Scientia Graeco-Arabica

herausgegeben von
Marwan Rashed

Band 9

Abū Kāmil

Algèbre et analyse diophantienne

Édition, traduction et commentaire

par

Roshdi Rashed

De Gruyter

De Gruyter

ISBN 978-3-11-029561-0
e-ISBN 978-3-11-029566-5
ISSN 1868-7172

Library of Congress Cataloging-in-Publication Data

A CIP catalog record for this book has been applied for at the Library of Congress.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.dnb.de abrufbar.

© 2012 Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin/Boston

Druck und buchbinderische Verarbeitung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG, Göttingen
∞ Gedruckt auf säurefreiem Papier

Printed in Germany

www.degruyter.com

PRÉFACE

Dans les années vingt du IX^e^ siècle à Bagdad, Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī fait paraître un livre qui marque la naissance d'une nouvelle discipline. Celle-ci ne se confond ni avec l'arithmétique, ni avec la géométrie, les deux disciplines alors connues. Ce nouveau calcul reçoit pour nom de baptême « *al-jabr wa-al-muqābala* »[1] et, bien plus tard, « l'algèbre »[2]. Ce livre ne tarda pas à s'avérer fondateur, et ceci à plusieurs titres : fondateur de la nouvelle discipline, des mathématiques juridiques (le calcul des legs et des obligations) et, surtout, révélateur des nouvelles possibilités inhérentes à l'algèbre et dont la réalisation par les successeurs d'al-Khwārizmī a entièrement refaçonné la configuration des mathématiques[3]. Pour tout dire, il suffit d'oublier le livre d'al-Khwārizmī pour ne plus rien comprendre à l'histoire des mathématiques après le neuvième siècle.

Or on sait que l'histoire d'une œuvre mathématique, surtout lorsque celle-ci est fondatrice, est aussi celle des lectures qui en ont été faites par les contemporains et les proches successeurs. Dans le cas du livre d'al-Khwārizmī, c'est d'un accord unanime que ceux-ci ont reconnu l'importance de l'événement, conscients qu'ils étaient de la nouveauté radicale de la discipline. Sans tarder, ils ont commencé à exploiter l'invention d'al-Khwārizmī, à consolider les assises de la nouvelle discipline et à la développer. De tous ses proches successeurs (une ou deux générations), c'est Abū Kāmil qui a le plus contribué à cette tâche.

Dans le préambule de son livre, Abū Kāmil annonce explicitement son projet : commenter l'écrit d'al-Khwārizmī. Par « commenter », il est loin d'entendre une simple lecture explicative. Il s'agit d'éclairer ce que son prédécesseur a laissé dans l'ombre, de dégager ce qui reste enfoui dans le livre, d'étendre la discipline elle-même au delà des limites initialement fixées, de reprendre les démonstrations sur des bases plus sûres et de les

[1] R. Rashed, *Al-Khwārizmī : Le commencement de l'algèbre*, Paris, 2007, p. 94.

[2] Les vocables « algèbre » pour désigner la nouvelle discipline et « algébriste » pour distinguer le mathématicien sont présents dans les écrits des successeurs d'al-Khwārizmī.

[3] R. Rashed, « Founding Acts and Major Turning-Points in Arab Mathematics », dans J. Z. Buchwald (éd.), *A Master of Science History : Essays in Honor of Charles Coulston Gillispie*, Archimedes 30, Dordrecht, 2012, p. 253-271.

multiplier, et de démontrer ce que le mathématicien a laissé sans preuve. Il va donc entreprendre de réaliser les normes mêmes d'al-Khwārizmī, en approfondissant sa démarche et en la systématisant, pour enfin donner de nouvelles frontières à la discipline. Pour ce faire, Abū Kāmil ne s'attachera en fait qu'au premier livre de l'ouvrage d'al-Khwārizmī, celui que ce dernier consacre au calcul de l'algèbre et à ses applications en géométrie. Il ne considèrera donc pas le second livre, où il est question des legs et des testaments et qui servira de base au « calcul juridique ».

Ce choix reflète en fait une évolution du projet pensé par al-Khwārizmī : nous sommes en présence d'une autre conception de l'extension de la discipline. Désormais pour Abū Kāmil, en effet, l'algèbre à proprement parler comprend la théorie des équations, le calcul algébrique et la résolution à l'aide de ces moyens des problèmes de géométrie et d'arithmétique. L'application de l'algèbre au domaine juridique – legs, testaments, etc. – relève d'une autre discipline, celle des « obligations » (*al-Farā'iḍ*). Ne relèvent donc de l'algèbre que ses applications menées dans les deux autres disciplines mathématiques : la géométrie et l'arithmétique. Abū Kāmil traite d'ailleurs des legs et des testaments dans un livre indépendant, preuve supplémentaire qu'il entendait bien les isoler d'un traité d'algèbre.

Or ce nouveau tracé des frontières de l'algèbre n'est en fait pas en totale rupture avec celui d'al-Khwārizmī, lequel ne traitait des legs et des testaments que dans le second des deux volumes qui composent son ouvrage. Le choix d'Abū Kāmil est donc pour ainsi dire annoncé en filigrane dans la construction de son prédécesseur. Et c'est bien à cette tradition qu'Abū Kāmil revendique haut et fort appartenir. Pour lui, c'est al-Khwārizmī et nul autre qui a inventé l'algèbre. Il écrit par exemple qu'il a établi, dans son second livre, « la preuve de l'autorité et de la préséance en algèbre et *al-muqābala* de Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī »[4]. C'est dans l'ouvrage d'al-Khwārizmī qu'Abū Kāmil a appris son métier d'algébriste, et c'est ce livre qu'il entend « commenter », même s'il est vrai que ce « commentaire » s'est nourri des moyens supplémentaires offerts par les géomètres et les arithméticiens. Non seulement Abū Kāmil connaissait, et de première main, les *Éléments* d'Euclide, mais il adhère sans réserve aux normes de la démonstration qui s'y trouvent consignées. Il cite plus d'une fois les *Éléments*, et emprunte des propositions aux différents livres du traité.

Mais, si nous connaissons les géomètres évoqués par Abū Kāmil, nous ne savons rien des « arithméticiens (*ḥussāb*) ». Abū Kāmil ne cite aucun nom ni aucun titre, et ne les évoque que collectivement sous le vocable

[4] Cité dans Ḥājjī Khalīfa, *Kashf al-ẓunūn*, éd. M. Ş. Yaltkaya, vol. II, p. 1469-1470.

« les arithméticiens (*ḥussāb*) ». Mais il ressort de sa description qu'il s'agit de ces arithméticiens qui traitaient de collections de problèmes, les transmettant de génération en génération avec leurs procédés de solution, sans justifier ces solutions ni se préoccuper de démontrer ce qu'ils affirmaient. Ces collections comportaient des problèmes indéterminés, ainsi que des progressions arithmétiques. Si donc l'on en croit la description d'Abū Kāmil, c'était là une pratique empirique de l'arithmétique et non point une science arithmétique. Or c'est à ce propos qu'il conçoit un nouveau projet, dont la réalisation modifiera l'extension de l'algèbre : il s'agit de transformer cette pratique artisanale et empirique – notamment tout ce qui porte sur les problèmes indéterminés et les progressions arithmétiques – en une véritable science mathématique ; et c'est au moyen de l'algèbre que va s'opérer cette transformation. Ainsi, en appliquant les procédés de l'algèbre aux problèmes indéterminés, Abū Kāmil conçoit, pour la première fois dans l'histoire, l'analyse indéterminée rationnelle, ou l'analyse diophantienne rationnelle comme on la nomme aujourd'hui. Et, en appliquant l'algèbre à l'étude des progressions arithmétiques, il introduit dans cette étude les normes de la démonstration.

Rappelons à ce propos qu'al-Khwārizmī n'aborde pas dans son livre l'analyse indéterminée. Quant à Diophante, il ne distingue pas dans ses *Arithmétiques* entre analyse indéterminée et analyse déterminée. Il fallait pour que cette séparation s'opère attendre l'institution de l'algèbre comme science mathématique, avec la théorie des équations. Abū Kāmil effectue cette distinction et intègre pour la première fois – et pour longtemps – l'analyse indéterminée comme chapitre à part entière d'un traité d'algèbre.

Ainsi, tout en commentant al-Khwārizmī et en se réclamant de lui, Abū Kāmil va plus loin et dessine d'autres frontières pour la discipline. Même lorsqu'il s'emploie à éclairer le texte de son prédécesseur, notamment dans les chapitres sur la théorie des équations et sur le calcul algébrique, il s'occupe des équations biquadratiques (et non plus seulement quadratiques), il intègre les irrationnels quadratiques non seulement comme inconnues (ce qu'al-Khwārizmī avait commencé à faire) mais comme coefficients, il donne de chaque algorithme plusieurs démonstrations à l'aide des théorèmes des *Éléments* d'Euclide, il développe le calcul algébrique et recourt plus fréquemment aux démonstrations algébriques. Tout est donc en place pour que naisse un autre projet, conçu et formulé presqu'un siècle plus tard par le successeur d'Abū Kāmil, al-Karajī : l'arithmétisation de l'algèbre. Il ne faut donc pas s'étonner que ce dernier, ainsi que ses successeurs comme al-Samaw'al, ne cessent de revenir au premier livre d'algèbre d'Abū Kāmil, pour lui emprunter propositions, problèmes et méthodes. Ainsi al-Karaji n'emprunte pas moins d'une cinquantaine de

problèmes à l'*Algèbre* d'Abū Kāmil. Al-Samaw'al, plus tard, aussi bien que Fibonacci, en feront de même[5].

La contribution d'Abū Kāmil, on vient de le voir, enrichit le contenu même de l'algèbre d'al-Khwārizmī, applique celle-ci à la rationalisation d'une pratique empirique et artisanale des arithméticiens et aboutit ainsi à la conception de ce nouveau chapitre sur l'analyse indéterminée rationnelle. Mais elle ne se limite pas à cela : elle participe aussi à la constitution de ce qu'on a coutume d'appeler « l'algèbre géométrique ». Abū Kāmil, comme Thābit ibn Qurra (826-901), tous deux familiers de la géométrie euclidienne et de l'algèbre d'al-Khwārizmī, ont recours aux propositions du second livre des *Éléments* (II.5 et II.6 notamment) ainsi qu'à la théorie des proportions pour démontrer les algorithmes de solution des équations quadratiques. Abū Kāmil pour sa part suit al-Khwārizmī en appliquant l'algèbre aux problèmes de géométrie. Mais, alors que ce dernier ne considère dans ses problèmes que des quadrilatères, des triangles et des cercles, Abū Kāmil consacre un chapitre entier au pentagone et au décagone.

Tout au long de la rédaction de son livre, Abū Kāmil ne procède ni par images, ni par schèmes. C'est en appliquant l'algèbre aux problèmes des arithméticiens qu'il donne à ces problèmes et aux procédés de leur solution une dimension véritablement mathématique ; et c'est par son application aux problèmes géométriques qu'il investit un nouveau domaine, celui de l'algèbre géométrique. Dans un cas comme dans l'autre, Abū Kāmil pensait pouvoir accéder à un statut de généralité que problèmes et procédés n'avaient pas auparavant. Mais la langue standard et uniforme de l'algèbre non symbolique était une entrave à l'accomplissement de cet espoir. On examinera comment le mathématicien a tenté par sa pratique de surmonter un tel obstacle.

Observons enfin que, malgré les différences considérables qui séparent Abū Kāmil de son prédécesseur de deux générations tout au plus – al-Khwārizmī –, son livre demeure la voie obligée d'accès à l'œuvre de ce dernier. Il permet en effet de préciser sa place dans l'histoire de la discipline, d'éclairer la signification de sa contribution ainsi que ses limites, souvent mal perçues par les demi-habiles amateurs de précurseurs, séduits par des comparaisons hasardeuses et anhistoriques.

L'*Algèbre* d'Abū Kāmil est aussi la voie obligée pour pleinement saisir le projet de son successeur du dixième siècle, al-Karajī, projet que j'avais désigné comme *l'arithmétisation de l'algèbre*[6]. C'est en effet à partir du

[5] Voir Introduction et les notes à l'édition.

[6] Voir R. Rashed, « L'arithmétisation de l'algèbre au XII^e siècle », dans *Actes du XIII^e Congrès international d'histoire des sciences*, Moscou, 1974, p. 3-30.

livre d'Abū Kāmil et des *Arithmétiques* de Diophante qu'al-Karajī a pu concevoir son projet, tel qu'il se présente notamment dans ses deux livres : *al-Fakhrī* et *al-Badī'*. Dans le premier, il emprunte à Abū Kāmil pas moins de cinquante problèmes, et à Diophante les quatre premiers livres des *Arithmétiques*. Sans le livre d'Abū Kāmil, on n'est donc pas en mesure de restituer l'histoire de la tradition algébrique inaugurée par al-Khwārizmī, tradition qui a progressé par les extensions successives des différents chapitres, et aussi par les remaniements des programmes de recherche et par l'invention de nouveaux chapitres : l'analyse indéterminée, par exemple.

La contribution d'Abū Kāmil en analyse indéterminée ne se borne pas à ce chapitre sur l'analyse indéterminée rationnelle de son traité d'algèbre. Il compose un autre livre où il applique l'algèbre à des problèmes arithmétiques qui circulaient à son époque. Dans ce second livre intitulé *Sur les volatiles*, il développe l'analyse indéterminée en nombres entiers du premier degré.

Le lecteur trouvera ici l'*editio princeps* du livre d'algèbre d'Abū Kāmil et de son autre livre, *Sur les volatiles*, ainsi que leur traduction intégrale. Les deux textes ont été établis selon les normes les plus exigeantes de l'édition critique. La traduction est littérale, respectueuse autant qu'il est possible du génie des langues. La démarche est d'autant plus nécessairement scrupuleuse que, du livre d'Abū Kāmil, nous n'avons qu'une traduction latine médiévale, partielle, et une autre, hébraïque. Quant à son livre sur les volatiles, on n'en a qu'une traduction allemande provisoire.

Reste à dire quelques mots du commentaire mathématique des textes d'Abū Kāmil. Rédigés il y a plus de onze siècles, ces traités le furent dans un contexte totalement étranger au nôtre, que nous ne connaissons pas et qui ne nous est que partiellement accessible. La tentation la plus immédiate, à laquelle certains n'ont pas résisté, est d'interpréter Abū Kāmil à l'aide de ses propres mots. Illusion d'un apprenti-philologue. Si en effet la philologie – maîtrisée – est indispensable à la restitution du contexte, elle doit, pour être efficace, être orientée par une compréhension en profondeur des mathématiques du texte et de leur histoire.

Or cette compréhension ne peut naître que de nos connaissances nécessairement datées, elles-mêmes insérées dans des contextes différents et différents de celui de l'auteur : c'est toujours, qu'on le veuille ou non, dans la langue d'une autre mathématique et avec les notions de celle-ci qu'on lit un texte. Tous les historiens qui ont écrit sur l'algèbre d'Abū Kāmil ont emprunté la langue de l'algèbre symbolique tardive. Mais, ce faisant, on quitte le contexte de l'auteur. Le symbolisme autorise en effet des généralisations, des itérations, des déductions, etc., que la langue naturelle est souvent inapte à opérer. Et, qui plus est, ce modèle interprétatif élaboré à partir

de l'algèbre symbolique s'avère parfois inefficace. Le chapitre sur l'analyse indéterminée rationnelle, par exemple, sera mieux éclairé et expliqué par un modèle conçu à partir de la géométrie algébrique, qui permettra d'identifier les algorithmes appliqués et de comprendre en profondeur le sens des conditions auxquelles le mathématicien a soumis les solutions. Qu'il s'agisse d'Abū Kāmil ou des algébristes des siècles suivants, l'interprétation à l'aide de l'algèbre symbolique n'est pas moins anachronique que celle qui part de la géométrie algébrique.

Toute la difficulté de l'interprétation d'un texte mathématique ancien réside, à l'évidence, dans ce dilemme : comment, avec des modèles empruntés à d'autres mathématiques, inventés dans d'autres contextes inconnus de l'auteur, restituer les significations que ce dernier a déposées dans son texte ? Sur ce point, je me suis expliqué plus d'une fois[7]. Il s'agit, selon le domaine, de combiner une analyse philologique sûre, une histoire de l'élaboration du texte et des pratiques et procédés mis en œuvre par son auteur pour le rédiger, et, enfin, des modèles mathématiques construits à partir des disciplines que ce texte a contribué à fonder et, donc, appartenant à des mathématiques postérieures à celui-ci, modèles aptes à révéler la *mathesis* de l'auteur. Dans le cas qui nous occupe ici, ces modèles sont l'algèbre et la géométrie algébrique. Mais le recours à ces modèles n'est qu'instrumental : indispensable, en raison de ce rapport diffus d'identité et de différence qui relie les contextes, l'algèbre d'Abū Kāmil aux disciplines modernes, l'instrument ne se substitue pas à l'objet, cela va de soi. Il relève d'une tout autre *mathesis*. L'historien doit donc le manier avec prudence et sagacité, pour ne pas attribuer au texte ancien les notions véhiculées par l'instrument : le modèle.

Un dernier mot sur l'histoire de notre édition. Achevée, ainsi que la traduction de sa majeure partie, il y a un quart de siècle environ, elle a cédé le pas à d'autres projets. Cet état de choses se serait sans doute prolongé si M. Erwan Penchèvre n'avait proposé de m'aider à reprendre ce chantier pour mettre un point final à ce travail. Si je raconte cette histoire, c'est pour lui dire ma gratitude. C'est toujours un plaisir de remercier Christian Houzel qui a relu les commentaires historiques et mathématiques et qui les

[7] R. Rashed, *Apollonius : Les Coniques,* tome 1.1 : *Livre I*, commentaire historique et mathématique, édition et traduction du texte arabe, Berlin / New York, 2008 et « Lire les anciens textes mathématiques : le cinquième livre des *Coniques* d'Apollonius », *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, vol. XXVII, fasc. 2, 2007, p. 265-288.

a fait profiter de ses remarques et de ses corrections. Madame Aline Auger a préparé ce livre à l'édition et a composé les glossaires et les index ; qu'elle trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Roshdi Rashed
Bourg-la-Reine, janvier 2012

SOMMAIRE

Préface v
Avertissement xv

INTRODUCTION

1. Abū Kāmil: algébriste et ingénieur 1
2. Les écrits mathématiques d'Abū Kāmil 7
   2.1. *L'algèbre et al-muqābala* 7
      2.1.1. Le témoignage d'al-Karajī 11
      2.1.2. Le témoignage d'al-Samaw'al 14
      2.1.3. La traduction latine 14
      2.1.4. La lecture de Fibonacci 17
      2.1.5. La traduction hébraïque 26
   2.2. *Sur les volatiles* 27
   2.3. *La mensuration des terrains* 30

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE I : La théorie des équations et la démonstration des algorithmes 35

CHAPITRE II : Le calcul algébrique et ses applications 53
   1. Problèmes des six premiers types 55
   2. Problèmes divers 57

CHAPITRE III : L'application de l'algèbre à la géométrie plane :
les pentagones et les décagones réguliers 113

CHAPITRE IV : L'analyse indéterminée rationnelle 145
   1. Introduction 145
   2. Équations et systèmes d'équations du second degré 148
      2.2. Problèmes 1 à 25 148
      2.2. Problèmes 26 à 38 159
   3. Systèmes d'équations indéterminées du premier degré :
      problèmes 39 à 43 172

CHAPITRE V : Problèmes arithmétiques 183
   1. Problèmes divers 183
   2. Quelques progressions arithmétiques et géométriques 192

CHAPITRE VI : Analyse indéterminée entière du premier degré 197

CHAPITRE VII : La démonstration aux commencements de l'algèbre..... 221

SECONDE PARTIE

TEXTES ET TRADUCTIONS

Livre d'algèbre et d'al-muqābala 242
Préambule 242

Les six équations 246

Le calcul algébrique et ses applications 280
Multiplication, addition et soustraction des termes 280
Multiplication et division des racines 298
Addition et soustraction des racines 312

Les six problèmes 320

Chapitre sur des problèmes divers 334
Équations à coefficients irrationnels 414

Le pentagone et le décagone régulier 522

Analyse indéterminée rationnelle 578
Équations et systèmes d'équations du second degré 578
Systèmes d'équations indéterminées du premier degré 654

Problèmes numériques et progressions 680
Problèmes numériques divers 680
Sur les progressions arithmétiques et géométriques 718

Livre sur les volatiles : Analyse indéterminée entière du premier degré 732

APPENDICE : Extrait d'*al-Bāhir en algèbre* d'al-Samaw'al 763

NOTES COMPLÉMENTAIRES 769

GLOSSAIRE ARABE-FRANÇAIS 775

INDEX
Index des noms propres 805
Index des concepts 807
Index des traités 811
Index des manuscrits 812

OUVRAGES CITÉS 813

AVERTISSEMENT

< > Ces crochets isolent dans le texte arabe ce qui est ajouté pour combler une lacune du manuscrit. Dans la traduction française, ils sont maintenus seulement pour les titres ; par ailleurs, ils sont introduits pour isoler un ajout au texte arabe, nécessaire à l'intelligence du texte français.

[ ] Ces crochets sont utilisés seulement dans le texte arabe pour indiquer que le mot ou le passage ainsi isolés doivent être supprimés pour la cohérence du texte.

/ Ce signe indique la fin du folio d'un manuscrit.

Pour distinguer les termes *māl* (le carré de l'inconnue) et *murabba'* (le carré géométrique), tous deux nécessairement rendus en français par « carré », nous avons dû recourir à une simple différence d'impression, en notant *carré* (en italique) pour *māl*.

INTRODUCTION

1. ABŪ KĀMIL : ALGÉBRISTE ET INGÉNIEUR

Aucune source historique ne consacre un article vraiment détaillé aux dates et faits d'Abū Kāmil. Les anciens biobibliographes, tels qu'al-Nadīm[1], al-Qifṭī[2], etc., sont brefs ; quant aux anciens auteurs d'annales historiques, s'il leur arrive d'évoquer les mathématiciens et les astronomes, c'est seulement en fonction des Califes et des Princes que servaient ces derniers. Nous allons essayer de recueillir le peu d'informations que les uns et les autres ont transmises sur Abū Kāmil et sur son œuvre.

Tous les anciens biobibliographes et historiens, al-Nadīm comme, plus tard, Ibn Khaldūn[3], s'accordent sur le nom et l'origine du mathématicien. Son nom est Shujā' ibn Aslam ibn Muḥammad ibn Shujā', dit Abū Kāmil, selon l'usage arabe de désigner l'homme par le nom de son fils aîné, ou simplement par respect. Il est égyptien et a vécu à al-Fusṭāṭ[4], qui était alors la capitale du pays, avant la fondation du Caire. C'est parce que tous reconnaissent son éminence dans les mathématiques, et particulièrement dans les disciplines numériques, qu'ils le surnomment « al-Ḥāsib », de « ḥisāb » (calcul et algèbre). Les biobibliographes et certains historiens,

[1] Al-Nadīm, *Kitāb al-Fihrist*, éd. R. Tajaddud, Téhéran, 1971, p. 339 :

وهو أبو كامل شجاع بن أسلم بن محمد بن شجاع الحاسب. من أهل مصر، وكان فاضلاً حاسبًا عالمًا. وله من الكتب؛ كتاب الفلاح، كتاب مفتاح الفلاح، كتاب الجبر والمقابلة، كتاب العصير، كتاب الطير، كتاب الجمع والتفريق، كتاب الخطأين، كتاب المساحة والهندسة، كتاب الكفاية.

[2] Al-Qifṭī, *Ta'rīkh al-ḥukamā'*, éd. J. Lippert, Leipzig, 1903, p. 211 :

ابن أسلم بن محمّد بن شجاع الحاسب المصريّ أبو كامل كان فاضل وقته وعالم زمانه وحاسب أوانه وله تلاميذ ...

On peut également lire dans la notice de 'Alī ibn Aḥmad al-'Imrānī de Mosoul : « Parmi ses livres : un commentaire du livre de l'algèbre et d'*al-muqābala* de l'arithméticien égyptien, Abū Kāmil Shujā' ibn Aslam » (p. 233).

[3] Ibn Khaldūn écrit : « le premier qui a écrit dans cet art (l'algèbre) est Abū 'Abd Allāh al-Khwārizmī ; et, après lui, Abū Kāmil Shujā' ibn Aslam » (*Muqaddima*, Le Caire, s.d., p. 484).

[4] Sur ce qu'était al-Fusṭāṭ à l'époque, voir par exemple al-Qalqashandī, *Subḥ al-A'shā*, repr. Būlāq, Le Caire, 1963, vol. III, p. 331-334.

comme Ibn Khaldūn, lui attribuent un traité substantiel en algèbre et, dans leur hiérarchie, le placent en compagnie de l'inventeur de la discipline : al-Khwārizmī. Al-Nadīm, au Xe siècle, établit pour sa part une liste de ses écrits mathématiques[5].

Sans plus d'informations sur l'homme, les historiens récents des mathématiques qui ont écrit sur Abū Kāmil – H. Suter, L. Karpinski, J. Weinberg, M. Levey[6], parmi d'autres – ont opté pour les dates approximatives suivantes : né vers 850, mort en 930. Ils ont fait ce choix en fonction d'al-Khwārizmī – le prédécesseur d'Abū Kāmil – et des dates des commentateurs de l'*Algèbre* d'Abū Kāmil. D'autres historiens, pour éviter de donner des dates somme toute arbitraires, ont préféré rester dans le vague en situant Abū Kāmil dans la seconde moitié du neuvième siècle. Seul A. Anbouba a affirmé avec précision qu'en 265/878, « et probablement avant, Abū Kāmil était déjà un homme de science reconnu »[7]. Revenons à notre tour sur cette question des dates d'Abū Kāmil, à partir des propos que lui attribuent deux historiens anciens.

Le premier, l'historien de la dynastie qui gouvernait l'Égypte à l'époque, al-Balawī, attribue à Abū Kāmil, dans son livre composé vers le milieu du Xe siècle, *La vie (Sīrat) d'Aḥmad ibn Ṭūlūn* (fondateur de la dynastie), les propos suivants :

> Abū Kāmil a dit : quand Aḥmad ibn Ṭūlūn m'a libéré (c'est-à-dire de prison), il m'a chargé de l'Arsenal. Il m'a appelé un jour et m'a dit : quant à l'équipement que tu as fait pour moi, un peu moins aurait suffi, tant mon prestige a progressé dans le cœur des gens ; excepté pour les bateaux : la mer ne me craint pas et ne redoute pas ma puissance, et pour la mer on ne construit que des choses fermes et d'excellente technique[8].

Il ressort de ces propos qu'Abū Kāmil s'est occupé de l'équipement militaire d'Ibn Ṭūlūn, qu'il a fait de la prison pour des raisons inconnues et que, une fois libéré, il a été nommé directeur de l'Arsenal.

Le portrait d'Abū Kāmil tel que le suggère la citation précédente est celui d'un mathématicien ingénieur. À cette époque, diriger l'Arsenal revenait à faire le travail d'un ingénieur en chef, chargé de contrôler la construction des bateaux et de perfectionner les instruments de navigation. À

[5] Voir note 1 et, plus loin, p. 6.

[6] Voir la Bibliographie à la fin du livre.

[7] A. Anbouba, « L'algèbre arabe aux IXe et Xe siècles », *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 2, n° 1, 1978, p. 66-100. Voir également « Un algébriste arabe : Abū Kāmil Šuǧā' ibn Aslam », *Horizons techniques du Moyen-Orient*, 1e année, n° 2, 1963, p. 6-15 (à la p. 8), qui est l'article le plus informé sur Abū Kāmil.

[8] Al-Balawī (Abū Muḥammad 'Abd Allāh ibn Muḥammad al-Madīnī), *Sīrat Aḥmad ibn Ṭūlūn*, éd. Muḥammad Kurd 'Alī, Le Caire, s.d., p. 208.

cela, il fallait ajouter la fonction de chef du personnel, qui devait choisir les artisans, inspecter les bateaux au mouillage dans les ports, etc.[9] Cette préoccupation d'ingénieur se manifeste d'ailleurs dans un livre de géométrie élémentaire, géométrie pratique sans démonstration, destiné aux artisans[10].

Pour retracer le contexte, rappelons qu'Ibn Ṭūlūn a régné sur l'Égypte au nom du Calife de Bagdad entre 254/868 et 270/883. Mais ses rapports avec Bagdad ne tardèrent pas à se détériorer, en raison de ses désirs d'indépendance et de sa volonté d'établir sa propre dynastie, qui l'ont amené à constituer une armée puissante, ainsi qu'une flotte de guerre. C'est donc au cours de son règne, en 263/876, que, dans la crainte d'une attaque maritime, il a restauré la citadelle et agrandi l'arsenal qui se trouvaient dans l'Île de Rūḍa[11], proche de la capitale al-Fusṭāṭ (aujourd'hui une partie du Caire) ; et, comme l'écrit al-Kindī l'historien, à l'époque de cette dynastie :

> Aḥmad ibn Ṭūlūn a activement travaillé pour bâtir les bateaux militaires[12].

Deux ans plus tard, en 878, il mène une expédition en Syrie et charge son fils aîné – al-'Abbās – de le remplacer pendant son absence. Mais ce dernier, influencé par ses officiers, tente de s'emparer du pouvoir. À son retour en Égypte, Aḥmad ibn Ṭūlūn punit son fils et fait exécuter les officiers. Or, parmi ces derniers, se trouvait Aḥmad ibn Aslam[13]. S'agit-il d'un parent proche d'Abū Kāmil, comme l'indique le nom ? Faut-il voir dans cet éventuel lien de parenté la raison de l'emprisonnement, de courte durée sans doute, d'Abū Kāmil ? Nous n'avons aucun moyen de répondre. Quoi qu'il en soit, innocent, il ne tarda pas à recouvrer la liberté et à être chargé de l'arsenal.

Ainsi, en 878 et vraisemblablement avant, Abū Kāmil était un personnage important, un ingénieur réputé qui avait déjà donné des preuves, pro-

[9] Voir al-Sayyid Abū Sidīra, *Les métiers et les industries dans l'Égypte Islamique* (en arabe), Le Caire, 1991, p. 202-203.

[10] Voir plus loin.

[11] Sur cette île et sur l'arsenal, voir al-Maqrīzī, *Kitāb al-mawā'iẓ wa-al-i'tibār*, éd. Ayman Fū'ād Sayyid, London, 2002, vol. III, p. 568 sqq. Voir aussi Ibn Duqmāq, *Kitāb al-intiṣār li-wāsiṭat 'aqd al-amṣār fī tārikh Miṣr wa-jughrāfiyyatihā*, éd. Būlāq, Le Caire, s.d., vol. I, p. 109-110 ; Ibn Taghrībardī, Abū al-Maḥāsin, *al-Nujūm al-zāhira fī mulūk Miṣr wa-al-Qāhira*, 4 vol., Le Caire, 1933, vol. III, p. 12.

[12] Abū 'Umar al-Kindī, *Kitāb al-Wulāh wa-Kitāb al-Quḍāh* (The Governors and Judges of Egypt), éd. Rhuvon Guest, repr. Le Caire, s. d., p. 218. On y trouve un chapitre sur Ibn Ṭūlūn et sa dynastie, p. 212-258. Voir aussi Ibn al-Athīr, *al-Kāmil fī al-tārikh*, Beyrouth, 1979, vol. VII, p. 324-325 ; Ibn Kathīr, *al-Bidāya wa-al-Nihāya*, Le Caire, s.d., vol. XI, p. 45.

[13] Abū 'Umar al-Kindī, *Kitāb al-Wulāh wa-Kitāb al-Quḍāh*, p. 220-223. Parmi les chefs de l'armée qui ont incité al-'Abbās, le fils d'Ibn Ṭūlūn, à la désobéissance, figure en effet Aḥmad ibn Aslam (p. 220).

che du pouvoir, né très probablement dans les années trente du neuvième siècle.

Un autre littérateur de l'époque, Abū Ja'far Aḥmad ibn Yūsuf al-Baghdādī al-Miṣrī, rapporte dans son livre *al-Mukāfa'a* d'autres propos d'Abū Kāmil :

> J'ai (Abū Kāmil) demandé à Sanad ibn 'Alī : qui t'a introduit auprès d'al-Ma'mūn (le calife) pour que tu sois en rapport avec lui et au nombre des savants de sa cour[14] ?

Abū Kāmil rapporte alors la longue réponse de Sanad ibn 'Alī, laquelle ne manque pas d'intérêt pour une histoire sociale de la science de l'époque.

Or Sanad ibn 'Alī est un fameux mathématicien et astronome de la génération d'al-Khwārizmī et d'al-Kindī le philosophe ; et al-Ma'mūn régnait entre 813 et 830. Ce dernier a d'ailleurs rejoint sa capitale – Bagdad – où résidait Sanad, en 819. Sanad a fait des observations astronomiques avec al-'Abbās al-Jawharī, entre autres, en 829 et en 832. Tout indique donc qu'Abū Kāmil, jeune mathématicien, a rencontré quelque part Sanad ibn 'Alī, alors mathématicien confirmé et plus âgé. En effet Sanad ibn 'Alī, jeune mathématicien sous al-Ma'mūn, avait suffisamment de prestige pour intervenir dans le conflit qui opposa les Banū Mūsā et al-Kindī (mort vers 860), sous le règne du calife al-Mutawakkil. Il devait être alors dans sa soixante-dixième année. Si donc Abū Kāmil l'a rencontré, ce ne peut être qu'avant 860. Plus jeune que Sanad ibn 'Alī d'une génération au moins, Abū Kāmil interroge donc son aîné sur sa carrière.

Cela confirmerait le témoignage précédent : Abū Kāmil est très vraisemblablement né vers le début des années trente du neuvième siècle.

Reste à savoir quand il a rédigé son livre en algèbre. Nous ne pouvons ici avancer que des conjectures. Il semble que ce livre soit bien antérieur aux années soixante-dix du neuvième siècle, avant en tout cas l'épisode de la libération et de la direction de l'arsenal : Abū Kāmil, étant donné les usages de l'époque, n'aurait sûrement pas manqué de faire référence à Aḥmad ibn Tūlūn, son bienfaiteur. Or le livre ne mentionne ni patron ni dignitaire. Il est donc vraisemblable qu'il a été rédigé à une époque où Abū Kāmil n'était pas encore proche du pouvoir.

[14] Abū Ja'far Aḥmad ibn Yūsuf al-Baghdādī al-Miṣrī, *al-Mukāfa'a*, éd. Aḥmad Amīn et 'Alī al-Jārim, Le Caire, 1941, p. 119 :
وحدَّثني شجاع بن أسلم الحاسب، قال: قلت لسَنَد بن علي: مَن كان سببُك إلى المأمون، حتى اتَّصلتَ به وكنتَ من جلسائه من العلماء؟

D'autre part, dans son *Algèbre*, Abū Kāmil cite ses sources : al-Khwārizmī et Euclide ; mais jamais Diophante. Or ce livre comprend tout un chapitre sur l'analyse indéterminée rationnelle. S'il avait connu les *Arithmétiques* de Diophante, Abū Kāmil n'aurait sûrement pas manqué de les exploiter pour enrichir son chapitre, comme il a tiré parti des *Éléments* d'Euclide dans sa rédaction d'un autre chapitre, sur les pentagones et les décagones réguliers convexes. Mais ce n'est que dans les années soixante-dix que les *Arithmétiques* de Diophante ont été traduites, par Qusṭā ibn Lūqā[15].

On peut en tout cas conjecturer sans trop de risques qu'Abū Kāmil avait pour dates 830, environ, et 900, tout au plus, et certainement pas 850 et 930 ; que cet homme du neuvième siècle est postérieur à al-Khwārizmī d'à peu près une génération, et qu'il a rédigé son livre avant 870.

Sur la formation d'Abū Kāmil, sur ses maîtres, sur ses faits, les sources historiques sont silencieuses. Les seules informations nous viennent de ses écrits, ceux qui nous sont parvenus et les titres de ceux qui n'existent plus. On sait toutefois, grâce aux témoignages déjà mentionnés, qu'il appartenait à la tradition des mathématiciens-ingénieurs. On sait également que, déjà au IX^e^ siècle, les échanges entre les mathématiciens des différentes contrées du monde islamique n'étaient pas rares ; les voyages scientifiques entre les centres du monde islamique étaient pratique courante chez les savants en tous domaines – Abū Kāmil était en effet en contact direct avec les mathématiciens de Bagdad comme Sanad ibn 'Alī ; il connaissait les traductions des *Éléments* d'Euclide ainsi que des travaux d'al-Khwārizmī, réalisées environ une génération avant lui à Bagdad. On peut donc en conclure qu'en mathématiques Abū Kāmil était formé à la géométrie euclidienne et à l'algèbre d'al-Khwārizmī, tout au moins. Mais, à plusieurs reprises, il évoque dans ses écrits, à côté de ces derniers, « les arithméticiens »[16]. Ce sont leurs travaux qu'il a voulu algébriser. Or sur ces « arithméticiens » et sur leurs travaux, nous ne savons rien. Abū Kāmil n'en cite aucun ; il ne mentionne aucun titre, mais seulement des problèmes, et notamment des problèmes indéterminés[17]. Ce silence, et le genre des problèmes, laissent l'historien perplexe et enclin aux conjectures. S'agit-il des survivances d'une tradition alexandrine ? après tout, le grec n'avait pas complètement

[15] Sur la traduction par Qusṭā ibn Lūqā des *Arithmétiques* de Diophante, voir R. Rashed, *Diophante : Les Arithmétiques, Livre IV*, vol. 3, Collection des Universités de France, Paris, 1984.

[16] Voir plus loin, p. 282 et Glossaire.

[17] Voir plus loin.

disparu, tout au moins de certains monastères coptes[18]. S'agit-il des échos de la traduction, en cours à Bagdad, des *Arithmétiques* de Diophante ? On sait en effet qu'entre Le Caire et Bagdad les relations étaient fréquentes et les échanges multiples. S'agit-il des problèmes arithmétiques qui circulaient en Orient, entre l'Inde et l'Égypte ? Il n'y a qu'une histoire sociale et culturelle, encore en chantier, qui puisse éclairer et préciser toutes ces interrogations.

À côté de sa formation mathématique, Abū Kāmil avait sans aucun doute reçu une formation linguistique et juridique de premier plan. Il suffit en effet de lire le préambule à son *Algèbre* ainsi que les titres de ses écrits pour s'en convaincre. La langue est classique et maîtrisée, et il faut une formation juridique sérieuse pour rédiger un livre sur les testaments. On sait par ailleurs que, à cette époque, la ville d'Abū Kāmil, al-Fusṭāṭ, était le foyer d'une recherche active dans les domaines juridique, linguistique et historique.

Si maintenant nous en venons à la production mathématique d'Abū Kāmil, deux traits attirent notre attention : une spécialisation sans précédent ; un projet explicitement formulé de transformer les pratiques de calcul en des sciences apodictiques. En effet, l'essentiel de la production mathématique d'Abū Kāmil se concentre dans les disciplines algébriques, théoriques et appliquées ; quant à son projet, il l'expose dans la quasi totalité de ses ouvrages. On retrouvera chez les grands algébristes qui vont succéder à Abū Kāmil ces nouveaux traits caractéristiques.

L'information la plus ancienne sur la production mathématique d'Abū Kāmil nous est parvenue consignée dans la liste établie par al-Nadīm en 377/987. Ce dernier énumère les titres suivants (reproduits ici dans un autre ordre) :

1. *L'algèbre et al-muqābala* (*Kitāb al-Jabr wa-al-muqābala*)
2. *Sur les volatiles* (*Kitāb al-Ṭayr*)
3. *Sur les deux erreurs* (*Kitāb al-Khaṭa'ayn*)
4. *La réunion et la séparation* (*Kitāb al-Jam' wa-al-tafrīq*)
5. *La mensuration des terrains* (*Kitāb al-Misāḥa wa-al-handasa*)
6. *Kitāb al-'Aṣīr*
7. *Kitāb al-Falāḥ*

[18] Pour n'évoquer qu'un seul exemple, rappelons qu'en 955, c'est-à-dire un siècle environ après Abū Kāmil, Servus ibn al-Muqaffa', pour rédiger son histoire de l'Église copte, a fait traduire les sources grecques dont il avait besoin par un diacre égyptien de Damanhūr (ville du Delta), nommé Mikhā'il ibn Budayr. Voir Georg Graf, *Geschichte der christlichen arabischen Literatur*, Studi e testi 133, Cité du Vatican, Biblioteca Apostolica Vaticana, 1947 ; éd. anastatique 1975, vol. II, p. 300 *sqq*.

8. *La clé d'al-Falāḥ* (*Kitāb Miftāḥ al-Falāḥ*)
9. *Kitāb al-Kifāya*

À cette liste, le bibliographe tardif Ḥājjī Khalīfa[19] ajoute

10. *Calcul du retour légal et des testaments* (*Ḥisāb al-dawr wa-al-wiṣāyā*)
11. *Les testaments par les racines* (*Kitāb al-wiṣāyā bi-al-judhūr*)

Comme on le voit, les quatre premiers titres traitent des disciplines algébriques. Le premier, de loin le plus important, est un traité d'algèbre (et de ses applications en arithmétique et en géométrie), et d'analyse indéterminée rationnelle. Le second traite de l'analyse indéterminée en nombres entiers du premier degré. Le troisième porte sur la règle des deux erreurs et le quatrième sur le problème classique de l'augmentation et de la diminution. Le cinquième, destiné aux débutants, entend enseigner comment résoudre par l'algèbre des problèmes de mensuration des terrains. Les deux derniers livres – 10 et 11 – qui peuvent parfaitement n'en être qu'un, dont le titre aurait été dédoublé par le copiste, portent sur l'application de l'algèbre aux questions juridiques posées par les testaments. Quant aux titres 6, 7, 8 et 9, ils sont toujours introuvables – si toutefois ils ont jamais existé – et ne suggèrent aucun contenu précis. D'ailleurs, aucun témoignage, même indirect, ne nous est parvenu à leur propos. De plus, 7 et 8 se superposent, et ne semblent pas désigner deux livres indépendants.

Venons-en à présent aux livres dont les textes arabes existent, pour en examiner l'authenticité.

2. LES ÉCRITS MATHÉMATIQUES D'ABŪ KĀMIL

2.1. *L'algèbre et al-muqābala*

Les anciens biobibliographes attribuent à Abū Kāmil un livre ainsi intitulé. D'autre part, il existe un manuscrit d'un traité d'algèbre du même Abū Kāmil (voir plus loin). S'agit-il d'un seul et même livre ? et cette attribution est-elle exacte ? Abū Kāmil lui-même écrit dans le préambule à son livre qu'il a composé un « livre en algèbre et al-muqābala » (*Kitāb al-jabr wa-al-muqābala*). Or c'est précisément le titre qui a été retenu pour son livre, et que l'on peut lire sur la première page du manuscrit. Que la

[19] Ḥājjī Khalīfa, *Kashf al-ẓunūn*, éd. M. Ş. Yaltkaya, Istanbul, 1943, vol. I, p. 663-664 ; vol. II, p. 1469-1470.

formule ait été retenue comme titre par Abū Kāmil lui-même ou par les copistes ou les anciens biobibliographes importe d'autant moins que ceux-ci sont anonymes. De plus, ce titre est bien ancien : le biobibliographe al-Nadīm le cite plus d'une fois dans son livre de 987. La première fois, dans le bref article qu'il consacre à Abū Kāmil[20] ; une seconde fois lorsqu'il traite du mathématicien al-Iṣṭakhrī (244/858-328/940)[21], qui avait commenté le livre d'Abū Kāmil ; et la troisième fois à propos d'un autre mathématicien, ʿAlī ibn Aḥmad al-ʿImrānī, qui avait lui aussi écrit un commentaire[22] – information confirmée par le biobibliographe du XIII^e^ siècle, al-Qifṭī[23]. C'est toujours sous ce titre que l'algébriste al-Samaw'al (m. 570/1174-75) le cite dans son autobiographie[24].

Ces témoignages datés montrent que le livre circulait, avec ce titre, dès la fin du IX^e^ siècle, et qu'il avait rapidement fait l'objet de deux commentaires, aujourd'hui perdus. On sait d'ailleurs que d'autres commentaires ont suivi, comme nous l'apprend le biobibliographe du XVII^e^ siècle, Ḥājjī Khalīfa. Dans un article de son livre consacré à l'algèbre, il écrit :

> Le premier qui a composé en elle est le maître Abū ʿAbd Allāh Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī ; son livre est connu et célèbre. Après lui, Abū Kāmil Shujāʿ ibn Aslam a composé son livre général (*al-shāmil, compendium*), qui est parmi les meilleurs livres en algèbre, et parmi ses meilleurs commentaires est celui composé par al-Qurashī (qui est un Andalou du XIII^e^ siècle)[25].

Le même Ḥājjī Khalīfa mentionne ce livre d'Abū Kāmil, sous le titre d'*al-Jabr wa-al-muqābala*, dont il cite le premier paragraphe du préambule[26]. Vérification faite, il s'agit bien du manuscrit qui nous est parvenu, ce qui confirme les anciens témoignages. Il rappelle d'autre part qu'Abū Kāmil a composé un autre livre, sur les testaments, qu'il a entre les mains, et c'est le même Abū Kāmil qu'il cite lorsqu'il écrit :

ألفت كتابًا معروفًا بكمال الجبر وتمامه والزيادة في أصوله، وأقمت الحجة في كتابي الثاني بالتقدمة والسبق في الجبر والمقابلة لمحمد بن موسى.

[20] Al-Nadīm, *Kitāb al-Fihrist*, p. 339.
[21] *Ibid.*, p. 340.
[22] *Ibid.*, p. 341.
[23] Al-Qifṭī, *Taʾrīkh al-ḥukamāʾ*, p. 233. Voir note 2.
[24] *Al-Bāhir en Algèbre d'As-Samaw'al*, édition, notes et introduction par Salah Ahmad et Roshdi Rashed, Damas, 1972, p. 6 (*mithl Kitāb Shujāʿ ibn Aslam fī al-jabr wa-al-muqābala*).
[25] Ḥājjī Khalīfa, *Kashf al-ẓunūn*, éd. M. Ş. Yaltkaya, p. 579.
[26] *Ibid.*, p. 1408.

> J'ai composé un livre connu pour la perfection de l'algèbre, pour son achèvement et pour le développement de ses fondements ; et j'ai établi la preuve, dans ce second livre, de la préséance et de la priorité en algèbre et *al-muqābala* de Muḥammad ibn Mūsā <al-Khwārizmī>[27].

On pourrait conclure de ces lignes, lues rapidement, qu'il existait un autre livre d'algèbre d'Abū Kāmil, intitulé « La perfection de l'algèbre, (*Kamāl al-jabr*) ». Or il n'en est rien, et une telle lecture est fautive, grammaticalement aussi bien qu'historiquement. C'est d'ailleurs une erreur de ce type qu'a commise le biobibliographe Ibn al-Akfānī (mort en 1348), lorsqu'il écrit dans son livre *Irshād al-Qāṣid*[28] : « Le parfait d'Abī Shujāʿ ibn Aslam (al-Kāmil li-Abī Shujāʿ ibn Aslam) », ou « Abū Kāmil Shujāʿ ibn Aslam ».

Tout indique donc qu'Abū Kāmil a écrit un seul traité substantiel en algèbre, et que c'est bien le traité qui nous est parvenu. En effet, en plus de la citation de Ḥājjī Khalīfa évoquée plus haut, on peut avancer trois preuves décisives : la lecture du mathématicien al-Samaw'al, la traduction latine incomplète du livre ainsi que sa traduction hébraïque (cf. plus loin).

Quant à la traduction latine incomplète, il suffit de confronter le texte latin aux parties arabes lui correspondant pour n'avoir aucun doute sur l'authenticité du texte traduit. Il en est de même pour la traduction hébraïque du livre d'Abū Kāmil.

Tous ces arguments convergent : le livre qui nous est parvenu est bien celui de l'*Algèbre* d'Abū Kāmil.

Sur le projet qui est le sien dans ce livre, Abū Kāmil s'explique à deux reprises : une première fois dans le préambule et une seconde fois dans une sorte de postface. Revenant sur sa démarche, voici ce qu'il écrit :

> J'ai montré, expliqué et éclairé ce que j'ai inscrit dans mon livre de ces problèmes, d'une explication claire, et j'ai commenté ce dont al-Khwārizmī a laissé l'explication et l'éclaircissement, par des figures géométriques, une démonstration claire et un discours convaincant. J'ai obtenu pour les problèmes que j'ai inscrits des principes utiles et rigoureux, par lesquels vous résolvez bien des problèmes qui étaient inaccessibles aux savants en arithmétique [...] [29].

Abū Kāmil ne pouvait exprimer plus clairement l'ampleur de sa tâche : il entend dans ce livre poursuivre la réalisation du projet d'al-Khwārizmī,

[27] *Ibid.*, p. 1407-1408.
[28] Dans J. J. Witkam, *De Egyptische Arts Ibn al-Akfānī (gest. 749/1348) en Zijn Indeling van de Wetenschappen*, Leiden, 1989, p. [404].
[29] Voir p. 728.

revenir aux fondements mêmes de l'algèbre et établir les démonstrations lorsqu'elles font défaut – à l'aide soit de propositions géométriques, soit d'autres preuves (algébriques). Mais ce programme l'a mené à poser des principes pour résoudre des problèmes jusque-là non résolus. Nous verrons plus loin comment Abū Kāmil a achevé son projet.

Ce livre d'Abū Kāmil nous est parvenu en un unique manuscrit. C'est le manuscrit n° 379 (nouveau numéro : 19046) de la collection Kara Muṣṭafā Paşa de la Bibliothèque Beyazit d'Istanbul.

Certains bibliographes modernes ont cru qu'il existe une autre copie du livre d'Abū Kāmil : le manuscrit n° 98 Riyāḍiyāt de la Bibliothèque Astān Quds de Meshed (Iran). Or l'examen de ce manuscrit montre qu'il s'agit là d'un apocryphe. Il contient une étude de l'équation cubique par intersection des coniques, étude engagée par les géomètres un demi-siècle au moins après Abū Kāmil. Il n'existe donc, à notre connaissance, qu'un seul manuscrit de l'*Algèbre* d'Abū Kāmil. Il fait partie d'un legs religieux consenti par le grand vizir ottoman Muṣṭafā Paşa (1634-1684). Ce dernier a apposé son sceau sur les pages 2^r, 25^r, 37^r, 60^r, 75^r ; on lit :

وقف هذا الكتاب لوجه الله الأجل، الأكرم مصطفى باشا الوزير الأعظم.

« Muṣṭafā Paşa, le grand vizir, a légué ce livre... ».

Le manuscrit est composé de 111 folios, de 24,9 cm × 17 cm, d'un papier d'une seule et même fabrication. La reliure est en carton renforcé et relativement ancienne. Le dos est en cuir brun. La numérotation des folios est récente. Quant au texte, chaque page, de 18,5 cm × 11,5 cm, contient 21 lignes en moyenne. Il est écrit en *naskhī*, distincte et soignée, à l'encre noire. Les figures sont parfois tracées à l'encre rouge.

Les seules ratures sont le fait du copiste qui a révisé sa copie sur son modèle, comme l'indiquent les ajouts en marge, selon la convention habituelle, *ṣaḥḥ*. La copie a été achevée, comme nous l'apprend le colophon, en 651 de l'hégire, c'est-à-dire en 1253 de l'ère chrétienne.

Le copiste ne se nomme pas et n'indique pas le lieu de la copie. On lit cependant au folio 36^r une glose signée du nom d'Abū Yūsuf. Cette glose est écrite avec une autre plume, mais de la même main. Mais cela ne nous avance guère, car il est impossible d'identifier la personne.

En marge du folio 42^r, on lit une glose importante, d'une autre main. Il s'agit en fait d'une « licence d'enseigner (*ijāza*) » la partie du livre d'Abū Kāmil qui va du début jusqu'à ce folio 42^r. Cette *ijāza* que donnaient les professeurs est signée d'un certain Sa'd ibn Muḥammad ibn Ja'far, et datée du Caire, 762/1361.

Il est donc clair que l'on enseignait le livre d'Abū Kāmil au Caire au XIV^e siècle, et que ce manuscrit copié en 1253 presque certainement au

Caire y est resté durant plus de deux siècles, puisqu'il s'y trouvait encore à la fin du XV^e siècle.

On peut en effet lire au folio 1^r les noms des différents propriétaires. Tout d'abord :

« Propriété de Muḥammad Sibṭ al-Māradīnī » ملك محمد سبط الماردينى

Il s'agit d'un mathématicien cairote né en 826/1423 et mort en 907/1501. Ce dernier a cédé le livre à son élève Muḥammad ibn Ḥasan al-Anṣārī en 876/1471. Après l'invasion ottomane de l'Égypte, on retrouve le manuscrit au XVII^e siècle dans la Bibliothèque du grand Vizir Muṣṭafā Paşa.

Tout indique que ce manuscrit reproduit une tradition locale – caïrote – du livre d'Abū Kāmil. Mais, comme il s'agit d'un manuscrit unique et comme nous ignorons tout du modèle sur lequel il a été copié, il nous faut discuter de son authenticité. Or plusieurs témoins attestent de l'authenticité du texte copié, et de son attribution à Abū Kāmil. Nous n'en évoquerons que quatre.

2.1.1. *Le témoignage d'al-Karajī*

La première confirmation de l'authenticité du texte copié nous vient, indirectement, du successeur le plus prestigieux d'Abū Kāmil : al-Karajī. Nous avons montré ailleurs[30] que c'est al-Karajī qui a mené le plus loin les recherches d'Abū Kāmil en algèbre et en analyse diophantienne ; et que c'est grâce à l'*Algèbre* d'Abū Kāmil et aux *Arithmétiques* de Diophante qu'al-Karajī a conçu un nouveau programme qui marquera le destin de l'algèbre : l'arithmétisation de l'algèbre. Ici, on se limite au seul chapitre de son livre *al-Fakhrī*, consacré à la théorie des équations des deux premiers degrés, pour montrer que, lorsqu'il rédigeait ce livre, il avait le traité d'Abū Kāmil sous les yeux. Il s'est également référé à l'*Algèbre* d'Abū Kāmil lors de son étude de l'analyse indéterminée.

Voici le tableau de correspondance. On notera les problèmes identiques par « id. » et les problèmes qui diffèrent seulement par les valeurs des coefficients par « p.i. » (presque identique).

[30] Voir R. Rashed, « L'arithmétisation de l'algèbre au XII^e siècle », dans *Actes du XIII^e Congrès international d'histoire des sciences*, Moscou, 1974, p. 3 –30 ; *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Collection « Sciences et philosophie arabes - Études et reprises », Paris, 1984.

Abū Kāmil, chap. II, IV	al-Karajī	Relation
II.7	III.9	p.i.
II.8	III.10	p.i.
II.9	III.11	id.
II.19	III.21	p.i.
II.20	III.22	id.
II.22	III.23	id.
II.24	III.12	id.
II.25	III.13	id.
II.26	III.14	id.
II.27	III.15	p.i.
II.28	III.16	id.
II.31	III.17	p.i.
II.35	III.18	p.i.
II.36	III.19	id.
II.37	II.34	id.
II.38	II.35	p.i.
II.39	II.36	p.i.
II.40	II.37	p.i.
II.41	II.49	p.i.
II.42	II.39	id.
II.43	II.40	p.i.
II.45	II.40	id.
II.46	II.41	id.
II.52	IV.17	id.
II.53	IV.18	id.
II.57	IV.19	id.
II.59	IV.20	id.

Abū Kāmil, chap. II, IV	al-Karajī	Relation
II.63	IV.21	id.
II.64	IV.22	id.
II.65	IV.23	id.
II.67	IV.24	id.
II.69	IV.25	p.i.
II.70	IV.26	p.i.
IV.1	II.22	id.
IV.2	II.23	id.
IV.3	II.24	p.i.
IV.10	II.27	p.i.
IV.11	II.28	id.
IV.13	II.29	id.
IV.16	II.30	p.i.
IV.17	II.31	p.i.
IV.23	IV.28	id.
IV.24	IV.32	id.
IV.25	IV.33	id.
IV.31	IV.34	id.
IV.32	IV.35	id.
IV.35	IV.36	id.
IV.36	IV.37	id.
IV.37	IV.38	id.
IV.38	IV.39	id.
IV.39	III.27	p.i.
IV.42	III.5	id.
IV.43	III.6	id.

2.1.2. *Le témoignage d'al-Samaw'al*

Ce mathématicien né à Fès et mort en Asie centrale en 1174-5 cite à trois reprises le livre d'Abū Kāmil.

Dans son livre d'algèbre, *al-Bāhir*, al-Samaw'al cite *in extenso* quelques textes empruntés à Abū Kāmil. Le premier porte sur la multiplication des signes $(10 - x)(10 - x) = 100 + x^2 - 20x$, avec une longue démonstration géométrique[31]. Le deuxième texte est un fragment de treize lignes[32], où il cite l'énoncé de la démonstration de $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$. Il suffit de confronter le texte d'al-Samaw'al à celui d'Abū Kāmil pour constater leur identité – à quelques erreurs grammaticales près, qui sont le fait du copiste. La troisième citation[33], enfin, est un résumé du texte, où il reprend l'énoncé et la démonstration de

$$\left(\frac{a+b}{a}\right)\left(\frac{a+b}{b}\right) = \frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b}.$$

Ce témoignage, qui remonte au XII^e^ siècle, ne laisse aucun doute sur l'authenticité du texte et sur l'identité de son auteur.

2.1.3. *La traduction latine*

Le fonds latin de la Bibliothèque Nationale de France (Paris) conserve un codex, déjà signalé par Michel Chasles et quelques autres : le 7377 A. C'est à partir de cette traduction que L. C. Karpinski a rédigé deux études sur l'algèbre d'Abū Kāmil[34]. Dans ce codex figurent une traduction latine partielle du traité d'Abū Kāmil, aussi bien qu'un traité anonyme : « Omnium que sunt alia sunt ex artificio hominis, alia non ... », dit « Mahamelet » par son auteur[35]. Ce dernier texte, qui n'est pas une traduction, figure dans un autre manuscrit du même fonds : le 15461.

La traduction du traité d'Abū Kāmil contenue dans le 7377 A (noté P) est la seule qui existe. L. C. Karpinski a édité plusieurs paragraphes dans

[31] *Al-Bāhir*, p. 40-41. Voir plus loin p. 292 et Note complémentaire [2].

[32] *Al-Bāhir*, p. 57. Voir plus loin p. 344 et Note complémentaire [3].

[33] *Al-Bāhir*, p. 116. Voir plus loin p. 508 et Note complémentaire [4].

[34] L. C. Karpinski, « The algebra of Abu Kamil Shoja' ben Aslam », *Bibliotheca Mathematica*, Série III, 12, 1912, p. 40-55 ; « The algebra of Abu Kamil », *American Mathematical Monthly*, XXI, 2, 1914, p. 37-48.

[35] Voir plus loin note 40.

son article de 1912 ; mais ce n'est que très récemment que J. Sesiano et R. Lorch se sont donné la peine d'éditer l'ensemble du texte[36]. Le premier a édité la partie consacrée à la théorie des équations, tandis que le second s'est occupé du chapitre sur le pentagone et le décagone. Les deux éditeurs ne s'accordent cependant ni sur l'identité du traducteur, ni sur la date de la traduction. J. Sesiano propose d'attribuer la traduction à Guillaume de Lunis (ou de Luna), alors que R. Lorch hésite entre Robert de Chester, Gérard de Crémone et même Fibonacci (notons que, de la part de ce dernier, nous ne connaissons aucune traduction). J. Sesiano pense que le manuscrit P est un autographe ; R. Lorch n'en dit rien. Dans cette situation, R. Hissette montre, à l'aide de preuves paléographiques et d'arguments philologiques[37], que P n'est sûrement pas un autographe, qu'il a été copié à la fin du XIII^e^ siècle, sinon au XIV^e^ siècle, et que le copiste a dû être confronté à des retouches, parfois difficiles à interpréter et qui portaient notamment sur des traductions doubles. Il se pourrait fort bien qu'un certain nombre de ces retouches remontent au traducteur lui-même[38]. Hissette conclut :

> Puisqu'il est désormais acquis que *P* ne peut être l'exemplaire autographe de l'auteur de la version latine de l'*al-Jabr* d'Abū Kāmil, les questions de la date et de l'attribution de cette version reviennent sur le tapis[39].

Si donc il est définitivement acquis que le traducteur ne peut pas être le copiste, et s'il est même possible, comme le suggère R. Hissette, qu'il y eût des « traductions doubles », il va falloir s'arrêter à la connaissance qu'on avait de l'algèbre d'Abū Kāmil avant la fin du XIII^e^ siècle. C'est ici qu'interviennent l'auteur anonyme du traité, dit « Mahamelet », d'une part, et Fibonacci, d'autre part.

À propos du « Mahamelet », A. Allard a montré rigoureusement que le manuscrit de Paris 15461 a été copié sur un modèle tolédan écrit aux environs de 1143 (ce modèle contient en effet un calendrier des années 1143-1159). Il a également montré que ce livre contient une référence explicite à

[36] J. Sesiano, « La version latine médiévale de l'Algèbre d'Abū Kāmil », dans M. Folkerts et J. P. Hogendijk (éd.), *Vestigia mathematica, Studies in Medieval and Early Modern Mathematics in Honour of H.L.L. Busard*, Amsterdam, 1993, p. 315-452 ; et R. Lorch, « Abū Kāmil on the Pentagon and Decagon », *ibid.*, p. 215-252.

[37] R. Hissette, « Guillaume de Luna a-t-il traduit Abū Kāmil ? », dans G. Endress et J. A. Aertsen (éd.), *Averroes and the Aristotelian Tradition*. Sources, Constitution and Reception of the Philosophy of Ibn Rushd (1126-1198). Proceedings of the Fourth Symposium Averroicum (Cologne, 1996), Leiden / Boston / Köln, 1999, p. 300-315.

[38] *Ibid.*, p. 309.

[39] *Ibid.*, p. 312.

la troisième partie de l'*Algèbre* d'Abū Kāmil[40]. Il s'ensuit nécessairement que le traité d'Abū Kāmil existait dans sa traduction latine dès le milieu du XII^e siècle. Si à présent on revient à la traduction latine transmise par P pour la confronter au texte arabe, on ne peut qu'être surpris : certaines parties du texte arabe ont été traduites littéralement, à la manière d'un Gérard de Crémone ; d'autres, en revanche, ont été rendues de façon laborieuse, avec beaucoup de fautes et d'omissions. Ces dernières ont d'ailleurs gêné les éditeurs, qui ont dû corriger la traduction grâce à l'original arabe. De son côté, R. Hissette a donné quelques exemples de variations dans le style de la traduction et dans le choix de la terminologie, auxquels on pourrait ajouter beaucoup d'autres. On se contentera ici d'évoquer quelques anomalies graves qui touchent directement la composition du texte de la traduction.

Le premier exemple est emprunté à la partie qui traite de la théorie des équations. Il s'agit du problème n° 8 (p. 339, 18 à 341, 7 de l'édition du texte arabe). La dernière méthode de solution du problème manque à la traduction. On lit d'ailleurs à cet endroit du texte latin : « Hic deficit. Scriptum est in Ebraico : "Hic deficit" »[41]. À cela s'ajoutent quelques erreurs de traduction, comme l'expression « non est ex computatione », pour rendre *'alā ghayr al-qisma allatī min 'ādat al-ḥussāb*, « ... que les arithméticiens n'ont pas l'habitude d'utiliser ».

Le deuxième exemple est du même genre, quoique l'erreur soit plus grave encore : une omission qui correspond à la fin du problème 59 et aux problèmes 60, 61, 62 (p. 451, 14 à 465, 21 du texte arabe, dans l'édition ci-après). Cette fois aussi, on lit dans une glose : « "Deficit hic", in Ebraico »[42].

Le troisième exemple concerne le chapitre sur le pentagone et le décagone. Le traducteur rend correctement les énoncés des deux problèmes qu'il numérote 13 et 14, pour ensuite s'écarter du texte arabe et donner une version fautive, sans traduire la véritable proposition 14.

Dernier exemple : le chapitre capital et original sur l'analyse indéterminée est absent de la traduction existante.

Toutes ces anomalies, ajoutées à celles qu'ont signalées les éditeurs et R. Hissette, ainsi que la présence de deux styles différents de la traduction d'un seul et même livre, amènent tout naturellement à se demander si P, ou

[40] A. Allard, *Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī. Le Calcul indien (Algorismus)*, Paris, 1992, p. XIV-XVI ; et « L'influence des mathématiques arabes dans l'Occident médiéval », dans R. Rashed (éd.), *Histoire des sciences arabes*, t. II : *Mathématiques et physique*, Paris, 1997, p. 199-229, à la p. 224.

[41] Ligne 1304 de l'édition J. Sesiano.

[42] *Ibid.*, ligne 2782.

son modèle, est une copie d'une seule traduction ou la composition de deux traductions. Cette question, ainsi que celle de l'identité du (ou des) traducteur(s) et celle de la date de la traduction, sont pour l'heure un gage d'avenir.

2.1.4. *La lecture de Fibonacci*

Le troisième témoin de la connaissance du livre d'Abū Kāmil au XII^e siècle est le *Liber Abaci* de Fibonacci (la première édition est de 1202). Il est en effet hautement vraisemblable que ce dernier disposait d'une traduction latine de l'*Algèbre* d'Abū Kāmil, peut-être même de l'une de celles qui sont à l'origine du manuscrit P.

On peut en effet commencer par vérifier que Fibonacci a emprunté à la partie du livre qu'Abū Kāmil consacre à la théorie des équations, et à elle seule, non moins d'une cinquantaine de problèmes, souvent identiquement et dans l'ordre. Beaucoup d'autres problèmes ont été empruntés à la traduction latine du livre d'al-Khwārizmī. Mais, si on compare le *Liber Abaci* à la traduction conservée dans le manuscrit P, on constate qu'il n'y a pas une correspondance textuelle formelle entre les deux. Il est vrai que Fibonacci a opté pour un style de rédaction bien différent : il regroupe la démonstration algébrique et la démonstration géométrique dans un même texte, alors qu'Abū Kāmil les exposait successivement. D'autre part, Fibonacci, auteur, reformule la traduction, en ajoutant un commentaire, et parfois d'autres problèmes que lui inspirent ceux qu'il a empruntés. Un fait significatif mérite cependant d'être considéré : on a noté qu'il manque à la traduction latine un texte de quelques pages (dans l'édition qui va suivre, 111 à 120). Ce texte correspond aux problèmes 60, 61 et 62 d'Abū Kāmil. Or ces trois problèmes n'ont pas non plus été transmis au *Liber Abaci*. Fibonacci emprunte en effet, dans l'ordre et identiquement, les problèmes ... 56, 57, 58, 59, 63, 64, 65, ... , ce qu'il n'aurait sûrement pas fait s'il avait eu accès au texte arabe. Tout cela laisse penser que la traduction latine consultée par Fibonacci, réalisée au XII^e siècle, ne contenait pas ces problèmes, et qu'elle a été reprise (avec une autre) dans P. Cette fois encore la réponse à ces questions doit attendre l'édition critique du *Liber Abaci*.

Toutes ces questions sans réponse nous empêchent de remonter de la traduction latine au manuscrit arabe. Cette traduction peut cependant nous aider dans deux cas : les sauts du même au même dans le manuscrit arabe ; les omissions d'un mot, ou plus, dans ce même texte. Elle nous permet aussi d'isoler d'éventuels ajouts.

Venons-en aux emprunts de Fibonacci à l'*Algèbre* d'Abū Kāmil.

