

$$\forall x \in]-|a|;|a|[,\quad f^{(p)}(x)=\frac{p!}{(a-x)^{p+1}}=p!f_{p+1}(x).$$

Ainsi, pour tout entier p strictement positif

$$\forall x \in]-|a|;|a|[, \quad f_p(x) = \frac{f^{(p-1)}(x)}{(p-1)!}.$$

On obtient, d'après le corollaire 18.9,

$$\forall x \in]-|a|;|a|[, \quad f_p(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!} \left(\frac{1}{a}\right)^{n+p} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} C_{n+p-1}^{p-1} \left(\frac{1}{a}\right)^{n+p} x^n.$$

♣

Proposition 18.18 *Toute fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$ dont 0 n'est pas un pôle est développable en série entière.*

Preuve. Soit f une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$ dont 0 n'est pas un pôle. Il suffit de décomposer f en éléments simples et d'utiliser le résultat de l'exercice précédent.

♣

Exercice 18.5 Soit α un réel strictement compris entre 0 et π et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}.$$

1. Montrer que f est développable en série entière sur l'intervalle $]-1;1[$ et donner son développement.
2. Calculer pour $|x| < 1$ et $k \in \mathbb{N}^*$ la valeur de :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\alpha \sin k\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} d\alpha.$$

Solution.

1. L'application f est une fraction rationnelle ayant deux pôles $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$. Ces deux pôles étant de module 1, f est développable en série entière sur l'intervalle $]-1;1[$. La décomposition en éléments simples de f nous donne,

$$\forall x \in]-1;1[, \quad f(x) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{e^{-i\alpha} - x} - \frac{1}{e^{i\alpha} - x}\right).$$

En utilisant les résultats de l'exercice 18.4, nous obtenons

$$\forall x \in]-1;1[, \quad f(x) = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{i(n+1)\alpha} - e^{-i(n+1)\alpha}\right)\right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left((n+1)\alpha\right).x^n.$$

2. On considère pour cette question un réel x vérifiant $|x| < 1$ et un entier k strictement positif. D'après la question précédente,

$$\forall \alpha \in [0;\pi], \qquad \frac{\sin\alpha \sin k\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n+1)\alpha.\sin k\alpha.x^n.$$

Remarquons que cette série est normalement convergente par rapport à la variable α sur $\mathbb{R}$. En effet,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \qquad |\sin(n+1)\alpha.\sin k\alpha.x^n| \leq |x|^n$$

et la série $\sum_{n\geq 0} |x|^n$ est convergente. Nous pouvons utiliser le théorème 17.6, page 290 :

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\alpha \sin k\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} d\alpha = \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(n+1)\alpha.\sin k\alpha.x^n d\alpha$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \left(\int_0^{\pi} \sin(n+1)\alpha.\sin k\alpha.d\alpha\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2} \left(\int_0^{\pi} \cos\left(n+1-k\right)\alpha d\alpha - \int_0^{\pi} \cos\left(n+1+k\right)\alpha d\alpha\right).$$

Chacune de ces intégrales est nulle sauf pour $n = k - 1$. Ainsi,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\alpha \sin k\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} d\alpha = \frac{\pi}{2} x^{k-1}.$$

♣

18.6.3 D.s.e. à l'aide d'équations différentielles

Exercice 18.6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

1. Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
2. En déduire le développement en série entière de f. Préciser le rayon de convergence.

Solution.

1. L'application f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt + 1 = 2xf(x) + 1.$$

Ainsi, f est l'unique solution sur tout intervalle $]-\alpha, \alpha[$ où α appartient à $]0, +\infty]$ du système différentiel

$$\begin{cases} y' - 2xy = 1 \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{18.15}$$

2. On considère S une application développable en série entière sur un intervalle de la forme $]-\alpha, \alpha[$ où α appartient à $]0, +\infty]$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'unique suite vérifiant

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Nous avons

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \quad S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n.$$

Ainsi,

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha[, \quad S'(x) - 2xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n.$$

L'application S est solution du sytème différentiel (18.15) si et seulement si

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 1, \\ \forall n \geq 1, \quad (n+1)a_{n+1} = 2a_{n-1}. \end{cases}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{cases} \forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = 0, \\ \forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p+1} = \frac{4^p p!}{(2p+1)!} \end{cases}$$

En utilisant le critère de D'Alembert pour les séries numériques, on vérifie que pour tout réel x non nul, la série

$$\sum_{p\geq 0} \frac{4^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

est convergente. On en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{p\geq 0} \frac{4^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}$ est égal à $+\infty$ et que celle-ci est l'unique solution sur $\mathbb{R}$ du système différentiel (18.15). On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{p\geq 0} \frac{4^p p!}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

♣

18.7 Applications

18.7.1 Application à la combinatoire

De nombreux problèmes de combinatoire peuvent se résoudre assez simplement à l'aide des séries entières. En voici deux exemples.

Exercice 18.7 Soit n un entier strictement positif. On appelle dérangement du groupe symétrique S_n tout élément σ de S_n vérifiant

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}, \quad \sigma(k) \neq k.$$

On désigne par d_n le nombre de dérangements de S_n. On pose par convention $d_0 = 1$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k d_k = n!$$

2. On considère la série entière f définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n.$$

Montrer que R, le rayon de convergence de cette série entière, est supérieur ou égal à 1.

3. Donner le développement en série entière de la fonction $e^x f(x)$ sur l'intervalle $]-1;1[$. En déduire que

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

4. En déduire que

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Solution.

1. Pour $n = 0$, le résultat est évident. Soit n un entier strictement positif. Pour tout entier k compris entre 0 et n, on note I_k le nombre de permutations de $\{1, \cdots, n\}$ ayant exactement k éléments non invariants. Pour construire une telle permutation, il faut choisir les k éléments non invariants. Nous avons C_n^k possibilités. Il faut ensuite construire un dérangement restreint à ces k éléments. Nous avons d_k possibilités. Ainsi,
$$\forall k \in \{0, \cdots, n\}, \quad I_k = C_n^k.d_k.$$
Le nombre de permutations de $\{1, \cdots, n\}$ étant égal à $n!$, nous obtenons,
$$n! = \sum_{k=0}^{n} I_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.d_k.$$

2. Pour tout entier n strictement positif, le nombre de dérangements de S_n est inférieur au cardinal de celui-ci. Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \frac{d_n}{n!} \leq 1.$$
La suite $\left(\frac{d_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

3. Nous savons que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$
Les séries $\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$ et $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Pour tout entier naturel n, notons c_n le coefficient d'ordre n du produit de Cauchy des deux séries entières. Ainsi,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!}.\frac{1}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k d_k = 1.$$
Ainsi, en utilisant la proposition 18.13,
$$\forall x \in]-1;1[, \quad e^x f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_n x^n = \sum_{k=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$
D'où
$$\forall x \in]-1;1[, \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}.$$

4. En réutilisant la proposition 18.13, nous obtenons
$$\forall x \in]-1;1[, \quad f(x) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) x^n.$$

L'unicité du développement en série entière, nous permet d'écrire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

D'où le résultat.

♣

Exercice 18.8 Pour tout entier strictement positif n, on considère A_n, l'ensemble des suites $(u_k)_{0\leq k\leq 2n}$ définies sur $\{0, 1, \cdots, 2n\}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant

$$\begin{cases} u_0 = u_{2n} = 0, \\ \forall k \in \{0, \cdots, 2n-1\}, \quad |u_k - u_{k+1}| = 1. \end{cases}$$

Le but de cet exercice est de calculer le cardinal de A_n que l'on notera a_n. Par convention, on posera $a_0 = 1$.
On note A_n^+, l'ensemble des éléments de A_n ne s'annulant seulement qu'en 0 et $2n$, c'est-à-dire vérifiant en outre

$$\forall k \in \{1, \cdots, 2n-1\}, \quad u_k \geq 1.$$

On note a_n^+ le cardinal de A_n^+.

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On définit l'application Ψ qui, à tout élément $(u_k)_{0\leq k\leq 2n}$ de A_n^+, associe la suite $(v_k)_{0\leq k\leq 2n-2}$ définie par

$$\forall k \in \{0, \cdots, 2n-2\}, \quad v_k = u_{k+1} - 1.$$

   (a) Vérifier que Ψ est à valeurs dans A_{n-1}

   (b) Montrer que Ψ réalise une bijection de A_n^+ sur A_{n-1} et que $a_n^+ = a_{n-1}$.

2. Montrer que

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = \sum_{p=0}^{n-1} a_p a_{(n-1-p)}.$$

3. On considère la série entière

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

   Montrer que son rayon de convergence est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$. On définit alors, sur l'intervalle $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, l'application f par

$$\forall x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[, \quad f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

4. Montrer que l'application f vérifie, sur l'intervalle $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$, l'équation fonctionnelle suivante

$$xy^2 - y + 1 = 0.$$

5. Montrer que

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ \forall x \in]-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}[\setminus\{0\}, \quad f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}. \end{cases}$$

6. Donner la valeur de a_n pour tout entier n strictement positif.

Solution.

1. (a) Soit $(u_k)_{0\leq k\leq 2n}$ un élément de A_n^+ et $(v_k)_{0\leq k\leq 2n-2}$ son image par l'application Ψ. Cette suite est à valeurs entières et vérifie

$$\forall k \in \{0, \cdots, 2n-2\}, \quad v_k = u_{k+1} - 1 \geq 1 - 1 \geq 0.$$

la suite $(v_k)_{0\leq k\leq 2n-2}$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
La suite $(u_k)_{0\leq k\leq 2n}$ étant un élément de A_n, nous avons nécéssairement

$$u_1 = u_{2n-1} = 1.$$

Ainsi,

$$v_0 = v_{2n-2} = 0.$$

Enfin,

$$\forall k \in \{0, \cdots, 2n-3\}, \quad |v_k - v_{k+1}| = |u_{k+1} - u_{k+2}| = 1.$$

La suite $(v_k)_{0\leq k\leq 2n-2}$ est un élément de A_{n-1}.

(b) Soit $(v_k)_{0\leq k\leq 2n-2}$ un élément de A_{n-1}. Il est facile de vérifier que l'unique élément de A_n^+ ayant pour image $(v_k)_{0\leq k\leq 2n-2}$ par l'application Ψ est la suite $(u_k)_{0\leq k\leq 2n}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_{2n} = 0, \\ \forall k \in \{1, \cdots, (2n-1)\}, \quad u_k = v_{k-1} + 1. \end{cases}$$

L'application Ψ est ainsi bijective et $a_n^+ = a_{n-1}$.

2. Pour tout entier p compris entre 1 et n, on note T_p, l'ensemble des éléments de A_n retombant en 0 pour la première fois en $(2p)$, c'est-à-dire vérifiant

$$\begin{cases} u_{2p} = 0, \\ \forall k \in \{1, \cdots, (2p-1)\}, \quad u_k \geq 1. \end{cases}$$

Le cardinal de T_p est égal à

$$a_p^+ a_{n-p} = a_{p-1} a_{n-p}.$$

Les ensembles T_p pour p variant de 1 à n réalisent une partition de A_n. Ainsi

$$a_n = \sum_{p=1}^{n} a_{p-1} a_{n-p} = \sum_{p=0}^{n-1} a_p a_{(n-1-p)}.$$

3. Soit n un entier strictement positif. Un élément $(u_k)_{0\leq k\leq 2n}$ de A_n est caractérisé par la suite $(u_{k+1}-u_k)_{0\leq k\leq 2n-1}$. Une telle suite est à valeurs dans $\{-1;1\}$. L'ensemble A_n admet donc au plus 2^{2n} éléments. On en déduit que
$$\forall n\geq 1,\quad 0\leq a_n\leq 4^n$$
et que le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

4. $$\begin{aligned}\forall x\in]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[,\quad f(x) &= 1+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n-1} a_p a_{(n-1-p)}\right)x^n\\ &= 1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n} a_p a_{n-p}\right)x^{n+1}\\ &= 1+x\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{n} a_p a_{n-p}\right)x^{n}.\end{aligned}$$
En utilisant la proposition 18.13 sur le produit de Cauchy pour les séries entières, nous avons
$$\forall x\in]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[,\quad f^2(x)=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}a_pa_{n-p}\right)x^n.$$
Ainsi,
$$\forall x\in]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[,\quad f(x)=1+xf^2(x).$$
D'où le résultat.

5. Soit x un réel non nul de valeur absolue strictement inférieure à $\frac{1}{4}$. Le réel $f(x)$ est une solution de l'équation du second degré en y :
$$xy^2-y+1=0.$$
Ainsi,
$$f(x)\in\{\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x};\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}\}.$$
Sachant que
$$\begin{cases}\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=1,\\ \lim_{x\to 0}\left|\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}\right|=+\infty,\end{cases}$$
Il existe un réel $\alpha\in]0;\frac{1}{4}[$, vérifiant
$$\forall x\in]-\alpha;\alpha[\backslash\{0\},\quad \begin{cases}|f(x)|\leq 2,\\ \left|\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}\right|\geq 3.\end{cases}$$

On en déduit que

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ \forall x \in]-\alpha;\alpha[\setminus\{0\}, \quad f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}. \end{cases}$$

En utilisant les résultats de l'exercice 18.3, page 319, nous remarquons que ces deux applications sont développables en série entière sur l'intervalle $]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[$ et égales sur l'intervalle $]-\alpha;\alpha[$. Elles sont donc égales sur l'intervalle $]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[$. Ainsi,

$$\begin{cases} f(0) = 1, \\ \forall x \in]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[\setminus\{0\}, \quad f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}. \end{cases}$$

$$\forall x \in]-\frac{1}{4};\frac{1}{4}[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{n+1} x^n.$$

6. En utilisant l'unicité du développement en série entière et le résultat de l'exercice 18.3, nous obtenons,

$$\forall n \geq 1, \quad a_n = \frac{C_{2n}^n}{n+1}.$$

♣

18.7.2 Divergence des suites trigonométriques

Exercice 18.9 On considère k un entier strictement positif, des nombres complexes $a_1, a_2, \cdots, a_k$ et des nombres réels $\theta_1, \theta_1, \cdots, \theta_k$ tels que

$$0 = \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_k < 2\pi.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$c_n = \sum_{p=1}^{k} a_p e^{in\theta_p}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si

$$a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

On remarque que, dans ce cas, elle est constante et égale à a_1.

1. Montrer que, pour $|z| < 1$, la série

$$\sum_{n\geq 0} c_n z^n$$

est convergente et calculer sa somme que l'on notera $f(z)$.

2. On suppose, dans cette question, que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

(a) On considère un réel θ. Montrer que

$$\lim_{r\to 1^-}(1-r)f(re^{i\theta})=0.$$

(b) En déduire que

$$\forall p\in\{1,\cdots k\},\quad a_p=0.$$

On peut utiliser le résultat précédent en choisissant pour tout p compris entre 1 et k, $\theta=-\theta_p$.

3. Conclure.

Solution.

1. Soit p un entier compris entre 1 et k. La série de terme général $(e^{in\theta_p}z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $(e^{i\theta_p}z)$. Elle est donc convergente si $|z|<1$, avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty}e^{in\theta_p}z^n=\frac{1}{1-e^{i\theta_p}z}.$$

On en déduit que si $|z|<1$, la série $\sum c_nz^n$ est convergente avec

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_nz^n=\sum_{p=1}^{k}\frac{a_p}{1-e^{i\theta_p}z}.$$

2. (a) Soit ε un réel strictement positif. Choisissons un entier naturel strictement positif n_ε vérifiant,

$$\forall n\geq n_\varepsilon,\quad |c_n|\leq\varepsilon.$$

Pour r appartenant à l'intervalle $]0,1[$,

$$|f(re^{i\theta})|\leq\left|\sum_{n=0}^{n_\varepsilon-1}c_nr^ne^{in\theta}\right|+\varepsilon\sum_{n=n_\varepsilon}^{+\infty}r^n\leq\left|\sum_{n=0}^{n_\varepsilon-1}c_nr^ne^{in\theta}\right|+\frac{\varepsilon}{1-r}$$

et

$$(1-r)|f(re^{i\theta})|\leq(1-r)\left|\sum_{n=0}^{n_\varepsilon-1}c_nr^ne^{in\theta}\right|+\varepsilon.$$

Puisque

$$\lim_{r\to 1^-}(1-r)\left|\sum_{n=0}^{n_\varepsilon-1}c_nr^ne^{in\theta}\right|=0,$$

il existe un réel $r_0\in]0;1[$ vérifiant

$$r_0<r<1\Rightarrow(1-r)\left|\sum_{n=0}^{n_\varepsilon-1}c_nr^ne^{in\theta}\right|\leq\varepsilon.$$

Donc,

$$r_0<r<1\Rightarrow(1-r)\left|f(re^{ei\theta})\right|\leq 2\varepsilon.$$

On en déduit que

$$\lim_{r\to 1^-}(1-r)(f(re^{ei\theta}))=0.$$

(b) Soit p_0 un entier compris entre 1 et k.

$$\forall r \in]0,1[, \quad (1-r)f(re^{-i\theta_{p_0}}) = a_{p_0} + (1-r)\sum_{\substack{p=1\\ p\neq p_0}}^{k} \frac{a_p}{1-re^{i(\theta_p-\theta_{p_0})}}.$$

Ainsi,

$$\lim_{r\to 1^-}(1-r)f(re^{-i\theta_{p_0}}) = a_{p_0}.$$

On en déduit que

$$a_{p_0} = 0.$$

3. Supposons que la suite $(c_n)_{\in\mathbb{N}}$ soit convergente vers un nombre complexe l. Alors, la suite $(c'_n)_{\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c'_n = c_n - l = (a_1 - l) + \sum_{p=2}^{k} a_p e^{in\theta_p}$$

est convergente vers 0. D'où,

$$a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

et $a_1 = l$. La suite $(c_n)_{\in\mathbb{N}}$ est donc constante et égale à l.

♣

18.7.3 Équations différentielles et séries entières

La résolution des équations différentielles linéaires est un problème délicat. Trouver les solutions d'une équation différentielle développables en série entière permet souvent d'éclaircir la situation.

Exercice 18.10 Trouvez les applications développables en série entière, solutions de l'équation différentielle :

$$xy'' + (x-2)y' - 2y = 0.$$

Solution. On considère une application y développable en série entière sur un intervalle $]-R,R[$ avec $0 < R \leq +\infty$. Il existe une unique suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall x \in]-R,R[, \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

De plus,

$$\forall x \in]-R,R[, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

et

$$\forall x \in]-R,R[, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Ainsi,

$$\forall x \in]-R,R[, \quad xy''(x)+(x-2)y'(x)-2y(x)$$
$$=\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1}+\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n-\sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^{n-1}-\sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1} x^n+\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n-\sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1} x^n-\sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n.$$

Le développement en série entière d'une application étant unique, y est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$\begin{cases} a_1+a_0=0, \\ \forall n\geq 1, \quad (n-2).\left[(n+1)a_{n+1}+a_n\right]=0. \end{cases}$$

C'est-à-dire si et seulement si,

$$\begin{cases} a_1+a_0=0, \\ 2a_2+a_1=0, \\ \forall n\geq 3, \quad a_{n+1}=-\frac{1}{(n+1)}a_n. \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} a_1=-a_0, \\ a_2=\frac{a_0}{2}, \\ \forall n\geq 3, \quad a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n!}6a_3. \end{cases}$$

Le rayon de convergence d'une série entière de terme général $\frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ est égal à $+\infty$. Ainsi les solutions de l'équation différentielle développables en série entière sont les applications y vérifiant

$$\forall x\in\mathbb{R}, \quad y(x)=a_0(1-x+\frac{x^2}{2})-6a_3\left(\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right)$$

C'est-à-dire

$$\forall x\in\mathbb{R}, \quad y(x)=(a_0+6a_3)(1-x+\frac{x^2}{2})-6a_3e^{-x}$$

où a_0 et a_3 sont deux réels. La famille $((1;0),(6;-6))$ formant une base de $\mathbb{R}^2$, les solutions de l'équation différentielle développables en séries entières sont les applications de la forme

$$\forall x\in\mathbb{R}, \quad y(x)=\alpha(1-x+\frac{x^2}{2})+\beta e^{-x}$$

où α et β sont deux réels. ♣

Chapitre 19

Exponentielle dans une algèbre de Banach

19.1 Définition

Dans cette section, on considère $(\mathbb{E}, +, \times, .)$ une algèbre de Banach unitaire de norme notée $\|.\|$ et d'unité notée I. Nous avons vu, dans l'exercice 15.11, page 266, que pour tout élément A de $\mathbb{E}$, la série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$$

est convergente.

Définition : On appelle exponentielle et on note exp, l'application définie sur $\mathbb{E}$ par

$$\begin{array}{rccc} \exp : & \mathbb{E} & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ & A & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}. \end{array}$$

Proposition 19.1 *1.* $\exp(0) = I$.

2. Pour tout couple (A, B) *d'éléments de* $\mathbb{E}$ *commutant, on a*

$$\exp(A + B) = \exp(A) \times \exp(B).$$

3. Pour tout élément A *de* $\mathbb{E}$*,* $\exp(A)$ *est un élément inversible de* $\mathbb{E}$ *et*

$$(\exp(A))^{-1} = \exp(-A).$$

4. l'application exponentielle est continue sur $\mathbb{E}$.

Preuve. Voir les exercices 15.11, page 266 et 17.6, page 297. ♣

Proposition 19.2 *Soit f une application de classe C^1 définie sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{E}$. On suppose que les applications f et sa dérivée f' commutent. Alors, l'application Ψ définie par*

$$\Psi : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{E} \\ t & \longmapsto & \exp(f(t)) \end{array}$$

est dérivable sur I avec,

$$\forall t \in I, \quad \Psi'(t) = f'(t) \times \exp(f(t)) = \exp(f(t)) \times f'(t).$$

Preuve. Voir l'exercice 17.6, page 297. ♣

19.2 L'exponentielle réelle

$(\mathbb{R}, +, \times, .)$ étant une algèbre de Banach, on peut définir dans $\mathbb{R}$, l'application exponentielle que l'on appellera application exponentielle réelle et que l'on notera exp.

19.2.1 Propriétés

Proposition 19.3 *1.* $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp(t) > 0.$

2. L'application exponentielle réelle

(a) est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp'(t) = \exp(t).$$

(b) réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(c) réalise un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$

Preuve.

1. L'application exponentielle réelle étant continue sur $\mathbb{R}$, $\exp(\mathbb{R})$ est un intervalle réel contenant $\exp(0) = 1$ et ne contenant pas 0. Ainsi, $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{+*}$. D'où, le résultat.
2. (a) Conséquence immédiate de la proposition 19.2

   (b) La dérivée étant strictement positive, l'exponentielle réelle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur son ensemble image. Or,

$$\forall t \geq 0, \quad \exp(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \geq t.$$

Ainsi,

$$\lim_{t\to+\infty} \exp(t) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to-\infty} \exp(t) = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{\exp(-t)} = 0.$$

L'ensemble image est donc $\mathbb{R}^{+*}$.

(c) Évident d'après la propriété précédente et la propriété 2 de la proposition 19.1.

♣

Définition : On pose

$$e = \exp 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.$$

Proposition 19.4

$$\forall r \in \mathbb{Q}, \quad \exp(r) = e^r.$$

Notation : Pour tout nombre réel x, on pourra remplacer l'écriture $\exp(x)$ par e^x.

Preuve. Soit x un nombre réel. On montre par une récurrence évidente, en utilisant le 3 de la proposition 19.1, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(nx) = \exp^n(x).$$

Et,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(-nx) = \frac{1}{\exp^n(x)} = \exp^{-n}(x).$$

Soit r un nombre rationnel. Écrivons r sous la forme $\frac{p}{q}$ où p et q sont deux entiers, q étant non nul. Alors

$$e^p = \exp(p) = \exp(q.r) = \exp^q(r).$$

Les nombres e^p et $\exp^q(r)$ étant des nombres réels strictement positifs, on obtient

$$\exp(r) = (e^p)^{\frac{1}{q}} = e^r.$$

♣

19.2.2 Application réciproque de l'exponentielle réelle

Définition : L'application exponentielle réelle réalise (proposition 19.3) une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. L'application réciproque est appelée logarithme népérien et notée ln.

Théorème 19.5 *On a les propriétés suivantes :*

1.

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

2.

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \quad \ln(x.y) = \ln(x) + \ln(y).$$

Preuve.

1. L'application exponentielle réelle est dérivable sur $\mathbb{R}$. L'application dérivée ne s'annulant pas, l'application logaritme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad ln'(x) = \frac{1}{exp'(lnx)} = \frac{1}{exp(lnx)} = \frac{1}{x}.$$

   Nous avons $\exp(0) = 1$, donc $\ln 1 = 0$. Pour conclure, il suffit d'indiquer que l'application $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. La fonction exponentielle est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$. Donc son application réciproque, la fonction logarithme népérien, est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$.

♣

Définition : On définit pour tout réel t strictement positif et tout réel α, le réel t^α par

$$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}.$$

Remarque 19.1 *Cette définition est cohérente avec la définition d'une puissance rationnelle.*

Proposition 19.6 *Pour tout réel strictement positif t fixé, l'application qui, au réel α, associe t^α est un homomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$.*

Preuve. Évident d'après la définition. ♣

Proposition 19.7 *Pour tout réel α strictement positif, on a*

1.
$$\lim_{t \to +\infty} t^{-\alpha} e^{t} = +\infty,$$

2.
$$\lim_{t \to +\infty} t^{\alpha} e^{-t} = 0.$$

Preuve.

1. Nous avons,
$$\forall t \geq 0, \quad t^{-\alpha} e^{t} = t^{-\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \geq t^{-\alpha} \frac{t^{\mathrm{Ent}(\alpha)+2}}{(\mathrm{Ent}(\alpha)+2)!} \geq \frac{t}{(\mathrm{Ent}(\alpha)+2)!}$$
D'où le résultat.
2. Il suffit de passer à l'inverse.

♣

19.3 L'exponentielle complexe

$(\mathbb{C}, +, \times, .)$, étant une algèbre de Banach, on peut définir dans $\mathbb{C}$ l'application exponentielle que l'on appelera application exponentielle complexe. Cette application est un prolongement de l'exponentielle réelle. Pour tout nombre complexe z, $\exp z$ pourra être notée e^z (voir proposition 19.4). Outre les propriétés des propositions 19.1 et 19.2, nous avons les propriétés suivantes :

Proposition 19.8
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(\overline{z}) = \overline{\exp(z)}.$$

Preuve. On a
$$\exp(\overline{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{\overline{z}^n}{n!} \right) = \lim_{N \to +\infty} \overline{\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \right)}$$
$$= \overline{\lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \right)} = \overline{\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right)} = \overline{\exp(z)}.$$
Le passage de la première ligne à la deuxième s'effectue en indiquant que l'application qui, à un nombre complexe, associe son conjugué est *continue* sur $\mathbb{C}$.

♣

Corollaire 19.9
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |\exp z| = \exp\left(\Re(z)\right).$$

Preuve.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |\exp z|^2 = \exp z.\overline{\exp z} = \exp z.\exp(\overline{z}) = \exp(z + \overline{z})$$
$$= \exp(2\Re(z)) = \exp^2(\Re(z)).$$

Nous obtenons le résultat en indiquant que les nombres réels $|\exp z|$ et $\exp(\Re(z))$ sont positifs. ♣

Corollaire 19.10

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |\exp z| = 1 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}.$$

Preuve.
$$|\exp z| = 1 \Leftrightarrow \exp(\Re(z)) = 1 \Leftrightarrow \Re(z) = 0 \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}.$$

♣

Proposition 19.11 *L'application exponentielle complexe réalise un homomorphisme de groupe surjectif de* $(\mathbb{C}, +)$ *sur* $(\mathbb{C}^*, \times)$.

Preuve. D'après la proposition 19.1, l'exponentielle complexe réalise un homomorphisme de $(\mathbb{C}, +)$ vers $(\mathbb{C}^*, \times)$. Montrons qu'il est surjectif.
Dans un premier temps, considérons z un nombre complexe n'appartenant pas à $\mathbb{R}^-$. On note f et L les applications définies sur le segment $[0,1]$ par

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & t & \longmapsto & t + (1-t)z, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} L: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \int_0^t \frac{f'(x)}{f(x)} dx. \end{array}$$

D'après la proposition 19.2, l'application $\exp(-L)$ est dérivable sur le segment $[0,1]$, de dérivée $-L' \exp(-L) = -\frac{f'}{f} \exp(-L)$. Ainsi, l'application $f \exp(-L)$ est dérivable sur le segment $[0,1]$ avec

$$\forall t \in [0,1], \quad [f \exp(-L)]'(t) = f'(t).\exp(-L(t)) - f(t)\frac{f'(t)}{f(t)} \exp(-L(t)) = 0.$$

L'application $f.\exp(-L)$ est constante sur le segment $[0,1]$. Nous obtenons,

$$z = f(0).\exp(-L(0)) = f(1).\exp(-L(1)) = \exp(-L(1)).$$

Ainsi, le nombre complexe z appartient à l'image de l'application exponentielle complexe.

On considère désormais z un nombre réel strictement négatif. Il existe un nombre complexe z_0 vérifiant

$$\exp z_0 = i\sqrt{-z}.$$

Alors

$$\exp(2z_0) = i^2 \left(\sqrt{-z}\right)^2 = -(-z) = z.$$

Ce qui termine la preuve. ♣

19.4 Le nombre π

Proposition-définition 19.12 *L'ensemble des nombres complexes de module 1 est un sous-groupe du groupe multiplicatif $(C^*, \times)$ que l'on notera $\mathbb{U}$.*

Preuve. Évident. ♣

Proposition 19.13 *On considère φ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ & t & \longmapsto & \exp it \end{array}$$

1. φ est un homomorphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(U, \times)$,

2. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée

$$\begin{array}{rccc} \varphi' : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ & t & \longmapsto & i \exp it \end{array}$$

3. Il existe un unique réel strictement positif, noté π, vérifiant

$$\{t \in \mathbb{R} / \exp it = 1\} = 2\pi\mathbb{Z}.$$

4. L'application φ est 2π-périodique.

Preuve.

1. Évident d'après la proposition 19.11 et le corollaire 19.10.
2. découle de la proposition 19.2.
3. (a) L'application φ étant un homomorphisme de groupe continu, l'ensemble $\varphi^{-1}(\{1\})$ est un sous-groupe fermé de $(\mathbb{R}, +)$.

   (b) L'application φ étant non constante, $\varphi^{-1}(\{1\})$ n'est pas égal à $\mathbb{R}$. On déduit de (a) et (b) que $\varphi^{-1}(\{1\})$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ de la forme $a\mathbb{Z}$ (voir exercice 7.5, page 79).

(c) $\varphi^{-1}(\{1\})$ n'est pas égal à $\{0\}$. En effet, l'application φ étant sujective, nous pouvons considérer un nombre réel non nul t_0 vérifiant

$$\varphi(t_0) = -1.$$

Nous obtenons

$$\varphi(2t_0) = \exp(2it_0) = \exp^2(it_0) = (-1)^2 = 1.$$

Le réel non nul $(2t_0)$ appartient donc à $\varphi^{-1}(\{1\})$.

On en déduit qu'il existe un unique réel strictement positif que l'on note π vérifiant $\varphi^{-1}(\{1\}) = 2\pi\mathbb{Z}$.

4.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exp i(t + 2\pi) = \exp(it).\exp(2i\pi) = \exp it$$

♣

19.5 Les fonctions cosinus et sinus

19.5.1 Définition et propriétés

Définition : On définit les applications cosinus et sinus notées respectivement cos et sin par

$$\cos : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \Re(\exp(it)) \end{array} \quad \text{et} \quad \sin : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \Im(\exp(it)) \end{array}$$

Proposition 19.14 *On a*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos t = \frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2},$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin t = \frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2i}.$$

Preuve.

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos t = \frac{\exp(it) + \overline{\exp(it)}}{2} = \frac{\exp(it) + \exp\left(\overline{it}\right)}{2} = \frac{\exp(it) + \exp(-it)}{2}.$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin t = \frac{\exp(it) - \overline{\exp(it)}}{2i} = \frac{\exp(it) - \exp\left(\overline{it}\right)}{2i} = \frac{\exp(it) - \exp(-it)}{2i}.$$

♣

Proposition 19.15 *Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *et*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos' t = -\sin t, \quad \sin' t = \cos t.$$

Preuve. D'après la proposition 19.13, l'application $t \mapsto \varphi(t) = \exp(it)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = i \exp it = i(\cos t + i \sin t) = -\sin t + i \cos t.$$

Ainsi les applications cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et leur dérivée vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos' t = \Re(i \exp(it) = -\sin t, \quad \text{et} \quad \sin' t = \Im(i \exp(it) = \cos t$$

♣

Proposition 19.16 *Les applications cosinus et sinus sont 2π-périodiques.*

Preuve. Les applications cosinus et sinus sont respectivement les parties réelle et imaginaire d'une application 2π périodique. D'où le résultat. ♣

Corollaire 19.17 *L'application cosinus est paire et l'application sinus est impaire.*

Preuve. Évident d'après la proposition 19.14 ♣

Proposition 19.18 *On a,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Preuve.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos^2 x + \sin^2 x = |\exp ix|^2 = 1.$$

Pour le reste, les calculs sont évidents à partir de la proposition 19.14. ♣

Remarque 19.2 *À partir de ces formules, on déduit toutes les formules trigonométriques usuelles.*

Corollaire 19.19 *Les applications cosinus et sinus sont développables en série entière sur* $\mathbb{R}$*, avec,*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Preuve. L'application $\varphi : t \mapsto \exp it$ étant développable en série entière sur $\mathbb{R}$, les applications cosinus et sinus le sont aussi, avec :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i^n + (-i)^n)t^n}{2.n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((-1)^n + (-1)^n)t^{2n}}{2.(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i^n - (-i)^n)t^n}{2i.n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i(-1)^n + i(-1)^n)t^{2n+1}}{2i.(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

♣

19.5.2 Étude des fonctions cosinus et sinus

L'application cosinus étant paire et 2π-périodique et l'application sinus étant impaire et 2π-périodique, on peut restreindre l'étude de ces deux applications au segment $[0, \pi]$. Au préalable, établissons les deux propriétés suivantes :

Proposition 19.20

$$\forall t \in]0, \pi[, \quad \sin t > 0.$$

Preuve.

$$\sin t = 0 \Leftrightarrow \Im(\exp(it)) = 0 \Leftrightarrow \exp(it) = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \exp^2(it) = 1 \Leftrightarrow \exp(2it) = 1 \Leftrightarrow t \in \pi\mathbb{Z}.$$

Ainsi,

$$\sin 0 = \sin \pi = 0$$

et

$$\forall t \in]0, \pi[, \quad \sin t \neq 0.$$

L'application sinus étant continue, elle garde un signe constant sur l'intervalle $]0, \pi[$. Or,

$$\sin'(0) = \cos 0 = 1.$$

On en déduit qu'il existe un réel α strictement positif vérifiant

$$\forall t \in]0, \alpha[, \quad \sin t > 0.$$

Ainsi,

$$\forall t \in]0, \pi[, \quad \sin t > 0.$$

Proposition 19.21

$$\cos 0 = 1, \qquad \sin 0 = 0,$$
$$\cos\frac{\pi}{2} = 0, \qquad \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$
$$\cos\pi = -1, \qquad \sin\pi = 0.$$

Preuve. Les applications cosinus et sinus sont respectivement les parties réelle et imaginaire de l'applications $t \mapsto \exp it$, il suffit d'établir que

1. $\exp 0 = 1$,
2. $\exp i\pi = -1$,
3. $\exp i\frac{\pi}{2} = i$.

Nous avons

1. $\exp 0 = 1$ d'après la proposition 19.1,
2. $$\exp^2(i\pi) = \exp(2i\pi) = 1.$$
   Puisque $\pi \notin 2\pi\mathbb{Z}$, nous obtenons $\exp(i\pi) = -1$.
3. $$\exp^2(i\frac{\pi}{2}) = \exp(i\pi) = -1.$$
   Ainsi, $\exp(i\frac{\pi}{2}) = \pm i$. D'après la proposition 19.20, nous avons $\Im\left(\exp(i\frac{\pi}{2})\right) = \sin\frac{\pi}{2} > 0$. D'où, $\exp i\frac{\pi}{2} = i$.

♣

Proposition 19.22 *1. La restriction de l'application cosinus au segment $[0,\pi]$ réalise une bijection décroissante de ce segment sur le segment $[-1,1]$.*

2. (a) La restriction de l'application sinus au segment $[0,\frac{\pi}{2}]$ réalise une bijection croissante de ce segment sur le segment $[0,1]$.

(b) La restriction de l'application sinus au segment $[\frac{\pi}{2},\pi]$ réalise une bijection décroissante de ce segment sur le segment $[0,1]$.

Preuve.

1. Nous avons,
   $$\forall t \in]0,\pi[, \quad \cos'(t) = -\sin t < 0.$$
   La restriction de l'application cosinus au segment $[0,\pi]$ réalise ainsi une bijection décroissante de ce segment sur le segment $[\cos\pi, \cos 0] = [-1,1]$.
2. Ayant $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, nous obtenons,
   $$\forall t \in]0,\frac{\pi}{2}[, \quad sin't = \cos t > 0,$$
   $$\forall t \in]\frac{\pi}{2},\pi[, \quad sin't = \cos t < 0.$$
   Ainsi,

(a) La restriction de l'application sinus au segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ réalise une bijection croissante de ce segment sur le segment $[\sin 0, \sin \frac{\pi}{2}] = [0, 1]$

(b) La restriction de l'application sinus au segment $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ réalise une bijection décroissante de ce segment sur le segment $[\sin \pi, \sin \frac{\pi}{2}] = [0, 1]$.

♣

19.6 L'exponentielle de matrice

19.6.1 Introduction

Soient n un entier strictement positif et $\mathbb{K}$ représentant le corps des réels ou celui des complexes. On considère $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Nous savons que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$ muni de la norme $\|.\|_{\mathcal{M}_n}$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \|A\|_{\mathcal{M}_n} = \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|A.x\|}{\|x\|}$$

est une algèbre de Banach. On pourra voir le corollaire 12.10, page 171. L'exponentielle d'une matrice carrée d'ordre n est ainsi définie. Elle vérifie toutes les propriétés indiquées dans les propositions 19.1 et 19.2.

19.6.2 Calcul d'une exponentielle de matrice

Dans cette section, nous proposons quelques exercices simples permettant de s'initier au calcul pratique de l'exponentielle de matrice.

Exercice 19.1 Soit a, b et c trois éléments de $\mathbb{K}$ et D la matrice suivante de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$:

$$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Calculer $\exp(D)$.

Solution. Nous avons,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{c^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

A la limite, nous obtenons,

$$\exp(D) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}.$$

♣

Exercice 19.2 Soit α un élément de $\mathbb{K}$ et T la matrice suivante de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$:

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Calculer $\exp(T)$.

Solution. On peut décomposer T sous la forme $T = D + N$ où

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les deux matrices D et N commutent, Ainsi,

$$\exp(T) = \exp(D + N) = \exp(D). \exp(N).$$

D'après l'exercice précédent

$$\exp(D) = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & e^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & e^\alpha \end{pmatrix}.$$

La matrice N est nilpotente. En effet,

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\forall k \geq 3, \quad N^k = O.$$

Donc

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{N^k}{k!} = I + N + \frac{N^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\exp(T) = \exp(D). \exp(N) = \begin{pmatrix} e^\alpha & e^\alpha & \frac{e^\alpha}{2} \\ 0 & e^\alpha & e^\alpha \\ 0 & 0 & e^\alpha \end{pmatrix}.$$

Exercice 19.3 Soient n un entier strictement positif, T et P deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, P étant inversible. Montrer que

$$\exp(P.T.P^{-1}) = P.\exp(T).P^{-1}.$$

Solution. On vérifie à l'aide d'une simple récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (P.T.P^{-1})^k = P.T.^k P^{-1}.$$

Donc,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{(P.T.P^{-1})^k}{k!} = P.\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{k!}\right).P^{-1}.$$

D'une part, par définition de l'exponentielle, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(P.T.P^{-1})^k}{k!} = \exp(P.T.P^{-1}).$$

D'autre part, l'application Ψ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & M & \longmapsto & P.M.P^{-1} \end{array}$$

est linéaire. Elle est continue puisque $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension finie. En utilisant cette continuité, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} P.\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{k!}\right).P^{-1} = P.\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{T^k}{k!}\right).P^{-1} = P.\exp(T).P^{-1}.$$

D'où le résultat. ♣

19.6.3 Équation différentielle linéaire du premier ordre

Exercice 19.4 Soit n un entier strictement positif. On considère A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, t_0 un réel et u_0 un vecteur de $\mathbb{K}^n$. Dans l'espace vectoriel des applications définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}^n$, résoudre les équations différentielles suivantes

1. $$Y' = A.Y \tag{19.16}$$

   (On pourra effectuer le changememt de variable $Y = \exp(tA).Z$.)

2. $$\left\{\begin{array}{l} Y' = AY, \\ Y(t_0) = u_0. \end{array}\right. \tag{19.17}$$

Solution.

1. On effectue le changement de variable

$$Y = \exp(tA).Z.$$

D'après la proposition 8.7, page 99 et la proposition 19.2,

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) &= (\exp(tA))'.Z(t) + \exp(tA).Z'(t)\\ &= A\exp(tA).Z(t) + \exp(tA).Z'(t).\end{aligned}$$

L'application Y est solution de (19.16) si et seulement si

$$\begin{aligned}A\exp(tA).Z(t) + \exp(tA).Z'(t) &= A\exp(tA).Z(t)\\ \Leftrightarrow \exp(tA).Z'(t) &= 0.\end{aligned}$$

Pour tout réel t, $\exp(tA)$ est une matrice inversible, ainsi Y est solution de (19.16) si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Z'(t) = 0,$$

c'est-à-dire si et seulement si Z est une application constante. Les solutions de l'équation différentielle (19.16) sont les applications de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = \exp(tA).u,$$

où u est un vecteur de $\mathbb{K}^n$.