Après la théorie des équations des deux premiers degrés et le calcul algébrique, Abū Kāmil, à l'exemple d'al-Khwārizmī, traite soixante-dix problèmes qu'il ramène aux équations déjà étudiées. Dans le *Liber Abaci*, Fibonacci consacre à son tour un chapitre à cette même étude, qu'il intitule : « Expliciunt introductiones algebre et almuchabale. Incipiunt questiones eiusdem ». Ce chapitre occupe les pages 410 à 459 de l'édition de Boncompagni de 1857. On savait depuis bien longtemps (cf. G. Libri, B. Boncompagni, G. Loria, parmi bien d'autres) que l'algèbre du *Liber Abaci* dépend de la traduction latine par Gérard de Crémone de l'*Algèbre* d'al-Khwārizmī. On savait aussi qu'elle dépend également de l'*Algèbre* d'Abū Kāmil. Ainsi, M. Levey a recensé 29 problèmes du *Liber Abaci* qui ont été empruntés à Abū Kāmil[43]. J'avais signalé dans une étude précédente qu'il faudrait presque doubler ce nombre[44].

Ici, nous ne considérons pas tous les emprunts de Fibonacci à Abū Kāmil, mais nous nous bornons au seul chapitre évoqué plus haut. Nous n'envisageons pas non plus l'impact qu'eut cet emprunt sur les mathématiques de Fibonacci, ni comment ce dernier a prolongé en latin les mathématiques arabes. Notre but, c'est d'examiner l'authenticité et la diffusion de l'œuvre algébrique d'Abū Kāmil. Nous allons voir que, sur 90 problèmes qu'il traite, Fibonacci en a emprunté 58 à Abū Kāmil – 47 identiquement, 11 presque identiquement, c'est-à-dire en modifiant la valeur des coefficients. Il a également emprunté 21 problèmes à al-Khwārizmī – 8 identiquement, 13 presque identiquement. Les 11 problèmes qui restent des 90 problèmes traités ont été conçus selon le modèle des problèmes empruntés.

[43] *The* Algebra *of Abū Kāmil, in a Commentary by Mordecai Finzi*, Hebrew Text, Translation, and Commentary with Special Reference to the Arabic Text by Martin Levey, Madison / Milwaukee / London, 1966, p. 217-220. Notons que L. C. Karpinski a souligné, dans son article de 1912, certains emprunts de Fibonacci à Abū Kāmil.

[44] R. Rashed, « Fibonacci et le prolongement latin des mathématiques arabes », *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, Anno XXIII, Numero 2, Dicembre 2003, Pisa-Roma, Istituti Editoriali e Poligrafici Internaziolali, MMV, p. 55-73.

Fibonacci		Abū Kāmil	Rapport	**Remarques**
1. $\begin{cases} x+y=10 \\ x(10-x)=\frac{1}{4}x^2 \end{cases}$	(410)			Khwārizmī (144) id.
2. $\begin{cases} x+y=10 \\ \frac{x^2}{x(10-x)}=1+\frac{1}{2} \end{cases}$	(*ibid.*)	n° 1	id.	
3. $\begin{cases} x+y=10 \\ \left(2+\frac{7}{9}\right)x^2=100 \end{cases}$	(*ibid.*)	n° 2	id.	Khwārizmī (146) id.
4. $\begin{cases} x+y=10 \\ \frac{10-x}{x}=2+\frac{1}{3} \end{cases}$	(*ibid.*)	n° 3	p.i.	Khwārizmī (148) p.i.
5. $\begin{cases} x+y=12 \\ 27(12-x)=x^2 \end{cases}$	(*ibid.*)	n° 4	p.i.	
6. $\begin{cases} x+y=10 \\ x^2+(10-x)^2=62+\frac{1}{2} \end{cases}$	(*ibid.*)			Khwārizmī (152) p.i.
7. $\left\{\frac{1}{3}x\cdot\frac{1}{4}x=x+24\right.$	(411)			Khwārizmī (154) id.
8. $\begin{cases} x+y=10 \\ \frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}=3+\frac{1}{3} \end{cases}$	(412)			Khwārizmī (162) p.i.
9. $\begin{cases} x+y=10 \\ \frac{1}{3}\left(\frac{6x}{10-x}\right)+6x=39 \end{cases}$	(*ibid.*)			Khwārizmī (164) p.i.
10. $\left\{\frac{60}{x+2}=\frac{60}{x}-\left(2+\frac{1}{2}\right)\right.$	(413)	n° 10	p.i.	
11. $\left\{\frac{60}{x+2}=\frac{20}{x}+5\right.$	(414)	n° 14	id.	

Fibonacci		Abū Kāmil	Rapport	Remarques
12. $\begin{cases} \frac{30}{x+3} = \frac{20}{x} - 4 \end{cases}$	(*ibid.*)	n° 11	p.i.	
13. $\frac{20}{x+3} = \frac{60}{x} - 26$	(415)	n° 13	id.	
14. $\frac{10}{x} = \frac{40}{x+6}$	(*ibid.*)	n° 15	id.	
15. $\begin{cases} x+y=10 \\ (10-x)^2 = 32x \end{cases}$	(*ibid.*)	n° 27	id.	
16. $\begin{cases} xy=36 \\ (10-x)(y+3)=36 \end{cases}$	(415)	n° 16	id.	
17. $\begin{cases} x+y=12 \\ \frac{x(12-x)}{(12-x)-x} = 4+\frac{1}{2} \end{cases}$	(416)			Khwārizmī (172) p.i.
18. $\begin{cases} x+y=10 \\ 10\left(\frac{10-x}{x}+10\right)=115 \end{cases}$				
19. $\begin{cases} x+y=10 \\ \left(\frac{x}{10-x}+10\right)\left(\frac{10-x}{x}+10\right) = 122+\frac{2}{3} \end{cases}$	(*ibid.*)	n° 35	id.	
20. $\begin{cases} x+y=10 \\ \left(\frac{x}{10-x}+10\right)\left(10-\frac{10-x}{x}\right) = 107+\frac{1}{3} \end{cases}$	(417)	n° 36	id.	
21. $\begin{cases} x+y=10 \\ \left(\frac{10-x}{x}+\frac{x}{10-x}+10\right)x = 114 \end{cases}$	(418)	n° 32	p.i.	
22. $\begin{cases} x+y=10 \\ \left(\frac{x}{10-x}\right)(x-(10-x)) = 24 \end{cases}$	(*ibid.*)	n° 28	id.	

Fibonacci		Abū Kāmil	Rapport	Remarques
23. $\begin{cases} x+y=10 \\ x\left(\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}\right)=34 \end{cases}$	(419)	n° 29	id.	
24. $\begin{cases} x+y=10 \\ x\left(\frac{x}{10-x}-\frac{10-x}{x}\right)=5 \end{cases}$	(*ibid.*)	n° 33	id.	
25. $\begin{cases} x+y=10 \\ \frac{x}{10-x}+10-x=5+\frac{1}{2} \end{cases}$	(*ibid.*)	n° 24	id.	
26. $\begin{cases} x+y=10 \\ \left(\frac{x}{10-x}+x\right)(10-x)=30 \end{cases}$	(420)	n° 25	id.	
27. $\begin{cases} x+y=10 \\ \frac{10-x}{x}(10-x)=9 \end{cases}$	(*ibid.*)	n° 26	id.	
28. $x^2-72=x$	(*ibid.*)			
29. $\frac{x}{x+6}=\frac{1}{3}$	(*ibid.*)			Khwārizmī (170) p.i.
30. $\left(x-\frac{1}{3}x-4\right)-\frac{1}{4}\left(x-\frac{1}{3}x-4\right)=\sqrt{x}$ ou $\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}y^2-4\right)=y$	(*ibid.*)			
31. $3x\left(x^2-\frac{1}{3}x^2\right)=x^2$	(421)	n° 20	id.	
32. $3x+4\sqrt{x^2-3x}=20$	(*ibid.*)	n° 19	id.	
33. $8x+10\sqrt{x^2-8x}=x^2+21$	(*ibid.*)	n° 23	p.i.	

Fibonacci		Abū Kāmil	Rapport	Remarques
34. $(4x)(5x) = 4x^2 + 48$	(422)			Khwārizmī (178) p.i.
35. $\frac{x^2}{13} = \frac{x}{7}$	(*ibid.*)			Khwārizmī (174) p.i.
36. $x^2(4x^2) = 20$	(*ibid.*)			Khwārizmī (176) id.
37. $x^2 \cdot \frac{x^2}{3} = 10$	(*ibid.*)			Khwārizmī (176) id.
38. $x^2 \cdot \frac{x^2}{3} = 10$	(*ibid.*)			
39. $x^2 \cdot x = 3x^2$	(*ibid.*)			Khwārizmī (176) id.
40. $\left(\frac{x^2}{3} + 1\right)\left(\frac{x^2}{4} + 2\right) = x^2 + 3$	(*ibid.*)			Khwārizmī (182) id.
41. $\left(x - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}x\right)x + 4\right)^2 = x$	(422)			Khwārizmī (180) p.i.
42. $x^2 \cdot (4x) = 7x^2$	(423)			Khwārizmī (192) p.i.
43. $\left(x - \frac{x^2}{4}\right)4x = 7x^2$	(*ibid.*)			
44. $\frac{1}{4}(x^2 - 3x) = 4x$	(*ibid.*)			
45. $x^2 - 3x = 4x$	(*ibid.*)			Khwārizmī (194) p.i.
46. $x\left(\frac{2}{3}x\right) = 5$	(*ibid.*)			Khwārizmī (192) id.
47. $\left(x - \frac{1}{3}x - 6\right)^2 = 2x$	(423)			Khwārizmī (180) p.i.
48. $5\left(x - \frac{1}{3}x - 6\right) = x$	(424)			

Fibonacci		Abū Kāmil	Rapport	Remarques
49. problème de négoce qui se ramène à l'équation $4x^2 + 104x = 108$				
50. $x\left(x + \sqrt{10}\right) = 9x$	(426)	n° 38	id.	
51. $x\left(x + \sqrt{10}\right) = 20$	(*ibid.*)	n° 38	p.i.	
52. $\sqrt{8x^2} \cdot \sqrt{3x^2} + 20 = x^4$	(427)	n° 39	id.	
53. $x\sqrt{6} \cdot x\sqrt{5} + 10x^2 + 20 = x^4$		n° 40	id.	
54. $\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{x(10-x)}{(10-x)-x} = \sqrt{6} \end{cases}$	(428)	n° 41	id.	
55. $\begin{cases} x + y = 10 \\ (10-x)^2 - \sqrt{8x^2} = 40 \end{cases}$	(429)	n° 42	id.	
56. $\begin{cases} x + y = 10 \\ x^2 = \sqrt{10} \cdot (10 - x) \end{cases}$	(430)	n° 43	id.	
57. $\begin{cases} x + y = 10 \\ \left(x^2 + 10\right)\sqrt{5} = x^4 \end{cases}$	(*ibid.*)	n° 44	id.	
58. $\begin{cases} y^2 - x^2 = 5 \\ \sqrt{10y^4} = x^4 \end{cases}$	(*ibid.*)	n° 45	id.	
59. $\begin{cases} y^2 - x^2 = 5 \\ y^2\sqrt{8} = x^2\sqrt{10} \end{cases}$	(431)			
60. $x\left(\sqrt{2x^2} + 2\right) = 30$	(433)	n° 46	id.	
61. $\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = \sqrt{5} \end{cases}$	(434)	n° 47	id.	

Fibonacci		Abū Kāmil	Rapport	Remarques
62. $\begin{cases} x+y=12 \\ \left(\frac{12-x}{x}\right)^2+\left(\frac{x}{12-x}\right)^2=4 \end{cases}$	(438)	n° 48	p.i.	
63. $\begin{cases} x+y=10 \\ \left(\frac{x}{10-x}\right)^2-\left(\frac{10-x}{x}\right)^2=2 \end{cases}$	(439)	n° 50	id.	
64. $\begin{cases} x+y=10 \\ \frac{10}{x}+\frac{10}{10-x}=5 \end{cases}$	(440)			
65. $\begin{cases} x+y=10 \\ \frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}=3 \end{cases}$	(441)			Khwārizmī (162) p.i.
66. $\left(x^2-12x-4\right)^2=8x^2$	(442)	n° 51	p.i.	
67. $2x+\sqrt{\frac{1}{2}x^2}+\sqrt{\frac{1}{3}x^2}=x^2$	(443)	n° 52	id.	
68. $2x+\sqrt{\frac{1}{2}x^2}+\sqrt{\frac{1}{3}x^2}=20$	(*ibid.*)	n° 53	id.	
69. $x^2-\left(2x+\sqrt{\frac{1}{2}x^2}+\sqrt{\frac{1}{3}x^2}\right)=20$	(444)			
70. $x^2+4x+\sqrt{\frac{1}{2}x^2}+\sqrt{\frac{2}{3}x^2}=10$	(*ibid.*)	n° 54	id.	
71. $\left(x^2+x\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right)^2=5x^2$	(*ibid.*)	n° 55	id.	
72. $\left(x^2+x\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right)^2=20$	(445)	n° 56	id.	
73. $\left(x+\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^2=4x^2$	(*ibid.*)	n° 57	id.	

Fibonacci		Abū Kāmil	Rapport	Remarques
74. $\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=20$	(*ibid.*)	n° 58	id.	
75. $(x+7)\sqrt{3x}=10x$	(*ibid.*)	n° 59	id.	
76. $\left(x+\sqrt{x}\right)\left(3x+\sqrt{3x}\right)=30x$	(446)	n° 63	id.	
77. $x+\sqrt{x}+\sqrt{2x}+\sqrt{5x^2}=10$	(*ibid.*)	n° 64	id.	
78. $\begin{cases} x^2=y^2+z^2 \\ xz=y^2 \\ yz=10 \end{cases}$	(447)	n° 65	id.	
79. $\begin{cases} x^2=y^2+z^2 \\ xz=y^2 \\ x+y+z=10 \end{cases}$	(448)	n° 66	id.	
80. $\begin{cases} x+y=10 \\ x-2\sqrt{x}=(10-x)+2\sqrt{10-x} \end{cases}$	(451)	n° 67	id.	
81. $\begin{cases} x+y=10 \\ x+2\sqrt{x}=\sqrt{x}\cdot\sqrt{10-x} \end{cases}$	(454)			
82. $\begin{cases} x+y=10 \\ \left(\frac{10}{x}\right)\left(\frac{10}{10-x}\right)=6+\frac{1}{4} \end{cases}$	(*ibid.*)	n° 68	id.	Abū Kāmil démontre que, si $x+y=a$ et $\frac{a}{x}+\frac{a}{y}=b$, on a $\frac{a}{x}\cdot\frac{a}{y}=b$.
83. $\begin{cases} x+y=10 \\ \frac{20}{x}+\frac{20}{10-x}=12+\frac{1}{2} \end{cases}$	(456)	n° 68	id.	(a une multiplication par 2)
84. $\begin{cases} x+y=10 \\ \left(\frac{20}{x}\right)\left(\frac{20}{10-x}\right)=25 \end{cases}$	(457)	n° 68	p.i.	

Fibonacci		Abū Kāmil	Rapport	Remarques
85. $\begin{cases} x+y=10 \\ \left(\frac{40}{x}\right)\left(\frac{50}{10-x}\right)=125 \end{cases}$	(458)	n° 68	id.	
86. $\begin{cases} x+y=10 \\ \left(\frac{10}{x}+\frac{10}{10-x}\right)^2=20+\frac{1}{4} \end{cases}$	(*ibid.*)	n° 69	id.	
87. $\begin{cases} x+y=10 \\ \left(\frac{10}{x}+\frac{10}{10-x}\right)^2=30 \end{cases}$	(*ibid.*)	n° 69	id.	
88. $\begin{cases} x+y=10 \\ \left(\frac{40}{x}+\frac{40}{10-x}\right)^2=625 \end{cases}$	(*ibid.*)	n° 70	id.	
89. $\begin{cases} x+y=10 \\ \left(\frac{10}{x}\right)(10-x)=20+\frac{1}{4} \end{cases}$	(*ibid.*)			
90. $(30)(30x)=30+30x$	(459)			application d'un lemme établi par Abū Kāmil dans 68

2.1.5. *La traduction hébraïque*

Il existe également une traduction hébraïque, plus complète que la traduction latine. Elle s'arrête à la page 105^{v} du manuscrit arabe existant ; il ne lui manque donc pour être complète que les folios 106^{r} à 111^{r}, non traduits. Autrement dit, à la différence de la traduction latine, elle comprend la majeure partie du chapitre sur l'analyse indéterminée. C'est très vraisemblablement en Espagne que le livre d'Abū Kāmil a été traduit en hébreu ; cette traduction fut ensuite reprise en Italie par Mordekhay Finzi, avant 1475, date du décès de ce dernier ; on peut d'ailleurs lire à propos de l'autographe de Finzi (Mantova, Biblioteca Communale, ms. Ebr. 17) :

> Finzi n'a pas traduit de l'arabe en hébreu le texte d'Abū Kāmil : il en a révisé et glosé une version hébraïque ; cette dernière a été réalisée *à partir de deux sources* : une source arabe et une source espagnole. Nous ne savons rien du traducteur de la source arabe, si ce n'est qu'il s'agit sans doute d'un juif hispanophone[45].

La première partie de cette traduction hébraïque a été rendue en allemand par Josef Weinberg[46], puis a été éditée par M. Levey à partir du manuscrit hébraïque (München 225) et rendue en anglais. Le chapitre sur l'analyse indéterminée a lui aussi été traduit en anglais sans que le texte hébraïque soit établi[47]. Il en est de même pour le chapitre sur le pentagone et le décagone[48]. La comparaison avec le texte arabe montre qu'il s'agit bien du même livre. Les écarts semblent être dus au choix du traducteur, et à la différence entre le texte arabe traduit et le texte existant du livre d'Abū Kāmil.

Ce livre d'Abū Kāmil a été amplement utilisé, que ce soit en arabe ou en latin, comme l'attestent les travaux d'al-Karaji, d'al-Samaw'al et de Fibonacci notamment.

On trouvera ici l'*editio princeps* du livre d'*Algèbre* d'Abū Kāmil, ainsi que sa première traduction intégrale.

2.2. *Sur les volatiles*

Tel est le titre qu'on peut lire dans la liste des travaux d'Abū Kāmil établie par al-Nadīm. C'est ce même titre que cite le mathématicien du XII^{e} siècle al-Samaw'al. Mais il n'existe aucun manuscrit ainsi intitulé. Par chance, al-Samaw'al a emprunté à ce livre un problème indéterminé du premier degré : acheter pour cent dirhams cent volatiles de trois espèces différentes – canards, pigeons et poulets, où un canard vaut deux dirhams, trois pigeons valent un dirham et deux poulets un dirham. Combien achète-t-on de chaque espèce avec la somme donnée ?

Une fois énoncé et résolu ce problème, al-Samaw'al écrit :

[45] T. Lévy, « L'algèbre arabe dans les textes hébraïques (II). Dans l'Italie des XV^{e} et XVI^{e} siècles, sources arabes et sources vernaculaires », *Arabic Sciences and Philosophy*, 17.1, 2007, p. 81-107, à la p. 91.

[46] Josef Weinberg, *Die Algebra des Abū Kāmil Šoǧā' ben Aslam*, München, 1935.

[47] *The* Algebra *of Abū Kāmil* (cité n. 43) ; P. Schub et M. Levey, « Indeterminate Problems of Abū Kāmil (850-930) », *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei*, Memorie, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, serie VIII, volume X, Fascicolo 2, Rome, 1970, p. 24-96.

[48] G. Sacerdote, « Il trattato del pentagono e del decagono di Abu Kámil Shogia' ben Aslam ben Muhammed », dans *Festschrift zum Achtzigsten Geburtstage Moritz Steinschneider's*, Leipzig, 1896, p. 169-194 ; H. Suter, « Die Abhandlung des Abū Kāmil Shoǧā' b. Aslam 'über das Fünfeck und Zehneck' », *Bibliotheca mathematica*, 3^{e} série, 9, 1908-9, p. 196-199.

وهذه المسألة هي الثانية من كتاب الطير لأبي كامل.

« c'est le second problème du *Livre sur les volatiles* d'Abū Kāmil »[49].

Or il existe un écrit attribué à Abū Kāmil, dont nous connaissons deux manuscrits, qui porte le titre *Ṭarā'if al-ḥisāb*, *<Problèmes> rares en arithmétique*. Mais ce titre ne figure sur aucune liste établie par les anciens biobibliographes des travaux d'Abū Kāmil. D'autre part, aucun auteur ancien n'intitule ainsi un quelconque écrit d'Abū Kāmil. Il n'en demeure pas moins que le second problème de ce livre est précisément celui que cite al-Samaw'al comme le second problème de *Kitāb al-Ṭayr, Le livre sur les volatiles*. Il n'y a donc aucun doute : ce dernier titre a été remplacé au cours de l'histoire du texte par *Ṭarā'if al-ḥisāb*. Désormais nous restituons son vrai titre au livre d'Abū Kāmil.

Dans ce traité, Abū Kāmil poursuit en quelque sorte ce même projet engagé dans certains chapitres de son livre d'*Algèbre*. Ici aussi, il entend *algébriser* un problème posé par les arithméticiens aussi bien que les procédés qu'ils ont mis en œuvre pour le résoudre. Cette algébrisation a mené Abū Kāmil à découvrir un nouveau domaine en analyse indéterminée : la résolution des problèmes indéterminés du premier degré non pas en nombres rationnels, mais en nombres entiers. Il étudie en effet des systèmes de deux équations indéterminées du premier degré en $n = 3, 4, 5$ variables. Cette recherche a été initialement provoquée par un problème de ce type ayant 2678 solutions entières. En algébrisant ainsi ces problèmes et leurs procédés de solution, Abū Kāmil leur permettait d'accéder à un statut de généralité qu'ils n'avaient connu jusque-là dans aucune tradition mathématique, transformant de ce fait les pratiques des arithméticiens en une science apodictique.

Cet écrit d'Abū Kāmil nous est parvenu en deux manuscrits :

1. Leiden Or. 199 (6), folios 50^{v} à 58^{v}. (noté A – ا)[50], sous le titre apocryphe.

Le copiste de cette collection, un certain Mas'ūd ibn Muḥammad ibn 'Alī, a marqué deux dates, 615/1218 et 608/1211. Selon toute vraisemblance, la première date – 1218 – est celle de l'achèvement de la transcription de la collection. Celle-ci est en 102 feuillets, d'une seule main, et l'écriture est *naskhī* ordinaire. Chaque page mesure 18 x 15 cm et comporte 17 lignes de 13 mots environ chacune.

[49] *Al-Bāhir*, p. 229-230. Voir Appendice.

[50] Je tiens à remercier le Professeur Jan Witkam qui a bien voulu m'envoyer une copie de ce manuscrit et me communiquer les éléments de son histoire.

Le manuscrit était entre les mains d'un certain Abū Yūsuf ibn Muḥammad ibn Maḥmūd ibn al-Khalīl en 777/1375. Il a ensuite appartenu à l'astronome Muḥammad al-Miqātī de la Grande Mosquée Beyazit à Istanbul en 940/1533. Le mathématicien et orientaliste Golius l'a acheté entre 1625 et 1629, vraisemblablement lors de son séjour dans cette ville. Sur la première page de ce manuscrit figurent les titres des treize traités que comporte la collection. Quatre d'entre eux se succèdent dans cet ordre :

1° *Problèmes en algèbre et al-muqābala* (anonyme) (*Masā'il al-jabr wa-al-muqābala*)
2° *<Les problèmes rares en arithmétique> d'Abū Kāmil* (*Ṭarā'if al-ḥisāb*)
3° *Les problèmes arithmétiques d'Abū Zayd al-Fārisī* (*al-Masā'il al-ḥisābiyya li-Abī Zayd al-Fārisī*)
4° *Commentaire des difficultés de certains postulats d'Euclide par al-Khayyām* (*Sharḥ mā ashkala min muṣādarāt Uqlīdis li-Abī al-Fatḥ al-Khayyāmī*)

Ces quatre titres ont été notés sur la première page, d'une main différente de celle du copiste et de celles des différents propriétaires. Peut-être s'agit-il de l'écriture d'un marchand de manuscrits. Quoi qu'il en soit, il se trompe lorsqu'il désigne Abū Kāmil comme al-Baṣrī (de Bassorah) au lieu d'al-Miṣrī (d'Égypte).

2. Bibliothèque Nationale de France, fonds arabe n° 4946, folios 3^{v}-16^{r} (noté B – ب)

Cette collection comprend huit manuscrits dont les quatre précédemment cités de A, et dans le même ordre. Tous ces traités mathématiques sont de la même main et transcrits sur du papier de la même fabrication, à l'encre noire, en écriture *naskhī* ordinaire. La collection comporte 87 feuillets (17 × 12 cm), le texte occupe 11 × 7 cm. Chaque page est de 15 lignes dont chacune comprend 12 mots environ. Cette collection a été acquise par la Bibliothèque Nationale entre 1884 et 1924. Elle ne porte aucune date et rien n'indique le lieu de sa transcription. On conjecture qu'elle a été constituée au seizième siècle environ.

Dans cette collection, le traité d'Abū Kāmil est sans titre. Or, lors de l'édition du traité d'al-Khayyām appartenant à A et à B, nous avons pu montrer que B a été copié sur A, et sur A uniquement[51]. Pour le texte d'al-Khayyām, le manuscrit B comporte, par rapport à A, vingt variantes dont aucune n'est distinctive ; bien au contraire : on peut aisément montrer que toutes sont des erreurs de copie. La collation du texte d'Abū Kāmil, comme

[51] R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, Paris, 1999.

celle des autres textes communs à A et à B, confirme cette conclusion. On verra dans l'apparat critique de notre édition du traité d'Abū Kāmil que les erreurs mathématiques, linguistiques etc., dans A, ont été reproduites dans B, et qu'aucune erreur propre à B ne figure dans A. La seule différence distinctive est l'absence du titre du traité dans B, alors qu'on le lit dans A. Or nous savons que ce titre est apocryphe. A-t-il été écrit après la transcription de B sur A ? et donc relativement tard ? (on a l'impression qu'il a été écrit d'une autre main). C'est la seule conjecture qui nous paraisse vraisemblable dans l'état actuel de notre connaissance.

De ce texte, on a cru pouvoir affirmer qu'il existait une traduction hébraïque, par Finzi. Récemment, T. Lévy a pu montrer qu'il n'en est rien[52]. En 1910, H. Suter[53] a donné une traduction allemande du manuscrit A, sans en effectuer une édition préalable. Cette traduction, directement à partir du manuscrit, est parfois bien libre, mais le commentaire que Suter donne du texte est intéressant. Plus récemment, A. S. Saidan[54] a publié une reproduction photographique du manuscrit A du texte d'Abū Kāmil, avec une très brève introduction et un commentaire. S. Chalhoub a ensuite donné une transcription du manuscrit sous le titre *Ṭarā'if al-ḥisāb*[55]. Nous donnons ici une édition critique de ce traité, ainsi qu'une traduction que nous voulons rigoureuse.

2.3. *La mensuration des terrains*

Ce livre est sans doute celui qui figure dans la liste d'al-Nadīm sous le titre *La mensuration et la géométrie*. Tout indique qu'il est destiné aux métreurs (c'est-à-dire aux artisans) et aux débutants. Abū Kāmil leur enseigne comment résoudre les problèmes de mensuration à l'aide de l'algèbre. Il s'agit en quelque sorte d'une extension du chapitre de l'algèbre d'al-Khwārizmī intitulé « Problèmes de mensuration », et d'un approfondissement de celui-ci. Notons d'autre part que *La mensuration et la géométrie* s'inscrit dans un genre littéraire qui connaîtra une vogue grandissante : les livres composés par les grands mathématiciens à l'intention des artisans et des débutants, où on expose les règles, mais sans les démonstrations.

[52] T. Lévy, « L'algèbre arabe dans les textes hébraïques », p. 89, n. 23 ; et 97 *sqq*.

[53] H. Suter, « Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abū Kāmil el-Miṣrī », *Bibliotheca mathematica*, 3e série, 11, 1910/11, p. 100-120.

[54] A. S. Saidan, « *Ṭarā'if al-ḥisāb* li-Abī Kāmil Shujā' ibn Aslam al-Miṣrī », *Majallat Ma'had al-Makhṭūṭāt*, 9, 1923, p. 291-320.

[55] Dans *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 12, n° 1-2, p. 237-264.

Écoutons ce qu'Abū Kāmil lui-même écrit à ce propos[56] :

أما معرفة حساب الأرضين فليس يتهيأ أن نقيم البرهان على ما أرسم منه كما أقمته على كثير من كتبي، ولو قدمت البرهان على ما أذكره منها لاجتمعت إليّ كثير مما في أقليدس، ولطال الكتاب وعسر على المتعلمين، إذ كنت إنما وضعت هذا الكتاب للمبتدئين للدخول في هذه الصناعة والمحبين لتعلمها. وإنما أروي ما أرسمه من المساحة رواية. فمن تمسك بالأبواب التي أرويها وسلك الطريق الذي أبنته صح له الجواب ونجا من الخطأ وأمن الزلل وسهل عليه معرفة البرهان. فإن أراد البرهان على ذلك وعلى ما تولد الحساب من مسائل الهندسة والمساحة والعدد وغير ذلك، فعليه بالنظر في كتاب أقليدس، فقد أحكمه غاية الإحكام وبناه بأوثق البنيان، بترتيب صحيح ونظم مستوٍ وتأليف حسن وقول برهان. فإن استوعب ما فيه وفهمه فهمًا صحيحًا لا يدخله ريب ولا يختلجه شك ولا يشوبه دنس، عرف إقامة البرهان على الهندسة والمساحة والعدد وغير ذلك من جميع الفنون.

> S'il s'agit de connaître le calcul des terrains, il ne convient pas d'établir la démonstration de ce que j'y inscris comme je l'ai établie dans beaucoup d'autres de mes livres. Si en effet j'avais établi la démonstration de ce que j'en expose, j'y aurais joint beaucoup de ce qui se trouve dans Euclide, et le livre aurait été allongé et difficile d'accès à ceux qui veulent apprendre, étant donné que j'ai composé ce livre pour les débutants, pour qu'ils abordent cet art, et pour ceux qui désirent l'apprendre. Je vais relater ce que je décris à propos de la mesure, simplement relater. Celui qui s'en tient aux procédés que je relate et prend le chemin que j'indique, parvient à la vraie réponse, se sauve de l'erreur et se garde des méprises, et il lui sera aisé de connaître la démonstration. S'il veut la démonstration à ce propos, et au sujet de ce qui ressort du calcul des problèmes de géométrie, de la mesure et des nombres, et d'autres, il lui faut examiner le livre d'Euclide, car celui-ci l'a parfaitement maîtrisée et l'a construite aussi solidement que possible, selon un ordre vrai, un arrangement régulier, une belle conception et un discours démonstratif. S'il comprend ce qu'il renferme et le saisit véritablement, de sorte qu'il n'éprouve pas d'incertitude, ne ressente aucun doute et soit exempt de toute impureté, il saura établir la démonstration en géométrie, en mesure et en nombre, et en d'autres parmi tous les arts.

On notera que les *Éléments* d'Euclide se présentent désormais comme le livre de référence et aussi comme le modèle de rédaction dans les différentes branches des mathématiques.

[56] *Bāb Misāḥat al-arāḍīn*, ms. Téhéran, Majlis Sanā, n° 2672, fol. 189-217. La copie a été achevée le lundi 8 Dhū al-qa'da 758, c'est-à-dire le 23 octobre 1357, en écriture *naskhī*.

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE I

LA THÉORIE DES ÉQUATIONS ET LA DÉMONSTRATION DES ALGORITHMES

Dans le préambule à son livre, on l'a souligné, Abū Kāmil déclare sans ambiguïté qu'al-Khwārizmī non seulement a inventé l'algèbre, mais qu'il a donné un modèle de rédaction d'un traité de cette discipline. Un livre d'algèbre devrait donc voir se succéder les chapitres suivants : la théorie des équations ; le calcul algébrique ; l'étude des problèmes que l'on peut résoudre par la théorie des équations et au moyen de ce calcul ; et, ensuite, la solution des problèmes de géométrie plane à l'aide de l'algèbre, etc.

Abū Kāmil propose donc dans son livre de marcher sur les pas de son prédécesseur, mais en allant plus loin dans chacun de ces chapitres : en enrichissant les matériaux, en explicitant les idées, en consolidant les fondements ainsi que les structures démonstratives. En théorie des équations, la traduction concrète de ce programme consiste pour l'essentiel à fonder cette théorie sur des bases géométriques solides, ce qui implique de *démontrer* les algorithmes de solution.

Tout comme son prédécesseur, Abū Kāmil commence par définir les concepts primitifs nécessaires à une théorie des équations des deux premiers degrés seulement, celles qu'il savait résoudre par radicaux. Ces termes primitifs sont : le nombre, l'inconnue appelée aussi : racine, ou chose ; son carré : *māl*. Abū Kāmil s'arrête à ces trois espèces pour la raison indiquée, alors que dans son livre il a recours à d'autres puissances de l'inconnue – jusqu'à la huitième –, au cours de son étude des équations de degré supérieur qui se ramènent au second degré. C'est la combinaison de ces termes primitifs, sous la condition que l'équation ne contienne que des expressions strictement positives et sans que soit admise l'égalité à zéro, qui donne une classification *a priori* des équations. On a donc les six équations suivantes :

$$ax^2 = bx,\ ax^2 = c,\ bx = c\ ;\ ax^2 + bx = c,\ ax^2 + c = bx,\ ax^2 = bx + c\,.$$

Selon al-Khwārizmī, l'idée fondatrice de l'algèbre, comme on l'a vu ailleurs, est celle d'une discipline à la fois apodictique et algorithmique. C'est cette double nature qui impose que les algorithmes soient démontrés.

Il ne suffit donc pas, comme dans une ancienne mathématique, de vérifier l'algorithme en montrant qu'il est satisfait pour certaines valeurs de l'inconnue, mais il faut établir par des déductions contraignantes que l'algorithme permet de déterminer l'inconnue d'une manière universelle pour une certaine classe de problème. Il ne suffit pas non plus de contrôler chaque pas de l'algorithme par le suivant : il faut démontrer l'algorithme à l'aide d'un langage mathématique autre que celui dans lequel il est écrit. Avec cette exigence, répétons-le, al-Khwārizmī rompt avec les traditions mathématiques anciennes, comme il se distingue également de ses contemporains. La démonstration ainsi mise en œuvre dans la nouvelle discipline est celle dite « par la cause », *bi-al-'illa*, c'est-à-dire la « *demonstratio potissima* » : c'est la démonstration géométrique[1].

Cette démonstration « par la cause » consiste à dériver l'algorithme des relations géométriques établies entre les éléments d'une figure intentionnellement construite pour traduire géométriquement les termes primitifs de l'algèbre ainsi que les relations qui les unissent et que l'équation décrit. Or, cette démonstration géométrique repose, dans le cas des équations quadratiques, sur une traduction elle-même géométrique des équivalences suivantes :

$$x^2 + px = q \Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q$$

$$x^2 + q = px \Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

$$x^2 = px + q \Leftrightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q.$$

Les successeurs d'al-Khwārizmī ont parfaitement saisi la nouveauté du projet et les points de rupture avec les traditions. L'étude des équations ne consiste nullement en une application des algorithmes de solution. Il faut édifier une véritable théorie, et par conséquent commencer par classer *a priori* les équations, à l'aide d'une combinatoire des termes primitifs, pour ensuite démontrer – et non pas seulement justifier – les algorithmes de solution.

[1] Voir plus loin Chapitre VII.

Les successeurs immédiats d'al-Khwārizmī se sont donc appliqués à consolider les démonstrations. Les uns, comme Ibn Turk[2], tout en procédant comme al-Khwārizmī à l'aide de la géométrie plane, s'efforçaient de resserrer la structure logique de la démonstration par un recours au raisonnement par l'absurde. Les autres, comme Thābit ibn Qurra[3], montrent l'équivalence pour les équations quadratiques entre les démonstrations des algorithmes par al-Khwārizmī et les propositions II.5 et II.6 des *Éléments*. En même temps qu'Ibn Qurra, si ce n'est avant lui, Abū Kāmil non seulement a eu recours aux *Éléments* d'Euclide, mais il s'est efforcé de multiplier les démonstrations. Ainsi, une fois démontré un algorithme à l'aide de ces propositions d'Euclide, il en donne une seconde démonstration, en recourant cette fois au calcul géométrique sur les segments et sur les aires planes. Il lui arrive d'ajouter, comme pour l'algorithme de l'équation $x^2 = bx + c$, une troisième démonstration géométrique. Plus encore, après avoir donné un algorithme pour chaque équation afin de trouver directement le carré de l'inconnue, il le démontre géométriquement.

Abū Kāmil ne se réfère pas seulement au second livre des *Éléments*, mais à d'autres livres, comme le sixième où Euclide utilise la méthode de l'application des aires. Or ce recours explicite aux *Éléments* de la part de Thābit ibn Qurra, d'Abū Kāmil et peut-être d'autres successeurs directs d'al-Khwārizmī, est bien dans la logique de ce dernier. Al-Khwārizmī en effet, on l'a montré[4], non seulement connaissait les *Éléments*, mais la connaissance qu'il en avait était essentielle à sa conception d'une science mathématique. Ainsi, en recourant explicitement aux *Éléments* et en exigeant, à la suite d'al-Khwārizmī, une *demonstratio potissima*, Thābit ibn Qurra et Abū Kāmil ont chacun à sa façon renforcé la primauté de la géométrie et fondé cette « algèbre géométrique », que certains historiens depuis Zeuthen ont cru, à tort, pouvoir trouver déjà chez Euclide et Apollonius, entre autres.

Pour résumer, al-Khwārizmī et ses successeurs, dont Abū Kāmil, savaient parfaitement que le problème de la division d'un segment de droite donné, sous une condition exprimée par l'égalité de deux aires, conduit à une équation du second degré.

Avec Abū Kāmil, on sait en outre :

[2] *Al-Ḍarūrāt fī al-muqtarināt min Kitāb al-jabr wa-al-muqābala*, éd. A. Sayili dans *Logical Necessities in Mixed Equations by 'Abd al-Ḥamīd ibn Turk and the Algebra of his Time*, Ankara, 1962.

[3] R. Rashed, « Résolution géométrique des équations du second degré », dans *Thābit ibn Qurra. Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad*, Scientia Graeco-Arabica, vol. 4, Berlin/New York, 2009, p. 153-169.

[4] R. Rashed, *Al-Khwārizmī : Le commencement de l'algèbre*, Paris, 2007.

1° qu'il est possible de revenir à la langue et à la théorie des proportions telle qu'elle est exposée dans les *Éléments* pour démontrer les algorithmes du calcul algébrique ;

2° que l'on peut procéder par la méthode de « l'application des aires » telle qu'elle intervient au sixième livre des *Éléments*, puisqu'elle équivaut à une équation du second degré.

C'est donc la lecture du livre d'Euclide, à la lumière de l'algèbre d'al-Khwārizmī, qui a permis à Ibn Qurra, et surtout à Abū Kāmil, d'élaborer l'« algèbre géométrique ».

Venons-en à présent à l'exposé par Abū Kāmil de la théorie des équations. Pour les trois équations binômes, al-Khwārizmī ne donne que la solution numérique. Abū Kāmil en revanche, dans sa démarche de consolidation et de systématisation, ajoute, même dans ce cas, une démonstration géométrique. Ainsi, pour l'équation $x^2 = px$, il représente x^2 par une aire carrée, qu'il partage ensuite en p unités planes dont chacune est une racine. Il opère cette partition grâce à un nouveau concept, celui d'unité longueur, soit u. Chaque côté de la surface carrée est égal à $p \cdot u$, et il est « racine » de l'aire carrée. Abū Kāmil n'insiste pas, on le comprend, pour les deux autres équations – $x^2 = q$ et $px = q$. Il passe ensuite aux équations quadratiques.

I. $ax^2 + bx = c$, avec $a = 1$ et $b, c \in \mathbf{Q}_+$.

Algorithme pour obtenir la racine positive :

$$\frac{b}{2} \to \left(\frac{b}{2}\right)^2 \to \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c \to \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} \to \left(\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}\right) = x.$$

Démonstration 1 : Cette démonstration s'appuie sur les *Éléments* d'Euclide.

Soit une aire carrée $\mathscr{A}(ABCD) = x^2$. Prolongeons BA jusqu'à O sur NK de sorte que $BA = AO$ (Fig. 1). Prolongeons CB jusqu'à E tel que $BE = b$. Partageons BE en deux moitiés en H ; prolongeons DA jusqu'à F et HM jusqu'à K, et complétons la figure. On a

$$\mathscr{A}(FECD) = x^2 + bx = c = EC \cdot CD = EC \cdot CB.$$

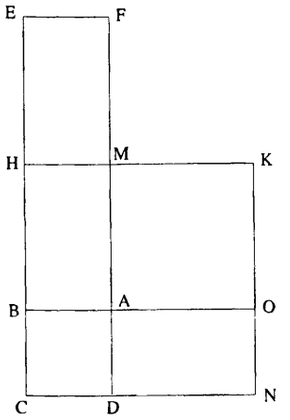


Fig. 1

Comme H est le milieu de BE, on a, d'après II.6 des *Éléments* :

(*) $EC \cdot CB + HB^2 = HC^2$;

soit

$$c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2,$$

d'où

$$x + \frac{b}{2} = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Si on remplace c par sa valeur ($c = x^2 + bx$), on constate que l'on procède par complétion du carré.

Démonstration 2 : Une fois achevée la première démonstration, Abū Kāmil poursuit : « Si tu veux que je te montre d'une manière évidente ce que j'ai dit »[5] – expression que le traducteur latin a rendue littéralement par : *ita ut oculis appareat*. Il donne une seconde démonstration :

Construisons sur la droite HC l'aire carrée $\mathscr{A}(HKNC)$. On a $HC = CN$ et $BC = CD$; d'où, si on retranche membre à membre, $BH = DN$; ce qui donne $\mathscr{A}(HA) = \mathscr{A}(AN)$. Mais $\mathscr{A}(HA) = \mathscr{A}(ME)$, donc

[5] Voir plus loin p. 256 et note 14.

(1) $\mathscr{A}(MB) + \mathscr{A}(BD) + \mathscr{A}(DO) = c.$

Or, $HB = AO$, donc

(2) $\mathscr{A}(KA) = \left(\frac{b}{2}\right)^2.$

De (1) et (2), on a

$$\text{aire}(KC) = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

d'où

$$HC = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2},$$

d'où la conclusion.

Il donne ensuite un algorithme pour déterminer directement x^2. On peut l'écrire :

$$b \to b^2 \to b^2c \to \left(\frac{b^2}{2}\right)^2, b^2c + \left(\frac{b^2}{2}\right)^2 \to \sqrt{b^2c + \left(\frac{b^2}{2}\right)^2} \to \left(\frac{b}{2} + c - \sqrt{b^2c + \left(\frac{b^2}{2}\right)^2}\right) = x^2.$$

Il démontre ensuite cet algorithme : Posons $AB = x^2$ et $BC = bx$ (Fig. 2) ; d'où $AC = c$.

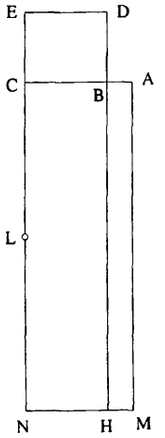


Fig. 2

Il s'agit donc de déterminer $AB = x^2$. On applique à BC l'aire donnée $(DBCE) = b^2x^2$, puis on construit sur AB le rectangle AH tel que aire $(AH) = b^2x^2$.

Soit L milieu de CN. D'après *Éléments* II.6, on a

$$NE \cdot EC + CL^2 = LE^2 ;$$

mais

$$NE \cdot EC = \left(b^2 + bx\right)bx = b^2\left(bx + x^2\right) = b^2c.$$

D'autre part

$$CL^2 = \left(\frac{b^2}{2}\right)^2,$$

d'où

$$LE^2 = b^2c + \left(\frac{b^2}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad LE = \sqrt{b^2c + \left(\frac{b^2}{2}\right)^2} ;$$

mais

$$(AC + LC) - (CB + LC) = AB = x^2 ;$$

il vient

$$(AC + LC) - (CB + LC) = (AC + LC) - LH = c + \frac{b^2}{2} - \sqrt{b^2c + \left(\frac{b^2}{2}\right)^2} = x^2 .$$

Abū Kāmil procède de même pour la solution des deux autres équations quadratiques.

II. $ax^2 + c = bx$, avec $a = 1$ et $b, c \in \mathbf{Q}_+$.

1er cas. $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c > 0$:

$$\frac{b}{2} \to \left(\frac{b}{2}\right)^2 \to \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \to \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \to \begin{cases} \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = x_1 \\ \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} = x_2 \end{cases}$$

deux racines positives.

2e cas. $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c = 0$: $\frac{b}{2} = x$, racine (double) unique.

3e cas. $\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c < 0$: impossible.

Algorithme pour obtenir directement le carré de l'inconnue :

Abū Kāmil traite seulement le cas où il y a deux racines distinctes. L'algorithme se récrit

$$b \to b^2 \to b^2 + c, \frac{b^2}{2} \to \left(\frac{b^2}{2}\right)^2 - b^2c \to \sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2 - b^2c} \to \frac{b^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2 - b^2c} \to$$

$$\to \begin{cases} \frac{b^2}{2} - c - \sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2 - b^2c} = x_1^2 \\ \frac{b^2}{2} - c + \sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2 - b^2c} = x_1^2. \end{cases}$$

Il démontre ensuite, « par la cause », les deux algorithmes.

Démonstration 1 : Abū Kāmil considère trois cas, selon que $c > x^2$, $c = x^2$ et $c < x^2$.

1) $c > x^2$; soit x^2 = aire carrée (*ABCD*) et c = aire (*ABLE*).

On a par hypothèse $BL > BD$, et aire $(ED) = x^2 + c = bx$; d'où $DL = b$. D'autre part, on vérifie que c = aire $(EB) = LB \cdot BA = LB \cdot BD$.

Soit H le milieu de LD ; donc, d'après *Éléments* II.5,

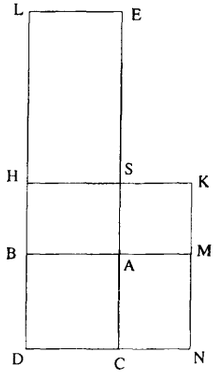


Fig. 3

(*) $LB \cdot BD + HB^2 = HD^2$.

Soit

$$c + HB^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 ;$$

d'où

$$HB = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} ;$$

donc

$$\frac{b}{2} - x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \text{ et } x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Démonstration 2 : On observe que (*) se récrit : $c + \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$; et la méthode consiste à compléter le carré, c'est-à-dire à compléter $bx - x^2$.

De nouveau, Abū Kāmil écrit : « Si tu veux que nous montrions d'une manière évidente ce que nous avons dit, alors nous faisons sur la droite HD une surface carrée, soit la surface DK »[6]. On a aire $(KD) = \left(\frac{b}{2}\right)^2$, aire (HC) = aire (HE) et aire (AH) = aire (AN), d'où

$$\text{aire } (AH) + \text{aire } (AN) + \text{aire } (AD) = \text{aire } (EB) = c$$

d'où

$$\text{aire}(AK) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c.$$

Mais, $KN = KH$ et $NM = HS$ et, par soustraction, on obtient $KM = SK$, c'est-à-dire que (AK) est un carré de côté $MK = HB$; d'où

$$HB = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c},$$

d'où

$$\frac{b}{2} - x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

[6] Voir *infra*, p. 262.

Abū Kāmil signale qu'il a démontré que l'existence de x et $x^2 < c$ implique que

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 > c.$$

2) $x^2 > c$; soit x^2 = aire ($ABCD$) et c = aire ($ABEF$). (Fig. 4)

On a par hypothèse $DB > BF$ et aire (ED) = $c + x^2 = bx$; d'où $DF = b$. D'autre part, on vérifie que c = aire (FA) = $FB \cdot AB = FB \cdot BD$.

Soir H le milieu de FD ; on a, d'après *Éléments* II.5,

(*) $FB \cdot BD + BH^2 = HD^2$;

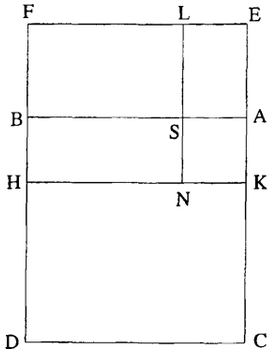


Fig. 4

soit

$$c + BH^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

d'où

$$HB = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \text{ et } x - \frac{b}{2} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

On note que (*) se récrit $c + \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2$ et que la méthode est toujours la complétion du carré – ici, la complétion de $x^2 - bx$.

Abū Kāmil donne, comme d'habitude, une deuxième démonstration, à l'aide du calcul sur les segments et les aires.

Appliquons donc à la droite FH l'aire carrée (FN). Comme $NL = NH$ ($KN = DC - \frac{b}{2} = x - \frac{b}{2}$), on a

aire (BN) = aire (NE) et aire (FN) = $\left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Mais on a par hypothèse aire (AF) = c, d'où

$$\text{aire}(AN) = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c.$$

D'autre part, on a successivement $AB = AC$, $KC = HD = HF = HN = BS$, d'où $AK = AS$. L'aire (AN) est donc carrée de côté SN, d'où

$$SN = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \text{ et } x = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}.$$

Ici également Abū Kāmil note qu'il a démontré que, si x existe et $x^2 > c$, alors on a

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 > c.$$

3) $c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$; soit l'aire carrée ($ABCD$) et l'aire du rectangle ($ABEF$) telles que

aire ($ABCD$) = x^2 et aire ($ABEF$) = c (Fig. 5).

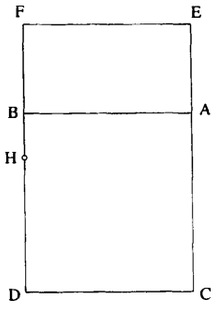


Fig. 5

On a aire ($ABCD$) + aire ($ABEF$) = $x^2 + c = bx$, d'où $DF = b$.

Soit le point H milieu de DF et supposons qu'il est entre B et D ; alors, par *Éléments* II.5, on a

$$DB \cdot BF + HB^2 = HF^2.$$

Mais $HF^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c$, donc $DB \cdot BF + HB^2 = c$, ce qui est contraire à l'hypothèse, puisque $c = AB \cdot BF = DB \cdot BF$; et, par conséquent, H ne peut pas être entre B et D.

Soit M le point qui partage DF en deux moitiés, et qu'il soit entre B et F ; par *Éléments* II.5, on a

$$DB \cdot BF + BM^2 = MF^2,$$

d'où

$$MF^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \ ;$$

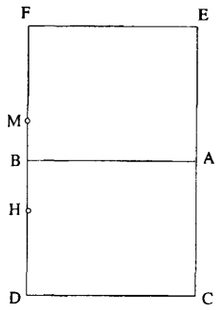


Fig. 5.2

donc $DB \cdot BF$ = aire $BE = c$, ce qui est absurde. Le point B est donc le milieu de DF et $x = \frac{b}{a}$, $x^2 = c = \left(\frac{b}{2}\right)^2$.

Démonstration de l'algorithme pour obtenir directement le carré de l'inconnue :

1) $x^2 < c$. Soit $AB = x^2$ et $BC = c$. On a (Fig. 6)

$$AC = AB + BC \text{ et } x^2 + c = bx.$$

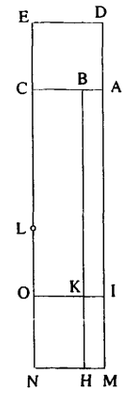


Fig. 6

Soit l'aire donnée ($ACDE$) ; on a

$$\text{aire } (ACDE) = b^2x^2 = b^2 \cdot AB \ ;$$

et supposons que aire (AH) = aire (AE) ; donc aire (AH) = $AB \cdot b^2$, d'où

$$AM = b^2 \text{ et aire } (AN) = cb^2 + b^2x^2 = b^2(c + x^2).$$

Soit maintenant aire (MO) = aire (AE) = b^2x^2 = aire (AH) ; on a

aire (KN) = aire (MO) – aire (IH) = aire (AH) – aire (IH) = aire (AK),

d'où

aire (BN) = aire (KN) + aire (KC) = aire (KA) + aire (KC) = aire (AO) ;

mais aire (BN) = $c \cdot b^2$; et, comme $ON = OI$, on a

$$ON \cdot CO = \text{aire } (BN) = c \cdot b^2.$$

Soit L le milieu de CN ; alors, par *Éléments* II.5, on a

$$CO \cdot ON + LO^2 = LC^2 \ ;$$

mais

$$LC^2 = \left(\frac{b^2}{2}\right)^2 \text{ et } ON \cdot CO = c \cdot b^2$$

d'où

$$LO = \sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2 - cb^2}.$$

Mais $LO = \frac{b^2}{2} - c - x^2$, donc $\frac{b^2}{2} - c - x^2 = \sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2 - cb^2}$.

2) $x^2 > c$. Supposons cette fois que L est entre O et N ; alors on obtient

$$LO = c + x^2 - \frac{b^2}{2} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2 - cb^2}.$$

III. $ax^2 = bx + c$, avec $a = 1$.

Algorithme pour déterminer l'inconnue :

$$\frac{b}{2} \to \left(\frac{b}{2}\right)^2 \to \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c \to \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} \to \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}.$$

Algorithme pour déterminer le carré de l'inconnue :

$$b \to b^2 \to b^2 \cdot c,$$

$$\frac{b^2}{2} \to \left(\frac{b^2}{2}\right)^2 \to \left(\frac{b^2}{2}\right)^2 + b^2c \to \sqrt{b^2c + \left(\frac{b^2}{2}\right)^2} \to \frac{b^2}{2} + c + \sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2 + b^2c}.$$

Dans le cas général, pour $a \neq 1$, on divise par a pour normaliser l'équation.

Démonstration de l'algorithme :

Démonstration 1 : Soit l'aire carrée $(ABCD) = x^2$ et l'aire rectangulaire $(AN) = bx$ (cf. Fig. 7).

On a donc $AE = b$ et aire (ED) = aire (AD) – aire (AN), soit

$$x^2 - bx = c.$$

Soit H le milieu de AE ; on a, d'après les *Éléments* II.6,

$$AB \cdot BE + EH^2 = HB^2 ;$$

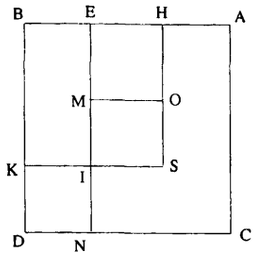


Fig. 7

mais $EH = \frac{b}{2}$, donc $c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = HB^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2$, d'où

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}.$$

Démonstration 2 : Appliquons à BH une aire carrée (HK), et soit $MI = ND$. Il est évident que $AB = DB$ et $HB = KB$; en retranchant, on a $AH = KD$. Mais $AH = EH = OM$.

D'autre part, on a $MI = NI$, d'où $MI \cdot OM = KD \cdot ND$, d'où

$$\text{aire } (MS) + \text{aire } (EK) = \text{aire } (ID) + \text{aire } (EK) = \text{aire } (ED) = c.$$

Il est aussi évident que $HB - EB = EH = IE - MI = ME$, d'où

$$\text{aire } (HM) = HE^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

On a alors

$$\text{aire } (HK) = \text{aire } (ED) + \text{aire } (HM) = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

d'où

$$x - \frac{b}{2} = \sqrt{c + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Démonstration 3 : Soit aire carrée $(ABCD) = x^2$, $AH = \frac{b}{2}$ et $DO = \frac{b}{2}$ (Fig. 8).

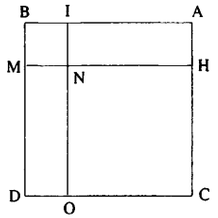


Fig. 8

On obtient immédiatement

$$\text{aire } (OB) = \text{aire } (AM) = \frac{b}{2}\, x\ ;$$

d'où

$$\text{aire } (AM) + \text{aire } (ND) + \text{aire } (NB) = bx.$$

Comme aire $(ABCD) = x^2 = c + bx$, on conclut

$$\text{aire } (HO) = c + \text{aire } (NB)\ ;$$

mais

$$\text{aire } (NB) = \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

d'où

$$\text{aire } (HO) = c + \left(\frac{b}{2}\right)^2\ ;$$

donc

$$CH = \sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}\ .$$

Mais $CH = x - \frac{b}{2}$; d'où $x = \frac{b}{2} + \sqrt{c+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$.

Démonstration de l'algorithme pour déterminer x^2 :

On pose $AB = x^2$ et $BC = c$ (Fig. 9) ; donc $AC = bx$.

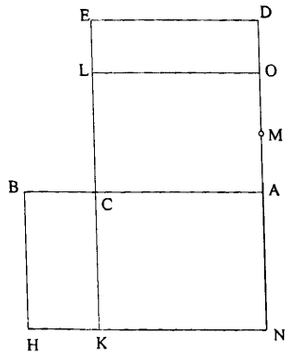


Fig. 9

Soit l'aire carrée $(ACDE)$ et aire (AH) = aire $(AE) = b^2x^2$; il est alors évident que $\frac{\text{aire}(AH)}{x^2} = \frac{b^2x^2}{x^2} = b^2$. Mais $CB = c$, d'où

$$\text{aire } (CH) = AN \cdot BC = c \cdot b^2.$$

Soit $AO = AN = b^2$, alors aire (OC) = aire (AK), donc aire (OE) = aire $(KB) = c \cdot b^2$.

Soit M le milieu de OA ; d'après *Éléments* II.6, on a

$$AD \cdot DO + OM^2 = MD^2,$$

d'où

$$AD \cdot DO = \text{aire } (OE) = c \cdot b^2 \text{ et } AM^2 = \left(\frac{b^2}{2}\right)^2,$$

d'où

$$\left(x^2 - \frac{b^2}{2}\right)^2 = MD^2 = \left(\frac{b^2}{2}\right)^2 + c \cdot b^2\ ;$$

donc

$$x^2 - \frac{b^2}{2} = \sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2 + cb^2}\ .$$

On remarque qu'Abū Kāmil, après avoir donné l'algorithme de solution pour chacune des équations, donne au moins deux démonstrations

géométriques de cet algorithme : toutes les deux utilisent la même figure et la proposition II.5 ou II.6 des *Éléments* d'Euclide. Dans la démonstration qu'il qualifie d'évidente, il se sert des propriétés du gnomon.

Abū Kāmil, après avoir exposé et démontré l'algorithme pour la racine de l'équation, donne aussi un algorithme pour le carré de cette racine. Il est obligé de le démontrer géométriquement. Sa démonstration est analogue à celle de l'algorithme pour la racine. On note qu'Abū Kāmil représente ici le carré de l'inconnue par un segment de droite.

Cette surabondance de démonstrations semble exprimer une norme essentielle à l'algèbre selon la conception d'Abū Kāmil, ainsi peut-être qu'un souci didactique.

CHAPITRE II

LE CALCUL ALGÉBRIQUE ET SES APPLICATIONS

Tout comme al-Khwārizmī, Abū Kāmil fait suivre le chapitre consacré à la théorie des équations des deux premiers degrés de deux autres, qui se succèdent dans cet ordre : le premier porte sur les calculs algébriques sur les polynômes associés à ces équations ; le second sur les transformations et les opérations algébriques pour ramener un problème donné à l'une ou l'autre des six équations canoniques. Mais cette ressemblance formelle ne doit pas nous leurrer : le pas franchi par Abū Kāmil est considérable, de même que la distance parcourue depuis al-Khwārizmī.

Al-Khwārizmī étudie en effet le calcul sur les monômes, les binômes et les trinômes associés à ces équations, ainsi que le calcul sur quelques expressions irrationnelles quadratiques. Abū Kāmil poursuit cette étude, avant d'en enrichir le contenu et d'élargir le champ du calcul algébrique. Les expressions peuvent désormais être formées de plusieurs inconnues (chose, dirham, dinar, fels, khatem, ...)[1]. Quant aux puissances algébriques, alors qu'al-Khwārizmī s'arrêtait aux trois premières, Abū Kāmil introduit des puissances supérieures selon le besoin. Ainsi, il définit les différentes puissances jusqu'à la huitième, d'une manière additive comme le fait Diophante, tout en sautant pieds joints – comme Diophante également – par dessus la septième puissance. La cinquième puissance – notons-le – est définie comme carré-carré-chose, et non pas quadrato-cube comme la nommait Diophante. Toujours à la différence d'al-Khwārizmī, pour Abū Kāmil ce ne sont pas seulement les inconnues qui peuvent être des irrationnels quadratiques, mais aussi les coefficients. Ces irrationnels quadratiques sont étudiés comme des nombres, et donc se trouvent assujettis aux lois de l'arithmétique. En un mot, Abū Kāmil inaugure une nouvelle recherche, qui sera poursuivie, amplifiée et systématisée par son successeur al-Karajī : l'étude des opérations de l'arithmétique élémentaire sur les expressions algébriques.

Le champ du calcul algébrique se trouve donc enrichi et élargi, et, d'autre part, le style même de l'exposé révèle un infléchissement. Sans aucun doute influencé par les *Éléments* d'Euclide et par sa culture

[1] Ces termes, qui désignent les inconnues, sont des noms de pièces de monnaie de l'époque.

géométrique, Abū Kāmil commence le plus souvent par un énoncé général de la propriété qu'il veut établir, ce qu'il fait ensuite à l'aide d'une ou plusieurs démonstrations. Celles-ci peuvent être menées à l'aide de la géométrie plane, ou dans les termes de la théorie des proportions.

Lorsqu'il procède à l'aide de la théorie des proportions, Abū Kāmil l'applique aussi bien aux expressions commensurables qu'aux expressions incommensurables, ou, comme l'écrit à juste titre A. Youschkevitch :

> Il ne fait pas de différence entre la théorie générale des proportions d'Eudoxe et la théorie des proportions des grandeurs commensurables, mais parle d'une manière tout à fait générale de proportions, sans distinguer entre termes commensurables et incommensurables[2].

Outre les démonstrations géométriques, non seulement Abū Kāmil a recours aux démonstrations algébriques, mais il les distingue désormais des premières. Il écrit par exemple : « la cause par la voie de l'algèbre »[3]. On remarque d'ailleurs que la démonstration algébrique est toujours liée à cette époque à la tendance à l'arithmétisation et au développement du calcul algébrique.

Pour Abū Kāmil, en effet, le calcul algébrique emporte la conviction lorsqu'on ne peut pas procéder par les moyens de la géométrie euclidienne. Mais la démarche idéale est d'adjoindre, lorsque faire se peut, aux calculs algébriques une démonstration forgée à partir de la géométrie. Inauguré par Abū Kāmil, cet état de choses se prolongera durant six siècles. Telle était la situation des mathématiciens tant qu'ils procédaient par la théorie des proportions. Il n'y rencontraient pas de difficultés particulières, puisque la structure de la géométrie classique est celle que l'on appelle à présent corps commutatif ordonné.

Des deux chapitres évoqués, le premier, relativement bref, débute par l'étude du signe du quatrième terme du produit, selon l'habitude des arithméticiens contemporains d'Abū Kāmil[4], $(a \pm b)(c \pm d)$ et $(a \pm b)(c \mp d)$, puis expose la règle des signes en général.

Abū Kāmil établit ensuite l'associativité, la commutativité et la distributivité de la multiplication, à l'aide de la géométrie :

$$a(bx) = (ab)x\ ;\ a(bx^n) = (ab)x^n\ ;\ (ax)(bx) = (ab)x^2\ ;$$

[2] A. P. Youschkevitch, *Les mathématiques arabes (VIII^e-XV^e siècles)*, Paris, 1976, p. 56.

[3] Voir plus loin p. 500.

[4] Voir plus loin p. 282.

$$(x+a)x = x^2 + ax\ ;\ (a-x)x = ax - x^2\ ;\quad \text{pour } a, b \in \mathbf{Q}_+,\ n = 2, 3.$$

Plus loin, au chapitre suivant, il établit les règles de la multiplication et de la division pour $n = 1, 2, \ldots, 8$, à l'exception de 7.

Toujours à l'aide de la géométrie, il montre que

$$a\sqrt{x} = \sqrt{a^2 x}\ ;\ a\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{a^2 xy}\ ;\ \sqrt{x} \pm \sqrt{y} = \sqrt{x + y \pm 2\sqrt{xy}}\ ,$$

racine carrée d'un nombre rationnel si $\sqrt{xy}$ ou $\sqrt{\frac{x}{y}}$ est rationnel. Il montre, à l'aide de la théorie des proportions, que $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$ et $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$.

Dans le second chapitre, il montre bien d'autres expressions, telles que

$$\left(x + \sqrt{y}\right)\left(x - \sqrt{y}\right) = x^2 - y;\ \left(\frac{x}{x^2 - y} + \sqrt{\frac{y}{\left(x^2 - y\right)^2}}\right) = 1.$$

Il y traite soixante-dix problèmes, qu'il ramène à des équations des deux premiers degrés à coefficients rationnels ou irrationnels. Il y procède par plusieurs méthodes de calcul, dont celle de la demi-somme et de la demi-différence, utilisée par les anciens mathématiciens et par Diophante. Étant donné que les calculs algébriques menés par Abū Kāmil sont souvent d'une grande complexité, nous allons transcrire et analyser ses solutions, pour mettre en évidence les nouveaux acquis et mesurer la distance parcourue depuis al-Khwārizmī. Il ne s'agit pas moins que des premiers développements du calcul sur les nombres irrationnels et, plus généralement, du calcul algébrique abstrait. Quant aux démonstrations géométriques, le lecteur pourra les lire directement dans le livre d'Abū Kāmil.

1. PROBLÈMES DES SIX PREMIERS TYPES

Le premier groupe de problèmes consiste à partager un nombre donné – 10 – en deux parties sous quelques conditions. Ces problèmes sont inspirés par le premier groupe des « Problèmes divers » d'al-Khwārizmī[5].

[5] R. Rashed, *Al-Khwārizmī : Le commencement de l'algèbre*, Paris, 2007.

– **1** – On considère le système

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ x^2 = \dfrac{3}{2}xy \end{cases}$$

On reporte $y = 10 - x$ dans la seconde équation :

$$x^2 = (10x - x^2)\frac{3}{2}$$

$$\frac{5}{2}x^2 = 15x \Rightarrow x^2 = 6x \Rightarrow x = 6 \text{ et } y = 4 ;$$

(type $ax^2 = bx$).

– **2** – On considère le système

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ 100 = \left(6 + \dfrac{1}{4}\right)x^2 \end{cases}$$

Alors

$$x = 4 ;$$

(type $ax^2 = b$).

– **3** – On considère le système

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ \dfrac{y}{x} = 4 \end{cases}$$

Alors

$$10 = 5x \text{ et } x = 2 ;$$

(type $ax = b$).

– **4** – On considère le système

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ 9y = x^2 \end{cases}$$

On a alors

$$90 - 9x = x^2$$
$$x = 6 ;$$

(type $ax^2 + bx = c$).

– **5** – On considère le système

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ xy = 21 \end{cases}$$

On a alors

$$x^2 + 21 = 10x$$

et $x = 3$ ou 7 ($y = 7$ ou 3 respectivement, le système d'équations initial est symétrique en x et y) ;

(type $x^2 + c = bx$).

– **6** – On considère le système

$$\begin{cases} x = y^2 \\ 4(x + 8) = x^2 \end{cases}$$

Alors

$$x = 8 ;$$

(type $x^2 + bx + c$).

2. PROBLÈMES DIVERS

– **7** – On considère le système

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ y^2 - x^2 = 80 \end{cases}$$

Alors $100 - 20x = 80$, d'où $x = 1$. Abū Kāmil calcule aussi l'équation en y :

$$20y - 100 = 80.$$

Il indique enfin une autre méthode

$$\left.\begin{aligned} x &= 5-u \\ y &= 5+u \\ y^2 - x^2 &= 80 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 20u = 80 \Rightarrow u = 4.$$

Il ajoute que cette méthode n'est pas connue des algébristes et qu'elle est particulièrement utile pour résoudre les équations quadratiques trinômes (elle permet de les réduire à des équations binômes par élimination du terme de degré 1 en x). C'est une méthode qu'al-Karajī appelle plus tard « la méthode de Diophante »[6]. Et il est vrai que ce dernier l'applique dans le livre I des *Arithmétiques* pour résoudre l'équation trinôme du second degré. Quand Abū Kāmil écrit que cette méthode « épargne dans beaucoup de problèmes la difficulté rencontrée lors de la division des racines en deux »[7], il signifie simplement que ce procédé permet d'éviter le recours à l'algorithme.

– **8** – On considère le système

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 4 + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Or $x^2 + y^2 = xy\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$. On a donc

$$x^2 + (10-x)^2 = \left(4 + \frac{1}{4}\right)x(10-x),$$

d'où

$$x^2 + 16 = 10x$$

et $x = 2$ ou 8 si on utilise l'algorithme.

Abū Kāmil applique ensuite la méthode de Diophante, illustrant ainsi ce qu'il avait annoncé dans le problème 7 :

[6] F. Woepcke, *Extrait du Fakhrî*, Paris, 1853, p. 66 *sqq*.

[7] Voir plus loin p. 336. Cf. les problèmes 27, 28 et 30 de Diophante d'Alexandrie, *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*, Œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, Paris, 1959.

$$\left.\begin{aligned} x &= 5-u \\ y &= 5+u \\ x^2 + y^2 &= \left(4 + \frac{1}{4}\right)xy \end{aligned}\right\} \Rightarrow 50 + 2u^2 = \left(25 - u^2\right)\left(4 + \frac{1}{4}\right).$$

Or cette dernière équation est une équation binôme, on n'a donc plus besoin de l'algorithme.

Démonstration de l'identité $x^2 + y^2 = xy\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right)$. Abū Kāmil montre d'abord que $\dfrac{A \cdot A}{A \cdot B} = \dfrac{A}{B}$. Il en déduit

$$\frac{A \cdot A + B \cdot B}{A \cdot B} = \frac{A \cdot A}{A \cdot B} + \frac{B \cdot B}{A \cdot B} = \frac{A}{B} + \frac{B}{A}.$$

Il conclut :

$$A \cdot A + B \cdot B = \left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right) \cdot A \cdot B.$$

Abū Kāmil énonce ensuite un autre lemme : $\dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{B}{A} = 1$.

Puis il résout à nouveau le problème 8. Pour appliquer les lemmes ci-dessus, il multiplie tout par x et se débarrasse ainsi du dénominateur du terme $\dfrac{10-x}{x}$ qu'il fait passer à droite. Ainsi

$$\frac{x^2}{10-x} = \left(4 + \frac{1}{4}\right)x - (10-x).$$

Puis il multiplie tout par $(10-x)$, etc.

Abū Kāmil propose une autre méthode : il pose $u = \dfrac{10-x}{x}$. Alors dans l'équation $\dfrac{x}{10-x} = \left(4 + \dfrac{1}{4}\right) - u$, il commence par se débarrasser du dénominateur $(10-x)$ en multipliant tout par $(10-x)$. Ensuite il remplace à nouveau u par sa valeur $\dfrac{10-x}{x}$, puis multiplie tout par x, etc.

Il propose enfin une autre méthode, reposant sur le lemme $\dfrac{A}{B} \cdot \dfrac{B}{A} = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=10 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=4+\dfrac{1}{4} \\ u=\dfrac{y}{x} \\ v=\dfrac{x}{y} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=10 \\ u=\dfrac{10-x}{x} \\ v=4+\dfrac{1}{4}-u \\ uv=1 \end{cases}$$

Abū Kāmil résout les deux dernières équations en u, v en reportant dans la seconde la valeur de v donnée par la première, etc.

– **9** – On considère le système

$$\begin{cases} 10=x+y \\ \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{6} \end{cases}$$

Ce problème utilise une identité analogue (au signe près) à celle démontrée dans 8 :

$$x^2-y^2=xy\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right).$$

C'est cette identité – comme celle du problème précédent – qu'Abū Kāmil nomme « la cause ». Ces démonstrations sont algébriques.

On reporte $x = 10 - y$ dans la deuxième équation du système.

$$\frac{(10-y)^2-y^2}{(10-y)y}=\frac{5}{6}$$

$$100-20y=\frac{5}{6}(10y-y^2)$$

$$100+\frac{5}{6}y^2=\left(28+\frac{1}{3}\right)y,$$

d'où, si on multiplie tout par $\frac{6}{5}$:

$$120 + y^2 = 34y$$

$$y=\frac{34\pm\sqrt{34^2-4\times120}}{2}=\frac{34\pm26}{2}=4 \text{ ou } 30.$$

–10 – Dans ce problème, les inconnues sont les nombres d'hommes dans deux groupes d'hommes. Si x désigne le nombre d'hommes dans le premier groupe, on considère le système suivant :

$$\begin{cases} xy=50 \\ (x+3)\left(y-3-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)=50 \end{cases}$$

On élimine y :

$$\frac{50}{x}-\frac{50}{x+3}=3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}.$$

Abū Kāmil forme plutôt l'équation suivante :

$$\frac{x\left(3+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)}{3}(x+3)=50.$$

Il la justifie en supposant connues x et y, et en les représentant sur la figure suivante, dont l'analyse fournit l'équation susdite.

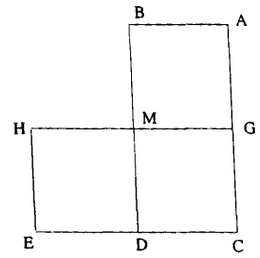


Fig. 1

On a donc

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)x(x+3)=50,$$

d'où, si on multiplie, tout par $\frac{4}{5}$:

$$x^2 + 3x = 40$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{2}.$$

L'unique racine positive est $x = 5$.

Remarque : La démonstration géométrique établit que, sous les conditions de l'énoncé, x étant supposé connu, l'équation susdite est bien une identité. Remarquons la primauté de la démonstration géométrique pour établir en premier la « cause ». Dans le problème 8, le lemme faisait aussi l'objet d'une démonstration euclidienne (calcul de segments, théorie des proportions). Mais on va observer une tendance à justifier des calculs algébriques par une cause algébrique (cf. problème 14).

– **11** – On considère le système

$$\begin{cases} xy = 10 \\ (x+4)(y-4) = 30 \end{cases}$$

On élimine y :

$$\frac{4x + (30 - 10)}{4}(x + 4) = 30.$$

Abū Kāmil démontre géométriquement la raison qui le conduit à former cette équation (comme dans le problème 10) :

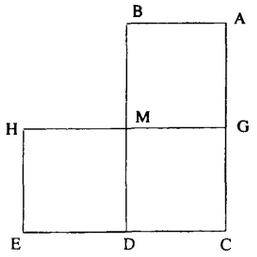


Fig. 1

Cette équation est une équation quadratique en x :

$$x^2 + 9x + 20 = 30$$

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 + 4 \cdot 10}}{2} = \frac{-9 \pm 11}{2}.$$

L'unique racine positive est 1, c'est le « nombre des hommes ».

– **12** – On considère le système

$$\begin{cases} xy = 10 \\ (x+4)(y+5) = 60 \end{cases}$$

Il s'agit de la même méthode que dans les problèmes 10 et 11. Voici la figure :

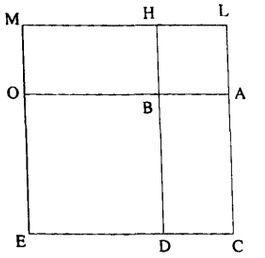


Fig. 2

$$\frac{-(x+4)5 - 10 + 60}{4} x = 10$$

$$\frac{50 - 5(x+4)}{4} x = 10$$

$$\left(7 + \frac{1}{2}\right)x - \left(1 + \frac{1}{4}\right)x^2 = 10.$$

Si on multiplie tout par $\frac{4}{5}$:

$$6x = x^2 + 8$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 8}}{2} = 3 \pm 1.$$

Abū Kāmil mentionne les deux solutions 2 et 4.

– **13** – On considère le système :

$$\begin{cases} xy = 60 \\ (x+3)(y-26) = 20 \end{cases}$$

On élimine y, et on obtient :

$$\frac{26x - (60-20)}{3}(x+3) = 20.$$

Dans tous ces problèmes depuis le 10, on peut penser que l'équation formulée par Abū Kāmil, immédiatement justifiée par une démonstration géométrique, était aussi l'aboutissement d'un raisonnement qui devait être familier à celui qui *pratiquait* alors les mathématiques, à savoir : j'enlève 26 dirhams à chacun des premiers, je rends (60 – 20) dirhams de ce que j'obtiens ainsi, et je répartis le reste entre les trois hommes supplémentaires. La somme qu'obtient chacun, multipliée par le nombre total de mes hommes, doit être égale à 20.

La nouveauté n'est donc pas tant de savoir traduire un tel énoncé en une équation, ni de savoir résoudre une telle équation quadratique, mais bien de faire d'une équation l'objet d'une science, d'abord géométrique (l'équation étant suivie d'une démonstration géométrique). À la démonstration géométrique va bientôt succéder une vraie démonstration algébrique (avec l'introduction du dinar au problème 14).

Revenons au problème 13. La figure est :

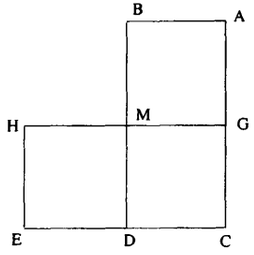


Fig. 1

On a

$$\left[\left(8+\frac{2}{3}\right)x - \left(13+\frac{1}{3}\right)\right](x+3) = 20$$

$$\left(8+\frac{2}{3}\right)x^2 + \left(12+\frac{2}{3}\right)x = 60,$$

d'où, si on multiplie tout par $\frac{3}{26}$:

$$x^2 + \left(1+\frac{12}{26}\right)x = 6 + \frac{24}{26}$$

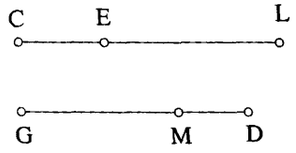
$$x = -\frac{19}{26} \pm \sqrt{\frac{13}{26} + \frac{23}{676} + 6 + \frac{24}{26}} = -\frac{19}{26} \pm \sqrt{7 + \frac{11}{26} + \frac{23}{676}}.$$

L'unique racine positive est égale à 2.

Suite à cela, Abū Kāmil revient au problème 10 et donne une nouvelle démonstration. On se dirige peu à peu vers une démonstration algébrique, sans encore l'atteindre puisque l'on ne sort pas du cadre euclidien de la théorie des proportions. Abū Kāmil démontre l'identité

$$b\left(\frac{a}{b} - \frac{a}{c}\right)c = a(c-b)$$

au moyen des lignes suivantes :



Au moyen de cette identité, on ramène en effet le problème 10 à l'équation

$$50 \cdot 3 = x\left(\frac{50}{x} - \frac{50}{x+3}\right)(x+3).$$

– **14** – On considère le système

$$\begin{cases} xy = 20 \\ (x+2)(y+5) = 60 \end{cases}$$

À présent, la méthode est vraiment algébrique : Abū Kāmil appelle x la *chose* et y le *dinar*. Tout recours à la géométrie est ici évité. On commence par développer la seconde équation :

$$xy + 10 + 5x + 2y = 60.$$

On élimine xy au moyen de la première équation $xy = 20$:

$$5x + 2y = 30.$$

On obtient ainsi une valeur $y = 15 - \frac{5}{2}x$ que l'on reporte dans la première équation ; d'où une équation quadratique

$$6x = x^2 + 8$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 8}}{2} = 3 \pm 1.$$

– **15** – On considère le système

$$\begin{cases} xy = 10 \\ (x+6)y = 40 \end{cases}$$

Première méthode : $x = 10 \cdot \frac{6}{40 - 10} = 2.$

Deuxième méthode : $\frac{x}{x+6} = \frac{10}{40} \Rightarrow x = \frac{1}{4}(x+6) \Rightarrow x = 2.$

Ici également, la méthode est algébrique.

– **16** – x représente le « nombre de robes prises par l'un d'eux ». Le problème consiste alors en l'équation :

$$3 + \frac{36}{x} = \frac{36}{10 - x}.$$

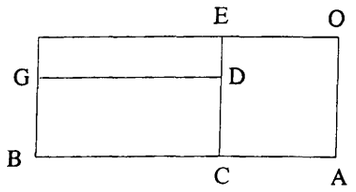


Fig. 4

Abū Kāmil fait à nouveau appel à une figure pour justifier l'équation suivante :

$$\left(\frac{72 + 3x}{10} - 3\right)x = 36.$$

En multipliant cette équation quadratique par $\left(3 + \frac{1}{3}\right)$, on trouve

$$x^2 + 14x = 120.$$

Les racines sont (–20) et 6.

Autre méthode : Soit y la valeur d'une des robes prises par l'un d'eux. Le problème est alors équivalent au système d'équations suivant, de même forme que ceux rencontrés dans les problèmes précédents :

$$\begin{cases} xy = 36 \\ (10 - x)(y + 3) = 36 \end{cases}$$

En éliminant xy de la seconde équation au moyen de la première, on obtient une équation linéaire en x et y, qui donne immédiatement une valeur de y :

$$y = \frac{72 + 3x}{10} - 3.$$

On reporte cette valeur dans l'équation $xy = 36$, et on continue comme ci-dessus, toujours par une méthode algébrique. Il en est ainsi dans la plupart des problèmes suivants.

– **17** – On considère le système

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{6x}{10 - x} = 56 - 6x \end{cases}$$

$$\frac{6x}{10 - x} = 168 - 18x$$

$$1680 + 18\,x^2 = 354\,x.$$

Si on multiplie par $\frac{1}{2\cdot 9}$:

$$x^2+93+\frac{1}{3}=\left(19+\frac{2}{3}\right)x.$$

L'unique racine positive est 8.

– **18** – On considère l'équation

$$\left(x^2\left(1-\frac{1}{3}\right)-2\right)^2=x^2+24.$$

Première méthode : On pose $y=x^2$, il faut résoudre l'équation quadratique en y, par l'algorithme.

Deuxième méthode : On pose $x^2=y^2-24$. Alors

$$\left(\left(y^2-24\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)-2\right)^2=y^2$$

$$\left(\frac{2}{3}y^2-18\right)^2=y^2.$$

Abū Kāmil dit que

$$\frac{2}{3}y^2-18=y,$$

équation dont la seule racine positive est $y=6$. Alors $y^2=36$ et $x^2=36-24=12$.

– **19** – On considère l'équation

$$3x+4\sqrt{x^2-3x}=20.$$

Alors

$$\sqrt{x^2-3x}=\frac{1}{4}(20-3x).$$

On met tout au carré :

$$x^2-3x=\left(5-\frac{3}{4}x\right)^2.$$

On multiplie cette équation quadratique par $\left(2+\frac{2}{7}\right)$ pour la normaliser :

$$x^2+\left(10+\frac{2}{7}\right)x=57+\frac{1}{7}$$

$$x=-5-\frac{1}{7}\pm\sqrt{26+\frac{3}{7}+\frac{1}{7\cdot 7}+57+\frac{1}{7}}=-5-\frac{1}{7}\pm\left(9+\frac{1}{7}\right).$$

L'unique racine positive est 4.

Autre méthode : On pose $y^2=x^2-3x$, puis on élimine x. En remplaçant le radical par y dans l'équation initiale, on obtient une équation linéaire en x et y, qui donne immédiatement $3x=20-4y$. On déduit de cette dernière équation la valeur de x^2 en fonction de y :

$$x^2=\left(6+\frac{2}{3}-\left(1+\frac{1}{3}\right)y\right)^2.$$

Ces valeurs de $3x$ et de x^2, reportées dans l'équation $y^2=x^2-3x$, donnent finalement :

$$y^2=24+\frac{4}{9}+y^2\left(1+\frac{7}{9}\right)-\left(13+\frac{7}{9}\right)y.$$

On résout cette équation, $y=2$, $x=4$.

– **20** – On considère l'équation

$$\frac{2}{3}x^2\cdot 3x=x^2.$$

On multiplie tout par $\frac{3}{2}$ et on divise par x^2 :

$$3x=\frac{3}{2}.$$

Alors $x=\frac{1}{2}$.

Autre méthode (due à un certain Abū Yūsuf) : On pose $y = x^2$. Alors

$$\frac{2}{3}y \cdot 3\sqrt{y} = y$$

$$\sqrt{4y^3} = y$$

$$y = \frac{1}{4}.$$

– **21** – On considère l'équation

$$\frac{2}{3}x^2 \cdot 3\sqrt{\frac{2}{3}x^2} = x^2$$

$$3\sqrt{\frac{2}{3}x^2} = \frac{3}{2}$$

$$x^2 = \frac{3}{8}.$$

Autre méthode, très probablement du même Abū Yūsuf : On pose $y = x^2$.

$$\frac{2}{3}y \cdot 3\sqrt{\frac{2}{3}y} = y$$

$$\sqrt{\frac{8}{3}y^3} = y$$

$$y = \frac{3}{8}.$$

– **22** – On considère l'équation

$$3x + 2\sqrt{x^2 - 3x} = x^2$$

$$2\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 - 3x.$$

En divisant tout par le radical puis en mettant chacun des deux membres au carré, on obtient

$$x^2 - 3x = 4.$$

Abū Kāmil ne détaille pas la résolution de cette équation

$$x^2 = 16.$$

Notons que l'équation initiale admet aussi les racines $x = 0$ et $x = 3$ qui annulent le radical.

– **23** – On considère l'équation

$$3x + 4\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 + 4.$$

On pose $y^2 = x^2 - 3x$. L'équation devient alors

$$4y - 4 = y^2.$$

Elle a pour solution $y^2 = 4$, et $x^2 - 3x = 4$ a pour solution $x^2 = 16$ (Abū Kāmil ne détaille pas la résolution de ces deux équations quadratiques).

– **24** – On considère l'équation

$$\frac{10 - x}{x} + x = 5 + \frac{1}{2}.$$

Alors

$$(*) \qquad \frac{10 - x}{x} = 5 + \frac{1}{2} - x$$

et, si on multiplie tout par x :

$$10 - x = \left(5 + \frac{1}{2}\right)x - x^2,$$

équation quadratique dont Abū Kāmil ne détaille pas la résolution (on a $x = 4$).

– **25** – On considère l'équation

$$\left(\frac{10 - x}{x} + 10 - x\right)x = 30.$$

Alors

$$10 + 9x - x^2 = 30$$

$$x = 4.$$

Abū Kāmil ne détaille pas la résolution de l'équation finale.

– **26** – On considère l'équation

$$\frac{10-x}{x}(10-x) = 9.$$

Abū Kāmil, plutôt que de développer le carré $(10 - x)^2$, introduit un procédé d'addition membre à membre que l'on représentera désormais sous la forme :

$$\frac{10-x}{x}(10-x) = 9$$
$$\frac{10-x}{x}x = 10-x$$
$$\frac{10-x}{x}10 = 19-x.$$

Finalement

$$\frac{10-x}{x} = 1 + \frac{9}{10} - \frac{1}{10}x.$$

Abū Kāmil renvoie, pour la suite, au problème 24, équation (*).

$$x = 4.$$

– **27** – On considère l'équation

$$\left[\left(\frac{10-x}{x}\right)^2\right]x = 32.$$

Par associativité de la multiplication,

$$(10-x)\frac{10-x}{x} = 32.$$

Abū Kāmil s'est ainsi ramené à une équation de même forme que dans 26. Il ne prend même pas la peine de la résoudre. On aurait :

$$\frac{10-x}{x}10 = 42-x$$

$$x^2 - 52x + 100 = 0.$$

La racine du discriminant est $\sqrt{2304} = 48$ et $x = 2$ ou 50. Comme l'énoncé du problème implique que $x < 10$, on a $x = 2$.

– **28** – On considère l'équation

$$\frac{10-x}{x}((10-x)-x) = 24.$$

Abū Kāmil effectue l'addition membre à membre :

$$\frac{10-x}{x}(10-2x) = 24$$
$$\frac{10-x}{x}2x = 20-2x$$
$$\frac{10-x}{x}10 = 44-2x.$$

Donc

$$\frac{10-x}{x} = 4 + \frac{2}{5} - \frac{1}{5}x.$$

On la résout comme l'équation (*) du problème 24, et $x = 2$.

– **29** – On considère l'équation

$$\left(\frac{10-x}{x} + \frac{x}{10-x}\right)(10-x) = 34.$$

Abū Kāmil effectue l'addition membre à membre :

$$\frac{10-x}{x}(10-x) = 34-x$$
$$\frac{10-x}{x}x = 10-x$$
$$\frac{10-x}{x}10 = 44-2x.$$

C'est la même équation que l'équation finale du problème 28, mais Abū Kāmil détaille une étape supplémentaire :

$$10 - x = \left(4 + \frac{2}{5}\right)x - \frac{1}{5}x^2,$$

équation quadratique dont l'unique racine positive est $x = 2$.

Autre méthode :

$$\begin{cases} (y+z)t = 34 \\ y = \dfrac{t}{10-t} \\ z = \dfrac{10-t}{t} \end{cases} \qquad t = 10 - x$$

$$\begin{cases} (y+z)t = 34 \\ y(10-t) = t \\ zt = 10 - t \end{cases}$$

On élimine z entre la première et la dernière équation, on obtient

$$yt = 34 - (10 - t).$$

On effectue l'addition membre à membre :

$$\begin{array}{l} yt = 34 - (10 - t) \\ \underline{y(10-t) = t} \\ 10y = 24 + 2t. \end{array}$$

On reporte la valeur de y ainsi obtenue dans l'équation $y = \dfrac{t}{10-t}$ pour éliminer y :

$$\frac{t}{10-t} = 2 + \frac{2}{5} + \frac{1}{5}t \ ;$$

d'où, si on multiplie tout par $(10 - t)$, une équation quadratique dont Abū Kāmil ne détaille pas la résolution, et $t = 8$.

Remarque : Avec la première méthode, Abū Kāmil résout l'équation

$$\left(\frac{10-x}{x} + \frac{x}{10-x}\right)(10 - x) = 34,$$

tandis qu'avec la deuxième méthode, il résout en fait

$$\left(\frac{10-t}{t} + \frac{t}{10-t}\right)t = 34.$$

– **30** – On considère l'équation

$$\left(\frac{10-x}{x} + 10\right)x = 46.$$

Si on multiplie tout par x :

$$10 - x = 46 - 10x,$$

équation linéaire dont la solution est $x = 4$.

– **31** – On considère l'équation

$$\left(\frac{10-x}{x} + 10\right)(10 - x) = 69.$$

Abū Kāmil effectue l'addition membre à membre :

$$\begin{array}{l} \dfrac{10-x}{x}(10-x) = 69 - (100 - 10x) \\ \underline{\dfrac{10-x}{x}x = 10 - x} \\ \dfrac{10-x}{x}10 = 9x - 21 \ ; \end{array}$$

d'où

$$(*) \qquad 10 - x = \frac{9}{10}x^2 - \left(2 + \frac{1}{10}\right)x,$$

équation quadratique qu'Abū Kāmil résout en détail, et $x = 4$.

Autre méthode :

$$\begin{cases}(y+10)(10-x)=69\\ y=\dfrac{10-x}{x}\end{cases}$$

Addition membre à membre :

$$\begin{aligned}&y(10-x)=69-10(10-x)\\ &\underline{yx=10-x}\\ &10y=9x-21.\end{aligned}$$

On reporte la valeur de y ainsi obtenue dans l'équation $y=\dfrac{10-x}{x}$ afin d'éliminer y :

$$\frac{10-x}{x}=\frac{9}{10}x-\left(2+\frac{1}{10}\right).$$

Cette équation n'est autre que l'équation (*) ci-dessus.

– **32** – On considère l'équation

$$\left(\frac{10-x}{x}+\frac{x}{10-x}+10\right)x=73.$$

Alors

$$\frac{x}{10-x}x=73-10x-(10-x).$$

Si on additionne membre à membre avec

$$\frac{x}{10-x}(10-x)=x,$$

on obtient

$$\frac{x}{10-x}10=63-8x,$$

d'où

$$x=\left(6+\frac{3}{10}-\frac{4}{5}x\right)(10-x),$$

équation quadratique résolue de manière détaillée par Abū Kāmil, et $x=6$.

– **33** – On considère l'équation

$$\left(\frac{x}{10-x}-\frac{10-x}{x}\right)x=5.$$

Abū Kāmil appelle « complément des deux quotients » la quantité

$$2\frac{10-x}{x}.$$

En effet,

$$2\frac{10-x}{x}=\left(\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}\right)-\left(\frac{x}{10-x}-\frac{10-x}{x}\right).$$

Il ajoute cette quantité de part et d'autre dans l'équation initiale et obtient :

$$\left(\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}\right)x=25-2x.$$

On résout cette équation comme dans 29.

Autre méthode :

$$\begin{cases}(y-z)x=5\\ y=\dfrac{x}{10-x}\\ z=\dfrac{10-x}{x}\end{cases}$$

Ici, le « complément » est $2z$; or $2zx=20-2x$, donc

$$\begin{cases}(y+z)x=25-2x\\ y=\dfrac{x}{10-x}\\ z=\dfrac{10-x}{x}\end{cases}$$

On résout cela comme dans 29.

Remarque : Dans ce problème 33, Abū Kāmil ne prend pas la peine de résoudre le problème complètement, il se contente d'avoir ramené la

question à une équation de même forme que dans le problème 29. On aurait

$$\left(\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}\right)x = 25-2x$$

$$\frac{x}{10-x}x = 15-x.$$

Si on multiplie tout par $(10-x)$, on obtient une équation qui est en fait linéaire en x, d'où $x = 6$.

– **34** – On considère l'équation

$$\left(\frac{10-x}{x}+(10-x)\right)\left(\frac{x}{10-x}+x\right) = 35.$$

Abū Kāmil développe le produit terme à terme et obtient (en rappelant que $\frac{10-x}{x}\cdot\frac{x}{10-x}=1$) :

$$11 + 10x - x^2 = 35.$$

Il ne prend pas la peine de détailler la résolution de cette équation, $x = 6$ ou 4 (l'équation initiale est symétrique en x et $(10-x)$).

Autre méthode :

$$\begin{cases} (y+x)(z+10-x) = 35 \\ y = \dfrac{x}{10-x} \\ z = \dfrac{10-x}{x} \end{cases}$$

Il développe le produit et obtient une expression dans laquelle apparaissent $y(10-x)$, zx et yz, respectivement égaux à x, $10-x$ et 1. On retrouve alors l'équation quadratique

$$11 + 10x - x^2 = 35.$$

– **35** – On considère l'équation

$$\left(\frac{10-x}{x}+10\right)\left(\frac{x}{10-x}+10\right) = 122+\frac{2}{3}.$$

Abū Kāmil propose une troisième méthode, différente de celles abordées dans les problèmes précédents. Il introduit deux inconnues y et z, mais sans les nommer (alors que dans les problèmes précédents, il les nommait le *dinar* et le *fels*). Pour les distinguer, il les décrit qualitativement (la « plus grande », la « plus petite »).

$$\begin{cases} (y+10)(z+10) = 122+\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{10-x}{x} \\ z = \dfrac{x}{10-x} \end{cases}$$

Si on développe le produit, la première équation devient :

$$yz + 10(y+z) + 100 = 122 + \frac{2}{3}.$$

Si on remplace yz par sa valeur, 1, dans celle-ci, on obtient finalement

$$\begin{cases} y+z = 2+\dfrac{1}{6} \\ y = \dfrac{10-x}{x} \\ z = \dfrac{x}{10-x} \end{cases}$$

Abū Kāmil ne détaille pas la résolution de ce système qui suit le modèle des problèmes précédents.

– **36** – Comme dans le problème précédent, il y a deux inconnues qui sont désignées par « plus grande » et « plus petite » :

$$\begin{cases} (10+y)(10-z) = 107+\dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{10-x}{x} \\ z = \dfrac{x}{10-x} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} y - z = \dfrac{5}{6} \\ y = \dfrac{10 - x}{x} \\ z = \dfrac{x}{10 - x} \end{cases}$$

Système facile à résoudre si on s'inspire du problème 33.

– **37** – Soit $x = \dfrac{10}{2 + \sqrt{3}}$. Abū Kāmil veut éliminer le radical du dénominateur.

$$2x + \sqrt{3x^2} = 10$$

$$\sqrt{3x^2} = 10 - 2x.$$

Si on met au carré chaque membre, on a

$$3x^2 = 100 + 4x^2 - 40x.$$

Mais cette mise au carré introduit des solutions superflues. Pour les reconnaître ultérieurement, retenons que l'on doit aussi avoir $10 - 2x > 0$.

$$x^2 + 100 = 40x$$
$$x = 20 \pm \sqrt{300.}$$

Abū Kāmil ne donne que la racine $20 - \sqrt{300}$ qui est bien la solution du problème (en effet l'autre racine de l'équation quadratique ne vérifie pas la condition $10 - 2x > 0$).

Ce problème n'est pas anodin, car à partir du problème suivant, Abū Kāmil considère des équations à coefficients irrationnels.

– **38** – On considère l'équation

$$x^2\left(x^2 + \sqrt{10}\right) = 9x^2.$$

Changement de variable $y = x^2$.

$$y^2 + y\sqrt{10} = 9y.$$

Cette équation est une équation binôme contenant un coefficient irrationnel.

$$y = 9 - \sqrt{10}.$$

– **39** – On considère l'équation

$$\sqrt{8x^2} \cdot \sqrt{3x^2} + 20 = x^4.$$

Changement de variable $y = x^2$.

$$y\sqrt{24} + 20 = y^2.$$

C'est une équation trinôme avec un coefficient irrationnel :

$$y\sqrt{6} + \sqrt{26}.$$

– **40** – On considère l'équation

$$x\sqrt{6} \cdot x\sqrt{5} + 10x^2 + 20 = x^4.$$

Changement de variable $y = x^2$.

$$\sqrt{6y} \cdot \sqrt{5y} + 10y + 20 = y^2$$

$$\left(10 + \sqrt{30}\right)y + 20 = y^2$$

$$y = 5 + \sqrt{7,5} + \sqrt{\left(5 + \sqrt{7,5}\right)^2 + 20} = 5 + \sqrt{7,5} + \sqrt{52,5 + \sqrt{750}}.$$

– **41** – On considère l'équation

$$\frac{x(10 - x)}{10 - 2x} = \sqrt{6}.$$

Si on multiplie tout par $(10 - 2x)$:

$$\sqrt{600} - \sqrt{24x^2} = 10x - x^2,$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{600}+x^2=\left(10+\sqrt{24}\right)x,$$

équation quadratique ayant deux coefficients irrationnels.

$$x=5+\sqrt{6}-\sqrt{\left(5+\sqrt{6}\right)^2-\sqrt{600}}=5+\sqrt{6}-\sqrt{31}.$$

– **42** – On considère l'équation

$$(10-x)^2-\sqrt{8x^2}=40,$$

c'est-à-dire

$$60+x^2=\left(20+\sqrt{8}\right)x$$

$$x=10+\sqrt{2}-\sqrt{\left(10+\sqrt{2}\right)^2-60}=10+\sqrt{2}-\sqrt{42+\sqrt{800}}.$$

Autre méthode : On échange x et $(10-x)$.

$$x^2-(10-x)\sqrt{8}=40$$

$$x^2+x\sqrt{8}=40+\sqrt{800}$$

$$x=-\sqrt{2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(40+\sqrt{800}\right)}=\sqrt{42+\sqrt{800}}-\sqrt{2}.$$

– **43** – On considère l'équation

$$x^2=\sqrt{10}(10-x)$$

$$x=-\sqrt{2,5}+\sqrt{2,5+\sqrt{1000}}.$$

– **44** – On considère l'équation

$$\left(x^2+10\right)\sqrt{5}=x^4.$$

On pose $y=x^2$.

$$(y+10)\sqrt{5}=y^2$$

$$\sqrt{500}+y\sqrt{5}=y^2$$

$$y=\sqrt{1+\frac{1}{4}}+\sqrt{\left(\sqrt{1+\frac{1}{4}}\right)^2+\sqrt{500}}.$$

– **45** – On considère le système

$$\begin{cases}y^2-x^2=5\\ \sqrt{10y^4}=x^4\end{cases}$$

On introduit une troisième inconnue t ; le problème est ainsi réduit au système suivant :

$$\begin{cases}y^2=t\\ x^2=t-5\\ \sqrt{10y^4}=x^4\end{cases}$$

On élimine x et y :

$$\left(10+\sqrt{10}\right)t=25+t^2$$

$$t=5+\sqrt{2,5}+\sqrt{\left(5+\sqrt{2,5}\right)^2-25}.$$

Finalement,

$$y^2=5+\sqrt{2,5}+\sqrt{2,5+\sqrt{250}}$$

$$x^2=\sqrt{2,5}+\sqrt{2,5+\sqrt{250}}.$$

– **46** – On considère l'équation

$$\left(\sqrt{2x^2}+2\right)x=30,$$

c'est-à-dire (si on divise tout par $\sqrt{2}$)

$$x^2+\sqrt{2x}=\sqrt{450}$$

$$x=-\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{450}}.$$

– **47** – On considère l'équation (symétrique en x et $(10-x)$) :

$$\frac{x}{10-x}+\frac{10-x}{x}=\sqrt{5}.$$

Alors

$$x^2+(10-x)^2=\sqrt{5}x(10-x),$$

c'est-à-dire

$$100+\left(2+\sqrt{5}\right)x^2=\left(20+\sqrt{500}\right)x.$$

Il faut tout multiplier par $\left(\sqrt{5}-2\right)$ pour normaliser, car

$$\frac{1}{2+\sqrt{5}}=\sqrt{5}-2$$

(cf. problème 37). Alors

$$\sqrt{50000}-200+x^2=10x$$

$$x=5\pm\sqrt{225-\sqrt{50000}}.$$

Si x est l'une des deux racines, $(10-x)$ est l'autre.

Autre méthode : On pose $u=\dfrac{10-x}{x}$ et $v=\dfrac{x}{10-x}$.

$$\begin{cases}u+v=\sqrt{5}\\ uv=1\end{cases}$$

Alors

$$\sqrt{5}u-u^2=1$$

$$u=\sqrt{1+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}.$$

On a donc

$$\sqrt{1+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}=\frac{10-x}{x},$$

soit

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{4}x^2}=10-\frac{1}{2}x.$$

On met au carré chacun des deux membres et on obtient une équation quadratique

$$x^2+10x=100$$

$$x=-5\pm\sqrt{125}.$$

Seule la racine positive nous intéresse ici : $-5+\sqrt{125}$. L'autre « partie de dix » est $10-x=15-\sqrt{125}$.

Remarque : Ici les deux méthodes conduisent à deux expressions différentes du même nombre irrationnel :

$$5+\sqrt{225-\sqrt{50000}}=-5+\sqrt{125}.$$

Abū Kāmil pouvait sûrement vérifier cette égalité au moyen de la théorie du livre X des *Éléments* d'Euclide.

Autre méthode : On pose $y=\dfrac{10-x}{x}$.

$$\begin{cases}yx=10-x\\ \dfrac{x}{10-x}=\sqrt{5}-y\end{cases}$$

En multipliant la seconde équation par $(10-x)$, puis en y remplaçant yx par sa valeur $(10-x)$, on obtient

$$\begin{cases}yx=10-x\\ x+10y=(10-x)+\sqrt{500}-x\sqrt{5}\end{cases}$$

La deuxième équation donne alors une valeur de y linéaire en x,

$$y=1+\sqrt{5}-x\left(\frac{1}{5}+\sqrt{\frac{1}{20}}\right),$$

valeur que l'on reporte dans la première équation pour obtenir

$$x(1+\sqrt{5})-x^2\left(\frac{1}{5}+\sqrt{\frac{1}{20}}\right)=10-x.$$

Il faut tout multiplier par $\left(\sqrt{500}-20\right)$ pour normaliser car

$$\left(\sqrt{500}-20\right)\left(\frac{1}{5}+\sqrt{\frac{1}{20}}\right)=1.$$

Alors

$$10x=x^2+\sqrt{50000}-200$$

$$x=5\pm\sqrt{225-\sqrt{50000}}.$$

– **48** – On considère l'équation

$$\left(\frac{10-x}{x}\right)^2+\left(\frac{x}{10-x}\right)^2=3.$$

Abū Kāmil ramène ce problème au précédent en observant que, si cette équation est vérifiée, alors :

$$\left(\frac{10-x}{x}+\frac{x}{10-x}\right)^2=3+2\frac{10-x}{x}\cdot\frac{x}{10-x}=5,$$

donc

$$\frac{10-x}{x}+\frac{x}{10-x}=\sqrt{5}.$$

– **49** – On pose $u=\frac{x}{10-x}$ et $v=\frac{10-x}{x}$. Abū Kāmil appelle v, « quotient du plus petit par le plus grand », la « chose ».

$$\begin{cases}uv=1\\u-v=\frac{5}{6}\end{cases}$$

Multiplions la deuxième équation par v :

$$\begin{cases}uv=1\\uv=\frac{5}{6}v+v^2\end{cases}$$

En comparant les deux valeurs de uv obtenues, on a :

$$1=\frac{5}{6}v+v^2,$$

équation quadratique qu'Abū Kāmil ne prend pas la peine de résoudre.

– **50** – On pose $u=\frac{x}{10-x}$ et $v=\frac{10-x}{x}$. Si v est le « quotient du plus petit par le plus grand », on a $v<u$.

$$\begin{cases}uv=1\\u^2-v^2=2\end{cases}$$

En multipliant la seconde équation par v^2, on a $u^2v^2=v^4+2v^2$. Comparons cette valeur de u^2v^2 à celle issue de la première équation, on a :

$$1=v^4+2v^2$$

$$v^2=-1+\sqrt{2}$$

$$v=\sqrt{\sqrt{2}-1}$$

$$10-x=x\sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

On pourrait écrire

$$x=\frac{10}{1+\sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

et utiliser des conjugués pour faire disparaître les radicaux du dénominateur, mais Abū Kāmil, comme à son habitude, résout à cet effet une équation quadratique (comme dans le problème 37) :

$$(10-x)^2=x^2\left(\sqrt{2}-1\right).$$

On multiplie tout par $\left(1+\sqrt{12}\right)$ car

$$\left(1+\sqrt{12}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)=1.$$

Alors

$$100+\sqrt{5000}+x^2=\left(20+\sqrt{200}\right)x$$

$$x=10+\sqrt{50}-\sqrt{150+\sqrt{20000}-100-\sqrt{5000}}=$$
$$=10+\sqrt{50}-\sqrt{50+\sqrt{5000}}$$

(l'autre racine est supérieure à 10, ce qui l'élimine d'emblée puisque x doit être une « partie de dix »).

Remarque : Là encore, Abū Kāmil aurait pu calculer $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$, comme dans le problème 37, au moyen d'une équation quadratique. Le fait qu'il ne le fasse pas dans ce cas, ni dans tous les cas simples qui lui ressemblent, laisse penser qu'il avait reconnu la formule

$$\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=a^2-b$$

ou bien

$$\left(\frac{a}{a^2-b}+\sqrt{\frac{b}{\left(a^2-b\right)^2}}\right)\left(a-\sqrt{b}\right)=1.$$

Autre méthode : On pose plutôt $s=\frac{x^2}{(10-x)^2}$ et $t=\frac{(10-x)^2}{x^2}$.

$$\begin{cases} st=1 \\ s-t=2 \end{cases}$$

Alors $t=\sqrt{2}-1$, d'où $(10-x)^2=x^2\left(\sqrt{2}-1\right)$, etc.

– **51** – On considère l'équation

$$\left[x^2-(2x+10)\right]^2=8x^2.$$

Abū Kāmil en déduit

$$x^2-2x-10=x\sqrt{8},$$

c'est-à-dire

$$x^2=x\left(2+\sqrt{8}\right)+10$$

dont l'unique racine positive est $1+\sqrt{2}+\sqrt{13+\sqrt{8}}$. Mais l'équation de l'énoncé est de degré 4 et a deux autres racines, solutions de

(*) $\quad x^2-2x-10=-x\sqrt{8}$

$$x=1-\sqrt{2}\pm\sqrt{13-\sqrt{8}}.$$

Or $1-\sqrt{2}+\sqrt{13-\sqrt{8}}>0$; cette solution aurait donc dû être mentionnée par Abū Kāmil. Remarquons toutefois que, pour cette valeur de x, on a

$$x^2-(2x+10)<0\ ;$$

on ne peut donc pas dire « tu ôtes d'un carré ses deux racines plus dix dirhams »[8]. Cette situation intéressante montre que, dans tout problème, l'énoncé dans sa formulation même implique certaines inéquations (conditions de signe) qu'il faudrait toujours ajouter à notre paraphrase mathématique si l'on voulait être exhaustif. Dans ce problème, la première phrase de l'énoncé implique la condition de positivité $x^2-(2x+10)>0$, qui exclut la racine positive de (*).

– **52** – On considère l'équation

$$2x+\sqrt{\frac{1}{2}x^2}+\sqrt{\frac{1}{3}x^2}=x^2,$$

alors

$$x=2+\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{1}{3}}$$
$$x^2=4+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sqrt{8}+\sqrt{5+\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

– **53** – On considère l'équation

(*) $\quad 2x+\sqrt{\frac{1}{2}x^2}+\sqrt{\frac{1}{3}x^2}=20.$

[8] Voir plus loin, p. 438.

Abū Kāmil isole les deux radicaux puis met chaque membre au carré :

$$(**) \qquad \left(\sqrt{\frac{1}{2}x^2}+\sqrt{\frac{1}{3}x^2}\right)^2=(20-2x)^2,$$

c'est-à-dire

$$80x=400+\left(3+\frac{1}{6}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)x^2,$$

équation quadratique qu'Abū Kāmil ne prend pas la peine de résoudre. Cette équation a deux racines positives, mais l'une est superflue, introduite lors de la mise au carré ((*) n'a qu'une seule racine positive, (**) en a deux).

– **54** – On considère l'équation

$$x^2+4x+\sqrt{\frac{1}{2}x^2}+\sqrt{\frac{2}{3}x^2}=10.$$

Abū Kāmil ne résout même pas ce problème.

– **55** – On considère l'équation

$$x^2+x\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=x\sqrt{5}.$$

$$x=\sqrt{5}-1-\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x^2=6+\frac{1}{2}+\sqrt{2}-\sqrt{20}-\sqrt{10}.$$

– **56** – On considère l'équation

$$x^2+x\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{20}.$$

L'unique racine positive est

$$x=-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{8}}+\sqrt{\frac{3}{8}+\sqrt{\frac{1}{8}+\sqrt{20}}}.$$

– **57** – On considère l'équation

$$\left(x^2+\sqrt{\frac{1}{2}x^2}\right)^2=4x^2.$$

Première méthode : On pose $y=x^2$.

$$\left(y+\sqrt{\frac{1}{2}y}\right)^2=4y.$$

On développe et on isole le radical :

$$\sqrt{2y^3}=\left(3+\frac{1}{2}\right)y-y^2.$$

On met chaque membre au carré, on obtient l'équation quadratique

$$9y=y^2+12+\frac{1}{4}$$

$$y=4+\frac{1}{2}\pm\sqrt{20+\frac{1}{4}-12-\frac{1}{4}}=4+\frac{1}{2}\pm\sqrt{8}.$$

Abū Kāmil ne garde que la racine $4+\frac{1}{2}-\sqrt{8}$, l'autre est en effet superflue puisqu'elle est supérieure à $3+\frac{1}{2}$ et rend donc $3+\frac{1}{2}y-y^2$ négatif contrairement à l'assertion $\sqrt{2y^3}=\left(3+\frac{1}{2}\right)y-y^2$. Notons qu'Abū Kāmil a besoin ici des puissances x^3, x^4. Il introduit la multiplication de ces puissances :

$$x^2=x\cdot x\ ;\ x^3=x\cdot x^2\ ;\ x^4=x^2\cdot x^2\ ;\ x^6=x^3\cdot x^3.$$

Tout indique cependant qu'il possède les règles de la multiplication et de la division des puissances d'une manière générale. Il ne donne ici que ce dont il a besoin.

Deuxième méthode :

$$x^2+\sqrt{\frac{1}{2}x}=2x$$

$$x = 2 - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x^2 = 4 + \frac{1}{2} - \sqrt{8}.$$

Troisième méthode : On pose $2y^2 = x^2$.

$$(2y^2 + y)^2 = 8y^2.$$

On développe et on divise tout par 4 :

$$y^4 + y^3 = y^2\left(1 + \frac{3}{4}\right)$$

$$y^2 + y = 1 + \frac{3}{4}$$

$$y = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} + \sqrt{2}$$

$$y^2 = \frac{1}{4} + 2 - \sqrt{2}$$

$$x^2 = 4 + \frac{1}{2} - \sqrt{8}.$$

– **58** – On considère l'équation

$$\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 20$$

$$x = -\sqrt{\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{3}{2} + 20 - \sqrt{6}}}$$

(en effet $\left(\sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{3}{2}}$).

– **59** – On considère l'équation

$$(y + 7)\sqrt{3y} = 10y.$$

On développe et on divise tout par $\sqrt{3}$:

$$y + \sqrt{49} = \sqrt{\left(33 + \frac{1}{3}\right)y}.$$

On met au carré chaque membre :

$$y^2 + 49 + \sqrt{196y^2} = \left(33 + \frac{1}{3}\right)y,$$

c'est-à-dire

$$y^2 + 49 = \left(19 + \frac{1}{3}\right)y$$

$$y = 9 + \frac{2}{3} \pm \sqrt{44 + \frac{4}{9}} = 9 + \frac{2}{3} \pm \left(6 + \frac{2}{3}\right) = 3 \text{ ou } \left(16 + \frac{1}{3}\right).$$

Abū Kāmil donne ces deux racines.

Autre méthode : On pose $y = \frac{1}{3}Y^2$.

$$\left(\frac{1}{3}Y^2 + 7\right)Y = \left(3 + \frac{1}{3}\right)Y^2.$$

On multiplie par 3 et on divise par Y :

$$Y^2 + 21 = 10Y$$

$$Y = 3 \text{ ou } 7$$

$$y = 3 \text{ ou } \left(16 + \frac{1}{3}\right).$$

– **60** – On considère l'équation

$$\left(x^2 + \sqrt{3x^2}\right)\sqrt{2x^2} = 4x^2.$$

Posons $y = x^2$.

$$\left(y+\sqrt{3y}\right)\sqrt{2y} = 4y$$

$$\sqrt{2y^3} = 4y - y\sqrt{6}$$

$$\sqrt{2y} = 4 - \sqrt{6}.$$

On met chaque membre au carré et on trouve une équation binôme en y, d'où

$$y = 11 - 4\sqrt{6},$$

Autre méthode, à partir de l'équation binôme en y :

$$22y^2 - 2y^3 = 8\sqrt{6y^4}.$$

On élimine le radical en mettant chaque membre au carré :

$$484y^4 + 4y^6 - 88y^5 = 384y^4.$$

On divise tout par $4y^4$:

$$y^2 + 25 = 22y$$

$$y = 11 \pm 4\sqrt{6}.$$

La racine $4 + 4\sqrt{6}$ est superflue. Comme toujours, Abū Kāmil se contente de donner la racine $11 - 4\sqrt{6}$ et néglige d'expliquer ce point.

Remarque : Abū Kāmil décrit le terme $-88y^5$ de deux manières différentes : « moins quatre-vingt-huit cubes multipliés par un *carré* » et « moins quatre-vingt-huit *carrés-carrés* multipliés par une chose »[9].

Autre méthode : On pose $x^2 = \frac{1}{2}Y^2$.

$$\left(\frac{1}{2}Y^2 + \sqrt{\frac{3}{2}Y^2}\right)Y = 2Y^2.$$

C'est une équation binôme,

[9] Voir plus loin p. 484.

$$Y = 4 - \sqrt{6}$$

$$Y^2 = 22 - 8\sqrt{6}$$

$$x^2 = 11 - 4\sqrt{6}.$$

Mais on peut aussi, comme Abū Kāmil, chercher à éliminer le radical dans l'équation binôme en écrivant

$$\sqrt{\frac{3}{2}Y^4} = 2Y^2 - \frac{1}{2}Y^3,$$

puis en mettant au carré chaque membre, d'où une équation trinôme

$$8Y^5 = Y^6 + 10Y^4$$

$$Y = 4 \pm \sqrt{6}$$

$$Y^2 = 22 \pm 8\sqrt{6}$$

$$x^2 = 11 \pm 4\sqrt{6}.$$

Ici encore il y a une racine superflue $11 + 4\sqrt{6}$ qu'Abū Kāmil tait sans explication.

– **61** – On considère l'équation

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}x^2} + 3\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3}x^2} + 2\right) = 20.$$

On pose $y = x^2$, on remplace et on développe le produit.

$$\sqrt{3y} + \sqrt{2y} = 14 - \sqrt{\frac{1}{6}y^2}.$$

On met au carré chaque membre.

$$5y + \sqrt{24y^2} = 196 + \frac{1}{6}y^2 - \sqrt{\left(130 + \frac{2}{3}\right)y^2}.$$

On multiplie tout par six :

$$\left(30+\sqrt{864}+\sqrt{4704}\right)y = y^2+1176.$$

C'est une équation quadratique ayant un coefficient irrationnel *trinôme* (de la forme $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}$).

$$y = 15+\sqrt{216}+\sqrt{1176}\pm\sqrt{1617+\sqrt{1058400}+\sqrt{1016064}+\sqrt{194400}-1176}.$$

Abū Kāmil donne seulement celle des deux racines contenant le radical affecté du signe moins. L'autre est superflue.

Autre méthode : À partir de

$$5y+\sqrt{24y^2}+\sqrt{\left(130+\frac{2}{3}\right)y^2} = 196+\frac{1}{6}y^2,$$

on peut remarquer que

$$\sqrt{24}+\sqrt{130+\frac{2}{3}} = \sqrt{266+\frac{2}{3}}.$$

On se ramène ainsi à une équation quadratique plus classique.

Autre méthode : On pose $x^2 = 2Y^2$. On remplace et on développe le produit. On obtient l'équation quadratique

$$Y^2\sqrt{\frac{2}{3}}+\left(2+\sqrt{6}\right)Y = 14.$$

On normalise :

$$Y^2+\left(3+\sqrt{6}\right)Y = \sqrt{294}$$

$$Y = -\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{3+\frac{3}{4}+\sqrt{13+\frac{1}{2}+\sqrt{294}}}.$$

Or

$$\sqrt{294}+\sqrt{13+\frac{1}{2}} = \sqrt{433+\frac{1}{2}},$$

donc

$$Y = -\frac{3}{2}-\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{3+\frac{3}{4}+\sqrt{433+\frac{1}{2}}}.$$

Abū Kāmil ne conduit pas le calcul plus loin. On remarque toutefois que cette méthode ne conduit qu'à une seule racine, et permet de montrer que la racine la plus grande obtenue par la première méthode est donc superflue (rendant négative l'expression $14-\sqrt{\frac{1}{6}y^2}$ qu'Abū Kāmil a carrée pour éliminer les radicaux).

– **62** – On considère l'équation

$$\frac{x^2\sqrt{10}}{2+\sqrt{3}} = x^2-10.$$

On pose $y = x^2$. Or Abū Kāmil parvient à la solution en résolvant une équation quadratique :

$$\frac{\sqrt{10}}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{40}-\sqrt{30}.$$

Alors

$$\frac{y\sqrt{10}}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{40y^2}-\sqrt{30y^2}\ ;$$

pour justifier cette inférence, Abū Kāmil utilise un lemme affirmant que $\left(\frac{a}{b}\right)c = \frac{ac}{b}$ et ce pour a, b, c de n'importe quelle espèce – nombres, choses, carrés, etc. Finalement

$$y\left(\sqrt{40}-\sqrt{30}\right) = y-10.$$

On met chaque membre au carré. On obtient l'équation quadratique

$$100+y^2\left(\sqrt{4800}-69\right) = 20y.$$

On multiplie tout par $1+\frac{30}{39}+\sqrt{3+\frac{237}{1521}}$ qui est l'inverse de $\sqrt{4800}-69$, et on trouve :

$$y^2+176+\frac{36}{39}+\sqrt{31558+\frac{282}{1521}} = y\left(35+\frac{15}{39}+\sqrt{1262+\frac{498}{1521}}\right)$$

$$y = 17 + \frac{27}{39} + \sqrt{315 + \frac{885}{1521}} + \sqrt{628 + \frac{912}{1521} + \sqrt{395130 + \frac{2057670}{2313441} - \left(176 + \frac{36}{39} + \sqrt{31558 + \frac{282}{1521}}\right)}}$$
$$= 17 + \frac{27}{39} + \sqrt{315 + \frac{885}{1521}} + \sqrt{451 + \frac{1029}{1521} + \sqrt{395130 + \frac{2057670}{2313441} - \sqrt{31558 + \frac{282}{1521}}}}.$$

Cette équation quadratique a cependant une autre racine positive, mais plus petite que 10, et qui n'est donc pas solution de l'équation initiale $\frac{y\sqrt{10}}{2+\sqrt{3}} = y - 10$.

– **63** – On considère l'équation

$$\left(x + \sqrt{x}\right)\left(3x + \sqrt{3x}\right) = 30x.$$

On développe le produit et on divise tout par x.

$$3x + \sqrt{3} + \sqrt{9x} + \sqrt{3x} = 30.$$

On isole certains termes et on met au carré chaque membre :

$$\left(\sqrt{9x} + \sqrt{3x}\right)^2 = \left(30 - 3x - \sqrt{3}\right)^2.$$

On développe et on obtient l'équation quadratique suivante, dont Abū Kāmil ne détaille pas la résolution :

$$192x = 903 + 9x^2 - \sqrt{10800}.$$

Il faut remarquer cependant que cette équation quadratique a deux racines positives, alors que l'équation initiale n'en a qu'une seule, que l'on aurait pu obtenir directement en posant $y = \sqrt{x}$; car alors

$$3y^2 + \left(\sqrt{9} + \sqrt{3}\right)y = 30 - \sqrt{3}.$$

– **64** – On considère l'équation

$$x + \sqrt{x} + \sqrt{2x} + \sqrt{5x^2} = 10.$$

On isole certains termes et l'on met au carré chaque membre :

$$\left(\sqrt{x} + \sqrt{2x}\right)^2 = \left(10 - x - \sqrt{5x^2}\right)^2$$

$$x\left(23 + \sqrt{2000} + \sqrt{8}\right) = 100 + \left(6 + \sqrt{20}\right)x^2.$$

On multiplie tout par $\frac{3}{8} - \sqrt{\frac{5}{8\cdot 8}}$ qui est l'inverse de $6 + \sqrt{20}$. L'équation quadratique ainsi normalisée est :

$$x\left(-3 - \frac{7}{8} - \sqrt{41 + \frac{1}{4} + \frac{5}{8\cdot 8}} + \sqrt{281 + \frac{1}{4}} + \sqrt{1 + \frac{1}{8}} - \sqrt{\frac{5}{8}}\right) = x^2 + 37 + \frac{1}{2} - \sqrt{781 + \frac{1}{4}}.$$

Abū Kāmil ne prend pas la peine de la résoudre.

Remarque : Ce problème, comme le problème 62, met en œuvre certaines quantités irrationnelles compliquées (on trouve dans ces deux problèmes des équations quadratiques dont le second coefficient est une quantité irrationnelle trinôme de la forme $a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, et il faut savoir développer le carré d'un trinôme pour calculer le discriminant de ces équations – technique mise en œuvre dans le problème 62).

– **65** – On considère le système de trois équations à trois inconnues $x > y > z$:

$$\begin{cases} x^2 = y^2 + z^2 \\ xz = y^2 \\ yz = 10 \end{cases}$$

Abū Kāmil choisit d'éliminer x et y ; il ne nomme donc qu'une seule inconnue, la « chose », c'est-à-dire l'inconnue z. La dernière équation donne

$$y = \frac{10}{z}$$

et cette valeur reportée dans la seconde équation donne

$$x = \frac{100}{z^3}.$$

la première équation du système devient alors

$$\left(\frac{100}{z^3}\right)^2 = \left(\frac{10}{z}\right)^2 + z^2$$

ou encore, après multiplication par z^6 :

$$10\,000 = 100\,z^4 + z^8.$$

L'unique solution positive est $z^4 = -50 + \sqrt{12500}$.

Remarque : Dans ce problème, l'énoncé parle de trois *māl* que l'on aurait pu traduire par « fortune » pour ne pas confondre avec le *māl* carré algébrique qui apparaît au cours de la résolution du problème, une fois spécifiée l'inconnue choisie par Abū Kāmil (l'inconnue z ; *māl* désigne alors z^2 tandis que chacune des trois inconnues du problème dans son énoncé initial est elle-même un *māl*). Ainsi le mot *māl* désigne parfois x, y ou z, et parfois z^2, et ces trois usages sont mêlés dans la résolution du même problème.

– **66** – On considère le système de trois équations à trois inconnues $x > y > z$:

$$(*) \qquad \begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 \\ xz = y^2 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$$

La deuxième équation implique que x, y, z forment une suite géométrique. Abū Kāmil nous enjoint de résoudre d'abord le système

$$(**) \qquad \begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 \\ xz = y^2 \end{cases}$$

Deux équations, trois inconnues, on peut donc poser librement $z = 1$. La première équation devient alors :

$$y^2 + 1 = y^4$$

$$y^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}}.$$

On a donc une solution particulière du système (**) :

$$\left(\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}}, \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}}}, 1\right).$$

Comme les deux équations sont homogènes, la solution générale est

$$\left(z\left(\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}}\right), z\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}}}, z\right).$$

On reporte cette solution dans la troisième équation du système (*) pour avoir la solution de (*) :

$$z\left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}}}\right) = 10.$$

Plutôt qu'une simple division, Abū Kāmil cherche ensuite à éliminer les radicaux :

$$\left(z\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}}}\right)^2 = \left(10 - z\left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}}\right)\right)^2.$$

On développe et on obtient l'équation quadratique

$$10z\left(3 + \sqrt{5}\right) = 100 + \left(3 + \sqrt{5}\right)z^2.$$

On multiplie tout par $\left(\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 8}}\right)$ qui est l'inverse de $3 + \sqrt{5}$, d'où

$$10z = z^2 + 75 - \sqrt{3125}$$

$$z = 5 - \sqrt{\sqrt{3125} - 50}$$

(l'autre racine est supérieure à 5 et ne peut donc pas être la plus petite des trois parties de 10).

Autre méthode : Dans (**), on pose $x = 1$ pour commencer. La solution générale de (**) est alors de la forme :

$$\left(x, x\sqrt{-\frac{1}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{4}}}, x\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{4}}\right)\right).$$

On reporte dans (*) :

$$\left(10-\frac{1}{2}x-x\sqrt{1+\frac{1}{4}}\right)^2 = x^2\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{1+\frac{1}{4}}\right).$$

On développe et on normalise en divisant tout par 2 :

$$50+x^2 = x\left(5+\sqrt{125}\right)$$

$$x = 2+\frac{1}{2}+\sqrt{31+\frac{1}{4}}-\sqrt{\sqrt{781+\frac{1}{4}}-12-\frac{1}{2}}\ ;$$

(l'autre racine est supérieure à 10 et n'est donc pas solution du problème initial).

Corollaire :

$$y = 10-x-z = 2+\frac{1}{2}+\sqrt{\sqrt{781+\frac{1}{4}}-12-\frac{1}{2}}+\sqrt{\sqrt{3125}-50}-\sqrt{31+\frac{1}{4}}.$$

Mais Abū Kāmil va proposer une troisième méthode de résolution du problème, en éliminant x et z. Le calcul conduit cependant alors à une autre expression pour y :

$$y = 2+\frac{1}{2}+\sqrt{\sqrt{781+\frac{1}{4}}+12+\frac{1}{2}}-\sqrt{31+\frac{1}{4}}.$$

Il se contente d'affirmer que c'est « la même chose »[10]. Un calcul facile mais laborieux permettrait de le démontrer.

Troisième méthode : On cherche une solution particulière de (**) en posant $y = 2$. Alors $x = \sqrt{z^2+4}$ d'après la première équation, et la seconde donne :

$$\sqrt{z^4+4z^2} = 4.$$

[10] Voir plus loin p. 486.

On met chaque membre au carré

$$z^4+4z^2 = 16$$

$$z^2 = -2+\sqrt{20}$$

$$z = \sqrt{\sqrt{20}-2}$$

$$x = \sqrt{\sqrt{20}+2}.$$

La solution générale est donc

$$(x, y, z) = \left(t\sqrt{\sqrt{20}+2}, 2t, t\sqrt{\sqrt{20}-2}\right).$$

On reporte dans le système (*) :

$$t\left(\sqrt{\sqrt{20}+2}+2+\sqrt{\sqrt{20}+2}\right) = 10,$$

d'où

$$y = \frac{20}{\sqrt{\sqrt{20}+2}+2+\sqrt{\sqrt{20}-2}}.$$

Pour éliminer les radicaux du dénominateur, Abū Kāmil considère l'équation quadratique

$$y\left(\sqrt{\sqrt{20}+2}+\sqrt{\sqrt{20}-2}\right) = 20-2y.$$

Il met chaque membre au carré.

$$y^2\left(2\sqrt{20}+2\sqrt{20-4}\right) = 400-80y+4y^2$$

$$\left(4+\sqrt{80}\right)y^2 = 400-80y.$$

On multiplie tout par $\left(\sqrt{\frac{1}{8\cdot 8}+\frac{1}{4\cdot 8}}-\frac{1}{2\cdot 8}\right)$ qui est l'inverse de $4+\sqrt{80}$.

$$y^2 + \left(\sqrt{125} - 5\right)y = \sqrt{3125} - 25$$

$$y = 2 + \frac{1}{2} + \sqrt{\sqrt{781 + \frac{1}{4}} + 12 + \frac{1}{2}} - \sqrt{31 + \frac{1}{4}}.$$

– **67** – On considère le système d'équations

$$\begin{cases} u + v = 10 \\ u + 2\sqrt{u} = v - 2\sqrt{v} \end{cases}$$

Abū Kāmil pose $u = 5 - x$ et $v = 5 + x$. On a alors l'équation

$$5 - x + 2\sqrt{5 - x} = 5 + x - 2\sqrt{5 + x},$$

c'est-à-dire

(*) $\qquad 2\sqrt{5 - x} + 2\sqrt{5 + x} = 2x.$

On met chaque membre au carré :

$$40 + 8\sqrt{25 - x^2} = 4x^2.$$

On isole le radical et on met de nouveau chaque membre au carré :

$$64\left(25 - x^2\right) = \left(4x^2 - 40\right)^2.$$

On développe et on obtient

$$256x^2 = 16x^4$$

$$x = 4.$$

Autre méthode : Abū Kāmil remarque que l'on peut simplifier l'équation (*) en divisant par 2 :

(**) $\qquad \sqrt{5 - x} + \sqrt{5 + x} = x.$

Puis il continue comme précédemment.

Autre méthode : À partir de (**), on peut aussi procéder comme suit :

$$5 - x = \left(x - \sqrt{5 + x}\right)^2.$$

On développe, on isole le radical et on met chaque membre au carré :

$$\left(2\sqrt{5x^2 + x^3}\right)^2 = \left(x^2 + 2x\right)^2.$$

On développe et on obtient :

$$16x^2 = x^4$$

$$x = 4.$$

Remarque : Pour résoudre le système initial sans changement de variable à la Diophante, il faut faire ainsi :

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 = 10 \\ X^2 + 2X = Y^2 - 2Y \end{cases}$$

Dans la deuxième équation, on peut mettre $(X + Y)$ en facteur :

$$(X + Y)(X - Y + 2) = 0.$$

Le second facteur donne une valeur de Y

$$Y = X + 2.$$

valeur qui, reportée dans la première équation, donne

$$2X^2 + 4X = 6$$

$$X = -1 \pm 2.$$

L'unique racine positive est donc 1.

Remarque : Plus généralement, quelle que soit la constante k, l'équation $X^2 + kX = Y^2 - kY$ est divisible par $(X + Y)$. On a l'équivalence

$$X^2 + kX = Y^2 - kY \Leftrightarrow [Y - X = k \text{ ou } Y + X = 0].$$

Autre méthode : Abū Kāmil observe que, quelle que soit la constante k,

$$u + k\sqrt{u} = v - k\sqrt{v} \Rightarrow \sqrt{u} \cdot \sqrt{v} = u + k\sqrt{u}.$$

En effet, d'après la dernière remarque, l'équation de gauche se factorise et l'un des facteurs donne

$$\sqrt{u} = \sqrt{v} - k,$$

d'où

$$\sqrt{u} \cdot \sqrt{v} = v - k\sqrt{v},$$

d'où la méthode suivante pour résoudre le problème 67. Posons $u = X^2$ et $v = 10 - X^2$. Alors

$$\sqrt{X^2} \cdot \sqrt{10 - X^2} = X^2 + 2X.$$

On met chaque membre au carré

$$X^2(10 - X^2) = X^4 + 4X^3 + 4X^2$$

$$X^2 + 2X - 3 = 0$$
$$X = 1 \text{ ou } -3.$$

Abū Kāmil donne à présent une démonstration géométrique de l'équivalence énoncée dans la dernière remarque, au moyen de la figure suivante :

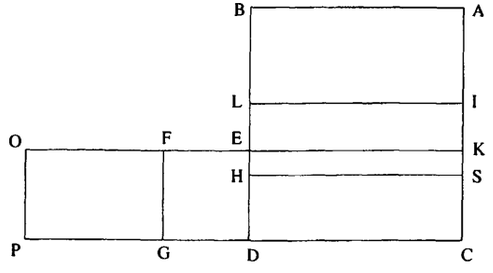


Fig. 5

Ensuite Abū Kāmil écrit que « la cause de cela par la voie de l'algèbre est vraie et claire »[11]. En effet, on peut démontrer algébriquement l'équivalence

[11] Voir plus loin p. 500.

$$X^2 + kX = Y^2 - kY \Leftrightarrow [Y - X = k \text{ ou } Y + X = 0].$$

Il démontre algébriquement que

$$Y - X = k \Rightarrow X^2 + kX = Y^2 - kY.$$

Il faut souligner qu'il distingue bien démonstration algébrique et démonstration géométrique.

Dernière méthode : L'équivalence énoncée dans la remarque ci-dessus conduit à une dernière méthode pour résoudre le problème 67 :

$$\begin{cases} u + v = 10 \\ u + 2\sqrt{u} = v - 2\sqrt{v} \end{cases}$$

On pose $X = \sqrt{u}$, alors $\sqrt{v} = X + 2$, d'après la remarque. On remplace u et v par leurs valeurs dans la première équation :

$$X^2 + (X + 2)^2 = 10.$$

Cette équation a pour racines 1 et (–3).

– 68 – On considère le système d'équations

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ \dfrac{10}{x} + \dfrac{10}{y} = 6 + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Lemme :

$$\frac{10}{x} + \frac{10}{y} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 2.$$

Abū Kāmil donne une démonstration arithmétique de ce lemme, avec la figure ci-contre :

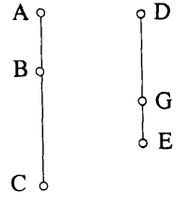


Fig. 6

Deuxième lemme : Si

$$\begin{cases} a = x + y \\ \dfrac{a}{x} + \dfrac{a}{y} = b \end{cases}$$

alors on a aussi

$$\frac{a}{x} \cdot \frac{a}{y} = b.$$

En effet, on a

$$\frac{a}{x} = 1 + \frac{y}{x}$$

$$\frac{a}{y} = 1 + \frac{x}{y}$$

$$\frac{y}{x} + \frac{x}{y} = b - 2.$$

Posons $z = \dfrac{y}{x}$ (la « chose » est z) ; alors

$$\frac{x}{y} = b - 2 - z$$

et

$$z(b - 2 - z) = 1.$$

Finalement

$$\frac{a}{x} \cdot \frac{a}{z} = (1 + z)(1 + b - 2 - z) = 1 + z + (b - 2 - z) + z(b - 2 - z) = b.$$

C'est là la démonstration du deuxième lemme « par la voie de l'indication (*ṭarīq al-ishāra*) »[12], qu'Abū Kāmil donne en premier.

Il en donne ensuite une autre démonstration, géométrique, c'est-à-dire par la théorie des proportions, en traduisant ce lemme par :

[12] Voir plus loin p. 502 et chap.VII, p. 235-239.

$$\left.\begin{array}{l} A = B + C \\ \dfrac{A}{B} = E \\ \dfrac{A}{C} = D \end{array}\right\} \Rightarrow E \cdot D = E + D.$$

Troisième lemme :

$$\frac{A \cdot B}{C \cdot D} = \frac{A}{C} \cdot \frac{B}{D}.$$

Abū Kāmil en donne une démonstration arithmétique.