2. Une application Y est solution de (19.17) si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = \exp(tA).u$$

avec

$$u_0 = \exp(t_0A).u,$$

c'est-à-dire

$$u = \exp(-t_0A).u_0.$$

Ainsi, l'équation différentielle (19.17) admet comme unique solution l'application

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = \exp((t - t_0)A).u_0.$$

♣

Chapitre 20

Espaces préhilbertiens

Les définitions du produit scalaire, d'un espace préhilbertien, de la norme euclidienne et de la norme hermitienne ont déjà été indiqués dans la section 1.4, page 7. Nous les rappelons ici dans le cadre des espaces préhilbertiens. Dans ce chapitre, E représente un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

20.1 Définition d'un espace préhilbertien

20.1.1 Définitions

Attention ! Pour définir le produit scalaire, nous devons différencier les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition : Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E, toute application

$$< .,. > \quad : E \times E \to \mathbb{R}$$

étant,

1. symétrique *i. e.* $\forall (x,y) \in E^2, \quad < y,x >=< x,y >$
2. linéaire à droite *i. e.* $\forall (x,y_1,y_2) \in E^3, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \quad < x, \lambda y_1 + \mu y_2 >= \lambda < x,y_1 > + \mu < x,y_2 >$
3. positive *i. e.* $\forall x \in E, \quad < x,x > \in \mathbb{R}^+$
4. définie *i. e.* $\forall x \in E, \quad < x,x >= 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$

Remarque 20.1 *Les propriétés 1 et 2 permettent de dire que le produit scalaire réel est linéaire à gauche donc bilinéaire.*

Définition : Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E, toute application

$$< .,. > \quad : E \times E \to \mathbb{C}$$

étant,

1. à symétrie hermitienne *i. e.* $\forall (x,y) \in E^2, \quad < y,x >= \overline{< x,y >}$
2. linéaire à droite *i. e.* $\forall (x,y_1,y_2) \in E^3, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2 \quad < x, \lambda y_1 + \mu y_2 >= \lambda < x, y_1 > + \mu < x, y_2 >$
3. positive *i. e.* $\forall x \in E, \quad < x,x > \in \mathbb{R}^+$
4. définie *i. e.* $\forall x \in E, \quad < x,x >= 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$

Définition : Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien.

20.2 Exemples

Voici quelques exemples d'espaces préhilbertiens en plus des exemples indiqués à la section 1.4.2, page 8.

1. Sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques, l'application
$$(f,g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx$$
définit un produit scalaire sur $\mathcal{F}$.
2. Soit $I = [a,b]$ un segment, et ω une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs réelles strictement positives, alors l'application :
$$(f,g) \mapsto \int_a^b f(x)\, g(x)\, \omega(x)\, dx$$
définit un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
3. L'ensemble $l^2(\mathbb{R})$ des suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty,$$
est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. L'application définie sur $l^2(\mathbb{R}) \times l^2(\mathbb{R})$ par
$$((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.v_n,$$
est un produit scalaire sur $l^2(\mathbb{R})$.
4. L'espace préhilbertien $\mathcal{D}$, au menu du chapitre 21 sur les séries de Fourier.

Preuve.

1. Voir l'exercice 12.1, page 165.
2. Il est évident que cette application est une forme bilinéaire positive. Montrons qu'elle est définie. On considère une application f continue sur le segment $[a, b]$ à valeurs réelles vérifiant

$$\int_a^b f^2(x)\omega(x)dx = 0.$$

L'application $f^2\omega$ étant continue et à valeurs réelles positives, on en déduit qu'elle est nulle sur le segment $[a, b]$. La stricte positivité de l'application ω permet de conclure.

3. Voir la proposition 15.20, page 255 et sa preuve.
4. Réponse au prochain numéro. Soyez patient !

♣

20.3 Propriétés

Les propositions suivantes ont déjà été indiqués dans la section 1.4, page 7. Nous les rappelons ici. Vous pouvez retrouver les preuves dans la section citée.

Proposition 20.1 *Soit E un espace préhilbertien. L'application définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ par*

$$x \longrightarrow \sqrt{< x, x >},$$

est une norme appelée norme euclidienne. On note $\sqrt{< x, x >} = \|x\|$.

Proposition 20.2 *Inégalité de Cauchy-Schwarz.*
Soit E un espace préhilbertien. Alors

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad | < x, y > | \leq \|x\|.\|y\|$$

Proposition 20.3 *Soit E un espace préhilbertien. On a,*

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Cette égalité est appelée identité du parallèlogramme. Elle est caractéristique des normes euclidiennes.

20.4 Orthogonalité

Définition : Deux vecteurs x et y appartenant à un espace préhilbertien E sont orthogonaux si $< x, y >= 0$.

Définition : Soit A une partie non vide d'un espace préhilbertien E. On appelle orthogonal de A noté $A^\perp$, la partie de E définie par

$$A^\perp = \{x \in E / \forall a \in A, < a, x >= 0\}.$$

Proposition 20.4 *Pour toute partie A non vide de E, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$.*

Preuve. Évident. ♣

Proposition 20.5 *Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace préhilbertien, on a*

$$F \subset F^{\perp\perp}.$$

Preuve.

$$F^\perp = \{y \in E / \forall x \in F, \quad < x, y >= 0\}.$$

Soit x un élément de F. Alors,

$$\forall y \in F^\perp, < x, y >= 0.$$

Ainsi, x est un élément de $F^{\perp\perp}$ et $F \subset F^{\perp\perp}$. ♣

Théorème 20.6 (Pythagore) *Dans un espace préhilbertien, si deux vecteurs x et y sont orthogonaux alors :*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 .$$

Attention ! La réciproque est vraie seulement dans un espace préhilbertien *réel.*

Théorème 20.7 (Réciproque Pythagore) *Dans un espace préhilbertien* réel*, si deux vecteurs x et y vérifient :*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 ,$$

alors ils sont orthogonaux.

Preuves. En utilisant les propriétés du produit scalaire sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on obtient :

1. Si E est $\mathbb{R}$-espace vectoriel,

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 < x, y > .$$

2. Si E est $\mathbb{C}$-espace vectoriel,

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re(< x, y >) .$$

D'où les résultats.

♣

Définition : On appelle famille orthogonale d'un espace préhilbertien E toute famille $(e_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E vérifiant

$$\forall (i,j) \in I^2, \quad i \neq j \Rightarrow < e_i, e_j >= 0.$$

Si, de plus,

$$\forall i \in I, \quad \|e_i\| = 1,$$

on dit alors que cette famille est orthonormée ou orthonormale.

Un petit rappel d'algèbre linéaire.

Définition : On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ est libre si, pour toute partie J non vide et finie de I et pour toute famille de scalaires $(\lambda_j)_{j\in J}$ indicée par J, on a

$$\sum_{j\in J} \lambda_j e_j = 0 \Rightarrow \forall j \in J, \quad \lambda_j = 0.$$

Proposition 20.8 *Une famille $(e_i)_{i\in I}$ orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien E est une famille libre.*

Preuve. On considère une famille $(e_i)_{i\in I}$ orthogonale de vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien E, J une partie non vide de I et $(\lambda_j)_{j\in J}$ une famille de réels indicée par J et vérifiant

$$\sum_{j\in J} \lambda_j e_j = 0.$$

Alors,

$$\forall k \in J, \quad 0 = \left\langle e_k, \sum_{j\in J} \lambda_j e_j \right\rangle = \lambda_k \|e_k\|^2 ,$$

avec $\|e_k\| \neq 0$ ainsi $\lambda_k = 0$. ♣

Exemple : Sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques muni du produit scalaire :

$$(f,g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx,$$

la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos(nt), \sin(pt) \mid (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right)$ est orthonormée.

20.5 Le procédé de Gram-Schmidt

Théorème 20.9 *(Orthogonalisation de Gram-Schmidt)*
Soit E un espace préhilbertien et n un entier strictement positif. Pour toute famille libre $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dans E, il existe une famille orthogonale $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ dans E telle que :

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}, \quad Vect\{e_1, \cdots, e_k\} = Vect\{x_1, \cdots, x_k\}.$$

Preuve. On considère $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ une famille libre de E. On construit une famille orthogonale $(e_1, e_2, \cdots, e_n)$ en procédant par récurrence.

- On choisit $e_1 = x_1$. On a donc $\text{Vect}\{e_1\}=\text{Vect}\{x_1\}$.
- Soit $k \in \{2, \cdots n\}$. On considère une famille orthogonale $(e_1, \cdots, e_{k-1})$, vérifiant

$$\forall i \in \{1, \cdots k-1\} \quad \text{Vect}\{e_1, \cdots, e_i\} = \text{Vect}\{x_1, \cdots, x_i\}.$$

La famille $(e_1, \cdots, e_{k-1})$ engendre un sous-espace de dimension $(k-1)$, elle est donc une famille libre et tous ses vecteurs sont non nuls. On recherche un vecteur e_k de la forme

$$e_k = x_k + \lambda_{1,k} e_1 + \cdots + \lambda_{k-1,k} e_{k-1}.$$

La condition d'orthogonalité

$$\forall i \in \{1, \cdots, k-1\}, \quad < e_i, e_k >= 0,$$

est réalisée si et seulement si on choisit

$$\forall i \in \{1, \cdots, k-1\}, \quad \lambda_{i,k} = -\frac{< e_i, x_k >}{\|e_i\|^2}.$$

Le vecteur x_k n'appartenant pas à $\text{Vect}\{x_1, \cdots x_{k-1}\}=\text{Vect}\{e_1, \cdots e_{k-1}\}$, le vecteur e_k ainsi construit est non nul. La famille $(e_1, e_2 \cdots e_k)$ est orthogonale, ses vecteurs sont non nuls, elle est donc libre. Les vecteurs $e_1, \cdots, e_k$ appartiennent à $\text{Vect}\{x_1, \cdots x_k\}$. On en déduit que

$$\text{Vect}\{e_1, \cdots e_k\} = \text{Vect}\{x_1, \cdots x_k\}.$$

Ce qui achève la démonstration.

♣

Remarque 20.2 *1. On obtient ainsi* l'algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt

- $e_1 = x_1$
- *Pour* $k = 2$ *à* n *faire*

$$e_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{< x_k, e_i >}{\|e_i\|^2} e_i.$$

2. On peut parfois préférer une famille orthonormale en normant les vecteurs e_i*. Il s'agit alors de* l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt*. On obtient*

- $e_1 = x_1$
- *Pour* $k = 2$ *à* n *faire*

$$e'_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{< x_k, e_i >}{\|e_i\|^2} e_i$$

$$e_k = \frac{e'_k}{\|e'_k\|}.$$

3. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une famille dénombrable de vecteurs libres de* E*, on peut construire avec le même procédé une famille orthogonale ou orthonormale* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad Vect\{e_1, \cdots, e_k\} = Vect\{x_1, \cdots, x_k\}.$$

Corollaire 20.10 *Si* F *est un sous-espace vectoriel de dimension finie ou infinie dénombrable de* E*, alors il existe une base orthonormée pour* F*.*

Proposition 20.11 *Soit* E *un espace préhilbertien,* F *est un sous-espace vectoriel de dimension finie de* E *et*$(e_1, \cdots, e_n)$ *une base orthonormée de* F*, alors tout vecteur* x *élément de* F

1. $x = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k$
2. (a) *Si* E *est un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k >^2.$$

   (b) *Si* E *est un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel*

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |< x, e_k >|^2.$$

Exercice 20.1 1. Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$$

est convergente et que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!$$

2. En déduire que l'application définie sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ par

$$(P, Q) \mapsto < P, Q >= \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt,$$

définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

3. Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$.

Solution.

1. Pour tout entier naturel k, notons $\mathcal{P}_k$, la propriété :

$$\mathcal{P}_k : \text{« l'intégrale } \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt \text{ est convergente et } \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k! \text{ ».}$$

Nous avons la propriété $\mathcal{P}_0$. Soit k un entier strictement positif. Montrons que

$$\mathcal{P}_{k-1} \Rightarrow \mathcal{P}_k.$$

L'application $t \mapsto t^k e^{-t}$ admettant une limite en 0 et $+\infty$, nous pouvons effectuer une intégration par partie :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \left[-t^k e^{-t}\right]_0^{+\infty} + k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt = k!.$$

Donc

$$\mathcal{P}_{k-1} \Rightarrow \mathcal{P}_k.$$

Ce qui termine la preuve. On peut remarquer que l'on peut obtenir ce résultat grâce à la fonction Γ (exercice 23.5, page 482) puisque

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \Gamma(k+1) = k!.$$

2. D'après la question précédente, il est évident que pour toutes fonctions polynômiales P et Q, l'intégrale

$$(P, Q) \mapsto < P, Q >= \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$$

est convergente. Il est d'autre part évident que l'application

$$(P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$$

est bilinéaire, symétrique et positive. Montrons qu'elle est définie. Soit P un fonction polynôme vérifiant

$$\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt = 0.$$

L'application $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est positive et continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Elle estdonc nulle sur cet intervalle. On en déduit que

$$\forall t \in [0, +\infty[, \quad P(t) = 0.$$

Le polynôme P admettant une infinité de racines est ainsi le polynôme nul. L'application $(P, Q) \mapsto < P, Q >$ est un produit scalaire.

3. En appliquant l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on obtient la base orthornormée (e'_0, e'_1, e'_2, e'_3) avec
   - $e'_0 = 1$,
   - $e'_1 = X - 1$,
   - $e'_2 = \frac{1}{2}(X^2 - 4X + 2)$,
   - $e'_3 = \frac{1}{6}(X^3 - 9X^2 + 18X - 6)$.

♣

20.6 Projection et symétrie orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Proposition 20.12 *Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace de E de dimension finie. Alors,*

1.
$$E = F \oplus F^{\perp}$$

2.
$$F = F^{\perp\perp}.$$

Preuve.

1. On considère $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base orthonormée de F. Montrons que, pour tout élément x de E, il existe un unique élément y de F tel que $(x - y)$ appartienne à $F^{\perp}$.
   Soit y un élément de F. Notons $(y_i)_{1 \leq i \leq n}$ ses coordonnées dans la base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. L'élément $(x - y)$ appartient à $F^{\perp}$ si et seulement si

$$\forall k \in \{1 \cdots n\}, \quad < e_k, x - y >= 0,$$

si et seulement si

$$\forall k \in \{1 \cdots n\}, \quad < e_k, x >= \sum_{i=1}^{n} y_i < e_k, e_i >= y_k$$

si et seulement si

$$y = \sum_{k=1}^{n} < e_k, x > e_k. \tag{20.18}$$

Il existe donc un unique élément y de F tel que $(x - y)$ appartienne à $F^\perp$. Ainsi,

$$E = F \oplus F^\perp.$$

2. Nous savons que $F \subset F^{\perp\perp}$ (proposition 20.5). Soit x un élément de $F^{\perp\perp}$. Cet élément s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ où x_1 appartient à F et x_2 appartient à $F^\perp$. Le vecteur x appartenant à $F^{\perp\perp}$, on a $< x_2, x >= 0$. Ainsi,

$$0 =< x_2, x_1 + x_2 >=< x_2, x_1 > +\|x_2\|^2 = \|x_2\|^2.$$

On en déduit que $x_2 = 0$, que $x = x_1$ et que x appartient à F. Ainsi, $F^{\perp\perp} \subset F$. Ce qui termine la preuve.

♣

Remarque 20.3 *Pour tout sous-espace vectoriel F d'un espace préhilbertien E, on a $F \cap F^\perp = \{0\}$, mais pas nécessairement $E = F \oplus F^\perp$ si F est de dimension infinie. On considère par exemple l'espace vectoriel $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire*

$$< f, g >= \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt.$$

On note $\|.\|_2$ la norme issue de ce produit scalaire. D'après le théorème de Weierstrass, on sait que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ (c'est-à-dire $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$). En remarquant que $\|.\|_2 \leq \|.\|_\infty$, on déduit que $\mathbb{R}[X]$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_2$. D'où $\mathbb{R}[X]^\perp = \{0\}$ et $C([0,1],\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}[X] \oplus \mathbb{R}[X]^\perp$. On remarque également que $\mathbb{R}[X]^{\perp\perp} = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}[X]$.

Définition : Soient E un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. La proposition précédente nous indique que $E = F \oplus F^\perp$.

1. On appelle projection orthogonale sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.
2. On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.
3. Ces deux applications sont des endomorphismes de E de norme 1 (si $F \neq \{0\}$!).

Proposition 20.13 *Soient E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et p la projection orthogonale sur F. Si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée de F, alors*

$$\forall x \in E, \quad p(x) = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k.$$

Evident d'après la relation (20.18).

20.7 Meilleure approximation sur un sous espace vectoriel

Attention ! On se place dans cette première partie de section dans le cas d'un espace vectoriel normé non nécessairement préhilbertien.

Définition : Soient E *un espace vectoriel normé*, F un sous-espace vectoriel de E et x un élément de E. Si y_0 est un élément de F vérifiant

$$\|x - y_0\| = \inf_{y \in F} \|x - y\| = d(x, F),$$

on dit que y_0 est une meilleure approximation de x dans F.

Remarque 20.4 *Dans un espace vectoriel normé, l'existence ou l'unicité d'une meilleure approximation ne sont pas toujours assurées.*

1. *Non existence. Reprenons l'exemple de l'espace préhilbertien $C([0,1], \mathbb{R})$ indiqué dans la remarque 20.3. $\mathbb{R}[X]$ est un sous-espace dense. Donc, pour tout élément f de $C([0,1], \mathbb{R})$, on a $d(f, \mathbb{R}[X]) = 0$. Si f n'est pas une fonction polynôme, il n'y a donc pas de meilleure approximation de f sur $\mathbb{R}[X]$.*
2. *Non unicité. On considère $\mathbb{R}_1[X]$, l'espace vectoriel des fonctions polynômes de degré au plus 1 à coefficients réels muni de la norme $\|.\|_\infty$*

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \quad \|P\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |P(x)|.$$

On considère F la droite engendrée par la fonction polynôme $f_1 : x \mapsto x$. Tout élément de F est de la forme $f_a : x \mapsto ax$ où $a \in \mathbb{R}$. Cherchons une meilleure approximation de la fonction constante 1 dans F. On remarque que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \|1 - f_a\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |1 - f_a(x)| \geq |1 - f_a(0)| = 1.$$

Après quelques calculs, on remarque également que

$$\forall a \in [0, 2], \quad \|1 - f_a\|_\infty = 1.$$

Ceci indique que, pour tout $a \in [0, 2]$, f_a est une meilleure approximation de 1 dans F. On déduit qu'il y a, dans ce cas, une infinité de meilleures approximations.

Proposition 20.14 *Soient E un espace préhilbertien, F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée et x un élément de E. On note p la projection orthogonale sur F. Alors $p(x)$ est* l'unique meilleure approximation *de x dans F. Et,*

$$d(x,F)^2 = \|x - p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} < x, e_k >^2 .$$

Preuve. Soit x un élément de E. En utilisant le théorème de Pythagore, on obtient,

$$\forall y \in F, \quad \|x - y\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|y - p(x)\|^2.$$

On en déduit que

$$\forall y \in F, \quad \|x - y\| \geq \|x - p(x)\|$$

et l'on a égalité si seulement si $y = p(x)$.
De plus,

$$\|x\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2.$$

D'où,

$$\|x - p(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p(x)\|^2.$$

♣

Exemple : Sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques muni du produit scalaire :

$$(f,g) \mapsto \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx,$$

la meilleure approximation, pour la norme déduite de ce produit scalaire, d'une fonction f élément de $\mathcal{F}$ dans le sous-espace vectoriel

$$E_n = \mathrm{Vect}\{1, \cos t, \sin t, \cdots, \cos nt, \sin nt\}$$

est :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$$

$$+\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt \right) \cos kx + \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt)\, dt \right) \sin kx \right).$$

20.8 Inégalité de Bessel et égalité de Parseval

On considère E est un espace préhilbertien de dimension infinie et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de E.

Théorème 20.15 (Bessel) *Pour tout $x \in E$, la série de terme général $|< x, e_n >|^2$ est convergente et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |< x, e_n >|^2 \leq \|x\|^2 . \tag{20.19}$$

Preuve. La série $\sum_{n\geq 0} |< x, e_n >|^2$ est à termes réels positifs. D'après la proposition 20.14, page 360 la suite des sommes partielles est majorée par $\|x\|^2$. D'où, le résultat. ♣

En utilisant le fait que le terme général d'une série convergente tend vers 0, on déduit le résultat suivant.

Corollaire 20.16 (Riemann-Lebesgue) *Pour tout $x \in E$ on a :*

$$\lim_{n\to+\infty} < x, e_n >= 0.$$

Preuve. La série $\sum_{n\geq 0} |< x, e_n >|^2$ étant convergente, la suite $(|< x, e_n >|^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0. D'où, le résultat. ♣

Exemple : Dans le cas des séries de Fourier trigonométriques (exemple 20.7), l'inégalité de Bessel s'écrit sous la forme :

$$\frac{a_0 (f)^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n (f)^2 + b_n (f)^2\right) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 (t)\, dt,$$

où

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt$$

sont les coefficients de Fourier de la fonction f. Le théorème de Riemann-Lebesgue nous dit que :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n (f) = \lim_{n\to+\infty} b_n (f) = 0.$$

Dans la suite de cette section, on donne une caractérisation des familles orthonormées $\mathcal{B}$ qui assurent l'égalité dans le théorème (20.15) pour tout élément de E.

Définition : On dit qu'une famille est totale dans un espace préhilbertien E si le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille est dense dans E.

Proposition 20.17 *Si une famille orthonormée $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace préhilbertien est* totale *alors, pour tout élément x de E, la suite $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers x, c'est-à-dire*

$$\forall x \in E, \quad x = \lim_{n\to+\infty} p_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} < x, e_k > e_k,$$

où p_n est la projection orthogonale sur le sous-espace Vect$\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$

Preuve. Soit x un élément de E et ε un réel strictement positif. La famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant totale, nous pouvons considérer un entier naturel n_0 et $(\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n_0})$ un (n_0+1)-uplets de scalaires vérifiant

$$\left\| x - \sum_{k=0}^{n_0} \lambda_k e_k \right\| \leq \varepsilon.$$

Nous savons que $p_n(x)$ est la meilleure approximation de x dans le sous-espace engendré par $(e_0, e_1, \cdots, e_n)$. Or, pour tout entier n supérieur à n_0, le vecteur $(\sum_{k=0}^{n_0} \lambda_k e_k)$ appartient au sous-espace engendré par la famille $(e_0, e_1, \cdots, e_n)$. Ainsi,

$$\forall n \geq n_0, \quad \|x - p_n(x)\| \leq \left\| x - \sum_{k=0}^{n_0} \lambda_k e_k \right\| \leq \varepsilon.$$

La suite $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi convergente vers x. La dernière égalité est évidente puisque pour tout entier naturel n, $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} < x, e_k > e_k$.

♣

Proposition 20.18 *(Égalité de Parseval) On considère $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée et totale d'un espace préhilbertien E. Alors, pour tout élément x de E, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |< x, e_n >|^2$ avec,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |< x, e_n >|^2 = \|x\|^2 .$$

Preuve. Nous savons que l'application définie sur E, qui à tout élément x associe $\|x\|^2$ est continue sur E. Il suffit d'utliser le résultat de la proposition précédente sachant que

$$\forall x \in E, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|p_n(x)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} < x, e_k >^2 .$$

20.9 Matrice de Gram, déterminant de Gram

Remarque 20.5 *Soient E un espace préhilbertien, F un sous espace de E de dimension n et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une* base non nécessairement orthonormée *de F, nous savons que la projection orthogonale sur F d'un vecteur x que l'on note $p(x)$ est l'unique élément de F vérifiant*

$$\forall i \in \{1,\cdots n\}, \quad < x - p(x), e_i >= 0.$$

Les coordonnées $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ de $p(x)$ dans la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ sont donc l'unique solution du système linéaire

$$\forall i \in \{1,\cdots n\}, \quad \sum_{j=1}^{n} < e_i, e_j > \lambda_j =< x, e_i > .$$

Ce système est appelé système d'équations normales.
Ceci nous amène à introduire les matrices de Gram.

Définition : Soit E un espace préhilbertien. On appelle matrice de Gram d'une famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ de vecteurs de E, la matrice :

$$G(x_1,\cdots,x_n) = \begin{pmatrix} < x_1, x_1 > & < x_1, x_2 > & & < x_1, x_n > \\ < x_2, x_1 > & < x_2, x_2 > & & < x_2, x_n > \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ < x_n, x_1 > & < x_n, x_2 > & & < x_n, x_n > \end{pmatrix}$$

et le déterminant de cette matrice, noté $g(x_1,\cdots,x_n)$, est appelé déterminant de Gram de la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$.

Théorème 20.19 *Soient E un espace préhilbertien, n est un entier naturel strictement positif et $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ un n-uplets de vecteurs de E. Alors,*

$$rg(G(x_1,\cdots,x_n)) = rg(x_1,\cdots,x_n).$$

Preuve. Soient n un entier strictement positif et $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de E. Pour tout entier i compris entre 1 et n, définissons X_i l'élément de $\mathbb{R}^n$ par

$$X_i = (< x_1, x_i >, < x_2, x_i >, \cdots, < x_n, x_i >).$$

Soit I une partie finie non vide de $\{1, 2, \cdots, n\}$. Alors, les équations en $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ dans $\mathbb{R}^n$

$$\sum_{i\in I} \lambda_i X_i = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$$

sont équivalentes. En effet,

$$\sum_{i\in I} \lambda_i X_i = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \{1,2,\cdots,n\}, \quad \sum_{i\in I} \lambda_i < x_k, x_i >= 0$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \{1,2,\cdots,n\}, \quad < x_k, \sum_{i\in I} \lambda_i x_i >= 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0.$$

Cette dernière équivalence vient du fait que, pour tout n-uplet $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$, le vecteur $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ appartient au sous-espace engendré par les vecteurs $x_1, \cdots, x_k, \cdots, x_n$. On en déduit que

$$\operatorname{rg}(G(x_1,\cdots,x_n)) = \operatorname{rg}(x_1,\cdots,x_n).$$

♣

Proposition 20.20 *Soient E un espace préhilbertien, n un entier naturel strictement positif et $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ un n-uplets de vecteurs de E. Alors,*

$$g(x_1,\cdots,x_n) \geq 0.$$

Le système est libre si et seulement si

$$g(x_1,\cdots,x_n) > 0.$$

Preuve. Considérons n un entier naturel strictement positif et $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de E.

1. Si la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est liée alors, d'après la proposition précédente le rang de la matrice de Gram est strictement inférieur à n et son déterminant est nul. Ainsi,
$$g(x_1,\cdots,x_n) = 0.$$

2. Si la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est libre, considérons F, le sous-espace vectoriel engendrée par cette famille. La restriction du produit scalaire par rapport à $F \times F$ admet pour matrice dans la base $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ la matrice G. Considérons $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ une base orthonormée de F et P la matrice de passage de la base $(e_1,e_2,\cdots,e_n)$ vers la base $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. Si l'espace préhilbertien est réel,
$$G = {}^tPIP = {}^tPP$$
et
$$\det G = \det({}^tPP) = (\det P)^2 > 0.$$
Si l'espace préhilbertien est complexe,
$$G = {}^t\overline{P}IP = {}^t\overline{P}P$$
et
$$\det G = \det({}^t\overline{P}P) = |\det P|^2 > 0.$$

♣

Les déterminants de Gram nous permettent de donner une expression de la distance d'un élément x de E à un sous-espace vectoriel F de dimension finie. Précisément, on a le résultat suivant.

Théorème 20.21 *On considère E espace préhilbertien, n un entier strictement positif, F un sous-espace vectoriel de E de dimension n et $(x_1, \cdots, x_n)$ une base de F. Alors,*

$$\forall x \in E, \quad d(x, F) = \sqrt{\frac{g(x_1, \cdots, x_n, x)}{g(x_1, \cdots, x_n)}}.$$

Preuve. On considère F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, une base de F notée $(x_1, \cdots, x_n)$ et x un élément de E. On remarque que,

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad < x_k, x >=< x_k, p(x) > + < x_k, x - p(x) >=< x_k, p(x) >$$

et

$$< x, x >= \|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 =< p(x), p(x) > + d(x, F)^2.$$

$$g(x_1, \cdots, x_n, x)$$
$$= \begin{vmatrix} \langle x_1 \mid x_1 \rangle & & \langle x_1 \mid x_n \rangle & \langle x_1 \mid p(x) \rangle \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ \langle x_n \mid x_1 \rangle & & \langle x_n \mid x_n \rangle & \langle x_n \mid p(x) \rangle \\ \langle p(x) \mid x_1 \rangle & \cdots & \langle p(x) \mid x_n \rangle & < p(x), p(x) > + d(x, F)^2 \end{vmatrix}$$

Le vecteur $p(x)$ étant élément de F, il existe un unique n-uplets de scalaires $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ vérifiant $p(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Pour tout entier i compris entre 1 et $(n+1)$, notons C_i, la $i^{ème}$ colonne de cette matrice de Gram. Ainsi,

$$C_{n+1} = \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i + C'_{n+1}$$

où

$$C'_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d(x, F)^2 \end{pmatrix}.$$

En utilisant les propriétés du déterminant, nous obtenons

$$g(x_1, \cdots, x_n, x) = d(x, F)^2 g(x_1, \cdots, x_n).$$

Les résultats de la proposition 20.20 permettent de conclure. ♣

Exercice 20.2 On considère $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire :

$$(f,g) \mapsto \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx.$$

Soit n un entier naturel strictement positif. Calculer

$$d\left(x^n, \mathbb{R}_{n-1}[X]\right).$$

On pourra utiliser le déterminant de Cauchy : Soient n un entier strictement positif, deux n-uplets de nombres réels notés $(a_1,\cdots,a_n)$ et $(b_1,\cdots,b_n)$ vérifiant $a_i+b_j \neq 0$ pour tout couple d'entiers (i,j) compris entre 1 et n. Alors,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{j=2}^n \prod_{i=1}^{j-1} (a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n (a_i+b_j)}.$$

Solution. Nous avons, $G(1,x,\cdots,x^{n-1}) = (g_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ avec

$$\forall (i,j) \in \{1,\cdots,n\}^2, \quad g_{i,j} = < x^{i-1}, x^{j-1} > = \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \frac{1}{i+j-1}.$$

En utilisant le déterminant de Cauchy en prenant par exemple pour tout entier i compris entre 1 et n, $a_i = i$ et $b_i = i-1$, nous obtenons

$$g\left(1,x,\cdots,x^{n-1}\right) = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{j=2}^n \prod_{i=1}^{j-1} (j-i)^2}{\prod_{j=1}^n \prod_{i=1}^n (i+j-1)}$$

$$= \frac{\prod_{j=2}^n ((j-1)!)^2}{\prod_{j=1}^n \frac{(j+n-1)!}{(j-1)!}} = \frac{\left(\prod_{j=0}^{n-1} j!\right)^3}{\prod_{j=0}^{n-1} (n+j)!}.$$

D'après la proposition précédente,

$$d\left(x^n, \mathbb{R}_{n-1}[X]\right) = \sqrt{\frac{g\left(1,x,\cdots,x^{n-1},x^n\right)}{g\left(1,x,\cdots,x^{n-1}\right)}}.$$

Ainsi,

$$d^2\left(x^n, \mathbb{R}_{n-1}[X]\right) = \frac{\left(\prod_{j=0}^n j!\right)^3}{\left(\prod_{j=0}^{n-1} j!\right)^3} \times \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(n+j)!}{\prod_{j=0}^n (n+j+1)!} = (n!)^3 \times \frac{\prod_{j=0}^{n-1}(n+j)!}{\prod_{j=1}^{n+1}(n+j)!}$$

$$= \frac{(n!)^4}{(2n!).(2n+1)!}.$$

On en déduit alors que :

$$d\left(x^n, \mathbb{R}_{n-1}[X]\right) = \frac{(n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n+1}}.$$

♣

20.10 Polynômes orthogonaux

Pour les notions de fonctions intégrables, on pourra lire le chapitre 23.

Proposition-définition 20.22 *Soient I un intervalle de longueur non nulle et ω une application continue sur I à valeurs réelles strictement positives telle que pour tout entier naturel n, la fonction $t^n\omega(t)$ soit intégrable sur I. Alors l'application définie sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$ par*

$$(P,Q) \to < P,Q >= \int_I P(t)Q(t)\omega(t)dt.$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. L'application ω est appelée poids sur I.

Preuve.

1. Pour toutes fonctions polynômiales P et Q, l'application $PQ\omega$ est combinaison linéaire d'applications intégrables sur l'intervalle I. Elle est donc intégrable sur I. L'application $(P,Q) \to < P,Q >= \int_I P(t)Q(t)\omega(t)dt$ est ainsi définie sur $\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X]$.
2. Cette application est trivialement bilinéaire symétrique et positive. Montrons qu'elle est définie. Soit P une fonction polynomiale vérifiant
$$\int_I P^2(t)\omega(t)dt = 0.$$
L'application $t \mapsto P^2(t)\omega(t)$ est positive et continue sur l'intervalle I. Elle est donc nulle sur cet intervalle. On en déduit que
$$\forall t \in I, \quad P(t) = 0.$$
Le polynôme P admettant une infinité de racines est ainsi le polynôme nul. L'application $(P,Q) \mapsto < P,Q >$ est un produit scalaire

♣

Définition : On appelle polynômes orthogonaux associés au poids ω sur I, les éléments de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ obtenue à partir de la base canonique par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Proposition 20.23 *On considère I un intervalle et ω un poids sur I. La suite de polynômes orthogonaux $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ asociée au poids ω est l'unique suite de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant*

1. *Pour tout entier naturel n, le polynôme P_n est un polynôme de degré n dont le coefficient de plus haut degré est égal à 1.*
2. $$\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \quad n \neq m \Rightarrow < P_n, P_m >= 0.$$

Preuve. Nous savons que la suite de polynômes orthogonaux vérifie les propriétés 1 et 2. D'autre part, si une suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les propriétés 1 et 2, alors pour tout entier naturel strictement positif n, le polynôme Q_n appartient à

$$H_n \cap D_n,$$

où H_n est l'hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ passant par le polynôme $X \mapsto X^n$ et dirigé par $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et D_n est la droite passant par le polynôme nul et dirigée par l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_n X]$. Les deux sous-espaces H_n et D_n sont dirigés par deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$. Leur intersection est donc réduite à un singleton. Ainsi, $P_n = Q_n$.

♣

Proposition 20.24 *Si $(P_n)_{n_{n\in\mathbb{N}}}$ est la suite de polynômes orthogonaux associée à un poids ω définie sur un intervalle I, alors pour tout entier naturel n, le polynôme P_n admet n racines simples réelles situées dans l'intervalle I.*

Preuve. On considère un intervalle I, ω un poids sur I, n un entier naturel strictement positif et P_n le polynôme orthogonal correspondant. On note $A = \{x_1, x_2, \cdots x_k\}$, l'ensemble de ses racines de multiplicité impaires appartenant à l'intervalle I. On définit le polynôme Q_n par

$$\forall X \in \mathbb{R}, \quad Q_n(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - x_i).$$

On posera $Q_n = 1$ si l'ensemble A est vide. Sur l'intervalle I, le polynôme P_nQ_n n'admettant que des racines de multiplicité paire, nous avons soit

$$\forall x \in I, \quad P_n(x)Q_n(x) \geq 0,$$

soit

$$\forall x \in I, \quad P_n(x)Q_n(x) \leq 0.$$

Le polynôme P_nQ_n étant non identiquement nul, on obtient dans le premier cas,

$$< P_n, Q_n >= \int_I P_n(x)Q_n(x)\omega(x)dx > 0,$$

dans le second cas

$$< P_n, Q_n >= \int_I P_n(x)Q_n(x)\omega(x)dx < 0,$$

et dans tous les cas $< P_n, Q_n >\neq 0$. Le polynôme P_n étant orthogonal à tous les éléments de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, on en déduit que le polynôme Q_n est un polynôme de degré n. On a ainsi prouvé que P_n admet n racines distinctes sur I. ♣

20.10.1 Polynômes de Tchebychev

On se place dans le cas où $I =]-1,1[$ et ω le poids défini par

$$\begin{array}{rccc} \omega: &]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \end{array}$$

On sait que cette fonction est intégrable sur l'intervalle $]-1,1[$ et que

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi.$$

On a également

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]-1,1[, \quad \left|\frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Donc pour tout entier naturel n, $\frac{t^n}{\sqrt{1-t^2}}$ est intégrable sur $]-1,1[$. Le produit scalaire défini dans la proposition 20.22 s'écrit

$$(P,Q) \to < P, Q >= \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Les polynômes orthogonaux correspondants s'appellent polynômes de Tchebychev que l'on notera T_n $(n \in \mathbb{N})$.

Exercice 20.3 1. Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique polynôme P_n dont on donnera le degré et le coefficient dominant vérifiant

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

On pourra trouver une relation de récurrence d'ordre 2 en transformant l'expression

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta.$$

2. Montrer que

$$\begin{cases} T_0 = P_0, \\ \forall n \geq 1, \quad T_n = \frac{1}{2^{n-1}} P_n. \end{cases}$$

Pour la suite de l'exercice, on considère un entier n strictement positif.

3. Expliciter les racines $(\alpha_k)_{1\leq k\leq n}$ de T_n.

4. Calculer, pour tout entier n strictement positif, $\|T_n\|^2$.
5. Montrer qu'il existe un unique n-uplet de réels $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n}$ vérifiant

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Q(\alpha_k).$$

On pourra utiliser la théorie de la dualité.

6. (a) Montrer que pour tout entier m compris entre 1 et $(n-1)$,

$$\sum_{k=1}^{n} T_m(\alpha_k) = 0.$$

(b) En déduire que

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\} \quad \lambda_k = \frac{\pi}{n}.$$

7. En utilisant la division euclidienne par le polynôme T_n, montrer que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} Q(\alpha_k).$$

Dans la suite, on considère une fonction f de classe C^{2n} sur $[-1,1]$ à valeurs réelles.

8. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ vérifiant

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\} \quad f(\alpha_k) = P(\alpha_k) \quad \text{et} \quad f'(\alpha_k) = P'(\alpha_k).$$

9. Dans cette question, x_0 est un élément fixé de $[-1,1]$ non racine de T_n. On considère la fonction g définie sur $[-1,1]$ par

$$\forall x \in [-1,1], \quad g(x) = f(x) - P(x) - \lambda_{x_0} T_n^2(x),$$

où λ_{x_0} est choisi tel que $g(x_0) = 0$. Montrer que $g^{(2n)}$ s'annule au moins 1 fois sur l'intervalle $[-1,1]$ et qu'il existe un réel ξ vérifiant

$$\lambda_{x_0} = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}.$$

10. Montrer que

$$\forall x \in [-1,1], \quad |f(x) - P(x)| \leq \frac{\|f^{(2n)}\|_\infty}{(2n)!} T_n^2(x).$$

11. En déduire la majoration

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{f(t)dt}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos \frac{2k-1}{2n}\pi\right) \right| \leq \frac{\pi}{(2n)!2^{2n-1}} \|f^{(2n)}\|_\infty.$$

Solution.

1. (a) Existence. On note $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de $\mathbb{R}[X]$ définie par

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_0(x) = 1, \\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_1(x) = x, \\ \forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \quad P_{n+1}(x) = 2xP_n(x) - P_{n-1}(x). \end{cases}$$

Considérons pour tout entier naturel n, la propriété $\mathcal{P}_n$:

$$\mathcal{P}_n : \text{'} \ \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P_n(\cos\theta) = \cos n\theta. \ \text{'}$$

Nous avons les propriétés $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$. Soit n un entier strictement positif. Montrons que

$$(\mathcal{P}_{n-1} \wedge \mathcal{P}_n) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}.$$

A l'aide de formules trigonométriques, nous obtenons

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta.$$

D'où,

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(n+1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta$$

$$= 2\cos\theta P_n(\cos\theta) - P_{n-1}(\cos\theta) = P_{n+1}(\cos\theta).$$

Ainsi,

$$(\mathcal{P}_{n-1} \wedge \mathcal{P}_n) \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}.$$

Nous avons donc la propriété $\mathcal{P}_n$ pour tout entier naturel n.

(b) Unicité. Considérons $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de polynômes vérifiant les hypothèses indiquées dans cette première question. Alors pour tout entier naturel n, nous avons

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad P_n(\cos\theta) = Q_n(\cos\theta) = \cos n\theta.$$

Ainsi,

$$\forall x \in [-1,1], (P_n - Q_n)(x) = 0.$$

Le polynôme $(P_n - Q_n)$ admettant une infinité de racines est le polynôme nul.

(c) Le degré du polynôme P_0 est 0, son coefficient dominant est 1. On vérifie très simplement que, pour tout entier naturel strictement positif n, le degré du polynome P_n est égal à n et que le coefficient de plus haut degré est égal à 2^{n-1}.

2. Considérons n et p deux entiers naturels distincts.

$$< P_n, P_p >= \int_{-1}^{1} \frac{P_n(t)P_p(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

En effectuant le changement de variable $t = \cos\theta$, nous obtenons

$$< P_n, P_p >= \int_0^\pi P_n(\cos\theta)P_p(\cos\theta)d\theta = \int_0^\pi (\cos n\theta) \times (\cos p\theta)d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\pi (\cos(n+p)\theta + \cos(n-p)\theta)\, d\theta = 0.$$

On en déduit que la famille de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale et que pour tout entier naturel n le polynôme T_n est un polynôme de degré n normalisé. La suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ainsi la suite des polynômes de Tchebychev.

3. D'après la proposition 20.24, le polynôme T_n admet n racines simples appartenant à l'intervalle $]-1,1[$. Les deux polynômes T_n et P_n admettent les mêmes racines.

$$P_n(\cos\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos n\theta = 0 \Leftrightarrow n\theta = -\frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Nous remarquons que pour entier k compris entre 1 et n, le réel $\left(-\frac{\pi}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right)$ appartient à l'intervalle $]0,\pi[$. L'application cosinus étant strictement décroissante sur cet intervalle, nous obtenons les n racines simples du polynôme T_n que l'on notera $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ avec

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}, \quad \alpha_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right).$$

4.
$$\|T_n\|^2 = \frac{1}{2^{2n-2}}\int_{-1}^1 \frac{P_n^2(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

En effectuant le changement de variable $t = \cos\theta$, nous obtenons

$$\|T_n\|^2 = \frac{1}{2^{2n-2}}\int_0^\pi \cos^2(n\theta)d\theta = \frac{1}{2^{2n-1}}\int_0^\pi (1+\cos(2n\theta))\, d\theta = \frac{\pi}{2^{2n-1}}.$$

5. Pour tout entier k compris entre 1 et n, notons Ψ_k la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par

$$\begin{array}{rccc} \Psi_k : & \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & Q & \longmapsto & Q(\alpha_k). \end{array}$$

Montrons que $(\Psi_k)_{1\leq k\leq n}$ forme une base du dual de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Celui-ci étant de dimension n, il suffit de montrer que la famille $(\Psi_k)_{1\leq k\leq n}$ est libre. Considérons $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ un n-uplet de réels vérifiant

$$\sum_{k=1}^n a_k\Psi_k = 0.$$

On considère pour tout entier naturel i compris entre 1 et n, l'élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ noté Q_i définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (x - \alpha_j).$$

Alors, pour tout entier i compris entre 1 et n, nous avons

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \Psi_k(Q_i) = a_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (\alpha_i - \alpha_j) = 0.$$

Ainsi,

$$\forall i \in \{1, 2 \cdots, n\}, \quad a_i = 0.$$

La famille $(\Psi_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille libre donc une base du dual de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ espace vectoriel de dimension n.
L'application I définie sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par

$$\begin{array}{rccc} I: & \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & Q & \longmapsto & \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \end{array}$$

est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Elle s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de la base $(\Psi_k)_{1\leq k\leq n}$. Il existe ainsi un unique n-uplet de réels $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n}$ vérifiant

$$I = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \Psi_k.$$

D'où, le résultat.