Corollaire des trois lemmes (pour $x, y > 0$) :

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ \dfrac{10}{x} + \dfrac{10}{y} = 6 + \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 = x + y \\ 100 = \left(6 + \dfrac{1}{4}\right) xy \end{cases}$$

Ensuite, Abū Kāmil observe que l'on peut réduire à cette forme tous les problèmes de la forme

$$\begin{cases} x + y = a \\ \dfrac{b}{x} + \dfrac{b}{y} = c \end{cases}$$

ou de la forme

$$\begin{cases} x + y = a \\ \dfrac{b}{x} \cdot \dfrac{b}{y} = c \end{cases}$$

Il résout ensuite un tel problème directement (sans le réduire à la forme précédente).

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ \dfrac{40}{x} \cdot \dfrac{40}{y} = 100 \end{cases}$$

Posons avec lui $x = 5 + t$ et $y = 5 - t$,

$$\frac{40}{5 + t} \cdot \frac{40}{5 - t} = 100$$

$$1600 = 2500 - 100t^2$$

$$t^2 = 9$$

$$t = 3.$$

Il résout encore, de la même façon, le système

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ \dfrac{50}{x} \cdot \dfrac{40}{y} = 125 \end{cases}$$

Puis il remarque que l'on pouvait aussi réduire ce problème au problème

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ \dfrac{10}{x} \cdot \dfrac{10}{y} = 6 + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

car

$$\frac{125}{5 \cdot 4} = 6 + \frac{1}{4}.$$

– **69** – Abū Kāmil mentionne ensuite le problème

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ \left(\dfrac{10}{x} + \dfrac{10}{y} \right)^2 = 20 + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Il suffit d'extraire la racine carrée de chaque membre dans la deuxième équation pour réduire ce problème à une forme connue (et on a $\sqrt{20 + \frac{1}{4}} = 4 + \frac{1}{2} \ldots$).

Il résout ensuite le système

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ \left(\dfrac{10}{x} + \dfrac{10}{y} \right)^2 = 30 \end{cases}$$

– **70** – Abū Kāmil mentionne encore le système

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ \left(\dfrac{40}{x} + \dfrac{40}{y} \right)^2 = 625 \end{cases}$$

équivalent au suivant :

$$\begin{cases} 10 = x + y \\ \left(\dfrac{10}{x} + \dfrac{10}{y} \right)^2 = \dfrac{625}{16} \end{cases}$$

(or $\frac{625}{16} = 39 + \frac{1}{16} \ldots$).

CHAPITRE III

L'APPLICATION DE L'ALGÈBRE À LA GÉOMÉTRIE PLANE : LES PENTAGONES ET LES DÉCAGONES RÉGULIERS

Dans le premier livre de son *Algèbre*, Abū Kāmil étudie l'application de l'algèbre à des problèmes arithmétiques. Au second livre, il traite de l'application de l'algèbre à la géométrie. Le domaine qu'il choisit pour cette étude est celui des pentagones et décagones réguliers convexes inscrits dans – ou circonscrits à – des cercles donnés. Par la place qu'il occupe dans l'*Algèbre* d'Abū Kāmil et par l'intention qui préside à sa composition, ce livre correspond au second chapitre de l'*Algèbre* d'al-Khwārizmī : « Sur la mensuration ». Dans les deux cas, en effet, on entend résoudre à l'aide de l'algèbre des problèmes géométriques. Mais on ne peut réduire à cela le projet d'Abū Kāmil : il s'agit, plus généralement, de mettre en œuvre une propriété essentielle de la nouvelle discipline mathématique, le pouvoir de s'appliquer aussi bien aux problèmes numériques qu'aux problèmes géométriques. Par ailleurs, alors qu'al-Khwārizmī traite dans ce chapitre « Sur la mensuration » divers problèmes – aire des quadrilatères, aires des triangles, du cercle, de la pyramide, du cône –, Abū Kāmil se limite aux pentagones et aux décagones réguliers. À ce choix thématique de ces deux polygones réguliers et convexes, on pourrait trouver plusieurs raisons. Abū Kāmil en évoque une : la difficulté, rencontrée par certains contemporains et certains prédécesseurs, à résoudre plusieurs problèmes soulevés par la détermination des cordes de ces polygones. On peut également penser à la parenté de ces problèmes avec celui de l'aire du cercle, qu'on discutait à l'époque[1]. On peut aussi avancer qu'Abū Kāmil désirait considérer un thème précis, inspiré en quelque sorte par la lecture des *Éléments* d'Euclide (livres IX, XII et XIII), et peut-être aussi de Ptolémée et de Héron d'Alexandrie.

Mais, dans cette étude, Abū Kāmil ne considère pas la question de la construction de la figure à la règle et au compas, mais seulement la détermination de l'objet – côté du polygone, diamètre du cercle circonscrit

[1] Voir R. Rashed, « Al-Kindī's commentary on Archimedes' "The Measurement of the Circle" », *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 3, 1993, p. 7-53 et « Archimedean Learning in the Middle Ages : The Banū Mūsā », *Historia Scientiarum*, 6-1, 1996, p. 1-16.

ou inscrit, etc. – à l'aide de l'algèbre. En effet, dans ce chapitre, Abū Kāmil commence par algébriser la détermination des côtés C_5 et C_{10} du pentagone et du décagone réguliers. Euclide avait procédé à la construction géométrique de ces côtés ; Abū Kāmil montre que C_5^2 et C_{10} sont solutions d'équations du second degré qu'il résout selon l'algorithme usuel. Il étudie aussi le côté du polygone régulier à 15 côtés, non considéré par Euclide, grâce à la relation $\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$.

L'étude algébrique de ces polygones réguliers conduit Abū Kāmil à poser un certain nombre de nouveaux problèmes, tel la détermination des diamètres des cercles circonscrits et inscrits ou celle du côté d'un polygone d'aire connue.

Il passe ensuite à l'étude de problèmes relatifs à des rectangles inscrits dans un triangle équilatéral ou à un pentagone équilatéral inscrit dans un carré. Tous ces problèmes conduisent à des équations du second degré. On notera qu'Abū Kāmil n'hésite pas à considérer la somme d'une aire et d'un segment ou bien à multiplier une aire par une autre.

À notre connaissance, ce chapitre, à la différence de tous les autres, ne sera ni repris, ni développé, par les algébristes arithméticiens tels qu'al-Karajī et ses successeurs. L'algèbre géométrique prendra son essor à partir de l'étude des problèmes solides. En revanche, on rencontre dans les traités de *ḥisāb* un chapitre sur les polygones réguliers et la détermination de leurs aires. C'est ce que l'on trouve chez al-Būzjānī[2], al-Fārisī[3] et al-Kāshī[4], entre beaucoup d'autres. Fibonacci a commenté et emprunté dans *Practica geometriae* 17 des 20 problèmes qui composent ce chapitre ; il s'agit des problèmes 1 à 7, 9-10, 12-13, 15 à 20[5].

[2] Al-Būzjānī, *al-Manāzil al-Sab'*, éd. A. S. Saidan, dans *'Ilm al-Ḥisāb al-'Arabī*, Amman, 1971, p. 254 *sqq*.

[3] Al-Fārisī, *Asās al-Qawā'id*, éd. M. Mawaldi, Le Caire, 1994, p. 420 *sqq*.

[4] Al-Kāshī, *Miftāḥ al-Ḥisāb*, éd. N. al-Nabulsī, Damas, 1977.

[5] G. Sacerdote a, le premier, souligné l'existence de cet emprunt lorsqu'il a rendu en italien la traduction hébraïque de ce chapitre (« Il trattato del pentagono e del decagono di Abu Kámil Shogia' ben Aslam ben Muhammed », dans *Festschrift zum Achtzigsten Geburtstage Moritz Steinschneider's*, Leipzig, 1896, p. 169-194). H. Suter a rendu en allemand le texte italien de Sacerdote et a repris l'étude des problèmes de ce chapitre (« Die Abhandlung des Abū Kāmil Shoǧā' b. Aslam 'über das Fünfeck und Zehneck' », *Bibliotheca mathematica*, 3e série, 9, 1908-9, p. 196-199). Récemment R. Lorch a donné une édition du texte latin (« Abū Kāmil on the Pentagon and Decagon », dans M. Folkerts et J. P. Hogendijk (éd.), *Vestigia mathematica, Studies in Medieval and Early Modern Mathematics in Honour of H.L.L. Busard*, Amsterdam, 1993), et M. Yadegari et M. Levey une traduction anglaise provisoire du texte arabe, directement à partir du manuscrit d'Istanbul (*Abū Kāmil's On the Pentagon and Decagon*, Tokyo, 1971).

[6] R. Rashed, *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, London, 2005, p. 389 *sqq*.

Ce livre est composé de 20 problèmes, qui se partagent en plusieurs groupes.

Dans les quatre premiers problèmes, on se donne le diamètre du cercle et on cherche le côté du pentagone (resp. décagone) inscrit ou circonscrit.

Dans les six problèmes suivants (5 à 10), on cherche le diamètre du cercle inscrit (resp. circonscrit) à chacun de ces deux polygones.

Le problème 11 est une proposition où on démontre que, pour tout polygone régulier convexe de côté c, on a $4R^2 = 4r^2 + c$, avec R le rayon du cercle circonscrit et r le rayon du cercle inscrit.

Dans le problème 12, on calcule le côté du pentadécagone. Dans le problème 13, on calcule la hauteur d'un triangle dont l'aire est donnée.

Abū Kāmil calcule ensuite le côté du carré inscrit dans un triangle (14). Dans (15), il calcule le côté d'un pentagone régulier convexe inscrit dans un carré. Ce problème a été repris plus tard par al-Qūhī, qui procède à sa construction par les sections coniques, puisqu'il n'est pas constructible à la règle et au compas[6]. Dans (16, 17), on calcule le côté d'un pentagone (resp. décagone) d'aire donnée inscrit dans un cercle. Dans les trois derniers problèmes (18 à 20), on calcule le côté d'un pentagone (resp. décagone) régulier convexe, connaissant l'aire d'un des triangles donnés qui partagent le polygone.

Tous ces problèmes sont résolus algébriquement et à l'aide des théorèmes du treizième livre des *Éléments*, sur la division d'un segment de droite en moyenne et extrême raison ; on y fait aussi appel à quelques théorèmes de la géométrie du triangle et au théorème de Ptolémée sur la détermination de la corde d'un cercle. Nous allons à présent les transcrire et les analyser.

– **1** – Calcul du côté C_5 du pentagone inscrit dans un cercle de diamètre connu.

Soit $ABDEC$ le pentagone régulier convexe inscrit dans le cercle. Soit $HE = 2R$ le diamètre du cercle (Abū Kāmil prend $2R = 10$, mais ses calculs sont valables dans le cas général), L l'intersection de CD et EH. On pose $ED = x$. On a $x^2 = ED^2 = EL \cdot EH$, d'où $EL = \frac{x^2}{2R}$; d'autre part, $LD^2 = ED^2 - EL^2$, d'où $LD^2 = x^2 - \frac{x^4}{4R^2}$ et

(1) $$CD^2 = 4x^2 - \frac{x^4}{R^2}$$

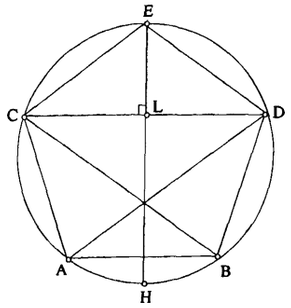


Fig. 1

Le quadrilatère inscriptible $ABDC$ admet HE comme axe de symétrie, d'où $AC = BD = x$ et $AD = BC = CD$. On sait que $AB \cdot CD + AC \cdot BD = AD \cdot BC$ (relation de Ptolémée), d'où $AB \cdot CD = CD^2 - x^2 = 3x^2 - \frac{x^4}{R^2}$. Alors $x \cdot CD = 3x^2 - \frac{x^4}{R^2}$, et

(2) $$CD = 3x - \frac{x^3}{R^2}.$$

(1) et (2) impliquent que :

$$\left(3x - \frac{x^3}{R^2}\right)^2 = 4x^2 - \frac{x^4}{R^2} ;$$

d'où, après simplification :

$$5 + \frac{x^4}{R^4} = 5\frac{x^2}{R^2}.$$

Posons $\frac{x^2}{R^2} = X$, il vient $X^2 - 5X + 5 = 0$, de discriminant $\Delta = 5$,

$$X = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 = R^2\left(\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}\right).$$

Le côté C_5 du pentagone convexe correspond à la petite racine :

$$C_5^2 = R^2\left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right).$$

La seconde racine correspond au côté du pentagone étoilé :

$$CD^2 = R^2\left(\frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right).$$

Le calcul numérique d'Abū Kāmil, où $R = 5$, conduit à

$$\frac{1}{5}x^4 = 5x^2 + \frac{x^6}{625}.$$

En divisant par x^2 et en multipliant par 625, il trouve

$$x^4 + 3125 = 125x^2$$

de discriminant $\Delta = 125^2 - 3125 \cdot 4 = 125 \cdot 25 = 25^2 \cdot 5$, d'où

$$x^2 = \frac{125 - 25\sqrt{5}}{2} = 62{,}5 - \sqrt{781{,}25} ;$$

et

$$C_5 = R\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}} = \sqrt{62{,}5 - \sqrt{781{,}25}} \text{ avec } R = 5.$$

– **2** – Calcul du côté C_{10} du décagone régulier convexe, connaissant le diamètre du cercle circonscrit et le côté C_5 du pentagone régulier convexe.

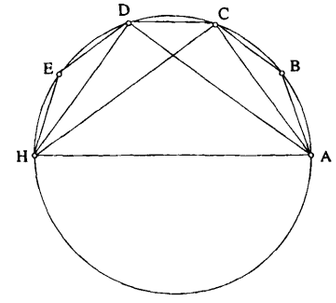


Fig. 2

Soit AH le diamètre du cercle, A, B, C, D, E, H six des sommets du décagone. On a $AH = 2R$, $DC = C_{10} = x$, $AC = DH = C_5$, $AD = HC$.

Dans le quadrilatère convexe $ACDH$, on a $AH \cdot DC + AC \cdot HD = CH \cdot AD$, d'où $2Rx + C_5^2 = CH^2$. Mais $CH^2 + CA^2 = AH^2$, d'où $2C_5^2 + 2Rx = 4R^2$. On en déduit :

$$x = C_{10} = 2R - \frac{C_5^2}{2R}.$$

Or $C_5^2 = R^2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$, on a donc

$$C_{10} = 2R - \frac{5R}{2} + \frac{R\sqrt{5}}{2}$$

$$C_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right).$$

Abū Kāmil pose $AH = 10$, soit $R = 5$, et trouve $C_{10} = \sqrt{31{,}25} - 2{,}5$.

– **3** – Soit C_5' le côté du pentagone régulier circonscrit à un cercle de diamètre connu.

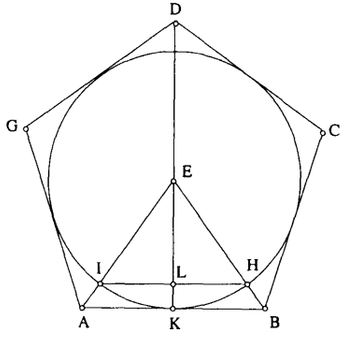


Fig. 3

Soit $ABCDG$ le pentagone circonscrit au cercle de centre E et de rayon R.

Les demi-droites EA et EB coupent le cercle en I et H ; on a :

$$AB = C_5' = x,\ IH = C_5, EI = EH = R.$$

Soit K et L les milieux de BA et HI ; on a $\frac{AB}{EK} = \frac{IH}{EL}$, soit $\frac{x}{R} = \frac{C_5}{EL}$. Mais $EL^2 = EI^2 - IL^2 = R^2 - \frac{1}{4}C_5^2$, d'où

$$\left(R^2 - \frac{1}{4}C_5^2\right)x^2 = R^2 \cdot C_5^2$$

$$C_5'^2 = x^2 = R^2 \cdot \frac{C_5^2}{R^2 - \frac{1}{4}C_5^2},$$

avec $C_5^2 = R^2 \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{2}$. On a alors :

$$R^2 - \frac{1}{4}C_5^2 = R^2\left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right),$$

d'où

$$C_5'^2 = 4R^2\frac{5-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = 4R^2\left(5-2\sqrt{5}\right) \text{ et } C_5' = 2R\sqrt{5-2\sqrt{5}}.$$

Pour $R = 5$, $C_5'^2 = 100\left(5-2\sqrt{5}\right) = 500 - \sqrt{20000}$, résultat donné par Abū Kāmil après les calculs que nous reproduisons ici :

$$IH^2 = C_5^2 = 62{,}5 - \sqrt{781 + \frac{1}{4}}$$

$$IL^2 = \frac{1}{4}C_5^2 = 15 + \frac{5}{8} - \sqrt{48 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8\cdot 8}}$$

$$EL^2 = EI^2 - IL^2 = 9 + \frac{3}{8} + \sqrt{48 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8\cdot 8}},$$

d'où

$$(1) \qquad x^2\left[9 + \frac{3}{8} + \sqrt{48 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8\cdot 8}}\right] = 1562 + \frac{1}{2} - \sqrt{488281{,}25}.$$

Posons :

$$a = 9 + \frac{3}{8} + \sqrt{48 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8\cdot 8}} = 9 + \frac{3}{8} + \frac{25\sqrt{5}}{8}.$$

Abū Kāmil multiplie les deux membres de (1) par le nombre b tel que $ab = 1$. On peut écrire

$$a = \frac{25}{8}\left(\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{5}}{8}\right) = \frac{25}{16}\left(\sqrt{5}+1\right)^2 = \frac{5}{\left(\sqrt{5}-1\right)^2},$$

d'où

$$b = \frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{5} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{25} - \sqrt{\frac{20}{625}}.$$

Si on remarque que le second membre de (1) s'écrit $25\left(\frac{125}{2} - \sqrt{\frac{3125}{4}}\right)$ et que b s'écrit $b = \frac{6-2\sqrt{5}}{25}$, il vient

$$x^2 = \left(\frac{125}{2} - \sqrt{\frac{3125}{4}}\right)\left(6 - 2\sqrt{5}\right),$$

d'où le résultat donné par Abū Kāmil sous la forme

$$x^2 = 375 + \sqrt{15625} - \sqrt{28125} - \sqrt{78125} = 500 - 200\sqrt{5} = 500 - \sqrt{200000}.$$

– **4** – Calcul de C'_{10}, côté du décagone régulier convexe circonscrit à un cercle connu, connaissant C_{10}, côté du décagone régulier inscrit dans le même cercle.

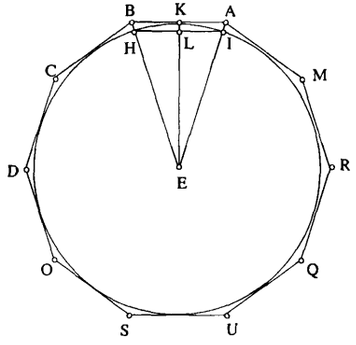


Fig. 4

Soit E le centre du cercle, AB un côté du décagone circonscrit. Les demi-droites EA et EB coupent le cercle en I et H ; on a $IH = C_{10}$. Soient K et L les milieux respectifs de AB et IH.

On a $EL^2 = EI^2 - LI^2 = R^2 - \frac{1}{4}C_{10}^2$ et, d'autre part, $\frac{AB^2}{R^2} = \frac{C_{10}^2}{EL^2}$. Mais $AB = C'_{10} = x$, d'où

$$x^2 = C_5'^2 = \frac{R^2 \cdot C_{10}^2}{R^2 - \frac{1}{4}C_{10}^2},$$

avec $C_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$. On a donc

$$C_{10}'^2 = \frac{2R^2\left(\sqrt{5}-1\right)^2}{5+\sqrt{5}} = \frac{R^2\left(\sqrt{5}-1\right)^2\left(5-\sqrt{5}\right)}{10} = 4R^2\left[1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right]$$

et

$$C'_{10} = 2R\sqrt{1 - \frac{2}{5}\sqrt{5}}.$$

Pour $R = 5$, on trouve

$$C_{10}'^2 = 100 - 200\frac{\sqrt{5}}{5} = 100 - \sqrt{8000},$$

résultat donné par Abū Kāmil après les calculs que nous reproduisons ici :

$$IH = \sqrt{31 + \frac{1}{4}} - 2{,}5$$

$$IH^2 = 37 + \frac{1}{2} - \sqrt{781{,}25}$$

$$IL = \sqrt{7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2\cdot 8}} - 1{,}25$$

$$IL^2 = 9 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \sqrt{48 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8\cdot 8}}$$

$$EL^2 = 25 - IL^2 = 15 + \frac{5}{8} + \sqrt{48 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8\cdot 8}},$$

d'où

$$x^2\left(15 + \frac{5}{8} + \sqrt{48 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{5}{8\cdot 8}}\right) = 25 \cdot IH^2 = 937{,}5 - \sqrt{488281{,}25}.$$

Abū Kāmil multiplie ensuite les deux membres par le nombre $b=\frac{2}{25}-\sqrt{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{625}}$. Ce nombre est l'inverse du coefficient a de x^2. En effet

$$a=\frac{125}{8}+\sqrt{\frac{195}{4}+\frac{5}{64}}=\frac{125}{8}+\frac{1}{8}\sqrt{3125}=\frac{25}{8}\left(5+\sqrt{5}\right)$$
$$b=\frac{2}{25}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{2}{25\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}-1\right)=\frac{8}{25\left(5+\sqrt{5}\right)},$$

d'où le résultat :

$$x^2=75+\sqrt{625}-\sqrt{3125}-\sqrt{1125}=75+25-25\sqrt{5}-15\sqrt{5}=100-40\sqrt{5}$$
$$=100-\sqrt{8000}.$$

– **5** – Calcul du diamètre du cercle circonscrit à un pentagone régulier convexe de côté connu C_5.

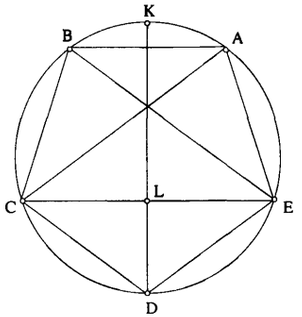


Fig. 5

Soit *ABCDE* le pentagone donné, *DK* un diamètre du cercle circonscrit. On a $AB = AE = BC = C_5$ et $CE = BE = AC$. Dans le quadrilatère convexe *ABCE* inscrit dans le cercle, on a

$$AB\cdot CE+AE\cdot BC=AC\cdot BE,$$

c'est-à-dire

$$C_5\cdot CE+C_5^2=CE^2,$$

équation du second degré dont CE est la racine positive :

$$CE=\frac{1}{2}C_5\left(1+\sqrt{5}\right).$$

D'autre part, on a :

$$DL^2=DC^2-EL^2=C_5^2-\frac{1}{4}CE^2=C_5^2\left(1-\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{16}\right)=\frac{C_5^2}{16}\left(10-2\sqrt{5}\right).$$

Posons $DK = x$, on a $DE^2 = DL\cdot x$, d'où :

$$x^2=\frac{16C_5^2}{10-2\sqrt{5}}=\frac{8C_5^2}{5-\sqrt{5}}=\frac{2}{5}C_5^2\left(5+\sqrt{5}\right)$$

et

$$x=C_5\sqrt{2+\frac{2}{5}\sqrt{5}}.$$

Pour $C_5=10$, on trouve $x^2=200+40\sqrt{5}=200+\sqrt{8000}$, résultat donné par Abū Kāmil, dont les calculs donnent :

$$CE=5+\sqrt{125}$$
$$EL=2{,}5+\sqrt{31{,}25}$$
$$DL^2=100-\left(37{,}5+\sqrt{781{,}25}\right)=62{,}5-\sqrt{781{,}25}$$
$$\frac{x^2}{DE^2}=\frac{DE^2}{DL^2},$$

d'où

$$ax^2=x^2\left(62{,}5-\sqrt{781{,}25}\right)=10000.$$

Abū Kāmil multiplie les deux membres par le nombre $b=\frac{1}{50}+\sqrt{\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{15825}}$, qui est l'inverse du nombre a, coefficient de x^2. En effet, on peut écrire :

$$a=\frac{125}{2}-\sqrt{\frac{3125}{4}}=\frac{25}{2}\left(5-\sqrt{5}\right)=\frac{25\sqrt{5}}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

$$b=\frac{1}{50}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\sqrt{5}+1}{50\sqrt{5}},$$

donc $ab = 1$ et $x^2=200+\sqrt{8000}$.

– **6** – Calcul du diamètre $2r$ du cercle inscrit dans un pentagone régulier convexe dont on connaît le côté C_5'.

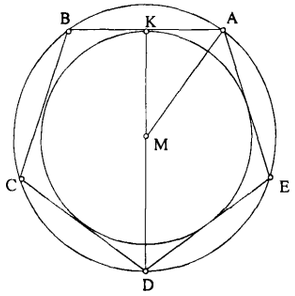


Fig. 6

Soit $ABCDE$ le pentagone, M le centre des cercles inscrit et circonscrit, K le milieu de AB ; alors $MK = r$ et $MA = R$ rayon du cercle circonscrit. On a vu que

$$4R^2 = \frac{2}{5}C_5'^2\left(5+\sqrt{5}\right),$$

et, pour $C_5 = 10$, $4R^2 = 200 + \sqrt{8000}$. Le triangle rectangle AKM donne

$$R^2 = r^2 + \frac{1}{4}C_5'^2,$$

d'où

$$4r^2 = 4R^2 - C_5'^2 = C_5'^2\left(1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right),$$

et, pour $C_5 = 10$, on a $4r^2 = 100 + \sqrt{8000}$.

Abū Kāmil note que la relation $4r^2 = 4R^2 - C_n^2$ est valable pour tout polygone régulier convexe.

– **7** – Calcul du diamètre du cercle circonscrit au pentagone régulier convexe par une autre méthode.

D'après Euclide, *Éléments*, XII.1[7], le rapport $\frac{C_5}{R}$ est indépendant du pentagone considéré. Or, dans le problème <1>, on a montré que

$$C_5^2 = R^2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right);$$

donc, si on connaît C_5, on a

$$R^2 = \frac{C_5^2\left(5+\sqrt{5}\right)}{10}.$$

Pour $C_5 = 10$, on a donc $R^2 = 50 + 10\sqrt{5}$, d'où $4R^2 = 200 + \sqrt{8000}$, qui est la réponse obtenue par Abū Kāmil.

Abū Kāmil pose $2R = x$ lorsque $C_5 = 10$ et utilise le résultat de <1> pour $2R = 10$, ce qui donne

$$C_5^2 = 62{,}5 - \sqrt{781{,}25},$$

d'où

$$\frac{x^2}{100} = \frac{100}{62{,}5 - \sqrt{781{,}25}}$$

$$x^2\left(62{,}5 - \sqrt{781{,}25}\right) = 10000.$$

Il multiplie les deux membres par l'inverse du coefficient a de x^2. Soit

$$b = \frac{1}{50} + \sqrt{\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{15625}}$$

cet inverse. On peut écrire

$$b = \frac{1}{50} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3125}} = \frac{1}{50}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{250}\left(5+\sqrt{5}\right)$$

et

$$a = \frac{125 - 25\sqrt{5}}{2} = \frac{25}{2}\left(5-\sqrt{5}\right).$$

On a bien $ab = 1$. Abū Kāmil obtient alors

$$x^2 = C_5^2\left(2+\frac{2}{5}\sqrt{5}\right) = 10000b = 40\left(5+\sqrt{5}\right) = 200 + \sqrt{8000}.$$

[7] Cf. la démonstration de cette proposition par Euclide.

– **8** – Calcul du diamètre $2r$ du cercle inscrit dans un pentagone régulier convexe de côté connu C'_5.

Le rapport $\frac{r}{C'_5}$ est indépendant du pentagone considéré. Or on a vu dans le problème <3> que $C'^2_5 = 4r^2\left(5-2\sqrt{5}\right)$, donc

$$4r^2 = \frac{C'^2_5}{5-2\sqrt{5}}.$$

Pour $C'_5 = 10$, on a

$$4r^2 = \frac{100}{5-2\sqrt{5}} = 20\left(5+2\sqrt{5}\right),$$

soit $4r^2 = 100+\sqrt{8000}$, réponse de Abū Kāmil.

Il opère comme dans <7> et écrit, en tenant compte de la solution du problème <3> :

$$\frac{x^2}{100} = \frac{100}{500-\sqrt{200000}},$$

d'où

$$x^2\left(500-\sqrt{200000}\right) = 10000.$$

Il multiplie les deux membres par le nombre

$$b = \frac{1}{100}+\sqrt{\frac{4}{5\cdot 10000}},$$

qui est l'inverse du coefficient a de x^2. En effet, on peut écrire

$$a = 100\left(5-2\sqrt{5}\right)$$

$$b = \frac{1}{100}\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{500}\left(5+2\sqrt{5}\right),$$

d'où $ab = 1$. On trouve $x^2 = 10000b = 20\left(5+2\sqrt{5}\right) = 100+\sqrt{8000}$.

– **9** – Calcul du diamètre $2R$ du cercle circonscrit à un décagone régulier convexe de côté connu C_{10}.

Abū Kāmil utilise ici encore le fait que $\frac{C_{10}}{R}$ est indépendant du décagone considéré. On a vu dans <2> que $C_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$. On a donc

$$2R = \frac{4C_{10}}{\sqrt{5}-1} = C_{10}\left(\sqrt{5}+1\right).$$

Pour $C_{10} = 10$, on a donc $2R = 10+10\sqrt{5} = 10+\sqrt{500}$.

Abū Kāmil aboutit à cette solution en posant $2R = x$ et en utilisant le résultat de <2>, d'où :

$$\frac{x}{10} = \frac{10}{\sqrt{31{,}25}-2{,}5}$$
$$\Leftrightarrow x\left(\sqrt{31{,}25}-2{,}5\right) = 100$$
$$\Leftrightarrow 31{,}25x^2 = (100+2{,}5x)^2$$
$$\Leftrightarrow 25x^2-500x-10000 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2-20x-400 = 0.$$

La racine positive de cette équation est $x = 10+\sqrt{500}$.

On note qu'Abū Kāmil tient ici à se ramener à une équation du second degré au lieu de multiplier par l'inverse du coefficient de x.

– **10** – Calcul du diamètre $2r$ du cercle inscrit dans un décagone régulier convexe de côté connu C'_{10}.

Le rapport $\frac{C'_{10}}{r}$ est indépendant du décagone considéré, et on a vu dans <4> que

$$C'^2_{10} = 4r^2\left[\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right].$$

On a donc

$$4r^2 = \frac{5C'^2_{10}}{5-2\sqrt{5}} = C'^2_{10}\left(5+2\sqrt{5}\right).$$

Pour $C'_{10} = 10$, on a $4r^2 = 500+\sqrt{200000}$.

Abū Kāmil parvient à ce résultat en posant $2r = x$ et en utilisant le résultat de <4>. Il écrit

$$\frac{100-\sqrt{8000}}{100} = \frac{100}{x^2},$$

d'où $x^2\left(100-\sqrt{8000}\right)=10000$. Il multiplie les deux membres par le nombre

$$b=\frac{1}{20}+\sqrt{\frac{1}{500}},$$

inverse du nombre $a=100-\sqrt{8000}$. On peut en effet écrire $a=20\left(5-2\sqrt{5}\right)$ et

$$b=\frac{1}{20}\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{100}\left(5+2\sqrt{5}\right),$$

donc $ab = 1$. Il obtient

$$x^2=10000b=500+\sqrt{200000}.$$

Puis il reprend la remarque faite dans <6> pour tout polygone et l'applique au décagone ; on a

$$4r^2=4R^2-C_{10}'^2,$$

d'où

$$4r^2=\left(10+\sqrt{500}\right)^2-100=500+20\sqrt{500}=500+\sqrt{200000}.$$

Abū Kāmil propose de donner « la cause » du calcul précédent, c'est-à-dire de donner une « *demonstratio potissima* » – géométrique. Il s'agit d'une démonstration différente de celle donnée à l'aide de l'algèbre pour le pentagone et le décagone ; elle est aussi générale.

Soit un polygone régulier convexe de côté c, R le rayon du cercle circonscrit, r le rayon du cercle inscrit ; on a $4R^2=4r^2+c^2$.

La démonstration faite pour le triangle équilatéral est valable pour tout polygone. Les cercles inscrit et circonscrit ont le même centre M. Si AC est un côté du polygone et L son milieu, on a $AM = R$, $ML = r$, $AL=\frac{c}{2}$ et l'angle $A\hat{L}M$ est droit ; donc

$$AL^2+LM^2=AM^2\Rightarrow r^2+\frac{c^2}{4}=R^2.$$

Démonstration d'Abū Kāmil : La droite LM recoupe le cercle inscrit en G ; on a $LG = KO$. Dans les triangles ALM et DMG on a : $ML = MG$, $MA = MD$, $L\hat{M}A = G\hat{M}D$; les deux triangles sont égaux, donc $AL = GD$ et $L\hat{A}M = M\hat{D}G$ et $DG \,//\, AL$. Le quadrilatère $CLGD$ est donc un rectangle, $LG = CD$. Dans le triangle rectangle ACD on a

$$AC^2+CD^2=AD^2$$

$$c^2+4r^2=4R^2\ .$$

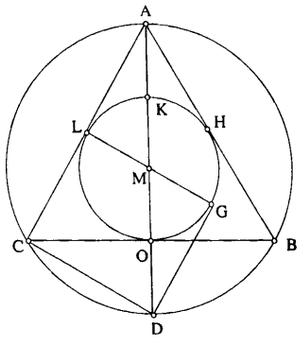


Fig. 7

– **11** – Calcul de C_{15} connaissant le diamètre du cercle circonscrit.

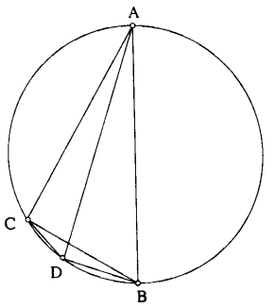


Fig. 8

Soit AB le diamètre du cercle, BC le côté de l'hexagone, BD le côté du décagone ; on a $BC = C_6 = R$, $BD = C_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$.

AC est alors le côté du triangle équilatéral $AC = C_3 = R\sqrt{3}$ et AD est la corde qui sous-tend les deux cinquièmes du cercle ; on a[8]

$$AD^2 = R^2\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right).$$

La corde CD est le côté C_{15} cherché car

$$\widehat{CD} = \widehat{BC} - \widehat{BD} = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10}\right) \text{ de cercle} = \frac{1}{15} \text{ de cercle.}$$

Dans le quadrilatère convexe $ACDB$ on a

$$AC \cdot DB + DC \cdot AB = AD \cdot BC,$$

d'où

$$R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) + 2R \cdot C_{15} = R^2\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}.$$

On en déduit

$$C_{15} = \frac{R}{2}\left[\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)\right].$$

Calculs d'Abū Kāmil : $AB = 10$, $BC = 5$, $AC = \sqrt{75}$,

$$AD = \sqrt{62,5 + \sqrt{781,25}}$$
$$BD = \sqrt{31,25} - 2,5$$
$$AC \cdot BD = \sqrt{2343,75} - \sqrt{468,75}$$
$$AD \cdot BC = \sqrt{1562,5 + \sqrt{488281,25}}.$$

On a donc

[8] Voir le calcul de CD dans le problème <1>.

$$10DC = \sqrt{1562,5 + \sqrt{488281,25}} + \sqrt{468,75} - \sqrt{2343,75}$$
$$CD = \sqrt{15,625 + \sqrt{48,828125}} + \sqrt{4,6875} - \sqrt{23,4375}$$
$$CD = \sqrt{15 + \frac{5}{8} + \sqrt{48 + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{8}}} + \sqrt{4 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} - \sqrt{23 + \frac{3}{8} + \frac{1}{16}}.$$

Calcul approché de CD en notation sexagésimale :

$$a = \sqrt{48 + \frac{3}{4} + \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{8}} = \sqrt{48,828125} \approx 6 + 59'15''46'''$$
$$b = 15 + \frac{5}{8} = 15 + 37'30''$$
$$a + b \approx 22 + 36'45''46'''$$
$$\sqrt{a+b} \approx 4 + 45'19''1'''$$
$$c = \sqrt{4 + \frac{5}{8} + \frac{1}{16}} \approx 2 + 9'54''12'''$$
$$\sqrt{a+b} + c - d \approx 2 + 4'44''48'''.$$

Ce polygone à 15 côtés n'est pas considéré par Euclide. On voit qu'il est facile à déterminer si on connaît C_3, C_6 et C_{10}.

– **12** – On connaît la somme $s = 10$ de l'aire et de la hauteur d'un triangle équilatéral ; calculer cette hauteur.

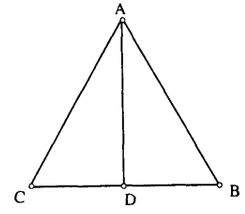


Fig. 9

Soit ABC le triangle équilatéral de hauteur $AD = x$. Soit D le milieu de BC, on a

$$DC = \frac{x}{\sqrt{3}}$$
$$\text{aire}(ABC) = \frac{x^2}{\sqrt{3}}.$$

On a donc

$$x+\frac{x^2}{\sqrt{3}}=s,$$

x est la racine positive de l'équation

$$x^2+x\sqrt{3}-s\sqrt{3}=0$$

qu'Abū Kāmil résout pour $s = 10$:

$$x^2+x\sqrt{3}=\sqrt{300}$$
$$x=\sqrt{\frac{3}{4}+\sqrt{300}}-\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Notons qu'Abū Kāmil additionne un segment de droite et une aire.

– **13** – Dans un triangle équilatéral ABC dont on connaît un côté, on inscrit un rectangle[9] $EGHI$. Quel doit être le côté $EH = x$ du rectangle pour que le côté du triangle et l'aire du rectangle soient mesurés par le même nombre $a = 10$?

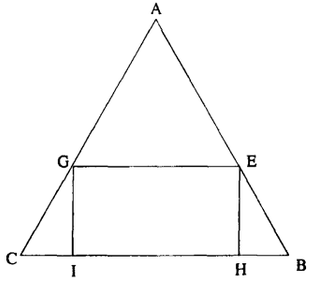


Fig. 10

[9] Le problème n'est possible que pour un rectangle, comme le suppose Abū Kāmil. Pour que $EHIG$ soit un carré, il faudrait

$$EH = HI \Leftrightarrow a-\frac{2x}{\sqrt{3}}=x \Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.$$

L'aire du carré serait alors $\frac{3a^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}$. La condition $\frac{3a^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2} = a$ donne $a=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{3}$. Le problème n'est possible que pour $a = \frac{7+4\sqrt{3}}{3} \approx 4{,}64\ldots$ très proche de $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, car $\frac{7+4\sqrt{3}}{3}-\frac{8\sqrt{3}}{3}=\frac{7-4\sqrt{3}}{3}\approx 0{,}024\ldots$

Si $EH = x$, alors $BH = IC = \frac{x}{\sqrt{3}}$; or $BC = a$, donc $HI = a - \frac{2x}{\sqrt{3}}$. L'aire du rectangle $EHIG$ est alors

$$x\left(a-\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)=a.$$

Cette équation s'écrit

$$2x^2-a\sqrt{3}x+a\sqrt{3}=0.$$

Son discriminant est $\Delta=a\sqrt{3}\left(a\sqrt{3}-8\right)$. Si $a>\frac{8\sqrt{3}}{3}$, l'équation a deux racines positives, le problème a deux solutions. Si $a=\frac{8\sqrt{3}}{3}$, le problème a une solution, $x=\frac{a\sqrt{3}}{4}=2$. Si $a<\frac{8\sqrt{3}}{3}$, le problème n'a pas de solution. Pour $a = 10$, le problème a donc deux solutions. L'équation s'écrit :

$$x^2-5x\sqrt{3}+5\sqrt{3}=0$$

ou encore

$$x^2-x\sqrt{75}+\sqrt{75}=0$$

dont les racines sont

$$x=\sqrt{\frac{75}{4}}\pm\sqrt{\frac{75}{4}-\sqrt{75}}.$$

Abū Kāmil donne la plus grande des deux.

– **14** – Soit un triangle équilatéral ABC et le carré $HLMO$ inscrit dans ce triangle. Déterminer le côté x du carré pour que aire (ABC) + aire $(HLOM) = s = 10$ (le nombre donné).

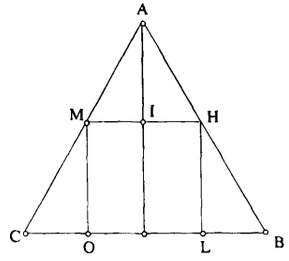


Fig. 11

On a vu (note du problème 13) que le côté a du triangle équilatéral et le côté x du carré inscrit sont liés par la relation $x\left(2+\sqrt{3}\right)=a\sqrt{3}$. L'aire du triangle ABC est

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{x^2\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{4\sqrt{3}}.$$

Le nombre x cherché est donc solution de l'équation

$$x^2+\frac{x^2\left(2+\sqrt{3}\right)^2}{4\sqrt{3}}=s$$

qui s'écrit

$$x^2\left(8\sqrt{3}+7\right)=4s\sqrt{3},$$

d'où

$$x^2=\frac{4s\sqrt{3}}{8\sqrt{3}+7}=\frac{4s\sqrt{3}\left(8\sqrt{3}-7\right)}{143}.$$

Si $s=10$

$$x^2=\frac{960-280\sqrt{3}}{143}.$$

Méthode d'Abū Kāmil : Il ne part pas de la relation entre a et x, mais ses calculs en tiennent compte. Il pose $HL = MH = x$, d'où $OC = BL = \frac{x}{\sqrt{3}}$ et $AI = x\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{aire}(MOC)+\text{aire}(BHL)=\frac{x^2}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{x^4}{3}}$$

$$\text{aire}(AMH)=\frac{x^2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{\frac{3x^4}{16}}$$

$$\text{aire}(ABC)+\text{aire}(MHLO)=10$$

$$\Leftrightarrow 10-2x^2=\sqrt{\frac{x^4}{3}}+\sqrt{\frac{3x^4}{16}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{300}=x^2+\frac{3}{4}x^2+2\sqrt{3}x^2$$

$$\Leftrightarrow 10\sqrt{3}=x^2\left(\frac{7}{4}+2\sqrt{3}\right).$$

Abū Kāmil multiplie les deux membres par l'inverse de $\frac{7}{4}+2\sqrt{3}$, c'est-à-dire par

$$\frac{16}{143}\left(2\sqrt{3}-\frac{7}{4}\right)=\frac{32\sqrt{3}}{143}-\frac{28}{143}.$$

Il vient :

$$x^2=\frac{960}{143}-\frac{280\sqrt{3}}{143}=6+\frac{102}{143}-\sqrt{\frac{235200}{20449}}=6+\frac{102}{143}-\sqrt{11+\frac{10261}{20449}}.$$

L'aire du triangle est $10-x^2$, soit

$$3+\frac{41}{143}+\sqrt{11+\frac{10261}{20449}}.$$

– 15 – Dans un carré $ABCD$, on inscrit un pentagone $AEHRM$ dont tous les côtés sont égaux. Connaissant la longueur $a = 10$ du côté du carré, calculer la longueur x du côté du pentagone.

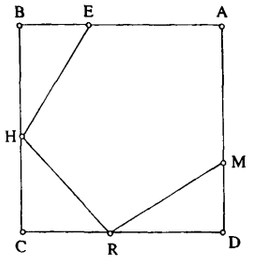


Fig. 12

$$AE = EH = HR = RM = MA = x.$$

On a $EB = MD = a - x$,

$$CH = CR = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$HB = RD = a - \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Dans le triangle EBH, on a $EB^2 + BH^2 = EH^2$, d'où

$$(a-x)^2+\left(a-\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2=x^2$$
$$x^2-2ax\left(2+\sqrt{2}\right)+4a^2=0.$$

Le discriminant est $\Delta=a^2\left(2+\sqrt{2}\right)^2-4a^2=a^2\left(2+4\sqrt{2}\right)$. Cette équation a deux racines positives telles que $0<x'<a<x''$, car $f(a)<0$. La racine x' est donc solution du problème

$$x'=a\left(2+\sqrt{2}\right)-a\sqrt{2+4\sqrt{2}}\,.$$

Pour a = 10, on trouve

$$x=10\left(2+\sqrt{2}\right)-10\sqrt{2+4\sqrt{2}}\,,$$

solution donnée par Abū Kāmil sous la forme

$$x=20+\sqrt{200}-\sqrt{200+\sqrt{320000}}\,.$$

– **16** – Trouver le côté d'un pentagone régulier convexe dont l'aire s est connue, soit s = 50.

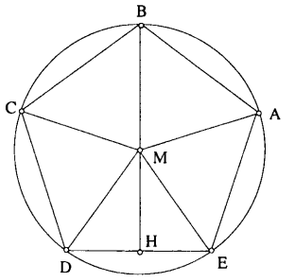


Fig. 13

On a vu que, si C_5 est le côté du pentagone et $2R$ le diamètre du cercle circonscrit, on a

$$4R^2=2C_5^2+\sqrt{\frac{4}{5}C_5^4}=2C_5^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Si on pose $DE=C_5=x$, on a :

$$ME^2=R^2=\frac{x^2}{2}+x^2\sqrt{\frac{1}{20}}.$$

On en déduit

$$MH^2=ME^2-\frac{x^2}{4}=\frac{x^2}{4}+x^2\sqrt{\frac{1}{20}}$$
$$[\text{aire}(MDE)]^2=MH^2\cdot HE^2=\frac{x^4}{4}\left[\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{20}}\right]=\frac{s^2}{25}$$
$$x^4\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}=\frac{16s^2}{25}.$$

L'inverse de $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}$ est $\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-2\right)=5-\sqrt{20}$, d'où

$$x^4=\frac{16}{25}s^2\left(5-\sqrt{20}\right)$$
$$x^2=\frac{4}{5}s\sqrt{5-\sqrt{20}}\,.$$

Si s = 50, on trouve :

$$x^4=1600\left(5-\sqrt{20}\right)=8000-1600\sqrt{20}$$
$$x^2=40\sqrt{5-\sqrt{20}}$$
$$x=2\sqrt{10-\sqrt{5-\sqrt{20}}}\,.$$

– **17** – Trouver le côté d'un décagone régulier convexe dont l'aire s est connue, soit s = 100.

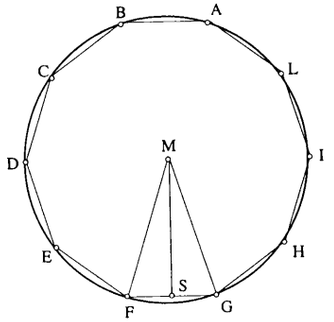


Fig. 14

On a vu dans le problème <9> que le diamètre $2R$ du cercle circonscrit à un décagone de côté C_{10} vérifie

$$2R = C_{10}\left(\sqrt{5}+1\right).$$

Si on pose $GF = C_{10} = x$, alors

$$MF = R = \frac{x}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)$$

et $MS^2 = MF^2 - FS^2$, d'où

$$MS^2 = \frac{x^2}{4}\left(\sqrt{5}+1\right)^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}\left(5+2\sqrt{5}\right).$$

L'aire du triangle MFG est $MS \cdot FS = \frac{s}{10}$, d'où

$$\frac{x^2}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}} = \frac{s}{10}\ ;$$

on en déduit x^2.

On peut écrire :

$$x^4\left(5+2\sqrt{5}\right) = \frac{16s^2}{100} \Leftrightarrow x^4 = \frac{16}{500}s^2\left(5-2\sqrt{5}\right) \Leftrightarrow x^4 = \frac{16}{100}s^2 - \frac{32}{500}s^2\sqrt{5}.$$

Si $s = 100$, on a $x^4 = 1600 - 640\sqrt{5}$ ou

$$x^4 = 1600 - \sqrt{2048000},$$

qui est la réponse donnée par Abū Kāmil.

Note 1 :

Définition : $\left.\begin{array}{l} B \text{ partage } AC \text{ en moyenne} \\ \text{et extrême raison} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = AC \cdot BC \quad (1)$

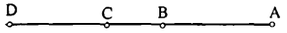


Fig. 15

Conséquence : Soit D tel que $AD = AC+AB$ ($CD = AB$).

$$(1) \Leftrightarrow \frac{AC}{AB+AC} = \frac{AB}{AB+BC} \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{DC}{AC} \Rightarrow AC^2 = DC \cdot AD,$$

donc C partage AD en moyenne et extrême raison et AC est la plus grande partie de AD (cf. *Éléments* XIII.5).

Note 2 :

Soit $GF = C_{10}$ et $GM = C_6$. Pour un cercle donné, on a $C_6 = R$ et $R = \frac{1}{2}C_{10}\left(1+\sqrt{5}\right)$.

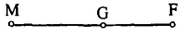


Fig. 16

$$MG^2 = \frac{C_{10}^2}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)^2$$

$$MF = R + C_{10} = \left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)C_{10}$$

$$MF \cdot MG = C_{10}^2\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

Mais

$$\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)^2 = \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2},$$

donc

$$(\alpha) \qquad FM \cdot FG = MG^2.$$

Donc G partage MF en moyenne et extrême raison (cf. *Éléments*, XIII.9). La relation (α) est équivalente à

$$(\beta) \qquad \left(GM - \frac{GF}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}GF^2.$$

En effet, (β) s'écrit :

$$GM^2 - GM \cdot GF = GF^2 \Leftrightarrow GM^2 = GF(GM+GF) \Leftrightarrow GM^2 = GF \cdot MF.$$

De (β), Abū Kāmil déduit $GM = \frac{1}{2}GF(1+\sqrt{5})$, résultat déjà établi par une autre méthode.

– **18** – Calculer le côté d'un pentagone régulier convexe *ABCDE*, connaissant l'aire *s* du triangle *BDE* inscrit dans le pentagone ; soit $s = 10$.

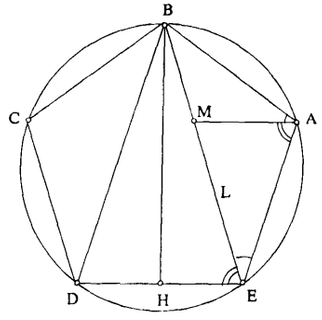


Fig. 17

Soit *M* sur *EB* tel que $EM = ED = EA = AB$; alors les triangles *ABM* et *ABE* sont semblables, donc $\frac{BM}{BA} = \frac{BA}{BE}$, d'où

$$(1) \qquad BE \cdot BM = EM^2.$$

M divise *EB* en moyenne et extrême raison, avec $ED = EM > MB$. Dans ce cas la relation (1) est équivalente à

$$\left(BM + \frac{1}{2}EM\right)^2 = \frac{5}{4}EM^2.$$

Soit *L* le milieu de *EM* ; on a $BL^2 = 5EL^2$. Si on pose $ED = x$, on a

$$EL = \frac{x}{2}$$

$$BL = \frac{x\sqrt{5}}{2}$$

$$BE = BL + LE = \frac{x}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Soit *H* le milieu de *DE*, $BH \perp DE$ et

$$BH^2 = BE^2 - HE^2 = \frac{x^2}{4}(\sqrt{5}+1)^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}(5+2\sqrt{5})$$

$$BH = \frac{x}{2}\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

L'aire du triangle *BED* est égale à $BH \cdot EH$, donc

$$s = \frac{x^2}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

Nous remarquons que, si nous remplaçons $\frac{s}{10}$ par *s*, cette équation est la même que celle du problème <17>. En effet, le triangle *GMF*, dans le problème <17>, et le triangle *BED* de <18> sont semblables. Abū Kāmil le fait d'ailleurs remarquer à la fin. Les calculs numériques sont identiques car ici $s = 10$ et dans <17> $\frac{s}{10} = 10$ également.

– **19** – Calculer le côté d'un pentagone régulier convexe *ABCDE*, connaissant l'aire *s* du triangle *ABE* ; soit $s = 10$.

On considère la figure du problème <18> avec *M* tel que $EM = AE$ et $EM^2 = BE \cdot BM\,(\alpha)$.

$$(\alpha) \Leftrightarrow EM^2 = (BE - EM)\cdot BE \Leftrightarrow EM^2 + EM \cdot BE = BE^2 \Leftrightarrow \left(EM + \frac{1}{2}BE\right)^2 = \frac{5}{4}BE^2.$$

On pose $BE = x$, on a

$$\left(AE + \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}x^2,$$

d'où

$$AE = \frac{x}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Soit *O* le milieu de *BE*, $AO \perp BE$, d'où

$$AO^2 = AE^2 - \frac{BE^2}{4} = \frac{x^2}{4}(\sqrt{5}-1)^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}(5-2\sqrt{5}).$$

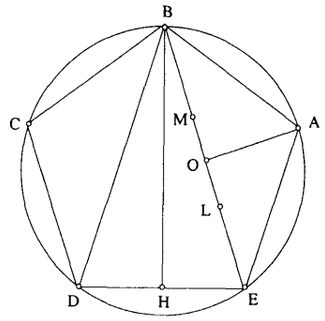


Fig. 18

Le carré de l'aire du triangle ABE est $AO^2 \cdot \frac{BE^2}{4}$, on a donc

$$\frac{x^4}{16}\left(5-2\sqrt{5}\right)=s^2,$$

d'où

$$x^4=\frac{16}{5}s^2\left(5+2\sqrt{5}\right)$$
$$x^2=4s\sqrt{1+\frac{2}{5}\sqrt{5}}.$$

Pour $s = 10$, on a $x^4 = 320\left(5+2\sqrt{5}\right) = 1600 + 640\sqrt{5} = 1600 - \sqrt{2048000}$.

– **20** – Soit un décagone régulier convexe $ABCDEFGHIK$; calculer la longueur de la corde KH, connaissant l'aire s du triangle KIH ; soit $s = 10$.

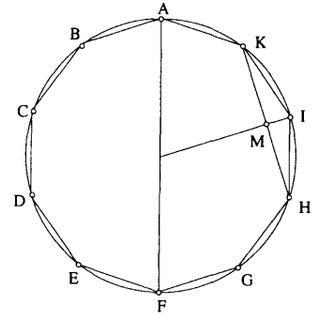


Fig. 19

$$KH = C_5 = x.$$

On a vu que

$$R^2=\frac{x^2}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Or Euclide a montré (*Éléments* XIII.10) que $C_6^2 + C_{10}^2 = C_5^2$, donc

$$KI^2 = KH^2 - R^2 = \frac{x^2}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

et

$$MI^2 = KI^2 - KM^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2\sqrt{5}}.$$

L'aire du triangle KHI donne

$$s = KM \cdot MI \Leftrightarrow s^2 = \frac{x^4}{16}\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{x^4}{16\sqrt{5}}\left(\sqrt{5}-2\right),$$

d'où $x^4 = 16s^2\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+2\right) = 80s^2 + 32s^2\sqrt{5}$. Pour $s = 10$, on a

$$x^4 = 8000 + 3200\sqrt{5} = 8000 + \sqrt{51200000},$$

qui est la valeur donnée par Abū Kāmil.

CHAPITRE IV

L'ANALYSE INDÉTERMINÉE RATIONNELLE

1. INTRODUCTION

Le troisième livre de l'*Algèbre* d'Abū Kāmil représente un événement mathématique majeur, dont l'importance n'a pas échappé aux successeurs. C'est dans ce livre en effet que l'on rencontre la première étude délibérément et entièrement consacrée à l'analyse indéterminée rationnelle. Al-Khwārizmī n'avait pas abordé cette étude dans son livre, et Diophante, bien avant, même s'il étudie dans ses *Arithmétiques* essentiellement des problèmes indéterminés, ne distingue pas plus entre problèmes déterminés et problèmes indéterminés qu'entre problèmes possibles et problèmes impossibles. Avec Abū Kāmil, les distinctions sont rigoureusement établies et, plus important encore, il cherche à constituer, pourrait-on dire, une algèbre des problèmes indéterminés, c'est-à-dire à fonder un nouveau chapitre des mathématiques : l'analyse indéterminée. Ce chapitre figurera désormais dans tout traité substantiel d'algèbre. À son tour, cette recherche va contribuer à élargir le domaine du calcul algébrique et l'enrichir de nouveaux algorithmes, ainsi que de nouvelles méthodes de démonstration algébrique, comme celle de l'élimination. On peut donc voir dans cet événement le début d'une longue marche dans ces deux domaines à la fois : l'analyse indéterminée et le calcul algébrique abstrait.

La lecture de ce troisième livre conduit à s'interroger sur la pratique mathématique de l'époque, et donc sur ce qui fut le point de départ d'Abū Kāmil. Or, à notre connaissance, aucun mathématicien entre al-Khwārizmī et Abū Kāmil ne s'est occupé d'analyse indéterminée. Que ce soit Sanad (Sind) ibn ʿAlī, Ibn Turk ou al-Ṣaydanānī, nul n'a laissé le moindre titre en ce domaine. Le livre d'Ibn Turk, par exemple, porte sur les démonstrations de l'équation du second degré et sur l'algorithme de solution[1]. Il en est de même de l'écrit de Thābit ibn Qurra[2]. Tout ce que l'on sait nous vient

[1] A. Sayili, *Logical Necessities in Mixed Equations by ʿAbd al-Ḥamīd ibn Turk and the Algebra of his Time*, Ankara, 1962.

[2] R. Rashed, « Résolution géométrique des équations du second degré », dans *Thābit ibn Qurra. Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad*, Scientia Graeco-Arabica, vol. 4, Berlin/New York, 2009, p. 153-169.

d'Abū Kāmil lui-même. Il nous apprend que les arithméticiens traitaient des problèmes indéterminés, qu'ils baptisaient d'un nom spécifique : « fluides, *sayyāla* ». Voici ce qu'il écrit au début de ce troisième livre :

> Nous expliquons maintenant beaucoup de problèmes indéterminés que certains arithméticiens (calculateurs, *ḥussāb*) appellent fluides (*sayyāla*), je veux dire par cela qu'on peut déterminer de nombreuses solutions vraies par une inférence (*qiyās*) convaincante et une méthode claire ; certains de ces problèmes circulent parmi les arithméticiens selon des types (*abwāb*)[3], sans qu'ils aient établi la cause (*al-ʿilla*) à partir de laquelle ils procèdent. J'ai résolu certains d'entre eux à l'aide d'un principe valide (*aṣl ṣaḥīḥ*) et d'une procédure facile et très utile[4].

Mais, qui sont ces « arithméticiens » ? Abū Kāmil ne prononce aucun nom ni ne cite aucun titre. Les seuls noms qu'il évoque dans son *Algèbre*, on l'a déjà souligné, sont ceux d'al-Khwārizmī, d'Euclide et de Ptolémée, ainsi que les titres de leurs livres. Dans ses autres écrits, il nomme Ibn Turk et son petit-fils Ibn Abī Barza. Or aucun des deux ne s'occupe d'analyse indéterminée. La perte des écrits des algébristes de la première moitié du neuvième siècle, tels que Sanad (Sind) ibn ʿAlī, Abū Ḥanīfa al-Daynūrī, Abū al-ʿAbbās al-Sarakhsī, entre autres successeurs d'al-Khwārizmī, nous prive d'une documentation qui nous aurait permis d'affiner notre question. On sait donc seulement, des propos mêmes d'Abū Kāmil, qu'il y avait des arithméticiens qui étudiaient aussi bien des problèmes indéterminés que des problèmes concrets divers – problèmes des postes par exemple –, ou des progressions arithmétiques. On pourrait se demander si ces arithméticiens avaient eu un quelconque accès aux *Arithmétiques* de Diophante, avant qu'ils soient traduits par Qusṭā ibn Lūqā dans les années soixante-dix du neuvième siècle à Bagdad. Question qui mérite d'être posée, étant donné qu'il demeure quelques traces des problèmes de Diophante dans ce

[3] À l'époque, le terme *bāb* (pluriel *abwāb*) revêt trois sens, comme en témoigne l'*Algèbre* d'al-Khwārizmī, livre de référence d'Abū Kāmil. Le premier sens et le plus courant chez les auteurs du IX^e^ siècle et aujourd'hui encore est celui de « chapitre » ; par exemple, le « chapitre (*bāb*) sur la multiplication » (cf. al-Khwārizmī, *Livre d'algèbre*, p. 122-123). Le second sens est celui de « sorte » ou « type ». Ainsi, al-Khwārizmī parle de « trois sortes (*abwāb*) », c'est-à-dire des trois sortes de l'équation quadratique : $ax^2 + bx = c$, $ax^2 = bx + c$, $ax^2 + c = bx$ (cf. par exemple p. 104-105). Le troisième sens est celui de « procédé » ou « algorithme ». Ainsi, avant de donner l'algorithme de solution, al-Khwārizmī commence-t-il par le terme *fa-bābuhu* (cf. p. 104-105). Dans la citation ci-dessus d'Abū Kāmil, le terme semble renvoyer au second sens.

Notons que le traducteur latin de l'*Algèbre* d'Abū Kāmil l'a rendu parfois par « porta », parfois par « capitulum » et parfois par « via », lorsqu'il s'agit du procédé ou de l'algorithme.

[4] Voir plus loin p. 578.

troisième livre d'Abū Kāmil, alors que rien ne prouve que ce dernier a eu un accès direct aux *Arithmétiques*.

Dans le texte cité plus haut ainsi que dans d'autres passages du troisième livre, Abū Kāmil s'explique sur son projet et sur son parcours : partir des pratiques de ces arithméticiens, constater leurs carences mathématiques et épistémiques, les réformer – c'est-à-dire les asseoir sur des bases mathématiques solides au moyen de l'algèbre. Il s'agit donc, en bref, d'algébriser les procédés mis en pratique par les arithméticiens, ou encore de transformer, à l'aide de l'algèbre, des procédés somme toute artisanaux en une science mathématique, et donc en un savoir apodictique. Il écrit :

> Nous expliquons également une grande partie de ce que les arithméticiens ont défini dans leurs livres et qu'ils ont fait par types (*bāb*), par l'algèbre et par l'inférence (*qiyās*), pour que celui qui le lit et l'examine le comprenne véritablement et ne se contente pas de le réciter par cœur et d'imiter leur auteur[5].

Or cette démarche d'algébrisation des pratiques des arithméticiens est aussi celle d'Abū Kāmil dans un autre traité, intitulé *Sur les volatiles*, où il s'occupe des systèmes d'équations linéaires indéterminées. Dans ce livre cependant, il ne cherche pas les solutions rationnelles, mais toutes les solutions entières (cf. plus loin).

Le troisième livre de l'*Algèbre* d'Abū Kāmil se partage en deux parties, suivies d'un appendice. La première partie, qui représente l'essentiel du livre, comprend quarante-trois équations et systèmes d'équations indéterminées. Elle se subdivise à son tour en trois groupes d'équations indéterminées : le premier est composé de vingt-cinq équations et systèmes d'équations indéterminées du second degré, qui définissent – dirait-on aujourd'hui – une courbe de genre 0[6] ; le second comporte treize systèmes d'équations indéterminées qui définissent toutes une courbe de genre 1 ; le troisième cinq systèmes d'équations linéaires – homogènes et non homogènes – indéterminées.

[5] Voir plus loin p. 578.

[6] On classe les courbes algébriques grâce à un invariant par transformations birationnelles qui s'appelle le « genre » ; c'est un entier g qui est nul pour les courbes birationnellement équivalentes à la droite projective (courbes unicursales) et qui est égal à 1 pour les courbes birationnellement équivalentes à une courbe plane d'équation $y^2 = P(x)$ où P est un polynôme de degré 3 ou 4 sans racine multiple. Si une courbe plane de degré n a d points doubles ordinaires (y compris les points éventuels à l'infini), son genre est égal à $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$.

La deuxième partie est un ensemble de problèmes arithmétiques divers, dont certains sont indéterminés et d'autres concernent des suites arithmétiques, etc. Cette partie, sur laquelle se termine le troisième livre, est, semble-t-il, destinée à familiariser le lecteur avec le calcul algébrique – des « exercices résolus », en quelque sorte. Dans l'appendice, Abū Kāmil démontre des propositions sur les progressions arithmétiques, d'une origine non précisée et que les mathématiciens contemporains utilisaient sans les démontrer.

Examinons donc ces différents groupes.

2. ÉQUATIONS ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Problèmes 1 à 25

Les vingt-cinq premiers problèmes se répartissent selon les quatre groupes suivants :

1. $x^2 \pm bx \pm c = y^2$ (de 1 à 6)

   $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ (12)

   $-x^2 + bx + c = y^2$ (10, 19, 21, 24, 25)

2. $\begin{cases} a \mp x^2 = y^2 \\ b \pm x^2 = z^2 \end{cases}$ (de 15 à 18)

3. $\begin{cases} x^2 + ax = y^2 \\ x^2 + bx = z^2 \end{cases}$ (7, 8, 9, 11, 20, 22, 23)

4. $\begin{cases} x + y = a \\ k_1 + x = z_1^2 \\ k_2 \pm y = z_2^2 \end{cases}$ (13, 14)

Les treize derniers problèmes constituent les groupes suivants :

1. $\begin{cases} x_1^2 + k_1 x_1 = x_2^2 \\ x_2^2 + k_2 x_2 = x_3^2 \end{cases}$ (26 à 30, 32, 34)

2. $\begin{cases} x^2 + k_1 x + c_1 = y^2 \\ x^2 + k_2 x + c_2 = z^2 \end{cases}$ (31, 33, 35, 36, 37, 38)

Tous les coefficients indiqués (k_1, k_2, c_1, c_2) sont des nombres rationnels.

À cette classification algébrique s'en superpose une autre, selon la méthode appliquée. Ainsi Abū Kāmil applique la même méthode pour les problèmes (26, 27, 30) et une autre méthode pour les problèmes (28, 29, 31 à 38), comme on le verra plus loin.

On voit clairement l'ordre suivi par Abū Kāmil du point de vue algébrique : équations indéterminées du second degré, système de deux équations indéterminées réductible à une équation indéterminée du second degré, etc. C'est l'interprétation géométrique qui révèle la raison objective – ignorée d'Abū Kāmil – de cet ordre : les vingt-cinq premiers problèmes définissent, chacun, une courbe plane de genre 0, alors que les treize derniers définissent, chacun, une courbe de genre 1.

La question reste entière cependant : quelle voie Abū Kāmil a-t-il empruntée, au IX^e siècle, pour parvenir à cette classification et à cet ordre ? Non seulement il savait, semble-t-il, que les vingt-cinq premiers problèmes relèvent tous d'un seul et même groupe, mais il donne une condition nécessaire et suffisante pour déterminer les solutions rationnelles positives. Prenons l'exemple du problème 19. Il se récrit :

$$8x - x^2 + 109 = y^2.$$

Abū Kāmil commence par souligner que cette équation a une infinité de solutions rationnelles. Il considère alors la forme générale :

(1) $\quad ax - x^2 + b = y^2$

et écrit :

> s'il te parvient des problèmes analogues à ce problème, multiplie la moitié du nombre des racines par elle-même et ajoute ce produit aux dirhams (*i. e.* aux unités) ; si la somme se partage en deux parties dont chacune a une racine, alors le problème est rationnel et il a des solutions innombrables ; mais si la somme ne se partage pas en deux parties dont chacune a une racine, alors le problème est irrationnel et sans solution[7].

[7] Voir plus loin, p. 616.

Abū Kāmil donne donc une condition nécessaire et suffisante pour savoir si l'équation de type (1) a ou non une infinité de solutions rationnelles. En effet, l'équation (1) se récrit :

$$y^2+\left(\frac{a}{2}-x\right)^2=b+\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Posons $x=\frac{a-t}{2}$, on a

(2) $$y^2+\left(\frac{t}{2}\right)^2=b+\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Si $b+\left(\frac{a}{2}\right)^2=u^2+v^2$, avec u et v rationnels, alors il y a une infinité de solutions rationnelles, d'après le problème 12 de ce livre.

Supposons maintenant que $b+\left(\frac{a}{2}\right)^2=u^2+v^2$; posons $y = u + \tau$ et $t = 2(k\tau - v)$ et substituons dans (2). On a $\tau=2\frac{kv-u}{k^2+1}$ rationnel et $y=\frac{(k^2-1)u+2kv}{k^2+1}$, $t=2\frac{(k^2-1)v-2ku}{k^2+1}$ et $x=\frac{1}{2}\left(a-2\frac{(k^2-1)v-2ku}{k^2+1}\right)$, tous rationnels.

Autrement dit, Abū Kāmil exprime la condition suivante : si l'une des variables peut être exprimée comme fonction rationnelle de l'autre, ou, encore, si l'on peut avoir un paramétrage rationnel, on a toutes les solutions. Alors que, en revanche, si la somme nous conduit à une expression dont le radical est incontournable, on n'a aucune solution.

Traduction géométrique de cette condition : une courbe algébrique du second degré ne possède aucun point rationnel, ou elle est birationnellement équivalente à une droite.

Si donc Abū Kāmil a pu distinguer entre les deux principaux groupes de problèmes, c'est grâce à cette condition et parce qu'il savait que les systèmes 2, 3 et 4 du premier groupe se ramènent à une expression indéterminée du second degré de la forme du groupe 1. On découvre d'ailleurs en y regardant de plus près qu'il organise son exposé autour des différentes formes de l'équation indéterminée du second degré. C'est là un début d'organisation à l'aide des formes algébriques des équations en analyse indéterminée qui sera développé systématiquement par al-Karaji. D'autre

part, en plus de cette organisation, Abū Kāmil est, à notre connaissance, le premier mathématicien à avoir établi que, dans l'analyse indéterminée rationnelle, on peut avoir une infinité de solutions rationnelles pour une certaine classe de problèmes (ceux qui définissent une courbe de genre 0).

Commentons systématiquement les différents groupes.

2.1. Les six premiers problèmes se récrivent

$$x^2 \pm c = y^2 \qquad (1, 2)$$

$$x^2 \pm bx = y^2 \qquad (3, 4)$$

$$x^2 \pm bx + c = y^2 \qquad (5, 6)$$

Toutes ces équations sont des cas particuliers de l'équation

(1) $$x^2 + bx + c = y^2 \qquad b, c \in \mathbf{Q}.$$

Résoudre algébriquement cette équation en nombres rationnels revient à trouver une valeur rationnelle de x qui rende le trinôme en x un carré parfait. La méthode, déjà appliquée par Diophante, consiste à poser

(*) $$x = t \text{ et } y = t + u$$

d'où

$$x=t=\frac{c-u^2}{2u-b} \text{ et } y=\frac{c+u(u-b)}{2u-b}.$$

C'est la méthode dite « de la corde », que retrouve Abū Kāmil.

L'interprétation géométrique qui justifie cette appellation est la suivante : l'équation (1) définit une conique dans le plan dont la clôture projective possède les points (±1 :1 : 0), à l'infini. La droite (*) passant par un de ces points coupe la conique en un autre point rationnel.

Au cours de la solution, Abū Kāmil rappelle qu'on peut avoir une infinité de solutions en donnant à u toutes les valeurs rationnelles que l'on veut. À titre d'illustration, il donne deux valeurs à u.

Le problème 12 se récrit :

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \qquad a, b \in \mathbf{Q}.$$

C'est le problème II.9 des *Arithmétiques* de Diophante. Cette fois encore, Abū Kāmil procède par la méthode de la corde. Il pose

$$(*) \qquad x = a + t \text{ et } y = b - ut$$

et, en substituant dans l'équation, il obtient

$$t = \frac{2(bu - a)}{u^2 + 1} ;$$

d'où

$$x = \frac{a(u^2 - 1) + 2bu}{u^2 + 1} \text{ et } y = \frac{b(1 - u^2) + 2au}{u^2 + 1}.$$

On note que l'équation du problème définit un cercle et que le point (a, b) est un point rationnel du cercle. La droite définie par (*) passe par ce point et coupe le cercle en un autre point rationnel.

C'est cette même méthode de la corde qu'Abū Kāmil applique pour résoudre les problèmes 10, 19, 21, 24 et 25. Rappelons brièvement sa démarche. Le problème 19 a été discuté auparavant.

Le problème 10 se récrit

$$x - x^2 = y^2.$$

Le point origine (0, 0) est rationnel. On coupe la conique définie par l'équation par la droite $x = t$, $y = at$.

Abū Kāmil obtient $x = \frac{1}{1 + a^2}$ et $y = \frac{a}{1 + a^2}$.

Le problème 21 se récrit

$$-x^2 + 2x + 49 = y^2,$$

cas particulier de l'équation (1) où le terme constant, $c = 49$, est un carré.

Le problème 24 se récrit

$$-x^2 + 10x - 8 = y^2 ;$$

ou, plus généralement,

$$-x^2 + ax - b = y^2.$$

Abū Kāmil résout l'équation comme un trinôme du second degré en x ; il obtient

$$x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b - y^2}.$$

Il rappelle que le problème est impossible lorsque le discriminant est négatif et, d'autre part, que x ne peut être rationnel que si le radical est lui-même rationnel. Il n'y a donc de solution rationnelle que s'il existe deux nombres rationnels u et v tels que

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b = u^2 + v^2 ;$$

et, dans ce cas, il existe une infinité de solutions rationnelles. En effet, chaque représentation $u^2 + v^2$ (il y en a une infinité selon le problème 12) donne alors quatre couples (x, y) solutions :

$$\left(\pm v + \frac{a}{2}, u\right) \text{ et } \left(\pm u + \frac{a}{2}, v\right).$$

Le problème 25 se récrit

$$-x^2 - 6x + 260 = y^2 ;$$

ou, plus généralement,

$$-x^2 - ax + b = y^2.$$

Comme dans le problème précédent, on résout le trinôme du second degré en x et on procède comme en 24. On obtient

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b - y^2}.$$

Il faut donc que le radical soit rationnel pour qu'on obtienne des solutions rationnelles, et donc qu'il existe u et v rationnels tels que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + b = u^2 + v^2$. Dans ce cas, il existe une infinité de solutions rationnelles.

On remarque ce souci d'Abū Kāmil d'établir chaque fois les conditions pour avoir des solutions rationnelles en nombre infini. On note également qu'il ramène tous ces problèmes à un même type, grâce aux méthodes de résolution des équations du second degré.

2.2. Le groupe suivant est composé de quatre « équations doubles » du premier degré.

(15) $\begin{cases} a - x^2 = y^2 \\ b + x^2 = z^2 \end{cases}$ (16) $\begin{cases} a - x^2 = y^2 \\ b - x^2 = z^2 \end{cases}$

(17) $\begin{cases} a + x^2 = y^2 \\ b + x^2 = z^2 \end{cases}$ (18) $\begin{cases} c + x^2 = y^2 \\ c - x^2 = z^2 \end{cases}$

Abū Kāmil procède en éliminant x dans les trois premiers systèmes, et obtient, dans 15, $y^2 + z^2 = a + b$. Il prend $a = 3$ et $b = 2$. Donc $a + b$ est la somme de deux carrés, et le problème se ramène au problème 12. Les problèmes 16 et 17 se récrivent $z^2 - y^2 = b - a$. Dans ces cas, quelle que soit la valeur de $b - a$, c'est une différence de deux carrés ; on est ramené à un problème du type 1 ou 2.

Pour résoudre le problème 18, Abū Kāmil pose

$$\begin{cases} y = u + v \\ z = u - v \end{cases}$$

et le système (18) devient

$$\begin{cases} c = u^2 + v^2 \\ x = 2uv \end{cases}$$

S'il existe u, v rationnels tels que $c = u^2 + v^2$, alors il existe une infinité de solutions rationnelles. En effet, il existe une infinité de solutions de l'équation $c = u^2 + v^2$ (problème 12).

Pour chacune de ces représentations, $(x, y, z) = (2uv, u + v, u - v)$ est solution de (18). Abū Kāmil prend $c = u^2 + v^2$: sinon il n'existe pas de solution rationnelle.

2.3. Le groupe suivant est composé des problèmes :

(7) $\begin{cases} x^2 + x = y^2 \\ x^2 + 2x = z^2 \end{cases}$ (20) $\begin{cases} x^2 + 8x = y^2 \\ x - x^2 = z^2 \end{cases}$

(8) $\begin{cases} x^2 + x = y^2 \\ x^2 + 3x = z^2 \end{cases}$ (22) $\begin{cases} x^2 + x = y^2 \\ x^2 - x = z^2 \end{cases}$

(9) $\begin{cases} x^2 - 2x = y^2 \\ x^2 - 3x = z^2 \end{cases}$ (23) $\begin{cases} x^2 + 2x = y^2 \\ x^2 - 3x = z^2 \end{cases}$

(11) $\begin{cases} x^2 + x = y^2 \\ x - x^2 = z^2 \end{cases}$

Les problèmes 7, 8, 9, 22 et 23 sont de la forme

(1) $x^2 + ax = y^2, \qquad x^2 + bx = z^2$

et les problèmes 11 et 20 sont de la forme

(1′) $x^2 + ax = y^2, \qquad bx - x^2 = z^2,$

où on suppose que $b(a + b) = \lambda^2 + \mu^2$ est somme de deux carrés (c'est $2 = 1 + 1$ dans le problème 11 et $9 = 3^2$ dans le problème 20).

Pour les résoudre, Abū Kāmil pose $x = \frac{X^2}{T}$, $y = \frac{XY}{T}$, $z = \frac{XZ}{T}$, où X, Y, Z, T sont de nouvelles inconnues. Les équations des problèmes deviennent respectivement

(2) $X^2 + aT = Y^2, \quad X^2 + bT = Z^2$;

(2′) $X^2 + aT = Y^2, \quad bT - X^2 = Z^2.$

Si $aT = 2uX + u^2$, la première équation est vérifiée et elle donne $Y = X + u$ (complétion d'un carré). On reporte la valeur de T dans la seconde équation :

$$X^2 + \frac{2bu}{a}X + \frac{bu^2}{a} = Z^2, \text{ resp. } \frac{2bu}{a}X + \frac{bu^2}{a} - X^2 = Z^2,$$

équations que l'on peut résoudre par la « méthode de la corde » comme celles du groupe (2.1).

Pour les équations 7-9 et 22-23, on pose $Z = X + v$, et on obtient

$$X = \frac{bu^2 - av^2}{2(av - bu)}, \; Y = \frac{2auv - bu^2 - av^2}{2(av - bu)},$$

$$Z = \frac{bu^2 + av^2 - 2buv}{2(av - bu)}, \; T = \frac{uv(u - v)}{av - bu},$$

$$x = \frac{(bu^2 - av^2)^2}{4uv(u - v)(av - bu)} = \frac{(b - at^2)^2}{4t(1 - t)(at - b)},$$

$$y = \frac{(bu^2 - av^2)(2auv - bu^2 - av^2)}{4uv(u - v)(av - bu)} = \frac{(b - at^2)(2at - b - at^2)}{4t(1 - t)(at - b)},$$

$$z = \frac{(bu^2 - av^2)(bu^2 + av^2 - 2buv)}{4uv(u - v)(av - bu)} = \frac{(b - at^2)(b + at^2 - 2bt)}{4t(1 - t)(at - b)},$$

où on a posé $v = tu$.

Pour les problèmes 11 et 20, l'équation en X et Z est vérifiée lorsque $X = \frac{u}{a}(b - \lambda)$ et $Z = -\frac{\mu u}{a}$; on pose donc $X = \frac{u}{a}(b - \lambda) + \xi$, $Z = v\xi - \frac{\mu u}{a}$ et on trouve

$$\xi = \frac{2u}{a}\frac{\mu v + \lambda}{v^2 + 1},$$

$$X = \frac{u}{a}\frac{v^2(b - \lambda) + 2\mu v + b + \lambda}{v^2 + 1}, \; Z = \frac{u}{a}\frac{\mu v^2 + 2\lambda v - \mu}{v^2 + 1},$$

$$Y = \frac{u}{a}\frac{v^2(a + b - \lambda) + 2\mu v + a + b + \lambda}{v^2 + 1},$$

$$T = \frac{u^2}{a^2}\frac{v^2(a + 2b - 2\lambda) + 4\mu v + a + 2b + 2\lambda}{v^2 + 1},$$

d'où on tire x, y et z en fonction de v seulement, car le facteur $\frac{u^2}{a^2}$ disparaît.

Dans le cas du problème 11, on a $a = b = 1$ et $\lambda = \mu = 1$, donc

$$X = 2u\frac{v + 1}{v^2 + 1}, \; Y = u\frac{v^2 + 2v + 3}{v^2 + 1}, \; Z = u\frac{v^2 + 2v - 1}{v^2 + 1}, \; T = u^2\frac{v^2 + 4v + 5}{v^2 + 1},$$

$$x = \frac{4(v + 1)^2}{(v^2 + 1)(v^2 + 4v + 5)}, \; y = \frac{2(v + 1)(v^2 + 2v + 3)}{(v^2 + 1)(v^2 + 4v + 5)}, \; z = \frac{2(v + 1)(v^2 + 2v - 1)}{(v^2 + 1)(v^2 + 4v + 5)}.$$

Dans le cas du problème 20, on a $a = 8$, $b = 1$ et $\lambda = 0$, $\mu = 3$, donc

$$X = \frac{u}{4}\frac{3v + 1}{v^2 + 1}, \; Y = \frac{u}{8}\frac{9v^2 + 6v + 10}{v^2 + 1}, \; Z = \frac{u}{8}\frac{3v^2 + 2v - 3}{v^2 + 1}, \; T = \frac{u^2}{16}\frac{2v^2 + 8v + 3}{v^2 + 1},$$

$$x = \frac{(3v + 1)^2}{(v^2 + 1)(2v^2 + 8v + 3)}, \; y = \frac{(3v + 1)(9v^2 + 6v + 10)}{2(v^2 + 1)(2v^2 + 8v + 3)}, \; z = \frac{(3v + 1)(3v^2 + 2v - 3)}{2(v^2 + 1)(2v^2 + 8v + 3)}.$$

La méthode d'Abū Kāmil admet l'interprétation géométrique suivante : les équations (1) définissent une courbe biquadratique C dans l'espace des coordonnées (x, y, z) ; les deux cylindres quadratiques dont elle est l'intersection sont tangents à l'origine et il en résulte que C est singulière en ce point, donc elle est de genre 0 et on peut la paramétrer rationnellement. Les équations (2) définissent une surface S intersection de deux cylindres quadratiques dans l'espace des coordonnées (X, Y, Z, T). On définit une application rationnelle f de S dans C par les formules $x = \frac{X^2}{T}$, $y = \frac{XY}{T}$, $z = \frac{XZ}{T}$, définies pour $T \neq 0$. On voit que, pour tout $X \neq 0$ et tout point (x, y, z) de C distinct de $(0, 0, 0)$, $f\left(X, \frac{Xy}{x}, \frac{Xz}{x}, \frac{X^2}{x}\right) = (x, y, z)$, donc f est surjective en dehors de l'origine ; de plus, si $b = a\alpha^2$, $f\left(0, Y, \pm\alpha Y, \frac{Y^2}{a}\right) = (0, 0, 0)$ pour tout $Y \neq 0$, mais l'origine n'est pas dans l'image de f si $\frac{b}{a}$ n'est pas un carré.

La surface S est birationnellement équivalente à sa projection S' dans l'espace des coordonnées (X, Y, Z) car T, qui figure au premier degré, s'élimine ; cette projection est un cône quadratique d'équation $b(Y^2 - X^2) = a(Z^2 - X^2)$ pour les problèmes 7-9 et 22-23, et $b(Y^2 - X^2) = a(Z^2 + X^2)$ pour les problèmes 11 et 20. L'application f se factorise à travers une application g de S' dans C définie par les formules homogènes

$$x = \frac{aX^2}{Y^2 - X^2}, y = \frac{aXY}{Y^2 - X^2}, z = \frac{aXZ}{Y^2 - X^2} ;$$

on a $g\left(X, \frac{Xy}{x}, \frac{Xz}{x}\right) = (x, y, z)$ pour tout point (x, y, z) de C distinct de $(0, 0, 0)$ et $g(0, Y, \pm\alpha Y) = (0, 0, 0)$ lorsque $b = a\alpha^2$ et $Y \neq 0$.

Pour les problèmes 7-9 et 22-23, on remarque que la droite d'équations $X = Y = Z$ est une génératrice de S' ; une parallèle à cette génératrice, d'équations $Y = X + u$, $Z = X + v$, recoupe S' en un point unique, qui dépend rationnellement des paramètres u et v. On obtient ainsi un paramétrage rationnel de S', donc de C. Pour les problèmes 11 et 20, on utilise la génératrice définie par les équations

$$X = \frac{b - \lambda}{a}(Y - X), Z = -\frac{\mu}{a}(Y - X) ;$$

un plan passant par cette génératrice recoupe le cône suivant une autre génératrice et l'équation d'un tel plan s'écrit

$$Z + \frac{\mu}{a}(Y - X) = v\left(X - \frac{b - \lambda}{a}(Y - X)\right),$$

où v est un paramètre. On retrouve ainsi les formules ci-dessus.

2.4. Ce groupe est composé des deux systèmes (13) et (14) qui se récrivent

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + k_1 = z^2 \\ k_2 \pm y = t^2 \end{cases}$$

Abū Kāmil commence par éliminer y au moyen de la première équation, puis x au moyen de la seconde. Le problème revient alors à trouver les solutions rationnelles de

$$t^2 \pm z^2 = k_2 \pm (a + k_1).$$

Dans 13, $\pm$ = -, $a = 10$, $k_1 = 20$ et $k_2 = 50$; il procède par la méthode de la corde en posant $z = \tau$ et $t = \tau + u$ et obtient

$$z = \frac{c - u^2}{2u} \quad \text{et} \quad t = \frac{c + u^2}{2u}, \text{ où } c = k_2 - (a + k_1) = 20 ;$$

et dans 14, $\pm$ = +, il prend $k_2 + (a + k_1) = 8^2 + 4^2$; il renvoie au problème 12.

Rappelons que le problème 13 se ramène à II.10 des *Arithmétiques* de Diophante, alors que 14 est II.9.

Problèmes 26 à 38

On vient d'examiner les différents groupes qui composent les vingt-cinq premiers problèmes du troisième livre, et qui tous définissent des courbes de genre 0. Les treize derniers problèmes sont tous de genre 1 ; ils sont significatifs du niveau de la recherche sur l'analyse indéterminée menée par Abū Kāmil, ainsi que de la nouveauté des méthodes qu'il a conçues. Nous allons les examiner successivement.

PROBLÈME 26.

$$\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 = x_2^2 \\ x_2^2 + 3x_2 = x_3^2 \end{cases}$$

En langage moderne, on y reconnaît les équations d'une courbe lisse de degré 4 et de genre 1 dans $\mathbf{A}^3$, dont la clôture projective possède quatre points à l'infini (1 : 1 : 1 : 0), (1 : -1 : -1 : 0), (1 : 1 : -1 : 0), (1 : -1 : 1 : 0), et un point en (0 : 0 : 0 : 1). Peut-être pouvons-nous reconstituer la démarche d'Abū Kāmil dans les cas semblables à celui-ci de la manière suivante. Soit deux équations de la forme

$$\begin{cases} x_1^2 + k_1 x_1 = x_2^2 \\ x_2^2 + k_2 x_2 = x_3^2 \end{cases}$$

Pour trouver un point rationnel, il pose $x_2 = \alpha x_1$ (où α est une constante). Ceci est l'équation d'un plan passant par (0 : 0 : 0 : 1). Ce plan contient deux autres points d'intersection avec la courbe, donnés par

$$x_1 = \frac{k_1}{\alpha^2 - 1}$$
$$x_2 = \frac{\alpha k_1}{\alpha^2 - 1}$$
$$x_3 = \pm \frac{k_2}{\alpha^2 - 1} \sqrt{\alpha^3 \frac{k_1}{k_2} + \alpha^2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 - \alpha \frac{k_1}{k_2}}.$$

On est donc amené à chercher une solution rationnelle à l'équation cubique en α, β :

$$\alpha^3 \frac{k_1}{k_2} + \alpha^2 \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 - \alpha \frac{k_1}{k_2} = \beta^2.$$

Abū Kāmil ne savait sûrement pas faire cela en toute généralité, mais il a pu facilement trouver la solution $(\alpha, \beta) = \left(\frac{k_2}{k_1}, \frac{k_2}{k_1}\right)$.

Pour cette valeur de α, la solution est d'une forme particulière :

$$x_1 = \frac{k_1}{\alpha^2 - 1} = \frac{k_1^3}{k_2^2 - k_1^2}$$
$$x_2 = \alpha x_1 = \frac{k_2 k_1^2}{k_2^2 - k_1^2}$$
$$x_3 = \pm \alpha x_2 = \alpha^2 x_1 = \pm \frac{k_2^2 k_1}{k_2^2 - k_1^2}.$$

On peut alors construire une suite infinie, en réitérant, comme le fait Abū Kāmil :

$$x_1 = \frac{k_1}{\alpha^2 - 1}$$
$$\vdots$$
$$x_i = \alpha^{i-1} x_1$$
$$\vdots$$

Cette suite géométrique de raison α est solution du système infini d'équations

$$\begin{cases} x_1^2 + k_1 x_1 = x_2^2 \\ \vdots \\ x_i^2 + k_i x_i = x_{i+1}^2 \\ \vdots \end{cases}$$

où $k_i = \alpha^{i-1} k_1$.

Ici, dans le problème 26, on a $k_1 = 2, k_2 = 3$. Abū Kāmil trouve la suite infinie

$$\left(1 + \frac{3}{5}, 2 + \frac{2}{5}, 3 + \frac{3}{5}, 5 + \frac{2}{5}, 8 + \frac{1}{10}, 12 + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}, \ldots\right),$$

suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$.

Si en effet $x_1^2 + k_1 x_1 = x_2^2$, où $x_2 = \alpha x_1$, on a, en posant $k_i = \alpha^{i-1} k_1$, $x_i = \alpha^{i-1} x_1$: $x_i^2 + k_i x_i = x_{i+1}^2$. Si donc on choisit $\alpha = \frac{k_2}{k_1}$, l'équation $x_2^2 + k_2 x_2 = x_3^2$ se vérifie, ainsi qu'une suite infinie d'autres équations.

On voit qu'Abū Kāmil a trouvé une solution à son problème initial, qui comportait deux équations. Mais, sans chercher une seconde solution, recherche qui échappait aux mathématiques dont il disposait, il s'aperçoit que le procédé qui lui a permis de résoudre la seconde équation à partir de la solution de la première permet de résoudre une troisième équation du même type avec une inconnue supplémentaire, puis une quatrième, etc., avec une itération du même procédé. Dans le cadre de sa recherche d'une infinité de solutions aux problèmes indéterminés, cette situation pouvait le satisfaire.

PROBLÈME 27. — Problème semblable au précédent. Il s'agit du système d'équations

$$\begin{cases} x_1^2 + 3x_1 = x_2^2 \\ x_2^2 + 6x_2 = x_3^2 \end{cases}$$

Ici, $k_1 = 3$ et $k_2 = 6$; la solution est donnée par $x_1 = 1$. Abū Kāmil mentionne, comme il l'a fait dans le problème précédent, un système

d'équations infini ayant pour solution une suite géométrique de raison $\frac{k_2}{k_1} = 2$:

$$\begin{cases} x_1^2 + 3x_1 = x_2^2 \\ x_2^2 + 6x_2 = x_3^2 \\ x_3^2 + 12x_3 = x_4^2 \\ x_4^2 + 24x_4 = x_5^2 \\ x_5^2 + 48x_5 = x_6^2 \\ x_6^2 + 96x_6 = x_7^2 \\ \vdots \end{cases}$$

PROBLÈME 28.

Abū Kāmil propose ici une autre méthode pour résoudre les problèmes semblables aux problèmes 26 et 27. Soit le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + 2x = y^2 \\ y^2 + y = z^2 \end{cases}$$

Pour en trouver un point rationnel, il pose $z = x + u$ (où u est une constante) ; $z = x + u$ est l'équation d'un plan passant par les points infinis (1 : 1 : 1 : 0) et (-1 : 1 : -1 : 0) ; on obtient ainsi le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + 2x = y^2 \\ y^2 + y = z^2 \\ z = x + u \end{cases}$$

Ce système possède en général deux solutions finies (puisque la courbe, de degré 4, doit couper un plan quelconque en quatre points, dont deux à l'infini). On les trouve en résolvant l'équation de degré 2 en x résultant de l'élimination de y et z. En choisissant la valeur de u de sorte que le terme de degré 2 disparaisse, on obtient une équation linéaire en x, qui nous donne une solution rationnelle. Pour éliminer y et z, Abū Kāmil procède selon les étapes suivantes. Il élimine d'abord z :

$$\begin{cases} x^2 + 2x = y^2 \\ y^2 + y = (x + u)^2 \end{cases}$$

Il élimine ensuite y : la deuxième équation, où l'on remplace y^2 par sa valeur dans la première équation, donne immédiatement $y = u^2 - (2 - 2u)x$. Il reporte cette valeur de y dans la première équation pour obtenir l'équation finale en x :

$$\left(1 - (2 - 2u)^2\right)x^2 + \left(2 + 2u^2(2 - 2u)\right)x - u^4 = 0.$$

Choisissons $u = \frac{1}{2}$, comme Abū Kāmil, afin de faire disparaître le terme en x^2. On obtient $x = \frac{1}{40}$.

Cette valeur particulière de $u = \frac{1}{2}$ donne un plan $z = x + u$ qui, non seulement passe par les points à l'infini (1 : ± 1 : 1 : 0), mais est tangent à la courbe au point (1 : -1 : 1 : 0). Calculons en effet la tangente en ce point : c'est l'intersection des plans tangents en ce point aux quadriques $x^2 + axt = y^2$, $y^2 + byt = z^2$, soit :

$$2x + at = -2y,\ -2y - bt = 2z.$$

On trouve

$$2x + (a - b)t = 2z,$$

c'est-à-dire

$$z = x + \frac{a - b}{2}t \quad (\text{ici } a = 2,\ b = 1).$$

Il s'agit de la méthode de la tangente.

PROBLÈME 29. — Problème semblable aux trois précédents. Il s'agit du système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + 4x = y^2 \\ y^2 + 2y = z^2 \end{cases}$$

Abū Kāmil adopte la méthode présentée dans le problème 28. Posons $z = x + u$, on obtient

$$\begin{cases} x^2 + 4x = y^2 \\ y^2 + 2y = (x+u)^2 \end{cases}$$

Éliminons y, on obtient

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}\left[(2u-4)x + u^2\right] \\ \left(1-(u-2)^2\right)x^2 + \left(4-(u-2)u^2\right)x - \frac{1}{4}u^4 = 0 \end{cases}$$

Choisissons $u = 1$, comme Abū Kāmil, afin de faire disparaître le terme en x^2. On obtient $x = \frac{1}{20}$.

PROBLÈME 30. — Problème semblable aux quatre précédents :

$$\begin{cases} x_1^2 - 4x_1 = x_2^2 \\ x_2^2 - 2x_2 = x_3^2 \end{cases}$$

Abū Kāmil préfère ici revenir à la méthode présentée dans le problème 26. Il pose $x_2 = \alpha x_1$, avec $\alpha = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, et obtient ainsi $x_1 = 5 + \frac{1}{3}$. Il mentionne ensuite le système d'équations infini :

$$\begin{cases} x_1^2 - 4x_1 = x_2^2 \\ x_2^2 - 2x_2 = x_3^2 \\ x_3^2 - x_3 = x_4^2 \\ x_4^2 - \frac{1}{2}x_4^2 = x_5^2 \\ x_5^2 - \frac{1}{4}x_5^2 = x_6^2 \\ x_6^2 - \frac{1}{8}x_6^2 = x_7^2 \\ x_7^2 - \frac{1}{16}x_7^2 = x_8^2 \\ \vdots \end{cases}$$

PROBLÈME 31. — Il s'agit du système d'équations :

$$\begin{cases} x^2 + x = y^2 \\ x^2 + 1 = z^2 \end{cases}$$

Pour le dire en langage moderne, on y reconnaît les équations d'une courbe lisse de degré 4 et de genre 1 dans $\mathbf{A}^3$, dont la clôture projective possède quatre points à l'infini (1 : 1 : 1 : 0), (1 : -1 : -1 : 0), (1 : 1 : -1 : 0), (1 : -1 : 1 : 0). Pour en trouver un point rationnel, Abū Kāmil pose $y = z + u$ (où u est une constante ; $y = z + u$ est l'équation d'un plan passant par les points infinis (1 : 1 : 1 : 0) et (1 : -1 : -1 : 0)). On obtient ainsi le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + x = y^2 \\ x^2 + 1 = z^2 \\ y = z + u \end{cases}$$

Ce système possède en général deux solutions (finies) que l'on trouve en résolvant l'équation de degré 2 en x résultant de l'élimination de y et z. En choisissant la valeur de u de sorte que le terme de degré 2 disparaisse, on obtient une équation linéaire en x, qui nous donne une solution rationnelle. Pour éliminer y et z, Abū Kāmil procède selon les étapes suivantes. Il élimine d'abord y :

$$\begin{cases} x^2 + x = (z+u)^2 \\ x^2 + 1 = z^2 \end{cases}$$

Puis il se débarrasse du terme en z^2 dans la première équation au moyen de la deuxième :

$$\begin{cases} z = -\frac{1}{2u}\left(1 + u^2 - x\right) \\ x^2 + 1 = z^2 \end{cases}$$

En éliminant z, on a alors :

$$\left(4u^2 - 1\right)x^2 + 2\left(u^2 + 1\right)x - u^4 + 2u^2 - 1 = 0$$

Choisissons $u = -\frac{1}{2}$, comme Abū Kāmil, afin de faire disparaître le terme en x^2. On obtient $x = \frac{9}{40}$. Les problèmes 31 à 38 suivent le même

modèle et décrivent chacun une courbe lisse de degré 4 et de genre 1 dans $\mathbf{A}^3$, dont la clôture projective possède quatre points à l'infini (1 : 1 : 1 : 0), (1 : -1 : -1 : 0), (1 : 1 : -1 : 0), (1 : -1 : 1 : 0). On reconnaît ici la méthode de la tangente (à l'infini) appliquée dans les problèmes 28 et 29.

PROBLÈME 32. — Il s'agit du système d'équations :

$$\begin{cases} x^2 - 5 = y^2 \\ y^2 + y = z^2 \end{cases}$$

On pose $z = x + u$, le système devient :

$$\begin{cases} x^2 - 5 = y^2 \\ y^2 + y = (x+u)^2 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x^2 - 5 = y^2 \\ y = 2ux + u^2 + 5 \end{cases}$$

En éliminant y, on a alors :

$$(-4u^2 + 1)x^2 + (-4u^3 - 20u)x - u^4 - 10u^2 - 30.$$

Choisissons $u = -\frac{1}{2}$, comme Abū Kāmil, afin de faire disparaître le terme en x^2. On obtient alors $x = 3 + \frac{17}{168}$. Ici encore, Abū Kāmil applique la méthode de la tangente à l'infini.

PROBLÈME 33. — Il s'agit du système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + 4x = y^2 \\ x^2 - 2x - 1 = z^2 \end{cases}$$

On pose $z = y + u$, le système devient

$$\begin{cases} x^2 + 4x = y^2 \\ x^2 - 2x - 1 = (y+u)^2 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} x^2 + 4x = y^2 \\ -2uy = 6x + u^2 + 1 \end{cases}$$

On élimine y :

$$(-4u^2 + 36)x^2 + (-4u^2 + 12)x + u^4 + 2u^2 + 1 = 0.$$

Choisissons $u = -3$, comme Abū Kāmil, afin de faire disparaître le terme en x^2. On obtient alors

$$x = 4 + \frac{1}{6} \text{ et } x^2 = 17 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$$

toujours par la même méthode de la tangente à l'infini.

PROBLÈME 34. — Il s'agit du système d'équations

$$\begin{cases} x^2 - 2x = y^2 \\ y^2 + y = z^2 \end{cases}$$

On pose $z = x + u$, le système devient :

$$\begin{cases} x^2 - 2x = y^2 \\ y^2 + y = (x+u)^2 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} x^2 - 2x = y^2 \\ y = (2u+2)x + u^2 \end{cases}$$

On élimine y :

$$(1 - (2u+2)^2)x^2 + (-2u^2(2u+2) - 2)x - u^4 = 0.$$

Choisissons $u = -\frac{3}{2}$, comme Abū Kāmil, afin de faire disparaître le terme en x^2. On obtient alors $x = 2 + \frac{1}{40}$ et $x^2 = 4 + \frac{1}{10} + \frac{1}{1600}$, par la méthode de la tangente à l'infini.

PROBLÈME 35. — Il s'agit du système d'équations

$$\begin{cases} x^2+3x+1=y^2 \\ x^2-3x+2=z^2 \end{cases}$$

On pose $z = y + u$, le système devient

$$\begin{cases} x^2+3x+1=y^2 \\ x^2-3x+2=(y+u)^2 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} x^2+3x+1=y^2 \\ -2uy=6x-1+u^2 \end{cases}$$

On élimine y :

$$(4u^2-36)x^2+12x-u^4+6u^2-1=0.$$

Choisissons u = -3 pour faire disparaître le terme en x^2. On obtient $x=2+\frac{1}{3}$ et $x^2=5+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$. Il s'agit encore de la même méthode.

PROBLÈME 36. — Il s'agit du système d'équations

$$\begin{cases} x^2-x+1=y^2 \\ x^2+x-1=z^2 \end{cases}$$

On pose $y = u - z$, le système devient

$$\begin{cases} x^2-x+1=(u-z)^2 \\ x^2+x-1=z^2 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} 2uz=2x+u^2-2 \\ x^2+x-1=z^2 \end{cases}$$

On élimine z :

$$\left(\frac{1}{u^2}-1\right)x^2-\frac{2}{u^2}x+\frac{u^2}{4}+\frac{1}{u^2}=0.$$

On choisit u = 1 pour faire disparaître le terme en x^2. On obtient $x=\frac{5}{8}$ et $x^2=\frac{3}{8}+\frac{1}{64}$. C'est toujours la même méthode, appliquée avec l'autre paire de points à l'infini (±1 : 1 : -1 : 0).

PROBLÈME 37. — Il s'agit du système d'équations

$$\begin{cases} x^2-x+2=y^2 \\ x^2+x-3=z^2 \end{cases}$$

On pose $y = z + u$, le système devient :

$$\begin{cases} x^2-x+2=(z+u)^2 \\ x^2+x-3=z^2 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} z=\frac{1}{2u}(-2x-u^2+5) \\ x^2+x-3=z^2 \end{cases}$$

On élimine z :

$$\left(1-\frac{1}{u^2}\right)x^2+\frac{5}{u^2}x-\frac{25}{4u^2}-\frac{1}{2}+\frac{u^2}{4}=0.$$

On choisit u = 1 pour faire disparaître le terme en x^2. On obtient

$$x=1+\frac{2}{5} \text{ et } x^2=1+\frac{4}{5}+\frac{4}{25}.$$

C'est la même méthode, appliquée à (±1 : 1 : 1 : 0).

PROBLÈME 38. — Il s'agit du système d'équations

$$\begin{cases} x^2+x+1=y^2 \\ x^2+2x+2=z^2 \end{cases}$$

Abū Kāmil pose $z = y + u$. On obtient ainsi le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = y^2 \\ x^2 + 2x + 2 = (y+u)^2 \end{cases}$$

Puis il se débarrasse du terme en y^2 dans la deuxième équation au moyen de la première :

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 = y^2 \\ 2uy = x + 1 - u^2 \end{cases}$$

Enfin il élimine y :

$$4u^2(x^2 + x + 1) = (x + 1 - u^2)^2.$$

Le choix de $u = \frac{1}{2}$ lui donne la solution $x = \frac{7}{8}$, $y = \frac{13}{8}$, $z = \frac{17}{8}$. C'est la même méthode, appliquée au même point, que pour 37.

Récapitulons la démarche d'Abū Kāmil dans une mathématique différente de la sienne.

Dans le groupe des problèmes 28 à 38, à l'exception du problème 30, Abū Kāmil étudie des systèmes de la forme :

(1) $\begin{cases} x^2 + ax + b = y^2 \\ x^2 + cx + d = z^2 \end{cases}$ ou bien (2) $\begin{cases} x^2 + ax + b = y^2 \\ y^2 + cy + d = z^2 \end{cases}$

De tels systèmes définissent une courbe $\mathscr{C}$ biquadratique dans l'espace de dimension 3 et cette courbe est de genre 1, avec quatre points à l'infini $(\pm 1 : \pm 1 : 1 : 0)$.

Abū Kāmil est amené à poser $z = x + u$ ou $z = y + u$; une telle équation définit un plan qui passe par deux des points à l'infini de $\mathscr{C}$:

$(1 : \pm 1 : 1 : 0)$ pour le premier plan

$(\pm 1 : 1 : 1 : 0)$ pour le second plan.

On peut encore poser $y = x + u$, plan passant par $(1 : 1 : \pm 1 : 0)$ ou encore

$x + y = u$ plan passant par $(1 : -1 : \pm 1 : 0)$

$y + z = u$ plan passant par $(\pm 1 : 1 : -1 : 0)$

$z + x = u$ plan passant par $(1 : \pm 1 : -1 : 0)$.

Pour un choix convenable de u, le plan considéré est tangent à $\mathscr{C}$ en l'un des points à l'infini ; alors il recoupe $\mathscr{C}$ en un unique point, nécessairement rationnel : c'est la base de la méthode d'Abū Kāmil.

Pour le système (1), il pose $z = y + u$ de sorte que la deuxième équation devienne

$$x^2 + cx + d = y^2 + 2uy + u^2 = x^2 + ax + b + 2yu + u^2$$

si on tient compte de la première équation. On a donc

$$y = \frac{1}{2u}\left((c-a)x + d - b - u^2\right) ;$$

on reporte cette valeur dans la première équation :

$$4u^2(x^2 + ax + b) = (c-a)^2 x^2 + 2(c-a)(d - b - u^2)x + (d - b - u^2)^2,$$

équation du second degré en x.

On fait $4u^2 = (c-a)^2$, soit $u = \pm\frac{c-a}{2}$, pour faire disparaître le terme en x^2 ; cela revient à imposer au plan d'être tangent à $\mathscr{C}$ à l'infini :

$$ax(c-a)^2 + b(c-a)^2 = 2(c-a)\left(d - b - \frac{(c-a)^2}{4}\right)x + \left(d - b - \frac{(c-a)^2}{4}\right)^2,$$

d'où

$$x = \frac{16(d-b)^2 - 8(c-a)^2(d+b) + (c-a)^4}{8(c-a)\left(c^2 - a^2 - 4(d-b)\right)}$$

puis y et z.

Pour l'équation (2), Abu Kamil pose $z = x + u$, donc

$$y^2 + cy + d = x^2 + 2xu + u^2 = x^2 + ax + b + cy + d$$

si on tient compte de la première équation. On a donc

$$y = \frac{1}{c}\left((2u-a)x + u^2 - b - d\right)$$

et

$$c^2x^2 + ac^2x + bc^2 = (2u-a)^2x^2 + 2x(2u-a)(u^2 - b - d) + (u^2 - b - d)^2.$$

On fait $(2u-a)^2 = c^2$, soit $u = \frac{a \pm c}{2}$ et on a

$$ac^2x + bc^2 = \pm 2cx\left(\frac{a^2 \pm 2ac + c^2}{4} - b - d\right) + \left(\frac{a^2 \pm 2ac + c^2}{4} - b - d\right)^2.$$

4. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS INDÉTERMINÉES DU PREMIER DEGRÉ : PROBLÈMES 39 À 43

Après avoir étudié les trente-huit problèmes indéterminés du second degré, Abū Kāmil conclut brièvement : « La plupart de ces problèmes sont résolus par ce procédé subtil que je t'ai décrit et qui est de grande importance et très utile »[8]. Il passe ensuite à la seconde partie de ce chapitre où il traite cinq problèmes indéterminés du premier degré – 39 à 43. Mais, à la différence des 38 problèmes précédents, il s'agit de problèmes concrets qui circulaient parmi les arithméticiens. Abū Kāmil reproduit ces problèmes et propose de simplifier les procédés de solution et surtout de les établir sur de véritables bases mathématiques. Il transforme alors ces problèmes en autant de systèmes d'équations linéaires indéterminées, et donne la méthode pour les résoudre.

PROBLÈME 39. — Nous traduirions aujourd'hui l'énoncé dans le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}(y+z+t) + x \\ u = \frac{1}{3}(x+z+t) + y \\ u = \frac{1}{4}(x+y+t) + z \\ u = \frac{1}{5}(x+y+z) + t \end{cases}$$

Première méthode : Abū Kāmil considère quatre inconnues qu'il nomme chose, dinar, dirham, fels et qui sont les quantités que nous avons nommées x, y, z, t ci-dessus. L'élimination de u (qu'il n'a pas besoin de « nommer », puisque cette inconnue n'apparaît jamais en tant que telle dans les équations qu'il considère) le conduit à considérer l'une après l'autre les équations suivantes dans la résolution du problème :

[8] Voir plus loin p. 652.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(y+z+t) + x = \frac{1}{3}(x+z+t) + y \\ \frac{1}{4}(x+y+t) + z = \frac{1}{3}(x+z+t) + y \\ \frac{1}{5}(x+y+z) + t = \frac{1}{3}(x+z+t) + y \end{cases}$$

La première équation fournit une valeur de y qui, reportée dans les suivantes, permet d'éliminer y (ce qu'Abū Kāmil explique en disant qu'il a « ôté le nom du dinar ») :

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}z + \frac{1}{3}t.$$

La deuxième équation fournit alors une valeur de z qui, reportée dans la troisième équation, permet d'éliminer z :

$$z = \frac{13}{5}x + \frac{4}{5}t.$$

Abū Kāmil récapitule alors les résultats obtenus :

$$\begin{cases} u = \frac{51}{15}x + \frac{6}{5}t \\ y = \frac{11}{5}x + \frac{3}{5}t \\ z = \frac{13}{5}x + \frac{4}{5}t \end{cases}$$

Et la troisième équation (après élimination de y et z) est :

$$t = 28\,x.$$

Comme le système d'équations est homogène, on peut, comme le fait Abū Kāmil, poser $x = 1$ pour obtenir une solution :

$$x = 1,\ y = 19,\ z = 25,\ t = 28,\ u = 37.$$

On remarque que, dans cette méthode, toutes les inconnues présentes dans les équations considérées par Abū Kāmil sont nommées, et chacune d'un nom distinct ; à chaque étape, la considération d'une nouvelle équation permet d'exprimer la valeur d'une des inconnues en fonction de celles qui

n'ont pas encore été éliminées, et ainsi d'éliminer cette inconnue. Ce procédé revient à mettre le système d'équations sous forme triangulaire, et était connu des contemporains d'Abū Kāmil.

Deuxième méthode : Dans le but d'alléger les calculs qui, sans l'aide d'un symbolisme, sont certes « difficiles », Abū Kāmil propose une deuxième méthode, qui consiste à choisir d'abord les inconnues de sorte que chacune des équations initiales ne contienne en elle-même qu'un petit nombre d'inconnues. Posons donc $\zeta = x + y + z + t$. Le système s'écrit alors

$$\begin{cases} u = x + \frac{1}{2}(\zeta - x) \\ u = y + \frac{1}{3}(\zeta - y) \\ u = z + \frac{1}{4}(\zeta - z) \\ u = t + \frac{1}{5}(\zeta - t) \\ \zeta = x + y + z + t \end{cases}$$

L'élimination de u conduit Abū Kāmil à considérer en fait les équations suivantes, dans cet ordre :

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}(\zeta - x) = y + \frac{1}{3}(\zeta - y) \\ x + \frac{1}{2}(\zeta - x) = z + \frac{1}{4}(\zeta - z) \\ \zeta = x + y + z + t \\ x + \frac{1}{2}(\zeta - x) = t + \frac{1}{5}(\zeta - t) \end{cases}$$

La première équation ne contient alors que trois inconnues, et Abū Kāmil ne donne de nom qu'à ces trois inconnues x, y, ζ : la chose, le dinar et le dirham.

Cette équation détermine une valeur de y, et l'inconnue y est ainsi éliminée (on a « ôté le nom du dinar ») :

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}\zeta.$$

Une fois l'inconnue y éliminée, Abū Kāmil peut utiliser le nom « dinar » pour désigner une autre inconnue, en l'occurrence z, et cela lui permet de prendre en considération la deuxième équation, qui détermine à son tour une valeur de z :

$$z = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\zeta.$$

L'élimination de y et z dans l'équation $\zeta = x + y + z + t$ détermine une valeur de t en fonction de x et ζ (ici Abū Kāmil ne prend pas la peine de « nommer » l'inconnue t), qui, reportée dans la dernière équation, conduit finalement à :

$$\zeta = 73\,x,$$

ce qui mène facilement au résultat final. Donc, suivant cette méthode, Abū Kāmil ne « nomme » d'abord que les inconnues qui apparaissent dans la première équation ; l'élimination de l'une d'elles permet de réutiliser son nom pour désigner une autre inconnue dans l'équation suivante, et ainsi de suite. Les opérations de l'algèbre ne se rapportent toujours qu'à une seule équation à la fois, et c'est l'usage de ces opérations qui requiert de « nommer » les éléments de l'équation. C'est pourquoi il n'est pas strictement nécessaire de nommer les inconnues tant qu'elles n'apparaissent pas dans l'équation considérée, et il est même possible d'utiliser deux fois le même « nom » pour désigner des inconnues différentes.

PROBLÈME 40. — L'énoncé conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} v = x + \frac{1}{2}(y + z) \\ v = y + \frac{1}{3}(z + t) \\ v = z + \frac{1}{4}(t + u) \\ v = t + \frac{1}{5}(u + x) \\ v = u + \frac{1}{6}(x + y) \end{cases}$$

L'élimination de v conduit Abū Kāmil à considérer en fait les équations suivantes, dans cet ordre :

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}(y+z)=y+\frac{1}{3}(z+t) \\ x+\frac{1}{2}(y+z)=z+\frac{1}{4}(t+u) \\ x+\frac{1}{2}(y+z)=t+\frac{1}{5}(u+x) \\ x+\frac{1}{2}(y+z)=u+\frac{1}{6}(x+y) \end{cases}$$

Première méthode : Abū Kāmil nomme seulement les trois inconnues x, y, z : la chose, le dinar et le dirham. L'inconnue t n'est pas nommée, mais la première équation en donne immédiatement une valeur qui, reportée dans la deuxième équation et dans la troisième, permet d'éliminer t :

$$t=3x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z.$$

La deuxième équation donne alors une valeur de u, qui, reportée dans la troisième et dans la quatrième, permet d'éliminer u :

$$u=x+\frac{7}{2}y-\frac{5}{2}z.$$

La troisième équation, dans laquelle on a éliminé t et u, ne contient plus que les trois inconnues x, y, z, et elle donne la valeur de z :

$$z=\left(4+\frac{4}{5}\right)x-\left(2+\frac{3}{5}\right)y.$$

Abū Kāmil récapitule les résultats obtenus :

$$v=\left(3+\frac{2}{5}\right)x-\frac{4}{5}y$$
$$u=10y-11x$$
$$t=\left(5+\frac{2}{5}\right)x-\left(2+\frac{4}{5}\right)y$$
$$z=\left(4+\frac{4}{5}\right)x-\left(2+\frac{3}{5}\right)y.$$

Finalement, la quatrième équation, après élimination de u et z, donne :

$$61x=47\,y,$$

d'où la solution donnée par Abū Kāmil, qui pose $y = 61$:

$$x=47,\ y=61,\ z=67,\ t=83,\ u=93,\ v=111.$$

On remarque que, suivant cette méthode, Abū Kāmil ne nomme que les inconnues qui apparaissent dans la première équation, sauf celle qu'il choisit d'éliminer au moyen de cette équation. Et ainsi de suite, à chaque étape, il considère une équation dans laquelle toutes les inconnues sont nommées, sauf celle qu'il choisit d'éliminer.

Deuxième méthode : Ce n'est qu'une variante de la première, consistant à nommer l'inconnue que l'on cherche à éliminer à chaque étape, en réutilisant toujours le même nom (ici, Abū Kāmil utilise le nom « fels »). Cette méthode coïncide avec la deuxième qu'Abū Kāmil avait employée dans le problème 39, sans cependant introduire d'inconnue auxiliaire. Comme les calculs sont ici identiques à ceux de la première méthode et qu'il ne s'agit que d'une différence formelle, Abū Kāmil ne mène pas la résolution jusqu'au bout. C'est, en revanche, cette seule méthode qu'il applique pour résoudre les deux problèmes suivants, 42 et 43, comme nous allons le voir.

PROBLÈME 41. — Soit le système suivant :

$$\begin{cases} v=x+\frac{1}{2}y \\ v=y+\frac{1}{3}z \\ v=z+\frac{1}{4}t \\ v=t+\frac{1}{5}u \\ v=u+\frac{1}{6}x \end{cases}$$

On élimine v :

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}y=y+\frac{1}{3}z \\ x+\frac{1}{2}y=z+\frac{1}{4}t \\ x+\frac{1}{2}y=t+\frac{1}{5}u \\ x+\frac{1}{2}y=u+\frac{1}{6}x \end{cases}$$

Abū Kāmil nomme seulement les inconnues qui apparaissent dans la première équation x, y, z : la chose, le dinar, le dirham. Il élimine z au moyen de cette première équation en reportant sa valeur

$$z = 3x - \frac{3}{2}y$$

dans la deuxième équation. Il réutilise alors le nom « dirham » pour désigner l'inconnue t dans la deuxième équation. Il élimine t au moyen de cette deuxième équation en reportant sa valeur

$$t = -8x + 8y$$

dans la troisième équation. Il réutilise alors le nom « dirham » pour désigner l'inconnue u dans la troisième équation. Il élimine u au moyen de cette troisième équation en reportant sa valeur

$$u = 45x - \frac{75}{2}y$$

dans la quatrième, qui devient

$$228\ y = 265\ x.$$

En choisissant une valeur de x adéquate, Abū Kāmil fournit alors une solution du système en nombres entiers :

$$x = 456,\ y = 530,\ z = 573,\ t = 592,\ u = 645,\ v = 721.$$

Cette méthode coïncide avec la deuxième méthode du problème 39.

PROBLÈME 42.

Soit le système suivant :

$$\begin{cases} x+1 = 2(y-1) \\ y+2 = 3(z-2) \\ z+3 = 4(t-3) \\ t+4 = 5(x-4) \end{cases}$$

Le système n'est pas homogène, et le mot « dirham » désigne ici non plus une inconnue, mais l'unité. Abū Kāmil nomme seulement les inconnues

x, y qui apparaissent dans la première équation : la chose, le dinar. Il élimine y au moyen de cette première équation en reportant sa valeur

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

dans la deuxième. Il réutilise alors le nom « dinar » pour désigner z dans la deuxième équation. Il élimine z au moyen de cette équation en reportant sa valeur

$$z = \frac{1}{6}x + \frac{19}{6}$$

dans la troisième. Il réutilise alors le nom de « dinar » pour désigner t dans la troisième équation. Il élimine t au moyen de cette équation en reportant sa valeur

$$t = \frac{1}{24}x + \frac{109}{24}$$

dans la quatrième, qui ne contient plus désormais que l'inconnue x, d'où :

$$x = 5 + \frac{90}{119},$$

puis :

$$y = 4 + \frac{45}{119},\ z = 4 + \frac{15}{119},\ t = 4 + \frac{93}{119}$$

Cette méthode coïncide avec la deuxième méthode du problème 39.

PROBLÈME 43. — Il faut comprendre ainsi l'énoncé, peu clair, du problème 43 : trois hommes ont des fortunes respectives x, y, z et décident de redistribuer leur fortune en formant d'abord une cagnotte, le premier donnant $\frac{1}{2}x$, le deuxième $\frac{1}{3}y$, le troisième $\frac{1}{6}z$. Ils se partagent ensuite la cagnotte en en prenant un tiers chacun, et l'énoncé affirme qu'ils ont alors chacun respectivement la moitié, le tiers et le sixième de la fortune totale. Ce qui se traduit en le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z\right)=\frac{1}{2}(x+y+z) \\ \frac{2}{3}y+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z\right)=\frac{1}{3}(x+y+z) \\ \frac{5}{6}z+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z\right)=\frac{1}{6}(x+y+z) \end{cases}$$

Première méthode : En fait, ce système est redondant. La troisième équation est comprise dans les deux premières. Abū Kāmil n'utilise donc que les deux premières équations. Il nomme x, y, z respectivement la chose, le dinar et le dirham. La première équation donne

$$x=\left(2+\frac{1}{3}\right)y+\left(2+\frac{2}{3}\right)z.$$

Puis, si on remplace x par sa valeur dans la deuxième équation :

$$y = 13\,z,$$

d'où une solution :

$$x = 33,\ y = 13,\ z = 1.$$

Si l'on veut que la fortune finale de chacun soit exprimée par un nombre entier, on préfèrera la solution suivante donnée par Abū Kāmil :

$$x = 198,\ y = 78,\ z = 6.$$

Deuxième méthode : Posons $u=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}t\right)$, et $t=x+y+z$. Il faut alors résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+u=\frac{1}{2}t \\ \frac{2}{3}y+u=\frac{1}{3}t \\ \frac{5}{6}z+u=\frac{1}{6}t \\ u=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z\right) \\ t=x+y+z \end{cases}$$

Abū Kāmil nomme seulement t et u : la chose, le dirham. Les trois premières équations donnent les valeurs de x, y, z (inconnues qu'Abū Kāmil ne nomme pas) en fonction de t et u. On reporte ces valeurs dans la quatrième équation, d'où :

$$t=\left(6+\frac{5}{7}\right)u.$$

Abū Kāmil pose $u = 42$ pour avoir une solution en nombres entiers. On remarque que, suivant cette méthode, le système des cinq équations ci-dessus est redondant, et qu'Abū Kāmil n'utilise pas la cinquième équation. Cette méthode ressemble à la première du problème 40, et ne diffère de la deuxième du problème 39 que par le fait qu'Abū Kāmil ne nomme pas les inconnues x, y, z successivement éliminées au moyen des trois premières équations.

On observe que, dans le contexte algébrique qu'il a forgé, Abū Kāmil parvient à une conception plus précise et plus claire de la méthode d'élimination que celle des arithméticiens.

CHAPITRE V

PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES

1. PROBLÈMES DIVERS

Abū Kāmil, on l'a vu, étudie à l'aide des méthodes algébriques qu'il venait de concevoir, cinq problèmes concrets (de 39 à 43). Sur la même lancée et à l'aide des mêmes méthodes, il étudie les problèmes 44 à 70, qui se présentent comme des « exercices résolus », ou encore un domaine de problèmes arithmétiques où Abū Kāmil, à l'exemple de son prédécesseur al-Khwārizmī dans le livre sur les legs et les testaments, aurait voulu montrer l'efficacité de l'algèbre pour résoudre de tels problèmes concrets. C'est à ce titre « d'exercice » ou « d'application » des règles de l'algèbre que ces problèmes concrets trouvent leur place dans le livre d'Abū Kāmil, et nullement en tant que tels.

PROBLÈME 44. — Sur l'exemple de dix robes dont les prix respectifs forment une suite arithmétique, Abū Kāmil affirme que, si (a_n) est une suite arithmétique de raison k, on a

$$\sum_{n=1}^{2N} a_n = N(a_1 + a_{2N}) = N(2a_1 + (2N-1)k).$$

Il étudie ensuite l'exemple d'une troupe de soldats. Leurs butins respectifs sont supposés former une suite arithmétique. Dans les premiers cas de figure, il pose l'inconnue $x = 2N$ (effectif de la troupe). Le butin total est alors

$$\frac{x}{2}(2a_1 + (x-1)k)$$

Dans ce contexte, il résout plusieurs problèmes. On se contentera d'indiquer l'équation qu'il résout dans chaque cas.

Premier cas :

$$\frac{x}{2}(2+(x-1))=300$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-300=0$$

L'unique racine positive est $\frac{-1+\sqrt{2401}}{2}=24$.

Deuxième cas :

$$\frac{x}{2}(2\cdot 2+3(x-1))=126$$

$$\frac{3x^2}{2}+\frac{x}{2}-126=0$$

L'unique racine positive est $\frac{-1+\sqrt{3025}}{6}=9$ (on remarque qu'elle est impaire, bien que l'on ait posé $x=2N$).

Troisième cas :

$$\frac{x}{2}(2+(x-1))=10x$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-10x=0$$

$$x=19$$

Quatrième cas :

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{3}\left(2+2\left(\frac{2x}{3}-1\right)\right)=4x$$

$$\frac{4x^2}{9}=4x$$

$$x=9$$

Cinquième cas :

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3x}{4}\left(2\cdot 2+3\left(\frac{3x}{4}-1\right)\right)=24x$$

$$\left(\frac{6}{8}+\frac{3}{4\cdot 8}\right)x^2+\frac{3}{8}x=24x$$

$$x=28$$

Sixième cas :

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{3}\left(2+2\left(\frac{2x}{3}-1\right)\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{3}\left(2\cdot 2+4\left(\frac{x}{3}-1\right)\right)=20x$$

$$\frac{4x^2}{9}+\frac{2x^2}{9}=20x$$

$$\frac{2x^2}{3}=20x$$

$$x=30$$

Septième cas :

$$\frac{x}{2}(2+(x-1))=\frac{2x^2}{3}$$

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}=\frac{2x^2}{3}$$

$$x=3$$

Huitième cas : Maintenant Abū Kāmil pose $2N=x^2$.

$$\frac{1}{2}\left(4+\frac{1}{2}\right)x\left(2+\left(\left(4+\frac{1}{2}\right)x-1\right)\right)=\left(10+\frac{1}{2}\right)x^2$$

$$\left(10+\frac{1}{8}\right)x^2+\left(2+\frac{1}{4}\right)x=\left(10+\frac{1}{2}\right)x^2$$

$$x=6$$

Neuvième cas : Il pose l'inconnue $x=k$ (la raison de la suite arithmétique).

$$\frac{30}{2}(2+(30-1)x)=1335$$

$$x=3$$

PROBLÈME 45. — Abū Kāmil résout maintenant plusieurs cas de problèmes, où il est question de « postiers ». Les plus simples ont leur analogue dans les manuels élémentaires d'aujourd'hui (deux trains partent d'une même ville à deux instants différents, etc.).

Premier cas : Deux postiers ayant chacun une vitesse moyenne donnée quittent une même ville à deux instants différents.

Deuxième cas : Certains cas proposés par Abū Kāmil font encore intervenir la formule de sommation des termes d'une suite arithmétique (a_n) vue ci-dessus : l'un des postiers a une vitesse moyenne a_n au $n^{\text{ième}}$ jour de son voyage. On est ainsi amené à résoudre l'équation suivante :

$$\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}=20x$$
$$x=39$$

Troisième cas : On a ici deux suites arithmétiques (une pour chacun des deux postiers).

$$\frac{x}{2}(2+(x-1))=\frac{x-84}{2}(2+2(x-84-1))$$
$$\frac{x^2}{2}-\left(168+\frac{1}{2}\right)x+7056=0$$

Cette équation quadratique a deux racines positives, 49 et 288. La solution du problème devant être supérieure à 84 à cause de l'énoncé, c'est la deuxième racine qui est solution.

Quatrième cas :

$$\frac{x}{2}(2+(x-1))=\frac{x-8}{2}(2+3(x-8-1))$$
$$x^2-25x+100=0$$

Il y a une unique racine supérieure à 8, soit $x = 20$.

Cinquième cas : Dans ce cas et dans le suivant, les postiers ont à nouveau une vitesse moyenne constante, mais l'on est conduit à une équation cubique :

$$x^2=\left(\frac{x^2}{20}-15\right)x$$

$$\frac{x^2}{20}-x-15=0$$

Unique racine positive $x = 30$.

Sixième cas :

$$20x^2=(x^2-44)x$$
$$x^2-20x-44=0$$

Unique racine positive $x = 22$.

PROBLÈME 46.

$$\begin{cases}x+y+z=1\\20x+15y+10z=18\end{cases}$$

Problème indéterminé.
On pose $z = t$, $y = t$, d'où

$$\begin{cases}x=1-2t\\20(1-2t)+25t=18\end{cases}\Rightarrow t=\frac{2}{15}$$

Autrement : $z = t$, $y = 2t$, et on a $t=\frac{1}{10}$.

Plus généralement, si on pose $y = \lambda z$, les équations deviennent

$$\begin{cases}x+(\lambda+1)z=1\\20x+(15\lambda+10)z=18\end{cases}$$

On trouve $x = 1 - (\lambda + 1)z$ de la première équation et la seconde équation devient

$$5z\,(\lambda+2)=2,$$

d'où

$$z=\frac{2}{5(\lambda+2)},\ y=\frac{2\lambda}{5(\lambda+2)},\ x=\frac{3\lambda+8}{5(\lambda+2)}\ ;$$

plus simplement, on a $y=\frac{2}{5}-2z$ et $x=\frac{3}{5}+z$ car $\lambda=\frac{2}{5z}-2$.

PROBLÈME 47.

$$\begin{cases}x+y+z=1\\5x+4y+\frac{1}{10}z=2\end{cases}$$

On pose $x = t$, $y = t$, d'où

$$\begin{cases} z = 1 - 2t \\ \dfrac{1}{10} z = 2 - 9t \end{cases} \qquad \Rightarrow 2 - 9t = \frac{1}{10} - \frac{t}{5} \Rightarrow t = \frac{19}{88}.$$

Autrement : $x = t$, $y = 5t$

$$\begin{cases} z = 1 - 6t \\ \dfrac{1}{10} z = 2 - 25t \end{cases}$$

$$z = 25t = \frac{1}{10} - \frac{3}{5} t \Rightarrow t = \frac{122}{5}.$$

Plus généralement, si on pose $y = \lambda x$, les équations deviennent

$$\begin{cases} (1+\lambda)x + z = 1 \\ (5+4\lambda)x + \dfrac{1}{10} z = 2 \end{cases}$$

On tire $z = 1 - (1 + \lambda)x$ de la première équation et la seconde équation devient

$$(49 + 39\lambda)x = 19,$$

d'où

$$x = \frac{19}{39\lambda + 49}, \quad y = \frac{19\lambda}{39\lambda + 49}, \quad z = \frac{20\lambda + 30}{39\lambda + 49}.$$

PROBLÈME 48. — Ce problème se ramène à l'équation

$$17\, x - x^2 = 30,$$

d'où les racines $x = 2$ ou $x = 15$.

Plus généralement, Abū Kāmil considère un problème du type

$$2ax - x^2 = b\ ;$$

il n'est possible que si $b \leq a^2$ et rationnel seulement lorsque $a^2 - b$ est un carré c^2, c'est-à-dire $b = a^2 - c^2$. On a alors $x = a \pm c$.

PROBLÈME 49. — Ce problème s'écrit comme le système

$$\begin{cases} xy = 93 \\ x + y = 34 \end{cases}$$

ce qui conduit à l'équation quadratique $x^2 - 34x + 93 = 0$, d'où $x = 3$ ou 31.

PROBLÈME 50. — Ce problème s'écrit

$$n + \sqrt{1 + 2 + 3 + \ldots + n} = 14,$$

soit $n^2 - 57n + 392 = 0$, équation dont les racines sont $n = 8$ et $n = 49$; mais cette dernière solution est à éliminer car $49 > 14$. La solution est donc $n = 8$.

PROBLÈMES 51 À 53.

Ce sont des problèmes arithmétiques de remplissage d'un bassin par différentes sources.

Dans le problème 51, le bassin se remplit en 2 jours par le premier cours d'eau, en 3 jours par le second cours d'eau et en 4 jours par le dernier. En un jour, les trois cours d'eau remplissent donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12}$ du bassin et il faut donc $\frac{12}{13}$ de jours pour que le bassin soit rempli par les trois cours d'eau en même temps.

Les problèmes 52 et 53 sont semblables.

Abū Kāmil traite ensuite divers problèmes du premier degré, ou qui s'y ramènent.

PROBLÈMES 54, 55 ET 56. Ces problèmes s'écrivent successivement :

- $\frac{x}{5} = \frac{4}{30}(30 - x)$, d'où $x\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{30}\right) = \frac{x}{3} = 4$, d'où $x = 12$ et $30 - x = 18$.
- $\frac{x}{5} = 1 + \frac{4}{30}(30 - x)$.

On a de même $\frac{x}{3} = 5$, d'où $x = 15$, $30 - x = 15$.

- $\frac{x}{5} = \frac{4}{30}(30 - x) - 1$, d'où $\frac{x}{3} = 3$, $x = 9$, $30 - x = 21$.

PROBLÈME 57. Ce problème s'écrit

$$4\sqrt{x^2 - 3x} = 3x.$$

On a $16(x^2 - 3x) = 9x^2$, soit $7x^2 = 48x$, $x = 6 + \frac{6}{7}$.

PROBLÈME 58. — Ce problème s'écrit $\frac{x}{3} = 10$, d'où $x = 30$.

PROBLÈME 59. — Ce problème s'écrit $\sqrt{x} = 10$, d'où $x = 100$.

Viennent ensuite les problèmes du second degré et du premier degré, pêle-mêle.

PROBLÈME 60. — Ce problème s'écrit

$$\frac{x}{9} = \frac{10 - x}{x}.$$

On a $x^2 = 90 - 9x$, ou $x^2 + 9x = 90$, d'où $x = 6$.

PROBLÈME 61. — On pose $y = \sqrt{x^2 - 3x}$ et on considère l'équation

$$3y + x = 2x + y ;$$

on a donc $2y = x$, c'est-à-dire $x^2 - 3x = \frac{x^2}{4}$, d'où

$$\frac{4}{3}x^2 = 3x \text{ et } x = 4.$$

PROBLÈMES 62 ET 63. — On pose encore $y = \sqrt{x^2 - 3x}$ et on considère l'équation

$$4y + x = 3x + y,$$

soit $3y = 2x$; c'est-à-dire $x^2 - 3x = \frac{4}{9}x^2$, d'où

$$x = 5 + \frac{2}{5} \text{ et } x^2 = 29 + \frac{4}{25}.$$

Le problème 63 est identique au problème 62, mais Abū Kāmil mène dans 63 le calcul à son terme.

PROBLÈME 64. — Ce problème s'écrit

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ 3x = 6y = 4z = 30t \end{cases}$$

On a

$$y = \frac{x}{2},\ z = \frac{3}{4}x \text{ et } x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = \frac{9x}{4} = 30,$$

d'où

$$x = 13 + \frac{1}{3},\ y = 6 + \frac{2}{3},\ z = 10 \text{ et } t = 1 + \frac{1}{3}.$$

PROBLÈME 65. — Ce problème s'écrit

$$\begin{cases} x + y + z = 30 \\ 3x = 6y + 30 = 4z + 60 = 30t \end{cases}$$

On a

$$x = 22 + \frac{2}{9},\ y = 6 + \frac{1}{9},\ z = 1 + \frac{2}{3} \text{ et } t = 2 + \frac{2}{9}.$$

PROBLÈME 66. — Ce problème s'écrit

$$\frac{10 + x}{6} = x,$$

d'où

$$5x = 10 \text{ et } x = 2.$$

PROBLÈME 67. — Ce problème s'écrit

$$\frac{10 + x + y + z}{6} = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} - 20,\ y = x + 3,\ z = y + z.$$

On a

$$y = x + 3,\ z = x + 6 \text{ et } 19 + 3x = 6\left(\frac{13}{12}x - \frac{35}{2}\right) = \frac{13}{2}x - 105 ;$$

d'où

$$x = 35 + \frac{3}{7},\ y = 38 + \frac{3}{7},\ z = 41 + \frac{3}{7}.$$

PROBLÈME 68. — Ce problème s'écrit

$$\frac{20+x}{30} \cdot 12 = x + \sqrt{20+x}.$$

On a

$$8 + \frac{2x}{5} = x + \sqrt{20+x}, \text{ soit } 8 - \frac{3}{5}x = \sqrt{20+x},$$

d'où

$$\frac{9x^2}{25} - \frac{53}{5}x + 44 = 0 \text{ et } x = \frac{25}{18}\left(\frac{53}{5} \pm 7\right) = 5 \text{ ou } 122 + \frac{2}{9}.$$

Abū Kāmil ne retient que la première racine $x = 5$, qui correspond à une valeur raisonnable pour un salaire.