6. (a) Soit m un entier compris entre 1 et $(n-1)$.

$$\sum_{k=1}^{n} P_m(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{n} P_m \left(\cos \left(\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \cos \left(\frac{m}{2n} (2k-1)\, \pi \right) = \Re \left(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{im}{2n}(2k-1)\pi} \right)$$

Notons

$$S_m = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{im}{2n}(2k-1)\pi}.$$

$$S_m = e^{\frac{im\pi}{2n}} \frac{1 - e^{im\pi}}{1 - e^{\frac{im\pi}{n}}} = e^{\frac{im\pi}{2n}} \frac{1 - (-1)^m}{1 - e^{\frac{im\pi}{n}}}.$$

Si m est pair, alors $S_m = 0$. Si m est impair,

$$S_m = \frac{2e^{\frac{im\pi}{2n}}}{1 - e^{\frac{im\pi}{n}}} = \frac{2}{e^{-\frac{im\pi}{2n}} - e^{\frac{im\pi}{2n}}} = \frac{i}{\sin\left(\frac{m\pi}{2n}\right)}.$$

Quelque soit la parité de m, nous obtenons

$$\sum_{k=1}^{n} P_m(\alpha_k) = \Re(S_m) = 0.$$

On en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n} T_m(\alpha_k) = 0.$$

(b)

$$\forall m \in \{1, 2, \cdots, (n-1)\}, \quad I(T_m) = \int_{-1}^{1} \frac{T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^{1} \frac{T_0(t) T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$= < T_0, T_m > = 0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n} T_m(\alpha_k).$$

Pour $m = 0$, nous avons également

$$I(T_0) = \int_{-1}^{1} \frac{T_0(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \pi = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n} T_0(\alpha_k).$$

En conclusion,

$$\forall m \in \{0, 1, \cdots, (n-1)\}, \quad I(T_m) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n} T_m(\alpha_k).$$

La famille $(T_m)_{0 \leq m \leq (n-1)}$ formant une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, nous obtenons,

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad I(Q) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi}{n} Q(\alpha_k).$$

La famille $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ étant unique, nous obtenons le résultat désiré.

7. Soit Q un élément de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Effectuons la division euclidienne du polynôme Q par le polynôme T_n :

$$Q = Q_1 T_n + R,$$

où R est un élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Le polynôme Q_1 est aussi élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ puisque le degré de Q est inférieur ou égal à $(2n-1)$.
Nous avons,

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, n\}, \quad Q(\alpha_k) = Q_1(\alpha_k) T_n(\alpha_k) + R(\alpha_k) = R(\alpha_k)$$

Le polynôme T_n étant orthogonal au sous-espace $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc au polynôme Q_1, nous obtenons,

$$\int_{-1}^{1} \frac{Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_{-1}^{1} \frac{Q_1(t) T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$= < Q_1, T_n > + \int_{-1}^{1} \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} R(\alpha_k) = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} Q(\alpha_k).$$

8. On considère l'application linéaire φ définie sur $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{2n}$ par

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R}_{2n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{2n} \\ & P & \longmapsto & (P(\alpha_1), P'(\alpha_1), \cdots, P(\alpha_n), P'(\alpha_n)) . \end{array}$$

Un polynôme appartient au noyau de φ si et seulement si il est multiple des polynômes $(X-\alpha_k)^2$ pour tout entier k compris entre 1 et n. Ces polynômes étant premiers entre eux, un polynôme appartient au noyau de φ si et seulement si, il est multiple de polynôme de degré $2n$:

$$\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)^2.$$

Le seul polynôme de degré inférieur ou égal à (2n-1) vérifiant cette condition est le polynôme nul. On en déduit que $\ker\varphi = 0$ et que φ est injective. De plus,

$$\dim \mathbb{R}_{2n-1}[X] = \dim \mathbb{R}^{2n} = 2n.$$

L'application φ est ainsi bijective. Nous obtenons le résultat désiré.

9. Nous avons,

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad g(\alpha_k) = g'(\alpha_k) = 0.$$

De plus, $g(x_0) = 0$. Ainsi, g admet $(2n+1)$ zéros en comptant les ordres de mutiplicité. D'après le théorème 8.12, page 105, l'application $g^{(2n)}$ s'annule au moins une fois sur le segment $[-1, 1]$. Notons ξ l'un de ces points. Or,

$$\forall x \in [-1,1], \quad g^{(2n)}(x) = f^{(2n)}(x) - \lambda_{x_0}.(2n)!.$$

Pour $x = \xi$, nous obtenons

$$\lambda_{x_0} = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}.$$

Remarquons que

$$f(x_0) - P(x_0) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} T_n^2(x_0).$$

10. Soit x_0 un réel appartenant au segment $[-1, 1]$
    (a) Si x_0 est une racine de T, nous avons égalité.
    (b) Si x_0 n'est pas racine de T, d'après la remarque précédente,

$$|f(x_0) - P(x_0)| = \frac{|f^{(2n)}(\xi)|}{(2n)!} T_n^2(x_0) \leq \frac{\|f^{(2n)}\|_\infty}{(2n)!} T_n^2(x_0).$$

11.

$$\left| \int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt - \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\pi\right) \right|$$

$$= \left| \int_{-1}^{1} \frac{f(t) - P(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \right| \leq \frac{\left\| f^{(2n)} \right\|_\infty}{(2n)!} \int_{-1}^{1} \frac{T_n^2(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$= \frac{\left\| f^{(2n)} \right\|_\infty}{(2n)!} \left\| T_n \right\|^2 = \frac{\left\| f^{(2n)} \right\|_\infty}{(2n)!} \times \frac{\pi}{2^{2n-1}}.$$

♣

Chapitre 21

Séries de Fourier

Remarque préliminaire

Nous rappelons (proposition 13.17, page 195) que, dans le cadre d'une application f définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π périodique à valeurs réelles ou complexes, nous avons

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+2\pi} f(x)dx = \int_0^{2\pi} f(x)dx.$$

21.1 L'espace préhilbertien $\mathcal{D}$

Proposition 21.1 *On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, 2π-périodiques, continues par morceaux, et vérifiant*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}.$$

1. *L'ensemble $\mathcal{D}$ muni de la loi d'addition et multiplication par un nombre complexe est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.*
2. *L'application*

$$\begin{array}{rccc} <.,.>: & \mathcal{D}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (f,g) & \longmapsto & \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)dt. \end{array}$$

définit un produit scalaire sur $\mathcal{D}$. On note $\|.\|_2$, la norme issue de ce produit scalaire.

Preuve.

1. Évident.

2. En reprenant la définition d'un produit scalaire dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (voir page 8), les trois premières assertions sont évidentes. Pour la dernière, considérons un élément f de $\mathcal{D}$ vérifiant $< f, f >= 0$. Choisissons a_0 un point de continuité de f et
$$a_0 < a_1 < \cdots < a_n = a_o + 2\pi$$
une subdivision adaptée à l'application f sur le segment $[a_0; a_0 + 2\pi]$. On considère pour tout entier naturel k strictement inférieur à n, l'application f_k continue sur le segment $[a_k; a_{k+1}]$ et coïncidant avec f sur l'intervalle $]a_k; a_{k+1}[$.
$$\begin{aligned}\forall k \in \{0, \cdots n-1\}, \quad 0 \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f_k(t)|^2 \, dt &= \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t)|^2 \, dt \\ &\leq \int_{a_0}^{a_0+2\pi} |f(t)|^2 \, dt = 0.\end{aligned}$$
La continuité de chaque application f_k permet d'écrire
$$\forall k \in \{0, \cdots n-1\}, \forall t \in [a_k; a_{k+1}], \quad f_k(t) = 0.$$
Ainsi,
$$\forall k \in \{0, \cdots n-1\}, \forall t \in]a_k; a_{k+1}[, \quad f(t) = 0.$$
L'application f étant élément de $\mathcal{D}$ et continue en a_0,
$$\begin{cases} f(a_0) = f((a_0)_+) = 0, \\ \forall k \in \{1, \cdots n-1\}, \quad f(a_k) = \frac{f((a_k)_+) + f((a_k)_-)}{2} = 0. \end{cases}$$
L'application f est nulle sur l'intervalle $[a_0; a_0 + 2\pi[$ et 2π-périodique. Elle est ainsi nulle sur $\mathbb{R}$.

♣

21.2 Propriétés de l'espace préhilbertien $\mathcal{D}$

Notations :

1. Pour tout k élément de $\mathbb{Z}$, on note e_k, l'élément de $\mathcal{D}$ défini par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e_k(x) = e^{ikx}.$$
On appelle polynôme trigonométrique, toute combinaison linéaire d'éléments de $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.
2. On note $\mathcal{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$ engendré par la famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ c'est-à-dire $\mathcal{P} = Vect(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$.
3. Pour tout entier naturel n, on note $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$ engendré par la famille $(e_k)_{-n\leq k\leq n}$ c'est-à-dire $\mathcal{P}_n = Vect(e_k)_{-n\leq k\leq n}$.
4. Pour tout élément f de D, on note
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad c_k(f) =< e_k, f >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Proposition 21.2 *1. La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée.*

2. (a) Pour tout entier naturel n, on a

$$\mathcal{D} = \mathcal{P}_n \oplus \mathcal{P}_n^{\perp}.$$

(b) La projection orthogonale p_n sur $\mathcal{P}_n$ vérifie

$$\forall f \in \mathcal{D}, \quad p_n(f) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k(f)e_k.$$

3.

$$\forall f \in \mathcal{D}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|f - p_n(f)\|_2 = \inf_{g\in\mathcal{P}_n} \|f-g\|_2.$$

4. (Inégalité de Bessel) Pour tout élément f de $\mathcal{D}$, les séries $\sum_{n\geq 1}|c_n(f)|^2$ et $\sum_{n\geq 1}|c_{-n}(f)|^2$ sont convergentes avec

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\right) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Remarque 21.1 *Pour la dernière assertion, nous avons plus de précision avec l'égalité de Parseval (Théorème 21.6).*

Preuve.

1.
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \|e_k\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |e^{ikt}|^2 dt = 1.$$

   Soient p et q deux entiers distincts.

$$< e_p, e_q >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(q-p)t}dt = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(q-p)t}}{i(q-p)}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

   La famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est ainsi orthonormée.
2. Utiliser les propositions 20.12, page 357 et 20.13, page 359.
3. Utiliser la proposition 20.14, page 360
4. Utiliser l'inégalité de Bessel, théorème 20.15, page 361.

♣

Corollaire 21.3 *Pour tout élément f de $\mathcal{D}$, la suite définie pour tout entier naturel n par*

$$\|f - p_n(f)\|_2$$

est positive et décroissante.

Preuve. Soient f un élément de $\mathcal{D}$ et n un entier naturel. $p_n(f)$ appartient à $\mathcal{P}_{(n+1)}$. Ainsi,

$$\|f - p_n(f)\|_2 \geq \inf_{g \in \mathcal{P}_{(n+1)}} \|f - g\|_2 = \left\|f - p_{(n+1)}(f)\right\|_2 .$$

♣

La question qu'il est alors légitime de se poser est la suivante : pour tout élément f de $\mathcal{D}$, la suite $(p_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle vers f dans l'espace préhilbertien $\mathcal{D}$? Pour y répondre, voici deux propositions :

Proposition 21.4 *Le sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$ des polynômes trigonométriques est dense dans l'espace préhilbertien $\mathcal{D}$.*

Preuve. Notons $\mathcal{C}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}$ constitué des applications continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et 2π-périodiques. Pour montrer que $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{D}$, il suffit d'établir d'une part que $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{C}$ et d'autre part que $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{D}$.

1. Soit f un élément de $\mathcal{C}$. D'après le théorème de Féjer que nous verrons plus loin dans ce chapitre (théorème 21.14, page 386), la suite d'éléments de $\mathcal{P}$, $(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p_k(f))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f donc converge également vers f en norme $\|.\|_2$ (proposition 16.15, page 285). Ainsi, $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{C}$.

2. Montrons que $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{D}$. Soit f un élément de $\mathcal{D}$. Considérons a_0 un point de continuité de f puis

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_k < a_{k+1} = a_0 + 2\pi$$

une subdivision adaptée à f sur le segment $[a_0, a_0 + 2\pi]$. Soit N un entier positif vérifiant $\frac{1}{N} \leq 2\min_{0\leq i\leq k}(a_{i+1} - a_i)$. Pour tout entier n supérieur à N, on définit f_n l'élément de $\mathcal{C}$ tel que f_n et f coïncident sur les segments suivants :
$[a_0, a_1 - \frac{1}{n}]$,
$[a_i + \frac{1}{n}, a_{i+1} - \frac{1}{n}[$ pour tout entier i compris entre 1 et $(k-1)$,
$[a_k + \frac{1}{n}, a_{k+1}]$.
et pour tout élément i appartenant à $\{1, \cdots, k\}$,

$$\forall x \in]a_i - \frac{1}{n}, a_i + \frac{1}{n}[, \quad f_n(x) = \frac{n\left((a_i + \frac{1}{n}) - x\right)}{2} f\left(a_i - \frac{1}{n}\right)$$

$$+ \frac{n\left(x - (a_i - \frac{1}{n})\right)}{2} f\left(a_i + \frac{1}{n}\right).$$

Il est évident que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x)| \leq \|f\|_\infty .$$

Ainsi,

$$\|f_n - f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{a_0}^{a_0+2\pi} |f_n(x) - f(x)|^2 dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{k}\int_{a_i-\frac{1}{n}}^{a_i+\frac{1}{n}} |f_n(x) - f(x)|^2 dx \leq \frac{k}{2\pi}.4\|f\|_\infty^2.\frac{2}{n}.$$

On en déduit que la suite $(f_n)_{n\geq N}$ converge vers f. Ainsi $\mathcal{C}$ est dense dans $\mathcal{D}$.

♣

Théorème 21.5 *Pour tout élément f de l'espace préhilbertien $\mathcal{D}$, la suite $(p_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans cet espace vers f.*

Preuve. Soient f un élément de $\mathcal{D}$ et ε un réel strictement positif. Le sous-espace $\mathcal{P}$ étant dense dans $\mathcal{D}$, il existe un polynôme trigonométrique Q_ε vérifiant

$$\|f - Q_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon.$$

Notons n_ε le degré de Q_ε. Pour tout naturel n supérieur à n_ε, Q_ε est élément du sous-espace $\mathcal{P}_n$. Ainsi,

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \quad \|f - p_n(f)\|_2 = \inf_{g\in\mathcal{P}_n} \|f - g\|_2 \leq \|f - Q_\varepsilon\|_2 \leq \varepsilon.$$

Ceci termine la preuve. ♣

21.3 Propriétés asymptotiques de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

Théorème 21.6 *(Égalité de Parseval). Soit f un élément de $\mathcal{D}$. Les séries $\sum_{n\geq 1} |c_n(f)|^2$ et $\sum_{n\geq 1} |c_{-n}(f)|^2$ sont convergentes avec*

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Preuve. Soit f un élément de $\mathcal{D}$. D'après le théorème 21.6, la suite $(p_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans l'espace préhilbertien $\mathcal{D}$. La norme $\|.\|_2$ est une application continue dans cet espace. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \|p_n(f)\|_2^2 = \|f\|_2^2.$$

C'est-à-dire

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{k=n} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Proposition 21.7 *Pour tout élément f de $\mathcal{D}$, les suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers 0.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate de l'égalité de Parseval. ♣

Proposition 21.8 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et continue. On considère*

$$0 = a_0 < a_1 \cdots < a_p = 2\pi$$

une subdivision adaptée à f sur le segment $[0; 2\pi]$ et g un élément de $\mathcal{D}$ vérifiant

$$\forall k \in \{0, \cdots, p-1\}, \forall x \in]a_k; a_{k+1}[, \quad f'(x) = g(x).$$

Alors pour tout entier n non nul,

$$c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(g).$$

Preuve. Soit n un entier non nul. Pour tout entier k compris entre 0 et $(p-1)$ on obtient, à l'aide d'une intégration par parties

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)e^{-int}dt = -\frac{1}{in}\left[f(t)e^{-int}\right]_{a_k}^{a_{k+1}} + \frac{1}{in}\int_{a_k}^{a_{k+1}} g(t)e^{-int}dt$$

$$= -\frac{1}{in}\left(f(a_{k+1}^-)e^{-ina_{k+1}} - f(a_k^+)e^{-ina_k}\right) + \frac{1}{in}\int_{a_k}^{a_{k+1}} g(t)e^{-int}dt$$

$$= -\frac{1}{in}\left(f(a_{k+1})e^{-ina_{k+1}} - f(a_k)e^{-ina_k}\right) + \frac{1}{in}\int_{a_k}^{a_{k+1}} g(t)e^{-int}dt.$$

On obtient,

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \sum_{k=0}^{p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)e^{-int}dt$$

$$= -\frac{1}{in}\sum_{k=0}^{p-1}\left(f(a_{k+1})e^{-ina_{k+1}} - f(a_k)e^{-ina_k}\right) + \frac{1}{in}\sum_{k=0}^{p-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} g(t)e^{-int}dt$$

$$= -\frac{f(2\pi) - f(0)}{in} + \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt$$

$$= \frac{1}{in}\int_0^{2\pi} g(t)e^{-int}dt.$$

D'où le résultat.

Corollaire 21.9 *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux et continue. Alors les séries $\sum_{n\geq 0} c_n(f)$ et $\sum_{n\geq 0} c_{-n}(f)$ sont absolument convergentes.*

Preuve. Reprenons les notations de la proposition précédente. Pour tout entier n non nul,

$$|c_n(f)| = \left|\frac{1}{n}\right| \cdot |c_n(g)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + |c_n(g)|^2\right).$$

La convergence des séries $\sum_{n\geq 0} |c_n(g)|^2$ et $\sum_{n\geq 0} |c_{-n}(g)|^2$ (théorème 21.6) permet de conclure. ♣

Proposition 21.10 *Soit p un entier strictement positif. Si f est une fonction 2π-périodique de classe C^p alors*

$$c_n(f) = \frac{1}{(in)^p} c_n(f^{(p)}).$$

Preuve. La preuve s'effectue par récurrence évidente en utilisant la proposition 21.8 ♣

Corollaire 21.11 *Soit p un entier strictement positif. Si f est une fonction 2π-périodique de classe C^p alors*

$$c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^p}\right).$$

Preuve. Il suffit d'utiliser le corollaire précédent et la proposition 21.7. ♣

21.4 Noyaux de Dirichlet et de Féjer, approximation de l'unité

21.4.1 Définitions, premières propriétés

Définition : On appelle noyau de Dirichlet la suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes trigonométriques définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

On appelle noyau de Féjer la suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de polynômes trigonométriques définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad K_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x).$$

Voici les premières propriétés de ces noyaux.

Proposition 21.12 *1. Pour tout entier naturel n, les applications D_n et K_n sont paires.*

2.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x)dx = 1,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x)dx = 1.$$

3.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad D_n(x) = \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

4.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad K_n(x) = \frac{\sin^2 n\frac{x}{2}}{n\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Preuve.

1. La preuve est évidente pour $n = 0$. Soit n un entier strictement positif.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad D_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right).$$

Ainsi D_n, somme d'applications paires est également paire. L'application K_n est paire puisqu'elle est combinaison linéaire d'applications paires.

2.
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_0(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx = 1.$$

Pour tout entier k non nul,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{ikx}}{ik}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Pour tout entier n strictement positif,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dx + \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_0^{2\pi}\left(e^{ikx}+e^{-ikx}\right)dx = 1.$$

Puis,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x)dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_k(x)dx = 1.$$

3. Soit x un réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$. $D_n(x)$ est somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $e^{ix} \neq 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = e^{-inx}\frac{e^{(2n+1)ix}-1}{e^{ix}-1} \\ &= e^{-inx}.\frac{e^{(\frac{2n+1}{2})ix}}{e^{\frac{ix}{2}}}.\left(\frac{e^{(\frac{2n+1}{2})ix}-e^{(-\frac{2n+1}{2})ix}}{e^{\frac{ix}{2}}-e^{\frac{-ix}{2}}}\right) \\ &= \frac{e^{(\frac{2n+1}{2})ix}-e^{(-\frac{2n+1}{2})ix}}{e^{\frac{ix}{2}}-e^{\frac{-ix}{2}}} = \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

4. Soit x un réel n'appartenant pas à $2\pi\mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k(x) \\ &= \frac{1}{n\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(2k+1)\frac{x}{2} = \frac{1}{n\sin\frac{x}{2}}\Im\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{(2k+1)x}{2}}\right). \end{aligned}$$

Le nombre e^{ix}, raison de la suite géométrique $(e^{i\frac{(2k+1)x}{2}})_{k\in\mathbb{N}}$ étant différent de 1,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{(2k+1)x}{2}} &= e^{i\frac{x}{2}}\frac{e^{inx}-1}{e^{ix}-1} = e^{i\frac{x}{2}}.\frac{e^{in\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}}.\left(\frac{e^{in\frac{x}{2}}-e^{-in\frac{x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}-e^{-i\frac{x}{2}}}\right) \\ &= e^{in\frac{x}{2}}\frac{\sin n\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\Im\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{(2k+1)x}{2}}\right) = \frac{\sin^2 n\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Nous obtenons ainsi le résultat désiré.

♣

Proposition 21.13 *Pour tout élément f de $\mathcal{D}$ et pour tout entier strictement positif n, nous avons*

$$\frac{1}{2\pi}D_n * f = p_n(f) \quad et \quad \frac{1}{2\pi}K_n * f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p_k(f).$$

Preuve. Soit n un entier strictement positif et x un réel.

$$\frac{1}{2\pi}\left(D_n * f\right)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-t)} f(t)dt = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(t)dt$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k(x) = p_n(f)(x).$$

La deuxième égalité est évidente. ♣

21.4.2 Noyau de Féjer

Théorème 21.14 *(Théorème de Féjer)*

1. *La suite $(\frac{1}{2\pi}K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité 2π-périodique.*
2. *Pour tout élément f de $\mathcal{D}$,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p_k(f)(x) = f(x).$$

3. *D'autre part, si la restriction de l'application f sur un intervalle I est continue, alors la convergence est uniforme sur cet intervalle.*

Preuve.

1. Reprenons la définition d'une approximation de l'unité 2π-périodique indiquée page 276. D'après la proposition 21.12,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(x)dx = 1.$$

Le noyau $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant positif, les assertions 1 et 2 de la définition sont vérifiées.
Soit α un réel strictement positif et inférieur à π. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [\alpha, \pi], \quad 0 < \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Ainsi, en utilisant la proposition 21.12,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in [\alpha, \pi], \quad 0 \leq K_n(x) \leq \frac{1}{n \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \int_\alpha^\pi K_n(x)dx \leq \frac{\pi}{n \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Nous obtenons

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\pi K_n(x)dx = 0.$$

Le noyau $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant composé d'applications paires, l'assertion 3 de la définition est vérifiée. La suite $(\frac{1}{2\pi}K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une approximation de l'unité 2π-périodique.

2. Il suffit d'appliquer la proposition 16.10, page 277.
3. Idem.

♣

Corollaire 21.15 *Soient f et g deux éléments de $\mathcal{D}$ vérifiant*

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = c_n(g),$$

alors $f = g$.

Preuve. On a,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n(f) = p_n(g).$$

Il suffit d'appliquer le théorème précédent pour conclure. ♣

21.4.3 Noyau de Dirichlet

Proposition 21.16 *La suite $(\frac{1}{2\pi}D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une approximation de l'unité.*

Preuve. En effet,

1. L'application $t \mapsto |\sin t|$ est π-périodique et $\int_0^\pi |\sin t|dt = 2$.
2. Ainsi, pour tous entiers positifs k et n on obtient, en utilisant le changement de variable $x = \left(\frac{2n+1}{2}\right)t$,

$$\int_{\frac{2k\pi}{2n+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2n+1}} \left|\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)t\right| dt = \frac{2}{2n+1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin x|dx = \frac{4}{2n+1}$$

3. Supposons désormais que les entiers naturels k et n vérifient $k \leq n-1$. Alors $\frac{2(k+1)}{2n+1} \leq 1$ et

$$\forall t \in \left[\frac{2k\pi}{2n+1}; \frac{2(k+1)\pi}{2n+1}\right], \quad \left|\sin\frac{t}{2}\right| = \sin\frac{t}{2}$$
$$\leq \sin\left(\frac{(k+1)\pi}{2n+1}\right) \leq \frac{(k+1)\pi}{2n+1}.$$

Puis,

$$\int_{\frac{2k\pi}{2n+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2n+1}} \left|\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\right| dt \geq \frac{(2n+1)}{(k+1)\pi}\int_{\frac{2k\pi}{2n+1}}^{\frac{2(k+1)\pi}{2n+1}} \left|\sin\left(\frac{2n+1}{2}\right)t\right| dt$$
$$= \frac{4}{(k+1)\pi}.$$

4. Pour tout entier n strictement positif,

$$\int_0^{\pi} |D_n(t)|\,dt \geq \int_0^{\frac{2n\pi}{(2n+1)}} |D_n(t)|\,dt$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{\frac{2k\pi}{(2n+1)}}^{\frac{2(k+1)\pi}{(2n+1)}} |D_n(t)|\,dt \geq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{4}{(k+1)\pi}.$$

Nous obtenons
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} |D_n(t)|\,dt = +\infty.$$

Nous remarquons que, dans la définition d'une approximation de l'unité T-périodique (page 276), l'assertion 1 n'est pas vérifiée.

5. On peut remarquer que l'assertion 3 n'est pas vérifiée non plus. Considérons α un réel strictement positif et strictement inférieur à π.

$$\int_{\alpha}^{\pi} |D_n(t)|\,dt \geq \sum_{k=E\left(\frac{\alpha(2n+1)}{2\pi}\right)+1}^{n-1}\int_{\frac{2k\pi}{(2n+1)}}^{\frac{2(k+1)\pi}{(2n+1)}} |D_n(t)|\,dt$$

$$\geq \sum_{k=E\left(\frac{\alpha(2n+1)}{2\pi}\right)+1}^{n-1}\frac{4}{(k+1)\pi} \geq \sum_{k=E\left(\frac{\alpha(2n+1)}{2\pi}\right)+1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{4dt}{\pi(t+1)}$$

$$= \int_{E\left(\frac{\alpha(2n+1)}{2\pi}\right)+1}^{n}\frac{4dt}{\pi(t+1)} = \frac{4}{\pi}\ln\left(\frac{n+1}{E\left(\frac{\alpha(2n+1)}{2\pi}\right)+2}\right)$$

Cette dernière suite est convergente vers le réel

$$\frac{4}{\pi}\ln\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) > 0.$$

On en déduit que la suite de terme général $\left(\int_{\alpha}^{\pi}|D_n(t)|dt\right)$ ne peut converger vers 0.

♣

La suite $\left(\frac{1}{2\pi}D_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'étant pas une approximation de l'unité, la convergence simple de la suite $(p_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est établie avec des hypothèses plus fortes que celles énoncées dans le théorème de Féjer.

Théorème 21.17 *(Jordan-Dirichlet) Soit f un élément de $\mathcal{D}$ de classe C^1* par morceaux *sur $\mathbb{R}$. Alors,*

1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n\to+\infty} p_n(f)(x) = f(x).$$

2. Si, de plus, l'application f est continue sur $\mathbb{R}$, la convergence est normale sur $\mathbb{R}$.

Preuve.

1. Soit x un réel.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}(D_n * f)(x)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x-t)D_n(t)dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt.$$

En utilisant le changement de variable $u = -t$, nous obtenons

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x+u)D_n(u)du + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(f(x+t) + f(x-t)\right) D_n(t)dt.$$

Grâce aux propriétés 1 et 2 de la proposition 21.12,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} 2f(x)D_n(t)dt.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \left(f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\right) D_n(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{\sin\frac{t}{2}} \sin(2n+1)\frac{t}{2}dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)}{\sin t} \sin(2n+1)tdt. \qquad (21.20)$$

L'application f étant un élément de $\mathcal{D}$ nous avons $2f(x) = f(x^+) + f(x^-)$. Ainsi,

$$\forall t \in]0; \frac{\pi}{2}], \quad \frac{f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)}{\sin t}$$

$$= \frac{(f(x+2t) - f(x^+)) + (f(x-2t) - f(x^-))}{t} \frac{t}{\sin t}.$$

Cette application admet pour limite $2(f'(x^+) - f'(x^-))$ lorsque la variable t tend vers 0 par valeurs positives. On peut ainsi définir l'application g_x, élément de $\mathcal{D}$, par

$$\forall t \in]0; 2\pi[, \quad g_x(t) = \mathbb{1}_{]0;\frac{\pi}{2}]}(t).\frac{f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)}{\sin t}$$

En reprenant (21.20), nous obtenons,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n(f)(x) - f(x) = \frac{c_{2n+1}(g_x) - c_{-(2n+1)}(g_x)}{i}$$

En utilisant la proposition 21.7, nous obtenons le résultat désiré.

2. Supposons f continue sur $\mathbb{R}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad p_n(f)(x) = c_0(f) + \sum_{k=1}^{n} c_k(f)e^{ikx} + c_{-k}(f)e^{-ikx}.$$

Or,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|c_k(f)e^{ikx} + c_{-k}(f)e^{-ikx}\right| \leq |c_k(f)| + |c_{-k}(f)|.$$

En utilisant le corollaire 21.9, on obtient la convergence normale sur $\mathbb{R}$ de la série

$$c_0(f) + \sum_{k \geq 1} c_k(f)e^{ikx} + c_{-k}(f)e^{-ikx}.$$

Ce qui termine la preuve.

♣

21.5 Série de Fourier d'un élément de $\mathcal{D}$

21.5.1 Définitions

> **Définition :** Soit f un élément de $\mathcal{D}$. On appelle coefficients de Fourier de f, les nombres complexes définis par :
>
> 1. $\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = < e_n, f > = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt,$
> 2. $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos ntdt,$
> 3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin ntdt.$

Remarque 21.2 *1. Si f est une application paire,*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = 0.$$

2. Si f est une application impaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = 0.$$

3. les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont les propriétés asymptotiques indiquées dans la section 21.3.

Définition : On appelle série de Fourier associée à f, élément de $\mathcal{D}$, la série trigonométrique

$$c_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}\right) =$$

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx\right).$$

Proposition 21.18 *Soit f élément de $\mathcal{D}$. La suite des sommes partielles associée à la série de Fourier de f est la suite des projections $(p_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad p_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k(f)e^{ikx}$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx.$$

21.5.2 Théorèmes de convergence d'une série de Fourier

Il suffit de reprendre la section 21.4 pour obtenir les résultats suivants.

Théorème 21.19 *(Dirichlet). Soit f un élément de $\mathcal{D}$ de classe C^1 par morceaux. Alors la série de Fourier de f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = c_0(f) + \sum_{n\geq 1} \left(c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}\right)$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(a_n(f)\cos nx + b_n(f)\sin nx\right).$$

Théorème 21.20 *(Dirichlet). Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux et continue. Alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$.*

Définition : Soient f un élément de $\mathcal{D}$, (p_n) la suite des sommes partielles de sa série de Fourier. On note $(\sigma_n(f))$ la suite des sommes de Cesaro $(p_n)(f)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k(f)(x).$$

Théorème 21.21 *(Théorème de Féjer). Soit f un élément de $\mathcal{D}$. Alors la somme de Cesaro de la série de Fourier de f*

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_k(f)$$

converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$. D'autre part, si la restriction de l'application f sur un intervalle I est continue, alors la convergence est uniforme sur cet intervalle.

21.6 Applications

21.6.1 Sommes exactes de séries numériques convergentes

Exercice 21.1 On considère la suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par,

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, & P_0(t) = 1, \\ \forall n \geq 1, & P_n' = P_{n-1}, \\ \forall n \geq 1, & \int_0^1 P_n(t)dt = 0. \end{cases}$$

1. Vérifier que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $P_n(1) = P_n(0)$.
   Pour tout entier naturel strictement positif n, on note f_n, l'élément de $\mathcal{D}$ défini par
   $$\forall t \in]0; 2\pi[, \quad f_n(t) = P_n\left(\frac{t}{2\pi}\right).$$
2. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2,
   (a) $f_n(0) = P_n(0)$,
   (b) l'application f_n est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que, pour tout entier strictement positif n, les coefficients de Fourier de l'application f_n vérifient,
   $$\begin{cases} c_0(f_n) = 0, \\ \forall p \in \mathbb{Z}^*, \quad c_p(f_n) = \frac{-1}{(2ip\pi)^n}. \end{cases}$$

4. Montrer que pour tout entier k strictement positif,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k+1} 2^{2k-1} \pi^{2k} P_{2k}(0).$$

5. Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^6}.$$

Solution.

1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$$0 = \int_0^1 P_{n-1}(t)dt = \int_0^1 P_n'(t)dt = [P_n(t)]_0^1 = P_n(1) - P_n(0).$$

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

(a)
$$f_n(0^+) = P_n(0^+) = P_n(0)$$

et

$$f_n(0^-) = f_n(2\pi^-) = P_n(1^-) = P_n(1) = P_n(0).$$

On en en déduit que

$$f_n(0) = \frac{f_n(0^+) + f_n(0^-)}{2} = P_n(0).$$

(b) Il est évident que l'application f_n est continue sur l'intervalle $]0; 2\pi[$. D'après (2.a), elle est continue en 0. L'application f_n est donc continue en tout point de l'intervalle $[0; 2\pi[$, 2π-périodique donc continue sur $\mathbb{R}$.

3.

$$\forall n \geq 1, \quad c_0(f_n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_n(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_n(\frac{t}{2\pi})dt = \int_0^1 P_n(t)dt = 0.$$

Soit p un entier non nul. Montrons que la suite $(c_p(f_n))_{n\geq 1}$ est géométrique. On considère n un entier supérieur ou égal à 2. L'application f_n vérifie les hypothèses de la proposition 21.8. Considérons g_n un élément de $\mathcal{D}$ vérifiant

$$\forall t \in]0; 2\pi[, \quad f_n'(t) = g_n(t).$$

Nous avons

$$c_p(f_n) = \frac{1}{ip} c_p(g_n).$$

D'autre part,

$$\forall t \in]0; 2\pi[, \quad g_n(t) = f_n'(t) = \frac{1}{2\pi} P_n' \left(\frac{t}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} P_{n-1} \left(\frac{t}{2\pi}\right) = \frac{1}{2\pi} f_{n-1}(t).$$

Ainsi,

$$c_p(g_n) = \frac{1}{2\pi} c_p(f_{n-1}).$$

On en déduit que

$$\forall n \geq 2, \quad c_p(f_n) = \frac{1}{2ip\pi} c_p(f_{n-1}).$$

La suite $(c_p(f_n))_{n\geq 1}$ est géométrique, de raison $\frac{1}{2ip\pi}$. Il reste à obtenir son premier terme. À l'aide d'un calcul simple,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_1(t) = t - \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$c_p(f_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{t}{2\pi} - \frac{1}{2}\right) e^{-ipt} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{t}{2\pi} e^{-ipt} dt$$

$$= \frac{-1}{4ip\pi^2}\left[te^{-ipt}\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{4ip\pi^2}\int_0^{2\pi} e^{-ipt} dt = \frac{-1}{2ip\pi}.$$

On en déduit que pour tout entier p non nul,

$$\forall n \geq 1, \quad c_p(f_n) = \frac{-1}{(2ip\pi)^n}.$$

4. Pour tout entier naturel k strictement positif, l'application f_{2k}, élément de $\mathcal{D}$, est $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Nous pouvons appliquer le théorème de Dirichlet.

$$\forall k \geq 1, \quad P_{2k}(0) = f_{2k}(0) = c_0(f_{2k}) + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(c_p(f_{2k}) + c_p(f_{-2k})\right)$$

$$= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{-1}{(2ip\pi)^{2k}} + \frac{-1}{(-2ip\pi)^{2k}} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k-1}\pi^{2k}} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}}.$$

On en déduit que

$$\forall k \geq 1, \quad \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2k}} = (-1)^{k+1} 2^{2k-1} \pi^{2k} P_{2k}(0).$$

5. Explicitons les premiers termes de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   $\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_1(t) = t - \frac{1}{2}$,
   $\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_2(t) = \frac{t^2}{2} - \frac{t}{2} + \frac{1}{12}$,
   $\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_3(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{12}$,
   $\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_4(t) = \frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{24} - \frac{1}{720}$,
   $\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_5(t) = \frac{t^5}{120} - \frac{t^4}{48} + \frac{t^3}{72} - \frac{t}{720}$,
   $\forall t \in \mathbb{R}, \quad P_6(t) = \frac{t^6}{720} - \frac{t^5}{240} + \frac{t^4}{288} - \frac{t^2}{1440} + \frac{1}{30240}$.

En utilisant le résultat précédent pour $k = 1$, 2 et 3, nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Pour tout entier N strictement positif, nous avons

$$\sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^6} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n)^6} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)^6}.$$

c'est-à-dire,

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(2n-1)^6} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^6} - \frac{1}{64} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^6}.$$

En passant à la limite, nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{945} - \frac{1}{64}.\frac{\pi^6}{945} = \frac{63}{64}.\frac{\pi^6}{945} = \frac{\pi^6}{960}.$$

♣

21.6.2 Valeur moyenne d'une fonction périodique continue

Exercice 21.2 Soit α un réel tel que $\frac{\alpha}{\pi}$ soit irrationnel. Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. On pose :

$$\forall n \in N^* \quad u_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k\alpha).$$

Montrer que la suite $(u_n(f))$ converge vers la valeur moyenne de f sur une période, c'est-à-dire

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

On pourra commencer par le cas où f est un monôme trigonométrique puis un polynôme trigonométrique.

Solution. Le résultat est évident pour les applications constantes. On considère p un entier non nul et le monôme trigonométrique e_p que l'on a défini par,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad e_p(t) = e^{ipt}.$$

Le réel $\frac{\alpha}{\pi}$ étant irrationnel, le réel $p\alpha$ ne peut appartenir à $2\pi\mathbb{Z}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n(e_p) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ipk\alpha} = \frac{1}{n} \frac{e^{ipn\alpha} - 1}{e^{ip\alpha} - 1}.$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n(e_p)| \leq \frac{1}{n} \frac{2}{|e^{ip\alpha} - 1|}$$

et

$$\lim_{n \to +\infty} u_n(e_p) = 0.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ipt} dt = \left[\frac{e^{ipt}}{2ip\pi} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Ainsi,

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{n \to +\infty} u_n(e_p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e_p(t) dt.$$

Par linéarité de l'intégrale et de la limite d'une suite convergente, nous pouvons prolonger ce résultat aux polynômes trigonométriques.
On considère désormais une application f continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique. Nous savons, d'après le théorème de Féjer que nous pouvons l'approcher uniformément par une suite de polynômes trigonométriques. Soit ε un réel strictement positif et P_ε un polynôme trigonométrique vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t) - P_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon.$$

Alors, d'une part,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n(f) - u_n(P_\varepsilon)| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon = \varepsilon,$$

d'autre part,

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\varepsilon(t) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon dt = \varepsilon.$$

Considérons un entier naturel N vérifiant

$$\forall n \geq N, \quad \left| u_n(P_\varepsilon) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\varepsilon(t) dt \right| \leq \varepsilon.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \forall n \geq N, \quad & \left| u_n(f) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \right| \\ & \leq |u_n(f) - u_n(P_\varepsilon)| + \left| u_n(P_\varepsilon) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\varepsilon(t) dt \right| \\ & + \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\varepsilon(t) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \right| \\ & \leq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Nous obtenons le résultat désiré. ♣

Chapitre 22

Probabilités

Remarques préliminaires

Dans ce chapitre, chaque ensemble que l'on utilisera est, en général,
- soit fini,
- soit dénombrable (en général $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^*$)
- soit $\mathbb{R}$ ou un intervalle de $\mathbb{R}$,
- soit un ensemble que l'on n'aura pas besoin d'expliciter, souvent noté Ω.

22.1 Tribus. Espaces probabilisables. Événements

Définition : Soit Ω un ensemble. On note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. On appelle tribu de Ω une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ vérifiant

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. $\forall A \in \mathcal{A}, \quad A^c \in \mathcal{A}$ où A^c est le complémentaire de A dans Ω.
3. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé espace probabilisable.

Proposition 22.1 *Si $\mathcal{A}$ est une tribu, on a les propriétés suivantes :*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$,
2. *Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ alors $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

Preuve.

1. $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{A}$.
2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

$$\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)^c \in \mathcal{A}.$$

♣

Remarque 22.1 *Si Ω est fini ou dénombrable, on choisit en général $\mathcal{P}(\Omega)$ pour tribu.*

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. Nous avons les définitions suivantes :

1. Tout élément A de $\mathcal{A}$ est appelé événement.
2. Ω est appelé événement certain.
3. $\emptyset$ est appelé événement impossible.
4. Si deux événements A et B vérifient $A \cap B = \emptyset$, on dit qu'ils sont incompatibles.
5. Les événements $A_1, A_2, \cdots, A_n$ forment un système complet d'événements si les parties $A_1, A_2, \cdots, A_n$ forment une partition de Ω.

Notation : Si deux événements A et B sont incompatibles, leur union sera notée

$$A \dot{\cup} B.$$

Nous adopterons cette notation pour ce chapitre. Il n'existe, à ma connaissance, aucune notation officielle.

Proposition 22.2 *Soient Ω un ensemble, $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ une famille de tribus de Ω indicée par I, ensemble non vide. Alors, l'intersection de ces tibus*

$$(\cap_{i \in I} \mathcal{A}_i)$$

est une tribu de Ω.

Preuve.

1. $$\forall i \in I, \quad \Omega \in \mathcal{A}_i.$$

   Donc,

   $$\Omega \in (\cap_{i \in I} \mathcal{A}_i).$$

2. Soit A une partie de Ω appartenant à $(\cap_{i \in I} \mathcal{A}_i)$. Alors,

   $$\forall i \in I, \quad A^c \in \mathcal{A}_i.$$

   Ainsi,

   $$A^c \in (\cap_{i \in I} \mathcal{A}_i).$$

3. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de Ω appartenant à $(\cap_{i \in I} \mathcal{A}_i)$. Alors,

   $$\forall i \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \in \mathcal{A}_i.$$

Pour tout élément i de I, $\mathcal{A}_i$ étant une tribu, on a

$$\forall i \in I, \quad (\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in \mathcal{A}_i.$$

On en déduit que

$$(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in (\cap_{i\in I} \mathcal{A}_i).$$

Nous venons de prouver que $(\cap_{i\in I} \mathcal{A}_i)$ est une tribu de Ω. ♣

Proposition-définition 22.3 *On appelle tribu engendrée par un ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ la plus petite tribu de parties de Ω contenant $\mathcal{C}$. C'est l'intersection de toutes les tribus contenant $\mathcal{C}$.*

Preuve. $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu contenant $\mathcal{C}$. On en déduit que l'ensemble des tribus contenant $\mathcal{C}$ est non vide. L'intersection des tribus contenant $\mathcal{C}$ est ainsi la tribu engendrée par $\mathcal{C}$. ♣

Proposition 22.4 *Si Ω est fini ou dénombrable, alors l'ensemble des singletons engendre $\mathcal{P}(\Omega)$.*

Preuve. On considère Ω un ensemble fini ou dénombrable et $\mathcal{A}$ la tribu engendrée par les singletons. Soit A une partie de Ω. Cette partie est finie ou dénombrable. Elle s'écrit ainsi comme une union au plus dénombrable de singletons. Elle appartient donc à $\mathcal{A}$. On en déduit que $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. ♣

Définition : Soit (E, d) un espace métrique. On appelle tribu des boréliens, la tribu engendrée par les ouverts. Elle est notée $\mathcal{B}(E)$.

Remarque 22.2 *Si Ω muni d'une métrique forme un espace métrique séparable, c'est-à-dire contenant une partie dénombrable dense, on choisit la tribu des boréliens. C'est en particulier le cas pour $\mathbb{R}$, les intervalles de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$.*

Proposition admise 22.5 *Dans un espace métrique séparable, tout ouvert est réunion dénombrable de boules ouvertes.*

Cette proposition étant admise, nous obtenons le corollaire

Corollaire 22.6 *Dans un espace métrique séparable $(\mathbb{E}, d)$, la tribu des boréliens $\mathcal{B}(\mathbb{E})$ est la tribu engendrée par les boules ouvertes.*

Preuve. Notons $\mathcal{B}_1$ la tribu engendrée par les boules ouvertes. Toute boule ouverte étant un ouvert, on a

$$\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}(\mathbb{E}).$$

D'autre part, tout ouvert de $\mathbb{E}$ étant union dénombrable de boules ouvertes est élément de $\mathcal{B}_1$. Ainsi

$$\mathcal{B}(\mathbb{E}) \subset \mathcal{B}_1.$$

D'où,

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{E}).$$

La tribu $\mathcal{B}_1$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{E}$. ♣

Proposition 22.7 *1. La tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, est la tribu engendrée par l'ensemble des intervalles ouverts de la forme $]a, b[$.*

2. La tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$ est la tribu engendrée par l'ensemble des intervalles fermés de la forme $]-\infty, a]$.

3. La tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$ est la tribu engendrée par l'ensemble des segments de $\mathbb{R}$.

Remarque 22.3 *On pourrait énoncer cette proposition avec d'autres types d'intervalles. $]-\infty, a[$, $[a; b[$ etc.*

Preuve.

1. Notons $\mathcal{B}_1$ la tribu engendrée par les intervalles de la forme $]a, b[$, c'est-à-dire les boules ouvertes. D'après le corolaire 22.6,

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

La tribu $\mathcal{B}_1$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.

2. Notons $\mathcal{B}_2$ la tribu engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty, a]$. Remarquons que tout intervalle de la forme $]-\infty, a]$ étant complémentaire d'une partie ouverte de $\mathbb{R}$ est élément de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Tout intervalle de la forme $]-\infty, a[$ appartient à $\mathcal{B}_2$. En effet,

$$]-\infty, a[= \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left]-\infty, a - \frac{1}{2^n}\right].$$

Par passage au complémentaire, les intervalles de la forme

$$]a, +\infty[\quad \text{et} \quad [a, +\infty[$$

appartiennent à $\mathcal{B}_2$. On en déduit que toute boule ouverte $]a, b[$ appartient à $\mathcal{B}_2$. En effet,

$$]a, b[=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[.$$

Ainsi, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ étant la tribu engendrée par les boules ouvertes est incluse dans $\mathcal{B}_2$. On obtient ainsi,

$$\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

La tribu $\mathcal{B}_2$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}$.

3. Notons $\mathcal{B}_3$ la tribu engendrée par les segments. Remarquons que tout segment étant une partie fermée de $\mathbb{R}$, appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ainsi,
$$\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$
Tout intervalle de la forme $]-\infty, a]$ appartient à $\mathcal{B}_3$. En effet
$$]-\infty, a] = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [a-n; a].$$
Ainsi,
$$\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_3.$$
Puisque $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B}$, on obtient
$$\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}.$$

♣

22.2 Probabilités. Espaces probabilisés

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application $\mathbb{P}$ définie sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans $[0,1]$ vérifiant :

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,
2. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles,
$$\mathbb{P}\left(\dot{\cup}_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n).$$

Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est appelé espace probabilisé.

Corollaire 22.8 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Alors,*

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0,$

2. Si n est un entier strictement positif et $A_1, \cdots, A_n$, n événements deux à deux incompatibles, on a
$$\mathbb{P}(\dot{\cup}_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Preuve.

1. Considérons la suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ incompatibles deux à deux définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n = \emptyset.$$
Alors,
$$\mathbb{P}(\dot{\cup}_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\emptyset).$$

Cette série est convergente. Donc l'unique terme général de cette série, $\mathbb{P}(\emptyset)$ est nul.

2. Considérons la suite d'événements $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} \forall k \leq n, & B_k = A_k, \\ \forall k \geq n, & B_k = \emptyset. \end{cases}$$

Alors,

$$\mathbb{P}(\dot\cup_{k=1}^{n} A_k) = \mathbb{P}(\cup_{k\in\mathbb{N}} B_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

♣

Voici une proposition bien utile.

Proposition 22.9 *On considère $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A_1, A_2, \cdots, A_n$ un système complet d'événements. Alors,*

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap A_k).$$

Preuve. Nous avons

$$\Omega = A_1 \dot\cup A_2 \cdots \dot\cup A_n.$$

Donc,

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad A = A \cap \Omega = A \cap \left(\dot\cup_{k=1}^{n} A_k\right) = \dot\cup_{k=1}^{n} (A \cap A_k).$$

D'où le résultat. ♣

Proposition 22.10 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On a les propriétés suivantes :*

1. $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2, \quad \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$
2. $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2, \quad A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B),$
3. *Pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{A}$,* $\mathbb{P}\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
4. *Pour toute suite décroissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{A}$,* $\mathbb{P}\left(\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.
5. *Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements de $\mathcal{A}$,* $\mathbb{P}\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n)$.

Preuve.

1. Pour tout événement B, les événements B et B^c forment un système complet d'événements. Ainsi,

$$\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2, \quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus B). \quad (22.21)$$

De même,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \setminus A). \quad (22.22)$$

De plus,

$$\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2, \quad (A \cup B) = (A \cap B) \dot{\cup} (A \setminus B) \dot{\cup} (B \setminus A).$$

et

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A). \quad (22.23)$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 2\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \setminus B) + \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cup B).$$

2. $$\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2, \quad B = (B \cap A) \dot{\cup} (B \cap A^c).$$

Si A est inclus dans B alors,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) \geq \mathbb{P}(A).$$

3. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, la suite réelle $(\mathbb{P}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1, donc convergente. L'existence de la limite est justifiée. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, nous avons

$$\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \dot{\cup}_{k=0}^{+\infty} (A_{k+1} \setminus A_k) \dot{\cup} A_0.$$

$\mathbb{P}$ étant une probabilité,

$$\mathbb{P}\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}(A_0) + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}).$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad A_k = (A_k \cap A_{k-1}) \dot{\cup} \left(A_k \cap A_{k-1}^c\right) = A_{k-1} \dot{\cup} (A_k \setminus A_{k-1}).$$

Ainsi,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_{k-1}) + \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(A_0) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1})$$

$$= \mathbb{P}(A_0) + \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{P}(A_k) - \mathbb{P}(A_{k-1})) = \mathbb{P}(A_n).$$

D'où,

$$\mathbb{P}\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{P}(A_0) + \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k \setminus A_{k-1}) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

4. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante, la suite $(A_n^c)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi,

$$\mathbb{P}(\cap_{n\in\mathbb{N}}A_n) = 1 - \mathbb{P}(\cup_{n\in\mathbb{N}}A_n^c) = 1 - \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n^c)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}(1-\mathbb{P}(A_n^c)) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n).$$

5. D'après la première propriété de la proposition, nous avons

$$\forall (A,B)\in\mathcal{A}^2, \quad \mathbb{P}(A\cup B)\leq \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B).$$

À l'aide d'une récurrence et d'une majoration évidentes, on obtient

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad \mathbb{P}\left(\cup_{k=0}^n A_k\right)\leq \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(A_k)\leq \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A_k).$$

Ce dernier terme étant éventuellement égal à $+\infty$. Ainsi, en passant à la limite,

$$\mathbb{P}\left(\cup_{n=0}^{+\infty}A_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\cup_{k=0}^n A_k\right)\leq \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(A_k).$$

♣

22.3 Probabilités sur un espace dénombrable

Proposition 22.11 *Soient n un entier strictement positif et $\Omega = \{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$ un ensemble fini de cardinal n. Tout n-uplet $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant,*

1. $\forall k\in\{1,2,\cdots n\} \quad a_k\geq 0,$

2. $\sum_{k=1}^n a_k = 1,$

détermine une probabilité sur $(\Omega,\mathcal{P}(\Omega))$ avec,

$$\forall k\in\{1,2,\cdots n\}, \quad \mathbb{P}(\{\omega_k\}) = a_k.$$

On obtient alors

$$\forall A\in\mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{(k/\omega_k\in A)} a_k.$$

Exemple : Si Ω est un ensemble fini, on définit la probabilité uniforme par :

$$\forall \omega\in\Omega, \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{card\Omega}.$$

On obtient ainsi

$$\forall A\in\mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \frac{cardA}{card\Omega}.$$

Proposition admise 22.12 *Soit* $\Omega = \{\omega_n / n \in \mathbb{N}\}$ *un ensemble dénombrable. Toute suite réelle* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *vérifiant,*

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq 0,$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1,$

détermine une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ *avec,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(\{\omega_n\}) = a_n.$$

On obtient ainsi

$$\forall A \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \mathbb{P}(A) = \sum_{(k/\omega_k \in A)} a_k.$$

Exemple : Sur l'espace probabilisable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$

1. si p est un réel appartenant à $]0,1[$, il existe une probabilité unique vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(\{k\}) = (1-p)p^k.$$

2. si λ est un réel strictement positif, il existe une probabilité unique vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(\{k\}) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

22.4 Probabilités sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Définition : Soit $\mathbb{P}$ une probabilité définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. On appelle fonction de répartition de $\mathbb{P}$, l'application F définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad F(a) = \mathbb{P}(]-\infty, a]).$$

Proposition admise 22.13 *Toute probabilité* $\mathbb{P}$ *définie sur* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *est caractérisée par sa fonction de répartition.*

Proposition 22.14 *On considère une probabilité $\mathbb{P}$ définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et F sa fonction de répartition. On a les propriétés suivantes,*

1. *F est croissante sur $\mathbb{R}$.*
2. $$\lim_{a \to +\infty} F(a) = 1.$$
3. $$\lim_{a \to -\infty} F(a) = 0.$$
4. *F est continue à droite sur $\mathbb{R}$.*
5. *F admet une limite à gauche en tout réel a avec,*
$$\lim_{x \to a^-} F(x) = \mathbb{P}(]-\infty, a[).$$
6. $$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(\{a\}) = F(a) - \lim_{x \to a^-} F(x).$$

Preuve.

1. Soit a et b deux réels vérifiant $a \leq b$. Nous avons
$$]-\infty, a] \subset]-\infty, b].$$
Ainsi,
$$F(a) = \mathbb{P}(]-\infty, a]) \leq \mathbb{P}(]-\infty, b]) = F(b).$$
2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de réels ayant pour limite $+\infty$. La suite d'événements $(]-\infty, a_n])_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi,
$$\lim_{n \to +\infty} F(a_n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(]-\infty, a_n]) = \mathbb{P}\left(\cup_{n \in \mathbb{N}}]-\infty; a_n]\right) = \mathbb{P}(\mathbb{R}) = 1.$$
3. Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels ayant pour limite $-\infty$. La suite d'événements $(]-\infty, b_n])_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi,
$$\lim_{n \to +\infty} F(b_n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(]-\infty, b_n] = \mathbb{P}\left(\cap_{n \in \mathbb{N}}]-\infty; b_n]\right) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$
4. Soit a un réel. On considère une suite décroissante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers a. La suite d'événements $(]-\infty, x_n])_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Ainsi,
$$\lim_{n \to +\infty} F(x_n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(]-\infty, x_n] = \mathbb{P}\left(\cap_{n \in \mathbb{N}}]-\infty; x_n]\right) = \mathbb{P}(]-\infty, a])$$
$$= F(a).$$
On en déduit que l'application F est continue à droite en a.
5. On considère a un réel et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle strictement croissante convergente vers le réel a. La suite d'événements $(]-\infty, y_n])_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi,
$$\lim_{n \to +\infty} F(y_n) = \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(]-\infty, y_n] = \mathbb{P}\left(\cup_{n \in \mathbb{N}}]-\infty; y_n]\right) = \mathbb{P}(]-\infty, a[).$$
L'application F admet le réel $\mathbb{P}(]-\infty, a[$ pour limite à gauche en a.

6.

$$F(a) = \mathbb{P}(]-\infty, a]) = \mathbb{P}(]-\infty, a[) + \mathbb{P}(\{a\}).$$

D'où le résultat.

♣

Corollaire 22.15 *On considère une probabilité $\mathbb{P}$ définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, F sa fonction de répartition et a un réel. L'application F est continue en a si et seulement si $\mathbb{P}(a) = 0$.*

Preuve. Évident. ♣

Proposition admise 22.16 *On considère une application F définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les 4 premières propriétés énoncées dans la proposition 22.14. F détermine alors une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que,*

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P}(]-\infty, a]) = F(a).$$

Remarque 22.4 *On se restreint désormais aux probabilités $\mathbb{P}$ définies sur l'espace probabilisable $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dont la fonction de répartition est*

1. *Soit constante par morceaux. On dit alors que $\mathbb{P}$ est une probabilité discrète sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*
2. *Soit continue et C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$. On dit alors que $\mathbb{P}$ est une probabilité continue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*
3. *Dans le cas où la probabilité $\mathbb{P}$ est continue, on a*

   (a) Pour tout réel a
   $\mathbb{P}(\{a\}) = 0,$
   $\mathbb{P}(]-\infty, a[) = \mathbb{P}(]-\infty, a]),$
   $\mathbb{P}(]a, +\infty[) = \mathbb{P}([a, +\infty[).$

   (b)

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad a < b, \quad \mathbb{P}(]a, b[) = \mathbb{P}(]a, b]) = \mathbb{P}([a, b[) = \mathbb{P}([a, b]).$$

22.4.1 Probabilités discrètes sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

On est dans le cadre de la section 22.3

22.4.2 Probabilités continues sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Proposition-définition 22.17 *On considère $\mathbb{P}$, une probabilité continue de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et F sa fonction de répartition. Une fonction f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles positives vérifiant en tout point x de dérivabilité de F*

$$f(x) = F'(x),$$

est appelée fonction de densité de la probabilité $\mathbb{P}$. On a, de plus, les propriétés suivantes

1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a < b, \quad \mathbb{P}([a,b]) = \int_a^b f(x)dx$.
2. *Au voisinage de $+\infty$, l'intégrale généralisée de l'application f est convergente et*
$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = \mathbb{P}([a, +\infty[).$$
3. *Au voisinage de $-\infty$, l'intégrale généralisée de l'application f est convergente et*
$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \mathbb{P}(]-\infty, a]).$$
4. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$

Preuve.

1. L'application F est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[a,b]$. Considérons $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une subdivision du segment $[a,b]$ telle que pour tout entier i positif et strictement inférieur à n, il existe une application g_i définie et $\mathcal{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$ vérifiant
$$\forall x \in [a_i, a_{i+1}], \quad g_i(x) = F(x),$$
$$\forall x \in]a_i, a_{i+1}[, \quad g_i'(x) = F'(x) = f(x).$$
Alors,
$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} g_i'(t)dt$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} (g_i(a_{i+1}) - g_i(a_i)) = \sum_{i=0}^{n-1} (F(a_{i+1}) - F(a_i))$$
$$= F(b) - F(a) = \mathbb{P}(]-\infty, b]) - F(a) = \mathbb{P}(]-\infty, a]) + \mathbb{P}(]a,b]) - F(a) = \mathbb{P}(]a,b]).$$
la remarque 22.4.3(a) permet de conclure.
2. On considère un réel a, une suite croissante de réels supérieurs à a, vérifiant
$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty.$$

La suite $([a; a_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi,

$$\mathbb{P}([a; +\infty[) = \mathbb{P}\left(\cup_{n\in\mathbb{N}}[a; a_n]\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([a; a_n]\right) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{a_n} f(t)dt.$$

On en déduit que l'intégrale généralisée de l'application f sur l'intervalle $[a; +\infty[$ est convergente et

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \mathbb{P}([a, +\infty[).$$

3. On considère un réel a, une suite décroissante de réels inférieurs à a, vérifiant

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty.$$

La suite $([a_n; a])_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Ainsi,

$$\mathbb{P}(]-\infty; a]) = \mathbb{P}\left(\cup_{n\in\mathbb{N}}[a_n; a]\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left([a_n; a]\right) = \lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^{a} f(t)dt.$$

On en déduit que l'intégrale généralisée de l'application f sur l'intervalle $]-\infty; a]$ est convergente et

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \mathbb{P}(]-\infty; a[).$$

4.
$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(]-\infty; 0]) + \mathbb{P}(]0; +\infty[) \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx. \end{aligned}$$

♣

Exemples :

1. Pour tout réel λ strictement positif, l'application f_λ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

est une densité de la probabilité dont la fonction de répartition F_λ est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_\lambda(x) = 1_{\mathbb{R}^+}(x).(1 - e^{-\lambda x}).$$

2. L'application g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

est une densité de la probabilité dont la fonction de répartition G est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}.$$

22.5 Probabilité conditionnelle

Définition : Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, A un événement et B un événement de probabilité non nulle. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, le réel :

$$\mathbb{P}(A/B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Proposition 22.18 *Si B est un événement de probabilité non nulle, l'application*

$$A \mapsto \mathbb{P}(A/B)$$

est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Preuve.

1. $$\mathbb{P}(\Omega/B) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

2. On considère $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. La suite $(A_n \cap B)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite d'événements deux à deux incompatibles. Ainsi,

$$\mathbb{P}\left((\dot\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cap B\right) = \mathbb{P}\left(\dot\cup_{n\in\mathbb{N}}(A_n \cap B)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n \cap B).$$

D'où le résultat.

♣

Proposition 22.19 *Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Alors*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A/B)\mathbb{P}(B).$$

Proposition 22.20 *Soient $B_1, B_2, \cdots, B_n$ un système complet d'événements de probabilité non nulle. Alors pour tout événement A,*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A/B_k)\mathbb{P}(B_k).$$

Preuve.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A \cap (\dot\cup_{k=1}^{n} B_k)) = \mathbb{P}(\dot\cup_{k=1}^{n}(A \cap B_k))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A/B_k)\mathbb{P}(B_k).$$

♣

Exercice 22.1 Trois enfants A, B et C jouent à la balle. Lorsque A a la balle, il la lance à B avec une probabilité 0,75 ou à C avec une probabilité 0,25. Lorsque B a la balle, il la lance à A avec une probabilité 0,75 ou à C avec une probabilité 0,25. Lorsque C a la balle, il la lance toujours à B.

- On note A_0 (respectivement B_0 et C_0), l'événement : le joueur A (respectivement B et C) a la balle au début du jeu.
- Pour tout entier n strictement positif, on note A_n (respectivement B_n et C_n), l'événement : le joueur A (respectivement B et C) a la balle après le n-ième lancer.
- Pour tout entier naturel n, on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n et C_n et X_n le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = MX_n.$$
2. En déduire pour tout entier naturel n, X_n en fonction de M, n et X_0.
3. Montrer que M admet trois valeurs propres réelles 1, λ_1 et λ_2 avec $-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 0$.
4. Montrer qu'il existe un unique vecteur u_0 qui soit vecteur propre pour la valeur propre 1 et dont la somme des coordonnées soit égale à 1.
5. On considère alors une base de vecteurs propres (u_0, u_1, u_2) où u_0 est le vecteur indiqué dans la question précédente. Montrer que la première coordonnée du vecteur X_0 dans la base (u_0, u_1, u_2) est égale à 1.
6. En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et calculer leur limite.

Solution.

1. En utilisant la proposition 22.20, on obtient pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_{n+1}/A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}/B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}/C_n)\mathbb{P}(C_n) \\
&= 0,75b_n. \\
\mathbb{P}(B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_{n+1}/A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}/B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(B_{n+1}/C_n)\mathbb{P}(C_n) \\
&= 0,75a_n + c_n. \\
\mathbb{P}(C_{n+1}) &= \mathbb{P}(C_{n+1}/A_n)\mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(C_{n+1}/B_n)\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_{n+1}/C_n)\mathbb{P}(C_n)
\end{aligned}$$

$$= 0,25a_n + 0,25b_n.$$

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0,75 & 0 \\ 0,75 & 0 & 1 \\ 0,25 & 0,25 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. A l'aide d'une récurrence évidente, on obtient,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = M^n X_0.$$

3. On remarque que la somme des termes de chaque colonne de la matrice M est égale à 1. Donc le vecteur $(1, 1, 1)$ est vecteur propre de la matrice transposée de M pour la valeur propre 1. On en déduit que 1 est valeur propre de la matrice M. Après calcul du polynôme caractéristique, on obtient les deux autres valeurs propres $\lambda_1 = -\frac{3}{4}$ et $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$.
4. Le sous-espace propre pour la valeur propre 1 est la droite dirigée par le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 12 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}$. Nous obtenons $u_0 = \begin{pmatrix} \frac{12}{35} \\ \frac{16}{35} \\ \frac{7}{35} \end{pmatrix}$.
5. Notons $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ les coordonnées du vecteur X_0 dans la base (u_0, u_1, u_2).

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = M^n X_0 = M^n(\alpha_0 u_o + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)$$

$$= \alpha_0 u_o + \lambda_1^n \alpha_1 u_1 + \lambda_2^n \alpha_2 u_2.$$

Pour tout entier naturel n, les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n + b_n + c_n = \mathbb{P}(A_n) + \mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(C_n) = 1.$$

Donc, pour tout naturel n, la somme des composantes du vecteur X_n est égal à 1. Notons s_1 et s_2 les sommes des composantes des vecteurs u_1 et u_2. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 = \alpha_0 + \lambda_1^n \alpha_1 s_1 + \lambda_2^n \alpha_2 s_2.$$

Les réels λ_1 et λ_2 étant des réels dont la valeur absolue est strictement inférieur à 1, en passant à la limite on obtient $\alpha_0 = 1$.
6. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = u_o + \lambda_1^n \alpha_1 u_1 + \lambda_2^n \alpha_2 u_2.$$

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers le vecteur u_0. Ainsi, les trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes respectivement vers $\frac{12}{35}$, $\frac{16}{35}$ et $\frac{7}{35}$.

♣

22.6 Événements indépendants

Définition : Soient A et B deux événements. On dit que A et B sont indépendants si
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Proposition 22.21 *Soient A et B deux événements de probabilité non nulle. Alors*
$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B).$$

De manière plus générale, on définit l'indépendance de plusieurs événements.

Définition : Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ des éléments de $\mathcal{A}$. On dit que $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont indépendants si pour toute partie J non vide de $\{1, 2, \cdots, n\}$, on a
$$\mathbb{P}(\cap_{i\in J} A_i) = \Pi_{i\in J}\mathbb{P}(A_i).$$

Exercice 22.2 Soient $A_1, A_2, \cdots, A_n$ des événements indépendants.

1. Montrer que $A_1^c, A_2, \cdots, A_n$ sont des événements indépendants.
2. En déduire que pour tout entier k compris entre 1 et n, les événements
$$A_1^c, \cdots, A_k^c, A_{k+1}, \cdots, A_n$$
sont indépendants.

1. Soit J une partie de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$ contenant strictement le singleton $\{1\}$. Alors,
$$\cap_{i\in J\setminus\{1\}} A_i = \left[A_1 \cap \left(\cap_{i\in J\setminus\{1\}} A_i\right)\right] \dot{\cup} \left[A_1^c \cap \left(\cap_{i\in J\setminus\{1\}} A_i\right)\right].$$
Donc,
$$\mathbb{P}\left(\cap_{i\in J\setminus\{1\}} A_i\right) = \mathbb{P}\left(A_1 \cap \left(\cap_{i\in J\setminus\{1\}} A_i\right)\right) + \mathbb{P}\left(A_1^c \cap \left(\cap_{i\in J\setminus\{1\}} A_i\right)\right).$$
En utilisant l'hypothèse,
$$P\left(A_1^c \cap \left(\cap_{i\in J\setminus\{1\}} A_i\right)\right) = \prod_{i\in J\setminus\{1\}} \mathbb{P}(A_i) - \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)$$
$$= (1 - \mathbb{P}(A_1)) \prod_{i\in J\setminus\{1\}} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A_1^c) \prod_{i\in J\setminus\{1\}} \mathbb{P}(A_i).$$

Si J ne contient pas le singleton $\{1\}$, il suffit d'utiliser l'hypothèse.
Les événements $A_1^c, A_2, \cdots, A_n$ sont donc indépendants.

2. Il suffit d'effectuer une récurrence finie en utilisant le résultat de la question précédente.

Exercice 22.3 On considère deux gènes a et b tels que la redondance de l'un d'entre eux (*i. e.* le fait de posséder aa ou bb) entraîne l'acquisition d'un caractère $\mathcal{C}$. Anselme et Colette possèdent chacun la combinaison ab et attendent un enfant : ils lui transmettront chacun et indépendamment, soit le gène a, soit le gène b, avec la même probabilité (c'est-à-dire $\frac{1}{2}$). On considère les événements :

A = « Colette transmet le gène a »,
B = « Anselme transmet le gène b »,
C = « l'enfant présente le caractère $\mathcal{C}$ ».

Montrer que les événements A, B, et C ne sont pas indépendants, mais seulement deux à deux indépendants.

Solution. Par hypothèse, les événements A et B sont indépendants. Ainsi,

$$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) + \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}.$$

De plus,

$$\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) = \frac{1}{4}.$$
$$\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B) = \frac{1}{4}.$$
$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0.$$

Les événements A, B et C ne sont pas indépendants mais seulement deux à deux indépendants. ♣

Exercice 22.4 (Fonction d'Euler). Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On choisit au hasard un des nombres entiers compris entre 1 et n, tous les choix étant équiprobables. Soit p un entier naturel non nul inférieur ou égal à n. Soit A_p l'événement : « le nombre choisi est divisible par p ».

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$ si p divise n.
2. Montrer que si $p_1, p_2, \cdots p_k$ sont des diviseurs premiers de n distincts, les événements $A_{p_1}, A_{p_2}, \cdots A_{p_k}$ sont indépendants.
3. On appelle fonction indicatrice d'Euler la fonction Φ définie sur les entiers naturels dont la valeur $\Phi(n)$ est égale au nombre d'entiers naturels premiers avec n et inférieurs à n. Montrer que

$$\Phi(n) = n \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ \text{et divisant n}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Solution. On considère l'enemble $\Omega = \{1, \cdots, n\}$ que l'on munit de la tribu $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme, c'est-à-dire,

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \quad \mathbb{P}(\{k\}) = \frac{1}{n}.$$

1. Pour tout entier premier p divisant n, on a

$$\mathbb{P}(A_p) = \frac{Card(A_p)}{Card(\Omega)} = \frac{\frac{n}{p}}{n} = \frac{1}{p}.$$

2. Considérons une partie J de $\{1, 2, \cdots k\}$ non vide. Les nombres p_i, pour i appartenant à J, étant premiers et distincts, sont premiers entre eux. Un nombre est divisible par chacun d'eux, si et seulement si il est divisible par leur produit. Donc,

$$\cap_{i \in J} A_{p_i} = A_{\left(\prod_{i \in J} p_i\right)}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\cap_{i \in J} A_{p_i}\right) = \mathbb{P}(A_{\left(\prod_{i \in J} p_i\right)}) = \frac{1}{\left(\prod_{i \in J} p_i\right)} = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_{p_i}).$$

Les événements $A_{p_1}, A_{p_2}, \cdots A_{p_k}$ sont indépendants.

3. Notons A l'événement : « le nombre choisi est premier avec n ». On a

$$\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{n} = \frac{\Phi(n)}{n}.$$

On note $p_1, p_2, \cdots, p_k$ les diviseurs premiers de n. Le nombre choisi est premier avec n, si et seulement si il n'est divisible par aucun diviseur premier de n. Donc

$$A = \cap_{i=1}^{k} A_{p_i}^c.$$

D'après la question précédente et l'exercice 22.2, ces événements sont indépendants. Ainsi,

$$\mathbb{P}(A) = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A_{p_i}^c) = \prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

On obtient le résultat désiré.

♣

22.7 Variable aléatoire réelle

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, toute application X définie sur Ω à valeurs réelles et vérifiant :

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad X^{-1}(B) \in \mathcal{A}. \qquad (22.24)$$

Remarque 22.5 Important. *D'après la proposition 22.7, page 400, nous pouvons remplacer les boréliens*

1. *par les intervalles de la forme* $]a; b[$,
2. *ou par les segments,*
3. *ou par les intervalles de la forme* $]-\infty; a]$.

Proposition admise 22.22 *Muni des lois* $+$, $\times$, $.$, *l'ensemble des variables aléatoires réelles, définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *est une algèbre sur* $\mathbb{R}$ *que l'on notera* $\mathcal{V}(\Omega)$.

Remarque 22.6 *La condition (22.24) sera toujours vérifiée dans ce chapitre.*

22.7.1 Loi d'une variable aléatoire réelle

Théorème-définition 22.23 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *est un espace probabilisé et* X *une variable aléatoire réelle définie sur cet espace. L'application suivante définie sur* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *par,*

$$B \longrightarrow \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(\omega / X(\omega) \in B),$$

définit une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(R))$. *Cette probabilité est appelée loi de* X.

Définition : Soit X une variable aléatoire réelle. On appelle fonction de répartition de X, la fonction de répartition de sa loi de probabilité. On a ainsi :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad F(a) = \mathbb{P}(X \leq a).$$

Proposition admise 22.24 *La fonction de répartition caractérise la loi de la variable aléatoire réelle.*

Définition : Soit X une variable aléatoire réelle.

1. Si sa loi de X est discrète, on dit qu'elle est une variable aléatoire discrète.
2. Si sa loi de X est continue, on dit qu'elle est une variable aléatoire continue.

Remarque 22.7 *1.* On se restreint désormais à ces deux types de variables.

2. Pour la caractérisation des lois de probabilité, on pourra se référer à la section 22.4.

22.7.2 Variables aléatoires réelles indépendantes

Définition : Des variables aléatoires réelles $X_1, X_2, \cdots X_n$ sont indépendantes si, pour tous boréliens $B_1, B_2 \cdots B_n$, on a :

$$\mathbb{P}[(X_1 \in B_1) \cap (X_2 \in B_2) \cap \cdots \cap (X_n \in B_n)] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \in B_i).$$

Remarque 22.8 Important. *D'après la proposition 22.7 page 400, nous pouvons remplacer la famille de boréliens $(B_i)_{i\in I}$*

1. *par une famille d'intervalles de la forme $(]a_i; b_i[)_{i\in I}$,*
2. *ou par une famille de segments $([a_i; b_i])_{i\in I}$,*
3. *ou par une famille d'intervalles de la forme $(]-\infty; a_i])_{i\in I}$.*
4. *Dans le cas où les variables sont discrètes, on peut remplacer la famille de boréliens $(B_i)_{i\in I}$ par une famille de singletons $(\{k_i\})_{i\in I}$ où, pour tout élément i de I, k_i est un réel.*

Définition : On dit qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires réelles est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, si pour tout entier positif N, les variables $(X_i)_{0\leq i\leq N}$ sont indépendantes.

Exercice 22.5 Soient $X_1, X_2, \cdots X_n$, n variables aléatoires réelles indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ et $f_1, f_2, \cdots f_n$, n applications définies et continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Montrer que $f_1 \circ X_1, f_2 \circ X_2, \cdots f_n \circ X_n$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes.

Solution. Soit k un entier compris entre 1 et n et θ_k un ouvert de $\mathbb{R}$. Alors,

$$[f_k(X_k)]^{-1}(\theta_k) = X_k^{-1}\left(f_k^{-1}(\theta_k)\right).$$

L'application f_k étant continue sur $\mathbb{R}$, $f_k^{-1}(\theta_k)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ (voir la proposition 3.8, page 37) et X_k étant une variable aléatoire, $X_k^{-1}\left(f_k^{-1}(\theta_k)\right)$ est un élément de la tribu $\mathcal{A}$. Ainsi pour tout entier k compris entre 1 et n, $(f_k(X_k))$ est une variable aléatoire réelle.
On considère $(\theta_k)_{1\leq k\leq n}$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(f_k(X_k)) \in \theta_k)\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(X_k \in f_k^{-1}(\theta_k))\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \in f_k^{-1}(\theta_k)) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(f_k(X_k) \in (\theta_k)).$$

Les variables aléatoires $f_1 \circ X_1, f_2 \circ X_2, \cdots f_n \circ X_n$ sont indépendantes.

♣

22.8 Variables aléatoires réelles discrètes

Avant de débuter cette section, pour une bonne compréhension, je conseille de relire les sections 15.4.3, page 250 et 15.4.4, page 251. Dans cette section, toute variable aléatoire réelle X définie sur une espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est discrète. Son ensemble image $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable. Dans le cas où cet ensemble est dénombrable, nous l'indiçons sur $\mathbb{N}$ grâce à une bijection de $\mathbb{N}$ sur $X(\Omega)$. Nous noterons $X(\Omega) = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Il est important de remarquer que les propriétés énoncées ou résultats obtenus sont indépendants de la façon d'indicer. En effet, toutes les séries rencontrées sont absolument convergentes ou à termes positifs.
Les définitions et propriétés sont indiqués lorsque $X(\Omega)$ est dénombrable. Dans le cas fini, il suffit d'adapter chaque définition et proposition.

Proposition admise 22.25 *Muni des lois $+$, $\times$, $.$, l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$ que l'on notera $\mathcal{V}_d(\Omega)$.*

22.8.1 Moments d'une variable aléatoire discrète

Définition : Soit k un entier strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire discrète X d'image $X(\Omega) = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ admet un moment d'ordre k si la série

$$\sum_{i\geq 0} x_i^k \mathbb{P}(X = x_i)$$

est *absolument* convergente. Dans ce cas, la somme de la série est appelée moment d'ordre k de X et on note

$$m_k(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^k \mathbb{P}(X = x_i).$$

Proposition 22.26 *Soient X une variable aléatoire discrète, k_1 et k_2 deux entiers vérifiant $k_2 > k_1 > 0$. Si X admet un moment d'ordre k_2 alors X admet un moment d'ordre k_1.*

Preuve. On peut remarquer que, pour tout réel a positif, on a

$$a^{k_1} \leq 1 + a^{k_2}.$$

Notons $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, l'ensemble image de la variable X.

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq |x_i|^{k_1}\mathbb{P}(X = x_i) \leq \mathbb{P}(X = x_i) + |x_i|^{k_2}\mathbb{P}(X = x_i).$$

Les séries $\sum_{i\geq 0} \mathbb{P}(X = x_i)$ et $\sum_{i\geq 0} |x_i|^{k_2}\mathbb{P}(X = x_i)$ sont convergentes. La série $\sum_{i\geq 0} |x_i|^{k_1}\mathbb{P}(X = x_i)$ est donc convergente. ♣

Définition : Soient α un réel strictement positif et X une variable aléatoire discrète d'image $X(\Omega) = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On dit que X admet un moment exponentiel d'ordre α si la série

$$\sum_{i\geq 0} \mathbb{P}(X = x_i)e^{\alpha|x_i|}$$

est convergente.

Proposition 22.27 *Soit α un réel strictement positif et X une variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel d'ordre α. Alors,*

1. *Pour tout réel β strictement positif et inférieur à α, la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre β.*
2. *Pour tout entier strictement positif k, la variable aléatoire X admet un moment d'ordre k.*

Preuve. Notons $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, l'ensemble image de la variable X.

1. Soit β un réel vérifiant $0 < \beta < \alpha$. Alors,
$$\forall i \geq 0, \quad 0 \leq \mathbb{P}(X = x_i)e^{\beta|x_i|} \leq \mathbb{P}(X = x_i)e^{\alpha|x_i|}.$$
La convergence de la série $\sum_{i\geq 0} \mathbb{P}(X = x_i)e^{\alpha|x_i|}$ entraîne celle de la série $\sum_{i\geq 0} \mathbb{P}(X = x_i)e^{\beta|x_i|}$.
2. Soit k un entier strictement positif. L'application
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & x^k e^{-\alpha x} \end{array}$$
est continue sur $\mathbb{R}^+$ admet pour limite 0 lorsque la variable x tend vers $+\infty$. Cette application est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$. Soit M un majorant. Alors,
$$\forall i \geq 0, \quad \mathbb{P}(X = x_i)|x_i|^k \leq M.\mathbb{P}(X = x_i)e^{\alpha|x_i|}.$$
La convergence de la série $\sum_{i\geq 0} \mathbb{P}(X = x_i)e^{\alpha|x_i|}$ entraîne celle de la série $\sum_{i\geq 0} \mathbb{P}(X = x_i)|x_i|^k$.

♣

22.8.2 Espérance, variance, covariance

Espérance

Définition : Lorsque le moment d'ordre 1 d'une variable aléatoire discrète X existe, il est appelé espérance et noté

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Définition : On dit qu'une variable aléatoire discrète est centrée si elle admet une espérance nulle.

Proposition 22.28 *Une variable aléatoire discrète X admet un moment d'ordre k si et seulement si la variable aléatoire X^k admet un moment d'ordre 1 avec*

$$m_k(X) = \mathbb{E}(X^k).$$

Preuve. Évident ♣

Avant d'énoncer les propositions 22.30 et 22.35, établissons le lemme :

Lemme 22.29 *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur cet espace et admettant pour image respectivement $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Pour toute loi de composition interne $*$ sur $\mathbb{R}$, pour tout réel z, notons*

$$A = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 / x_i * y_j = z\}.$$

Alors,

$$\mathbb{P}(X * Y = z) = \sum_{(i,j)\in A} \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j).$$

Preuve. Nous avons

$$(X * Y = z) = \dot{\cup}_{(i,j)\in A}(X = x_i \cap Y = y_j).$$

D'où,

$$\mathbb{P}(X * Y = z) = \sum_{(i,j)\in A} \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j).$$

♣

Proposition 22.30 *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur cet espace et admettant un moment d'ordre 1, alors :*

1. *La variable $(X + Y)$ admet un moment d'ordre 1 avec*

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

2. *Pour tout réel a, la variable (aX) admet un moment d'ordre 1 avec*

$$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X).$$

Preuve.

1. Notons $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ les images respectives des variables X, Y et $(X+Y)$.

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=0}^{+\infty}x_i\mathbb{P}(X=x_i)=\sum_{i=0}^{+\infty}\left(x_i\sum_{j=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=x_i\cap Y=y_j)\right)$$

En utlisant la propriété d'associativité généralisée pour les familles sommables (proposition 15.18, page 252), nous obtenons

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}x_i\mathbb{P}(X=x_i\cap Y=y_j).$$

De même,

$$\mathbb{E}(Y)=\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}y_j\mathbb{P}(X=x_i\cap Y=y_j).$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)=\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}(x_i+y_j)\mathbb{P}(X=x_i\cap Y=y_j).$$

En notant pour tout entier naturel k,

$$A_k=\{(i,j)\in\mathbb{N}^2,/x_i+y_j=z_k\}$$

et en utilisant l'associativité généralisée, on obtient

$$\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{(i,j)\in A_k}(x_i+y_j)\mathbb{P}(X=x_i\cap Y=y_j)$$

$$=\sum_{k\in\mathbb{N}}\sum_{(i,j)\in A_k}z_k\mathbb{P}(X=x_i\cap Y=y_j)=\sum_{k\in\mathbb{N}}z_k\mathbb{P}(X+Y=z_k).$$

On en déduit que la variable $(X+Y)$ admet un moment d'ordre 1 avec :

$$\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y).$$

2. Évident

♣

Corollaire 22.31 *Soit $(\Omega,\mathcal{A}),\mathbb{P})$ un espace probabilisé. Muni des lois + et ., l'ensemble des variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω et admettant un moment d'ordre 1 est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ que l'on notera $\mathcal{V}_d^1(\Omega)$. Dans cet espace, l'espérance est une forme linéaire.*

Preuve. Évident ♣

Variance. Écart-type

Proposition-définition 22.32 *Soit X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. Alors la variable centrée $(X - \mathbb{E}(X))$ admet également un moment d'ordre 2. On appelle alors variance de X, le réel positif,*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right].$$

Preuve. On peut remarquer que la variable aléatoire X admettant, un moment d'ordre 2, admet également un moment d'ordre 1 donc une espérance.

$$(X - \mathbb{E}(X))^2 = X^2 - 2\mathbb{E}(X).X + (\mathbb{E}(X))^2.$$

Les variables aléatoires X^2, X admettent un moment d'ordre 1 ainsi que la variable déterministe $(\mathbb{E}(X))^2$. La variable aléatoire $(X - \mathbb{E}(X))$ admet ainsi un moment d'ordre 2. ♣

Proposition 22.33 *Si une variable aléatoire discrète X admet un moment d'ordre 2, on a*

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}[2\mathbb{E}(X)X] + (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2(\mathbb{E}(X))^2 + (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.\end{aligned}$$

♣

Proposition 22.34 *Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. On a,*

$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X).$$

Preuve. On a $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(aX + b) &= \mathbb{E}\left[(aX + b - \mathbb{E}(aX + b))^2\right] = \mathbb{E}\left[(aX - a\mathbb{E}(X))^2\right] \\ &= a^2\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right] = a^2\mathbb{V}(X).\end{aligned}$$

♣

Définition : On appelle écart-type de la variable X admettant un moment d'ordre 2, le réel positif,

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Définition : On dit qu'une variable aléatoire discrète est réduite si elle admet un écart-type égal à 1.