PROBLÈME 69. — Ce problème s'écrit

$$2(2(2x - 10) - 10) - 10 = 0.$$

L'équation s'écrit : $8x - 70 = 0$, d'où

$$x = 8 + \frac{3}{4}.$$

PROBLÈME 70. — Ce problème s'écrit

$$8x - 70 = x + 10,$$

d'où

$$x = 11 + \frac{3}{7}.$$

2. QUELQUES PROGRESSIONS ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

À la fin de son livre, Abū Kāmil ajoute, à titre d'appendice en quelque sorte, une étude des progressions arithmétiques et géométriques : la somme des entiers naturels successifs commençant par 1, la somme de leurs carrés

et la somme des puissances de 2. Tout semble indiquer qu'il entend ainsi fournir aux algébristes des moyens qui les aident à déterminer les inconnues. Ce chapitre est appelé à s'étendre et à s'enrichir, comme l'attestent les livres d'al-Karaji et d'al-Samaw'al ensuite[1].

Cette fois encore, Abū Kāmil définit son but : rationaliser la pratique des arithméticiens. Il nous apprend en effet que ces progressions circulent parmi les arithméticiens de son temps, qui les ont reçues en héritage des anciens – mais ils ne nomment pas ces anciens[2]. Il souligne que ces arithméticiens transmettaient et utilisaient ces progressions, mais sans les avoir démontrées. Fidèle à son projet, Abū Kāmil se donne pour tâche de les démontrer et d'intégrer ce chapitre sur les progressions à l'algèbre.

Il commence par vouloir démontrer :

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(n + n^2\right)\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Il propose d'établir d'abord :

$$(2) \qquad \frac{\sum_{k=1}^{n} k^2}{\sum_{k=1}^{n} k} = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}.$$

Il procède d'abord par un raisonnement par récurrence archaïque, c'est-à-dire qu'il établit le résultat pour $n = 1, 2, 3, 4$, pour conclure qu'il est vrai pour tout n, sans toutefois formuler explicitement l'hypothèse de la récurrence.

Ce type de démonstration va survivre encore pendant huit siècles. Voici le schéma de la démonstration :

$$u_1 = \frac{1^2}{1} = 1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$$

$$u_2 = \frac{2^2 + 1 \cdot u_1}{1+2} = \frac{2^2+1}{3} = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3}$$

[1] R. Rashed, *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Collection « Sciences et philosophie arabes - Études et reprises », Paris, 1984.

[2] Plus tard, al-Samaw'al attribue une origine mythique à la somme des carrés des entiers : il l'attribue à Pythagore (*al-Bāhir*, p. 120 arabe).

$$u_3 = \frac{3^2 + (1+2)u_2}{1+2+3} = \frac{3^2+5}{6} = \frac{2}{3}\cdot 3 + \frac{1}{3}$$
$$u_4 = \frac{4^2 + (1+2+3)u_3}{1+2+3+4} = \frac{4^2+14}{10} = \frac{2}{3}\cdot 4 + \frac{1}{3}$$

et ainsi de suite ; c'est-à-dire

$$u_n = \frac{n^2 + \left(\sum_{k=1}^{n-1} k\right) u_{n-1}}{\sum_{k=1}^{n} k} = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}.$$

En effet, on a

$$u_n = \frac{2n^2 + n(n-1)\left(\frac{2}{3}(n-1)+\frac{1}{3}\right)}{n(n+1)} = \frac{\frac{2}{3}n^2 + n + \frac{1}{3}}{n+1} = \frac{\frac{2}{3}n(n+1) + \frac{1}{3}(n+1)}{n+1} = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}.$$

Comme d'habitude, Abū Kāmil pense donner une démonstration géométrique. Il écrit : « La cause de cela est établie et vraie par la voie géométrique », c'est-à-dire par une *demonstratio potissima* ; mais il ne la donne pas. Il entend sans doute une démonstration par la géométrie plane, telle que celle que l'on rencontre chez al-Karajī plus tard[3].

Abū Kāmil établit ensuite $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} 1+2+\ldots+n-1+n \\ n+n-1+\ldots+2+1 \end{cases} \Rightarrow \text{la somme } = n(n+1),$$

d'où le résultat.

Il s'agit ici d'une démonstration, explicite comme d'habitude, portant sur les petites valeurs de n, mais de portée générale.

Il peut maintenant tirer

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}\right)\cdot \sum_{k=1}^{n} k = \left(\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right).$$

[3] F. Woepcke, *Extrait du Fakhrî*, p. 59-63.

Il démontre ensuite

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 1 + 2\left(2^n - 1\right) = 2^{n+1} - 1$$

qu'il attribue à al-Khwārizmī (sans doute dans l'un de ses livres arithmétiques que nous n'avons plus). Il démontre cette égalité par une récurrence archaïque. Voici le schéma de la démonstration :

$$\begin{aligned} &1 \\ &2 = 1+1 \\ &4 = (1+2)+1 \\ &8 = (1+2+4)+1 \\ &\vdots \\ &2^{n+1} = \left(1+2+4+\ldots+2^n\right)+1 \end{aligned}$$

d'où

$$2^{n+1} - 1 = \sum_{k=0}^{n} 2^k.$$

Nous sommes en présence des premières démonstrations par récurrence archaïque en algèbre. Les successeurs d'Abū Kāmil, notamment al-Karajī et al-Samaw'al, redonnent des démonstrations de ces mêmes formules, et de bien d'autres, par récurrence ou par régression[4].

[4] R. Rashed, « L'induction mathématique : Al-Karajī, As-Samaw'al », *Archive for History of Exact Sciences*, 9, 1972, p. 1-21 ; repr. dans *Entre arithmétique et algèbre*.

CHAPITRE VI

ANALYSE INDÉTERMINÉE ENTIÈRE DU PREMIER DEGRÉ

Dans un autre livre connu aujourd'hui sous le titre *Les problèmes rares d'arithmétique* et dont le véritable titre, on l'a vu, est *Sur les volatiles*, Abū Kāmil évoque une certaine sorte de calcul arithmétique qui circulait à son époque. Il s'agit en fait de se donner plusieurs tas de choses différentes, le nombre des éléments de chaque tas étant inconnu, mais la somme des éléments de tous les tas étant fixée. On associe aux éléments de chaque tas un coefficient, de sorte que la somme des éléments de tous les tas, multipliée par le coefficient de chacun, soit égale à la première somme. On cherche le nombre des éléments de chaque tas.

Abū Kāmil rappelle alors qu'à l'époque les savants, c'est-à-dire les arithméticiens, aussi bien que « les hommes du commun », procédaient empiriquement, à savoir par conjecture et par simple intuition. Cette fois encore, il se propose de rationaliser cette pratique empirique, autrement dit de la mathématiser, ou encore de l'algébriser. Voici ce qu'il écrit dans le préambule de son traité :

> J'ai vu l'une des sortes d'arithmétique, qui circule entre les hommes de science et les hommes du commun, entre le savant et l'ignorant, avec laquelle ils se divertissent et qu'ils apprécient, qu'ils trouvent ingénieuse et à propos de laquelle les uns interrogent les autres. Celui qui, parmi eux, répond, le fait par conjecture et par intuition, sans revenir en cela à un principe ou à une inférence. Nombreux parmi les hommes de science et les hommes du commun m'ont interrogé à propos des problèmes de cette sorte d'arithmétique, et je leur répondais pour un seul problème par une seule solution, étant donné qu'il n'y en avait pas d'autre ; peut-être y avait-il dans d'autres problèmes deux solutions, ou trois, ou quatre, ou plus que cela ; et peut-être la solution de l'un d'entre eux était-elle impossible. Jusqu'à ce que me fût parvenu un problème de cette sorte, que j'ai calculé et dont j'ai trouvé de nombreuses solutions ; j'ai examiné exhaustivement tout ce qu'il comporte de solutions, et j'ai obtenu deux mille six cent soixante-seize réponses correctes. Grande fut ma surprise, et j'ai remarqué que, lorsque j'ai diffusé cela, on l'a trouvé excessif et choquant, et on m'a accusé sans me connaître. J'ai donc décidé de composer un livre sur cette sorte, dans lequel je rends facile le procédé qui s'y trouve et le rends accessible ; j'indique comment déterminer la solution correcte du problème

là où c'est possible, je montre celui où il n'y a qu'une seule solution et j'explique celui où il n'y a aucune solution par un vrai procédé et un discours démonstratif, jusqu'à ce que je parvienne au problème dont je t'ai indiqué qu'il a deux mille six cent soixante-seize solutions correctes[1].

Les problèmes de cette sorte de calcul arithmétique sont du genre suivant :

Un canard de cinq dirhams et vingt oiseaux d'un dirham et un poulet d'un dirham et choses semblables. On t'a payé cent dirhams, ou plus, ou moins, et on t'a dit : « achète avec cela cent volatiles de ces espèces, ou plus, ou moins ». La solution de ce problème et de ses semblables est de dire : « Tant de canards et tant d'oiseaux et tant de poulets, <nombre> entier et sans fractions – c'est-à-dire qu'il n'y a pas un demi-volatile, ni un tiers, ni un quart, ni aucune de ses parties, étant donné que les parties de chaque espèce de volatile ne se combinent pas avec les parties d'une autre espèce ».

Il s'agit donc du fameux problème dit « des cent volailles », connu depuis longtemps en Inde et en Chine[2].

Abū Kāmil souligne que les variables peuvent désigner des choses bien différentes. Il écrit :

Si on te paie cent dirhams, ou plus, ou moins, et qu'on te dit : « distribue-les à cent personnes, ou plus, ou moins, hommes, femmes et jeunes gens, ou davantage d'espèces encore, et paie à chaque homme tant, à chaque femme tant et à chaque jeune homme tant ; alors, combien d'hommes, combien de femmes et combien de jeunes gens ? ».

[1] Voir plus loin, p. 732-734.

[2] Connu en Chine au V^e siècle (Zhang Qiujian) – si ce n'est avant –, puis en Inde à partir du VII^e siècle (manuscrit de Bakhshālī), on le retrouve au Caire au milieu du IX^e siècle – et peut-être même avant (chez les arithméticiens évoqués par Abū Kāmil). L'énoncé du problème et le chiffre 100 ne laissent aucun doute sur son voyage d'Est en Ouest. Sur la route empruntée, maritime ou terrestre, et sur la date du voyage, nous ne savons rien, pour l'heure. Il reste que l'étude des méthodes de solution des mathématiciens, chinois et indiens, prédécesseurs d'Abū Kāmil, montre que ce dernier est le premier à avoir expliqué son algorithme de solution et à l'avoir établi rigoureusement grâce à l'algèbre et à une conception claire de l'analyse indéterminée.

Sur l'histoire de ce problème en Chine, voir notamment : Lam Lay Yong, « Zhang Qiujian Suanjing (The Mathematical Classic of Zhang Qiujian : an Overview », *Archive for History of Exact Sciences*, 50, 3-4, 1997, p. 235 *sqq.* ; A. P. Youschkevitch, *Geschichte der Mathematik in Mittelalter*, Leipzig, 1964, p. 74 ; J.C. Martzloff, *Histoire des mathématiques chinoises*, Paris-Milan-Barcelone, 1987, p. 293 ; U. Libbrecht, *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century*, Cambridge, Mass., 1973, p. 416 *sqq*.

Sur l'histoire de ce problème en Inde, voir notamment : T. Hayashi, *The Bakhshālī Manuscript : An Ancient Indian Mathematical Treatise*, Groningen, 1995, p. 418-419 ; Kripa Shankar Shukhla, *The Patiganita of Sridharacarya with an Ancient Sanskrit Commentary*, Lucknow, 1959, p. 50-51.

L'idée d'Abū Kāmil est de traduire ce genre de problèmes en systèmes d'équations linéaires indéterminées dont on cherche les solutions en nombres entiers, et de calculer le nombre de ces solutions. Pour y parvenir, il désigne les différentes variables par des termes ; en plus du terme « chose », l'inconnue, il opte pour les noms d'espèces de monnaie pour désigner les autres variables : dirham, dinar, fels, khatem ... Tout a commencé lorsqu'il a trouvé pour un problème (le sixième du traité) 2678 solutions. C'est là qu'il a décidé de composer un livre sur ce calcul arithmétique. Dans ce livre, il ordonne les problèmes en fonction du nombre de solutions entières : 1 solution, 6 solutions, 98 solutions, 304 solutions. Il donne ensuite un problème impossible pour trouver, avec celui qui a provoqué la recherche elle-même, 2678 solutions entières. Ainsi, il découvre, pour les équations linéaires indéterminées dont on cherche les solutions en nombres entiers, qu'il peut y avoir un nombre fini de solutions, qu'il détermine. Il ne procède cependant pas à un calcul *a priori* de ce nombre.

PROBLÈME 1.

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 5x+\dfrac{1}{20}y+z=100 \end{cases}$$

Par élimination de x, il obtient

$$100-x-y=100-5x-\frac{1}{20}y\ ;$$

d'où

$$4x=\frac{19}{20}y \quad \text{ou} \quad y=4x+\frac{4}{19}x\ ;$$

donc

$(x = 19, y = 80, z = 1)$ unique solution en nombres entiers.

PROBLÈME 2.

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ \dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{2}y+z=100 \end{cases}$$

Par élimination de z, il obtient

$$200 - 2x - 2y = 100 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y,$$

d'où

$$\frac{5}{3}x + \frac{3}{2}y = 100 \quad \text{et} \quad x = 60 - \frac{9}{10}y.$$

Pour parvenir aux solutions entières, il faut que y soit de la forme $10 \cdot k$, avec $k = 1, 2, \ldots, 6$. Abū Kāmil en obtient six. C'est ce problème qu'emprunte al-Samaw'al dans son *al-Bāhir*[3].

PROBLÈME 3.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 100 \\ 4x + \frac{1}{10}y + \frac{1}{2}z + t = 100 \end{cases}$$

Par élimination de t, Abū Kāmil obtient

$$100 - x - y - z = 100 - 4x - \frac{1}{10}y - \frac{1}{2}z,$$

d'où

$$x = \frac{3}{10}y + \frac{1}{6}z.$$

Dans ce cas, y doit être multiple de 10 et z de 6 ; ou $y \equiv 5 \pmod{10}$ et $z \equiv 3 \pmod 6$. On obtient alors des fractions dont les sommes sont des nombres entiers.

Ce problème admet 98 solutions entières ; Abū Kāmil en obtient 96. Mais, en marge du manuscrit, une glose donne les deux manquantes. Abū Kāmil consigne dans un tableau un certain nombre de ces solutions pour aider le lecteur.

PROBLÈME 4.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 100 \\ 2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + t = 100 \end{cases}$$

Par élimination de t, Abū Kāmil obtient

[3] Voir *Al-Bāhir en Algèbre d'As-Samaw'al*, édition, notes et introduction par Salah Ahmad et Roshdi Rashed, Damas, 1972, p. 229.

$$100 - x - y - z = 100 - 2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z$$

d'où

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}z.$$

Dans ce cas, y doit être un multiple de 2 et z de 3.

Abū Kāmil obtient 304 solutions entières de ce problème et trace un tableau pour une partie de celles-ci.

PROBLÈME 5.

$$\begin{cases} x + y + z = 100 \\ 3x + \frac{1}{20}y + \frac{1}{3}z = 100 \end{cases}$$

Par élimination de z, Abū Kāmil obtient

$$100 - x - y = 300 - 9x - \frac{3}{20}y\ ;$$

d'où

$$x = 25 + \frac{17}{160}y,$$

problème impossible puisque, si on multiplie la fraction par 160, on dépasse 100.

PROBLÈME 6.

$$\begin{cases} x + y + z + t + u = 100 \\ 2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{4}t + u = 100 \end{cases}$$

Par élimination de u, Abū Kāmil obtient

$$100 - x - y - z - t = 100 - 2x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{3}z - \frac{1}{4}t,$$

d'où

$$x = \frac{1}{2}y + \frac{2}{3}z + \frac{3}{4}t.$$

Abū Kāmil observe que ce problème, comme déjà le troisième, admet deux groupes de solutions entières dont la somme est 2676 solutions[4]. On obtient le premier groupe en posant

$$y = 2k,\ 1 \le k \le 29$$
$$z = 3l,\ 1 \le l \le 17$$
$$t = 4m,\ 1 \le m \le 13$$

de manière que

$$3k + 5l + 7m < 100,$$

car

$$x + y + z + t = \frac{3}{2}y + \frac{5}{3}z + \frac{7}{4}t < 100.$$

Abū Kāmil trouve 1233 solutions de ce type.

Un second groupe de solutions correspond à

$$y = 2k + 1,\ z = 3l,\ t = 4m + 2$$

où $1 \le k \le 29,\ 1 \le l \le 18$ et $0 \le m \le 12$, de manière que

$$3k + 5l + 7m + 5 < 100\ ;$$

ceci donne 1443 solutions.

Il n'y a pas d'autre possibilité, car la relation $12x = 6y + 8z + 9t$ montre que z est multiple de 3 et que t est pair ; de plus, $2y + t$ est divisible par 4, donc t est divisible par 4, si y est pair ; et il est congru à 2(mod 4), si y est impair. Abū Kāmil obtient ainsi 2676 solutions.

Or on peut vérifier que le nombre des solutions, 2676, est exact à deux solutions près ; on trouve 2678 solutions : soit à la main, soit par ordinateur, avec un programme simple à boucles analysant toutes les possibilités[5].

On note qu'il s'agit là d'un des premiers textes (le premier à notre connaissance) où l'on procède au calcul du nombre des solutions en nombres entiers d'une équation indéterminée. Al-Samaw'al s'inspire de ce

[4] Dans le manuscrit : 2696. Or les copistes confondent souvent 70 (سبعون) et 90 (تسعون). D'autre part, pour le second groupe, Abū Kāmil donne 1443.

[5] Le calcul par ordinateur donne 2678. cf. Gérard Villemin : http://villemin.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Analyse/somme100.htm.

texte pour soulever le problème de la calculabilité du nombre des solutions, en liaison avec les notions de modalité[6].

Commentons maintenant l'étude d'Abū Kāmil à l'aide d'une autre mathématique, inconnue de lui.

On considère un système linéaire $\sum_{i=1}^{n} x_i = a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, à résoudre en nombres *entiers* ≥ 1 ; a est un nombre entier donné $\ge \sup\left(n, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right)$ et les coefficients α_i sont des nombres rationnels > 0. Le problème revient donc à déterminer les points à coordonnées entières ≥ 1 dans une variété linéaire affine de codimension 2 dans $\mathbf{Q}^n$.

On peut supposer que $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \ldots \ge \alpha_n$. Lorsque certains des α_i sont égaux, le système se ramène à un système analogue avec moins d'inconnues et un certain nombre d'équations du type $\sum_{i=1}^{m} x_i = u$ (autant qu'il y a de valeurs distinctes des α_i) ; le nombre de solutions d'une telle équation est $\binom{u-1}{m-1}$ comme on peut le vérifier par récurrence sur u grâce à la formule

$$\sum_{v=m-1}^{u-1} \binom{v-1}{m-2} = \binom{u-1}{m-1}.$$

I) Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \alpha$, il faut que $\alpha = 1$ et il ne reste qu'une équation $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$, qui a $\binom{a-1}{n-1}$ solutions.

II) Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = \alpha > \alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \ldots = \alpha_n = \beta$, on pose

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = u \text{ et } x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_n = v\ ;$$

les inconnues u, v sont soumises au système $u + v = a = \alpha u + \beta v$. On a $(\alpha - \beta)u = (1 - \beta)a$ et $(\alpha - \beta)v = (\alpha - 1)a$; la positivité de u et de v impose que $\alpha > 1 > \beta$. Posons $\alpha - \beta = \frac{p}{q}$, $1 - \beta = \frac{r}{q}$ où p, q, r sont des entiers ≥ 1 tels que $(p, q, r) = 1$; on a $\alpha - 1 = \frac{p-r}{q}$ et $pu = ra$, $pv = (p - r)a$. Comme

[6] Al-Samaw'al, *Al-Bāhir*, éd. S. Ahmad et R. Rashed, p. 227 *sqq.* (arabe) ; p. 74 *sqq.* (français).

u et v sont entiers, il faut que p divise ra : $ra = pa'$, $u = a'$, $v = a - a'$. Il reste à écrire que $u \geq m$ et $v \geq n - m$, soit $m \leq a' \leq a - n + m$. Le problème admet donc des solutions sous les conditions suivantes : 1) $\alpha > 1 > \beta$; 2) $a' = a\dfrac{1-\beta}{\alpha-\beta}$ est entier ; 3) $m \leq a' \leq a - n + m$. Le nombre total des solutions est

$$\binom{a'-1}{m-1}\binom{a-a'-1}{n-m-1}.$$

Ces deux cas I) et II) ne sont pas étudiés par Abū Kāmil ; on les considère ici pour la généralité.

III) Si $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = \alpha > \alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \ldots = \alpha_{m+h} = \beta > \alpha_{m+h+1} + \alpha_{m+h+2} + \ldots + \alpha_n = \gamma$, on pose $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = u$, $x_{m+1} + x_{m+2} + \ldots + x_{m+h} = v$, $x_{m+h+1} + x_{m+h+2} + \ldots + x_n = w$ et les inconnues u, v, w doivent vérifier $u + v + w = a = \alpha u + \beta v + \gamma w$. On a donc $w = a - u - v$ et $(\alpha - \gamma)u + (\beta - \gamma)v = (1 - \gamma)a$; on voit que l'existence des solutions exige que $\alpha > 1 > \gamma$. Posons $\alpha - \gamma = \dfrac{p}{q}$, $\beta - \gamma = \dfrac{r}{q}$, $1 - \gamma = \dfrac{s}{q}$, où p, q, r, s sont des entiers ≥ 1 tels que $(p, q, r, s) = 1$; on a $pu + rv = as$. Soient $d = (p, r)$, $p = dp'$, $r = dr'$, où $(p', r') = 1$. On voit que $d(p'u + r'v) = as$, donc d divise $as = da'$ et $p'u + r'v = a'$; on distingue deux cas :

1) $r' = 1$, c'est-à-dire $d = r$, qui divise donc p ; on a alors $v = a' - p'u$, $w = a - a' + (p' - 1)u$. Les solutions dépendent du paramètre $u \geq m$, qui doit en outre vérifier

$$a' - p'u \geq h,\ a - a' - (p' - 1)u \geq n - m - h,$$

soit

$$(1) \qquad u_0 = \sup\left(m, \frac{n-m-h-a+a'}{p'-1}\right) \leq u \leq \frac{a'-h}{p'} = u_1 ;$$

ceci exige que $pm \leq as - hr \leq p(a - n + m)$ et le nombre de solutions est

$$\sum_{u=u_0}^{u_1} \binom{u-1}{m-1}\binom{a'-p'u-1}{h-1}\binom{a-a'+(p'-1)u-1}{n-m-h}.$$

2) $r' \geq 2$; il existe un entier $p'' \in [1, r' - 1]$ tel que $p'p'' = 1 + kr'$, où $k \geq 1$ car $p' > r' \geq 2$. On a $p'u \equiv a' \pmod{r'}$, d'où $u = p''a' - \ell r'$, où ℓ est un entier ; ensuite

$$p'u + r'v = p'p''a' - p'\ell r' + r'v = a',$$

soit

$$v = p'\ell - ka'$$

et

$$w = a - p''a' + \ell r' - p'\ell + ka' = a + a'(k - p'') - \ell(p' - r').$$

Les solutions dépendent du paramètre ℓ, qui doit vérifier les inégalités

$$\ell r' \leq p''a' - m,\ \ell p' \geq ka' + h \text{ et } \ell(p' - r') \leq a + a'(k - p'') - n + m + h :$$

$$(2) \qquad \frac{ka'+h}{p'} \leq \ell \leq \inf\left(\frac{p''a'-m}{r'}, \frac{a+a'(k-p'')-n+m+h}{p'-r'}\right).$$

Ces solutions n'existent que si $sa - pm \geq hr$ et $p(n - m) \leq a(p - s) + hr$, soit

$$(3) \qquad pm \leq as - hr \leq p(a - n + m),$$

comme dans le cas 1).

Remarques :

1) On peut simplifier la solution dans le cas particulier où $\beta = 1$; alors $r = s$. Si on soustrait la première équation de la seconde, on trouve $(\alpha - 1)u = (1 - \gamma)w$, soit $(p - r)u = rw$ ou encore $(p' - r')u = r'w$. Dans le premier cas, où $r' = 1$, on a $w = (p' - 1)u$, $v = a - p'u$, solution dépendant du paramètre u soumis aux inégalités $\sup\left(m, \dfrac{n-m-h}{p'-1}\right) \leq u \leq \dfrac{a-h}{p'}$; elle n'existe que lorsque $pm \leq r(a - h) \leq p(a - n + m)$, cas particulier des inégalités (3).

Dans le second cas, où $r' \geq 2$, on a $p'u \equiv 0 \pmod{r'}$, donc $u = u'r'$ est divisible par r' et on a $w = (p' - r')u'$, $v = a - p'u'$, solution dépendant du paramètre u' soumis aux inégalités

$$\sup\left(\frac{m}{r'}, \frac{n-m-h}{p'-r'}\right) \leq u' \leq \frac{a-h}{p'} ;$$

elle n'existe que si $pm \leq r(a-h) \leq p(a-n+m)$ comme dans le premier cas.

2) Il existe une autre simplification, lorsque $\pi = (p',a') \neq 1$ ou bien lorsque $\rho = (r',a') \neq 1$. Si $\pi \neq 1$, on pose $p' = \pi p_1$, $a' = \pi a_1$, où $(p_1,a_1) = 1$ et on a $r'v = \pi(a_1 - p_1 u)$; or $(r',\pi) = 1$, donc π divise v. On pose $v = \pi v_1$ et on est ramené à l'équation $p_1 u + r' v_1 = a_1$, où les coefficients sont plus petits. On se ramène ainsi au cas où p' et r' sont premiers avec a'.

Exemples : 1) $x + y + z = 100 = 5x + y + \frac{1}{20} z$.

Ici $n = 3$, $m = h = 1$; $a = 100$, $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $\gamma = \frac{1}{20}$, donc $p = 99$, $q = 20$, $r = s = 19$ et $d = 1$, de sorte que $p' = p$ et $r' = r$. On peut appliquer la remarque 1 et écrire $4x = \frac{19}{20} z$, soit $80x = 19z$, d'où on tire $x = 19x'$, $z = 80x'$, $y = 100 - 99x'$, où le paramètre x' est soumis aux inégalités $\frac{1}{19} \leq x' \leq 1$. La seule solution est donnée par $x' = 1$; c'est $x = 19$, $y = 1$, $z = 80$.

2) $x + y + z = 100 = 3x + \frac{1}{3} y + \frac{1}{20} z$.

On a encore $n = 3$, $m = h = 1$ et $a = 100$, $\alpha = 3$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{1}{20}$, donc $p = 177$, $q = 60$, $r = 17$, $s = 57$ et $d = 1$, $p' = p$, $r' = r$, $a' = as = 5700$. On doit chercher p'' compris entre 1 et 16 tel que $177p'' \equiv 7p'' \equiv 1 \pmod{17}$; on trouve $p'' = 5$, tel que $177 \cdot 5 = 1 + 52 \cdot 17$, donc $k = 52$. On a alors $x = 5 \cdot 5700 - 17\ell$, $y = 177\ell - 52 \cdot 5700$, $z = 100 + 47 \cdot 5700 - 160\ell$; le paramètre ℓ est soumis aux inégalités

$$\frac{296401}{177} = 1674 + \frac{93}{177} \leq \ell \leq \inf\left(\frac{28499}{17}, \frac{267999}{160}\right) = 1674 + \frac{159}{160}.$$

Comme cet intervalle ne contient pas d'entier, le problème n'a aucune solution.

Notons que l'équation en (x,y) s'écrit $177x + 17y = 5700$, où $(177,5700) = 3 \neq 1$; la remarque 2 s'applique : on pose $y = 3y_1$ et on est conduit à

l'équation $59x + 17y_1 = 1900$. On a $59 \cdot 15 = 1 + 52 \cdot 17$ et on pose $x = 15 \cdot 1900 - 17\ell = 28500 - 17\ell$, à reporter dans l'équation ; après simplification, on trouve $52 \cdot 1900 - 59\ell + y_1 = 0$, d'où

$$y_1 = 59\ell - 52 \cdot 1900,$$

$$y = 177\ell - 156 \cdot 1900,$$

$$z = 267600 - 1600\ell,$$

comme précédemment. Mais la détermination de l'intervalle pour ℓ est un peu plus précise car y_1 doit être ≥ 1, ce qui donne $\ell \geq \frac{98801}{59} = 1674 + \frac{35}{59}$, où $\frac{35}{59} > \frac{93}{177}$ (la différence est très petite, égale à 0,0039655...).

On peut aussi exploiter une remarque analogue directement sur l'équation $180x + 20y + 3z = 6000$. Le coefficient 3 de z divise 180 et 6000 et il est premier avec 20, donc il divise y ; on pose $y = 3y_1$ et on a

$$z = 2000 - 60x - 20y_1 = 100 - x - 3y_1.$$

Ainsi $1900 = 59x + 17y_1$ comme ci-dessus.

IV) On traite de même les cas où le nombre des valeurs distinctes des coefficients α_i est 4, 5, ... Considérons par exemple le système $x + y + z + t = a = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t$, où $\alpha > \beta > \gamma > \delta$. On a $t = a - x - y - z$ et $(\alpha - \delta)x + (\beta - \delta)y + (\gamma - \delta)z = (1 - \delta)a$ et on voit que $\alpha > 1 > \delta$. Posons $\alpha - \delta = \frac{p}{q}$, $\beta - \delta = \frac{r}{q}$, $\gamma - \delta = \frac{s}{q}$ et $1 - \delta = \frac{g}{q}$, de sorte que $px + ry + sz = ga$; soient $d = (p, r, s)$, $p = dp'$, $r = dr'$ et $s = ds'$, où $(p', r', s') = 1$. On voit que d divise ga : $ga = da'$ et on a

$$p'x + r'y + s'z = a'. \tag{4}$$

On distingue deux cas :

1) $s' = 1$, c'est-à-dire que $s = d$ divise p et r. On a alors

$$z = a' - p'x - r'y, \; t = a - a' + (p' - 1)x + (r' - 1)y,$$

solution fonction de deux paramètres x, y soumis aux inégalités $x, y \geq 1$, $p'x + r'y \leq a' - 1$ et $(p' - 1)x + (r' - 1)y \geq a' - a + 1$. Dans le plan des (x, y), les inégalités

$$y \geq 1,\ p'x + r'y \leq a' - 1 \text{ et } (p' - 1)x + (r' - 1)y \geq a' - a + 1$$

définissent l'intérieur d'un triangle ; en effet les sommets du triangle sont les points de coordonnées $x = \frac{(g-1)a + 2s - r}{p - s}$, $y = 1$; $x = \frac{ga - r - s}{p}$, $y = 1$ et $x = \frac{(g-r)a + s}{p - r}$, $y = \frac{(p-g)a + s}{p - r}$.

Ce dernier point est dans la région où $y > 1$ si $(p - g)a + s > p - r$, soit

$$(\alpha - 1)a > \alpha - \beta - \gamma + \delta\ ;$$

comme $a \geq 4$ et $\alpha > 1$, c'est vrai lorsque $3\alpha + \beta + \gamma \geq \delta + 4$. Mais si $(\alpha - 1)a \leq \alpha - \beta - \gamma + \delta$, tout le triangle est dans le demi-plan $y \leq 1$ et on doit donc imposer $y = 1$,

$$\frac{ga - r - s}{p} \leq x \leq \frac{(g-1)a + 2s - r}{p - s}.$$

Dans le cas où le triangle est contenu dans la région $y > 1$, il reste à discuter la position de ses sommets par rapport à la droite $x = 1$. Les pentes des côtés non horizontaux du triangle sont égales à $-\frac{p - s}{r - s} = -\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}$ et $-\frac{p}{r} = -\frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta}$; elles sont négatives, et il suffit donc que $\frac{(g-r)a + s}{p - r} \geq 1$ pour que tout le triangle soit dans la région $x \geq 1$ et le nombre de solutions est celui des points à coordonnées entières dans le triangle. Cette inégalité s'écrit $(g - r)a + s \geq p - r$, soit $(1 - \beta)a \geq \alpha - \beta - \gamma + \delta$, donc si $\alpha - \beta - \gamma + \delta \leq a \inf(\alpha - 1, 1 - \beta)$, tout le triangle est à considérer ; si au contraire $a(1 - \beta) < \alpha - \beta - \gamma + \delta \leq a(\alpha - 1)$, on doit tronquer le triangle par la verticale $x = 1$.

2) Dans le cas où $s' \geq 2$, on résout d'abord la congruence $p'x + r'y \equiv a' \pmod{s'}$. On distingue encore deux cas :

a) si $(r', s') = 1$, c'est-à-dire si $(r, s) = d$ divise p, il existe un $r'' \in [1, s' - 1]$ tel que $r'r'' = 1 + ks'$, où k est un entier ≥ 1 (car $r' \geq s'$) et on a

$y = r''(a' - p'x) - \ell s'$; on reporte cette valeur dans l'équation (4) : $p'x + (1 + ks')(a' - p'x) - r'\ell s' + s'z = a'$, soit, après élimination des termes qui se compensent et division par s' : $z = r'\ell - k(a' - p'x)$, puis $t = a - x + (k - r'')(a' - p'x) - \ell(r' - s')$. On a ainsi une solution dépendant de deux paramètres x et ℓ, qui sont soumis aux inégalités $x \geq 1$,

$$r''(a' - p'x) - \ell s' \geq 1,$$
$$r'\ell - k(a' - p'x) \geq 1$$

et

$$a - x + (k - r'')(a' - p'x) - \ell(r' - s') \geq 1\ ;$$

les trois dernières se récrivent

(i) $p'r''x + s'\ell \leq a'r'' - 1$,
(ii) $p'kx + r'\ell \geq ka' + 1$,
(iii) $((k - r'')p' + 1)x + (r' - s')\ell \leq a + (k - r'')a' - 1$.

Notons que la différence entre (ii) et (i) donne

$$(k - r'')p'x + (r' - s')\ell \geq (k - r'')a' + 2,$$

qui, combinée avec (iii), conduit à $a \geq x + 3$, qui doit effectivement être vérifié. Les inégalités (i), (ii), (iii) définissent un triangle de sommets

$$x = \frac{ga - r - s}{p},\ \ell = k + r''\ ;\ x = \frac{a(g-r) + 2r - s}{p - r},\ \ell = \frac{kp(a-2) - kag + pr'' - d}{p - r}$$

et

$$x = \frac{a(g-s) - r + 2s}{p - s},\ \ell = \frac{pr''(a-2) + kp - agr'' + d}{p - s}.$$

On doit placer ces sommets par rapport à la droite $x = 1$, ce qui conduit aux inégalités

$$a(1 - \delta) \geq \alpha + \beta + \gamma - 3\delta,$$
$$a(1 - \beta) \geq \alpha + \gamma + \delta - 3\beta,$$
$$a(1 - \gamma) \geq \alpha + \beta + \delta - 3\gamma\ ;$$

lorsqu'elles sont vérifiées, le nombre des solutions est celui des points à coordonnées entières dans le triangle, mais dans le cas contraire, on doit retenir seulement la partie où $x \geq 1$.

b) Si $(r',s') = \frac{(r,s)}{d} = e \geq 2$, on pose $r' = er_1$, $s' = es_1$, où $(r_1,s_1) = 1$ et l'équation (4) montre que $p'x \equiv a' \pmod{e}$. Il existe un $p'' \in [1,e-1]$ tel que $p'p'' = 1 + ke$, où k est un entier ≥ 1 et on a $x = p''a' - \ell e$, où ℓ est entier ; ensuite $p'(p''a' - \ell e) + er_1y + es_1z = a'$, soit

$$r_1y + s_1z = p'\ell - ka'.$$

On doit encore distinguer des cas :

α) $s_1 = 1$, c'est-à-dire que $e = s'$ divise r' ; alors

$$z = p'\ell - ka' - r_1y,\ t = a + (k - p'')a' + (r_1 - 1)y - (p' - s')\ell,$$

solution dépendant des deux paramètres y, ℓ soumis aux inégalités

$$y \geq 1,\ \ell \leq \frac{p''a' - 1}{s'},\ p'\ell - r_1y \geq ka' + 1,$$
$$(p' - s')\ell - (r_1 - 1)y \leq a + (k - p'')a' - 1.$$

La discussion de ces inégalités est analogue à la précédente ; les sommets du triangle sont les points

$$\ell = \frac{p''a - d}{s},\ y = \frac{ag - p - s}{r}\ ;\ \ell = \frac{p''a - d}{s},\ y = \frac{a(g-s) - p + 2s}{r - s}$$

et

$$\ell = \frac{a(rd - g(ks + p''r) - d(2r - s)}{s(p - r)},\ y = \frac{a(p - g) - 2p + s}{p - r}.$$

Ils sont tous les trois dans le demi-plan $y \geq 1$ sous les conditions :

$$a(1 - \delta) \geq \alpha + \beta + \gamma - 3\delta,$$
$$a(1 - \gamma) \geq \alpha + \beta + \delta - 3\gamma,$$
$$a(\alpha - 1) \geq 3\alpha - \beta - \gamma - \delta.$$

β) $s_1 \geq 2$; on a $r_1y \equiv p'\ell - ka' \pmod{s_1}$ et il existe $r_2 \in [1,s_1 - 1]$ tel que $r_1r_2 = 1 + hs_1$, où h est un entier ≥ 1. On a $y = r_2(p'\ell - ka') - ms_1$, puis

$$z = mr_1 - h(p'\ell - ka'),\ t = a - p''a' + \ell e + (h - r_2)(p'\ell - ka') - m(r_1 - s_1),$$

solution fonction de deux paramètres ℓ et m soumis aux inégalités

$$\ell \leq \frac{p''a' - 1}{e},\ r_2p'\ell - s_1m \geq ka'r_2 + 1,\ hp'\ell - r_1m \leq kha' - 1$$

et

$$(e + p'(h - r_2))\ell - (r_1 - s_1)m \geq a'p'' - a + ka'(h - r_2),$$

que l'on traite comme précédemment.

Remarques :

1) Dans le cas où β ou γ est égal à 1, on peut recourir à un calcul plus simple, par soustraction des équations.

• Supposons d'abord $\beta = 1$, donc $r = g$; la soustraction donne

$$(\alpha - 1)x + (\gamma - 1)z + (\delta - 1)t = 0,$$

soit

$$(p - r)x + (s - r)z = rt \text{ ou } (p' - r')x - (r' - s')z = r't.$$

On a $r' > s' \geq 1$, donc $r' \geq 2$ et $p'x + s'z \equiv 0 \pmod{r'}$; si $(r',s') = 1$, c'est-à-dire que $(r,s) = d$ divise p, il existe $s'' \in [1,r' - 1]$ tel que $s's'' = 1 + kr'$, où k est un entier ≥ 0 et on a $z = \ell r' - s''p'x$, où ℓ est entier, puis

$$t = ((s'' - k)p' - 1)x - (r' - s')\ell,\ y = a - s'\ell + kp'x$$

d'où encore une solution dépendant de deux paramètres x et ℓ, soumis aux inégalités $x \geq 1$,

$$s'\ell - kp'x \leq a - 1,\ \ell r' - s''p'x \geq 1,\ ((s'' - k)p' - 1)x - (r' - s')\ell \geq 1.$$

Les sommets du triangle sont les points

$$x = \frac{ar - r - s}{p},\ \ell = s''(a - 1) - k\ ;$$
$$x = \frac{2r - s}{p - r},\ \ell = \frac{2s''p - kp - d}{p - r}$$

et

$$x = \frac{a(r-s)-r+2s}{p-s},\ \ell = \frac{(a-1)(ps''-d)-kd(a-2)}{p-s}.$$

Ils sont tous les trois dans le demi-plan $x \geq 1$ lorsque

$$\alpha+\gamma+\delta \leq 3,\ a(1-\delta) \geq \alpha+\beta+\gamma-3\delta,\ a(1-\gamma) \geq \alpha+\beta+\delta-3\gamma.$$

• Si $\gamma = 1$, donc $s = g$, on a

$$(\alpha-1)x+(\beta-1)y+(\delta-1)t = 0,$$

soit

$$(p-s)x+(r-s)y = st,$$

ou encore

$$(p'-s')x+(r'-s')y = s't.$$

Lorsque $s' = 1$, soit $s = d$ divisant p et r, on en tire

$$t = (p'-1)x+(r'-1)y \text{ et } z = a-p'x-r'y,$$

solution dépendant des paramètres x, y soumis aux inégalités

$$x, y \geq 1,\ p'x+r'y \leq a-1,\ (p'-1)x+(r'-1)y \geq 1.$$

Les sommets du triangle sont les points

$$x = \frac{as-r-s}{p},\ y = 1\ ;\ x = \frac{2s-r}{p-s},\ y = 1$$

et

$$x = \frac{2r-s-a(r-s)}{p-r},\ y = \frac{a(p-s)-2p+s}{p-r}$$

et on doit comparer leurs abscisses à 1 : ils sont tous les trois dans le demi-plan $x \geq 1$ lorsque $as \geq p+r+s$, $3s \geq p+r$ et $a(r-s) \leq 3r-p-s$, soit

(5) $\quad a(1-\delta) \geq \alpha+\beta+\gamma-3\delta,\ \alpha+\beta+\delta \leq 3$
et $a(\beta-1) \geq 3\beta-\alpha-\gamma-\delta.$

Lorsque $s' \geq 2$, $p'x + r'y \equiv 0 \pmod{s'}$, d'où $y = \ell s' - r''p'x$, où $1 \leq r'' \leq s'-1$, $r'r'' = 1+ks'$; ensuite $t = ((r''-k)p'-1)x+(r'-s')\ell$, $z = a-r'\ell+kp'x$, solution dépendant des paramètres x, ℓ soumis aux inégalités

$$x \geq 1,\ \ell s'-r''p'x \geq 1,\ r'\ell-kp'x \leq a-1,\ ((r''-k)p'-1)x+(r'-s')\ell \geq 1.$$

Les sommets du triangle sont les points

$$x = \frac{as-r-s}{p},\ \ell = r''(a-1)-k\ ;$$

$$x = \frac{2r-s-a(r-s)}{p-r},\ \ell = \frac{(a-1)(r''p-d)-kp(a-2)}{p-r}$$

et

$$x = \frac{2s-r}{p-s},\ \ell = \frac{2r''p-kp-d}{p-s}\ ;$$

ils sont dans le demi-plan $x \geq 1$ sous les conditions (5).

2) Supposons que l'un des nombres $\sigma = (p',r',a')$, $\pi = (r',s',a')$, $\rho = (p',s',a')$ soit différent de 1, par exemple $\sigma \neq 1$; posons $p' = \sigma p_1$, $r' = \sigma r_1$ et $a' = \sigma a_1$, où $(p_1,r_1,a_1) = 1$. L'équation (4) devient $s'z = \sigma(a_1-p_1x-r_1y)$ et on sait que $(s',\sigma) = 1$; il en résulte que σ divise z : $z = \sigma z_1$ et $p_1x+r_1y+s'z_1 = a_1$, où les coefficients sont plus petits. On se ramène ainsi au cas où les nombres p', r', s', a' sont premiers entre eux trois à trois. C'est toujours la situation dans les exemples d'Abū Kāmil, et il aboutit à une équation dont l'un des coefficients est 1, ce qui permet d'exprimer l'inconnue correspondante en fonction des deux autres et d'éviter ainsi la recherche d'un inverse *modulo* r' ou s'.

Exemples :

1) $\quad x+y+z+t = 100 = 4x+y+\frac{1}{2}z+\frac{1}{10}t.$

On applique la remarque relative au cas où $\beta = 1$; on a $3x-\frac{1}{2}z-\frac{9}{10}t = 0$, soit $30x-5z-9t = 0$ et $p = 39$, $r = g = 9$, $s = 4$, donc $d = 1$, $p' = p = 39$, $r' = r = 9$, $s' = s = 4$, $a' = ar = 900$. Ici $(p-r,r-s) = 5 \neq 1$, donc $t = 5t_1$ est multiple de 5 (cf. remarque 2) : $6x-z-9t_1 = 0$, soit $z = 6x-9t_1$; ensuite

$y = 100 - 7x + 4t_1$. On doit imposer que $x, t_1 \geq 1$, $6x - 9t_1 \geq 1$ et $7x - 4t_1 \leq 99$; on considère le triangle de sommets $x = \frac{5}{3}$, $t_1 = 1$; $x = \frac{103}{7} = 14 + \frac{5}{7}$, $t_1 = 1$; $x = \frac{887}{39} = 22 + \frac{29}{39}$, $t_1 = \frac{587}{39} = 15 + \frac{2}{39}$. Le nombre de solutions est la somme des nombres n_{t_1} de nombres entiers dans les intervalles $\left[\frac{9t_1+1}{6}, \frac{4t_1+99}{7}\right] = [a_{t_1}, b_{t_1}]$ pour $1 \leq t_1 \leq 15$. On a $a_1 = \frac{5}{3}$ et $a_{t_1+1} = a_{t_1} + \frac{3}{2}$, qui n'est jamais entier, donc l'entier immédiatement supérieur est $[a_{t_1}] + 1$, où $[u]$ désigne la partie entière du nombre u ; on a $[a_{2k}] = [a_{2k-1}] + 2$ et $[a_{2k+1}] = [a_{2k}] + 1$, comme on le vérifie par récurrence sur k. Par ailleurs $b_1 = 14 + \frac{5}{7}$ et $b_{t_1+1} = b_{t_1} + \frac{4}{7}$; les seules valeurs entières de b_{t_1} sont $b_5 = 17$ et $b_{12} = 21$. On a $[b_{2k}] = [b_{2k-1}] + 1$ pour $k = 1, 2, 6, 7$ et $[b_{2k}] = [b_{2k-1}]$ pour $3 \leq k \leq 5$; $[b_{2k+1}] = [b_{2k}]$ pour $k = 1, 6, 7$ et $[b_{2k+1}] = [b_{2k}] + 1$ pour $2 \leq k \leq 5$. Ainsi les nombres $n_{t_1} = [b_{t_1}] - [a_{t_1}]$ sont les suivants : 13, 12, 11, 10, 10, 8, 8, 6, 6, 4, 4, 3, 2, 1, où on remarque que $n_{2k+1} = n_{2k}$ pour $2 \leq k \leq 5$, $n_{2k} = n_{2k-1} - 2$ pour $3 \leq k \leq 5$ et $n_{t+1} = n_t - 1$ pour $1 \leq t \leq 4$ et pour $11 \leq t \leq 14$.

Le nombre total de solutions est donc

$$1 + 2 + 3 + 11 + 12 + 13 + 4\sum_{2}^{5} k = 42 + 56 = 98.$$

Abū Kāmil obtient 96 solutions et les deux qui restent sont notées en marge du manuscrit[7].

2) $\quad x + y + z + t = 100 = 2x + y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}t.$

On peut aussi exploiter la remarque 2 : l'équation $6x - 3z = 4t$ implique que 3 divise t ; si $t = 3t_1$, on a $z = 2x - 4t_1$ puis $y = 100 - 3x + t_1$ ou encore $t_1 = 3x + y - 100$, $z = 400 - 10x - 4y$. On a ainsi une solution fonction des paramètres x, y ; c'est celle que considère Abū Kāmil. On doit imposer que $x, y \geq 1$, $10x + 4y \leq 399$ et $3x + y \geq 101$. Les sommets du triangle sont ici

$$x = 39 + \frac{1}{2},\ y = 1\ ;\ x = 33 + \frac{1}{3},\ y = 1 \text{ et } x = \frac{5}{2},\ y = 93 + \frac{1}{2}.$$

[7] Voir plus loin, p. 745 et 749.

Pour compter le nombre de solutions, on doit faire la somme des nombres de nombres entiers dans les intervalles $\left[\sup(1, 101 - 3x), 99 - \frac{10x-3}{4}\right]$ $= [a_x, b_x]$ pour $3 \leq x \leq 39$. On note que $a_{x+1} = a_x - 3$ ou 1, donc il reste toujours entier ; on a $a_x = 101 - 3x$ pour $x \leq 33$ et $x = 1$ pour $34 \leq x \leq 39$. Par ailleurs $b_{x+1} = b_x - \frac{5}{2}$, $b_3 = 92 + \frac{1}{4}$; comme $\frac{3}{4} - \frac{5}{2} = -2 + \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{4} - \frac{5}{2}$ $= -3 + \frac{3}{4}$, on vérifie, par récurrence sur k, que $b_{2k+1} = [b_{2k+1}] + \frac{1}{4}$ et $b_{2k} = [b_{2k}] + \frac{3}{4}$. Il en résulte que $[b_{2k+1}] = [b_{2k}] - 2$ et $[b_{2k}] = [b_{2k-1}] - 3$; ainsi le nombre n_{2k+1} d'entiers dans $[a_{2k+1}, b_{2k+1}]$ est égal à $[b_{2k+1}] - a_{2k+1} - 1 = [b_{2k}] - a_{2k} = n_{2k} + 1$ et $n_{2k} = [b_{2k}] - a_{2k} - 1 = [b_{2k-1}] - a_{2k-1} - 1 = n_{2k-1}$ tant que $k \leq 16$. Comme $a_3 = [b_3] = 92$, $n_3 = 1 = n_4$, puis, par récurrence sur k, $n_{2k-1} = n_{2k} = k$ pour $1 \leq k \leq 16$. Ensuite $n_{33} = 16$, $n_{34} = 14$ car $a_{34} = 1$ et $[b_{34}] = 14$, puis $n_{2k} = n_{2k-1} - 3$ et $n_{2k+1} = n_{2k} - 2$ pour $k \geq 18$; il en résulte que $n_{2k} = 99 - 5k$ et $n_{2k+1} = 97 - 5k$. Le nombre total de solutions est donc

$$2\sum_{k=1}^{15} k + 16 + 3 \cdot (99 + 97) - 2 \cdot 5 \cdot (17 + 18 + 19) =$$
$$= 240 + 16 + 588 - 540 = 304\ ;$$

Abū Kāmil les a toutes explicitées.

V) Traitons enfin un exemple comportant 5 inconnues ; les solutions dépendront de $5 - 2 = 3$ paramètres soumis à 5 inégalités linéaires. Parmi ces inégalités, 4 définissent un tétraèdre dans un espace affine de dimension 3 et on doit placer ce tétraèdre par rapport au plan défini par la dernière inégalité, puis compter le nombre de points à coordonnées entières dans le solide ainsi défini.

L'exemple d'Abū Kāmil est le suivant :

$$x + y + z + t + u = 100 = 2x + y + \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}t + \frac{1}{4}u.$$

Par soustraction, on trouve $x - \frac{1}{2}z - \frac{2}{3}t - \frac{3}{4}u = 0$ soit $12x = 6z + 8t + 9u$; cette équation montre que t est multiple de 3 : $t = 3t_1$ et $4x = 2z + 8t_1 + 3u$. On voit encore que u est pair : $u = 2u_1$ et $2x = z + 4t_1 + 3u_1$, d'où $z = 2x - 4t_1 - 3u_1$, puis $y = 100 - 3x + t_1 + u_1$. On a ainsi une solution fonction des paramètres x, t_1, u_1 soumis aux inégalités $x, t_1, u_1 \geq 1$, $2x - 4t_1 - 3u_1 \geq 1$, $3x - t_1 - u_1 \leq 99$. Le tétraèdre a pour sommets

$$x = 4,\ t_1 = u_1 = 1\ ;\ x = \frac{101}{3} = 33 + \frac{2}{3},\ t_1 = u_1 = 1\ ;\ x = 39 + \frac{3}{5},$$
$$t_1 = 18 + \frac{4}{5},\ u_1 = 1 \text{ et } x = 42 + \frac{1}{7},\ t_1 = 1,\ u_1 = 26 + \frac{3}{7}.$$

Remarque :

On peut aussi tirer t_1 et u_1 en fonction de x, y, z :

$$t_1 = 300 - 7x - 3y - z,\ u_1 = 10x + 4y + z - 400,$$

avec les inégalités $x, y, z \geq 1$, $7x + 3y + z \leq 299$, $10x + 4y + z \geq 401$.

Le nombre des solutions est la somme des nombres de points à coordonnées entières dans les sections triangulaires du tétraèdre qui correspondent aux hauteurs u_1 comprises entre 1 et 26. Pour $u_1 = h$, les sommets de la section sont les points $x = \frac{3h+5}{2}$, $t_1 = 1$; $x = \frac{h+100}{3}$, $t_1 = 1$ et $x = \frac{h+395}{10}$, $t_1 = \frac{195-7h}{10}$; le nombre N_h de points correspondant est la somme des nombres $n_{h,k}$ de nombres entiers dans les intervalles $t_1 = k$, $a_{h,k} = \frac{3h+1}{2} + 2k \leq x \leq \frac{h+k}{3} + 33 = b_{h,k}$ $(1 \leq k \leq 19 - \frac{7h-5}{10})$. Il est clair que $a_{h,k+1} = a_{h,k} + 2$ et que $b_{h,k+1} = b_{h,k} + \frac{1}{3}$; il en résulte que $[a_{h,k+1}] = [a_{h,k}] + 2$ et $[b_{h,k+1}] = [b_{h,k}]$ sauf si $k \equiv 2h - 1 \pmod 3$, cas dans lequel $b_{h,k+1}$ est entier et $[b_{h,k+1}] = [b_{h,k}] + 1$. Ainsi $n_{h,k+1} = n_{h,k} - 2$ si $k \equiv 2h$ ou $2h + 1 \pmod 3$ et $n_{h,k+1} = n_{h,k} - 1$ si $k \equiv 2h - 1 \pmod 3$.

Notons par ailleurs s_h la borne supérieure de k, c'est-à-dire la partie entière de $19 - \frac{7h-5}{10}$; comme $\frac{7\times 3}{10} = 2 + \frac{1}{10}$, on voit que $s_{h-3} = s_h + 2$ sauf si $h \equiv 8 \pmod{10}$, cas dans lequel $\frac{7(h-3)-5}{10}$ est entier et $s_{h-3} = s_h + 3$.

On distingue trois cas, selon que $h \equiv 2$, 1 ou 0 (mod 3) :

a) si $h \equiv 2 \pmod 3$, soit

$h = 26, 23, 20, 17, 14, 11, 8, 5$ ou 2,

$n_{h,k-1} = n_{h,k} + 2$ pour $k \equiv 0$ ou $2 \pmod 3$ et

$n_{h,k-1} = n_{h,k} + 1$ pour $k \equiv 1 \pmod 3$.

Tableau I

h	26	23	20	17	14	11	8	5	2
s_h	1	3	5	7	9	11	13	16	18
n_{h,s_h}	1	1	1	2	1	2	2	1	0

Tableau II ($n_{n,k}$)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	N_h
h																			
2	29	27	25	24	22	20	19	17	15	14	12	10	9	7	5	4	2	0	261
5	26	24	22	21	19	17	16	14	12	11	9	7	6	4	2	1			211
8	22	20	18	17	15	13	12	10	8	7	5	3	2						152
11	19	17	15	14	12	10	9	7	5	4	2								114
14	15	13	11	10	8	6	5	3	1										72
17	12	10	8	7	5	3	2												47
20	8	6	4	3	1														22
23	5	3	1																9
26	1																		1

Les totaux N_h se calculent de la manière suivante :

$$N_2 = 2\sum_{m=1}^{17} m - 3\sum_{m=1}^{5} m = 261,$$

$$N_5 = 1 + 2\sum_{m=1}^{15} m - 3\sum_{m=1}^{4} m = 211,$$

$$N_8 = 5 + 2\sum_{m=1}^{12} m - 3\sum_{m=1}^{2} m = 152,$$

$$N_{11} = 2\sum_{m=1}^{11} m - 3\sum_{m=1}^{3} m = 114,$$

$$N_{14} = 3 + 2\sum_{m=1}^{8} m - 3 = 72,$$

$$N_{17} = 2\sum_{m=1}^{7} m - 3\sum_{m=1}^{2} m = 47,$$

$$N_{20} = 2 + 2\sum_{m=1}^{4} m = 22$$

et le total général, pour les $h \equiv 2 \pmod 3$ est égal à 889.

b) si $h \equiv 1 \pmod 3$, soit $h = 25, 22, 19, 16, 13, 10, 7, 4$ ou 1, $n_{h,k-1} = n_{h,k} + 2$ pour $k \equiv 0$ ou $1 \pmod 3$ et $n_{h,k-1} = n_{h,k} + 1$ pour $k \equiv 2 \pmod 3$.

Tableau I′

h	25	22	19	16	13	10	7	4	1
s_h	2	4	6	8	10	12	14	16	18
n_{h,s_h}	1	0	1	1	1	1	2	1	2

Tableau II′ ($n_{n,k}$)

h \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	N_h
1	30	29	27	25	24	22	20	19	17	15	14	12	10	9	7	5	4	2	291
4	26	25	23	21	20	18	16	15	13	11	10	8	6	5	3	1			221
7	23	22	20	18	17	15	13	12	10	8	7	5	3	2					175
10	19	18	16	14	13	11	9	8	6	4	3	1							122
13	16	15	13	11	10	8	6	5	3	1									88
16	12	11	9	7	6	4	2	1											52
19	9	8	6	4	3	1													31
22	5	4	2	0															11
25	2	1																	3

Les nombres N_h se calculent d'une manière analogue à celle du cas où $h \equiv 2 \pmod 3$ et on trouve un total général égal à 994.

c) si $h \equiv 0 \pmod 3$, soit $h = 24, 21, 18, 15, 12, 9, 6$ ou 3, $n_{h,k-1} = n_{h,k} + 2$ pour $k \equiv 1$ ou $2 \pmod 3$ et $n_{h,k-1} = n_{h,k} + 1$ pour $k \equiv 0 \pmod 3$.

Tableau I″

h	24	21	18	15	12	9	6	3
s_h	2	4	6	9	11	13	15	17
n_{h,s_h}	1	2	2	1	0	1	1	1

Tableau II″ ($n_{n,k}$)

h \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	N_h
3	28	26	25	23	21	20	18	16	15	13	11	10	8	6	5	3	1	249
6	24	22	21	19	17	16	14	12	11	9	7	6	4	2	1			185
9	21	19	18	16	14	13	11	9	8	6	4	3	1					143
12	17	15	14	12	10	9	7	5	4	2	0							95
15	14	12	11	9	7	6	4	2	1									66
18	10	8	7	5	3	2												35
21	7	5	4	2														18
24	3	1																4

Le total est ici 795 et le total pour tous les h, c'est-à-dire le nombre des solutions, est donc 889 + 994 + 795 = 2678.

Abū Kāmil explicite seulement 2676 solutions.

Dans cette étude, Abū Kāmil inaugure l'analyse indéterminée entière du premier degré, domaine complètement étranger à Diophante, comme l'avait déjà remarqué P. Tannery.

CHAPITRE VII

LA DÉMONSTRATION AUX COMMENCEMENTS DE L'ALGÈBRE

I. Les documents archéologiques et les textes historiques que nous connaissons attestent un fait inébranlable : c'est dans les cités grecques que l'on a élaboré, au terme d'un long parcours mathématique et philosophique, une pratique et une idée de la démonstration mathématique. Sur la contribution des mathématiciens d'Égypte et de Babylone à l'émergence des pratiques démonstratives et des normes de la preuve mathématique, nous ne savons pour l'heure rien de définitif – même si les résultats et les quelques textes qui nous sont parvenus laissent supposer que ces derniers ont vérifié leurs procédures de calcul et de solution des problèmes et les ont, en quelque sorte, justifiées. La recherche future nous en dira plus. Telle qu'elle est écrite aujourd'hui, l'histoire des mathématiques nous enseigne qu'autour du quatrième siècle avant notre ère, les mathématiciens grecs procédaient par *antiphairesis*, par *neusis* ..., avant de définir le concept de démonstration rigoureuse. Philosophes et mathématiciens vont engager deux courants de recherche pour parvenir à cette définition. Le premier a conduit à fonder la structure de la démonstration mathématique sous la forme d'une « axiomatique », qui trouvera dans les *Éléments* d'Euclide son illustration la plus achevée[1]. L'autre a abouti à l'édification de la démonstration sur des bases théoriques solides : c'est Aristote qui, dans les *Seconds Analytiques*, achève cette démarche, en édifiant la première théorie connue du système déductif. Ces deux mouvements, non seulement sont inséparables, mais caractérisent ensemble l'activité mathématique : on produit des démonstrations à partir des axiomes, d'une part, et on examine la nature et la structure des éléments de celles-ci, d'autre part.

Pendant deux millénaires au moins, mathématiciens, logiciens, philosophes et bien d'autres encore, enrichiront sans relâche la bibliothèque des commentaires, des critiques et des développements de ces deux livres, celui d'Euclide et celui d'Aristote. Mais, déjà au X^{e} siècle et au début du siècle suivant, les mathématiciens de Bagdad, de Chiraz et du Caire élaboraient une

[1] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^{e} au XI^{e} siècle*, vol. IV : *Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques*, London, 2002.

théorie de la découverte qui, jointe à celle de la démonstration, constituait ce qu'on appellera plus tard l'*ars analytica*. Je pense à Ibrāhīm ibn Sinān, al-Sijzī et Ibn al-Haytham notamment[2].

Soulignons cependant que l'exposé « axiomatique » et le concept de démonstration qui lui est intimement lié ont été conçus en géométrie et, si j'ose dire, pour la géométrie. Même si l'idée de système déductif était évoquée ailleurs – en philosophie, en jurisprudence etc. – c'était par analogie, voire par métaphore. Le système déductif n'opère que sur les disciplines géométriques : optique, statique et certaines parties de l'astronomie ; et sur celles qui leur sont liées, telles que l'arithmétique euclidienne. Les autres disciplines mathématiques – la logistique, l'arithmétique néo-pythagorienne telle que celle de Nicomaque de Gérase, de Jamblique, ou de Théon de Smyrne, et l'arithmétique de Diophante – sont restées hors du champ d'application du système déductif, si bien qu'avec ces dernières et, plus généralement, avec les disciplines algorithmiques, se pose une question épistémique majeure, celle des rapports entre algorithme et démonstration dans une discipline nécessairement algorithmique.

Encore en germe dans les *Arithmétiques* de Diophante par exemple, cette question sera explicitement formulée au IX^e^ siècle, à l'heure de la constitution de l'algèbre comme discipline différente de la géométrie, mais aussi de l'arithmétique, fût-elle celle de Diophante. Cette nouvelle situation épistémique dura pendant des siècles, et s'avéra féconde tout au long de l'histoire de la discipline, jusqu'à ce que l'on parvînt, au XIX^e^ siècle, à donner de l'algèbre un exposé axiomatique.

Au IX^e^ siècle, la situation était la suivante : al-Khwārizmī – le fondateur de l'algèbre – et ses successeurs adhéraient aux normes de la démonstration héritées de la tradition euclidienne, sans être cependant en mesure de procéder par un exposé axiomatique. D'autre part ils concevaient l'algèbre comme nécessairement algorithmique. Toute la question est donc de savoir quel fut le retentissement de cette situation, à première vue paradoxale, sur le concept et les méthodes de la démonstration. Autrement dit, comment passer d'une suite finie d'instructions à la construction d'une démonstration mathématique, qui exige qu'on connaisse non seulement les règles de déduction, mais aussi un système d'axiomes auparavant donné. C'est à cette question, plus ou moins latente, que les premiers algébristes avaient tenté de répondre. Revenons donc au commencement de l'algèbre avec al-Khwārizmī et ses successeurs.

[2] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales*, vol. IV ; R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au X^e^ siècle*, Leiden, 2000.

II. Le projet d'al-Khwārizmī est précis : élaborer une théorie des équations des deux premiers degrés à une seule inconnue résolubles par radicaux. Une fois en possession de cette théorie, on peut procéder à la solution des problèmes arithmétiques ou géométriques traduisibles dans son langage. L'exigence de résoudre par radicaux les équations a contraint al-Khwārizmī à se borner aux seules équations des deux premiers degrés, et à l'étude des opérations du calcul sur les expressions polynomiales associées à celles-ci seulement.

S'inspirant de la démarche euclidienne, al-Khwārizmī[3] commence par définir les termes primitifs de la théorie qu'il entend élaborer : le nombre, l'inconnue, le carré de l'inconnue, les équations composées de ces termes et les opérations qu'on va leur appliquer. Tout comme Euclide, al-Khwārizmī exige que les éléments de cette théorie soient apodictiques, c'est-à-dire démontrés, et non seulement justifiés. Mais les ressemblances s'arrêtent là. Al-Khwārizmī, lui, ne part ni de postulats ni d'axiomes, mais des types idéaux d'équations définis *a priori* ; c'est-à-dire de l'ensemble exhaustif des formes fixes auxquelles se réduisent toutes les autres. Pour parvenir à ces types idéaux d'équations, il lui a fallu procéder à l'aide d'une combinatoire des termes primitifs, en faisant intervenir l'addition, la multiplication et la notion d'égalité. Al-Khwārizmī détermine ensuite l'algorithme propre à chacune des équations ainsi obtenues.

À la différence d'Euclide, al-Khwārizmī n'entend pas démontrer la vérité d'un énoncé ; il veut démontrer que l'algorithme qui permet de déterminer l'inconnue à partir du connu est bien établi, qu'il est nécessaire et universel – c'est-à-dire qu'il mène nécessairement à la solution et que celle-ci ne dépend pas des données particulières de l'équation, mais vaut quels que soient les coefficients. Il s'agit donc de démontrer que les étapes successives, en nombre fini, qui composent l'algorithme aboutissent nécessairement et universellement à la détermination de l'objet individuel cherché : l'inconnue. Notons qu'al-Khwārizmī, tout comme Diophante avant lui et encore au XVII^e^ siècle les algébristes, désigne les paramètres par des nombres. Tous savent cependant qu'il s'agit d'une valeur quelconque, provisoirement maintenue constante.

Pour al-Khwārizmī, répétons-le, il ne suffit pas de vérifier l'algorithme en montrant qu'il est satisfait pour certaines valeurs de l'inconnue, mais il faut établir par des déductions contraignantes que l'algorithme mène à la détermination de l'inconnue. Cette démonstration doit donc, selon l'expression d'al-Khwārizmī, établir « la cause » de l'algorithme, en théorie des

[3] R. Rashed, *Al-Khwārizmī : Le commencement de l'algèbre*, Paris, 2007. Trad. anglaise : *Al-Khwārizmī : The Beginnings of Algebra*, History of Science and Philosophy in Classical Islam, London, 2009.

équations aussi bien qu'en calcul algébrique. Or cette démonstration « par la cause » consiste à dériver l'algorithme des relations géométriques établies entre les éléments d'une figure, délibérément construite pour traduire géométriquement les notions primitives de l'algèbre ainsi que les relations qui les lient et que décrit l'équation. Cette démonstration « par la cause » est fondée sur une traduction géométrique des identités suivantes :

$$x^2 + bx = c \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

$$x^2 + c = bx \Leftrightarrow \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$$

$$x^2 = bx + c \Leftrightarrow \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$$

Al-Khwārizmī trace les figures nécessaires, à partir desquelles il établit ces identités. Ses successeurs – Abū Kāmil et Thābit ibn Qurra – ont reconnu dans cette démonstration géométrique l'équivalent des propositions II.5 et II.6 des *Éléments* d'Euclide. Il est vrai que, tout comme Euclide dans le second livre des *Éléments*, al-Khwārizmī ne procède pas par la méthode d'application des aires, laquelle exige le recours à la théorie des proportions. C'est plus tard, on le verra, qu'Abū Kāmil, Thābit ibn Qurra et leurs successeurs eurent recours à cette méthode.