Proposition 22.35 *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X, Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω admettant un moment d'ordre 2, alors la variable produit XY admet un moment d'ordre 1.*

Preuve. Notons $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ les images respectives des variables X, Y et (XY). Par hypothèse, les variables X et Y admettent un moment d'ordre 2. Ainsi,

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(x_i^2 \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) \right).$$

En utlisant la propriété d'associativité généralisée pour les familles sommables (proposition 15.18 page 252), nous obtenons

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j).$$

De même,

$$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} y_j^2 \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j).$$

et

$$\mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} (x_i^2 + y_j^2) \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j).$$

En remarquant que

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad |x_i y_j| \leq \frac{x_i^2 + y_j^2}{2},$$

on en déduit que la famille

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j)$$

est sommable. En notant pour tout entier naturel k,

$$A_k = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 / x_i y_j = z_k\},$$

on a

$$\begin{aligned}\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{(i,j)\in A_k} x_i y_j \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} z_k \mathbb{P}(XY = z_k).\end{aligned}$$

On en déduit que XY admet un moment d'ordre 1 avec

$$\mathbb{E}(XY) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2) + \mathbb{E}(Y^2)}{2}.$$

♣

Proposition 22.36 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. L'ensemble que l'on notera $\mathcal{V}_d^2(\Omega)$, des variables aléatoires réelles discrètes définies sur Ω et admettant un moment d'ordre 2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}_d^1(\Omega)$.*

Preuve. D'après la proposition 22.26, page 418, l'ensemble $\mathcal{V}_d^2(\Omega)$ est inclus dans l'espace vectoriel $\mathcal{V}_d^1(\Omega)$.

1. La variable aléatoire réelle nulle définie sur Ω admet un moment d'ordre 2. L'ensemble $\mathcal{V}_d^2(\Omega)$ est non vide.
2. Considérons X et Y deux éléments de $\mathcal{V}_d^2(\Omega)$ donc admettant un moment d'ordre 2.
$$(X+Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2XY.$$
Par hypothèse, les variables X et Y admettent un moment d'ordre 1 et d'après la proposition 22.35, la variable XY admet un moment d'ordre 1. On en déduit que la variable $(X+Y)^2$ admet un moment d'ordre 1 et que la variable $(X+Y)$ admet un moment d'ordre 2.
3. Il est évident que, pour toute variable aléatoire X admettant un moment d'ordre 2 et pour tout réel a, la variable (aX) admet un moment d'ordre 2.

On en déduit que $\mathcal{V}_d^2(\Omega)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace $(\mathcal{V}_d^1(\Omega), +, .)$. ♣

Covariance

Proposition-définition 22.37 *Soient $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y deux éléments de $\mathcal{V}_d^2(\Omega)$, alors la variable aléatoire discrète*

$$(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$$

admet un moment d'ordre 1 et on appelle covariance du couple (X, Y) notée $\mathrm{Cov}(X, Y)$, *le réel*

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))].$$

Preuve. Soit X et Y deux éléments de $\mathcal{V}_d^2(\Omega)$. Cet ensemble étant stable par addition les variables $(X - \mathbb{E}(X))$ et $(Y - \mathbb{E}(Y))$ admettent un moment d'ordre 2. D'après la proposition 22.35, leur produit admet un moment d'ordre 1. Ceci justifie la définition de la covariance pour les couples de $\mathcal{V}_d^2(\Omega)$. ♣

Proposition 22.38 *Soient* $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé,* X *et* Y *deux éléments de* $\mathcal{V}_d^2(\Omega)$*, alors*

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Preuve. Nous avons

$$(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y)) = XY - \mathbb{E}(X)Y - \mathbb{E}(Y)X + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

L'espérance étant une forme linéaire, on a

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

♣

Proposition 22.39 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Dans l'espace* $(\mathcal{V}_d^2(\Omega), +, .)$*, la covariance est une forme bilinéaire symétrique positive dont la forme quadratique associée est la variance.*

Preuve. Évident ♣

Remarque 22.9 *Attention, la covariance est une forme bilinéaire symétrique positive mais non définie. En effet une variable aléatoire admet une variance nulle si et seulement si elle est déterministe, c'est-à-dire constante.*

En utilisant la formule de polarisation pour une forme quadratique, nous obtenons,

Corollaire 22.40 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Pour tout couple* (X, Y) *de* $\mathcal{V}_d^2(\Omega)$*, on a*

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour une forme bilinéaire symétrique positive, nous obtenons,

Corollaire 22.41 *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ *un espace probabilisé. Pour tout couple* (X, Y) *de* $\mathcal{V}_d^2(\Omega)$*, on a*

$$|\mathrm{Cov}(X,Y)| \leq \sigma(X).\sigma(Y).$$

Corrélation linéaire

Pour avoir une idée de la corrélation entre deux variables X et Y, nous normalisons la covariance :

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour tout couple (X, Y) de $\mathcal{V}_d^2(\Omega)$, on appelle coefficient de corrélation linéaire le réel

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)}.$$

Proposition 22.42 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour tout couple (X, Y) de $\mathcal{V}_d^2(\Omega)$, on a*

$$|\rho(X, Y)| \leq 1.$$

Preuve. Évident. ♣

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On dit que deux éléments X et Y de $\mathcal{V}_d^2(\Omega)$ sont non corrélées si leur coefficient de corrélation linéaire est nul.

22.8.3 Variables aléatoires discrètes indépendantes

La définition des variables aléatoires indépendantes, ainsi que la remarque 22.8 associée à cette définition, sont données dans la section 22.7.2, page 417.

Exercice 22.6 Soit n un entier strictement supérieur à 2 et n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, X_3 \cdots, X_n$.

1. Montrer que les variables aléatoires $X_1 + X_2, X_3 \cdots, X_n$ sont indépendantes.
2. En déduire que, pour tout entier k compris entre 2 et $(n-1)$, les variables

$$(X_1 + X_2 + \cdots + X_k, X_{k+1} \cdots X_n)$$

sont indépendantes.

Solution.

1. On note $(a_i)_{i \in I}$ l'ensemble image de la variable X_1. On sait que I est un ensemble au plus dénombrable. Soit x un réel. On a,

$$(X_1 + X_2 = x) = \dot{\cup}_{i \in I} (X_1 = a_i \cap X_2 = x - a_i).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 + X_2 = x) &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X_1 = a_i \cap X_2 = x - a_i) \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X_1 = a_i) \mathbb{P}(X_2 = x - a_i).\end{aligned}$$

On considère $(x_3, \cdots, x_n)$ un $(n-2)$-uplet de réels. Alors,

$$(X_1 + X_2 = x) \cap (\cap_{k=3}^n (X_k = x_k))$$
$$= (\dot\cup_{i\in I} (X_1 = a_i \cap X_2 = x - a_i)) \cap (\cap_{k=3}^n (X_k = x_k))$$
$$= \dot\cup_{i\in I} ((X_1 = a_i) \cap (X_2 = x - a_i) \cap_{k=3}^n (X_k = x_k))$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left((X_1 + X_2 = x) \cap (\cap_{p=3}^n (X_p = x_p)\right)$$
$$= \sum_{i\in I} \mathbb{P}(X_1 = a_i)\mathbb{P}(X_2 = x - a_i) \prod_{k=3}^n \mathbb{P}(X_k = x_k).$$
$$= \mathbb{P}(X_1 + X_2 = x) \prod_{k=3}^n \mathbb{P}(X_k = x_k).$$

Les variables $(X_1 + X_2, X_3, \cdots, X_n)$ sont indépendantes.

2. Évident à l'aide d'une récurrence.

♣

Proposition 22.43 *Soient* $X_1, X_2, \cdots X_n$ *sont des variables aléatoires discrètes indépendantes.*

1. *Si* $X_1, X_2, \cdots X_n$ *admettent des moments d'ordre 1, alors la variable* $X_1 X_2 \cdots X_n$ *admet un moment d'ordre 1 avec*

$$\mathbb{E}(X_1 X_2 \cdots X_n) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i).$$

2. *Si* $X_1, X_2, \cdots X_n$ *admettent des moments d'ordre 2, alors la variable*$\sum_{i=1}^n X_i$ *admet un moment d'ordre 2 et :*

$$\mathbb{V}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i).$$

Remarque 22.10 *Attention, l'hypothèse d'indépendance est nécessaire. En effet, considérons une variable aléatoire* X *admettant un moment d'ordre 1 mais pas un moment d'ordre 2. Alors la variable* $X.X$ *n'admet pas de moment d'ordre 1.*

Preuve. Effectuons les preuves pour deux variables aléatoires indépendantes X et Y. Pour obtenir le résultat pour n variables, il suffit d'effectuer une preuve par récurrence. Il faut s'assurer que si les variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_n$ sont indépendantes alors pour tout entier k strictement positif et strictement inférieur à n, les variables $X_1 + X_2 \cdots + X_k, X_{k+1}, \cdots, X_n$ sont indépendantes (exercice 22.6) ainsi que les variables $X_1 X_2 \cdots X_k, X_{k+1}, \cdots, X_n$ (preuve comparable à la solution de l'exercice 22.6).

1. On considère X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant un moment d'ordre 1 de support respectifs $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$. Par hypothèse,

$$\sum_{i\in I}|x_i|\mathbb{P}(X=x_i)<+\infty,\qquad \sum_{j\in J}|y_j|\mathbb{P}(Y=y_j)<+\infty.$$

Ainsi, les variables aléatoires X et Y étant indépendantes,

$$\sum_{(i,j)\in I\times J}|x_iy_j|\mathbb{P}\left[(X=x_i)\cap(Y=y_j)\right]$$

$$=\sum_{(i,j)\in I\times J}|x_iy_j|\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j)=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}|x_iy_j|\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j)$$

$$=\left(\sum_{i\in I}|x_i|\mathbb{P}(X=x_i)\right).\left(\sum_{j\in J}|y_j|\mathbb{P}(Y=y_j)\right)<+\infty.$$

La variable XY admet ainsi un moment d'ordre 1, avec

$$\mathbb{E}(XY)=\sum_{(i,j)\in I\times J}x_iy_j\mathbb{P}\left[(X=x_i)\cap(Y=y_j)\right]$$

$$=\sum_{(i,j)\in I\times J}x_iy_j\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j)=\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}x_iy_j\mathbb{P}(X=x_i)\mathbb{P}(Y=y_j)$$

$$=\left(\sum_{i\in I}x_i\mathbb{P}(X=x_i)\right).\left(\sum_{j\in J}y_j\mathbb{P}(Y=y_j)\right)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Ces égalités et les permutations de termes sont légitimes puisque ces séries sont absolument convergentes.

2. On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes et admettant un moment d'ordre 2. Alors

$$\mathbb{V}(X+Y)=\mathbb{E}\left[(X+Y)^2-\mathbb{E}(X+Y)^2\right]$$

$$=\mathbb{E}(X^2)+\mathbb{E}(Y^2)+2\mathbb{E}(XY)+[\mathbb{E}(X+Y)]^2-2\mathbb{E}(X+Y).\mathbb{E}(X+Y)$$

$$=\mathbb{E}(X^2)+\mathbb{E}(Y^2)+2\mathbb{E}(XY)-[\mathbb{E}(X+Y)]^2$$

$$=\mathbb{V}(X)+\mathbb{V}(Y)+2\mathbb{E}(XY)-2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Les deux variables aléatoires étant indépendantes, on obtient le résultat désiré.

♣

Corollaire 22.44 *Soient $(\Omega,\mathcal{A}),\mathbb{P})$ un espace probabilisé et (X,Y) un couple de $\mathcal{V}_d^2(\Omega)$ de variables aléatoires indépendantes, alors*

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=0.$$

Preuve. Nous savons que

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Les deux variables étant indépendantes, on a

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y).$$

D'où, le résultat. ♣

22.8.4 Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète

Exercice 22.7 On considère X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice de X, la série entière réelle g_X définie par

$$g_X(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)s^n.$$

1. Montrer que le rayon de convergence de g_X est supérieur ou égal à 1.
2. Montrer que, pour tout k appartenant à $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=k) = \frac{g_X^{(k)}(0)}{k!}$.
3. (a) Montrer que si, X et Y sont deux variables aléatoires réelles, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et *indépendantes*, alors

   $$\forall s \in [-1,1], \quad g_{(X+Y)}(s) = g_X(s)g_Y(s).$$

   (b) Montrer que si $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ sont des variables aléatoires réelles indépendantes, définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors

   $$\forall s \in [-1,1], \quad g_{(X_1+X_2+\cdots X_n)}(s) = \prod_{k=1}^{n} g_{X_k}(s).$$

4. Montrer que X admet un moment d'ordre 1 si et seulement si g_X est dérivable à gauche en 1 et sous cette hypothèse

   $$\mathbb{E}(X) = g'_X(\mathbb{1}^-).$$

5. Montrer que X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si g_X est deux fois dérivable à gauche en 1 et sous cette hypothèse

   $$g''_X(\mathbb{1}^-) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X).$$

6. En déduire que si X admet un moment d'ordre 2

   $$\mathbb{V}(X) = g''_X(\mathbb{1}^-) + g'_X(\mathbb{1}^-) - (g'_X(\mathbb{1}^-))^2.$$

Solution.

1. De l'égalité,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)=1,$$
on déduit que la série entière g_X est convergente pour $s=1$. Le rayon de convergence est supérieur ou égal à 1.

2.
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall s \in]-1,1[, \quad g_X^{(k)}(s)=\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\mathbb{P}(X=n)s^{n-k}$$
$$=\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!}\mathbb{P}(X=n+k)s^n.$$
En particulier,
$$g_X^{(k)}(0)=k!.\mathbb{P}(X=k).$$

3. (a) Pour tout réel s appartenant au segment $[-1,1]$, les séries
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)s^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=n)s^n$$
sont absolument convergentes. On peut effectuer leur produit de Cauchy.
$$\forall s \in [-1,1], \quad g_X(s)g_Y(s)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n,$$
avec
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n=\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k).$$
Les variables aléatoires X et Y étant indépendantes,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n=\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left((X=k)\cap(Y=n-k)\right)=\mathbb{P}(X+Y=n).$$
D'où,
$$\forall s \in [-1,1], \quad g_X(s)g_Y(s)=\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X+Y=n)s^n=g_{(X+Y)}(s).$$

   (b) Évident à l'aide d'une récurrence en utilisant le résultat de l'exercice 22.6.

Pour la suite, notons
$$\forall s \in [-1,1], \quad g_X(s)=\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(s),$$
avec
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in [-1,1], \quad g_n(s)=\mathbb{P}(X=n)s^n.$$

4. La variable X admet un moment d'ordre 1 si la série à termes positifs,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n)$$

est convergente.

(a) Supposons que X admette un moment d'ordre 1. Alors,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall s \in [-1,1], \quad |g_n'(s)| = |n\mathbb{P}(X=n)s^{n-1}| \leq n\mathbb{P}(X=n).$$

La série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} g_n'(s)$$

est normalement convergente sur $[-1,1]$. La restriction de l'application g_X au segment $[-1,1]$ est ainsi dérivable sur ce segment. On obtient,

$$g_X'(\mathbb{1}^-) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}(X).$$

(b) Supposons que la variable aléatoire X n'admette pas de moment d'ordre 1. Alors,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) = +\infty.$$

Soit A un réel strictement positif. Il existe un entier naturel N tel que

$$\sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(X=n) \geq 2A.$$

Il existe un réel $\alpha \in]0,1[$ tel que

$$\forall s \in]\alpha, 1[, \quad \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(X=n)s^{n-1} \geq A.$$

En conséquence,

$$\forall s \in]\alpha, 1[, \quad g_X'(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n)s^{n-1} \geq \sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}(X=n)s^{n-1} \geq A.$$

En utilisant le théorème des accroissements finis, on obtient,

$$\forall s \in]\alpha, 1[, \quad \frac{g_X(1) - g_X(s)}{1-s} \geq A.$$

On en déduit que

$$\lim_{s \to \mathbb{1}^-} \frac{g_X(1) - g_X(s)}{1-s} = +\infty$$

et que l'application g_X n'est pas dérivable à gauche en 1.

5. La variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 si la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \mathbb{P}(X=n)$$

est convergente.

(a) Supposons que la variable aléatoire X admette un moment d'ordre 2 *donc un moment d'ordre 1*. La série à termes positifs

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X=n)$$

est également convergente.

$$\begin{aligned}\forall n \geq 2, \forall s \in [-1,1], \quad |g_n''(s)| &= |n(n-1)\mathbb{P}(X=n)s^{n-2}| \\ &\leq n(n-1)\mathbb{P}(X=n).\end{aligned}$$

La série

$$\sum_{n=2}^{+\infty} g_n''(s)$$

est normalement convergente sur $[-1,1]$. La restriction de l'application g_X au segment $[-1,1]$ est ainsi deux fois dérivable sur ce segment. On obtient,

$$\begin{aligned}g_X''(\mathbb{1}^-) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X=n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\mathbb{P}(X=n) - \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbb{P}(X=n) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X).\end{aligned}$$

(b) Si la variable X admet un moment d'ordre 1 mais pas de moment d'ordre 2. Alors

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\mathbb{P}(X=n) = +\infty.$$

On montre, de la même manière que dans la question précédente, que

$$\lim_{s \to \mathbb{1}^-} \frac{g_X'(1) - g_X'(s)}{1-s} = +\infty.$$

Ainsi g_X n'est pas deux fois dérivable à gauche en 1.

(c) Si la variable X n'admet pas de moment d'ordre 1, la fonction génératrice n'est pas dérivable à gauche en 1.

6. Supposons que X admette un moment d'ordre 2

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)^2\right) = g_X''(\mathbb{1}^-) + g_X'(\mathbb{1}^-) - (g_X'(\mathbb{1}^-))^2.$$

♣

Dans cette section et la suivante, X désigne une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

22.8.5 Loi de Bernoulli

Définition : Soit p un réel appartenant à $[0,1]$. Une variable aléatoire réelle X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si

$$\mathbb{P}(X=1)=p, \quad \mathbb{P}(X=0)=1-p.$$

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Exemple : Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère A un événement de cet espace. L'application $\mathbb{1}_A$ définie sur Ω est une variable aléatoire réelle suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

Proposition 22.45 *Soit X, une variable aléatoire réelle suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On a,*

$$\mathbb{E}(X)=p, \quad \mathbb{V}(X)=p(1-p),$$

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad g_X(s)=ps+(1-p).$$

22.8.6 Loi binomiale

Définition : Soient n un entier strictement positif et p un réel appartenant à $[0,1]$. Une variable aléatoire réelle X suit une loi binomiale de paramètre (n,p) si X est la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.
On note $X \sim B(n,p)$.

Proposition 22.46 *Soit X, une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale de paramètre (n,p). On a,*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad g_X(s)=(ps+(1-p))^n,$$

$$\forall k \in \{0,1\cdots,n\}, \quad \mathbb{P}(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

$$\mathbb{E}(X)=np, \quad \mathbb{V}(X)=np(1-p).$$

Preuve. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (n,p) et $X_1, X_2, \cdots X_n$ des variables aléatoires indépendantes, suivant une loi de Bernoulli de paramètre p et vérifiant

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

En utilisant le résultat de la question 3.b de l'exercice 22.7, lous obtenons,

$$\forall s \in [-1;1], \quad g_X(s) = \prod_{i=1}^{n} g_{X_i}(s) = (ps + (1-p))^n.$$

Le support de la variable X étant fini, l'application g_X est un polynôme. Ainsi,

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad g_X(s) = (ps + (1-p))^n.$$

Développons ce polynôme,

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad g_X(s) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} s^k.$$

En identifiant avec les coefficients de la série génératrice, nous avons

$$\forall k \in \{0, \cdots n\}, \quad \mathbb{P}(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

De plus,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = np.$$

Les variables $X_1, X_2, \cdots X_n$ étant indépendantes

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) = np(1-p).$$

♣

22.8.7 Loi uniforme discrète

Définition : Soit n un entier strictement positif. Une variable aléatoire réelle discrète X suit une loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$ si

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{n} \text{ pour tout } i \in \{1, \cdots, n\}$$

On note $X \sim \mathcal{U}(\{1, \cdots, n\})$.

Proposition 22.47 *Soit X une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$. On a*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

et

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

22.8.8 Loi géométrique

Définition : Soit p un réel appartenant à $]0,1[$. Une variable aléatoire réelle X suit une loi géométrique de paramètre p si

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

On note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Proposition 22.48 *Soit X, une variable aléatoire réelle suivant une loi géométrique de paramètre p. On a,*

$$\forall s \in [-1,1], \quad g_X(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s},$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(1-p)}{p^2}.$$

Preuve.

$$\forall s \in [-1;1], \quad g_X(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1}s^k.$$

Cette série est géométrique de raison $(1-p)s$ et de premier terme ps. Ainsi,

$$\forall s \in [-1;1], \quad g_X(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}.$$

Le rayon de convergence de cette série entière est $\frac{1}{1-p}$, strictement supérieur à 1.

$$\forall s \in]-\frac{1}{1-p}; \frac{1}{1-p}[, \quad g_X'(s) = \frac{p}{(1-(1-p)s)^2}$$

et

$$\forall s \in]-\frac{1}{1-p}; \frac{1}{1-p}[, \quad g_X''(s) = \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p)s)^3}$$

On obtient

$$g_X'(1) = \frac{1}{p}, \quad g_X''(1) = \frac{2(1-p)}{p^2}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(X) = g_X'(1) = \frac{1}{p}, \quad \mathbb{V}(X) = g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2 = \frac{1-p}{p^2}.$$

♣

Exercice 22.8 Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Pour quels réels positifs α, la variable aléatoire X admet-elle un moment exponentiel d'ordre α ?

Solution. Soit α un réel strictement positif. Alors,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k)e^{k\alpha} = p(1-p)^{k-1}e^{k\alpha}.$$

La série $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X = k)e^{k\alpha}$ est une série géométrique de raison $(1-p)e^{\alpha}$. Elle est convergente si et seulement si

$$(1-p)e^{\alpha} < 1 \Leftrightarrow \alpha < -\ln(1-p).$$

On en déduit que la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre α si et seulement si α appartient à l'intervalle $]0, -\ln(1-p)[$.

♣

22.8.9 Loi de Poisson

Définition : Soit λ un réel strictement positif. Une variable aléatoire réelle X suit une loi de Poisson de paramètre λ si

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Proposition 22.49 *Soit X, une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre λ. On a,*

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad g_X(s) = e^{\lambda(s-1)},$$

$$\mathbb{E}(X) = \lambda, \quad \mathbb{V}(X) = \lambda.$$

Preuve.

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad g_X(s) = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}s^k = e^{-\lambda}e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)}.$$

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad g'_X(s) = \lambda e^{\lambda(s-1)}, \quad g''_X(s) = \lambda^2 e^{\lambda(s-1)}.$$

Ainsi,

$$g'_X(1) = \lambda, \quad g''_X(1) = \lambda^2,$$

et

$$\mathbb{E}(X) = g'_X(1) = \lambda, \quad \mathbb{V}(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

♣

Exercice 22.9 Soient λ un réel X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que X admet des moments exponentiels de tous ordres.

Solution. Soit α un réel strictement positif. On a,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k)e^{k\alpha} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}e^{k\alpha} = e^{-\lambda}\frac{(\lambda e^{\alpha})^k}{k!}.$$

La série $\sum_{k\geq 0}\mathbb{P}(X = k)e^{\alpha k}$ est convergente avec

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X = k)e^{\alpha k} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{\alpha}} = e^{\lambda(e^{\alpha}-1)}.$$

♣

Exercice 22.10 Soit n un entier strictement positif. On considère $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ n réels strictement positifs, $X_1, \cdots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes. On suppose, que pour tout entier k, la variable X_k suit une loi de Poisson de paramètre λ_k.
Montrer que la variable aléatoire

$$X = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

Solution. Pour tout entier k compris entre 1 et n l'application g_k, fonction génératrice de la variable aléatoire X_k, vérifie :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad g_k(s) = e^{\lambda_k(s-1)}.$$

Les variables $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ étant indépendantes, l'application g, fonction génératrice de la variable X vérifie (voir exercice 22.7) :

$$\forall s \in [-1; 1], \quad g(s) = \Pi_{k=1}^{n} g_k(s) = \Pi_{k=1}^{n} \exp\left(\lambda_k(s-1)\right) = \exp\left((s-1)\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\right).$$

La fonction génératrice caractérisant la loi de la variable aléatoire, la variable X suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k$. ♣

Exercice 22.11 On considère que, sur une journée, le nombre de personnes venant visiter la concession automobile Broumbroum est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif. On pense que chaque visiteur a une probabilité p ($p \in]0; 1[$) de commander une automobile. On suppose que les décisions de commander ou de ne pas commander une automobile sont indépendantes entre les différents clients.
On note Y une variable aléatoire comptabilisant, sur une journée, le nombre de clients ayant commandé une voiture. Donner la loi de Y.

Solution. Remarquons que la famille d'événements

$$(X = n)_{n\in\mathbb{N}}$$

forme un système complet d'événements.
La variable Y est une variable aléatoire discrète à valeurs entières positives. Soit k un entier naturel :

$$(Y = k) = \dot{\cup}_{n\in\mathbb{N}} \left((Y = k) \cap (X = n)\right).$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}\left((Y = k) \cap (X = n)\right).$$

En remarquant, que pour tout entier n strictement inférieur à k, les événements $(X = n)$ et $(Y = k)$ sont incompatibles,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}\left((Y = k) \cap (X = n)\right) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n).\mathbb{P}(Y = k/X = n).$$

La loi de la variable aléatoire Y, conditionnée par l'événement $(X = n)$, suit une loi binomiale de paramètre (n, p). Ainsi,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(X = n).\mathbb{P}(Y = k/X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}p^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{e^{-\lambda}p^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{n+k}(1-p)^n}{n!} =$$

$$\frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n(1-p)^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)} = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}.$$

Nous obtenons

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(Y = k) = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^k}{k!}.$$

La variable aléatoire Y suit une loi de Poisson de paramètre λp. ♣

22.9 Variables aléatoires réelles continues

Proposition admise 22.50 *Muni des lois $+$, $\times$, $.$, l'ensemble des variables aléatoires réelles continues définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$ que l'on notera $\mathcal{V}_c(\Omega)$.*

22.9.1 Moments d'une variable aléatoire continue

Définition : Soit r un entier strictement positif. On dit qu'une variable aléatoire continue X, de densité f admet un moment d'ordre r si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx$$

est absolument convergente. Dans ce cas, on appelle moment d'ordre r de X le réel

$$m_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx.$$

Remarque 22.11 *L'application $x \mapsto x^r f(x)$ gardant un signe constant sur $\mathbb{R}^+$ d'une part, et sur $\mathbb{R}^-$ d'autre part, la convergence de l'intégrale sur $\mathbb{R}$ équivaut à l'absolue convergence de cette intégrale.*

Proposition 22.51 *Soient X une variable aléatoire continue, r et s deux entiers strictement positifs vérifiant $s > r$. Si X admet un moment d'ordre s alors X admet un moment d'ordre r.*

Preuve. Soient s et r deux entiers strictement positifs vérifiant $s > r$. On suppose que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x^s| f(x)dx$$

est convergente. Nous avons,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x^r| \leq 1 + |x^s|.$$

Les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |x^s| f(x)dx$$

étant convergentes, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x^r| f(x)dx$$

l'est aussi.

Définition : Soit α un réel strictement positif et X une variable aléatoire continue. On dit que la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre α si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha|x|} f(x)dx$$

est convergente.

Proposition 22.52 *Soit α un réel strictement positif et X une variable aléatoire continue admettant un moment exponentiel d'ordre α. Alors,*

1. *Pour tout réel β strictement positif et inférieur à α, la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre β .*
2. *Pour entier strictement positif k, la variable aléatoire X admet un moment d'ordre k .*

Preuve. La preuve est similaire à celle de la proposition 22.27, page 419. ♣

22.9.2 Espérance, variance, covariance

Espérance

Définition : Lorsqu'il existe, le moment d'ordre 1 d'une variable aléatoire continue est appelé espérance et noté

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Définition : On dit qu'une variable aléatoire est centrée si son espérence est nulle.

Remarque 22.12 *Une variable aléatoire continue X suit une loi de Cauchy si elle admet pour fonction de densité la fonction f définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

On remarque qu'une telle variable n'admet pas d'espérance.

Proposition admise 22.53 *Une variable aléatoire continue X admet un moment d'ordre r, si et seulement si la variable aléatoire X^r admet un moment d'ordre 1 avec*

$$m_r(X) = \mathbb{E}(X^r).$$

Proposition admise 22.54 *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y deux variables aléatoires réelles continues, définies sur cet espace et admettant un moment d'ordre 1, alors :*

1. *La variable $(X+Y)$ admet un moment d'ordre 1 avec*
$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$
2. *Pour tout réel a, la variable (aX) admet un moment d'ordre 1 avec*
$$\mathbb{E}(aX) = a\mathbb{E}(X).$$

Corollaire 22.55 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Muni des lois $+$ et $.$, l'ensemble des variables aléatoires réelles continues définies sur Ω et admettant un moment d'ordre 1 est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ que l'on notera $\mathcal{V}_c^1(\Omega)$. Dans cet espace, l'espérance est une forme linéaire.*

Preuve. Évident ♣

Variance, écart-type

Proposition 22.56 *Soit X une variable aléatoire continue admettant un moment d'ordre 2. Alors la variable centrée $(X - \mathbb{E}(X))$ admet également un moment d'ordre 2. On appelle alors variance de X, le réel positif,*
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right].$$

Preuve. Identique à la preuve de la proposition 22.32 ♣

Proposition 22.57 *Si une variable aléatoire continue X admet un moment d'ordre 2, on a*
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2.$$

Preuve. Identique à la preuve de la proposition 22.33 ♣

Proposition 22.58 *Soient a et b deux réels et X une variable aléatoire continue admettant un moment d'ordre 2. On a,*
$$\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X).$$

Preuve. Identique à la preuve de la proposition 22.34 ♣

Définition : On appelle écart-type de la variable X admettant un moment d'ordre 2, le réel positif,

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

Définition : On dit qu'une variable aléatoire continue est réduite si elle admet un écart-type égal à 1.

Proposition admise 22.59 *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X, Y deux variables aléatoires réelles continues, définies sur Ω admettant un moment d'ordre 2, alors la variable produit XY admet un moment d'ordre 1.*

Proposition 22.60 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. L'ensemble que l'on notera $\mathcal{V}_c^2(\Omega)$, des variables aléatoires réelles continues définies sur Ω et admettant un moment d'ordre 2 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{V}_c^1(\Omega)$.*

Preuve. Identique à la preuve de la proposition 22.36. ♣

Covariance

Proposition-définition 22.61 *Soient $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y deux éléments de $\mathcal{V}_c^2(\Omega)$, alors la variable aléatoire continue*

$$(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))$$

admet un moment d'ordre 1 et on appelle covariance du couple (X, Y) notée $\operatorname{Cov}(X, Y)$, le réel

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))].$$

Preuve. Identique à la preuve de la proposition 22.37. ♣

Proposition 22.62 *Soient $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X et Y deux éléments de $\mathcal{V}_c^2(\Omega)$, alors*

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Preuve. Identique à la preuve de la proposition 22.38. ♣

Proposition 22.63 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Dans l'espace $(\mathcal{V}_c^2(\Omega), +, .)$, la covariance est une forme bilinéaire symétrique positive dont la forme quadratique associée est la variance.*

Preuve. Évident ♣

Remarque 22.13 *Attention, la covariance est une forme bilinéaire symétrique positive mais non définie. En effet une variable aléatoire admet une variance nulle si et seulement si elle est déterministe, c'est-à-dire constante.*

En utilisant la formule de polarisation pour une forme quadratique, nous obtenons,

Corollaire 22.64 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour tout couple (X, Y) de $\mathcal{V}_c^2(\Omega)$, on a*

$$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y).$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour une forme bilinéaire symétrique positive, nous obtenons,

Corollaire 22.65 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour tout couple (X, Y) de $\mathcal{V}_c^2(\Omega)$, on a*

$$|\mathrm{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X).\sigma(Y).$$

Corrélation linéaire

Pour avoir une idée de la corrélation entre deux variables X et Y, nous normalisons la covariance :

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour tout couple (X, Y) de $\mathcal{V}_c^2(\Omega)$, on appelle coefficient de corrélation linéaire le réel

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)}.$$

Proposition 22.66 *Soit $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Pour tout couple (X, Y) de $\mathcal{V}_c^2(\Omega)$, on a*

$$|\rho(X, Y)| \leq 1.$$

Preuve. Évident. ♣

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{A}), \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On dit que deux éléments X et Y de $\mathcal{V}_c^2(\Omega)$ sont non corrélées si leur coefficient de corrélation linéaire est nul.

22.9.3 Variables aléatoires continues indépendantes

La définition des variables aléatoires indépendantes, ainsi que la remarque 22.8 associée à cette définition, sont données dans la section 22.7.2, page 417.

Proposition admise 22.67 *Soient $X_1, X_2, \cdots X_n$ des variables aléatoires continues indépendantes,*

1. *Si $X_1, X_2, \cdots X_n$ admettent des moments d'ordre 1, alors la variable aléatoire $X_1 X_2 \cdots X_n$ admet un moment d'ordre 1 et*
$$\mathbb{E}(X_1 X_2 \cdots X_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i).$$
2. *Si $X_1, X_2, \cdots X_n$ admettent des moments d'ordre 2, alors la variable$\sum_{i=1}^{n} X_i$ admet un moment d'ordre 2 et :*
$$\mathbb{V}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i).$$

Corollaire 22.68 *Si X et Y sont deux variables aléatoires continues et indépendantes, alors*
$$\text{Cov}(X, Y) = 0.$$

Preuve. Évident d'après la proposition précédente. ♣

Proposition admise 22.69 *Soient $X_1, X_2, \cdots X_n$ des variables aléatoires continues indépendantes, et de fonctions de densité respectives $f_1, f_2, \cdots f_n$. Alors l'application*
$$S = \sum_{k=1}^{n} X_k$$
est une variable aléatoire réelle continue admettant pour fonction de densité la fonction
$$f_1 * f_2 * \cdots * f_n$$
*où la loi * représente le produit de convolution défini dans la section 16.3.1, page 274.*

22.9.4 Loi uniforme continue

Définition : Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Une v.a.r X suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a, b]$ si elle admet pour fonction de densité la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x).$$

Proposition 22.70 *Si une v.a.r X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a, b]$, alors*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

Preuve. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur un segment $[a; b]$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Ainsi, X admet un moment d'ordre 1 et

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}.$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(x)dx &= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2dx = \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b \\ &= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.\end{aligned}$$

Ainsi, la variable X admet un moment d'ordre 2 avec

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

On obtient

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X)^2) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

♣

Exercice 22.12 On considère X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur le segment $[0; 1]$. On considère ε un réel strictement positif et strictement inférieur à 1. Calculer

$$\mathbb{P}(|X - Y| \leq \varepsilon).$$

Solution. Les variables X et $(-Y)$ sont indépendantes (exercice 22.5 page 417), la loi de la variable $(-Y)$ admet pour fonction de densité la fonction indicatrice du segment $[-1;0]$ notée $\mathbb{1}_{[-1;0]}$. La loi de la variable $(X-Y)$ admet pour fonction de densité la fonction que l'on notera f, produit de convolution

$$\mathbb{1}_{[-1;0]} * \mathbb{1}_{[0;1]}.$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-1;0]}(x-t).\mathbb{1}_{[0;1]}(t)dt.$$

Soit x un réel. Alors

$$\mathbb{1}_{[-1;0]}(x-t) = 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-t \leq 0 \Leftrightarrow x \leq t \leq x+1 \Leftrightarrow \mathbb{1}_{[x;x+1]}(t) = 1.$$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[x;x+1]}(t).\mathbb{1}_{[0;1]}(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{([x;x+1]\cap[0;1])}(t)dt.$$

Le réel $f(x)$ est la longueur de l'intervalle, éventuellement vide, $([x;x+1]\cap[0;1])$. On trouve

$$\begin{cases} f(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > 1, \\ f(x) = x+1 \quad \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0, \\ f(x) = 1-x \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Nous remarquons que l'application f est paire.
Soit ε un réel strictement compris entre 0 et 1.

$$\mathbb{P}(|X-Y| < \varepsilon) = \mathbb{P}(-\varepsilon < X-Y < \varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)dx$$

$$= 2\int_0^{\varepsilon}(1-x)dx = 1-(1-\varepsilon)^2.$$

♣

22.9.5 Loi exponentielle

Définition : Soit λ un réel strictement positif. Une v.a.r X suit une loi exponentielle de paramètre λ si elle admet pour fonction de densité la fonction f_λ définie par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\lambda e^{-\lambda x}.$$

Proposition 22.71 *Si une v.a.r X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors*

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Preuve. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda x.\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)e^{-\lambda x}dx = \int_0^{+\infty} \lambda x.e^{-\lambda x}dx = [-xe^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}.$$

La variable X admet un moment d'ordre 1 avec

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda x^2.\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)e^{-\lambda x}dx = \int_0^{+\infty} \lambda x^2.e^{-\lambda x}dx = [-x^2e^{-\lambda x}]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} xe^{-\lambda x}dx$$
$$= \frac{2}{\lambda}.\int_0^{+\infty} \lambda xe^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda}\mathbb{E}(X) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

La variable X admet un moment d'ordre 2 avec

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X)^2) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

♣

Caractérisation des variables aléatoires « sans mémoire »

Exercice 22.13 Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Donner sa fonction de répartition.
2. Montrer que :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \quad P\left((X > s+t) \mid (X > t)\right) = P\left(X > s\right). \tag{22.25}$$

La propriété (22.25) *se traduit en disant que la variable aléatoire X est sans mémoire.*

Soit T une variable aléatoire réelle sans mémoire. Le but des questions suivantes est de montrer que cette variable aléatoire suit une loi exponentielle. On note F_T sa fonction de répartition.

3. Montrer que la fonction G_T, définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad G_T(x) = 1 - F_T(x)$$

est strictement positive et vérifie

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \quad G_T(x+y) = G_T(x)G_T(y).$$

4. Montrer que pour tout réel positif x et tout rationnel positif r, on a

$$G_T(rx) = (G_T(x))^r.$$

5. Montrer qu'il existe un réel a vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad G_T(x) = e^{ax}.$$

6. Montrer que la variable aléatoire T suit une loi exponentielle.

Solution.

1. On note F_X la fonction de répartition de la variable X. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0. \end{cases}$$

2. Pour tout $t \geq 0$, on a $P(X > t) = 1 - F_X(t) = e^{-\lambda t} > 0$. Ainsi,

$$P((X > s+t) \mid (X > t)) = \frac{P((X > s+t) \cap (X > t))}{P(X > t)} = \frac{P(X > s+t)}{P(X > t)}$$
$$= \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s).$$

3. On a,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad G_T(x) = 1 - F_T(x) = P(T > x).$$

Dans la propriété (22.25), l'existence de la probabilité conditionnelle assure que, pour tout réel positif t, la probabilité de l'événement $(X > t)$ est strictement positive. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad G_T(t) > 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned} G_T(s) &= \mathbb{P}(X > s) = P((X > s+t) \mid (X > t)) \\ &= \frac{P((X > s+t) \cap (X > t))}{P(X > t)} = \frac{P(X > s+t)}{P(X > t)} \\ &= \frac{G_T(s+t)}{G_T(t)}. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

4. On remarque que
$$G_T(0) = G_T(0+0) = (G_T(0))^2.$$
Le réel $G_T(0)$ étant strictement positif, nous obtenons
$$G_T(0) = 1.$$
Soit x un réel positif. On vérifie alors, à l'aide d'une récurrence évidente, que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad G_T(nx) = (G_T(x))^n.$$
Soit r un rationnel positif. On considère deux entiers positifs p et q vérifiant $r = \frac{p}{q}$. Alors
$$(G_T(rx))^q = G_T(qrx) = G_T(px) = (G_T(x))^p.$$
L'application G_T étant à valeurs *positives*, on obtient
$$G_T(rx) = (G_T(x)^r.$$
5. Rappelons que l'application G_T est à valeurs strictement positives.
$$\forall r \in \mathbb{Q}^+, \quad G_T(r) = (G_T(1)^r) = \exp(r \ln G_T(1)).$$
On considère le réel $a = \ln(G_T(1))$. Ainsi,
$$\forall r \in \mathbb{Q}^+, \quad G_T(r) = e^{ar}.$$
Soit x un réel positif. On note $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des approximations décimales par défaut de x et $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des approximations décimales par excès de x. La fonction de répartition F_T étant croissante, l'application G_T est décroissante.
$$\forall \in \mathbb{N}, \quad G_T(e_n) \leq G_T(x) \leq G_T(d_n).$$
Donc,
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e^{ae_n} \leq G_T(x) \leq e^{ad_n}.$$
L'application exponentielle étant continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier en x, les suites $(e^{ae_n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e^{ad_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes vers e^{ax}. Ainsi,
$$e^{ax} \leq G_T(x) \leq e^{ax}.$$
On obtient
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad G_T(x) = e^{ax}.$$
6. L'application F_T étant une fonction de répartition,
$$\lim_{x\to+\infty} F_T(x) = 1,$$
ainsi,
$$\lim_{x\to+\infty} G_T(x) = 0.$$

On en déduit que le réel a est strictement négatif. On pose $\lambda = -a$. On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad F_T(x) = 1 - G_T(x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

La fonction F_T étant positive et croissante sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_T(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} = \text{ si } x \geq 0, \end{cases}$$

L'application F_T est la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ. La fonction de répartition caractérisant la loi, on en déduit que T suit une loi exponentielle de paramètre λ.

♣

22.9.6 Loi normale centrée réduite

Définition : On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit une loi normale centrée réduite si elle admet pour fonction de densité, la fonction f définie par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

On note $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

22.10 Inégalités

22.10.1 Inégalité de Markov

Proposition 22.72 *Soit X une variable aléatoire réelle positive admettant un moment d'ordre 1 et a un réel strictement positif. Alors,*

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

Preuve. On effectue la preuve dans le cas discret.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_{x_k \in X(\Omega)} x_k \mathbb{P}(X = x_k) \\ &\geq \sum_{x_k \geq a} x_k \mathbb{P}(X = x_k) \\ &\geq \sum_{x_k \geq a} a\, \mathbb{P}(X = x_k) \\ &= a\, \mathbb{P}(X \geq a) \end{aligned}$$

♣

22.10.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Proposition 22.73 *Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2 et a un réel strictement positif. Alors,*

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}.$$

Cette inégalité montre l'intérêt de la variance pour *mesurer* la dispersion d'une v.a.

Preuve.

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) & = & \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)|^2 \geq a^2) \\ & \underset{Markov}{\leq} & \dfrac{\mathbb{E}(|X - \mathbb{E}(X)|^2)}{a^2} = \dfrac{\mathbb{V}(X)}{a^2}. \end{array}$$

♣

22.11 Convergences

22.11.1 Convergence presque sûre

Définition : Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X une variable aléatoire réelle définie sur le même espace. On dit que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X si

$$\{\omega/\text{la suite } (X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } X(\omega)\}$$

est de probabilité 1.

Exemple : On considère l'espace probabilisé $([-1;1]; \mathcal{B}([-1;1]), U)$ où U est la probabilité uniforme sur le segment $[-1;1]$. Pour tout entier naturel n, on considère X_n la variable aléatoire réelle définie sur cet espace probabilisé par :

$$\forall \omega \in [-1;1], \quad X_n(\omega) = \omega^n.$$

La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement sur $[-1;1]$ vers l'application nulle.

22.11.2 Convergence en probabilité

Définition : Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X une variable aléatoire réelle définie sur le même espace. La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si :

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq a\right) = 0.$$

Proposition 22.74 *Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X une variable aléatoire réelle définie sur le même espace. Si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X, alors elle converge en probabilité vers X.*

Preuve. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X une variable aléatoire réelle définie sur le même espace. On suppose que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers X. On considère a un réel strictement positif. Pour tout entier naturel n, on note A_n et B_n les événements suivants :

$$A_n = (|X_n - X| < a)) \quad \text{et} \quad B_n = \bigcap_{k=n}^{+\infty} A_k$$

La suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements dont la limite contient l'événement de probabilité 1 :

$$\{\omega/\text{la suite } (X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } X(\omega)\}$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = 1.$$

En outre

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n \subset A_n.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n) = 1$$

et que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n^c) = 0.$$

D'où le résultat. ♣

22.11.3 Loi des grands nombres

Théorème 22.75 *Loi faible des grands nombres. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On note m l'espérance commune. Alors la suite définie, pour tout entier strictement positif n, par*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

converge en probabilité vers m.

Preuve. L'espérance est une forme linéaire. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k) = m.$$

On note σ^2 la variance commune. Les variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes :

$$\mathbb{V}(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_k) = n\sigma^2$$

et

$$\mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Soit a un réel strictement positif. Utilisons l'inégalité de Bienaymé-Thebychev :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right| \geq a\right) \leq \frac{\sigma^2}{na^2}. \tag{22.26}$$

Nous obtenons le résultat désiré. ♣

Avec des hypothèses plus faibles, le théorème suivant nous donne une conclusion plus forte :

Théorème admis 22.76 *Loi forte des grands nombres. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 1. On note m l'espérance commune. Alors la suite définie pour tout entier strictement positif n, par*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

converge presque sûrement vers m.

22.11.4 Théorème de Weierstrass

Théorème 22.77 (de Weierstrass) *Toute application définie et continue sur le segment* $[0,1]$, *à valeurs réelles est limite uniforme sur ce segment d'une suite de polynômes.*

Preuve. On considère une application f continue sur le segment $[0,1]$, à valeurs réelles. Soit x un réel appartenant à ce segment. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_{n,x}$ une v.a.r. suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,x)$. On considère p_n l'application

$$\begin{array}{rccl} p_n : & [0;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right)\right] \end{array}$$

On a

$$\forall x \in [0,1], \quad p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

On remarque que pour tout entier naturel n, l'application p_n est la restriction sur $[0;1]$ d'une fonction polynôme.
Montrons que la suite de fonctions polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur le segment $[0;1]$ vers l'application f.
Soit ε un réel strictement positif. La fonction f étant uniformément continue sur le segment $[0,1]$, choisissons un réel strictement positif δ, vérifiant

$$\forall (x,y) \in ([0,1])^2, \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

On peut écrire la variable aléatoire $|f(\frac{S_{n,x}}{n}) - f(x)|$ comme somme de deux variables :

$$|f(\frac{S_{n,x}}{n}) - f(x)| = |f(\frac{S_{n,x}}{n}) - f(x)|.\mathbb{1}_{|\frac{S_{n,x}}{n} - x| < \delta} + |f(\frac{S_{n,x}}{n}) - f(x)|.\mathbb{1}_{|\frac{S_{n,x}}{n} - x| \geq \delta}.$$

On a,

$$0 \leq |f(\frac{S_{n,x}}{n}) - f(x)|.\mathbb{1}_{|\frac{S_{n,x}}{n} - x| < \delta} \leq \varepsilon.\mathbb{1}_{|\frac{S_{n,x}}{n} - x| < \delta} \leq \varepsilon.$$

D'autre part,

$$0 \leq |f(\frac{S_{n,x}}{n}) - f(x)|.\mathbb{1}_{|\frac{S_{n,x}}{n} - x| \geq \delta} \leq 2\|f\|_\infty.\mathbb{1}_{|\frac{S_{n,x}}{n} - x| \geq \delta}.$$

La variable aléatoire $\mathbb{1}_{|\frac{S_{n,x}}{n} - x| \geq \delta}$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(|\frac{S_{n,x}}{n} - x| \geq \delta)$. Son espérance est donc égale à $\mathbb{P}(|\frac{S_{n,x}}{n} - x| \geq \delta)$. On obtient,

$$\mathbb{E}\left(|f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x)|\right) \leq \varepsilon + 2\mathbb{P}\left(|\frac{S_{n,x}}{n} - x| \geq \delta\right) \|f\|_\infty.$$

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a

$$\mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x)\right|\right) \leq \varepsilon + 2\frac{x(1-x)}{n\delta^2}\|f\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{1}{2n\delta^2}\|f\|_\infty.$$

On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1], \quad |p_n(x) - f(x)|$$

$$= \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right)\right) - f(x)\right| = \left|\mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x)\right)\right|$$

$$\leq \mathbb{E}\left(\left|f\left(\frac{S_{n,x}}{n}\right) - f(x)\right|\right) \leq \varepsilon + \frac{1}{2n\delta^2}\|f\|_\infty.$$

On considère un entier n_0 strictement positif, vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq \frac{1}{2n\delta^2}\|f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Ainsi,

$$\forall n \geq n_0, \quad \|p_n - f\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

La suite de polynômes $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0;1]$ vers f. ♣

22.11.5 Grandes déviations

En probabilités, l'étude des grandes déviations concerne l'étude de probabilités d'événements rares. Dans cette section, nous améliorons la précision de la vitesse de convergence vers 0 de la suite (22.26), page 453, tout d'abord dans le cadre de variables aléatoires réelles indépendantes suivant une loi de Bernoulli (proposition 22.78), puis dans un cadre plus général (exercice 22.14).

Proposition 22.78 *Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe des réels positifs a, b et c, strictement inférieurs à 1, dépendant de p et ε, vérifiant,*

1. $$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq p + \varepsilon\right) \leq a^n,$$

2. $$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq p - \varepsilon\right) \leq b^n,$$

3. $$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2c^n.$$

On dit que $\frac{S_n}{n}$ converge vers p avec une vitesse géométrique.

Preuve. On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \varphi(s) = \mathbb{E}(\exp(sX_1)) = 1 - p + pe^s.$$

Les variables X_i sont indépendantes, donc les variables e^{sX_i} le sont aussi. On a, ainsi,

$$\mathbb{E}(\exp(sS_n)) = (\varphi(s))^n.$$

Soit ε un réel strictement positif.

1. On peut écrire, pour tout réel s strictement positif,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq p+\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\exp s\left(S_n - n(p+\varepsilon)\right) \geq 1\right)$$

$$\underset{Markov}{\leq} \mathbb{E}\left(\exp s\left(S_n - n(p+\varepsilon)\right)\right) = \left(\varphi\left(s\right)\right)^n e^{-(p+\varepsilon)ns} = \left(\varphi(s)e^{-(p+\varepsilon)s}\right)^n.$$

On en déduit :

$$\forall s > 0, \quad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq p+\varepsilon\right) \leq \left(\varphi(s)e^{-(p+\varepsilon)s}\right)^n.$$

On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ & s & \longmapsto & \varphi(s)e^{-(p+\varepsilon)s}. \end{array}$$

En remarquant que $f(0) = 1$ et que $f'(0) = -\varepsilon$, on peut choisir un réel strictement positif s_0 vérifiant

$$0 < f(s_0) < 1.$$

Notons a la valeur de $f(s_0)$. On obtient le résultat désiré.

2. On peut écrire, pour tout réel s strictement négatif,

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq p-\varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\exp s\left(S_n - n(p-\varepsilon)\right) \geq 1\right)$$

$$\underset{Markov}{\leq} \mathbb{E}\left(\exp s\left(S_n - n(p-\varepsilon)\right)\right) = \left(\varphi\left(s\right)\right)^n e^{-(p-\varepsilon)ns} = \left(\varphi(s)e^{-(p-\varepsilon)s}\right)^n.$$

On en déduit :

$$\forall s < 0, \quad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq p-\varepsilon\right) \leq \left(\varphi(s)e^{-(p-\varepsilon)s}\right)^n.$$

On considère l'application g définie sur $\mathbb{R}^-$ par

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{R}^- & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ & s & \longmapsto & \varphi(s)e^{-(p-\varepsilon)s} \end{array}$$

En remarquant que $g(0) = 1$ et que $g'(0) = \varepsilon$, on peut choisir un réel strictement négatif s_1 vérifiant

$$0 < g(s_1) < 1.$$

Notons b la valeur de $g(s_1)$. On obtient le résultat désiré.

3.

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq p+\varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq p-\varepsilon\right) \\ &\leq a^n + b^n. \end{aligned}$$

Il suffit de choisir $c = \max\{a; b\}$.

♣

Exercice 22.14 On considère un réel α strictement positif et X une variable aléatoire discrète d'image $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ admettant un moment exponentiel d'ordre α. (On pourra lire la définition page 419.)

1. Vérifier, que pour tout réel s appartenant au segment $[-\alpha,\alpha]$, la variable aléatoire e^{sX} admet un moment d'ordre 1.
   On peut ainsi définir l'application φ par :
$$\varphi : \begin{array}{ccc} [-\alpha,\alpha] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ s & \longmapsto & \mathbb{E}\left(e^{sX}\right). \end{array}$$
2. Montrer, que l'application φ est continue sur le segment $[-\alpha,\alpha]$ et dérivable sur l'intervalle $]-\alpha,\alpha[$ dont on déterminera l'application dérivée.
3. On considère un réel θ et l'application f_θ définie par
$$f_\theta : \begin{array}{ccc} [-\alpha,\alpha] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ s & \longmapsto & e^{-\theta s}\varphi(s). \end{array}$$
   Donner les valeurs de $f_\theta(0)$ et $f'_\theta(0)$.
4. On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On définit pour tout entier n strictement positif la variable aléatoire S_n par
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$
   Montrer, que pour tout réel s appartenant au segment $[-\alpha,\alpha]$, la variable aléatoire réelle e^{sS_n} admet une espérance que l'on déterminera.
   Pour la suite de l'exercice, on considère ε un réel strictement positif.
5. (a) Montrer que pour tout réel s appartenant à l'intervalle $]0,\alpha]$, on a
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \mathbb{E}(X)+\varepsilon\right) \leq f^n_{(\mathbb{E}(X)+\varepsilon)}(s).$$
   (b) En déduire qu'il existe un réel a appartenant à l'intervalle $]0,1[$, vérifiant
$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \mathbb{E}(X)+\varepsilon\right) \leq a^n.$$
6. (a) Montrer que pour tout réel s appartenant à l'intervalle $[-\alpha,0[$, on a
$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq \mathbb{E}(X)-\varepsilon\right) \leq f^n_{(\mathbb{E}(X)-\varepsilon)}(s).$$
   (b) En déduire qu'il existe un réel b appartenant à l'intervalle $]0,1[$, vérifiant
$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq \mathbb{E}(X)-\varepsilon\right) \leq b^n.$$

7. Montrer qu'il existe un réel c appartenant à l'intervalle $]0.1[$, vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2c^n.$$

Remarque 22.14 *Nous pouvons obtenir un résultat similaire pour une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, suivant une même loi continue admettant un moment exponentiel.*

Solution.

1. $$\forall i \in \mathbb{N}, \forall s \in [-\alpha, \alpha], \quad \mathbb{P}(X = x_i)e^{sx_i} \leq \mathbb{P}(X = x_i)e^{\alpha|x_i|}.$$

   Ainsi, la série $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x_i)e^{sx_i}$ est normalement convergente sur le segment $[-\alpha, \alpha]$ et l'on peut définir l'application φ par

   $$\forall s \in [-\alpha, \alpha], \quad \varphi(s) = \mathbb{E}(e^{sX}) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = x_i)e^{sx_i}.$$

2. Pour tout élément i appartenant à I, l'application $f_i : [-\alpha, \alpha] \mapsto \mathbb{P}(X = x_i)e^{sx_i}$ est continue sur le segment $[-\alpha, \alpha]$. La série $\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X = x_i)e^{sx_i}$ étant normalement convergente sur le segment $[-\alpha, \alpha]$, l'application φ est continue sur ce segment.
   Soit β un réel vérifiant $0 < \beta < \alpha$. Pour tout élément i de I, la restriction de l'application f_i à l'intervalle $]-\beta, \beta[$ est dérivable, avec

   $$\forall s \in]-\beta, \beta[, \quad f_i'(s) = x_i\mathbb{P}(X = x_i)e^{sx_i}.$$

   Ainsi,
   $$\forall i \in \mathbb{N}, \forall s \in]-\beta, \beta[, \quad |f_i'(s)| \leq |x_i|\mathbb{P}(X = x_i)e^{\beta|x_i|}.$$

   L'application définie sur $\mathbb{R}^+$ par $x \mapsto xe^{(\beta-\alpha)x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et admet une limite nulle en $+\infty$. Elle est donc bornée. Notons M un majorant.

   $$\forall i \in \mathbb{N}, \quad |x_i|\mathbb{P}(X = x_i)e^{\beta|x_i|} \leq M\mathbb{P}(X = x_i)e^{\alpha|x_i|}.$$

   On en déduit que la série $\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|\mathbb{P}(X = x_i)e^{\beta|x_i|}$ est convergente et que la série $\sum_{i\in\mathbb{N}} f_i'$ est normalement convergente sur l'intervalle $]-\beta, \beta[$. L'application φ est ainsi dérivable sur $\cup_{0<\beta<\alpha}]-\beta, \beta[=]-\alpha, \alpha[$ avec,

   $$\forall s \in]-\alpha, \alpha[, \quad \varphi'(s) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i\mathbb{P}(X = x_i)e^{sx_i}.$$

3. $$f_\theta(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad f_\theta'(0) = \mathbb{E}(X) - \theta.$$

4. Soit s un élément du segment $[-\alpha, \alpha]$. On a,

   $$\forall s \in [-\alpha, \alpha], \quad e^{sS_n} = \prod_{k=1}^{n} e^{sX_k}.$$

   D'après l'exercice 22.5, page 417, les variables aléatoires $(e^{sX_k})_{1\leq k\leq n}$ sont indépendantes. Et d'après la proposition 22.43, page 427 la variable e^{sS_n} admet un moment d'ordre 1, avec

   $$\mathbb{E}(e^{sS_n}) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}(sX_k) = \varphi^n(s).$$

5. (a) Pour tout réel s appartenant à l'intervalle $]0, \alpha]$, nous avons

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \mathbb{E}(X) + \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\exp s\left(S_n - n(\mathbb{E}(X) + \varepsilon)\right) \geq 1\right)$$

$$\underset{Markov}{\leq} \mathbb{E}\left(\exp s\left(S_n - n(\mathbb{E}(X) + \varepsilon)\right)\right) = (\varphi(s))^n e^{-(\mathbb{E}(X)+\varepsilon)ns}$$

$$= f^n_{(\mathbb{E}(X)+\varepsilon)}(s).$$

(b) En remarquant que $f_{(\mathbb{E}(X)+\varepsilon)}(0) = 1$ et que $f'_{(\mathbb{E}(X)+\varepsilon)}(0) = -\varepsilon$, on peut choisir un réel s_0 appartenant à $]0, \alpha]$ vérifiant

$$0 < f_{(\mathbb{E}(X)+\varepsilon)}(s_0) < 1.$$

Notons a la valeur de $f(s_0)$. On obtient le résultat désiré.

6. (a) Pour tout réel s appartenant à l'intervalle $[-\alpha, 0[$, nous avons

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq \mathbb{E}(X) - \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\exp s\left(S_n - n(\mathbb{E}(X) - \varepsilon)\right) \geq 1\right)$$

$$\underset{Markov}{\leq} \mathbb{E}\left(\exp s\left(S_n - n(\mathbb{E}(X) - \varepsilon)\right)\right)$$

$$= (\varphi(s))^n e^{-(\mathbb{E}(X)-\varepsilon)ns} = f^n_{(\mathbb{E}(X)-\varepsilon)}(s).$$

(b) En remarquant que $f_{(\mathbb{E}(X)-\varepsilon)}(0) = 1$ et que $f'_{(\mathbb{E}(X)-\varepsilon)}(0) = \varepsilon$, on peut choisir un réel s_1 appartenant à $[-\alpha, 0[$ vérifiant

$$0 < f_{(\mathbb{E}(X)-\varepsilon)}(s_1) < 1.$$

Notons b la valeur de $f(s_1)$. On obtient le résultat désiré .

7.

$$\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(X)\right| \geq \varepsilon\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \geq \mathbb{E}(X) + \varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq \mathbb{E}(X) - \varepsilon\right) \leq a^n + b^n.$$

Il suffit de choisir $c = \max\{a; b\}$.

♣

22.11.6 Convergence en loi

Définition : Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. de fonctions de répartition respectives F_n. On dit que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers la v.a.r. X (de fonction de répartition F) si :

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(a) = F(a)$$

pour tout a, point de continuité de F.

Il s'agit donc de la convergence simple de la suite de fonctions de répartition F_n (sauf au plus sur l'ensemble des points de discontinuité de F).
Une conséquence de cette définition est la suivante :

Exercice 22.15 Considérons une suite de variable aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X_n = \frac{1}{n}) = 1$$

et X une variable aléatoire vérifiant $\mathbb{P}(X = 0) = 1$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable X.

Solution. Pour tout entier naturel strictement positif n, on note F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire X_n et F la fonction de répartition de la variable aléatoire X. Nous remarquons que

$$\begin{cases} F = 1_{[0,+\infty[} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad F_n = 1_{[\frac{1}{n},+\infty[} \end{cases}$$

L'application F est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$.

1. Pour tout réel x strictement négatif, la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante et égale à 0. Elle est donc convergente vers $F(0) = 0$.
2. Pour tout réel x strictement positif, la suite $(F_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est stationnaire et égale à 1 à partir d'un certain rang. Elle est donc convergente vers $F(x) = 1$.

Nous obtenons le résultat désiré. ♣

Proposition 22.79 *On considère $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires et X une variable aléatoire toutes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors,*

$$\left(X_n \underset{loi}{\longrightarrow} X\right) \iff \left(\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k)\right).$$

Preuve. Pour tout entier naturel n, on note F_n la fonction de répartition de la variable aléatoire X_n et F la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

1. Supposons que la suite $(X_n)_n$ converge en loi vers la variable X. La variable X étant à valeurs dans $\mathbb{N}$, sa fonction de répartition F est continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$. Ainsi, pour tout entier naturel k, on a

$$\mathbb{P}(X = k) = F(k + \frac{1}{2}) - F(k - \frac{1}{2}) = \lim_{n\to+\infty} F_n(k + \frac{1}{2}) - \lim_{n\to+\infty} F_n(k - \frac{1}{2})$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(F_n(k + \frac{1}{2}) - F_n(k - \frac{1}{2})\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k).$$

D'où le résultat.

2. Supposons maintenant que pour tout entier naturel k, on ait

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{P}(X = k).$$

Considérons un réel x. Alors,

$$F(x) = \sum_{k=0}^{Ent(x)} \mathbb{P}(X = k) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{Ent(x)} \mathbb{P}(X_n = k) \right) = \lim_{n\to+\infty} F_n(x).$$

Ce qui termine la preuve.

♣

Proposition 22.80 *(Convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson) Soient λ un réel strictement positif, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires suivant une loi binomiale de paramètre n et $\frac{\lambda}{n}$ et X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Alors,*

$$X_n \xrightarrow{loi} X.$$

Preuve. Soit k fixé.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

Le second terme du produit tend vers 1. Pour le troisième on obtient :

$$\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{(n-k)\ln(1-\frac{\lambda}{n})} = e^{(n-k)(-\frac{\lambda}{n}-o(1/n))} = e^{-\lambda+o(1)}$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

♣

En pratique, lorsque n est grand, on « approxime » $\mathbb{P}(X_n = k)$ par $\mathbb{P}(X = k)$.

Théorème 22.81 *(Théorème central limite) Soit (X_n) une suite de v.a.r. indépendantes et de même loi, d'espérances finies m et de variances finies σ^2. On a :*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(X_k - m)}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[loi]{} \mathcal{N}(0,1).$$

En pratique, lorsque n est grand, on approxime

$$\mathbb{P}\Big(a \leq \frac{\sum_{k=1}^{n}(X_k - m)}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\Big) \quad \text{par} \quad \mathbb{P}(a \leq N \leq b)$$

où N suit une loi normale réduite centrée.

Chapitre 23

Fonctions intégrables

Dans ce chapitre, tous les intervalles considérés sont non vides. On pourra revoir la définition d'une application continue par morceaux, page 98.

23.1 Intégrabilité d'une fonction positive sur un intervalle

Définition : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux sur I à valeurs réelles *positives*. On dit que f est intégrable sur I s'il existe un réel positif M tel que, pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, on a

$$\int_a^b f(t)dt \leq M.$$

On note

$$\int_I f(t)dt = \sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b f(t)dt.$$

Voici une première proposition, simple à prouver, mais très utile.

Proposition 23.1 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux applications continues par morceaux sur I à valeurs réelles* positives. *On suppose que l'application g est intégrable sur I et que*

$$\forall t \in I, \quad f(t) \leq g(t).$$

Alors l'application f est intégrable sur I.

Preuve. Pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I, nous avons

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt \leq \int_I g(t)dt.$$

On en déduit que l'application f est intégrable sur I. ♣

Proposition 23.2 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux sur I et à valeurs réelles* positives. *S'il existe une suite croissante de segments $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ dont la réunion est égale à I telle que la suite*

$$\left(\int_{a_n}^{b_n} f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

soit majorée, alors f est intégrable sur I.

Preuve. Supposons qu'il existe une suite croissante de segments $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de réunion I telle que la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit majorée. Considérons un segment $[a, b]$ inclus dans I. Il existe un entier naturel n_0 tel que $\{a, b\} \subset [a_{n_0}, b_{n_0}]$. Alors,

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_{a_{n_0}}^{b_{n_0}} f(t)dt \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt.$$

On en déduit que f est intégrable sur I. ♣

Proposition 23.3 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux sur I et à valeurs réelles* positives. *Si f est intégrable sur I, alors, pour toute suite croissante de segments $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ de réunion I, la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt = \int_I f(t)dt.$$

Preuve. Considérons $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de segments vérifiant $I = \cup_{n=0}^{+\infty}[a_n, b_n]$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt \leq \sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b f(t)dt = \int_I f(t)dt.$$

La suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée donc convergente.
Soit ε un réel strictement positif. Considérons un segment $[a, b]$ inclus dans I vérifiant

$$\int_a^b f(t)dt > \int_I f(t)dt - \varepsilon.$$

Soit n_0 un entier naturel vérifiant

$$\forall n \geq n_0, \quad \{a, b\} \subset [a_n, b_n].$$

Nous obtenons

$$\forall n \geq n_0, \quad \int_I f(t)dt - \varepsilon < \int_a^b f(t)dt \leq \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt \leq \int_I f(t)dt.$$

La suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers $\int_I f(t)dt$. ♣

Proposition 23.4 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux sur I et à valeurs réelles* positives. *Alors f est intégrable sur I si et seulement si l'intégrale généralisée de f sur l'intervalle I est convergente. Dans ce cas, les deux intégrales sont égales.*

Preuve. Soit f une application continue par morceaux sur l'intervalle I. On notera A et B les extrémités de l'intervalle I.

1. Supposons que l'intégrale
$$\int_A^B f(t)dt$$
soit convergente. L'application f étant à valeurs réelles positives, en utilisant la relation de Chasles, pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I, nous obtenons,
$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_A^B f(t)dt.$$
On en déduit que l'application f est intégrable sur l'intervalle I.

2. Réciproquement, supposons que l'application f soit intégrable sur l'intervalle I

   (a) Si $I = [A,B]$ avec $-\infty < A < B < +\infty$.
   Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $[A,B]$, nous avons
   $$\int_a^b f(t)dt \leq \int_A^B f(t)dt.$$
   Ainsi,
   $$\int_{[A,B]} f(t)dt = \sup_{[a,b]\subset[A,B]} \int_a^b f(t)dt = \int_A^B f(t)dt.$$

   (b) Si $I = [A,B[$ avec $-\infty < A < B \leq +\infty$.
   On considère l'application F, définie sur l'intervalle $[A,B[$, par
   $$F: \begin{array}{ccc} [A,B[& \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \int_A^x f(t)dt \end{array}$$
   et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite strictement croissante d'éléments de $[A,B[$, tendant vers B lorsque n tend vers $+\infty$. D'après la proposition 23.3, la suite $(F(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente avec
   $$\lim_{n\to+\infty} F(b_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_A^{b_n} f(t)dt = \int_{[A,B[} f(t)dt.$$

On en déduit que l'application F admet une limite en B avec

$$\lim_{x\to B} F(x) = \int_{[A,B[} f(t)dt.$$

L'intégrale de f sur l'intervalle $[A, B[$ est convergente avec

$$\int_A^B f(t)dt = \int_{[A,B[} f(t)dt.$$

(c) Si $I =]A, B]$ avec $-\infty \leq A < B < +\infty$.
Même raisonnement que précédemment.

(d) Si $I =]A, B[$ avec $-\infty \leq A < B \leq +\infty$.
Considérons un réel C vérifiant $A < C < B$. Pour tout segment $[a, b]$ inclus dans l'intervalle $]A, C]$ ou dans l'intervalle $[C, B[$, nous avons,

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_{]A,B[} f(t)dt.$$

L'application f est ainsi intégrable sur les intervalles $]A, C]$ et $[C, B[$ et d'après (b) et (c), les intégrales

$$\int_A^C f(t)dt, \int_C^B f(t)dt \quad \text{puis} \quad \int_A^B f(t)dt$$

sont convergentes. Considérons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite décroissante d'éléments de l'intervalle $]A, C]$ tendant vers A lorsque n tend vers $+\infty$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite croissante d'éléments de l'intervalle $[C, B[$ tendant vers B lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_A^B f(t)dt &= \int_A^C f(t)dt + \int_C^B f(t)dt \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^C f(t)dt + \lim_{n\to+\infty} \int_C^{b_n} f(t)dt \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt = \int_{]A,B[} f(t)dt.\end{aligned}$$

♣

23.2 Intégrabilité d'une fonction

Définition : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux sur I à valeurs réelles ou complexes. On dit que f est intégrable sur I si la fonction à valeurs réelles positives $|f|$ est intégrable sur I.

Proposition 23.5 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application continue par morceaux sur I à valeurs réelles ou complexes et g une application à valeurs réelles positives intégrable sur I. Si*

$$\forall t \in I, \quad |f(t)| \leq g(t),$$

alors l'application f est intégrable sur I.

Preuve. Il suffit d'utiliser la proposition 23.1 ♣

Théorème-définition 23.6 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application à valeurs réelles ou complexes intégrable sur I. Alors, pour tout suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ croissante de segments de réunion I, la suite $\left(\int_{[a_n,b_n]} f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Sa limite est indépendante de la suite $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ et notée $\int_I f(t)dt$.*

Preuve. Soit $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de segments de réunion I. Nous savons que la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} |f(t)|dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc de Cauchy. Pour tous entiers naturels n et p vérifiant $n \geq p$,

$$\left|\int_{a_n}^{b_n} f(t)dt - \int_{a_p}^{b_p} f(t)dt\right| = \left|\int_{a_n}^{a_p} f(t)dt + \int_{b_p}^{b_n} f(t)dt\right|$$

$$\leq \int_{a_n}^{a_p} |f(t)|dt + \int_{b_p}^{b_n} |f(t)|dt = \int_{a_n}^{b_n} |f(t)|dt - \int_{a_p}^{b_p} |f(t)|dt.$$

On en déduit que la suite $\left(\int_{a_n}^{b_n} f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy à valeurs dans $\mathbb{C}$ donc convergente. Pour terminer, montrons que la limite de cette suite ne dépend pas de la suite de segments choisie. Considérons $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, $([a'_n, b'_n])_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites croissantes de segments de réunion I. Définissons pour tout entier naturel n,

$$a''_n = \min\{a_n, a'_n\} \qquad \text{et} \qquad b''_n = \max\{b_n, b'_n\}.$$

La suite de segments $([a''_n, b''_n])_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante de réunion I.

$$\left|\int_{a''_n}^{b''_n} f(t)dt - \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt\right| = \left|\int_{a''_n}^{a_n} f(t)dt + \int_{b_n}^{b''_n} f(t)dt\right|$$

$$\leq \int_{a''_n}^{a_n} |f(t)|dt + \int_{b_n}^{b''_n} |f(t)|dt = \int_{a''_n}^{b''_n} |f(t)|dt - \int_{a_n}^{b_n} |f(t)|dt.$$

Nous savons que la suite

$$\left(\int_{a''_n}^{b''_n} |f(t)|dt - \int_{a_n}^{b_n} |f(t)|dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

est convergente vers 0. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{a_n''}^{b_n''} f(t)dt - \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt\right) = 0.$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{a_n''}^{b_n''} f(t)dt\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_{a_n}^{b_n} f(t)dt\right).$$

On montre de même que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{a_n''}^{b_n''} f(t)dt\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_{a_n'}^{b_n'} f(t)dt\right).$$

D'où, le résultat. ♣

Proposition 23.7 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application continue par morceaux sur I à valeurs réelles ou complexes. Alors,*

1. *L'application f est intégrable sur I si et seulement si l'intégrale généralisée de f sur I est absolument convergente.*
2. *Dans ce cas, les deux intégrales sont égales.*

Preuve.

1. Évident d'après la définition d'une application intégrable et la proposition 23.4.
2. Supposons maintenant que l'application f soit intégrable sur l'intervalle I. Utilisons le théorème-définition 23.6.
   (a) Si I=[A,B] avec $-\infty < A < B < +\infty$, il suffit d'utiliser les deux suites constantes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = A \quad \text{et} \quad b_n = B.$$
   On obtient
   $$\int_A^B f(t)dt = \int_{[A,B]} f(t)dt.$$
   (b) Si $I = [A, B[$ avec $-\infty < A < B \leq +\infty$, considérons $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite strictement croissante d'éléments de $[A, B[$, tendant vers B lorsque n tend vers $+\infty$. Alors,
   $$\int_A^B f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_A^{b_n} f(t)dt = \int_{[A,B[} f(t)dt.$$

(c) Si $I =]A, B]$ avec $-\infty \leq A < B < +\infty$, considérons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite strictement décroissante d'éléments de $]A, B]$, tendant vers A lorsque n tend vers $+\infty$. Alors,

$$\int_A^B f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^B f(t)dt = \int_{[A,B[} f(t)dt.$$

(d) Si $I =]A, B[$ avec $-\infty \leq A < B \leq +\infty$, considérons C un point de l'intervalle $]A, B[$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite strictement décroissante d'éléments de $]A, C]$, tendant vers A lorsque n tend vers $+\infty$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite strictement croissante d'éléments de $[C, B[$, tendant vers B lorsque n tend vers $+\infty$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_A^B f(t)dt &= \int_A^C f(t)dt + \int_C^B f(t)dt \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^C f(t)dt + \lim_{n\to+\infty} \int_C^{b_n} f(t)dt \\ &= \lim_{n\to+\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt = \int_{]A,B[} f(t)dt.\end{aligned}$$

♣

23.3 Exemples d'espaces $L^p_C(I)$

23.3.1 Espaces $L^1_C(I)$

On considère I un intervalle réel. On note $L^1_C(I)$, l'ensemble des applications, à valeurs réelles, intégrables sur I.

Proposition 23.8 *L'ensemble $L^1_C(I)$ muni des lois + et . est un espace vectoriel réel. L'application qui à tout élément f de $L^1_C(I)$ associe*

$$\|f\|_1 = \int_I |f(t)|dt$$

est un norme sur $L^1_C(I)$.

Preuve. Évident. ♣

23.3.2 Espaces $L^2_C(I)$

On considère I un intervalle réel. On note $L^2_C(I)$, l'ensemble des applications, à valeurs réelles, de carré intégrables sur I.

Proposition 23.9 *L'ensemble $L^2_C(I)$ muni des lois + et . est un espace vectoriel réel.*

Preuve. Vérifions que $L^2_C(I)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications continues sur l'intervalle I.

1. L'application nulle appartient à $L^2_C(I)$.
2. Soient f et g deux éléments de $L^2_C(I)$. Alors,

$$(f+g)^2 \leq 2\left(f^2+g^2\right).$$

   Ainsi, l'application $(f+g)^2$ est intégrable sur I et l'application $(f+g)$ appartient à $L^2_C(I)$.
3. Il est évident que, si f appartient à $L^2_C(I)$ et si λ est un réel, alors λf appartient à $L^2_C(I)$.

♣

Proposition 23.10 *Si f et g sont deux éléments de $L^2_C(I)$, alors l'application $f.g$ est intégrable sur I.*

Preuve. Nous avons

$$(|f|+|g|)^2 \geq 0.$$

Ainsi,

$$2\,|fg| \leq f^2+g^2.$$

D'où, le résultat. ♣

Ceci permet de justifier l'existence de l'application suivante :

Proposition 23.11 *L'application*

$$\forall (f,g) \in (L^2_C(I))^2, \quad <f,g>= \int_I f(t)g(t)dt$$

définit un produit scalaire sur $(L^2_C(I))^2$.

Preuve. Évident. ♣

23.4 Théorèmes de convergence

23.4.1 Théorème de convergence monotone

Théorème admis 23.12 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite* croissante *de fonctions* positives *intégrables sur I et convergent simplement vers une fonction f continue par morceaux sur tout segment inclus dans I. Si la suite*

$$\left(\int_I f_n(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

est majorée alors f est intégrable sur I et

$$\int_I f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt.$$

23.4.2 Théorème de convergence dominée

Théorème admis 23.13 *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{C}$ continues par morceaux sur tout segment inclus dans I et convergente simplement vers une fonction f continue par morceaux sur tout segment inclus dans I. On suppose qu'il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}^+$ intégrable sur I vérifiant*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leq g(t),$$

alors f est intégrable et

$$\int_I f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt.$$

Exercice 23.1 Montrer que les suites proposées sont convergentes et indiquer leur limite.

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \; dx$,
2. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\ln^n(1+x)+e^x} dx$,
3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{2n}+1}} dx$,
4. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin^n x \; dx$,
5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^{2n} x}{x^2} dx$.

Solution.

1. Nous avons
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad |\cos^n x| \leq 1.$$
Toute application constante est intégrable sur un segment. De plus,
$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \lim_{n \to +\infty} \cos^n x = 1_{\{0\}}(x).$$
En utilisant, le théorème de convergence dominée, on obtient
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{n \to +\infty} \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1_{\{0\}}(x) dx = 0.$$

2. $$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq \frac{1}{\ln^n(1+x) + e^x} \leq e^{-x}.$$
Cette dernière fonction est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. De plus,
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\ln^n(1+x) + e^x} = 1_{[0,e-1[}(x) e^{-x} + \frac{1}{1 + e^{e-1u}} 1_{\{(e-1)\}}(x).$$
En utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\ln^n(1+x) + e^x} = \int_0^{e-1} e^{-x} dx = 1 - e^{1-e}.$$

3. On peut remarquer que la fonction n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ pour $n = 0$.
$$\forall n \geq 1, \forall x \geq 0, \quad 0 \leq \frac{1}{\sqrt[n]{x^{2n} + 1}} \leq 1_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^2} 1_{[1,+\infty]}(x)$$
Cette dernière fonction est intégrable sur $[0, +\infty[$. Après avoir vérifié que
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{2n} + 1}} = 1_{[0,1]}(x) + \frac{1}{x^2} 1_{]1,+\infty[}(x),$$
nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée et nous obtenons
$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x^{2n} + 1}} dx = \int_0^1 dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 2.$$

4. Pour tout entier naturel n, on note f_n et g_n les applications définies sur $\mathbb{R}^+$ par
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f_n(x) = e^{-x^2} \sin^n x, \\ g_n = f_n . 1_{\mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}}. \end{cases}$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, \quad |g_n(x)| \leq e^{-x^2}.$$
On en déduit que, pour tout entier naturel n, les applications f_n et g_n sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et de même intégrale. Nous avons
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{n \to +\infty} g_n(x) = 0.$$

L'application $x \mapsto e^{-x^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}^+$, nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin^n x\; dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_n(x)\; dx = \int_0^{+\infty} 0.dx = 0.$$

5. Pour tout entier naturel n, on note f_n, l'application définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\quad f_n(x) = \frac{\sin^{2n} x}{x^2}.$$

Nous remarquons que l'application f_0 n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier n strictement positif, l'application se prolonge par continuité en 0.

$$\forall n>0, \forall x\in\mathbb{R}^*,\quad |f_n(x)| \leq 1_{[-1,1]}(x) + \frac{1}{x^2}1_{]1,+\infty[}(x) + \frac{1}{x^2}1_{]-\infty,-1[}(x).$$

Cette dernière application est intégrable sur $\mathbb{R}$. On en déduit que, pour tout entier naturel strictement positif n, l'application f_n est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Nous avons

$$\forall x\in\mathbb{R}^+,\quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \frac{1_{\{\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\}}(x)}{x^2}.$$

Utilisons le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^{2n} x}{x^2}dx = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\; dx = \int_0^{+\infty}\frac{1_{\{\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\}}(x)}{x^2}dx = 0.$$

♣

Exercice 23.2 1. Montrer que, pour tout entier n strictement positif, on a

$$\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1} x\; dx = \int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

2. Montrer que la suite définie dans la première question est convergente avec

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt.$$

3. En utilisant la formule de Wallis (voir exercice 13.3, page 206),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p x\; dx \sim \sqrt{\frac{\pi}{2p}},$$

montrer que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Solution.

1. Effectuons le changement de variable

$$\begin{array}{rccl} t: & [0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & [0\sqrt{n}] \\ & x & \longmapsto & \sqrt{n}\cos x. \end{array}$$

   On obtient $dt = -\sqrt{n}\sin x dx$. Ainsi,

$$\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx = \sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 x\right)^n \sin x dx = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

2. Considérons, pour tout entier naturel n strictement positif, l'application f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\begin{array}{rccl} f_n: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & t & \longmapsto & 1_{[0,\sqrt{n}[}(t) \times \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n. \end{array}$$

   La concavité de l'application, $x \mapsto \ln(1-x)$ sur l'intervalle $]-\infty, 1[$, permet d'écrire

$$\forall x \in]-\infty, 1[, \quad \ln(1-x) \leq -x.$$

   On en déduit que

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}[, \quad \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2},$$

   puis que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq f_n(t) \leq e^{-t^2}.$$

   Cette dernière application est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. De plus,

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = e^{-t^2}.$$

   Il suffit d'utiliser le théorème de convergence dominée pour conclure.

3. On peut écrire, grâce à la formule de Wallis,

$$\sqrt{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x dx \sim \sqrt{n}\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

   Cette suite étant convergente vers $\left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)$, on obtient le résultat désiré.

♣

23.5 Intégrales dépendant d'un paramètre

23.5.1 Continuité

Les deux thèorèmes suivants sont des conséquences du théorème de convergence dominée.

Théorème 23.14 *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \times J \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $I \times J$ et $g : J \to \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable sur J. On suppose*

$$\forall (x,t) \in I \times J, \quad |f(x,t)| \leq g(t).$$

Alors l'application F définie par

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_J f(x,t)dt$$

est continue sur l'intervalle I.

Preuve. Soit x un élément de l'intervalle I. Montrons que l'application F est continue en x. Considérons pour cela une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergente vers x. Définissons alors pour tout entier naturel n, l'application f_n définie sur l'intervalle J par

$$\begin{array}{rccc} f_n : & J & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & f(x_n,t). \end{array}$$

Nous avons

$$\forall t \in J, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(x,t).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in J, \quad f_n(t) \leq g(t).$$

Cette dernière application étant intégrable sur J, nous pouvons utiliser le théorème de convergence dominée. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_J f_n(t)dt = \int_J f(x,t)dt = F(x).$$

On en déduit que F est continue au point x puis sur l'intrvalle I. ♣

23.5.2 Dérivabilité

Théorème 23.15 *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \times J \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur $I \times J$ et $g : J \to \mathbb{R}^+$ une fonction intégrable sur J. On suppose*

1. *Pour tout x élément de I, l'application $t \to f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J,*
2. *f est dérivable par rapport à x sur $I \times J$ et*

$$\forall x \in I, \quad \forall t \in J, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq g(t).$$

Alors l'application F définie par

$$\forall x \in I, \quad F(x) = \int_J f(x,t)dt$$

est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Preuve. Soit x un élément de l'intervalle I. Montrons que l'application F est dérivable en x. Considérons pour cela une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergente vers x telle que pour tout entier naturel n on ait $x_n \neq x$. Pour tout entier naturel n, définissons l'application T_n par

$$\begin{array}{rccc} T_n : & J & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & t & \longmapsto & \frac{f(x_n,t)-f(x,t)}{x_n-x}. \end{array}$$

Nous avons,

$$\forall t \in J, \quad \lim_{n\to+\infty} T_n(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,t).$$

D'autre part, en utilisant le théorème des accroissements finis, nous pouvons choisir, pour tout réel t élément de l'intervalle J et pour tout entier naturel n, un élément de I noté $y_{t,n}$ compris entre x et x_n vérifiant

$$T_n(t) = \frac{f(x_n,t) - f(x,t)}{x_n - x} = \frac{\partial f}{\partial x}(y_{t,n},t).$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in J, \quad |T_n(t)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(y_{t,n},t)\right| \leq g(t).$$

Nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x} = \lim_{n\to+\infty} \int_J T_n(t)dt = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

L'application F est dérivable en x de dérivée

$$F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

$\clubsuit$

23.5.3 Exercices

Exercice 23.3 1. Vérifier que, pour tout réel x, l'application $t \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est intégrable sur le segment $[0,1]$.
On considère les applications F et G définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt, \qquad G : x \mapsto \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2.$$

2. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) + G'(x) = 0$.
3. En déduire la valeur de $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Solution.