Dans le second chapitre de son livre, al-Khwārizmī étudie les algorithmes du calcul sur les binômes et les trinômes associés aux équations. C'est à ce propos qu'il introduit une distinction séminale entre deux modes de démonstration : « par la cause » (celle que l'on vient d'évoquer) ; et une autre, dite « par l'expression » (*al-lafẓ*). Pour donner un contenu à cette distinction, rappelons d'abord que le concept de « chose » revêt chez al-Khwārizmī trois statuts indissociables : c'est un nombre rationnel ; c'est un irrationnel quadratique ; c'est une solution d'une équation du premier ou du second degré. Comme, dans les deux derniers cas, la « chose » est représentée par un segment de droite, on peut donc lui appliquer les démonstrations qui valent pour les segments. Mais lorsque, dans le calcul algébrique, on ne peut plus représenter « la chose » par un segment, son carré par une surface carrée et son produit par un nombre par un rectangle, il faut trouver une démonstration autre que celle « par la cause » : c'est la démonstration « par l'expression ». Cette nouvelle démonstration est intrinsèque à l'algèbre : on n'y considère que les formules algébriques dites alors dans la langue naturelle, sans aucun recours à la construction des figures géométriques. Dans cette démonstration, on procède par équivalence entre formules, ou expressions. En y regardant de plus près, on voit qu'interviennent des propriétés, non-énoncées, de commutativité, d'associativité et de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

L'idée de démonstration algébrique s'est donc imposée à al-Khwārizmī lors de l'étude des algorithmes du calcul algébrique, lorsque la démonstration « par la cause » n'opérait plus. Dans son livre, comme longtemps encore chez ses successeurs, la théorie des équations s'accommodait de la démonstration géométrique. C'était alors la *demonstratio potissima*. La démonstration algébrique prendra, mais bien plus tard, le pas sur cette dernière, même dans la théorie des équations. Mais, avant que cette hiérarchie s'inverse, il a fallu une extension sans précédent du calcul algébrique abstrait. Or c'est immédiatement à la suite d'al-Khwārizmī que s'amorce ce mouvement, en raison de l'établissement de nouveaux rapports, entre la nouvelle discipline et l'arithmétique d'une part, et la géométrie d'autre part.

En théorie des équations des deux premiers degrés, on a substitué aux figures géométriques d'al-Khwārizmī les propositions du second livre des *Éléments*. Avec ces dernières la démonstration « par la cause » est explicitement devenue ce qu'en fait elle n'avait jamais cessé d'être : la démonstration géométrique. À côté d'Abū Kāmil, on peut citer Thābit ibn Qurra (826-901), son élève Na'īm ibn Mūsā et bien d'autres. Déjà le lexique forgé par al-Khwārizmī avait commencé à accueillir des termes euclidiens. Plus important encore : Abū Kāmil, Thābit ibn Qurra et les autres mathématiciens ne se sont pas contentés de faire des emprunts au second livre des *Éléments*, mais ils ont également recouru à la méthode d'application des aires, telle qu'elle se présente au sixième livre, menant ainsi la démonstration dans la langue de la théorie des proportions. C'est d'ailleurs à cette langue et aux concepts qu'elle véhicule que l'on recourra de plus en plus pour formuler les démonstrations en algèbre. Abū Kāmil et Thābit ibn Qurra furent, à ma connaissance, les premiers à démontrer en théorie des équations que l'application des aires est équivalente à une équation quadratique, et qu'un problème de division d'une droite donnée, sous une condition exprimée par l'égalité de deux aires, conduit à une équation du second degré, résoluble par l'application des aires. Mais, alors que Thābit ibn Qurra n'a eu recours qu'à l'équation quadratique, Abū Kāmil a, quant à lui, appliqué la théorie des proportions aux différents chapitres du calcul algébrique. Avec lui, un nouveau style s'impose donc : on adjoint, lorsque c'est possible, aux calculs algébriques, une démonstration forgée à partir de la théorie des proportions et de la géométrie euclidienne. Ce style, forgé par Abū Kāmil, dominera encore pendant des siècles. Cette situation ne soulève du reste guère de difficultés, puisque la structure de la géométrie classique est celle qu'on appelle « corps commutatif ordonné ».

Le primat de la *demonstratio potissima* s'est encore confirmé par la suite, lorsqu'on a commencé à traduire des problèmes solides en équations cubiques dont la solution est donnée par l'intersection de deux sections coniques : ainsi procèdent les successeurs d'Abū Kāmil, comme al-Māhānī lorsqu'il étudie le problème dit « de la droite d'Archimède »[4]. Mais c'est à al-Khayyām, nous le verrons plus loin, que revient la théorie de cette double traduction.

Ne quittons pas al-Khwārizmī et Abū Kāmil. Avec ce dernier, nous l'avons vu en détail, on assiste aux premiers développements de l'algèbre arithmétique, et par conséquent des méthodes de démonstration algébrique, sans toutefois que disparaisse la primauté de la démonstration géométrique. La preuve en est qu'Abū Kāmil et ses successeurs, tels qu'al-Karajī et al-Samaw'al, font suivre une démonstration algébrique d'une autre démonstration, géométrique celle-là, de la même proposition.

Nous avons vu que c'est Abū Kāmil qui le premier intégra les irrationnels quadratiques à l'algèbre, à la fois comme inconnues et comme coefficients. Cette intégration, qui sera confirmée et accélérée par les tentatives – celle d'al-Māhānī par exemple – de traduire le dixième livre des *Éléments* dans les termes de l'algèbre, a eu pour conséquence d'étendre le champ du calcul algébrique et de repousser les frontières de l'usage de la démonstration algébrique. Pour le dire autrement, désormais on calcule sur les extensions du corps des rationnels.

Nous avons également vu qu'Abū Kāmil fut le premier à introduire l'analyse indéterminée des deux premiers degrés au titre de chapitre à part entière de tout traité d'algèbre. Les algorithmes de cette analyse connus de lui, auxquels s'ajouteront à la fin du IX^e^ siècle ceux de Diophante, une fois réunis à ceux du calcul algébrique, furent autant de moyens pour développer et pour mener les démonstrations algébriques.

Ainsi donc, Abū Kāmil non seulement a multiplié les procédés de la démonstration géométrique en introduisant en algèbre la théorie des proportions et la géométrie euclidienne, ainsi que la démonstration apagogique[5], mais il a également diversifié les méthodes de la démonstration algébrique. Parmi ces méthodes, on a noté la méthode d'élimination, la méthode purement algébrique dite « par l'indication »[6], et l'induction complète finie. La terminologie a du reste suivi les faits ; désormais, en plus de la désignation propre de chaque discipline, on trouve le nom de la méthode algébrique

[4] R. Rashed, *Les Mathématiques infinitésimales du IX^e^ au XI^e^ siècle*, vol. III : *Ibn al-Haytham. Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique*, London, 2000.

[5] Voir par exemple p. 269 et 499.

[6] Voir plus loin p. 235-239.

– *ṭarīq al-jabr*[7] – opposé à celui de la méthode géométrique – *ṭarīq al-handasa*[8].

On observe ainsi qu'une génération après al-Khwārizmī, et en dépit du prestige, inébranlable, de la démonstration géométrique, l'extension du domaine du calcul algébrique et l'enrichissement de ses méthodes ont incité Abū Kāmil à recourir de plus en plus à des démonstrations algébriques en inventant de nouvelles méthodes.

III. À partir d'Abū Kāmil, et de son successeur al-Karajī à la fin du X^e^ siècle, le recours à des démonstrations algébriques est devenu de plus en plus fréquent. Les mathématiciens de cette tradition arithmético-algébrique ont su, d'une part, convertir des méthodes de démonstration en les transposant de l'arithmétique à l'algèbre et, d'autre part, en inventer de nouvelles. Parmi les méthodes empruntées, notons celle de l'algorithme euclidien pour étudier la divisibilité des expressions polynomiales. Citons aussi la démonstration quasi-générale rencontrée dans les livres dits arithmétiques d'Euclide : il s'agit de démontrer la formule pour les trois ou quatre premiers nombres, puis de la supposer vraie pour un nombre quelconque. Il y a également la démonstration par régression, c'est-à-dire par réductions successives. Ces deux méthodes sont appliquées dans le chapitre de l'algèbre où l'on cherche à établir les formules des séries de puissances.

Il y a, comme on l'a dit, la méthode de l'élimination. On peut d'ailleurs en trouver l'origine dans la méthode dite « de la corde », que Diophante applique dans ses *Arithmétiques*. Abū Kāmil l'a retrouvée et appliquée aux systèmes d'équations linéaires ainsi qu'aux systèmes d'équations indéterminées. Il s'agit, à l'aide de substitutions et de transformations, d'abaisser d'une unité le nombre des équations données aussi bien que le nombre des inconnues, et de réitérer le processus autant de fois que nécessaire pour finalement parvenir à une équation du premier degré, ou, au plus, du second degré. Lorsqu'il recourt à cette méthode, Abū Kāmil désigne les différentes inconnues au moyen des termes « chose », « fels », « dirham », « dinar », « khatem», autant de noms de pièces de monnaie. Les algébristes l'ont appliquée par la suite à des systèmes d'équations plus nombreuses. Ainsi al-Samaw'al l'utilise pour résoudre un système de 210 équations linéaires à 6 inconnues. Il a noté les équations par les lettres de l'alphabet dans le système *abjad* et les inconnues par les chiffres du système décimal.

On pourrait évoquer bien d'autres emprunts. Fibonacci par exemple se sert de la célèbre méthode de Théétète (Théétète démontre que la racine car-

[7] Rendu par *via restaurationis* par le traducteur latin.

[8] Rendu par *via geometrica* par le traducteur latin.

rée d'un entier non carré est irrationnelle) pour établir que l'équation d'al-Khayyām $x^3 + 20x^2 + 10x = 200$ n'a pas de solution rationnelle.

Ce sont les algébristes de cette tradition qui furent les premiers à procéder par une induction complète finie. Al-Karajī, à la suite d'Abū Kāmil, applique cette méthode et donne la formule du binôme et le tableau des coefficients binomiaux. C'est encore par cette même méthode que l'on a démontré que $(ab)^n = a^n b^n$, formule nécessaire à l'établissement de la formule du binôme. Par la suite, le raisonnement par récurrence n'a cessé d'investir d'autres chapitres de l'algèbre, comme l'analyse combinatoire, et d'autres domaines, tels que le calcul des sommes de puissances. Ainsi au début du XI^e siècle, Ibn al-Haytham (mort après 1040) démontre les expressions suivantes en vue de déterminer le volume du paraboloïde engendré par la rotation de la parabole autour d'un de ses diamètres :

$$(n+1)\sum_{k=1}^{n} k^i = \sum_{k=1}^{n} k^{i+1} + \sum_{p=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{p} k^i\right), \text{ avec } i = 1, 2, 3 \ldots$$

et

$$\frac{8}{15}n(n+1)^4 \le \sum_{k=1}^{n}\left[(n+1)^2 - k^2\right]^2 \le \frac{8}{15}(n+1)^5 \le \sum_{k=0}^{n}\left[(n+1)^2 - k^2\right]^2.$$

D'autres méthodes de démonstration algébrique ont pu être appliquées grâce à l'intégration de l'analyse diophantienne à l'algèbre et au développement de la recherche en ce domaine.

En effet, la variété des types et des systèmes d'équations résultant de cette intégration de l'analyse diophantienne a incité les algébristes à engager une réflexion plus générale sur les équations algébriques et sur les conditions de la démonstration. Mais, comment mener une telle réflexion en l'absence d'un cadre axiomatique ? Dans de telles conditions, où l'on ne peut résoudre mathématiquement ce genre de problème, on a coutume de se tourner vers une réponse logico-philosophique. C'est précisément la démarche d'al-Samaw'al dans un chapitre de son *Algèbre*. Dans cette réponse, qu'il formule dans le langage traditionnel des modalités, il procède à une classification des problèmes, c'est-à-dire des équations et des systèmes d'équations, d'abord selon les modalités, ensuite en fonction du nombre des solutions et enfin en fonction des conditions que celles-ci doivent vérifier. Les termes « nécessaire », « possible » et « impossible », notons-le d'entrée de jeu, portent sur la démonstration de l'existence, ou non, de solutions. Voici en effet ce qu'écrit al-Samaw'al :

> Toute proposition et tout problème que l'arithméticien ou le géomètre examine, lorsqu'il l'envisage, il ne manque pas de trouver une démonstration de son existence : il l'appelle alors « nécessaire » ; ou de son inaccessibilité : il l'appelle alors inaccessible et impossible ; ou il ne trouve de démonstration ni de son existence, ni de sa non-existence, ni de son inaccessibilité : il l'ignore donc, et l'appelle « possible », car il n'a démontré ni son existence ni sa non-existence, et cela mène à ce que l'existant est non-existant et le nécessaire est inaccessible, ce qui est impossible[9].

Al-Samaw'al divise ensuite les problèmes nécessaires en quatre classes :

1) « Ceux dont le recherché existe dans tous les nombres ». Il s'agit des identités. Il donne l'exemple :

$$\frac{x+y}{x} + \frac{x+y}{y} = \frac{(x+y)^2}{xy}.$$

2) « Ceux dont le recherché se trouve dans certains nombres et a une infinité de réponses ». Il s'agit des équations indéterminées qui ont un nombre infini de solutions, sans pourtant être des identités. Al-Samaw'al donne par exemple :

$x^2 + y^2 = a^2$, qui n'est autre que II.8 des *Arithmétiques* de Diophante

et

$\begin{cases} x + a = y_1^2 \\ x - a = y_2^2 \end{cases}$, qui est II.10 des mêmes *Arithmétiques*.

Al-Samaw'al commence par donner une démonstration algébrique de ce dernier problème : on a $y_1^2 - y_2^2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 2a$, et on tire

$$y_1 = \frac{1}{2}(a+2) \text{ et } y_2 = \frac{1}{2}(a-2)$$

par la méthode de la double équation qui est celle de Diophante.

3) « Ceux qui ont de nombreuses réponses, mais (en nombre) fini ; et on ne peut donc pas les augmenter ». Comme exemple, al-Samaw'al donne un système d'équations linéaires diophantiennes.

[9] *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al*, édition, notes et introduction par Salah Ahmad et Roshdi Rashed, Damas, 1972, arabe p. 249.

4) « Ceux qui ont une solution unique ». Il donne pour exemple un système de n équations à n inconnues ; soit $ax = y^2$ et $bx = y$.

Al-Samaw'al classe ensuite les problèmes nécessaires selon le nombre des conditions qu'ils doivent vérifier.

1) Aucune condition. Exemple : $xy = a$, $yz = b$, $xz = c$.

2) Une seule condition. Exemple : $x^2 + y^2 = a$ et $xy = b$; condition $a \geq 2b$. Autre exemple : $x + y = a$, $y + z = b$, $z + x = c$; condition $\frac{a+b+c}{2} > a,b,c$.

3) Plusieurs conditions. Exemple : un système de 210 équations à 6 inconnues. Al-Samaw'al calcule 504 conditions.

Viennent ensuite les problèmes impossibles, c'est-à-dire ceux dont on peut démontrer l'impossibilité par réduction à l'absurde. Al-Samaw'al distingue alors deux classes de problèmes impossibles : ceux qui sont intrinsèquement impossibles, c'est-à-dire selon leur définition même, comme le système $\frac{x}{y} = \frac{y_1^2}{y_2^2}$ et $xy \neq z^2$; ceux qui sont impossibles selon les hypothèses, c'est-à-dire qu'il suffit de changer l'une ou l'autre des hypothèses pour qu'ils deviennent nécessaires, comme par exemple le système $x^2 + y^2 = xy$ et $xy = 72$.

Quant aux problèmes possibles, ce sont ceux dont on ne peut démontrer ni la nécessité, ni l'impossibilité. La possibilité, rappelle al-Samaw'al, ne porte pas sur l'indétermination de la solution, mais sur son existence et sur la démonstration qui l'établit. Il ne donne aucun exemple.

Cette classification, menée dans le langage des modalités, semble viser davantage que ce qu'en dit al-Samaw'al. On observe en effet que tous les exemples mentionnés sont des équations ou des systèmes d'équations algébriques. Aucun exemple géométrique ou arithmétique. On remarque aussi qu'al-Samaw'al reconnaît explicitement les équations diophantiennes et leurs subdivisions en fonction du nombre des solutions (fini, infini, identité). On observe enfin que cette classification est doublée d'une autre, selon les hypothèses à vérifier et leur nombre. Tout se passe comme si le mathématicien voulait formuler une théorie des équations algébriques à l'aide de la logique des modalités, faute des moyens mathématiques d'y parvenir. Or il est clair que cette théorie des équations algébriques avait, entre autres objectifs, celui de fixer ce que la démonstration algébrique doit établir, et ce dont

elle doit s'assurer. Restent les problèmes possibles. Al-Samaw'al n'en donne aucun exemple. Pensait-il, comme il m'est arrivé de le suggérer, à une sorte d'« indécidabilité sémantique » ? ou avait-il à l'esprit les cas $n = 3, 4$ de l'équation $x^n + y^n = z^n$, discutée un siècle, au moins, avant lui par al-Khujandī et al-Khāzin, et également évoquée par les philosophes comme Avicenne ?

IV. Nous n'avons considéré jusqu'ici que la tradition de l'algèbre arithmétique. Mais il y a également celle de l'algèbre géométrique, ou encore celle d'une géométrie algébrique élémentaire. Rappelons qu'al-Khwārizmī et ses successeurs s'en sont tenus, dans le domaine des équations algébriques, aux seules équations quadratiques. Les seules tentatives de résoudre une équation cubique dont nous ayons connaissance, dans cette tradition, consistaient à poser des conditions pour ramener le problème – par un changement de variable – à l'extraction d'une racine cubique. C'est ainsi qu'ont procédé al-Sulamī, Ibn al-Bannā' et Maître Dardi. L'autre tradition s'est constituée autour de la solution géométrique de l'équation cubique et biquadratique, ou plus précisément en vue d'élaborer une théorie géométrique des équations de degré inférieur ou égal à 4. Mais il a fallu un siècle et demi de recherche mathématique avant qu'al-Khayyām formule cette théorie. Ce dernier inaugure une tradition qui verra naître d'autres méthodes de démonstration, dont certaines sont géométrico-algébriques, et les autres algébriques.

Après avoir défini les termes primitifs de sa théorie et les avoir construits pour déterminer *a priori* tous les types d'équations des trois premiers degrés, al-Khayyām traduit géométriquement les équations cubiques ; il détermine ensuite les racines positives au moyen de l'intersection de courbes coniques. Ainsi, pour

$x^3 + ax^2 + bx = c$, avec a, b, c réels strictement positifs

il détermine une racine strictement positive par l'intersection d'un demi-cercle et d'une branche d'hyperbole équilatère. Il démontre que l'abscisse du point d'intersection donne cette racine. Al-Khayyām procède à l'aide des propositions des *Coniques* d'Apollonius. Il s'agit d'une démonstration géométrico-algébrique rédigée dans la langue de la théorie des proportions.

Le successeur d'al-Khayyām, Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī, ne tarde pas à infléchir cette démonstration géométrico-algébrique dans un sens analytique pour satisfaire à une nouvelle exigence démonstrative : démontrer l'existence de ces racines positives. Al-Ṭūsī se trouve alors dans l'obligation d'étudier les *maxima* des expressions polynomiales. Reprenons les

principales étapes de sa démonstration pour l'équation $x^3 + c = bx$, avec b, c réels positifs.

Posons $f(x) = (b - x^2)x$. Al-Ṭūsī commence par montrer

$$f(x_0) = \sup_{0<x<\sqrt{b}} f(x) \qquad \text{avec } x_0 = \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour cela il montre successivement

$$x_1 > x_0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0),$$
$$x_2 < x_0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_0) ;$$

il calcule ensuite le maximum

$$f(x_0) = \frac{2}{3} b \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}} = 2x_0^3$$

et distingue :

si $c > 2\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, l'équation n'a pas de solution ;

si $c = 2\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, $x_0 = \left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ est une solution double ;

si $c < 2\left(\frac{b}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, l'équation a deux solutions x_1 et x_2 telles que $x_1 < x_0 < x_2$.

La démonstration d'al-Ṭūsī emprunte le langage de l'algèbre géométrique : l'inconnue est représentée par un segment de droite, son carré par une surface carrée, son cube par un cube, les produits par des rectangles et par des solides, les différences par des gnomons plans et solides – le tout formulé dans une langue qui mêle celle de la théorie des proportions à des termes analytiques. C'est ce type de démonstration qu'on rencontre dans les livres d'algèbre jusqu'au XVII^e siècle. Al-Ṭūsī introduit en effet, et sans aucune explication supplémentaire, une notion de maximum et le procédé algébrique de dérivation. Il y recourra encore pour démontrer, mais algébriquement cette fois, un algorithme pour la solution numérique des équations.

Cet algorithme est équivalent, pour les équations des second et troisième degrés, à celui dit de Ruffini-Horner. Pour établir sa validité, il a fallu qu'al-Ṭūsī s'assure de chaque étape, en déterminant successivement les différents chiffres de la plus grande racine positive de l'équation $f(x) = N$; f est un

polynôme. Pour déterminer le premier chiffre de cette racine, al-Ṭūsī élabore une théorie des « polynômes dominants » : il s'agit de comparer entre les poids respectifs du polynôme formé par les premiers termes de $f(x)$ et ceux de N. Cette théorie permet en effet de tenir compte des poids des coefficients, mais non de ceux des puissances de l'inconnue. Ce sera beaucoup plus tard qu'elle sera en mesure de prendre en compte aussi bien les premiers que les seconds, sous le titre des polygones de Newton – comme l'a montré Christian Houzel[10]. Quoi qu'il en soit, la démonstration donnée par al-Ṭūsī est purement algébrique.

Lorsqu'il s'agit des autres chiffres de la racine, à partir du second, la démonstration d'al-Ṭūsī est plus heureuse. On reconnaît chez lui la méthode de Newton pour la résolution approchée des équations. Une fois déterminés le premier chiffre, soit σ_0, et son ordre décimal r, on récrit la racine sous la forme $x = s_0 + y$, avec $s_0 = \sigma_0 10^r$. Pour déterminer le second chiffre, on développe $f(s_0 + y)$ en y, si l'équation initiale s'écrit $f(x) = 0$. Al-Ṭūsī fait alors apparaître comme coefficient de y la valeur $f'(s_0)$ de la dérivée de f en s_0. Il obtient le second chiffre en prenant la partie entière de $-\frac{f(s_0)}{f'(s_0)}$; soit σ_1. Il réitère la même méthode pour déterminer le troisième chiffre et continue jusqu'à ce qu'il obtienne la racine.

La démarche par laquelle al-Ṭūsī démontre l'algorithme de résolution numérique des équations, aussi bien pour le premier chiffre que pour les chiffres suivants de la plus grande racine positive, est purement algébrique ; ou, si l'on veut, algébrico-analytique.

V. L'évolution des pratiques de la démonstration aussi bien que de la notion même de démonstration pendant les trois premiers siècles de l'histoire de l'algèbre nous a permis de dégager les conclusions suivantes :

1. Le premier objectif des algébristes était d'élaborer une théorie des équations algébriques, pour les équations des deux premiers degrés d'abord, et donc de démontrer l'algorithme de solution par radicaux. Ils ont ensuite travaillé à la conception d'une théorie géométrique des équations des trois premiers degrés, puis des quatre premiers degrés. Dans ces théories successives, ils procédaient selon une démonstration géométrico-algébrique, laquelle n'a cessé de prendre de la consistance, d'abord grâce au second, puis au sixième livre des *Éléments*, et ensuite aux *Coniques* d'Apollonius. C'est Descartes qui franchit l'étape suivante, lorsqu'il élabore la notion

[10] « Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī et le polygone de Newton », *Arabic Sciences and Philosophy*, 5, 2, 1995, p. 239-262 ; repris dans *La géométrie algébrique : recherches historiques*, Paris, 2002, p. 11-28.

d'une équation de degré quelconque aussi bien que celle de la courbe algébrique qu'elle définit. Mais entre-temps l'école italienne du XVI[e] siècle avait résolu l'équation cubique et l'équation biquadratique par radicaux. La démonstration est encore du genre géométrico-algébrique déjà rencontré chez Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī.

2. Dès le commencement de l'algèbre avec al-Khwārizmī on a vu naître l'idée d'une démonstration purement algébrique. On a également observé que celle-ci a vu le jour dans le domaine du calcul algébrique. Bien plus, c'est le développement de ce calcul, avec Abū Kāmil, qui n'a cessé de lui offrir les nouvelles formes dont elle s'est enrichie : méthode d'élimination, méthodes empruntées à l'arithmétique euclidienne, méthodes empruntées à l'arithmétique de Diophante, méthodes combinatoires, induction complète finie. On conçoit d'autres méthodes, comme celle des coefficients indéterminés, qui sera développée plus tard par Faulhaber, Descartes et Hudde. D'autres calculs exigés par des acquis plus tardifs vont encore intégrer la notion de démonstration algébrique : relations entre les racines et les coefficients des équations algébriques à partir de Viète ; le nombre des racines d'une équation d'un degré quelconque et l'apparition empirique des nombres imaginaires (Rafael Bombelli, Peter Rothe, Albert Girard ...).

3. La démonstration algébrique n'a pas tardé à se répandre dans d'autres domaines voisins, sous deux formes. Elle se présente ainsi en personne dans certains travaux de la théorie des nombres. Abū Kāmil dans l'analyse diophantienne entière du premier degré, al-Khāzin ensuite dans le chapitre de l'analyse diophantienne entière du second degré, y ont recours, alors que plus tard al-Fārisī l'applique à l'étude des fonctions arithmétiques élémentaires (somme des diviseurs d'un entier et nombre des diviseurs). Elle intervient sous une seconde forme lorsque l'on traduit un problème dans les termes d'une équation algébrique. C'est précisément cette forme que le même algébriste, al-Fārisī, a appliquée pour démontrer le théorème d'Ibn Qurra sur les nombres amiables ; et, avant lui, al-Samaw'al, pour établir des relations trigonométriques.

Plus généralement, il n'est pas rare que l'on procède par une démonstration algébrique pour établir les différents algorithmes : l'extraction de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un entier, les algorithmes d'interpolation quadratique, etc.

4. Au XII[e] siècle déjà, on a conçu un troisième type de démonstration en algèbre : la démonstration algébrico-analytique. Elle opère aussi bien en théorie des équations que dans le calcul algébrique, et non pas dans un des domaines à l'exclusion de l'autre. Nous avons rappelé que Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī l'applique pour prouver l'existence des racines positives et pour déterminer les chiffres de la plus grande racine positive, lors de la résolution numérique des équations. Cette méthode renaîtra au XVII[e] siècle chez Fermat, et trouvera puissance et ampleur avec la constitution de l'analyse infinitésimale.

Tels sont les axes de l'histoire de la notion de démonstration en algèbre durant les trois premiers siècles de son existence.

VI. *La démonstration algébrique dite « par l'indication »*

« La voie de l'indication » est une locution qui désigne une méthode de démonstration des propositions algébriques[11]. Abū Kāmil est le premier auteur connu, que ce soit en algèbre, en mathématiques ou, plus généralement, en science et en philosophie, à caractériser ainsi un certain type d'inférences. Qu'entend-il exactement par là ? Pour répondre, trois éléments doivent être soulignés.

(i) Cette méthode, tout d'abord, s'associe à d'autres, proposées par Abū Kāmil, telles que l'induction complète finie (sous une forme encore un peu primitive) et la méthode de l'élimination. Ces méthodes algébriques de démonstration se conjoignent à la *demonstratio potissima*, laquelle est cependant géométrique et déjà introduite à ce titre par al-Khwārizmī.

(ii) On remarque ensuite qu'Abū Kāmil insiste sur le caractère rigoureux d'une telle procédure. La « voie de l'indication » suffit à établir scientifiquement une certaine proposition, puisqu'elle en donne la *cause véridique* (*'illa ... ṣaḥīḥatun*).

(iii) Enfin, il est clair, même si Abū Kāmil ne le précise pas en toutes lettres, que la « voie de l'indication » s'oppose à la « voie de la géométrie » comme l'analyse à la synthèse. Rappelons en effet que cette désignation apparaît dans l'œuvre d'Abū Kāmil lors de la démonstration de :

(A) Si $x + y = a$ et $\frac{a}{x} + \frac{a}{y} = b$, alors $\frac{a}{x} \cdot \frac{a}{y} = b$.

Abū Kāmil avait établi juste auparavant que :

(B) Si $x + y = a$ et $\frac{a}{x} + \frac{a}{y} = b$, alors $\frac{a}{x} + \frac{a}{y} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 2$.

La « voie de l'indication » consiste donc bien à ramener (A) à (B) *par analyse* :

$$\frac{a}{x} \cdot \frac{a}{y} = \left(\frac{x+y}{x}\right)\left(\frac{x+y}{y}\right) = \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 2 = \frac{a}{x} + \frac{a}{y} = b.$$

[11] Voir plus loin p. 502, 506.

En revanche, la « voie de la géométrie » procède ainsi (par la théorie des proportions) :

Posons $\frac{a}{x} = z$ et $\frac{a}{y} = v$; on a $xz = yv = a = 1 \cdot a$; d'où

$$\frac{1}{v} = \frac{y}{a} = \frac{y}{x+y} = \frac{z}{v+z} ;$$

d'où $vz = v + z$.

Il s'agit là, à l'évidence, d'une démonstration *synthétique*.

En première conclusion, donc, on affirmera que la « voie de l'indication » est une preuve analytique rigoureuse, par les procédés de l'algèbre, d'une proposition algébrique donnée.

Reste à s'interroger sur le choix lexical qui a présidé à une telle dénomination. Un détour par l'histoire de la philosophie s'avère ici nécessaire. Depuis Aristote, la tradition philosophique oppose preuve par les effets et preuve par les causes. Pour le Stagirite, seul le second type de preuve peut être vraiment considéré comme une *démonstration* (*apodeixis*), car la démonstration véritable doit, précisément, montrer comment la cause contient l'effet (voir les développements fameux d'*Analytiques Seconds* I 2). Les autres preuves sont des signes, dont certains (mais pas tous) concluent nécessairement. C'est le cas avec le signe irréfutable de la première figure, qu'Aristote appelle le *tekmêrion*. Voici l'exemple qu'il en donne :

> [...] la preuve qu'une femme a enfanté parce qu'elle a du lait résulte de la première figure, car *avoir du lait* est le moyen terme : on peut représenter *enfanter* par *A*, *avoir du lait* par *B*, et femme par *Γ*[12].

Il s'agit donc d'un syllogisme de la première figure où le moyen terme est un effet, ou un signe, de l'enfantement, qui n'explique cependant pas *pourquoi* telle femme a enfanté. Ce mode d'inférence, de l'effet à la cause, a été commenté par Simplicius et par Jean Philopon dans le contexte d'une réflexion sur la connaissance, nécessairement régressive, des premiers principes en physique[13]. Les élèves d'Ammonius baptisent cette connaissance du nom de « tekmériodique » (*tekmêriôdês*) et, sans lui accorder le rang d'une connaissance proprement apodictique, voient néanmoins en elle une garantie

[12] Aristote, *Les Premiers Analytiques*, trad. J. Tricot, Paris, 1962, II 27, p. 323.

[13] D. Morrison, « Philoponus and Simplicius on Tekmeriodic Proof », dans E. Kessler (éd.), *Method and Order in Renaissance Philosophy of Nature. The Aristotle Commentary Tradition*, Ashgate, 1998, p. 1-22, à la p. 8 ; cf. également Marwan Rashed, *Alexandre d'Aphrodise, Commentaire perdu de la* Physique *d'Aristote (Livres IV-VIII)*, Berlin, 2011, p. 592-595.

suffisante de l'apodicticité ultérieure de la science physique, qui procèdera, de manière canonique, des causes aux effets. Philopon écrit ainsi :

> It often happens that one produces conviction (*pisteis*) of prior things out of posteriors, because, as I said, the prior things are not better known to us. And this form of proof is called tekmeriodic and irrefutable[14].

Avec cette preuve, écrit D. Morrison, « It is the first time in the Aristotelian tradition that analysis is put forward as a general method of arriving at first principles in physics[15] ».

Les philosophes et les juristes arabes se sont à leur tour intéressés à ce mode d'inférence et l'on peut dire qu'ils ont achevé un processus déjà presque millénaire à la fin de l'Antiquité. C'est dans la sphère islamique, en effet, que l'on voit pour la première fois associées les notions de démonstration (*burhān* = *apodeixis*) et de signe conclusif (*dalīl* = *tekmêrion*). Ce geste a sans doute été rendu possible par une nouvelle interprétation de la distinction *hotildioti* des Aristotéliciens (en arabe : *inna vs lima*), dans le sens non plus d'une opposition entre deux types de *questions* épistémiques, mais bien entre deux types de *démonstrations*. Dès lors, en effet, que l'on interprétait ainsi cette distinction, il devenait tout naturel de rattacher, à la démonstration du *inna*, c'est-à-dire du simple *fait*, la notion de *démonstration* (*burhān*) et celle de *signe* (*dalīl*) et, à celle du *lima*, c'est-à-dire de la cause (au sens aristotélicien), la notion de démonstration tout court. C'est ce qu'on peut lire dans le chapitre du *Shifā'* d'Avicenne consacré à la démonstration. Le titre de ce chapitre, « Sur la démonstration (*burhān*) *simpliciter* et sur ses deux parties dont l'une est la démonstration *lima*, (*ce pourquoi*), l'autre la démonstration *inna* (*que*), aussi appelée *dalīl* (*signe*) »[16]. La démonstration par le signe est telle, écrit Avicenne, « que le terme moyen soit effet de l'existence du majeur dans le mineur[17] ». Le philosophe fournit plusieurs exemples, dont celui de la lune :

> [...] nous disons que la lune prend telle ou telle figure lorsqu'elle devient lumineuse, c'est-à-dire qu'elle est d'abord un croissant, puis un demi-disque, puis une lune entière, puis qu'elle régresse selon ce même rapport. Or ce qui reçoit ainsi la lumière est sphérique. La lune est donc sphérique.

[14] D. Morrison, « Philoponus and Simplicius on Tekmeriodic Proof », p. 8.

[15] *Ibid.*, p. 17.

[16] *Al-Shifā'*, *al-Manṭiq*, 5 : *al-Burhān*, éd. A. 'Afīfī, introduit et révisé par I. Madkūr, Le Caire, 1956, p. 78 *sq.*

[17] *Ibid.*, p. 79.

Dans cet exemple, comme dans d'autres, analogues, « on démontre la cause à partir de l'effet, et cela est nommé *dalīl*, signe »[18]. Avicenne revient encore à cette forme de preuve dans son livre *al-Najāt*[19].

Le problème est cependant légèrement compliqué du fait qu'Avicenne s'inspire ici d'*Analytiques Seconds* I 13 – auquel il emprunte entre autres l'exemple de la lune – et qu'en un endroit de ce chapitre (78 a 29-30), Aristote semble oublier sa définition puriste de la démonstration proposée en *Analytiques Seconds* I 2 (cf. en particulier 71 b 17-25) pour employer le terme *apodeixis* pour parler de la science du *hoti*[20]. Il ne faudrait cependant pas croire que l'on puisse réduire les réflexions d'Avicenne à ce léger glissement terminologique d'Aristote. Car à la différence du Stagirite, et en héritier lucide des Alexandrins, Avicenne greffe sur la distinction *hoti/dioti* l'opposition du signe et de la cause absente de I 13.

Quant aux juristes, ils développent cette forme d'inférence et l'appliquent très fréquemment au cours de leurs recherches sur les types d'inférences. Ainsi al-Ghazālī, dans son *Mi'yār al-'ilm*, au cours d'un chapitre intitulé « Sur la différence entre l'inférence par la cause et l'inférence par le signe », écrit :

> Sache que, si le terme moyen est une cause du terme majeur, les juristes l'appellent inférence par la cause, et les logiciens l'appellent la preuve du *limā* (ce pourquoi), c'est-à-dire la mention de ce dont la réponse est 'parce que'. Et si elle n'est pas (une) inférence par la cause, les juristes l'appellent « inférence par le signe » et les logiciens la preuve du *que* (*inna*), étant donné qu'elle signifie que le terme majeur existe dans le mineur, sans montrer sa cause[21].

Al-Ghazālī rappelle alors que la démonstration par le signe est l'inverse de la démonstration par la cause. On observe que, parmi les exemples qu'il donne, figure celui d'Aristote sur la preuve qu'une femme a enfanté.

Aussi constate-t-on, d'Aristote aux logiciens arabes, une perte de plus en plus marquée du contenu ontologique du problème initial. Au terme du processus, la preuve de l'ontologiquement antérieur par l'ontologiquement postérieur finit par se présenter comme une démonstration de la cause par l'effet et comme logiquement inverse de la preuve de l'effet par la cause – d'où son caractère analytique.

[18] *Ibid.*, p. 80.

[19] Ibn Sīnā, *al-Najāt*, Le Caire, 1938, p. 67.

[20] On a bien le terme *burhān* dans la tradition arabe. Cf. *al-Naṣṣ al-Kāmil li-Manṭiq Arisṭū*, éd. F. Jabr, Beyrouth, 1999, vol. I, p. 474.

[21] Al-Ghazālī, *Mi'yār al-'ilm*, commenté par A. Shams al-Dīn, Beyrouth, 1989, p. 232.

Une différence essentielle, pourtant, sépare cette « analyse » de celle d'Abū Kāmil. Cette différence tient à une divergence notable de vues quant à la notion de cause (*'illa*). Pour les Aristotéliciens comme pour les théologiens rationnels de l'Islam, il y a une différence ontologique forte entre la cause et l'effet. Il n'y aurait aucun sens, autrement dit, à prétendre que le signe soit la « cause » de ce dont il est le signe. C'est précisément la raison pour laquelle al-Ghazālī oppose preuve par le signe et preuve par la cause. Ce cadre théorique, en revanche, ne peut satisfaire Abū Kāmil. Dans l'exemple cité, on pourrait aussi bien ramener (A) à (B) que (B) à (A). C'est la raison pour laquelle Abū Kāmil peut décrire une simple mise en évidence (*ishāra*) comme fournissant une cause (*'illa*) appropriée – ce que jamais les philosophes ne se risqueraient à faire avec le *dalīl*.

Cela précisé, on peut interpréter de deux manières le choix lexicologique d'Abū Kāmil. Soit l'opposition *dalīl*/*'illa* était déjà formalisée en son temps, et il s'est consciemment éloigné de cette terminologie parce qu'elle lui semblait trop « fixiste » d'un point de vue ontologique. Le mouvement serait semblable à celui de Thābit ibn Qurra qui, dans ses *Réponses aux questions posées par Ibn Usayyid*[22], dénie, contre la tradition philosophique unanime, l'unicité de la définition – pourvu qu'il y ait équivalence (au sens mathématique de la double implication) entre les différentes définitions. Le terme *ishāra* aurait pu, dans ce cas, être choisi par Abū Kāmil justement pour éviter de recourir au terme *dalīl* déjà très connoté – ce qui serait souligné par l'explicitation, chez Abū Kāmil, de la notion d'« indication » *à l'aide de* la notion de cause, *'illa* (et non *en opposition à* elle). Soit Abū Kāmil ne connaissait pas encore l'opposition qui allait devenir traditionnelle quelques décennies plus tard. Dans ce cas, le choix des termes est innocent et visait seulement à exprimer l'opposition entre analyse algébrique et synthèse géométrique.

En bref donc, si al-Khwārizmī fut le premier à distinguer démonstration géométrique et démonstration algébrique dans son *Algèbre*, son successeur, Abū Kāmil, n'a pas seulement renforcé l'exigence démonstrative par un retour aux *Éléments* d'Euclide ; il a aussi multiplé les modes de démonstration géométrique et connu plusieurs méthodes de démonstration algébrique. Ces méthodes seront reprises et discutées par ses successeurs tels qu'al-Karajī et al-Samaw'al.

[22] Voir Marwan Rashed, « Thābit ibn Qurra sur l'existence et l'infini : Les *Réponses aux questions posées par Ibn Usayyid* », dans R. Rashed (éd.), *Thābit ibn Qurra. Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad*, Scientia Graeco-Arabica, vol. 4, Berlin/New York, 2009, p. 619-673.

SECONDE PARTIE

TEXTE ET TRADUCTION

Livre d'algèbre et d'al-Muqābala

Kitāb al-Jabr wa-al-muqābala

Au Nom de Dieu Clément et Miséricordieux
Il n'y a d'assistance que de Dieu

Livre d'algèbre et d'*al-muqābala* d'Abū Kāmil

Ceci est un livre composé par Shujā' ibn Aslam, connu sous le nom d'Abū Kāmil. Il l'a commencé en louant Dieu, en L'invoquant et en célébrant Sa gloire.

Il a dit : Louange à Dieu, le plus Juste parmi ceux qui jugent, le plus Sage parmi ceux qui savent, le plus Clément parmi les miséricordieux, le plus digne d'être craint et d'être loué ; c'est vers Lui que s'élèvent toutes les espérances, c'est Lui que tous adorent. Je Le loue, certain de Son unicité, témoin de Sa divinité, sachant qu'Il est le commencement sans égal, le merveilleux à nul autre pareil, dont l'immensité ne peut être embrassée et dont la représentation est hors de portée. Sa Majesté ne connaît pas de bornes, Sa toute-puissance est inaccessible et Ses bienfaits sont innombrables. Que Ses Noms soient sanctifiés et que Sa Magnificence brille de tout son éclat. Son invocation est au-dessus de tout. Il a créé les choses de rien, parfaitement créées ; Il les a déterminées dans le secret de Sa science, bien déterminées ; Il a transformé leur état par la subtilité de Sa sagesse, et ainsi ce qu'elles recèlent, leur apparence, leur intimité, tout ce qu'elles ont de subtil et de sublime, rien n'échappe à Sa science. « Il sait ce qui est sur la terre et dans les mers. Pas de feuille qui tombe sans qu'Il ne le sache, ni de grains dans les ténèbres du sol, ni rien d'humide ni de sec qui ne soit dans le Livre explicite » (Sourate VI.59). Il a envoyé Muḥammad, que Sa bénédiction soit sur lui et les siens, avec Sa mission ; Il lui a confié Sa révélation. Il s'est soumis à Son ordre, et il a délivré le message dont il était chargé, sans rien ajouter ni ôter. Il a guidé Ses sujets avec patience et abnégation.

J'ai trouvé que les savants les plus avancés et les premiers maîtres des lettres et de la sagesse n'ont laissé aucune science sublime et fine sans l'avoir méditée et examinée en profondeur. Ils en ont parfait la connaissance et découvert les modes, les notions, les termes, grâce à l'application de la pensée et à la maîtrise de l'art. [2r] Ils l'ont consignée pour ceux qui les suivront, sans la retenir eux-mêmes exclusivement ni accaparer sa connaissance pour eux-mêmes en les en privant, et sans la leur cacher, se chargeant alors du pêché et se rendant coupables.

J'ai bien examiné les livres des savants en arithmétique, j'ai cherché ce qu'ils ont dit et inspecté ce qu'ils y ont inscrit. J'ai alors vu que le livre de

بِسْمِ اللهِ الرَّحمنِ الرَّحيم وما توفيقي إلاّ به

<كتاب الجبر والمقابلة لأبي كامل>

هذا كتابٌ ألّفه شجاع بن أسلم المعروف بأبي كامل وافتتحه بحمدِ الله وذكرِه والثناءِ عليه فقال: الحمدُ لله أعدلِ من حكمَ وأحكمِ من عَلِمَ وأرأفِ من رحم وأحقِّ مَن خُشِيَ وحُمِدَ وأفضلِ من رُجِي وعُبِد. أحمده موقِناً بوحدانيّته، شاهداً بربوبيّته، عالماً بأنّه البَدء الّذي لا عِدْلَ له، البديعُ الّذي لا شيءَ مثله ولا يُقْدَر قدرُه ولا يُبلغُ وصفُه. لا تُحَدّ عظمتُه ولا يُرام عِزُّه ولا تُحصى آلاؤه، تقدّست أسماؤه وجلّت كبرياؤه وتعالى ذكرُه، خلقَ الأشياءَ لا من شيءٍ فأتْقَنَ خلقَها وقدَّرها بمكنونِ علمِهِ فأحسنَ تقديرَها، وصرَّفها بلطيفِ حكمتِهِ فلم يَفُتْه عِلْمُ خفيِّها وظاهرها وباطنها ولطيفها وجليلها، ﴿ويَعْلَمُ ما فِي الْبَرِّ والْبَحْرِ وما تَسقُطُ مِنْ وَرَقَةٍ إلاّ يَعْلَمُهَا وَلاَ حَبَّةٍ في ظُلُماتِ الأرْضِ ولاَ رَطْبٍ وَلاَ يَابِسٍ إلاّ فِي كِتابٍ مُبينٍ﴾ (سورة الأنعام، ٥٩). بَعَثَ محمّداً صلّى اللهُ عليهِ وآلِهِ برسالَتِه، وائتمنه علَى وَحْيِه، فصدع بأمره وبلّغ ما أُرسل به لا متعدّياً ولا مقصّراً، ونصحَ في عبادِه صابراً محتسباً.

وقد وجدتُ مَن تقدّمَ من أهلِ المعرفة، وسبقَ من أوّلي الأدبِ والحكمةِ، لم يدَعوا شيئاً من أصنافِ العلومِ جليلِها ودقيقِها إلاّ تأمّلوه وأنعموا النظرَ فيه. وقد أتقنوا علمَه، ووقعوا على وجوهِهِ ومعانيهِ وحدودِه، بعد اجتهادِ الرأيِ وإحكامِ الصنعةِ / ودوّنوه لِمَن بعدهم لِئلاّ يستأثروا به عليهم ولا يخصُّوا أنفسَهم ٢-و بمعرفتِه دونهم ولا يكتموهم إيّاه فيحتملوا وزرَه ويكتسبوا إثمه.

وكنتُ كثيرَ النظرِ في كُتبِ العلماءِ بالحساب، والبحث عن أقاويلهم والتفتيش لِمَا رَسَموا في كُتبِهم، فرأيتُ كتابَ محمّد بن موسى الخوارزميّ

4 وأرأف: وارف — 6 البدء: البدى، في الهامش مع "صح" بعدها، وبخط الناسخ، مما يدل أنها تعليق بعد المراجعة على الأصل. وسنكتب فقط "في الهامش"؛ أما إذا كان ما في الهامش بخط لآخر، فسنذكر هذا / لا عدل ... الذي: في الهامش — 13 وائتمنه: غير معجمة / به: كتب بعدها "غير"، ثم ضرب عليها بالقلم — 19 يكتموهم: يكتموهم.

Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, connu comme *Algèbre et al-muqābala*, est le plus valide quant aux fondements et le plus vrai quant à l'inférence. Il est du devoir de ceux qui s'adonnent à l'arithmétique d'admettre sa priorité, de lui reconnaître science et éminence – étant donné que c'est lui qui le premier <composa> un livre en algèbre et *al-muqābala*, c'est lui qui l'a commencée et c'est lui qui a inventé ce qu'elle contient de fondements, par lesquels Dieu nous a révélé ce qui était voilé, approché ce qui était éloigné, facilité ce qui était difficile et illuminé ce qui était abscons – d'implorer Dieu, à Qui sont la puissance et la Majesté, en priant pour al-Khwārizmī et en lui demandant d'être miséricordieux et d'œuvrer pour que se manifeste ce qui était resté caché à sa connaissance et que se dissipent ceux de ses mystères qui étaient couverts d'un voile – j'y ai trouvé des problèmes dont il a laissé l'explication et l'élucidation.

Dieu, Puissant et Majestueux, parmi les grâces qu'Il m'a accordées, et les bienfaits, les faveurs et les bontés dont Il m'a gratifié, m'a doté de la connaissance de l'arithmétique, m'a dévoilé ses secrets et m'a éclairé ses obscurités, ce qui m'a permis de parvenir aux fondements clos et aux inférences non frayées. J'en ai dérivé bien des problèmes, dont la plupart mènent à d'autres modes que les six mentionnés par al-Khwārizmī dans son livre ; ce qui m'a incité à découvrir cela, à le montrer et à manifester l'engagement auquel Dieu Puissant et Majestueux m'a lié dans Son Livre que nulle erreur n'atteint de nulle part, révélé à Son Prophète Muḥammad, [2v] que Sa bénédiction soit sur lui, là où il dit : « Dieu a pris l'engagement de la part de ceux qui ont eu le Livre de le montrer aux gens et de ne pas le tenir secret » (Sourate III.187).

J'ai alors composé un livre en algèbre et *al-muqābala*, dans lequel j'ai consigné une partie de ce que Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī a mentionné dans son livre, pour qu'il se suffise à lui-même ; j'ai présenté son explication, j'ai éclairé ce qu'al-Khwārizmī a laissé non élucidé et non expliqué et je l'ai montré. J'ai poursuivi par l'explication de ce dont Dieu m'a donné la connaissance et la découverte des fondements clos, les inférences qui en dépendent et les chapitres qui s'y rattachent, pour que cela vienne, dans le calcul de l'algèbre et d'*al-muqābala*, s'ajouter à ce que les savants en possèdent et pour qu'ils sachent quel est leur dû à mon égard, à moi qui leur ai dévoilé, montré et interprété ce qu'ils ne pouvaient espérer atteindre ni parvenir à connaître. Ils me remercieront alors pour cela et imploreront Dieu pour qu'Il m'accorde Son pardon, Sa miséricorde et le Salut, dans la religion et dans le monde. Il peut toutes choses. J'ai expliqué ce calcul grâce à Son secours, sollicitant Sa récompense et ce qui fait la belle renommée et la bonne réputation, dans la vie et après la mort.

المعروف بالجبْرِ والمقابلةِ أصحَّها أصلاً وأصدقَها قياساً. وكان ممَّا يَجبُ لَهُ علينا
مَعْشرَ الحُسَّاب من التقدمة والإقْرار له بالمعرفةِ والفضل – إذْ كانَ السابقَ إلى
كتاب الجبرِ والمقابلةِ، والمبتدئَ له والمخترعِ لِمَا فيه من الأصولِ التي فَتَحَ اللهُ لنا
بها ما كان مُنْغَلِقاً وقرَّب بها ما كان مُتباعداً، وسهَّل بها ما كان معسّراً، ونوَّرَ بها
ما كان مُلتبساً – التضرعُ إلى الله عزَّ وجلَّ بالدعاء له والترحّم عليه، والقيام
بنُصرة إظهار ما سُتِرَ من معرفته وكَشْف ما غُطِّيَ من سرائره، ورأيتُ فيه
مسائلَ ترك شرحَها وإيضاحَها.

وكان ممَّا امتَنَّ اللهُ عزَّ وجلَّ عليَّ وخصَّني من نِعمِه وفضلِهِ وإحسانِهِ أن
وهَبَ لي من المعرفة بالحساب وكشفَ لي من سرائره وبيَّن لي من غوامضِه ما
تخلّصت ووصلت به إلى أصولٍ منغلقة وقياساتٍ غير مُفْتَتَحة. ففرَّعتُ منها
مسائلَ كثيرة يخرج أكثرها إلى غير الضروب الستّة التي ذكرها الخوارزميّ في
كتابه، فدعاني إلى كشف ذلك وتَبْيينه وإظهارِ ما أخذه الله علي عزَّ وجلَّ من
الميثاق في كتابه الذي لا يأتيه الباطلُ من بين يديه ولا من خلفه، المُنَزّل على نبيِّه
محمّد / صلّى الله عليهِ حيث يقول:﴿وإذ أخَذَ اللهُ ميثاقَ الذين أُوتوا الكتابَ ٢-ظ
ليُبيِّنُنَّه للناس ولا يكتمونه﴾ (سورة العمران، ١٨٧).

فولّفتُ كتاباً في الجبرِ والمقابلةِ ورسمتُ فيه بعض ما ذكره محمّد بن موسى
الخوارزميّ في كتابه ليكونَ مستغنياً بنفسه عنه، وبيَّنتُ شرحَه، وأوضحتُ ما
تركَ الخوارزميّ إيضاحَه وشرحَه وبيّنتُه، ووصلتُ ذلك بتفسير ما وهب اللهُ لي
من المعرفة وفتحَ لي من الأصول المنغلقة والقياسات المتّصلة والأبواب الملتحمة،
ليكونَ ذلك زيادةً للعلماء، لحساب الجبر والمقابلة على ما عندهم منه، وليعلموا
وجوبَ حقّي عليهم إذْ كَشفتُ لهم وبيَّنت وفسَّرتُ ما لم يطمعوا في الوصول
إليه والتخلّص إلى معرفته، فيشكرونني بحسب ذلك ويَدْعوا اللهَ لي بالمغفرةِ
والرحمةِ والسلامةِ في الدينِ والدنيا، إنّه على كلّ شيءٍ قدير. ولخّصتُه بحسبِ
التوفيق طلباً للمثوبة ولِما حَسُنَت به الأُحْدوثة وطاب به الذِكر في الحياة وبعد
الممات. وما توفيقي إلاّ باللهِ عليه توكلّتُ وإليه أُنيبُ.

12-13 من الميثاق: في الهامش – 16 فولّف: بمعنى وضع وجمع، أي بمعنى ألّف، ولم نعثر على هذه الصيغة في القواميس – 22 ويدعوا: ويدعون – 24 الأحدوثة: أي السُّمعة الطيبة والذكر الحسن.

Le secours ne vient que de Dieu. C'est Lui qui me soutient et c'est à Lui que je m'en remets.

Celui qui examine mon livre a besoin tout d'abord de trois modes que Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī a mentionnés dans son livre, qui sont les racines, les *carrés* et le nombre. La racine est toute chose multipliée par elle-même à partir de l'unité, des unités qui sont au-dessus d'elle, de leurs fractions et des fractions qui sont au-dessous d'elle. Quant au *carré*, c'est ce qu'on obtient de la multiplication des unités ou des unités et des fractions ou des fractions contenues dans la racine, par elles-mêmes. Le nombre [3r] est ce qui existe en lui-même auquel n'échoie ni le nom de racine ni le nom de *carré*, et qui est rapporté à ce qu'il contient d'unités. Il se peut que pour ces trois modes chacun d'eux soit égal à chacun des deux modes qui restent. Par exemple lorsque tu dis « des *carrés* sont égaux à des racines », « des *carrés* sont égaux à un nombre », et « des racines sont égales à un nombre »[1].

Les *carrés* égaux à des racines, c'est par exemple lorsque tu dis : « un *carré* égale cinq racines ». Cela signifie que le *carré* est égal à cinq racines[2]. La racine du *carré* est toujours égale au nombre des racines auquel le *carré* est égal. Il est dans ce problème cinq. Et le *carré* est vingt-cinq, il est égal à cinq racines. Nous allons montrer pourquoi le *carré* sera égal au nombre des racines, et nous allons le montrer dans ce problème.

Posons le *carré* une surface carrée *ABCD*, ses côtés sont *AB*, *BC*, *CD*, *DA*. Chacun de ses côtés est multiplié par une unité du nombre de la longueur de cette surface, qui est la racine de cette surface. Donc, du côté *AB* multiplié par un, qui est la droite *BE*, on a la surface *AE*. La surface *AE* est donc la racine de la surface *AC*, et la surface *AC* est égale à cinq fois sa racine ; la surface *AC* est donc cinq fois la surface *AE*. Partageons la surface *AC* en cinq parties égales, qui sont les surfaces [3v] *AE*, *IF*, *SG*, *MH*, *OC*. Les droites *BE*, *EF*, *FG*, *GH*, *HC* sont donc égales. Or la droite *BE* est un. La droite *BC* est donc cinq, elle est la racine du *carré*, et le *carré* est 25, qui est la surface *AC*. Ce qu'il fallait démontrer.

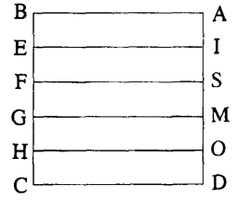


Fig. 1

Et c'est par exemple lorsque tu dis : « la moitié du *carré* égale dix racines ». Le *carré* tout entier égale donc vingt racines, la racine du *carré* est vingt et le *carré* quatre cents. Exemple : « cinq *carrés* égalent vingt racines » ; le *carré* égale donc quatre racines, la racine du *carré* est quatre

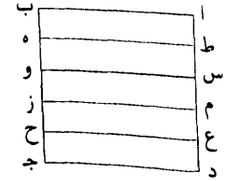
[1] $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$.

[2] Litt. : cinq de ses racines. On optera souvent, sans le signaler, pour cette traduction des expressions équivalentes.

فأوّل ما يحتاج إليه الناظرُ في كتابي هذا ثلاثة ضروب قد ذكرها محمّد بن موسى الخوارزميّ في كتابه، وهي: جذورٌ وأموالٌ وعدد. فالجذر كلّ شيء يُضْرَبُ في نفسه، من الواحد فما فوقه من الآحاد وكسورها، وما دونه من الكسور. وأمّا المال فهو ما اجتمع من ضرب ما في الجذر من الآحاد، والآحاد والكسور، أو الكسور في نفسه، والعدد / هو القائم بنفسه الذي لا يقع عليه ٣-و اسم جذرٍ ولا مال، وهو المنسوب إلى ما فيه من الآحاد. فهذه الضروب الثلاثة قد يكونُ كلّ ضربٍ منها يعدلُ كلّ واحدٍ من الضربين الباقيَيْن، وهو كقولك: "أموالٌ تَعْدلُ جذوراً" و"أموالٌ تعدلُ عدداً" و"جذورٌ تعدلُ عدداً".

فأمّا الأموالُ التي تعدلُ الجذورَ فمثل قولِك: "مالٌ يَعدلُ خمسةَ أجذار". ومعنى ذلك أنّ المالَ مساوٍ لخمسةِ أجذاره. فجذرُ المال يكون أبداً مثلَ عددِ الأجذار التي المالُ مساوٍ لها، وهو في هذه المسألة خمسةٌ، والمال خمسةٌ وعشرون وهو مثلُ خمسةِ أجذاره. وسنبيّن لِمَ صار المالُ مثلَ عددِ الأجذار، ونجعلُ بيانَه في هذه المسألة:

فنجعل المال سطحاً مربّعاً عليه $\overline{ا\,ب\,ج\,د}$ وأضلاعه $\overline{ا\,ب}$ $\overline{ب\,ج}$ $\overline{ج\,د}$ $\overline{د\,ا}$، وكلّ واحدٍ من أضلاعه مضروب في واحد من عددِ طولِ هذا السطح، هو جذر هذا السطح. فضلع $\overline{ا\,ب}$، مضروباً في واحد، وهو خطّ $\overline{ب\,ه}$، يكون سطح $\overline{ا\,ه}$. فسطح $\overline{ا\,ه}$ جذر سطح $\overline{ا\,ج}$، وسطح $\overline{ا\,ج}$ مثل خمسة أجذاره، فسطح $\overline{ا\,ج}$ خمسة أمثال سطح $\overline{ا\,ه}$. فنقسم سطح $\overline{ا\,ج}$ بخمسة



٣-ظ أقسام متساوية وهي سطوح / $\overline{ا\,ه}$ $\overline{ط\,و}$ $\overline{س\,ز}$ $\overline{م\,ح}$ $\overline{ع\,ج}$، فخطوط $\overline{ب\,ه}$ و $\overline{و\,ز}$ $\overline{ح\,ج}$ متساوية، وخطّ $\overline{ب\,ه}$ واحد، فخطّ $\overline{ب\,ج}$ خمسة وهو جذر المال، والمال ٢٥ وهو سطح $\overline{ا\,ج}$؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

3 فأول: هنا بداية الترجمة اللاتينية وكذلك الترجمة العبرية / ضروب: لقد ترجم ضروب بـ species وهي الكلمة لترجمة أنواع – 2 كتابه: انظر كتاب الجبر والمقابلة، ص. 97 – 12 المال: فوق السطر – 16 فضلع: فطلع / مضروباً: مضروب – 22 وهو سطح: في الهامش – 2 نبيّن: كتب بخطّ آخر في الهامش معلّقاً: "بشكل $\overline{ب}$ من مقالة $\overline{ب}$ من *الأصول*".

et le *carré* est seize[3]. De même quand le nombre des *carrés* augmente ou diminue, on le ramène à un seul *carré*. Et nous faisons de même pour les racines qui leur sont égales.

Les *carrés* égaux à un nombre : un *carré* égale seize. Alors c'est le *carré* et sa racine est quatre. Et c'est par exemple lorsque tu dis : « cinq *carrés* sont égaux à quarante-cinq dirhams » ; un seul *carré* est le cinquième de quarante-cinq, qui est neuf. Et c'est par exemple lorsque tu dis « un tiers de *carré* égale vingt-sept » ; le *carré* est donc quatre-vingt-un. Il en est de même pour tous les *carrés*, ceux qui excèdent <le *carré*> et ceux qui sont moindres <que lui> sont ramenés à un seul *carré*. Et nous faisons de même pour les nombres qui leur sont égaux[4].

Les racines égales à un nombre, c'est par exemple lorsque tu dis : « une racine est égale à quatre » ; la racine est donc égale à quatre, et le *carré* est seize. Et par exemple lorsque tu dis : « cinq racines sont égales à trente » ; la racine est donc égale à six et le *carré* trente-six. Et par exemple lorsque tu dis : « la moitié d'une racine est égale à dix » ; la racine est donc égale à vingt et le *carré* à quatre cents. Et de même pour toutes les racines, celles qui excèdent <la racine> et celles qui sont moindres qu'elle sont ramenées à une seule racine. Nous faisons de même pour les nombres qui leur sont égaux[5].

J'ai trouvé [4r] ces trois modes qui sont les racines, les *carrés* et le nombre ; ils se combinent et on a deux modes d'entre eux égaux au troisième mode. C'est par exemple lorsque tu dis : « des *carrés* plus des racines sont égaux à un nombre », « des *carrés* plus un nombre sont égaux à des racines », « des racines plus un nombre sont égaux à des *carrés* »[6].

Les *carrés* plus les racines égaux à un nombre, c'est par exemple lorsque tu dis : « un *carré* plus dix racines sont égaux à trente-neuf dirhams ». Cela signifie : un quelconque *carré*, si tu lui ajoutes dix racines, de tout cela on obtient trente-neuf dirhams. Dans ce problème, il y a deux

[3] Exemples de la première équation : $x^2 = 5x \Rightarrow x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$; $\frac{1}{2}x^2 = 10\,x \Rightarrow x^2 = 20\,x \Rightarrow x = 20 \Rightarrow x^2 = 400$; $5x^2 = 20x \Rightarrow x^2 = 4x \Rightarrow x = 4 \Rightarrow x^2 = 16$; en général : $ax^2 = bx \Rightarrow x^2 = \frac{b}{a}x \Rightarrow x = \frac{b}{a} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ avec $a, b \in \mathbf{Q}^+ - \{0\}$.

[4] $x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$, $5x^2 = 45 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = 3$, $\frac{1}{3}x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 81$; en général : $ax^2 = b \Rightarrow x^2 = \frac{b}{a}$ avec $a, b \in \mathbf{Q}^+ - \{0\}$.

[5] $x = 4 \Rightarrow x^2 = 16$, $5x = 30 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow x^2 = 36$; $\frac{1}{2}x = 10 \Rightarrow x = 20 \Rightarrow x^2 = 400$; en général : $ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$ avec $a, b \in \mathbf{Q}^+ - \{0\}$.

[6] $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $bx + c = ax^2$.

وكقولك: "نصف مال يعدل عشرة أجذار". فالمال كلّه يعدل عشرين جذراً، وجذر المال عشرون والمال أربعمائة. ومثل: "خمسة أموال تعدل عشرين جذراً"، فالمال يعدل أربعة أجذار، وجذر المال أربعة، والمال ستّة عشر. وكذلك ما كثُر من الأموال أو قلّ يُردُّ إلى مالٍ واحدٍ، وكذلك نفعل بما عادلها من الأجذار.

فأمّا الأموال التي تعدل العدد، فمالٌ يعدل ستّة عشر، فهو المال وجذره أربعة. وكقولك: "خمسة أموال تعدل خمسةً وأربعين درهماً". فالمالُ الواحدُ خُمس الخمسة والأربعين وهو تسعة. وكقولك: "ثلثُ مالٍ يعدل سبعةً وعشرين"، فالمال واحد وثمانون. وكذلك جميع الأموال زائدها وناقصها يُردُّ إلى مالٍ واحد. وكذلك نفعل بما عادلها من الأعداد.

وأمّا الجذور التي تعدل العددَ فكقولك: "جذر يعدل أربعةً"، فالجذر أربعة والمال ستّة عشر. وكقولك: "خمسة أجذار تعدل ثلاثين"، فالجذر يعدل ستّة والمال ستّة وثلاثون. وكقولك: "نصف جذر يعدل عشرة"، فالجذر يعدل عشرين، والمال أربعمائة. وكذلك جميع الجذور زائدها وناقصها يُردُّ إلى جذرٍ واحدٍ. وكذلك نفعل بما عادلها من الأعداد.

٤-و ووجدت / هذه الضروب الثلاثة، التي هي الجذور والأموال والعدد، تقترن فيكون كلّ ضربين منها يعادلان الضرب الثالث، وهي كقولك: "أموال وجذور تعدل عدداً"، و"أموال وعدد تعدل جذوراً" و"جذور وعدد تعدل أموالاً".

فأمّا الأموال والجذور التي تعدل العدد، فنحو قولك: "مالٌ وعشرة أجذار تعدل تسعةً وثلاثين درهماً"، ومعناه: أيُّ مالٍ إذا زيد عليه مثلُ عشرةِ أجذاره بلغ ذلك كلُّه تسعةً وثلاثين درهماً. ففي هذه المسألة بابان: أحدهما يُخرجك إلى جذر المال والآخر يُخرجك إلى المال. وسنأتي بهما جميعاً ونبيّن علّتهما في أشكالٍ هندسيّة يفهمها المهندسون الذين قد نظروا في كتابِ أقليدس.

16-21 انظر الخوارزمي، ص. 101.

procédés. L'un te mène à la racine du *carré* et l'autre te mène au *carré*. Nous allons les présenter tous les deux et nous allons montrer leur cause par des figures géométriques que les géomètres qui ont examiné le livre d'Euclide comprennent.

Le procédé qui te mène à la racine du *carré*, et qui a été mentionné par Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī dans son livre[7], est : nous partageons en deux moitiés les racines, qui sont cinq dans ce problème ; nous le multiplions par lui-même, on a vingt-cinq ; nous l'ajoutons au trente-neuf, on a soixante-quatre ; nous prenons sa racine, on a huit ; retranches-en la moitié des racines, qui est cinq ; il reste trois, ce qui est la racine du *carré* et le *carré* est neuf[8].

Procédé qui te mène au *carré* : tu multiplies les dix racines par elles-mêmes, on a cent ; tu multiplies ce cent par trente-neuf, qui est égal au *carré* plus les racines ; on a trois mille neuf cents, puis tu partages le cent en deux, on a cinquante ; tu le multiplies [4^{v}] par lui-même, on a deux mille cinq cents, que tu ajoutes aux trois mille neuf cents, on a six mille quatre cents ; prends sa racine, quatre-vingts ; enlève-le de cinquante – qui est la moitié de cent – et de trente-neuf, qui est égal aux racines plus le *carré*, cela est quatre-vingt-neuf ; il reste neuf, ce qui est le *carré*[9].

De même si l'on dit : « deux *carrés* ou trois *carrés* ou plus ou moins, ramène cela à un seul *carré*, et ramène les racines et les nombres qui sont avec lui de la même manière que celle par laquelle tu as ramené le *carré* ». C'est par exemple lorsque tu dis : « deux *carrés* et dix racines sont égaux à quarante-huit ». Cela signifie que, si tu additionnes deux *carrés* quelconques et que tu leur ajoutes dix de la racine de l'un d'eux, on obtient quarante-huit. Il faut donc que tu ramènes les deux *carrés* à un seul *carré*. Alors nous savons que un *carré* est la moitié de deux *carrés* ; donc, ramène toute chose dans ce problème à sa moitié ; comme si on disait : « un *carré* et cinq racines sont égaux à vingt-quatre dirhams ». Cela signifie : si à un quelconque carré tu ajoutes cinq racines, on obtient vingt-quatre.