1. Pour tout réel x, l'application $t \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur le segment $[0,1]$ donc intégrable sur ce segment.
2. On note f l'application définie par

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\times[0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}. \end{array}$$

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0,1], \quad \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = -2x.e^{-x^2(1+t^2)}.$$

Soit a un réel strictement positif. Alors,

$$\forall x \in]-a,a[, \forall t \in [0,1], \quad \left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right| \leq 2a.$$

Toute application constante étant intégrable sur le segment $[0,1]$, on en déduit que F est dérivable sur le segment $[-a,a]$ avec,

$$\forall x \in [-a,a], \quad F'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}t.$$

On en déduit que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2)}dt.$$

Pour tout réel x non nul, effectuons dans l'intégrale, le changement de variable $u = xt$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, F'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du.$$

Nous remarquons que nous avons cette égalité pour $x = 0$. D'autre part, G est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F'(x) + G'(x) = 0.$$

3. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) + G(x) = F(0) + G(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Nous remarquons que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq F(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq e^{-x^2}.$$

Ainsi,

$$lim_{x \to +\infty} F(x) = 0,$$

et G étant une application à valeurs positives sur $\mathbb{R}^+$,

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = \frac{\pi}{4} \quad \text{puis} \quad \lim_{x \to +\infty} \sqrt{G(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

♣

Exercice 23.4 On définit sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$, l'application f par

$$\begin{array}{rccc} f: & (\mathbb{R}^{+*})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & \frac{\sin^2 t}{t} e^{-xt} \end{array}$$

1. Vérifier que, pour tout réel x strictement positif, l'application $t \mapsto \frac{\sin^2 t}{t} e^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
   On définit ainsi sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'application F par :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t} e^{-xt} dt.$$

2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. Donner une expression de F' puis de F à l'aide des fonctions usuelles.

Solution.

1.
$$\forall (x,t) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \quad |f(x,t)| \leq \left|\frac{\sin t}{t}\right| e^{-xt} \leq e^{-xt}. \tag{23.27}$$

Ainsi, pour tout réel x strictement positif, l'application $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ceci justifie l'existence de l'application F.

2.
$$\forall (x,t) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin^2 t e^{-xt}.$$

Soit a un réel strictement positif. Alors,

$$\forall (x,t) \in]a,+\infty[\times]0,+\infty[, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-at}.$$

Cette dernière application est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ainsi, l'application F est dérivable sur $]a,+\infty[$ avec,

$$\forall x > a, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin^2 t e^{-xt} dt.$$

On en déduit que l'application F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin^2 t e^{-xt} dt.$$

3.

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin^2 t e^{-xt} dt = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \left(-e^{-xt} + \cos 2t e^{-xt}\right) dt$$
$$= -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\Re\left(\int_0^{+\infty} e^{(2i-x)t} dt\right).$$

Or,

$$\forall x > 0, \quad \int_0^{+\infty} e^{(2i-x)t} dt = \left[\frac{1}{2i-x} e^{(2i-x)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x-2i} = \frac{x+2i}{x^2+4}.$$

On en déduit que

$$\forall x > 0, \quad F'(x) = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+4}.$$

Ce qui permet d'écrire,

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{x^2+4}{x^2} + K$$

où K est une constante réelle ; D'après (23.27),

$$\forall x > 0, \quad |F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}.$$

On en déduit que l'application F admet une limite nulle en $+\infty$ et que $K = 0$. Ainsi,

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2+4}{x^2}.$$

♣

23.5.4 La fonction Gamma

Exercice 23.5 On considère la fonction de variable réelle :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que la fonction Γ est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$
3. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire que $\Gamma(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{x}$.

Solution.

1. Sachant que, pour tout réel x,
$$t^{x-1} e^{-t} \underset{0}{\sim} t^{x-1},$$
on déduit que, pour tout réel x négatif ou nul, l'application $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrons désormais que la fonction Γ est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ Considérons a et b deux réels strictement positifs vérifiant $a < b$.
$$\forall (x,t) \in]a,b[\times \mathbb{R}^+, \quad \left| t^{x-1} e^{-t} \right| \leq 1_{]0,1]}(t).t^{a-1} + 1_{[1,+\infty[}(t).t^{b-1} e^{-t}.$$
Cette dernière application est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. De plus, la fonction
$$\begin{array}{rccc} f: &]a,b[\times \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & t^{x-1} e^{-t} \end{array}$$
étant continue sur $]a,b[\times \mathbb{R}^+$, on en déduit en utilisant le théorème 23.14 que l'application Γ est continue sur l'intervalle $]a,b[$ puis sur $\cup_{0<a<b<+\infty}]a,b[= \mathbb{R}^{+*}$.

2. Pour tout réel x strictement positif,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt.$$

Effectuons une intégration par parties en posant

$$\begin{array}{ll} u = t^x & du = xt^{x-1}, \\ dv = e^{-t}dt & v = -e^{-t}. \end{array}$$

Ainsi,

$$\Gamma(x+1) = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + x\Gamma(x) = x\Gamma(x).$$

3. À l'aide d'une récurrence évidente, nous obtenons pour tout entier naturel n strictement positif, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
4. L'application Γ étant continue en 1 avec $\Gamma(1) = 1$ ($\neq 0$),

$$\Gamma(x+1) \underset{0}{\sim} 1.$$

Ainsi,

$$\Gamma(x) \underset{0}{\sim} \frac{\Gamma(x+1)}{x} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}.$$

♣

Chapitre 24

Calcul de valeurs approchées d'une intégrale

24.1 Interpolation polynomiale

24.1.1 Interpolations de Lagrange et Hermite

Théorème 24.1 *On considère un intervalle réel I, une application $f : I \to \mathbb{R}$ et n un entier naturel strictement positif. Si $x_1, \cdots x_n$ sont n points distincts de I, il existe un unique polynôme L de degré au plus $(n-1)$ vérifiant*

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad L(x_i) = f(x_i).$$

Ce polynôme L est appelé polynôme d'interpolation de Lagrange de f relatif aux points $x_1, \cdots x_n$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad L_f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) l_i(x),$$

avec

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\} \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Les polynômes l_i sont appelés polynômes élémentaires d'interpolation de Lagrange relatif aux points $x_1, \cdots x_n$.

Preuve. Considérons l'application φ définie par,

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & P & \longmapsto & (P(x_1), P(x_2), \cdots, P(x_n)). \end{array}$$

Cette application est trivialement linéaire. Nous remarquons qu'un élément P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ appartient au noyau de φ si et seulement si, il est multiple du polynôme

$$Q = \prod_{k=1}^{n} (X - x_k).$$

Ce polynôme étant de degré n, le seul élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ multiple de Q est le polynôme nul. L'application φ est ainsi injective. Les deux espaces vectoriels $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^n$ étant de même dimension, l'application φ est bijective. Soit f une application définie sur I à valeurs réelles. L'unique polynôme L vérifiant

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \quad L(x_i) = f(x_i).$$

est le polynôme $\varphi^{-1}\left(f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n)\right)$. ♣

Théorème 24.2 *Soient I un intervalle réel et k un entier naturel strictement positif. On considère $x_1, \cdots x_k$, k points distincts de I et $\alpha_1, \cdots \alpha_k$, k entiers naturels strictement positifs. Étant donné une application numérique f définie sur I admettant des dérivées d'ordre $(\alpha_i - 1)$ aux points x_i, il existe un unique polynôme H de degré au plus $n-1$ (avec $n = (\sum_{i=1}^{k} \alpha_i)$) vérifiant*

$$\forall i \in \{1, \cdots k\}, \quad \forall r \in \{o, \cdots (\alpha_i - 1)\}, \quad H^{(r)}(x_i) = f^{(r)}(x_i).$$

Ce polynôme H est appelé polynôme d'interpolation d'Hermite de l'application f relativement aux points $x_1, \cdots x_k$ et aux entiers $\alpha_1, \cdots \alpha_k$.

Remarque 24.1 *Le polynôme d'interpolation de Lagrange d'une fonction f relatifs aux points $x_1, \cdots x_k$ est le polynôme d'interpolation d'Hermite relatifs aux points $x_1, \cdots x_k$ et aux entiers α_i $(1 \leq i \leq k)$ tous égaux à 1.*

Preuve. Considérons l'application Psi définie par,

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & \mathbb{R}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & P & \longmapsto & \left(P(x_1), \cdots P^{(\alpha_1 - 1)}(x_1), \cdots, P(x_k), \cdots P^{(\alpha_k - 1)}(x_k)\right). \end{array}$$

Cette application est linéaire. Nous remarquons qu'un élément P de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ appartient au noyau de Ψ si et seulement si il est multiple du polynôme

$$R = \prod_{i=1}^{k} (X - x_i)^{\alpha_i}.$$

Ce polynôme étant de degré n, le seul élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ multiple de R est le polynôme nul. L'application Ψ est ainsi injective. Les deux espaces vectoriels $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathbb{R}^n$ étant de même dimension, l'application Ψ est bijective. Soit f une application définie sur I à valeurs réelles. L'unique polynôme H vérifiant

$$\forall i \in \{1, \cdots k\}, \quad \forall r \in \{o, \cdots (\alpha_i - 1)\}, \quad H^{(r)}(x_i) = f^{(r)}(x_i).$$

est le polynôme

$$\Psi^{-1}\left(f(x_1), f'(x_1), \cdots f^{(\alpha_1-1)}(x_1), \cdots, f(x_k), f'(x_k) \cdots f^{(\alpha_k-1)}(x_k)\right)$$

♣

Exercice 24.1 On considère une fonction f à valeurs réelles définie sur un intervalle I et dérivable en un point x_1 élément de I et H le polynôme d'interpolation d'Hermite de f relatif aux point x_1 affecté de l'entier $\alpha_1 = 2$. On note $\mathcal{C}_H$ et $\mathcal{C}_f$ les courbes représentatives de l'application polynomiale H et de la fonction f dans le plan euclidien muni d'un repère. Que représente $\mathcal{C}_H$ pour $\mathcal{C}_f$?

Solution. $\mathcal{C}_H$ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_1. ♣

24.1.2 Majoration de l'erreur d'interpolation

Théorème 24.3 *En reprenant les notations du théorème 24.2, si l'on suppose que f est de classe C^n sur l'intervalle I alors*

$$\forall a \in I, \exists \xi_a \in I, \quad f(a) - H(a) = \frac{1}{n!} N(a) f^{(n)}(\xi_a).$$

où

$$N(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - x_i)^{\alpha_i}.$$

N est appelé noyau de l'interpolation.

Preuve. Soit a un élément de I. Le résultat est évident si a appartient à l'ensemble $\{x_1, \cdots, x_k\}$. Sinon, définissons la fonction g_a par,

$$\forall x \in I, \quad g_a(x) = f(x) - H(x) - \lambda N(x),$$

où λ est l'unique réel tel que a soit un zéro de g_a. Pour tout entier i compris entre 1 et k, le réel x_i est zéro de g_a de multiplicité α_i. On en déduit que g_a admet

$$1 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = n + 1$$

zéros en comptant les ordres de multiplicité. D'après le second théorème de Rolle 8.12, page 105, la dérivée $n^{ième}$ de g_a admet au moins un zéro. Notons ξ_a l'un d'entre eux. Or,

$$\forall x \in I, \quad g_a^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - \lambda n!.$$

Ainsi,

$$0 = g_a^{(n)}(\xi_a) = f^{(n)}(\xi_a) - \lambda n!.$$

On obtient $\lambda = \frac{f^{(n)}(\xi_a)}{n!}$. En remplaçant dans l'expression initiale,

$$\forall x \in I, \quad g_a(x) = f(x) - H(x) - N(x)\frac{f^{(n)}(\xi_a)}{n!}.$$

Pour $x = a$, on obtient le résultat désiré.

♣

Corollaire 24.4 *Sous les hypothèses du théorème précédent, si a et b sont deux éléments de I vérifiant $a < b$, on a*

$$\left|\int_a^b f(t)dt - \int_a^b H(t)dt\right| \leq \frac{\sup_{t\in[a,b]} |f^{(n)}(t)|}{n!} \int_a^b |N(t)|dt. \tag{24.28}$$

Preuve. Évident d'après le théorème précédent. ♣

24.2 Méthodes exactes sur $\mathbb{R}_p[X]$

Soient p un entier naturel et $[a, b]$ un segment. Dans $\mathbb{R}_p[X]$, l'application qui à un polynôme P associe $\int_a^b P(t)dt$ est une forme linéaire. Si $x_0, x_1 \cdots, x_p$ sont $(p + 1)$ réels distincts, on peut écrire cette forme linéaire en fonction des formes linéaires $\delta_j : P \to P(x_j)$. En effet :

Théorème 24.5 *Soient p un entier naturel, $\mathbb{R}_p[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus p et $x_0, x_1 \cdots, x_p$ $(p + 1)$ réels distincts. On note pour tout entier k compris entre 0 et p, δ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_p[X]$ qui au polynôme P associe $P(x_k)$. Alors le $(p + 1)$-uplet*

$$(\delta_0, \delta_0, \cdots, \delta_p)$$

forme une base de l'espace dual de $\mathbb{R}_p[X]$.

Preuve. Pour tout entier naturel k inférieur ou égal à p, notons δ_k la forme linéaire définie sur $\mathbb{R}_p[X]$ par

$$\begin{array}{rccl} \delta_k : & \mathbb{R}_p[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & Q & \longmapsto & Q(x_k). \end{array}$$

Montrons que $(\delta_k)_{0\leq k\leq p}$ forme une base du dual de $\mathbb{R}_p[X]$. Celui-ci étant de dimension $(p+1)$, il suffit de montrer que la famille $(\delta_k)_{0\leq k\leq p}$ est libre. Considérons $(a_k)_{0\leq k\leq p}$ un $(p + 1)$-uplet de réels vérifiant

$$\sum_{k=0}^{p} a_k\delta_k = 0.$$

On considère pour tout entier naturel i inférieur ou égal à p, l'élément de $\mathbb{R}_p[X]$ noté Q_i défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{p} (x - x_j).$$

Alors, pour tout entier i compris entre 0 et p, nous avons

$$\sum_{k=0}^{p} a_k \delta_k(Q_i) = a_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{p} (x_i - x_j) = 0.$$

Ainsi,

$$\forall i \in \{0, 1, 2 \cdots, p\}, \quad a_i = 0.$$

La famille $(\delta_k)_{0\leq k\leq p}$ est donc une base du dual de $\mathbb{R}_p[X]$. ♣

On obtient ainsi une *méthode exacte.*

Corollaire 24.6 *Soient $x_0, x_1 \cdots, x_p$ $(p+1)$ réels distincts. Il existe un unique $(p+1)$-uplet de réels $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_p$ tel que :*

$$\forall P \in \mathbb{R}_p[X], \quad \int_a^b P(t)dt = \sum_{j=0}^{p} \lambda_j P(x_j).$$

Preuve. Évident d'après le théorème précédent. ♣

Remarque 24.2 *Le problème principal est alors de trouver les coefficients réels $(\lambda_i)_{0\leq i\leq p}$. D'une part, on remarque en choisissant le polynôme constant et égal à 1 que*

$$\sum_{j=0}^{p} \lambda_j = b - a.$$

D'autre part,

$$\forall i \in \{0, \cdots, p\}, \quad \int_a^b l_i(t)dt = \lambda_i,$$

où les $(l_i)_{0\leq i\leq p}$ sont les polynômes élémentaires de Lagrange.

24.3 Méthodes élémentaires et composées

24.3.1 Méthodes élémentaires

On considère f une application continue sur un segment $[a, b]$. Le but est la recherche de valeurs approchées de l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$. On considère un entier naturel p et on introduit un système interpolateur $S = \{x_0, x_1 \cdots, x_p\}$ de $(p+1)$ points du segment $[a, b]$. On effectue alors pour l'application f une interpolation de Lagrange ou d'Hermite. Il n'est pas nécessaire d'expliciter le polynôme interpolateur. L'intégrale de f sur $[a, b]$ est alors approximée par l'intégrale du polynôme interpolateur. Si f est suffisamment régulière, on pourra majorer l'erreur à l'aide de la majoration (24.28) du corollaire 24.4. Ainsi, on approche :

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \qquad \text{par} \qquad \sum_{j=0}^{p} \lambda_j f(x_j).$$

Les coefficients $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_p$ étant ceux indiqués dans le corollaire (24.6). Cette méthode est exacte pour toutes les fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à p.

Définition : On dit qu'une méthode élémentaire est d'ordre p si elle est exacte sur $\mathbb{R}_p[X]$.

24.3.2 Méthodes composées

Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$. Pour obtenir des valeurs approchées de

$$\int_a^b f(t)dt,$$

on effectue une subdivision à pas constants du segment $[a, b]$. On choisit un entier N strictement positif. Sur chaque segment de la forme

$$[a + \frac{k}{N}(b-a), a + \frac{k+1}{N}(b-a)]$$

où k est un entier compris entre 0 et $(N-1)$, on utilise une méthode élémentaire. Nous remarquerons, plus loin, que si l'application f est suffisamment régulière, la suite des approximations d'une méthode composée converge vers l'intégrale de f sur le segment $[a, b]$ lorsque N tend vers $+\infty$.

24.4 Méthodes des rectangles et du point milieu

24.4.1 Méthode des rectangles

Méthode élémentaire des rectangles

Cette méthode est d'ordre 0. Nous considérons un segment $[a, b]$ et nous prenons $p = 0$. Le système interpolateur est réduit au point $x_0 = a$. D'après la remarque 24.2, $\lambda_0 = (b - a)$. Pour tout polynôme P de degré 0, on a

$$I(P) = \int_a^b P(t)dt = (b-a)P(a).$$

À toute fonction continue f sur $[a, b]$, on associe L_f son polynôme interpolateur de Lagrange au point a et on approxime

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \qquad \text{par} \qquad R(f) = (b-a)f(a).$$

Le noyau de l'interpolation est $N(t) = (t - a)$.

$$\int_a^b |N(t)|\, dt = \int_a^b (t-a)dt = \frac{(b-a)^2}{2}.$$

Si f est de classe C^1, on a, d'après le corollaire 24.4,

$$\left| \int_a^b f(t)dt - R(f) \right| \leq \frac{(b-a)^2}{2} \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|.$$

Méthode composée des rectangles

Soit N un entier strictement positif. On effectue sur le segment $[a, b]$ une subdivision à pas constant

$$h = \frac{b-a}{N}.$$

Sur chaque segment $[a+\frac{k}{N}(b-a), a+\frac{k+1}{N}(b-a)]$, où k est un entier compris entre 0 et $(N-1)$, on applique la méthode élémentaire des rectangles. On approxime

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \qquad \text{par} \qquad R_N(f) = \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{N}).$$

Si f est de classe C^1, on a

$$|I(f) - R_N(f)| \leq \frac{(b-a)^2}{2N} \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|.$$

24.4.2 Méthode du point milieu

Méthode élémentaire du point milieu

Cette méthode est d'ordre 1. Nous considérons un segment $[a, b]$ et nous prenons $p = 0$. Le système interpolateur est réduit au point $x_0 = \frac{a+b}{2}$. D'après la remarque 24.2, $\lambda_0 = (b-a)$. Pour tout polynôme P de degré 0, on a

$$I(P) = \int_a^b P(t)dt = (b-a)P\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

On remarque que, contrairement au cas précédent, pour tout polynôme P de degré au plus 1 (il suffit de le vérifier pour le polynôme $X \mapsto X$), on a également

$$I(P) = \int_a^b P(t)dt = (b-a)P\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

La méthode du point milieu est d'ordre 1. À toute fonction continue f sur $[a, b]$, on associe H_f son polynôme interpolateur d'Hermite associé au point $\frac{a+b}{2}$ et à l'entier 2. On approxime

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \qquad \text{par} \qquad PM(f) = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Le noyau de l'interpolation est $N(x) = (X - \frac{a+b}{2})^2$.

$$\int_a^b |N(t)|\, dt = \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 dt = \frac{(b-a)^3}{12}.$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, on a d'après le corollaire 24.4,

$$\left| \int_a^b f(t)dt - PM(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \sup_{t \in [a,b]} |f''(t)|.$$

Méthode composée du point milieu

Soit N un entier strictement positif. On effectue sur le segment $[a, b]$ une subdivision à pas constant

$$h = \frac{b-a}{N}.$$

Sur chaque segment $[a + \frac{k}{N}(b-a), a + \frac{k+1}{N}(b-a)]$, on applique la méthode élémentaire du point milieu. On approxime

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \qquad \text{par} \qquad PM_N(f) = \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + (k + \frac{1}{2})\frac{b-a}{N}\right).$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$|I(f) - PM_N(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{24N^2} \sup_{t \in [a,b]} |f''(t)|.$$

24.5 Méthodes de Newton-Cotes

24.5.1 Propriétés de la méthode de Newton-Cotes

Soit p un entier strictement positif. Dans la méthode de Newton-Cotes de rang p, qu'on désignera par NC_p, les $(p+1)$ points $x_0, x_1, \cdots x_p$ sont répartis régulièrement sur le segment $[a, b]$. Ainsi,

$$\forall i \in \{0, \cdots, p\}, \quad x_i = a + \frac{i}{p}(b-a).$$

La proposition suivante permet des simplifications pour les calculs des coefficients $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq p}$.

Proposition 24.7 *Dans la méthode de Newton-Cotes de rang p, les coefficients $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq p}$ vérifient*

$$\forall i \in \{0, \cdots, p\}, \quad \lambda_i = \lambda_{p-i}.$$

Preuve. Pour tout entier i compris entre 0 et p, on note l_i, le polynôme élémentaire de Lagrange, unique polynôme de degré au plus p vérifiant

$$\forall j \in \{0,1,\cdots,p\}, \quad l_i\left(a+\frac{j}{p}(b-a)\right)=\delta_{i,j}.$$

Nous savons que

$$\forall i \in \{0,1,\cdots,p\}, \quad \int_a^b l_i(t)dt=\lambda_i.$$

On note Φ la symétrie centrale sur $\mathbb{R}$ par rapport au point $\frac{a+b}{2}$, c'est-à-dire,

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & a+b-t \end{array}$$

Nous remarquons que, pour tout entier i compris entre 0 et p, $(l_i \circ \Phi)$ est un polynôme de degré au plus p. De plus,

$$\forall j \in \{0,1,\cdots,p\}, \quad (l_i\circ\Phi)\left(a+\frac{j}{p}(b-a)\right)=l_i\left(a+\left(\frac{p-j}{p}\right)(b-a)\right)=\delta_{i,p-j}.$$

On en déduit que

$$l_i\circ\Phi=l_{p-i}.$$

Pour tout entier i compris entre 0 et p, en effectuant le changement de variable $(x=a+b-t)$, nous obtenons

$$\lambda_{p-i}=\int_a^b l_{p-i}(t)dt=\int_a^b l_i(a+b-t)dt=-\int_b^a l_i(x)dx=\int_a^b l_i(t)dt=\lambda_i.$$

♣

Proposition 24.8 *Si p est un entier naturel pair, l'ordre de la méthode de Newton-Cotes est $(p+1)$.*

Ceci fait que, hormis le cas $p=1$, les méthodes de Newton-Cotes ne sont utilisées que pour p pair.

Preuve. Soit p un entier naturel strictement positif pair. Montrons que la méthode de Newton-Cotes est d'ordre $(p+1)$. Il suffit pour cela de vérifier qu'elle est exacte pour un polynôme de degré $(p+1)$. Choisissons le polynôme P défini par

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \left(t-\frac{a+b}{2}\right)^{p+1}. \end{array}$$

On remarque que

$$\forall i \in \left\{0,1,\cdots,\left(\frac{p}{2}-1\right)\right\}, \quad \left(x_i-\frac{a+b}{2}\right)+\left(x_{p-i}-\frac{a+b}{2}\right)=x_i+x_{p-i}-a-b$$

$$= a + \frac{i}{p}(b-a) + a + \frac{p-i}{p}(b-a) - a - b = 0.$$

Donc,

$$\forall i \in \left\{0, 1, \cdots, \left(\frac{p}{2} - 1\right)\right\}, \quad P(x_i) = -P(x_{p-i}).$$

De plus, $x_{\frac{p}{2}} = \frac{a+b}{2}$ et $P\left(x_{\frac{p}{2}}\right) = 0$. Nous obtenons

$$\sum_{i=0}^{p} \lambda_i P(x_i) = \lambda_{\frac{p}{2}} P\left(x_{\frac{p}{2}}\right) + \sum_{i=0}^{\frac{p}{2}-1} \lambda_i \left(P(x_i) + P(x_{p-i})\right) = 0.$$

D'autre part,

$$\int_a^b P(t)dt = \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^{p+1} dt = \left[\frac{\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^{p+2}}{p+2}\right]_a^b = 0.$$

La méthode est ainsi de rang $(p+1)$. ♣

24.5.2 Méthode des trapèzes

Pour cette méthode $p = 1$ et la méthode est d'ordre 1.

Méthode élémentaire des trapèzes

On considère un segment $[a, b]$. Le système interpolateur est alors $S = \{a, b\}$. Les deux réels λ_0 et λ_1 vérifient le système

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 = b - a, \\ \lambda_0 = \lambda_1. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout polynôme P de degré au plus 1, on a

$$I(P) = \int_a^b P(t)dt = \frac{(b-a)}{2}(P(a) + P(b)).$$

À toute application continue f sur $[a, b]$, on associe L_f son polynôme interpolateur de Lagrange aux points a et b et on approxime

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \qquad \text{par} \qquad T(f) = \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b)).$$

Le noyau de l'interpolation est $N(x) = (X-a)(X-b)$.

$$\int_a^b |N(t)|\, dt = \int_a^b (t-a)(b-t)dt = \frac{(b-a)^3}{6}.$$

D'après le corollaire 24.4, si f est de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$\left| \int_a^b f(t)dt - T(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|.$$

Méthode composée des trapèzes

Soit N un entier strictement positif. On effectue sur le segment $[a, b]$ une subdivision à pas constant

$$h = \frac{b-a}{N}.$$

Sur chaque segment $[a + \frac{k}{N}(b-a), a + \frac{k+1}{N}(b-a)]$, où k est un entier compris entre 0 et $(N-1)$, on applique la méthode élémentaire des trapèzes. On approxime

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt$$

par

$$T_N(f) = \frac{b-a}{N}\left[\frac{f(a)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right) + \frac{f(b)}{2}\right]$$

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$|I(f) - T_N(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12N^2} \sup_{t\in[a,b]} |f''(t)|.$$

24.5.3 Méthode de Simpson

Pour cette méthode, $p = 2$ et, d'après la proposition 24.8, la méthode est d'ordre 3.

Méthode élémentaire de Simpson

On considère un segment $[a, b]$. Le système interpolateur est $S = \{a, \frac{a+b}{2}, b\}$. Nous savons d'après la proposition 24.7 et la remarque 24.2 que,

$$\begin{cases} \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = (b-a), \\ \lambda_0 = \lambda_2. \end{cases}$$

En utilisant encore la remarque 24.2, nous pouvons calculer par exemple λ_1 car

$$\lambda_1 = \int_a^b l_1(t)dt,$$

où l_1 est le polynôme élémentaire de Lagrange de degré au plus deux vérifiant

$$\begin{cases} l_1(a) = l_1(b) = 0, \\ l_1\left(\frac{a+b}{2}\right) = 1. \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad l_1(t) = \frac{4}{(b-a)^2}(t-a)(b-t)$$

et

$$\lambda_1 = \int_a^b l_1(t)dt = \int_a^b \frac{4}{(b-a)^2}(t-a)(b-t)dt = \frac{2(b-a)}{3},$$

puis

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{2(b-a)}{3}, \\ \lambda_0 = \lambda_2 = \frac{b-a}{6}. \end{cases}$$

Pour tout polynôme de degré au plus 3, nous avons ainsi

$$I(P) = \int_a^b P(t)dt = \frac{(b-a)}{6}\left(P(a) + P(b) + 4P(\frac{a+b}{2})\right).$$

À toute fonction continue f sur $[a,b]$, on associe H_f son polynôme interpolateur d'Hermite associé aux points a, $\frac{a+b}{2}$ et b et respectivement aux entiers 1,2 et 1. On approxime

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \qquad \text{par} \qquad S(f) = \frac{(b-a)}{6}\left(P(a) + P(b) + 4P\left(\frac{a+b}{2}\right)\right).$$

Le noyau de l'interpolation est $N(x) = (X-a)(X-b)(X-\frac{a+b}{2})^2$.

$$\int_a^b |N(t)|\,dt = \int_a^b (t-a)(b-t)\left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2 dt = \frac{(b-a)^5}{120}.$$

Ainsi, si f est de classe C^4, on a, d'après d'après le corollaire 24.4,

$$\left|\int_a^b f(t)dt - I(H_f)\right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} \sup_{t\in[a,b]} |f^{(4)}(t)|.$$

Méthode composée de Simpson

Soit N un entier strictement positif. On effectue sur le segment $[a,b]$ une subdivision à pas constant

$$h = \frac{b-a}{N}.$$

Sur chaque segment $[a + \frac{k}{N}(b-a), a + \frac{k+1}{N}(b-a)]$, où k est un entier compris entre 0 et $(N-1)$, on applique la méthode élémentaire de Simpson. On approxime

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt$$

par

$$S_N(f)$$

$$= \frac{b-a}{6N}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f\left(a + k\frac{b-a}{N}\right) + 4\sum_{k=1}^{N} f\left(a + (2k-1)\frac{b-a}{2N}\right) + f(b)\right).$$

Si f est de classe C^4, on a

$$|I(f) - S_N(f)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880.N^4} \sup_{t\in[a,b]} |f^{(4)}(t)|.$$

24.5.4 Méthode de Boole-Villarceau et de Weddle-Hardy

Méthode de Boole-Villarceau

Pour cette méthode $p = 4$ et elle est d'ordre 5.

$$\lambda_0 = \lambda_4 = \frac{7}{90}(b-a), \quad \lambda_1 = \lambda_3 = \frac{16}{45}(b-a), \quad \lambda_2 = \frac{2}{15}(b-a).$$

Méthode de Weddle-Hardy

Pour cette méthode $p = 6$ et elle est d'ordre 7.

$$\lambda_0 = \lambda_6 = \frac{41}{840}(b-a), \quad \lambda_1 = \lambda_5 = \frac{9}{35}(b-a), \qquad \lambda_2 = \lambda_4 = \frac{9}{280}(b-a),$$

$$\lambda_3 = \frac{34}{105}(b-a).$$

24.5.5 Méthode de Newton-Cotes pour $p \geq 8$

Les méthodes de NC_p ne sont donc utilisées en pratique que dans les 4 cas précédents. Pour p supérieur ou égal à 8, il apparaît des coefficients λ_i strictement négatifs, ce qui pose un certain nombre de problèmes, en particulier,

1. L'intégrale de certaines applications continues positives peuvent être approximées par un réel strictement négatif.
2. Les méthodes sont beaucoup plus sensibles aux erreurs d'arrondis. Supposons que les valeurs de f soient calculées avec des erreurs d'arrondi inférieur à ε. L'erreur d'arrondi qui va en résulter par application d'une méthode élémentaire sera majorée par

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{p} |\lambda_i|.$$

Si tous les coefficients λ_i sont positifs cette erreur d'arrondi est majorée par

$$\varepsilon \sum_{i=0}^{p} |\lambda_i| = \varepsilon(b-a).$$

Si, en revanche, certains coefficients sont négatifs, alors $\varepsilon \sum_{i=0}^{p} |\lambda_i| > \varepsilon(b-a)$. L'erreur totale due aux arrondis peut dépasser $\varepsilon(b-a)$.

24.6 Méthodes de Gauss

24.6.1 Introduction

On considère deux réels a et b vérifiant $a < b$ et une application ω, à valeurs réelles strictement positives, continue et intégrable sur l'intervalle $]a, b[$. L'application définie sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})^2$ par

$$(f,g) \mapsto \int_a^b f(x)\, g(x)\, \omega(x)\, dx$$

est un produit scalaire sur l'espace $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On notera $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des polynômes orthogonaux relatifs à ce produit scalaire (voir la définition page 367). Le but des méthodes de Gauss est d'obtenir des valeurs approchées de

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx$$

où f est une application continue sur le segment $[a,b]$.

24.6.2 Méthodes exactes

On sait, d'après la proposition 20.24, page 368, que, pour tout entier naturel p, le polynôme orthogonal P_{p+1} a $(p+1)$ racines simples appartenant à l'intervalle $]a,b[$, notées

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_p.$$

Proposition 24.9 *Il existe un unique $(p+1)$-uplet de réels $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_p$ vérifiant*

$$\forall P \in \mathbb{R}_p[X], \quad \int_a^b P(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i P(\alpha_i).$$

Preuve. Il suffit d'appliquer le théorème 24.5, page 488. ♣

Cette méthode est d'ordre $(2p+1)$. En effet,

Proposition 24.10

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2p+1}[X], \quad \int_a^b P(x)\omega(x)dx = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i P(\alpha_i).$$

Preuve. Soit Q un élément de $\mathbb{R}_{2p+1}[X]$. Effectuons la division euclidienne du polynôme Q par le polynôme orthogonal P_{p+1} :

$$Q = Q_1 T_{p+1} + R,$$

où R est un élément de $\mathbb{R}_p[X]$. Le polynôme Q_1 est aussi élément de $\mathbb{R}_p[X]$ puisque le degré de Q est inférieur ou égal à $(2p+1)$.
Nous avons,

$$\forall i \in \{0,1,2,\cdots,p\}, \quad Q(\alpha_i) = Q_1(\alpha_i)P_{p+1}(\alpha_i) + R(\alpha_i) = R(\alpha_i).$$

Le polynôme P_{p+1} étant orthogonal au sous-espace $\mathbb{R}_p[X]$ donc au polynôme Q_1, nous obtenons,

$$\int_a^b Q(t)\omega(t)dt = \int_a^b Q_1(t)P_{p+1}(t)\omega(t)dt + \int_a^b R(t)\omega(t)dt$$

$$=< Q_1, T_{p+1} > + \int_a^b R(t)\omega(t)dt = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i R(\alpha_i) = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i Q(\alpha_i).$$

♣

Proposition 24.11 *Soit p un entier naturel. Il existe une méthode exacte d'intégration et* une seule *de la forme (24.29) à $(p+1)$ points, d'ordre $(2p+1)$. Elle est obtenue en choisissant pour points les $(p+1)$ racines du polynôme orthogonal P_{p+1} pour le poids ω.*

Preuve.

1. Existence. Nous savons que la méthode de Gauss est d'ordre $(2p+1)$. Elle n'est pas d'ordre $(2p+2)$. En effet,

$$\int_a^b P_{p+1}^2(t)\omega(t)dt > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{p} \lambda_i P_{p+1}^2(\alpha_i) = 0.$$

2. Unicité. Considérons $(p+1)$ points

$$x_0 < x_1 < \cdots < x_p$$

et $(p+1)$ réels $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_p$ tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2p+1}[X], \qquad \int_a^b P(x)\omega(x) = \sum_{i=0}^{p} \mu_i P(x_i).$$

Soit Q_{p+1} le polynôme de degré $(p+1)$ défini par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_{p+1}(X) = \prod_{i=0}^{p} (X - x_i).$$

Alors,

$$\forall P \in \mathbb{R}_p[X], \quad < P, Q_{p+1} >= \int_a^b P(t)Q_{p+1}(t)\omega(t)dt$$

$$= \sum_{i=0}^{p} \mu_i P(x_i) Q_{p+1}(x_i) = 0.$$

On en déduit que les polynômes P_{p+1} et Q_{p+1} appartiennent à l'orthogonal de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}_{p+1}[X]$. Ils sont donc colinéaires. D'où,

$$\forall i \in \{0, 1, \cdots, p\}, \quad \alpha_i = x_i.$$

D'autre part, si, pour tout entier i compris entre 0 et p, on note l_i le $i^{ème}$ polynôme de lagrange, alors

$$\int_a^b l_i(t)\omega(t)dt = \lambda_i = \mu_i.$$

24.6.3 Méthode de Gauss et erreur d'approximation

Une méthode de Gauss consiste à approximer pour f élément de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$,

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx \quad \text{par} \quad \sum_{i=0}^{p} \lambda_i f(\alpha_i). \tag{24.29}$$

Proposition 24.12 *Si l'on suppose qu'une application f est de classe $\mathcal{C}_{2p+2}$ sur le segment $[a,b]$, on peut majorer l'erreur dû à la méthode de Gauss (24.29) :*

$$\left|\int_a^b f(x)\omega(x)dx - \sum_{i=0}^{p} \lambda_i f(\alpha_i)\right| \leq \frac{\sup_{t\in[a,b]} |f^{(2p+2)}(t)|}{(2p+2)!} \int_a^b P_{p+1}^2(t)\omega(t)dt.$$

Preuve. Soit f une application de classe $\mathcal{C}_{2p+2}$. Il suffit d'interpoler à l'aide du polynôme d'hermite aux points $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_p$ affectés chacun du coefficient 2. On peut alors conclure à l'aide du théorème 24.3, page 487. ♣

Chapitre 25

Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

---

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

25.1 Définitions

Définition : On appelle équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre, toute équation de la forme

$$(E) \quad y' = ay + b$$

où a et b sont deux fonctions continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle solution de cette équation, toute fonction

$$\begin{aligned} y : I &\to \mathbb{K} \\ t &\mapsto y(t) \end{aligned}$$

dérivable sur I telle que

$$\forall t \in I, \quad y'(t) = a(t)y(t) + b(t).$$

Si b est la fonction nulle, l'équation est dite linéaire homogène.

$$(H) \quad y' = ay.$$

Remarque 25.1 1. *Les applications a et b étant continues sur I, toute solution Y est de classe C^1 sur I.*

2. *Si les applications a et b sont de classes C^k, alors toute solution Y est de classe C^{k+1}.*

25.2 Solutions de l'équation homogène (H)

L'application a étant continue sur I, elle admet des primitives sur cet intervalle.

Proposition 25.1 *Soit A est une primitive de a sur l'intervalle I. On note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de l'équation linéaire homogène (H). Alors $(\mathcal{S}_H, +, .)$ est l'espace vectoriel de dimension 1 engendré par l'application*

$$\begin{array}{rccl} Y_0: & I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & t & \longmapsto & e^{A(t)}. \end{array}$$

Preuve. Il est évident que $\mathcal{S}_H$ est un sous-espace vectoriel des applications dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On considère A une primitive de a. On peut vérifier que l'application Y_0 définie par

$$\begin{array}{rccl} Y_0: & I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & t & \longmapsto & e^{A(t)}. \end{array}$$

est solution de l'équation différentielle homogène. Pour trouver l'ensemble des solutions, on va effectuer un principe de la variation de la constante : Pour toute application Y dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, il existe une unique application C dérivable sur I vérifiant

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = C(t)e^{A(t)}.$$

On a

$$\forall t \in I, \quad Y'(t) = C'(t).e^{A(t)} + C(t)a(t)e^{A(t)}.$$

Ainsi, Y est solution de l'équation homogène si et seulement si

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad C'(t).e^{A(t)} + C(t)a(t)e^{A(t)} &= a(t)C(t)e^{A(t)} \\ \Leftrightarrow \forall t \in I, \quad C'(t).e^{A(t)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \forall t \in I, \quad C'(t) &= 0. \end{aligned}$$

L'application Y est solution si et seulement si l'application C est constante. D'où le résultat. ♣

25.3 Solutions de l'équation (E)

Proposition 25.2 *Soit t_0 un élément de I. Les solutions de (E) sont les applications Y définies par*

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = \left(\int_{t_0}^{t} b(x)e^{-A(x)}dx\right) e^{A(t)} + Ke^{A(t)},$$

où K est une constante scalaire.

Solution. On utilise le principe de variation de la constante. On reprend le changement de variable utilisé dans la preuve de la proposition 25.1, définie par

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = C(t)e^{A(t)}.$$

L'application Y est solution de (E) si et seulement si :

$$\begin{aligned} \forall t \in I, \quad C'(t).e^{A(t)} + C(t)a(t)e^{A(t)} &= a(t)C(t)e^{A(t)} + b(t) \\ \Leftrightarrow \forall t \in I, \quad C'(t).e^{A(t)} &= b(t) \\ \Leftrightarrow \forall t \in I, \quad C'(t) &= e^{-A(t)}.b(t). \\ \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{K}, \forall t \in I, \quad C(t) &= \int_{t_0}^{t} e^{-A(x)}.b(x)dx + K. \end{aligned}$$

D'où le résultat. ♣

25.4 Problème de Cauchy

Étant donné une équation différentielle, le problème de Cauchy consiste à trouver les solutions de cette équation vérifiant une condition initiale. Dans le cadre des équations étudiées dans notre chapitre, si l'on considère un intervalle I, deux applications a et b continues sur I et (t_0, y_0) un élément de $I \times \mathbb{K}$, un problème de Cauchy s'écrit

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{25.30}$$

Proposition 25.3 *Il y a existence et unicité du problème de Cauchy (25.30). L'unique solution est déterminée par*

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = \left(\int_{t_0}^{t} b(x)e^{-A(x)}dx\right) e^{A(t)} + y_0 e^{A(t)-A(t_0)}.$$

Preuve. Évident. ♣

25.5 Équation : $a(t)y' + b(t)y = c(t)$

Remarque 25.2 1. *On appelle également équation linéaire scalaire du premier ordre, une équation de la forme*

$$a(t)y' + b(t)y = c(t),$$

où a, b et c sont trois applications continues sur un intervalle I, la fonction a ne s'annulant pas sur I.

2. *Dans le cas où l'application a s'annulle sur I, on effectue l'étude de l'équation différentielle sur chaque intervalle maximal inclus dans I et sur lequel l'application a ne s'annule pas.*

3. On peut éventuellement faire l'étude de raccordement : celle-ci consiste à rechercher les solutions sur l'intervalle I.

Exercice 25.1 Résoudre l'équation différentielle suivante puis étudier le problème de raccordement.

$$ty' + 2y = \frac{t}{1+t^2}.$$

Solution.

1. On recherche les solutions de l'équation différentielle sur les intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$. On notera I l'un de ces intervalles.

   (a) Solutions de l'équation homogène :

   $$(H) \quad y' = \frac{-2}{t}y.$$

   L'application $A : t \mapsto -2\ln|t|$ est une primitive sur l'intervalle I de l'application $a : t \mapsto \frac{-2}{t}$. Ainsi, les solutions de l'équation homogène sur chacun des intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ sont $t \mapsto \frac{C}{t^2}$ où C est une constante.

   (b) Solutions de l'équation différentielle. On utilise la méthode de la variation de la constante. On effectue le changement de variable

   $$y(t) = \frac{c(t)}{t^2}.$$

   Nous avons

   $$\forall t \in I, \quad y'(t) = \frac{c'(t)}{t^2} - \frac{2c(t)}{t^3}$$

   et

   $$\forall t \in I, \quad ty'(t) + 2y(t) = \frac{c'(t)}{t} - \frac{2c(t)}{t^2} + \frac{2c(t)}{t^2} = \frac{c'(t)}{t}.$$

   Ainsi, l'application y est solution sur I de l'équation différentielle si et seulement si

   $$\forall t \in I, \quad c'(t) = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

   Les solutions de l'équation différentielle sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ sont de la forme

   $$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \quad y_1(t) = \frac{t - \arctan t + k_1}{t^2}$$

   où k_1 est une constante réelle. Les solutions de l'équation différentielle sur l'intervalle $\mathbb{R}^{-*}$ sont de la forme

   $$\forall t \in \mathbb{R}^{-*}, \quad y_2(t) = \frac{t - \arctan t + k_2}{t^2}$$

   où k_2 est une constante réelle.

(c) Étudions le problème de raccordement en 0. En utilisant le développement limité en 0 à l'ordre 3 de l'application arctangente, nous obtenons
$$\frac{t - \arctan t}{t^2} \underset{0}{\sim} \frac{t}{3}.$$
L'application y_1 solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^{+*}$ admet une limite à gauche en 0 si et seulement si $k_1 = 0$ et dans ce cas $\lim_{t\to 0^-} y_1(t) = 0$. De même, l'application y_2 solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^{-*}$ admet une limite à droite en 0 si et seulement si $k_2 = 0$ et dans ce cas $\lim_{t\to 0^+} y_2(t) = 0$.
Une solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ doit donc vérifier :
$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad y(t) = \frac{t - \arctan t}{t^2}$$
et $y(0) = 0$. Nous remarquons que cette application est dérivable en 0 de dérivée égale à $\frac{1}{3}$ et que c'est l'unique solution de l'équation diférentielle sur $\mathbb{R}$.

♣

Exercice 25.2 Résoudre l'équation différentielle suivante
$$(1 - t^2)y' - ty = 1.$$

Solution.

1. On recherche les solutions de l'équation différentielle sur les intervalles $]-\infty, -1, [,]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$. On notera I l'un de ces intervalles.
Solutions de l'équation homogène :
$$(H) \quad y' = \frac{t}{1 - t^2} y.$$
L'application $A : t \mapsto -\frac{1}{2}\ln|1 - t^2|$ est une primitive sur l'intervalle I de l'application $a : t \mapsto \frac{t}{1-t^2}$. Ainsi, les solutions de l'équation homogène sur chacun des intervalles $]-\infty, -1, [,]-1, 1[$ et $]1, +\infty[$ sont les applications $t \mapsto \frac{C}{\sqrt{|1-t^2|}}$ où C est une constante.
   (a) Solutions de l'équation différentielle sur l'intervalle $]-1, 1[$.
   On utilise la méthode de la variation de la constante. On effectue le changement de variable
   $$y(t) = \frac{C(t)}{\sqrt{1 - t^2}}.$$
   Nous avons
   $$\forall t \in]-1, 1[, \quad y'(t) = \frac{C'(t)}{\sqrt{1 - t^2}} + \frac{t.C(t)}{\sqrt{(1 - t^2)^3}}$$

et

$$\forall t \in]-1,1[, \quad (1-t^2)y'(t) - ty(t)$$
$$= C'(t)\sqrt{1-t^2} + \frac{t.C(t)}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t.C(t)}{\sqrt{1-t^2}} = C'(t)\sqrt{1-t^2}.$$

L'application y est solution si et seulement si

$$\forall t \in]-1,1[, \quad C'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}},$$

On obtient,

$$\forall t \in]-1,1[, \quad y(t) = \frac{\arcsin t + k_1}{\sqrt{1-t^2}}$$

où k_1 est une constante réelle.

(b) Solutions de l'équation différentielle sur l'intervalle $]1,+\infty[$.
On utilise la méthode de la variation de la constante. On effectue le changement de variable

$$y(t) = \frac{C(t)}{\sqrt{t^2-1}}.$$

Nous avons

$$\forall t \in]1,+\infty[, \quad y'(t) = \frac{C'(t)}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{t.C(t)}{\sqrt{(t^2-1)^3}}$$

et

$$\forall t \in]1,+\infty[, \quad (1-t^2)y'(t) - ty(t)$$
$$= -C'(t)\sqrt{t^2-1} + \frac{t.C(t)}{\sqrt{t^2-1}} - \frac{t.C(t)}{\sqrt{t^2-1}} = -C'(t)\sqrt{t^2-1}.$$

L'application y est solution si et seulement si

$$\forall t \in]1,+\infty[, \quad C'(t) = \frac{-1}{\sqrt{t^2-1}},$$

On obtient,

$$\forall t \in]1,+\infty[, \quad y(t) = \frac{-\operatorname{argch} t + k_2}{\sqrt{t^2-1}}$$

où k_2 est une constante réelle.

(c) Solutions de l'équation différentielle sur l'intervalle $]-\infty,-1[$. En effectuant les mêmes calculs que dans le cas précédent, nous obtenons

$$\forall t \in]-\infty,-1[, \quad C'(t) = \frac{-1}{\sqrt{t^2-1}}.$$

Ainsi, les solutions de l'équation différentielle sur l'intervalle $]-\infty,-1[$ sont les applications définies sur $]-\infty,-1[$ par

$$\forall t \in]-\infty,-1[, \quad y(t) = \frac{\operatorname{argch}(-t) + k_3}{\sqrt{t^2-1}}$$

où k_3 est une constante réelle.

♣

Chapitre 26

Systèmes différentiels linéaires

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n en entier strictement positif et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

26.1 Définitions

Définition : On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation de la forme

$$(E) \quad Y' = AY + B,$$

où A est une application continue d'un intervalle I vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et B une application continue sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}^n$. Si B est la application nulle, l'équation est dite homogène

$$(H) \quad Y' = AY.$$

Définition :

1. On appelle solution de (E), équation différentielle linéaire d'ordre 1, toute application

$$\begin{array}{rccl} Y: & I & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & t & \longmapsto & Y(t) \end{array}$$

dérivable sur l'intervalle I vérifiant

$$\forall t \in I, \quad Y'(t) = A(t)Y(t) + B(t).$$

2. Soit (t_0, u_0) un élément de $I \times \mathbb{K}^n$. On dit qu'une solution Y de (E) vérifie la condition initiale (t_0, u_0) ou condition de Cauchy si de plus,

$$Y(t_0) = u_0.$$

On appelle problème de Cauchy en (t_0, u_0), l'étude des solutions de (E) vérifiant cette condition initiale.

Remarque 26.1 *1. Les applications A et B étant continues sur I, toute solution Y est de classe C^1 sur I.*

2. Si les applications A et B sont de classes C^k, alors toute solution Y est de classe C^{k+1}.

3. Une équation différentielle linéaire du premier ordre est également appelée système différentiel linéaire.

26.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Théorème 26.1 *(de Cauchy-Lipschitz linéaire) On considère A une application continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, B une application continue sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ et (t_0, u_0) un couple de $I \times \mathbb{K}^n$. Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} Y' = AY + B, \\ Y(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{26.31}$$

admet une solution unique définie sur I.

Preuve.

1. Remarquons qu'une application Y est solution du problème de Cauchy (26.31) si et seulement si elle est solution dans $C(I, \mathbb{K}^n)$ de l'équation :

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} (A(x)Y(x) + B(x))dx. \tag{26.32}$$

En effet,

(a) Considérons Y un élément de $\mathcal{C}(I,\mathbb{K}^n)$ solution de l'équation (26.32). L'application définie par

$$\begin{array}{rccl} f: & I & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & t & \longmapsto & A(t)Y(t)+B(t) \end{array}$$

étant continue sur I, l'application

$$\begin{array}{rccl} F: & I & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & t & \longmapsto & \int_{t_0}^t (A(x)Y(x)+B(x))dx \end{array}$$

est dérivable sur I de dérivée f. On en déduit que l'application Y, solution de l'équation (26.32), est dérivable sur I de dérivée $f = AY+B$. L'égalité $Y(t_0) = u_0$, permet d'en déduire que Y est solution de (26.31).

(b) Supposons Y solution du problème de Cauchy (26.31). D'après la remarque 26.1, Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Nous obtenons,

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = Y(t_0) + \int_{t_0}^t Y'(x)dx = u_0 + \int_{t_0}^t (A(x)Y(x)+B(x))dx.$$

Ainsi, Y est solution de (26.32).

(c) On en déduit que Y est solution du problème de Cauchy (26.31) si et seulement si Y est point fixe de l'application Θ_I définie sur $\mathcal{C}(I,\mathbb{K}^n)$ à valeurs dans $\mathcal{C}(I,\mathbb{K}^n)$ par :

$$\forall F \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K}^n), \quad \forall t \in I, \quad \Theta_I(F)(t) = u_0 + \int_{t_0}^t (A(x)F(x)+B(x))dx.$$

Montrons que l'application Θ_I admet un point fixe unique.

2. Existence du point fixe.

(a) On suppose, dans un premier temps, que I est un segment $[a,b]$. On choisit une norme sur $\mathbb{K}^n$ que l'on note $\|.\|$. On munit $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}^n)$ de la norme uniforme que l'on note $\|.\|_\infty$. Nous savons que cet espace vectoriel normé est complet (corollaire 16.5, page 271). On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ d'un norme d'algèbre notée $\|.\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ et on considère M le réel

$$M = \sup_{t\in[a,b]} \|A(t)\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}.$$

Soient F_1 et F_2 deux éléments de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}^n)$. Montrons par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in [a,b],$$

$$\|\Theta_{[a,b]}^k(F_1)(t) - \Theta_{[a,b]}^k(F_2)(t)\| \leq \frac{(M|t-t_0|)^k}{k!}.\|F_1-F_2\|_\infty.$$

- On a la propriété $\mathcal{P}_0$.
- Soit k un entier naturel. Montrons que $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$. Pour tout réel t élément de $[a,b]$,

$$\begin{aligned}
&\left\|\Theta_{[a,b]}^{k+1}(F_1)(t) - \Theta_{[a,b]}^{k+1}(F_2)(t)\right\| \\
&= \left\|\int_{t_0}^{t} A(x)\left(\Theta_{[a,b]}^{k}(F_1)(x) - \Theta_{[a,b]}^{k}(F_2)(x)\right)dx\right\| \\
&\leq M\left|\int_{t_0}^{t} \frac{(M|x-t_0|)^k}{k!}.\|F_1 - F_2\|_\infty dx\right| \\
&= \frac{(M|t-t_0|)^{k+1}}{(k+1)!}.\|F_1 - F_2\|_\infty.
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}_k \Rightarrow \mathcal{P}_{k+1}$.
Nous avons ainsi montré que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \|\Theta_{[a,b]}^{k}(F_1) - \Theta_{[a,b]}^{k}(F_2)\|_\infty \leq \frac{M^k(b-a)^k}{k!}.\|F_1 - F_2\|_\infty.$$

La suite réelle $\left(\frac{M^k(b-a)^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente vers 0, nous pouvons considérer un entier strictement positif k tel que $\Theta_{[a,b]}^{k}$ soit une application contractante. D'après le théorème 10.2, page 135, l'application $\Theta_{[a,b]}$ admet un unique point fixe et toute suite $(\Theta_{[a,b]}^{n}(F))_{n\in\mathbb{N}}$, où F est un élément de $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}^n)$, converge uniformément sur $[a,b]$ vers l'unique point fixe de $\Theta_{[a,b]}$.

(b) On suppose désormais que I est un intervalle quelconque. On considère F un élément de $\mathcal{C}(I,\mathbb{K}^n)$. Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I et contenant t_0,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [a,b], \quad \Theta_I^n(F)(t) = \Theta_{[a,b]}^{n}(F)(t).$$

La suite $(\Theta_I^n(F))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers l'unique point fixe de $\Theta_{[a,b]}$. On en déduit que $(\Theta_I^n(F))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers un point fixe de Θ_I que l'on notera G.

3. Unicité du point fixe.
Supposons que G_1 et G_2 soient deux points fixes de Θ_I. Alors pour tout segment $[a,b]$ inclus dans I et contenant t_0, les restrictions de G_1 et G_2 à ces segments sont égales à l'unique points fixe de $\Theta_{[a,b]}$. On en déduit que $G_1 = G_2$.

♣

26.3 Solutions de l'équation homogène (H)

Dans cette section, on considère A une application continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 26.2 *L'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène*

$$Y' = AY$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ *que l'on notera* $\mathcal{S}_H$.

Preuve. L'application

$$\begin{array}{rccc} \psi: & \mathcal{C}^1(I,\mathbb{K}^n) & \longrightarrow & \mathcal{C}(I,\mathbb{K}^n) \\ & Y & \longmapsto & Y' - Ay \end{array}$$

est linéaire. Son noyau est $\mathcal{S}_H$. Il est donc sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$. ♣

Proposition 26.3 *On considère* $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ *une base de* $\mathbb{K}^n$ *et* t_0 *un élément de* I. *Pour tout entier naturel* i *inférieur ou égal à* n, *on note* Y_i *l'unique solution du problème de Cauchy,*

$$\begin{cases} Y' = AY, \\ Y(t_0) = u_i. \end{cases}$$

Alors, $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ *est une base* $\mathcal{S}_H$.

Preuve. Considérons $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ un élément de $\mathbb{K}^n$ vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i = 0.$$

Alors,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i(t_0) = 0.$$

$(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ formant une base on obtient,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

La famille $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ est ainsi libre. Montrons que $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ est une famille génératrice. Soit Y un élément de $\mathcal{S}_H$. On note $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ les coordonnées du vecteur $Y(t_0)$ dans la base $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$. L'application

$$Y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i$$

est l'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = AY, \\ Y(t_0) = 0. \end{cases}$$

L'application nulle étant également solution, on en déduit que

$$Y - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i = 0,$$

et que Y est combinaison linéaire de la famille $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$. ♣

Corollaire 26.4 *Le triplet $(S_H, +, .)$ est un K-espace vectoriel de dimension n.*

Preuve. Évident d'après la proposition précédente. ♣

Définition : Une famille de solutions formant une base de $\mathcal{S}_H$ est appelée système fondamental de solutions.

26.4 Wronskien

Dans cette section, on considère A une application continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'équation homogène (H) : $Y' = AY$ et S_H l'espace vectoriel des solutions de cette équation différentielle.

Définition : Soit $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$, un n-uplet de solutions de l'équation homogène (H). L'application W définie sur I par

$$\forall t \in I, \quad W(t) = \det(Y_1(t), Y_2(t), \cdots, Y_n(t))$$

est appelée wronskien du n-uplet de solutions $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$.

Proposition 26.5 *Soit $(Y_1, \cdots, Y_n)$ un n-uplet de S_H. Les 3 propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$(Y_1, \cdots, Y_n)$ est une base de S_H.*
2. *Il existe t_0 un élément de I tel que $W(t_0) \neq 0$.*
3. *$\forall t \in I, \quad W(t) \neq 0$.*

Preuve.

$2 \Rightarrow 1$ Soit $(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$ un élément de K^n vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i = 0.$$

Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i(t_0) = 0.$$

On en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ puis que la famille $(Y_1, \cdots, Y_n)$ est une base de S_I.
$1 \Rightarrow 3$ Soit t un élément de I. On considère $(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$ un élément de K^n vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i(t) = 0.$$

Alors $(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i)$ est un élément de S_H vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i(t) = 0$. Grâce à l'unicité du problème de Cauchy, on en déduit que $(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i) = 0$ puis que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. La famille $(Y_1(t), \cdots, Y_n(t))$ est ainsi libre et $W(t) \neq 0$.
$3 \Rightarrow 2$ Évident.

♣

Proposition 26.6 *L'application W est solution sur I de l'équation différentielle :*

$$Y' = Tr\,(A)\,Y.$$

Preuve. Considérons t un élément de I.

$$W(t) = \det\left(Y_1(t), Y_2(t), \cdots, Y_n(t)\right).$$

Pour tout réel h tel que $t + h$ appartienne à I,

$$W(t+h) = \left(Y_1(t) + hY_1'(t) + h\varepsilon_1(h), \cdots, Y_n(t) + hY_n'(t) + h\varepsilon_n(h)\right),$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ sont des applications qui admettent une limite nulle lorsque la variable h tend vers 0. Le déterminant étant une application n-linéaire, nous pouvons développer :

$$W(t+h) - W(t) = h\sum_{i=1}^{n} det\left(Y_1(t), \cdots, Y_{i-1}(t), Y_i'(t), Y_{i+1}(t), \cdots, Y_n(t)\right) + h\varepsilon(h)$$

où ε est une application qui admet une limite nulle lorsque la variable h tend vers 0. On en déduit que W est dérivable en t avec

$$\begin{aligned} W'(t) &= \sum_{i=1}^{n} det\left(Y_1(t), \cdots, Y_{i-1}(t), Y_i'(t), Y_{i+1}(t), \cdots, Y_n(t)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} det\left(Y_1(t), \cdots, Y_{i-1}(t), AY_i(t), Y_{i+1}(t), \cdots, Y_n(t)\right). \end{aligned}$$

Il est évident que l'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & (\mathbb{K}^n)^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (u_1, \cdots u_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} det\left(u_1, \cdots, u_{i-1}, Au_i, u_{i+1}, \cdots, u_n\right) \end{array}$$

est une forme n-linéaire. Montrons qu'elle est antisymétrique donc alternée. Considérons deux entiers j et k vérifiant $1 \leq j < k \leq n$.

$$\varphi(u_1, \cdots, u_j, \cdots, u_k, \cdots u_n) + \varphi(u_1, \cdots, u_k, \cdots, u_j, \cdots u_n)$$

$$= \sum_{\substack{i\neq k\\ i=1\\ i\neq j}}^{n} \det(u_1, \cdots, u_j, \cdots, Au_i, \cdots, u_k, \cdots u_n)$$

$$+ det(u_1, \cdots, u_k, \cdots, Au_i, \cdots, u_j, \cdots u_n)$$

$$+ det(u_1, \cdots, Au_j, \cdots, u_k, \cdots u_n) + det(u_1, \cdots, u_j, \cdots, Au_k, \cdots u_n)$$

$$+ det(u_1, \cdots, Au_k, \cdots, u_j, \cdots u_n) + det(u_1, \cdots, u_k, \cdots, Au_j, \cdots u_n)$$

$$= 0.$$

L'espace vectoriel des formes n-linéaires altenées est de dimension 1. Il existe donc une constante C vérifiant

$$\forall (u_1, \cdots u_n) \in K^n, \quad \varphi(u_1, \cdots u_n) = C \det(u_1, \cdots u_n).$$

On note $(e_1, \cdots e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour tout entier naturel i compris entre 1 et n, nous avons

$$\det(e_1, \cdots, Ae_i, \cdots, e_n) = a_{i,i},$$

où $a_{i,i}$ est le terme de la $i^{ème}$ ligne et de la $i^{ème}$ colonne de la matrice A. On en déduit que

$$\varphi(e_1, \cdots, e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \mathrm{Tr}(A).$$

L'application W vérifie ainsi l'équation différentielle $Y' = \mathrm{Tr}(A)Y$. ♣

Proposition 26.7 *Pour tout réel t_0 élément de I, on a*

$$\forall t \in I, \quad W(t) = W(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} Tr(A(x))dx}.$$

Preuve. Évident d'après la proposition précédente. ♣

Proposition 26.8 *Soit $(Y_1, \cdots, Y_n)$ un système fondamental de solutions de l'équation homogène $(H) : Y' = AY$. Tout élément Y de $C^1(I, \mathbb{K}^n)$ (respectivement $C^0(I, \mathbb{K}^n)$) s'écrit de manière unique*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i,$$

où pour tout entier i compris entre 1 et n, λ_i est un élément de $C^1(I, \mathbb{K})$ (respectivement $C^0(I, \mathbb{K}^n)$).

Preuve. On note W le wronskien du système fondamental $(Y_1, \cdots, Y_n)$. On considère Y un élément de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K}^n)$ (respectivement $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}^n)$) . Pour tout entier naturel i compris entre 1 et n, on considère l'application W_i définie sur I par

$$\begin{array}{rccl} W_i : & I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & t & \longmapsto & \det(Y_1(t), \cdots, Y_{i-1}(t), Y(t), Y_{i-1}(t), \cdots, Y_n(t)). \end{array}$$

Soit t un élément de I. Le scalaire $W(t)$ étant non nul, le système d'équation

$$Y(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i(t)$$

est un système de Cramer. L'unique solution est

$$\left(\frac{W_1(t)}{W(t)}, \frac{W_2(t)}{W(t)}, \cdots, \frac{W_n(t)}{W(t)} \right).$$

Pour tout entier i compris entre 1 et n, on considère l'application λ_i définie sur l'intervalle I par

$$\begin{array}{rccl} \lambda_i : & I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & t & \longmapsto & \frac{W_i(t)}{W(t)}. \end{array}$$

L'application Y s'écrit ainsi de manière unique

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i.$$

De plus, pour tout entier i compris entre 1 et n, λ_i est de classe $\mathcal{C}^1$ (respectivement $\mathcal{C}^0$). En effet les applications W_i et W sont de classe $\mathcal{C}^1$ (respectivement $\mathcal{C}^0$), l'application W ne s'annulant pas sur I. ♣

26.5 Solutions de l'équation (E)

Dans cette section, on considère A une application continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'équation homogène $(H) : Y' = AY$, S_H l'espace vectoriel des solutions de cette équation différentielle et B une application continue sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}^n$.

Proposition 26.9 *L'ensemble des solutions de l'équation*

$$Y' = AY + B. \tag{26.33}$$

est un espace affine dirigé par S_H l'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène (H).

Preuve. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, l'ensemble des solutions est non vide. On note Y_0 une solution. Alors Y est solution de (E), si et seulement si $(Y - Y_0)$ est solution du système homogène (H). D'où le résultat. ♣

Proposition 26.10 *Soient $(Y_1, \cdots, Y_n)$ un système fondamental de solutions de l'équation homogène (H) et $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, n applications de classe C^1 sur l'intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'application*

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i$$

est solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad Y' = AY + B$$

si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' Y_i = B, \tag{26.34}$$

où les applications $\lambda_1', \lambda_2', \cdots, \lambda_n'$ sont les dérivées respectives des applications $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

Preuve.

$$\forall t \in I, \quad Y'(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t) Y_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) Y_i'(t)$$

$$= \sum_{i=1} \lambda_i'(t) Y_i(t) + A(t) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(t) Y_i(t) = \sum_{i=1} \lambda_i'(t) Y_i(t) + A(t) Y(t).$$

L'application Y est solution de l'équation (E) si et seulement si

$$\forall t \in I, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i'(t) Y_i(t) = B(t).$$

♣

26.6 Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

26.6.1 Résolution de l'équation homogène (H)

Proposition 26.11 *Soit A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Les solutions de l'équation différentielle homogène*

$$(H) \quad Y' = AY$$

sont les applications

$$Y(t) = e^{tA} Z,$$

où Z est un vecteur arbitraire de $\mathbb{K}^n$.

Preuve. Voir l'exercice 19.4, page 346. ♣

Proposition 26.12 *Soient A un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et (t_0, u_0) un élément de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^n$. L'unique solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} Y' = AY, \\ Y(t_0) = u_0, \end{cases}$$

est l'application Y définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = e^{(t-t_0)A}u_0.$$

Preuve. Voir l'exercice 19.4, page 346. ♣

26.6.2 Résolution de l'équation (E)

Proposition 26.13 *On considère l'équation*

$$(E) \quad Y' = AY + B,$$

où A est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et B une application continue sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}^n$. Si t_0 est un élément de I, les solutions de (E) sont les applications Y vérifiant :

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-x)A}B(x)dx + e^{tA}u,$$

où u est un élément quelconque de $\mathbb{K}^n$.

Preuve. Effectuons le changement de variable

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y(t) = e^{tA}Z(t).$$

Nous avons,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = Ae^{tA}Z(t) + e^{tA}Z'(t).$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = AY(t) + B(t) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{tA}Z'(t) = B(t)$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad Z'(t) = e^{-tA}B(t).$$

L'application Y est solution si et seulement si il existe u un élément de $\mathbb{K}^n$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Z(t) = \int_{t_0}^{t} e^{-xA}B(x)dx + u.$$

D'où le résultat. ♣

Proposition 26.14 *Soit (t_0, u_0) un élément de $I \times \mathbb{K}^n$. L'unique solution du problème de Cauchy sur I*

$$\begin{cases} Y' = AY + B(t), \\ Y(t_0) = u_0. \end{cases}$$

est l'application Y déterminée par :

$$\forall t \in I, \quad Y(t) = \int_{t_o}^{t} e^{(t-x)A} B(x) dx + e^{(t-t_0)A} u_0.$$

Preuve.

$$Y(t_0) = e^{t_0 A} u = u_0.$$

Ainsi,

$$u = e^{-t_0 A} u_0.$$

♣

Chapitre 27

Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre deux

27.1 Définition

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition : On appelle équation différentielle linéaire scalaire du second ordre toute équation de la forme

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = c,$$

où I est un intervalle réel et a, b, c sont trois éléments de $C^0(I, \mathbb{K})$. Une solution de (E) est une application $f : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable, vérifiant

$$\forall t \in I, \quad f''(t) + a(t)f'(t) + b(t)f(t) = c(t).$$

L'équation homogène associée à (E) est l'équation

$$(H) \qquad y'' + ay' + by = 0.$$

Remarque 27.1 *1. Les applications a et b et c étant continues sur I, toute solution de (E) est de classe C^2 sur I.*

2. Si les applications a et b et c sont de classes C^k, alors toute solution de (E) est de classe C^{k+2}.

27.2 Système du premier ordre équivalent

Dans cette section, A et B sont les applications, à valeurs respectivement dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^2$, définies sur I par

$$\forall t \in I, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

Proposition 27.1 *Une application de classe C^2 $y : I \to \mathbb{K}$ est solution de (E) si et seulement si l'application de classe C^1 $Y : I \to \mathbb{K}^2$ définie par*

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

est solution du système

$$(S_E) \qquad Y' = AY + B.$$

Réciproquement, si $Y : I \to \mathbb{K}^2$ est une application de classe C^1 solution de (S_E) avec

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

alors

1. *l'application $y_1 : I \to \mathbb{K}$ est solution de (E) sur I,*
2. *l'application y_2 est la dérivée de l'application y_1.*

Preuve. Soit y une application solution de l'équation (E). Alors,

$$\begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}.$$

L'application $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ est solution de (S_E). Réciproquement, considérons $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ élément de $C^1(I, \mathbb{K}^2)$, solution de l'équation (S_E). Alors,

$$\begin{cases} \forall t \in I, & y_1'(t) = y_2(t), \\ \forall t \in I, & y_2'(t) = -b(t)y_1(t) - a(t)y_2(t) + c(t). \end{cases}$$

L'application y_1 est solution de l'équation (E) et l'application y_2 est l'application dérivée de l'application y_1. ♣

27.3 Problème de Cauchy

Proposition 27.2 *On considère trois applications a, b et c définies et continues sur intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$, un élément t_0 de I et (x_0, x_1) un élément de $\mathbb{K}^2$. Le système*

$$\left\{\begin{array}{l} y'' + ay' + by = c, \\ y(t_0) = x_0, \quad y'(t_0) = x_1, \end{array}\right. \tag{27.35}$$

admet une solution unique sur I.

Preuve. Une application y est solution du problème de Cauchy (27.35) si et seulement si l'application $\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ est solution du problème de Cauchy (27.36)

$$\left\{\begin{array}{l} Y' = AY + B \\ Y(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}. \end{array}\right. \tag{27.36}$$

Nous savons que ce problème admet une solution unique sous la forme $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix}$. L'application y_1 est alors l'unique solution du problème de Cauchy (27.35). ♣

27.4 Solutions de l'équation homogène

On considère, dans cette section, l'équation homogène

$$(H) \qquad y'' + ay' + by = 0.$$

On note S_H l'ensemble des solutions.

Proposition 27.3 *L'ensemble S_H est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\left(\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K}), +, .\right)$.*

Preuve. Évident. ♣

Proposition 27.4 *Si t_0 est un élément de I, l'application φ définie sur S_H à valeurs dans $\mathbb{K}^2$ par*

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & S_H & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ & y & \longmapsto & (y(t_0), y'(t_0)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel.

Preuve. L'application φ est trivialement un homomorphisme d'espace vectoriel. La proposition 27.2 indique que c'est un isomorphisme. ♣

Corollaire 27.5 *L'espace vectoriel $(S_H, +, .)$ est de dimension 2.*

Définition : Soit (y_1, y_2) un couple de solutions de l'équation homogène. On appelle wronskien de (y_1, y_2) l'application ω définie par :

$$\begin{array}{rccl} w: & I & \to & \mathbb{K} \\ & t & \longmapsto & w(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \end{array}$$

Proposition 27.6 *Pour tout réel t_0 élément de I, on a*

$$\forall t \in I, \quad w(t) = w(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^t a(x)dx}.$$

Preuve. Évident d'après les propositions 27.1 et 26.7, page 514. ♣

Proposition 27.7 *Soit (y_1, y_2) un couple de S_H. Les 3 propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *(y_1, y_2) est une base de S_H.*
2. *il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$.*
3. *$\forall t \in I, \quad w(t) \neq 0$.*

Preuve. Évident d'après les propositions 27.1 et 26.5, page 512. ♣

27.5 Résolution de l'équation homogène

Il n'y a pas de méthode générale pour expliciter un système fondamental de solutions. On pourra résoudre explicitement dans certains cas :

27.5.1 Recherche de solutions développables en série entière

Cette méthode convient en particulier lorsque les applications a et b sont polynomiales. On pourra voir, par exemple, l'exercice 18.10, page 331.

27.5.2 Cas où l'on a une solution particulière ne s'annulant pas sur I

Proposition 27.8 *Soit y_1 une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas sur I. On obtient une autre solution linéairement indépendante par variation de la constante de la forme*

$$y_2 = zy_1,$$

où z est une application de classe C^2 sur I.

Preuve. Effectuons le changement de variable $y_2 = zy_1$. Nous obtenons

$$y_2'' + ay_2' + by_2 = z''y_1 + z'(2y_1' + ay_1).$$

L'application y_2 est solution de l'équation homogène (H) si et seulement si l'application z' est solution de l'équation différentielle :

$$y'y_1 + y(2y_1' + ay_1) = 0.$$

$$\iff y' = y\left(-2\frac{y_1'}{y_1} - a\right).$$

Nous savons, depuis le chapitre 25, que l'ensemble des solutions de cette équation différentielle est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $C^1(I, \mathbb{K})$. Soient α une solution non nulle et t_0 un élement de I. On note z_1, l'application définie par

$$\begin{array}{rccl} z_1 : & I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & t & \longmapsto & \int_{t_0}^{t} \alpha(x)dx. \end{array}$$

L'application z_1y_1 est solution de l'équation homogène (H) et cette solution est linéairement indépendante de la solution y_1. En effet, d'une part, l'application z_1 est non constante sur I et, d'autre part, l'application y_1 ne s'annule pas sur cet intervalle. ♣

27.6 Solutions de l'équation (E)

On considère dans cette section l'équation

$$(E) \qquad y'' + ay' + by = c.$$

On note S_E l'ensemble des solutions.

Proposition 27.9 *L'ensemble S_E est un sous-espace affine de dimension 2 de $(C^2(I, \mathbb{K}), +, .)$ et dirigé par S_H.*

Preuve. D'après la proposition 27.2, l'ensemble des solutions S_E est non vide. Soit y_0 une solution. Alors, une application y est solution de l'équation (E) si et seulement si l'application $(y - y_0)$ est solution de l'équation homogène (H). D'où, le résultat. ♣

27.7 Résolution de l'équation (E)

Proposition 27.10 *Soit (y_1, y_2) un système fondamental de solutions de l'équation homogène (H). Une application $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$:*

$$y(t) = \lambda_1(t)y_1(t) + \lambda_2(t)y_2(t)$$

est solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t),$$

si et seulement si le vecteur $(\lambda_1'(t), \lambda_2'(t))$ vérifie pour tout $t \in I$:

$$\begin{cases} \lambda_1' y_1(t) + \lambda_2' y_2(t) = 0, \\ \lambda_1' y_1'(t) + \lambda_2' y_2'(t) = c(t). \end{cases}$$

Preuve. Évident en utilisant les propositions 27.1 et 26.10. ♣

27.8 Exercices

Exercice 27.1 Résoudre l'équation différentielle :

$$x^2 y'' - 2xy' + (x^2 + 2)y = 0$$

à l'aide des séries entières.

Solution. On considère $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite réelle telle que la série entière $\sum_{n\geq 0}$ admette un rayon de convergence R strictement positif et éventuellement infini. On note f, l'application

$$\begin{array}{rccl} f: &]-R, R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{array}$$

Alors,

$$\forall x \in]-R, R[, \quad x^2 f''(x) - 2xf'(x) + (x^2+2)f(x)$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}(n-1)(n-2)a_n x^n + \sum_{n=2} a_{n-2} x^n.$$

L'application f est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ \forall n \geq 3, \quad a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n-1)(n-2)}. \end{cases} \tag{27.37}$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le système (27.37) si et seulement si

$$\begin{cases} a_0 = 0, & \\ \forall p \geq 0, & a_{2p+1} = \frac{(-1)^p a_1}{(2p)!} \\ \forall p \geq 1, & a_{2p} = \frac{(-1)^{p-1} a_2}{(2p-1)!}. \end{cases}$$

Sous cette hypothèse, nous avons

$$\forall n \geq 1, \quad |a_n| \leq \frac{\max(|a_1|, |a_2|)}{(n-1)!}.$$

Ainsi, sous cette hypothèse $R = +\infty$. L'application f est solution sur $\mathbb{R}$ si

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= x\left(a_2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}x^{2p-1}}{(2p-1)!} + a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p x^{2p}}{(2p)!}\right) \\ &= x\left(a_2 \sin x + a_1 \cos x\right). \end{aligned}$$

Sur chaque intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$, l'espace vectoriel des solutions est engendrée par les applications $x \mapsto x\sin x$ et $x \mapsto x\cos x$. ♣

Exercice 27.2 Chercher les solutions de l'équation différentielle :

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

développables en série entière.

Solution. On considère $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite réelle telle que la série entière $\sum_{n\geq 0}$ admette un rayon de convergence R strictement positif et éventuellement infini. On note f, l'application

$$\begin{array}{rccl} f: &]-R, R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{array}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \forall x \in]-R, R[, \quad & 4xf''(x) + 2f'(x) + f(x) \\ &= \sum_{n=2} 4a_n n(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=1} 2a_n n x^{n-1} + \sum_{n=0} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} 4a_{n+1}n(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

L'application f est solution si et seulement si

$$\begin{cases} 2a_1 + a_0 = 0, \\ \forall n \geq 1, \quad a_{n+1} = \frac{-a_n}{(2n+1)(2n+2)} \end{cases} \iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(-1)^n a_0}{(2n)!}.$$

Sous cette hypothèse $R = +\infty$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\sqrt{x}\right)^{2n} = a_0 \cos\sqrt{x},$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^-, \quad f(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\sqrt{-x}\right)^{2n} = a_0 \operatorname{ch}\sqrt{-x}.$$

♣

Exercice 27.3 On considère un réel ω. Résoudre l'équation différentielle :

$$xy'' + 2y' - \omega^2 xy = 0$$

en cherchant d'abord les solutions développables en série entière.

Solution. On considère $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite réelle telle que la série entière $\sum_{n\geq 0}$ admette un rayon de convergence R strictement positif et éventuellement infini. On note f, l'application

$$\begin{array}{rccl} f: &]-R,R[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{array}$$

Alors,

$$\forall x \in]-R,R[, \quad xf''(x) + 2f'(x) - \omega^2 x f(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2(n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \omega^2 a_{n-1}x^n.$$

L'application f est solution de l'équation différentielle si et seulement si

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_1 = 0, & \\ \forall n \geq 1, & a_{n+1} = \frac{\omega^2 a_{n-1}}{(n+1)(n+2)} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} \forall p \in \mathbb{N}, & a_{2p+1} = 0, \\ \forall p \in \mathbb{N}, & a_{2p} = \frac{a_0 \omega^{2p}}{(2p+1)!} \end{array} \right.$$

Sous cette hypothèse $R = \infty$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\omega x) f(x) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(\omega x)^{2p+1}}{(2p+1)!} = a_0 \operatorname{sh}(\omega x).$$

L'application f est une solution de l'équation différentielle si et seulement si il existe un réel a_0 vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = a_0, \\ \forall x \neq 0, \quad f(x) = a_0 \frac{\operatorname{sh}(\omega x)}{\omega x}. \end{array} \right.$$

Recherchons maintenant sur les intervalles $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$, une solution linéairement indépendante des précédentes. Effectuons le changement de variable

$$y = y_0 z$$

où l'application y_o est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ par

$$y_0(x) = \frac{\operatorname{sh}(\omega x)}{x}.$$

Alors

$$\begin{aligned} xy'' + 2y' - \omega^2 xy &= xy_0'' z + 2xy_0' z' + xy_0 z'' + 2y_0' z + 2y_0 z' - \omega^2 xy_0 z \\ &= z'' xy_0 + z'(2xy_0' + 2y_0). \end{aligned}$$

L'application y est solution de l'équation différentielle si et seulement si l'application z' est solution de l'équation différentielle en Z :

$$\begin{aligned} & xy_0 Z' + (2xy_0' + 2y_0)Z = 0 \\ \iff & Z' = -\left(\frac{2y_0'}{y_0} + \frac{2}{x}\right) Z. \end{aligned}$$

Les solutions sont donc de la forme

$$Z(x) = K e^{\ln \frac{1}{(xy_0(x))^2}} = \frac{K}{(xy_0)^2} = \frac{K}{(\operatorname{sh} \omega x))^2}$$

où K est une constante réelle. En prenant par exemple $K = -\omega$, recherchons une application z vérifiant $z'(x) = \frac{\omega}{(\operatorname{sh} \omega x)^2}$. Nous pouvons choisir par exemple

$$z(x) = \frac{\operatorname{ch} \omega x}{\operatorname{sh} \omega x}.$$

Nous obtenons ainsi la solution

$$y(x) = \frac{\operatorname{ch} \omega x}{x}.$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc sur l'intervalle $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ de la forme

$$y(x) = \frac{1}{x}(\lambda \operatorname{sh} \omega x + \mu \operatorname{ch} \omega x)$$

où λ et μ sont deux réels. ♣

Exercice 27.4 Résoudre l'équation différentielle :

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2(1 + x^3 \sin x).$$

On pourra chercher des solutions de l'équation homogène de la forme $x \mapsto x^\alpha$ où α est un réel.

Solution. Nous nous plaçons sur l'intervalle I égal à $\mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$. Recherchons des solutions de l'équation différentielle homogène de la forme $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$ où α est un réel. Une telle application est solution de l'équation différentielle homogène si et seulement si

$$\forall x \in I, \quad \alpha(\alpha-1)x^\alpha - 2\alpha x^\alpha + 2x^\alpha = 0.$$

Cette application est solution si et seulement si

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

c'est-à-dire si et seulement si $\alpha = 1$ ou $\alpha = 2$. Après avoir vérifié que la famille (f_1, f_2) est une famille libre, on en déduit que le couple (f_1, f_2) forme une base de (S_H) espace vectoriel des solutions de l'équation homogène. Pour trouver une solution particulière de l'équation différentielle, utilisons la proposition 27.10. Recherchons les couples d'applications λ_1 et λ_2 de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I vérifiant

$$\forall x \in I, \quad \begin{cases} x\lambda_1'(x) + x^2\lambda_2'(x) = 0 \\ \lambda_1'(x) + 2x\lambda_2'(x) = 2\left(\frac{1}{x^2} + x\sin x\right) \end{cases}$$

$$\iff \forall x \in I, \quad \begin{cases} \lambda_1'(x) + x\lambda_2'(x) = 0 \\ \lambda_1'(x) + 2x\lambda_2'(x) = 2\left(\frac{1}{x^2} + x\sin x\right) \end{cases}$$

$$\iff \forall x \in I, \quad \begin{cases} \lambda_2'(x) = 2\left(\frac{1}{x^3} + \sin x\right) \\ \lambda_1'(x) = -2\left(\frac{1}{x^2} + x\sin x\right) \end{cases}$$

$$\iff \forall x \in I, \quad \begin{cases} \lambda_2(x) = -\frac{1}{x^2} - 2\cos x + K \\ \lambda_1(x) = \frac{2}{x} + 2x\cos x - 2\sin x + K' \end{cases}$$

où K et K' sont deux constantes réelles. Les solutions de l'équation différentielle sur l'intervalle $I = \mathbb{R}^{+*}$ ou $\mathbb{R}^{-*}$ sont les applications y définies par

$$\forall x \in I, \quad y(x) = 2 + 2x^2\cos x - 2x\sin x - 1 - 2x^2\cos x + Kx^2 + K'x,$$

où K et K' sont deux constantes réelles. ♣

Index

Imprimé en France par EMD S.A.S. – 53110 Lassay-les-Châteaux
N° d'impression : 17477 – Dépôt légal : juin 2007 – N° d'éditeur : MJ 412

JEAN-FRANÇOIS DANTZER

MATHÉMATIQUES

POUR L'AGRÉGATION INTERNE

ANALYSE & PROBABILITÉS

COURS & EXERCICES CORRIGÉS

La préparation des candidats aux concours de recrutement de l'Éducation nationale réclame des outils et des méthodes qu'il leur est bien souvent difficile de se procurer, faute d'une littérature adaptée aux exigences de la situation.

L'auteur met ici à la disposition des futurs diplômés son matériel pédagogique de formateur dont l'efficacité est avérée.

Titulaire du Capes et de l'agrégation de mathématiques, membre du jury de l'agrégation interne de 1998 à 2001 et membre du jury du Capes externe de 2000 à 2003, Jean-François Dantzer enseigne à l'université de Versailles Saint-Quentin où il a créé un diplôme d'université (DU) de préparation à l'agrégation interne. Il y prépare les candidats au Capes et à l'agrégation.

Son parcours professionnel lui ayant apporté l'expérience des différents auditoires qu'un enseignant peut rencontrer (collège, lycée, école d'ingénieurs et université), les lecteurs profiteront d'un double éclairage du programme d'analyse et de probabilités : ils sauront comment l'étudier et comme l'enseigner.

Taillé sur mesure pour les candidats de l'agrégation interne, ce cours correspond également au programme du CAPES et de l'agrégation externes. Toutes les notions y sont expliquées dans le détail et leur assimilation est facilitée par près de 200 exercices d'application dont beaucoup peuvent être utilisés par les candidats pour leur *leçon* à l'épreuve orale.

Par ailleurs, ce livre est le seul de sa catégorie à traiter spécifiquement de la partie du programme portant sur les probabilités.

LIBRAIRIE VUIBERT FONDÉE EN 1877

WWW.VUIBER