Procédé qui te mène à la racine : tu partages en deux moitiés le nombre des racines ; on a alors deux plus un demi ; tu le multiplies par lui-même, on a six plus un quart ; ajoute-le à vingt-quatre, on a trente plus un quart ;

[7] R. Rashed, *Al-Khwārizmī : Le commencement de l'algèbre*, Paris, 2007, p. 101-102.

[8] $x^2 + 10\,x = 39$. On a $(x + 5)^2 = x^2 + 25 + 10x = 39 + 25 = 64$, donc $x + 5 = 8$, d'où $x = 3$ et $x^2 = 9$.

[9] $\frac{10^2}{2} + 39 - \sqrt{10^2 \cdot 39 + \left(\frac{10^2}{2}\right)^2} = x^2$.

فأمّا الباب الذي يُخرجك إلى جذر المال، فقد ذكره محمّد بن موسى الخوارزميّ في كتابه، وهو أن ننصّف الأجذار – وهي في هذه المسألة خمسة – فنضربها في مثلها فتكون خمسة وعشرين، فنــزيدها على التسعة والثلاثين فتكون أربعة وستين، فنأخذ جذرها فيكون ثمانية؛ فانقص منها نصف الأجذار وهو خمسة، فيبقى ثلاثة، وهو جذر المال، والمال تسعة.

وأمّا الباب الذي يُخرجك إلى المال، فهو أن تضرب العشرة الأجذار في مثلها فيكون مائة، فتضرب هذه المائة في التسعة والثلاثين التي كانت تعدل المال والأجذار، فيكون ثلاثة آلاف وتسعمائة؛ ثم تنصّف المائة فيكون خمسين، فتضربها / في مثلها فيكون ألفين وخمسمائة، فتزيدها على الثلاثة آلاف ٤-ظ وتسعمائة فيكون ستّة آلاف وأربعمائة. فخُذْ جذرها ثمانين فأسقطها من الخمسين – التي هي نصف المائة – والتسعة والثلاثين التي كانت تعدل الأجذار والمال وذلك تسعةٌ وثمانون، فبقي تسعة، وهو المال.

وكذلك لو قال: "مالان أو ثلاثة أموال أو أكثر أو أقل، فارْدُدْه إلى مالٍ واحد وارْدُدْ ما كان معه من الأجذار والعدد إلى مثل ما رَدَدْت إليه المال"، وهو مثل قولك: "مالان وعشرة أجذار يعدل ثمانيةً وأربعين". ومعناه أيُّ مالين إذا جمعا وَزِيدَ عليهما مثلُ عشرة أجذار أحدهما بلغ ذلك ثمانية وأربعين، فينبغي أن تردَّ المالَين إلى مالٍ واحد. وقد علمنا أنّ مالاً من مالين نصفهما، فارْدُدْ كلّ شيءٍ معك في هذه المسألة إلى نصفه، فكأنه قال: "مالٌ وخمسة أجذار يعدل أربعةً وعشرين درهماً". فمعناه: أيُّ مالٍ إذا زيد عليه خمسة أجذاره بلغَ أربعةً وعشرين.

فالباب الذي يُخرجك إلى الجذر هو أن تنصِّف الأجذار فتكون اثنين ونصفاً، فاضربها في مثلها فيكون ستّة وربعاً، فزدها على أربعة وعشرين فتكون

2 انظر الخوارزمي، ص. 101–102 — 8 آلاف: الف، وكذلك فيما بعد — 13 مالان: مالين — 15 يعدل: المقصود هو الجميع — 17 علمنا: عملنا، (fol. 72r, 91) Et iam scis.

prends sa racine, on a cinq plus un demi ; retranches-en la moitié des racines, qui est deux et demi, il reste donc trois, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est neuf[10].

Procédé qui te mène au *carré* : tu multiplies les cinq racines par elles-mêmes, on a alors vingt-cinq, [5r] que tu multiplies par le vingt-quatre ; on a six cents ; puis tu partages le vingt-cinq en deux, on a douze et demi ; tu le multiplies par lui-même, on a cent cinquante-six plus un quart ; ajoute-le aux six cents, on a sept cent cinquante-six et un quart ; prends sa racine, on a vingt-sept plus un demi ; retranche-le du douze plus un demi, qui est la moitié de vingt-cinq, plus le vingt-quatre, qui est égal au *carré* plus les racines, cela est trente-six et demi ; il reste neuf, qui est le *carré*, et sa racine est trois[11].

Si l'on dit « la moitié d'un *carré* plus cinq racines sont égaux à vingt-huit dirhams », cela signifie : si tu ajoutes à la moitié d'un quelconque *carré* cinq racines, on obtient vingt-huit dirhams. Tu veux compléter ton *carré* pour obtenir un *carré* entier, et cela en le doublant ; alors double-le et double ce qui est avec lui et ce qui lui est égal. On a alors un *carré* plus dix racines égal à cinquante-six.

Procédé qui te mène à la racine : tu partages en deux les racines, on a cinq ; multiplie-le par lui-même, on a vingt-cinq ; ajoute-le au cinquante-six, on a quatre-vingt-un ; prends sa racine, on a neuf ; retranches-en la moitié des racines, qui est cinq, il reste quatre, ce qui est la racine du *carré* et le *carré* est seize[12].

Procédé qui te mène au *carré* : tu multiplies les dix racines par elles-mêmes, on a cent ; tu multiplies ce cent par le cinquante-six, on a cinq mille six cents, puis tu partages en deux [5v] le cent, on a cinquante ; tu le multiplies par lui-même, on a deux mille cinq cents ; ajoute-le aux cinq mille six cents, on a huit mille cent ; prends sa racine, on a quatre-vingt-

[10] $ax^2 + bx = c \Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$; pour $a = 2$, $b = 10$ et $c = 48$: $2x^2 + 10x = 48 \Rightarrow x^2 + 5x = 24$; soit $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 = x^2 + 5x + \frac{25}{4} = 24 + \frac{25}{4} = \frac{121}{4}$, $x + \frac{5}{2} = \frac{11}{2} \Rightarrow x = 3$ et $x^2 = 9$.

[11] $\frac{25}{2} + 24 - \sqrt{25 \cdot 24 + \left(\frac{25}{2}\right)^2} = x^2$.

[12] $\frac{1}{2}x^2 + 5x = 28$. On normalise et on obtient : $x^2 + 10x = 56$, $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25 = 56 + 25 = 81$, $x + 5 = 9 \Rightarrow x = 4$, $x^2 = 16$ et $\frac{1}{2}x^2 = 8$; en général : $ax^2 + bx = c$; on a $x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$; on considère $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{4ac + b^2}{4a^2}$, d'où

$$x = \frac{1}{2a}\left(\sqrt{b^2 + 4ac} - b\right), \text{ avec } a > 0, b > 0, c > 0.$$

Abū Kāmil ne mentionne que la racine positive.

ثلاثين وربعاً. فخذ جذرها فيكون خمسة ونصفاً. فانقص منها نصفَ الأجذار وهو اثنان ونصف، فيبقى ثلاثةٌ وهو جذرُ المالِ، والمالُ تسعة.

والبابُ الذي يخرجك إلى المالِ فهو أن تضرب الخمسة الأجذار في مثلها فيكون خمسةً وعشرين، / فتضربها في الأربعة والعشرين فيكون ستمائة. ثم ٥-و تُنصّف الخمسة والعشرين فتكون اثني عشر ونصفاً، فتضربها في مثلها فتكون مائةً وستّة وخمسين وربعاً. فزدها على الستمائة فتكون سبعمائة وستّة وخمسين وربعاً. فخذْ جذرها فيكون سبعةً وعشرين ونصفاً. فأسقطها من الاثني عشر والنصف، التي هي نصف الخمسة والعشرين، والأربعة والعشرين التي كانت تعدل المال والأجذار، وذلك ستّة وثلاثون ونصف، فيبقى تسعة وهو المالُ، وجذره ثلاثة.

ولو قال: "نصف مال وخمسةُ أجذار يعدل ثمانيةً وعشرين درهماً"، فمعنى ذلك: أيُّ مال إذا زيدَ عَلى نصفه مثلُ خمسة أجذاره، فبلغ ثمانية وعشرين <درهماً>، فتريد أن تُكمِلَ مَالَك حتى تَبْلُغَ به مالاً تامّاً وهو أن تُضعفَهُ، فأضعفْه، وأضعِف ما معه <و>ممّا يعادله، فيكون مالاً وعشرة أجذار تعدل ستّة وخمسين.

فالباب الذي يُخرجك إلى الجذر فهو أن تنصِّف الأجذار فتكون خمسةً، فاضربها في مثلها فتكون خمسة وعشرين فزدها على الستّة والخمسين فيكون أحد وثمانين، فخذ جذرها فيكون تسعة، فانقص منها نصف الأجذار — وهو خمسة — فيبقى أربعة وهو جذر المال، والمال ستّة عشر.

والباب الذي يُخرجُك إلى المَال فهو أن تضرب العشرة الأجذار في مثلها فتكون مائةً، فتضرب هذه المائة في الستّة والخمسين فيكون خمسة آلاف وستمائة، ثم تنصّف / المائة فتكون خمسين، فتضربها في مثلها فيكون ألفان ٥-ظ وخمسمائة، فزدها على الخمسة آلاف وستمائة، فيكون ثمانية آلاف ومائة. فَخُذْ جذرها فيكون تسعين. فأسقطها من الخمسين، التي هي نصف المائة والستّة والخمسين، التي كانت تعدل المالَ والأجذار، وذلك مائة وستّة، فيبقى ستّة عشر

4 والعشرين: في الهامش — 12 فمعنى: ومعنى / فبلغ: بلغ — 18 فيكون تسعة: في الهامش — 22 ألفان: الفي.

dix ; retranche-le de cinquante, qui est la moitié de cent, et de cinquante-six, qui est égal au *carré* plus les racines, on a cent six, il reste seize, qui est le *carré*[13]. Procède de même pour tout ce qui te vient des *carrés* et des racines et des nombres qui leur sont égaux, si Dieu le veut.

Quant à la cause de « un *carré* plus dix racines égaux à trente-neuf », le procédé qui te mène à la racine est : nous posons le *carré* une surface carrée *ABCD* à quoi nous ajoutons les racines qui sont avec lui et qui sont dix racines ; soit la surface *ABFE*. Il est clair que la droite *BE* est dix en nombre car le côté de la surface *ABCD*, qui est la droite *AB* multipliée par un, est la racine de la surface *ABCD* ; elle est donc multipliée par dix et on a dix racines de la surface *ABCD*. La droite *BE* est par conséquent dix ; et la surface *FECD* est trente-neuf car elle est un *carré* plus dix racines ; on l'obtient de la multiplication de la droite *EC* par la droite *CD* ; mais la droite *CD* est égale à la droite *CB*. Donc le produit de la droite *EC* par la droite *CB* est trente-neuf. Et la droite *EB* est dix. Nous partageons la droite *EB* en deux moitiés au point *H*, donc la droite *EB* a été partagée en deux moitiés au point *H* et on a ajouté à sa longueur la droite *BC*. Donc le produit de la droite *EC* par la droite *CB* et *HB* par elle-même sont égaux au produit de la droite *HC* par elle-même, d'après ce qu'a dit Euclide dans le deuxième livre de son ouvrage[14]. Mais le produit de la droite *EC* par la droite *CB* est trente-neuf, et le produit de la droite *HB* par elle-même est vingt-cinq. Donc le produit de la droite *HC* par elle-même est soixante-quatre. La droite *HC* est donc huit. [6r] Mais la droite *HB* est cinq. Donc la droite *BC* qui reste est trois, ce qui est la racine du *carré*, et le *carré* est neuf.

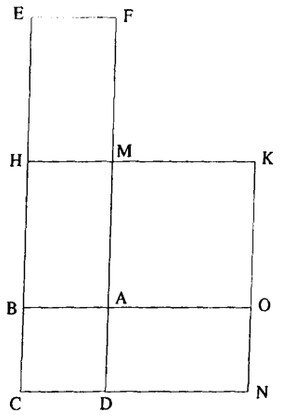


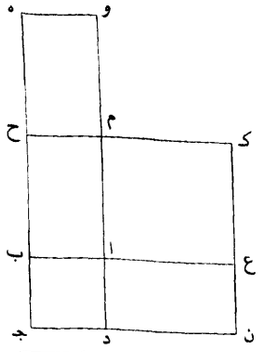
Fig. 2

[13] $\frac{10^2}{2}+56-\sqrt{10^2\cdot 56+\left(\frac{10^2}{2}\right)^2}=x^2$.

[14] *Éléments*, II.6.

وهو المال. وكذلك فاعمل بجميع ما جاءك من الأموال والجذور ومَا عادلها من الأعداد، إن شاء الله.

وأما العلّة في: "المال وعشرة أجذار يعدل تسعةً وثلاثين"، فالبابُ الذي يخرجك إلى الجذر: فإنّا نجعل المالَ سطحاً مربّعاً وعليه ا ب ج د ونضيف إليه الأجذار التي معه وهي عشرة أجذار وهي سطح ا ب و ه، فَبيِّن أن خطّ ب ه عشرة من العدد؛ لأنّ ضلع سطح ا ب ج د، وهو خطّ ا ب، مضروباً في واحدٍ يكون جذر سطح ا ب ج د، فهو مضروب في عشرة، يكون عشرة أجذار سطح ا ب ج د. فخطّ ب ه إذن عشرة، وسطح و ه ج د تسعة وثلاثون لأنّه مالٌ وعشرةُ أجذار، وهو من ضرب خطّ ه ج في خطّ ج د، وخطّ ج د مثل خطّ ج ب. فضرب خطّ ه ج في خطّ ج ب تسعة وثلاثون وخطُّ ه ب عشرة. فنقسم خطّ ه ب بنصفين على نقطة ح، فخطّ ه ب قد قُسِمَ بنصفين على نقطة ح وزيدَ في طوله خطّ ب ج. فضرب خطّ ه ج في خطّ ج ب وَح ب في نفسه مثل ضرب خطّ ح ج في نفسه، كما قال أقليدس في المقالة الثانية من كتابه. وضرب خطّ ه ج في خطّ ج ب تسعة وثلاثون، وضرب خطّ ح ب في نفسه خمسة وعشرون. فضرب خطّ ح ج في نفسه أربعة وستون، فخطّ ح ج ثمانية؛ / وخطّ ح ب خمسة. ٦-و فخطّ ب ج الباقي ثلاثة، وهو جذر المال والمال تسعة.



4 فإنّا نجعل: الصواب أن يقال "أن نجعل" ليكون خبراً للمبتدأ: الباب — 12 وثلاثون: وثلاثين — 16 انظر الشكل السادس في ترجمة الحجاج: "إذا قسم خط مستقيم بنصفين وزيد في طوله خط آخر مستقيم، فإن السطح الذي يحيط به الخط كله مع الزيادة والزيادة ومربع نصف الخط الأول مساوٍ لمربع نصف الخط مع الزيادة" (ص. 28–30) — 17 وثلاثون: وثلاثين / وعشرون: وعشرين — 18 وستّون: وستّين.

Si tu veux que je te montre d'une manière évidente[15] ce que j'ai dit, nous construisons sur la droite *HC* une surface carrée, soit la surface *HKNC*, et nous prolongeons la droite *AB* jusqu'au point *O* ; la droite *HC* est donc égale à la droite *CN* ; mais la droite *BC* est égale à la droite *CD*, il reste la droite *BH* égale à la droite *DN*. Donc la surface *HA* est égale à la surface *AN*. Mais la surface *HA* est égale à la surface *ME*. Donc la surface *ME* est égale à la surface *AN*, les trois surfaces *MB*, *BD*, *DO* sont trente-neuf, et la surface *AK* est vingt-cinq, car elle est le produit de la droite *HB* par elle-même et la droite *HB* est 5. Donc la surface *AK* est vingt-cinq, la surface *KC* tout entière est soixante-quatre, donc la droite *HC* est sa racine, elle est huit. Et la droite *HB* est cinq, donc la droite *BC* qui reste est trois. Ce qu'il fallait démontrer.

Quant à la cause du procédé qui te mène au *carré*, alors nous posons le *carré* la droite *AB*, nous lui ajoutons dix racines, qui est la droite *BC*. Donc la droite *AC* est trente-neuf. Nous voulons savoir quelle est la grandeur de la droite *AB*. Construisons sur la droite *BC* une surface carrée, soit la surface *DEBC*, qui est cent fois égale à la droite *AB* multipliée par une des unités qui sont dans la droite *AB*, car la droite *BC* est dix racines de <la droite> *AB* ; mais dix racines d'une chose multipliées par elles-mêmes, cela est égal à cent fois une chose. Posons la surface *AH* égale au carré *BE*. Donc *AH* est égale à la droite *AB* multipliée par une des unités de la droite *AB*, [6v] cent fois. Donc la droite *AM* est cent. Achevons la surface *AN*, donc la surface *AN* est trois mille neuf cents car la droite *AC* est trente-neuf et *AM* est cent. Mais la surface *AH* est égale à la surface *BE*, donc la surface *DN* est trois mille neuf cents, et elle est le produit de *NE* par *EC*, car la droite *EC* est égale à la droite *ED*. Mais la droite *CN* est cent, car elle est égale à la droite *AM*. Nous partageons la droite *CN* en deux moitiés au <point> *L*,

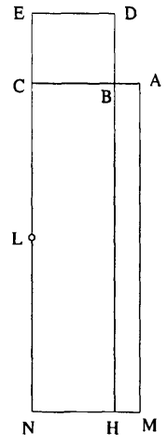
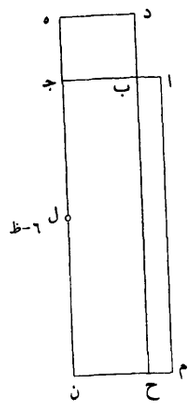


Fig. 3

[15] Le traducteur latin a rendu cette locution ainsi : « Si autem vis quod exponam tibi quod dixi ita ut oculis appareat » (*l.* 151). Le choix de « oculis » est littéral puisque l'arabe *'iyānan* est dérivé du mot *'ayn* (œil). Le vrai sens est « d'une manière visible », ou mieux encore « d'une manière évidente ».

وإن أحببتَ أن أبيِّن ما قلتُ لك عِياناً عملنا على خطّ ح جـ سطحاً مربّعاً
وهو سطح ح ك ن جـ، ونخرج خطّ ا ب على استقامةٍ إلى نقطة ع. فخطّ
ح جـ مثل خطّ جـ ن، وخطّ ب جـ مثل خطّ جـ د فبقي خطّ ب ح مثل خطّ
د ن فسطح ح ا مثل سطح ا ن، وسطح ح ا مثل سطح م ه فسطح م ه مثل
سطح ا ن فسطوح م ب ب د د ع الثلاثة تسعة وثلاثون. وسطح ا ك خمسة
وعشرون لأنّه من ضرب خطّ ح ب في نفسه وخطّ ح ب ٥، فسطح ا ك
خمسة وعشرون. فسطح ك جـ كلّه أربعة وستون. فخطّ ح جـ جذره، وهو
ثمانية، وخطّ ح ب خمسة، فخطّ ب جـ الباقي ثلاثة؛ وذلك ما أردنا أن نبيِّن.
وأمّا العلّة للباب الذي يخرجك إلى المال: فإنّا نجعل المال خطّ ا ب
ونضيف إليه عشرة أجذاره، وهو خطّ ب جـ، فصار خطّ ا جـ تسعة وثلاثين.
ونريد أن نعلم كم خطّ ا ب. فنعمل على خطّ ب جـ سطحاً مربّعاً، وهو سطح
د ه ب جـ، وهو مائة مرة مثل خطّ ا ب مضروباً في واحدٍ
من الآحاد التي في خطّ ا ب، لأنّ خطّ ب جـ عشرة أجذار
ا ب، وعشرة أجذار الشيء مضروباً في مثله مثل ذلك
الشيء مائة مرة. ونجعل سطح ا ح مثل مربّع ب ه، فـ ا ح
مثل خطّ ا ب مضروباً في واحد من الآحادِ التي في ا ب /
مائة مرة. فخطّ ا م مائة، ونتمُّ سطح ا ن فسطح ا ن ثلاثة
آلاف وتسعمائة، لأنّ خطّ ا جـ تسعة وثلاثون وا م مائة.
وسطح ا ح مثل سطح ب ه فسطح د ن ثلاثة آلاف
وتسعمائة، وهو من ضرب ن ه في ه جـ، لأنّ خطّ ه جـ مثل
خطّ ه د؛ وخطّ جـ ن مائة، لأنّه مثل خطّ ا م. فنقسم خطّ



1 وإن ... عيانًا: Si autem vis quod exponam tibi quod dixi ita ut oculis appareat — 6 ح ب ٥: ح ب في نفسه، ثم ضرب على "في نفسه" بالقلم وكتب فوقها "٥" — 7 فخطّ: فسطح، linea — 9 وأما ... المال: Porta autem te faciens exire ad sciendum censum — 14 مثله: هذا جائز على تقدير العدد، ونتركها كما هي في كل الكتاب / ذلك: في الهامش.

donc la droite *CN* a été partagée en deux moitiés au point *L*, et on a ajouté à sa longueur la droite *CE* ; donc le produit de la droite *NE* par la droite *EC* plus la droite *CL* par elle-même sont égaux à la droite *LE* par elle-même, comme l'a dit Euclide dans le second livre de son ouvrage[16]. Mais le produit de la droite *NE* par la droite *EC* est trois mille neuf cents, et le produit de la droite *CL* par elle-même est deux mille cinq cents ; nous les additionnons, on a six mille quatre cents, qui est égal au produit de la droite *LE* par elle-même ; donc le produit de *LE* par elle-même est six mille quatre cents. La droite *LE* est donc quatre-vingts ; mais la droite *CE* est égale à la droite *BC*, donc la droite *LC* plus la droite *BC* est quatre-vingts ; si nous ôtons les deux droites *LC* et *BC*, ce qui est quatre-vingts, des deux droites *AC* et *CL*, ce qui est quatre-vingt-neuf, il reste la droite *AB*, qui est le *carré*, neuf. Ce qu'il fallait démontrer.

Les *carrés* et le nombre égaux à des racines, c'est par exemple lorsque tu dis « un *carré* plus vingt et un dirhams sont égaux à dix racines ». Cela signifie : si tu ajoutes à un quelconque *carré* vingt et un dirhams, [7r] alors la somme est égale à dix racines de ce *carré*. Dans ce problème également il y a deux procédés ; chacun de ces deux procédés te mène à la somme et à la différence. L'un te mène à la racine du *carré*, et l'autre te mène au *carré*.

Procédé qui te mène à la racine du *carré* : tu partages en deux moitiés les racines, on a cinq ; multiplie-le par lui-même, on a vingt-cinq ; retranches-en le vingt et un qui est avec le *carré*, il reste quatre ; prends sa racine, on a deux ; retranche-le de la moitié des racines, qui est cinq ; il reste trois, ce qui est la racine du *carré* que nous voulons, et le *carré* est neuf[17].

Si tu veux, ajoute deux à la moitié des racines, qui est cinq ; on a sept, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est quarante-neuf. Et sache que, si tu partages les racines en deux, par ce procédé, et que tu le multiplies par lui-même, de sorte que le produit de cela soit plus petit que les dirhams qui sont avec les *carrés*, alors le problème est impossible. Et s'il est exactement égal aux dirhams, alors la racine du *carré* est égale à la moitié des racines sans ajout ni diminution. Nous allons montrer tout ce que nous avons dit dans ce problème dans des figures géométriques, si Dieu Très-Haut le veut.

[16] *Éléments*, II.6.

[17] $ax^2 + c = bx$; $x^2 + 21 = 10x$

$(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25 = x^2 - x^2 - 21 + 25 = 4$, $x - 5 = 2$ et $x = 7$.

On peut aussi considérer

$(5-x)^2 = 25 - 10x + x^2 = 25 - x^2 - 21 + x^2 = 4$, $5 - x = 2$ et $x = 3$.

جـ ن بنصفين على لَ. فخطّ جـ ن قد قُسم بنصفين على نقطة لَ وزيد في طوله خطّ جـ ه. فضربُ خطّ ن ه في خطّ ه جـ وخطّ جـ لَ في نفسه مثل خطّ لَ ه في نفسه، كما قال أقليدس في المقالة الثانية من كتابه. وضرب خطّ ن ه في خطِّ ه جـ ثلاثة آلاف وتسعمائة، وضربُ خطّ جـ لَ في نفسه ألفان وخمسمائة، فنجمعهما فيكون ستّة آلاف وأربعمائة، وهو مثل ضرب خطّ لَ ه في نفسه. فضرب لَ ه في نفسه ستّة آلاف وأربعمائة. فخطُّ لَ ه ثمانون، وخطّ جـ ه مثل خطّ ب جـ، فصار خطّ لَ جـ وخطّ ب جـ ثمانين. فإذا أسقطنا خطّي لَ جـ وَب جـ، الذي هو ثمانون، من خطّي ا جـ وَجـ لَ الذي هو تسعة وثمانون، بقي خطّ ا ب، الذي هو المال، تسعة؛ وذلك ما أردنا أن نبيِّن.

وأمَّا الأموال والعدد التي تعدل الجذور، فنحو قولك: "مالٌ وأحد عشرون درهماً تعدل عشرةَ أجذار". ومعناه: أيّ مالٍ إذا زِدْتَ عليه واحداً وعشرين درهماً / كان ما اجتمع مثل عشرة أجذار ذلكَ المال. ففي هذه المسألة ٧-و أيضاً بابان، كلّ باب منهما يخرجك إلى الزيادة والنقصان. أحدهما يخرجك إلى جذر المال والآخر يخرجك إلى المال.

فأمَّا الباب الذي يخرجك إلى جذر المال: فهو أن تنصّف الأجذار فتكون خمسةً، فاضربها في مثلها فتكون خمسة وعشرين، فانقص منها الواحد والعشرين، التي مع المال، فيبقى أربعة، فَخُذْ جَذْرها فيكون اثنين. فانقصه من نصف الأجذار وهي خمسة فيبقى ثلاثة، وهي جذر المال الذي تريد، والمال تسعة.

وإن شئت فَزِد الاثنين على نصفِ الأجذار — وهو خمسةٌ — فيكون سبعةً، فهو جذرُ المال، والمالُ تسعةٌ وأربعون. واعلم أنك إذا نصَّفت الأجذار في هذا الباب وضربتها في مثلها وكان مبلغ ذلك أقلّ من الدراهم التي مع المال، فالمسألة تستحيل. وإن كانت مثل الدراهم بعينها، فجذر المال مثل نصف الأجذار لا زيادة ولا نقصان. وسنبيّن جميع ما قلنا في هذه المسألة في أشكال هندسيّة، إن شاء الله تعالى.

3 قال: فوق السطر / المقالة الثانية: انظر الشكل السادس.

Procédé qui te mène au *carré* : tu multiplies les dix racines par elles-mêmes, on a cent ; tu multiplies ce cent par vingt et un qui est avec le *carré*, on a deux mille cent ; puis tu partages en deux moitiés le cent, on a cinquante ; tu le multiplies par lui-même, on a deux mille cinq cents ; ôtes-en les deux mille cent, il reste quatre cents ; prends sa racine, on a vingt ; ôte-le de cinquante qui est la moitié de cent, il reste trente ; ôtes-en le vingt et un qui est avec le *carré*, il reste neuf, qui est le *carré*. Et si tu veux, ajoute le vingt au cinquante, on a soixante-dix ; ôtes-en le vingt et un qui est avec le *carré*, il reste quarante-neuf, ce qui est le *carré*[18].

Tout ce qui te vient à partir de deux *carrés*, ou plus ou moins, ramène-le à un seul *carré*, comme nous l'avons montré pour les premiers procédés.

Quant à la cause de « un *carré* plus vingt et un dirhams sont égaux à dix racines », le procédé qui te mène à la racine est : il se peut que le *carré* soit plus grand que les dirhams qui sont avec lui, ou plus petit qu'eux. [7v] Et le *carré* ne sera pas égal aux dirhams qui sont avec lui, sauf si le produit de la moitié des racines par elle-même est égal aux dirhams qui sont avec le *carré*. C'est alors que le *carré* sera égal aux dirhams qui sont avec lui. Nous allons montrer tout cela et l'expliquer, si Dieu le veut.

Posons les dirhams qui sont avec le *carré*, c'est-à-dire vingt et un dirhams, d'abord plus grands que le *carré*. Et posons le *carré* une surface carrée *ABDC*. Ajoutons à celui-ci le vingt et un qui est avec lui, soit la surface *ABEL*. Donc la surface *ABEL* est plus grande que la surface *ABCD*, car nous l'avons posée ainsi. Donc la droite *BL* est plus grande que la droite *BD* ; mais la surface *ED* est dix racines de la surface *ABCD*, donc la droite *DL* est dix. Mais la surface *EB* est le produit de *LB* par *BA*, et *BA* est égale à *BD*, donc le produit de *LB* par *BD* est la surface *EB*. Mais la surface *EB* est vingt et un, donc le produit de *LB* par *BD* est vingt et un. Partageons alors la droite *LD* en deux moitiés au point *H*. La droite *LD* a donc été partagée en deux moitiés au point *H* et en deux parties différentes au

18 $\frac{b^2}{2} - c \mp \sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right)^2 - b^2 c} = x^2$. Voir le commentaire mathématique p. 41 *sqq*.

وأمّا الباب الذي يخرجك إلى المال: فهو أن تضرب العشرة الأجذار في مثلها فتكون مائة، فتضربُ هذه المائة في الواحد والعشرين، التي مع المال، فتكون ألفين ومائة، ثم تنصّف المائة فتكون خمسين، فتضربها في مثلها فتكون ألفين وخمسمائة، فأسقط منها الألفين والمائة فيبقى أربعمائة، فخذ جذرها فيكون عشرين، فأسقطها من الخمسين التي هي نصف المائة فيبقى ثلاثون، فأسقط منها الواحد والعشرين التي كانت مع المال، فيبقى تسعة وهو المال. وإن شئت، فزِد العشرين على الخمسين فيكون سبعين، فأسقط منها الواحد والعشرين التي كانت مع المال، فيبقى تسعة وأربعون وهو المالُ.

وكلّ ما أتاك من مالين أو أكثر أو أقل، فارْدُدْه إلى مال واحد كَنَحْوِ ما بيّنّا في الباب الأوّل.

فأمّا علّة مال وأحدٍ وعشرين درهماً تعدل عشرة أجذار: الباب الذي يخرجك إلى الجذر، فقد يكون المال أكثرَ من الدراهم التي معه، أو أقل منها. / وليس يكون المال مثل الدراهم التي معه إلاّ أن يكون ضرب نصف الأجذار في مثلها مثلَ الدراهم التي مع المال. فيكون حينئذ المال مثل الدراهم التي معه. وسنبيّن جميع ذلك ونشرحه إن شاء الله.

فنجعل الدراهم التي مع المال — وهي واحد وعشرون درهماً — أوّلاً أكثر من المال. ونجعل المال سطحاً مربّعاً عليه ا ب ج د ونزيد عليه الواحد والعشرين التي معه وهو سطح ا ب ه ل. فسطح ا ب ه ل أكثر من سطح ا ب ج د لأنّا جعلناه كذلك. فخطّ ب ل أطول من خطّ ب د. وسطح ه د عشرة أجذار سطح ا ب ج د، فخطّ د ل عشرة. وسطح ه ب من ضرب ل ب في ب ا وب ا مثل ب د. فضرب ل ب في ب د هو سطح ه ب، وسطح ه ب واحد وعشرون، فضرب ل ب في ب د واحد وعشرون. فنقسم خطّ ل د بنصفين على نقطة ح. فخطّ ل د قد قُسِم بنصفين على نقطة ح وبقسمين مختلفين على

3 وأما ... المال: (fol. 73r, 229) Sed capitulum quod te ducit ad sciendum censum — 12 الدراهم: الدرهم / أو أقلّ: وأقل — 13-14 في مثلها: والأفصح "في مثله"، ولكنه يعني ما تبقى من عدد الأجذار بعد التصنيف فأخذ بصيغة الجمع وسنذكرها كما هي في كل الكتاب — 14 الدراهم (الثانية): الدرهم.

<point> *B*, donc le produit de *LB* par *BD* plus *HB* par elle-même est égal à *HD* par elle-même, d'après ce qu'a dit Euclide dans le livre deux de son ouvrage[19]. Mais la droite *HD* par elle-même est vingt-cinq, car la droite *HD* est cinq, et la droite *LB* par *BD* c'est vingt et un ; il reste la droite *HB* par elle-même, quatre ; la droite *HB* est donc racine de quatre, ce qui est deux. Et la droite *HD* est cinq ; il reste la droite *BD*, trois, ce qui est la racine du *carré*, et le *carré* est neuf.

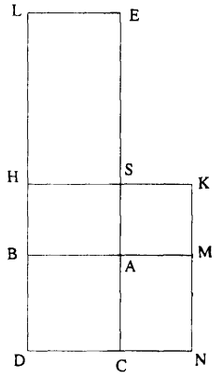
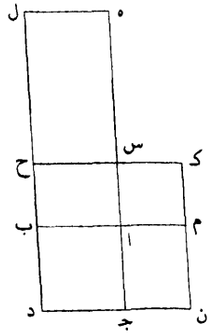


Fig. 4

Si tu veux que nous montrions d'une manière évidente ce que nous avons dit, alors nous faisons sur la droite *HD* une surface carrée, soit la surface *DK*. La surface *KD* est donc vingt-cinq, [8r] car la droite *HD* est cinq. Mais la surface *HC* est égale à la surface *HE*, car la droite *LH* est égale à la droite *HD*, et la surface *AH* est égale à la surface *AN*, donc les trois surfaces *AH*, *AN*, *AD* font vingt et un. Il reste la surface *AK* qui est quatre, un carré. Car la droite *KN* est égale à la droite *KH* et la droite *HS* est égale à la droite *NM*. Il reste la droite *KS* égale à la droite *KM*. Donc la droite *MK* est deux ; mais elle est égale à la droite *HB*, la droite *HB* est donc deux, et il reste la droite *BD*, trois, et elle est la racine du *carré* et le *carré* est neuf. Ce qu'il fallait démontrer.

[19] *Éléments*, II.5.

ب، فضربُ ل ب في ب د وَح ب في نفسه مثل ح د في نفسه كما قال أقليدس في المقالة الثانية من كتابه. وخطُّ ح د في نفسه خمسة وعشرون؛ لأنّ خطّ ح د خمسة، وخطّ ل ب في ب د واحد وعشرون، فيبقى خطّ ح ب في نفسه أربعة، فخطّ ح ب جذر أربعة، وهو اثنان. وخطّ ح د خمسة، فيبقى خطّ ب د ثلاثة، وهو جذر المال، والمال تسعة.



وإن أحببت أن نبيّن ما قلنا عِياناً: فإنّا نجعل على خطّ ح د سطحاً مربّعاً، وهو سطح د ك، فسطح ك د خمسة وعشرون، / لأنّ خطّ ح د خمسة. ٨-و
وسطح ح ج مثل سطح ح ه، لأنّ خطّ ل ح مثل خطّ ح د، وسطح ا ح مثل سطح ا ن. فسطوح ا ح ا ن ا د الثلاثة واحد وعشرون فيبقى سطح ا ك، وهو أربعة، مربّعاً لأنّ خطّ ك ن مثل خطّ ك ح وخطّ ح س مثل خطّ ن م، فيبقى خطّ ك س مثل خطّ ك م، فخطّ م ك اثنان، وهو مثل خطّ ح ب. فخطّ ح ب اثنان وبقي خطّ ب د ثلاثة وهو جذر المالِ، والمالُ تسعة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

2 المقالة الثانية: انظر الشكل الخامس في ترجمة الحجاج: "كل خط مستقيم يقسم بقسمين متساويين، ويقسم أيضًا بقسمين مختلفين، فإن السطح الذي يحيط به القسمان المختلفان مع مربع الخط الذي بين نقطتي القسمين مساوٍ لمربع نصف الخط" (ص. 22-24) — 10 مربّعاً: مربع — 12 ب د: في الهامش.

On a montré dans ce problème que, si on multiplie la moitié des racines par elle-même, alors ce produit est plus grand que les dirhams qui sont avec le *carré* de la surface *AK*.

Posons ensuite les dirhams qui sont avec le *carré* et qui sont vingt et un dirhams, plus petits que le *carré*. Posons le *carré* une surface carrée, soit la surface *ABCD* et ajoutons-lui le vingt et un qui est avec lui, soit la surface *ABEF*. Donc la surface *AD* est plus grande que la surface *AF*, car nous l'avons posée ainsi, la droite *DB* est plus longue que la droite *BF* et la surface *ED* est dix racines de la surface *AD* ; donc la droite *DF* est dix et le produit de la droite *FB* par la droite *BD* est vingt et un. Partageons la droite *FD* en deux moitiés au <point> *H* ; la droite *FD* a donc été partagée en deux moitiés au point *H* et en deux parties différentes au point *B*. Donc le produit de *FB* par *BD* plus *BH* par elle-même est égal à *HD* par elle-même, d'après ce qu'a dit Euclide dans le deuxième livre de son ouvrage[20]. Mais le produit de *HD* par elle-même est vingt-cinq et le produit de *DB* par *BF* est vingt et un ; il reste le produit de *BH* par elle-même quatre, la droite *BH* est donc la racine de quatre, c'est-à-dire deux. Nous l'ajoutons à la droite *HD*, qui est cinq ; on a donc la droite *BD* sept, ce qui est la racine du *carré*, et le *carré* est quarante-neuf. On a donc montré que, si nous posons le *carré* plus petit que les dirhams qui sont avec lui, alors le problème est résolu par différence, et si nous le posons plus grand que les dirhams qui sont avec lui, il est résolu par somme.

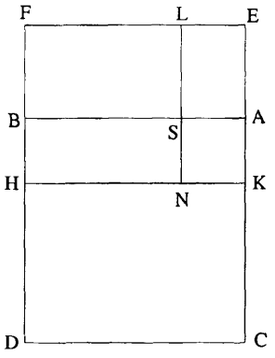


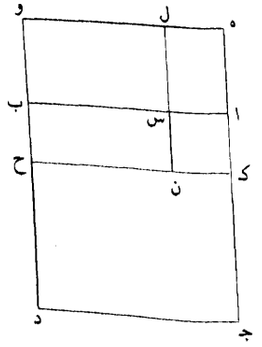
Fig. 5

Si tu veux aussi que nous montrions de manière évidente ce que nous avons dit, alors nous [8^{v}] faisons sur la droite *FH* une surface carrée *FN*. Et nous prolongeons la droite *HN* jusqu'au point *K*. La surface *BN* est donc égale à la surface *NE* car la droite *NL* est égale à la droite *NH* ; et la droite

[20] *Éléments*, II.5.

وتبيَّن في هذه المسألة أنّ نصف الأجذار إذا ضُرب في مثله، فإنّ ما اجتمع من ذلك أكثر من الدراهم التي مع المال بمثل سطح ا ك.

ثمّ نجعل الدراهمَ التي مع المال — وهي واحدٌ وعشرون درهماً — أقلَّ من المالِ، ونجعل المال سطحاً مربّعاً وهو سطح ا ب ج د، ونضيف إليه الواحد والعشرين التي معه وهو سطح ا ب ه و، فسطح ا د أعظم من سطح ا و، لأنّا جعلناه كذلك. فخطّ د ب أطول من خطّ ب و، وسطح ه د عشرة أجذار سطح ا د. فخطّ د و عشرة، وضرب خطّ و ب في خطّ ب د واحد وعشرون. فنقسم خطّ و د بنصفين على ح، فخطّ و د قد قُسم بنصفين على نقطة ح وبقسمين مختلفين على نقطة ب. فضرب و ب في ب د وَب ح في نفسه مثل ح د في نفسه، كما قال أقليدس في المقالة الثانية من كتابه، وضرب ح د في نفسه خمسة وعشرون، وضرب د ب في ب و واحد وعشرون. فبقي ضرب ب ح في نفسه أربعة، فخطّ ب ح جذر أربعة وهو اثنان. فنزيده على خطّ ح د — وهو خمسة — فيكون خطّ ب د سبعة وهو جذر المالِ، والمالُ تسعة وأربعون. فقد تبيّن أنّ المال إذا جعلناه أقلَّ من الدراهم التي معه خَرَجْتَ بالنقصان، وإن جعلناه أكثر من الدراهم التي معه خَرَجْتَ بالزيادة.



٨-ظ فإن أحببت أيضاً أن نبيّن ما قلناه عياناً: فإنّا / نجعل على خطّ و ح سطحاً مربّعاً عليه و ن، ونخرج خطّ ح ن على استقامةٍ إلى نقطة ك، فسطحُ ب ن مثل سطح ن ه لأنّ خطّ ن ل مثل خطّ ن ح. <وخط ب ح مثل خط

1 فإن: ان — 9 نقطة: نقط — 10 في نفسه: في الهامش / المقالة الثانية: انظر الشكل الخامس (الصفحة السابقة).

BH est égale à la droite *NK*, car la surface *AN* est un carré, comme nous allons le montrer. Mais la surface *FN* est vingt-cinq, donc la surface *FS* plus la surface *NE* sont vingt-cinq ; mais la surface *AF* est vingt et un, il reste la surface *AN*, quatre, et c'est un carré, car la droite *AB* est égale à la droite *AC*, la droite *KC* est égale à la droite *HD*, la droite *HD* est égale à la droite *HF*, la droite *HF* est égale à la droite *HN* et la droite *HN* est égale à la droite *BS*, donc la droite *BS* est égale à la droite *KC* ; il reste la droite *AK* égale à la droite *AS*. Donc la surface *AN* est un carré et la droite *SN* est deux ; mais la droite *SN* est égale à la droite *BH*, donc la droite *BH* est deux. Ajoutons à celle-ci la droite *HD*, qui est cinq ; la droite *BD* sera sept ; c'est la racine du *carré*, et le *carré* est quarante-neuf[21].

On a aussi montré dans ce problème que, si on multiplie la moitié des racines par elle-même, alors le produit est plus grand que les dirhams qui sont avec le *carré* de la surface *AN*. Ce qu'il fallait démontrer.

Ainsi nous avons montré que, si nous posons le *carré* plus petit que le nombre qui est avec lui, le problème est résolu par différence, et si nous le posons plus grand que les dirhams, le problème est résolu par somme.

On a également montré, d'après ce que nous avons décrit pour les deux figures à la fois, c'est-à-dire la figure de la différence et la figure de la somme, que, lorsque nous multiplions la moitié des racines par elle-même – [9r] dans ce mode parmi les trois –, de façon que la somme soit plus petite que les dirhams qui sont avec le *carré*, alors le problème sera impossible, car nous avons montré dans les deux figures à la fois que le produit de la moitié du nombre des racines par elle-même est plus grand que les dirhams qui sont avec le *carré*. Et nous avons montré que, si on multiplie la moitié du nombre des racines par elle-même de sorte que ce qu'on obtient soit égal aux dirhams qui sont avec le *carré*, alors le *carré* sera égal à ces mêmes dirhams et la racine du *carré* sera égale à la moitié des racines.

[21] Voir Note complémentaire [1].

ن ك لأن سطح ا ن مربع، كما سنبين>. وسطح و ن خمسة وعشرون، فسطح و س وسطح ن ه خمسة وعشرون، وسطح ا و واحد وعشرون، فيبقى سطح ا ن أربعة، وهو مربّع لأنّ خطّ ا ب مثل خطّ ا ج وخطّ ك ج مثل خطّ ح د وخطّ ح د مثل خطّ ح و، وخطّ ح و مثل خطّ ح ن وخطّ ح ن مثل خطّ ب س، فخطّ ب س مثل خطّ ك ج، وبقي خطّ ا ك مثل خطّ ا س. فسطح ا ن مربّع، فخطّ س ن اثنان، وخطّ س ن مثل خطّ ب ح، فخطّ ب ح اثنان. فنـــزيد عليه خطّ ح د وهو خمسة، فيصير خطّ ب د سبعة وهو جذر المال، والمال تسعة وأربعون.

وتبين أيضاً في هذه المسألة أنّ نصف الأجذار إذا ضُرب في مثله، فإن ما اجتمع من ذلك أكثر من الدراهم التي مع المال بمثل سطح ا ن؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فقد بيّنا أنّا إذا جعلنا المال أقلّ من العدد الذي معه خرجت المسألة بالنقصان، وإن جعلناه أكثر من الدراهم خرجت المسألة بالزيادة.

وتبيّن أيضاً ممّا وصفناه في الشكلَين جميعاً – أعني شكل النقصان وشكل الزيادة – أنّا متى ضربنا نصف الأجذار في مثله / في هذا الضرب من الثلاثة الضروب، فكان مبلغ ذلك أقلّ من الدراهم التي مع المال، فالمسألة تستحيل؛ لأنّا قد بيّنا في الشكلَين جميعاً أن ضربَ نصف الأجذار في مثلها أكثر من الدراهم التي مع المال. وبيّنّ أنّ نصف الأجذار إذا ضُرب في مثله فكان ما اجتمع من ذلك مثل الدراهم التي مع المال، كان المالُ مثلَ الدراهم بعينها وجذر المالِ مثل نصف الأجذار.

٩-و

1 خمسة وعشرون: خمسة وعشرين – 2 وسطح ن ه: كتب في الهامش "وسطح ه" – 6 اثنان: اثنين / اثنان: اثنين – 8 انظر التعليق رقم [1] – 9 فإن: ان – 16 فالمسألة تستحيل: questio est falsa et impossibilis – 19 كان: ان.

Nous représentons cela par un problème que nous posons « un *carré* plus vingt-cinq dirhams est égal à dix racines ». Posons le *carré* une surface carrée *ABCD*, ajoutons à celle-ci les vingt-cinq dirhams qui sont avec lui, soit la surface *ABEF* ; la surface *CF* tout entière est donc dix racines de la surface *ABCD*. Donc la droite *DF* est dix. Si nous partageons la droite *DF* en deux moitiés, alors la division ne peut avoir lieu qu'au point *B*, ou au-dessus du point *B*, ou au-dessous du point *B*. Posons-la d'abord au-dessous du point *B* si cela est possible. Faisons-la au point *H* ; la droite *FD* a donc été divisée en deux moitiés au point *H* et en deux parties différentes au point *B*. Le produit de *DB* par *BF* plus *BH* par elle-même est égal à *HF* par elle-même, d'après ce qu'a mentionné Euclide dans le deuxième livre[22]. Mais le produit de *HF* par elle-même est vingt-cinq, donc le produit de *DB* par *BF* plus *BH* par elle-même est vingt-cinq. Mais le produit de *DB* par *BF* est la surface *BE*, car la droite *DB* est égale à la droite *BA* et la surface *BE* est vingt-cinq, donc le produit de *DB* par *BF* est vingt-cinq ; or ceci est absurde et ne peut pas être, donc la moitié de la droite *FD* ne peut tomber au point *H*.

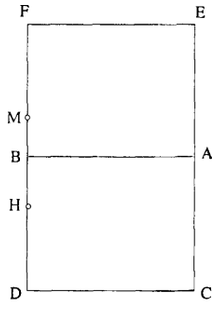
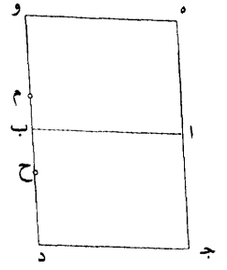


Fig. 6

Je dis qu'elle ne peut pas non plus tomber au-dessus de *B*. Si c'était possible, qu'elle tombe au point *M*. Donc la droite *FD* a été partagée en deux moitiés en *M*, et en deux parties différentes en *B*. Le produit de *DB* par *BF*, plus *BM* par elle-même, est donc vingt-cinq, car il est égal à *MF* par elle-même, et *MF* est cinq ; [9^{v}] mais le produit de *DB* par *BF* est vingt-cinq, ce qui est absurde et ne peut pas être. On a ainsi montré que la moitié de la droite *DF* ne peut se trouver ni au-dessus de *B*, ni au-dessous de lui ;

[22] *Éléments*, II.5.

ونمثّل ذلك في مسألة ونجعلها: مالاً وخمسةً وعشرين درهماً تعدل عشرة أجذار. فنجعل المال سطحاً مربّعاً، عليه ا ب ج د، ونضيف إليه الخمسة والعشرين الدراهم التي معه وهي سطح ا ب ه و. فجميعُ سطح ج و عشرة أجذار سطح ا ب ج د، فخطّ د و عشرة. فإذا قسمنا خطّ د و بنصفين، فليس يخلو من أن يقع القسمُ على نقطة ب أو خارجاً منها أو داخلاً عنْها. فنجعله أوّلاً داخلاً من نقطة ب إن كان يمكن، ونُصيّره على نقطة ح. فخطّ و د قد قُسم بنصفين على نقطة ح وبقسمين مختلفين على نقطة ب. فضرب د ب في ب و، وب ح في نفسه، مثل ح و في نفسه، كما ذكر أقليدس في المقالة الثانية. وضربُ ح و في نفسه خمسةٌ وعشرون، فضرب د ب في ب و، وَب ح في نفسه خمسة وعشرون. وضربُ د ب في ب و هو سطح ب ه لأنّ خطّ د ب مثلُ خطّ ب ا وسطح ب ه خمسة وعشرون، فضربُ د ب في ب و خمسة وعشرون. هذا خُلف لا يمكن، فليس يقع نصف خطّ و د على نقطة ح.



وأقول: إنه لا يمكن أن يقع خارجاً من ب. فإن كان يمكن فلْيقع على نقطة م. فخطّ و د قد قُسم بنصفين على م وبقسمين مختلفين على ب، فضرب د ب في ب و وَب م في نفسه خمسة وعشرون، لأنّه مثلُ م و في نفسه، وم و خمسة. / وضرب د ب في ب و خمسة وعشرون. هذا خُلف لا يمكن. فقد تبيّن ٩-ظ أنّ نصفَ خطّ د و لا يقع خارجاً من ب ولا داخلاً منها. فهو إذاً على نقطة

5 يخلو: يخلوا — 6 داخلاً: في الهامش — 8 المقالة الثانية: انظر الشكل الخامس.

elle est donc au point *B*. La droite *BD* est donc cinq, c'est la racine du *carré*, et le *carré* est vingt-cinq, qui est la surface *AD*. Ce qu'il fallait démontrer.

Quant à la cause du procédé qui te mène au *carré*, nous posons le *carré* la droite *AB* et nous lui ajoutons les dirhams qui sont avec lui, c'est-à-dire vingt et un ; soit la droite *BC*. Donc la droite *AC* est dix racines de la droite *AB*. Construisons sur la droite *AC* une surface carrée, soit le carré *ACDE*, qui est cent fois la droite *AB* multipliée par une des unités de la droite *AB*, car la droite *AC* est dix racines de la droite *AB*. Mais dix racines d'une chose multipliées par elles-mêmes sont égales à cette chose multipliée cent fois. Posons la surface *AH* égale au carré *AE*. Donc *AH* est égale à la droite *AB* multipliée cent fois par l'unité, la droite *AM* est donc cent ; achevons la surface *AN*, donc la surface *BN* est deux mille cent, car la droite *BC* est vingt et un et la droite *CN* cent. La surface *BN* est donc deux mille cent. Faisons la surface *MO* égale à la surface *AE* ; mais la surface *AE* est égale à la surface *AH*, donc la surface *AH* est égale à la surface *MO*. Nous ôtons communément la surface *IH*, il reste la surface *AK* égale à la surface *KN*. Posons la surface *KC* commune, donc la surface *BN* tout entière est égale à la surface *AO* tout entière. Mais la surface *BN* est deux mille cent, donc la surface *AO* est deux mille cent. Or elle est le produit de *CO* par *ON*, car *ON* est égale à [10r] *OI*. Partageons *CN* en deux moitiés au point *L*, donc la droite *CN* a été partagée en deux moitiés au <point> *L* et en deux parties différentes au <point> *O* ; le produit de *CO* par *ON* plus *LO* par elle-même est donc égal à *LC* par elle-même. Mais *LC* par elle-même, c'est deux mille cinq cents. Et la droite *CO* par la droite *ON* est deux mille cent. Il reste la droite *LO* par elle-même, quatre cents, et *LO* est vingt. Mais *LN* est cinquante. Donc il reste

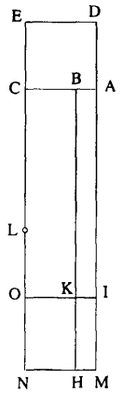
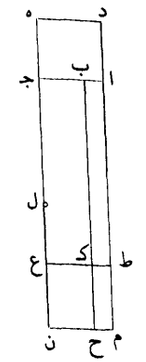


Fig. 7

ب. فخطّ ب د خمسة، وهو جذر المال، والمال خمسة وعشرون وهو سطح ا د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وأمّا العلّة للباب الذي يُخرجك إلى المال، فإنّا نجعل المالَ خطّ ا ب ونضيف إليه الدراهم التي معه، وهي واحد وعشرون، وهي خطّ ب ج، فخطّ ا ج عشرة أجذار خطّ ا ب. فنعمل على خطّ ا ج سطحاً مربّعاً، وهو مربّع ا ج د ه، وهو مائة مرةٍ مثل خطّ ا ب مضروباً في واحدٍ من الآحاد التي في خطّ ا ب لأنّ خطّ ا ج عشرة أجذارِ خطّ ا ب. وعشرةُ أجذار الشيء مضروباً في مثله مثلُ ذلك الشيء مائة مرةٍ. ونجعل سطح ا ح مثل مربّع ا ه، فَا ح مثل خطّ ا ب مضروباً في واحدٍ مائةَ مرةٍ، فخطّ ا م مائةٌ. ونتمُّ سطح ا ن، فسطح ب ن ألفان ومائة، لأنّ خطّ ب ج واحد وعشرون، وخطّ ج ن مائة، فسطح ب ن ألفان ومائة. ونجعل سطح م ع مثلَ سطح ا ه، وسطحَ ا ه مثلَ سطح ا ح، فسطحُ ا ح مثلُ سطح م ع، فنُلقي سطح ط ح المشترك، فيبقى سطح ا ك مثل سطح ك ن. ونجعل سطح ك ج مشتركاً، فجميع سطح ب ن مثل جميع سطح ا ع. وسطحُ ب ن ألفان ومائة، فسطح ا ع ألفان ومائة، وهو من ضربِ ج ع في ع ن لأنّ ع ن مثلُ / ع ط. فنقسم ج ن بنصفين على نقطة ل، فخطّ ج ن قد قُسِم بنصفين على ل وبقسمين مختلفين على ع. فضرب ج ع في ع ن ول ع في نفسه مثلُ ل ج في نفسه. ول ج في نفسه ألفان وخمسمائة، وخطّ ج ع في خطّ ع ن ألفان ومائة. فيبقى خطّ ل ع في نفسه أربعمائة ول ع عشرين، ول ن خمسين، فيبقى ع ن ثلاثين. وخطّ ع ن مثل خطّ ع ط



١٠-و

10 ألفان: ألفين - 11 ألفان: ألفين - 15 ألفان: ألفين - 19 ألفان: ألفين - 20 ألفان: ألفين - 21 ثلاثين: ثلاثون.

ON trente. Mais la droite *ON* est égale à la droite *OI* et la droite *OI* est égale à la droite *AC*, donc la droite *AC* est trente ; mais la droite *CB* est vingt et un ; il reste la droite *AB* neuf, ce qui est le *carré*. Ce qu'il fallait démontrer.

Nous avons donc montré la cause de la soustraction dans ce procédé et nous allons le montrer par la somme, si Dieu Très-Haut le veut. Nous posons la division de la droite *CN* en deux moitiés à l'intérieur de la surface *IN* au point *L*, si nous posons le *carré* plus grand que les dirhams qui sont avec lui, comme nous l'avons montré pour la cause du procédé qui mène à la racine. Le produit de *CO* par *ON* plus *OL* par elle-même est égal au produit de *LC* par elle-même. Mais *LC* par elle-même est deux mille cinq cents, et *CO* par *ON* est deux mille cent. Il reste *OL* par elle-même quatre cents. Donc *OL* est vingt ; mais *LN* est cinquante, donc *NO* est soixante-dix ; mais *NO* est égale à *IO* et *IO* est égale à *AC*, donc *AC* est soixante-dix ; mais *BC* est vingt et un, il reste donc *AB* quarante-neuf, c'est le *carré*. Ce qu'il fallait démontrer.

Il est clair, d'après ce que nous avons décrit, que, si tu multiplies par elles-mêmes les racines qui sont égales au *carré* plus le nombre – dans ce mode parmi les trois –, si ensuite tu prends la moitié du produit et que tu la multiplies par elle-même, et que cela est égal au produit des dirhams qui sont avec le *carré* par le produit des racines par elles-mêmes, alors on a le *carré* [10^{v}] égal aux dirhams qui sont avec lui. Mais si tu multiplies les dirhams par le produit des racines par elles-mêmes, et si cela était plus grand que la moitié du produit obtenu de la multiplication de la moitié des racines par elle-même par lui-même, alors le problème est impossible. Nous avons donc expliqué tout ce que ce procédé contient. Il n'y a de puissance qu'en Dieu.

Les racines plus le nombre égaux à des *carrés*, c'est par exemple lorsque tu dis : « trois racines plus quatre en nombre sont égaux à un *carré* ». Dans ce problème également il y a deux procédés, l'un te mène à la racine du *carré* et l'autre te mène au *carré*. Je vais les donner tous les deux et montrer leurs causes selon des figures géométriques, si Dieu Très-Haut le veut.

وخطّ ع ط مثل خطّ ا ج، فخطّ ا ج ثلاثون. وخطّ ج ب واحدٌ وعشرون، فيبقى خطّ ا ب تسعة وهو المال؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فقد بيّنّا علّة النقصان في هذا الباب ونُبيّنه بالزيادة إن شاء الله تعالى. وهو أن نجعل قسمة خطّ ج ن بنصفين داخل سطح ط ن على نقطة ل، إذا جعلنا المالَ أكثر من الدراهم التي معه، على ما بيّنا في علّة الباب الذي يخرج إلى الجذر. فضرب ج ع في ع ن وَع ل في نفسه مثلُ ضرب ل ج في نفسه؛ ول ج في نفسه ألفان وخمسمائة وج ع في ع ن ألفان ومائة، فيبقى ع ل في نفسه أربعمائة فَ ع ل عشرون، وَل ن خمسون فَ ن ع سبعون، وَن ع مثل ط ع وَط ع مثل ا ج فَ ا ج سبعون، وب ج واحد وعشرون، فيبقى ا ب تسعة وأربعين، وهو المال؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وبيّنٌ ممّا وصفنا أنّك إذا ضربت الأجذار التي تعدل المال والعدد — في هذا الضرب من الضروب الثلاثة [المضروبة] — في مثلها، ثم أخذت نصف ما اجتمع، وضربته في مثله، فصار مثل ضرب الدراهم، التي مع المال، فيما اجتمع من ضرب الأجذار في مثلها، أن المالَ / هو مثل الدراهم التي معه. فإن كنت ١٠ - ظ [إذا] ضَرَبْتَ الدراهمَ فيما اجتمعَ من ضرب الأجذار في مثلها، وكان ذلك أكثر من نصف ما اجتمع من ضرب نصف الأجذار في مثله، أنّ المسألة تستحيل. فقد شرحنا جميع ما <في> هذا الباب، ولا قوّة إلا بالله.

وأمّا الجذور والعدد التي تعدل الأموال فنحو قولك: "ثلاثة أجذار وأربعة من العدد تعدل مالاً". ففي هذه المسألة أيضاً بابان: أحدهما يخرجك إلى جذر المال، والآخر يخرجك إلى المال. وسآتي بهما جميعاً، ونبيّن عِلَلَهُما في أشكال هندسيّة، إن شاء الله تعالى:

1 ثلاثون: ثلاثين — 7 ألفان: ألفين / ألفان: ألفين — 8 عشرون: عشرين / خمسون: خمسين / سبعون: سبعين — 9 سبعون: سبعين — 10 وأربعين: وأربعون — 17 ما: فوق السطر — 19-20 إلى جذر المال: في الهامش.

Procédé qui te mène aux racines : partage en deux moitiés les racines, on a un plus un demi, que tu multiplies par lui-même, on a deux plus un quart, que tu ajoutes à quatre, on a six plus un quart, prends sa racine, deux plus un demi, ajoute-la à la moitié des racines qui est un plus un demi, on a quatre, ce qui est la racine du *carré* et le *carré* est seize[23].

Procédé qui te mène au *carré* : tu multiplies les trois racines par elles-mêmes, on a neuf ; tu multiplies ce neuf par les quatre dirhams qui sont avec les racines, on a trente-six ; tu partages ensuite le neuf en deux moitiés, on a quatre et demi ; multiplie-le par lui-même, on a vingt et un quart ; ajoute-le au trente-six, on a cinquante-six et un quart ; prends sa racine, on a sept et un demi ; ajoute-le aux quatre plus un demi, qui est la moitié de neuf, et aux quatre dirhams qui étaient avec les racines – ce qui est huit et demi – cela est seize, ce qui est le *carré*.

Et tout ce qui est plus qu'un *carré*, ou moins, ramène-le à un seul *carré*, comme nous l'avons fait dans le premier problème.

Quant à la cause dans ce problème « trois racines plus quatre en nombre égal un *carré* » du procédé qui te mène à la racine, c'est : nous posons le *carré* une surface carrée *ABCD* qui est trois racines et quatre en nombre. Nous coupons ensuite de la surface *AD* la surface *AN*, et nous la supposons trois racines de la surface *AD*. Il est clair, d'après ce que nous avons décrit, que la droite *AE* est trois en nombre, et que la surface [11r] *ED* qui reste est quatre en nombre. Nous partageons la droite *AE* en deux moitiés au point *H*. La droite *AE* a donc été partagée en deux moitiés au <point> *H*, et on a ajouté à sa longueur la droite *EB* ; donc le produit de *AB* par *BE* plus *EH* par elle-même est égal à *HB* par elle-même, d'après ce qu'a dit Euclide dans le second livre[24]. Mais le produit de *AB* par *BE* est quatre, car *AB* est égale à *BD*. Et le produit de *EH* par elle-même est deux plus un quart. Donc le produit de *HB* par elle-même est six plus un quart. La droite *HB* est donc deux plus un demi et la droite *HA* est un plus un demi, donc la droite *AB* est quatre, ce qui est la racine du *carré*, et le *carré* est seize.

[23] $3x + 4 = x^2 \Leftrightarrow 4 = x^2 - 3x$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3x + 4 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}, x - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}, x = 4.$$

[24] *Éléments*, II.6.

فأمّا الباب الذي يخرجك إلى الجذر: فهو أن تنصِّف الأجذار فتكون واحداً ونصفاً. فتضربها في مثلها فتكون اثنين وربعاً، فزدها على الأربعة فتكون ستّة وربعاً، فخذ جذرها: اثنين ونصفاً فَزِدْه على نصف الأجذار وهو واحد ونصف فيكون أربعة، وهو جذر المال، والمالَ ستّة عشر.

وأمّا الباب الذي يخرجك إلى المال: فهو أن تضرب الثلاثة الأجذار في مثلها فتكون تسعة، فتضرب هذه التسعة في الأربعة الدراهم التي مع الأجذار فتكون ستّة وثلاثين، ثم تنصِّف التسعة فتكون أربعةً ونصفاً، فاضربها في مثلها فتكون عشرين وربعاً، فَزِدْها على الستّة والثلاثين فتكون ستّة وخمسين وربعاً، فخُذ جذرها فتكون سبعة ونصفاً، فَزِدْها على الأربعة والنصف – التي هي نصف التسعة – والأربعة الدراهم التي كانت مع الأجذار – وذلك ثمانية ونصف – فذلك ستّة عشر وهو المال.

وكلّ ما كان أكثر من مال أو أقلّ فارْدُدْه إلى مالٍ واحد كنحو ما عملنا في المسألة الأولى.

فأما العلّة في هذه المسألة وهي: "ثلاثة أجذار وأربعة من العدد تعدل مالاً"، للباب الذي يخرجك إلى الجذر، فإنّا نجعل المالَ سطحاً مربّعاً على ا ب ج د وهو ثلاثة أجذار وأربعة من العدد. ثم نقطع من سطح ا د سطح ا ن ونجعله ثلاثة أجذارِ سطح ا د. فبيِّنٌ على ما وصفنا أن خطّ ا ه ثلاثة من العدد وأنّ سطح / ه د الباقي أربعة من العدد. فنقسم خطّ ا ه بنصفين على نقطة ح، ١١-و فخطّ ا ه قد قُسم بنصفين على ح وزِيد في طوله خطّ ه ب، فضرب ا ب في ب ه، وه ح في نفسه مثل ح ب في نفسه، كما قال أقليدس في المقالة الثانية. وضرب ا ب في ب ه أربعة، لأنّ ا ب مثل ب د، وضرب ه ح في نفسه اثنان وربع. فضرب ح ب في نفسه ستّة وربع. فخطّ ح ب اثنان ونصف وخطّ ح ا واحد ونصف. فخطّ ا ب أربعة وهو جذر المال، والمال ستّة عشر.

3 ونصفاً: ونصف – 10 الدراهم: الدرهم – 12 وكلّ ما: وكلّما – 15 إلى الجذر: في الهامش / فإنّا: انّا – 20 المقالة الثانية: انظر الشكل السادس (هامش ص. 255) – 21 في نفسه: في الهامش / اثنان: اثنين.

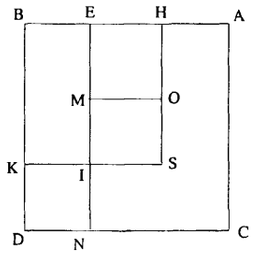
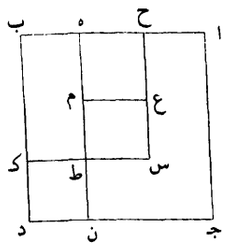


Fig. 8

Si nous construisons sur la droite *HB* une surface carrée *HK*, si nous posons la droite *MI* égale à la droite *ND* et si nous menons la droite *MO* parallèle à la droite *EH*, alors il est clair que la surface *MS* est égale à la surface *ID* car la droite *AB* est égale à la droite *DB* et la droite *HB* est égale à la droite *BK* ; il reste la droite *KD* égale à la droite *AH*. Mais la droite *AH* est égale à la droite *HE* et la droite *HE* est égale à la droite *OM*, donc la droite *OM* est égale à la droite *KD* et la droite *MI* est égale à la droite *ND*. La surface *OI* est donc égale à la surface *ID*. Posons la surface *EK* commune. La surface *ED* tout entière est donc égale à la somme des surfaces *OI* et *IB* ; mais la surface *ED* est quatre, donc la surface *OI* plus la surface *IB* est quatre. Mais il est clair que la surface *HM* est un carré, car la droite *HB* est égale à la droite *IE*, et la droite *MI* est égale à la droite *EB* ; il reste la droite *HE* égale à la droite *EM*. Mais la droite *HE* est un plus un demi. Donc la surface *HM* est deux plus un quart. La surface *HK* est donc tout entière six plus un quart. La droite *HB* est donc deux plus un demi et la droite *AH* est un plus un demi ; la droite *AB* est donc quatre, ce qui est la racine du *carré*, et le *carré* est seize.

Et il y a une autre forme qui mène à cela : posons le *carré* une surface carrée *ABCD*, ce qui est trois racines et quatre en nombre. Coupons de la droite *AC* une droite *AH* et posons-la un plus un demi, et menons la droite *HM* parallèle à la droite *AB* ; la surface *AM* est une racine plus la moitié d'une racine. Posons la droite *OD* également un plus un demi et menons *OI* parallèle à *BD* ; la surface *OB* est donc aussi une racine plus une demi-racine. Il est clair que la surface *AM* plus la surface [11^{v}] *ND* plus la surface *NB* est trois racines ; il reste la surface *HO*, quatre en nombre, plus la surface *NB*. Mais la surface *NB* est deux plus un quart, donc la surface *HO* est six plus un quart. La droite *CH* est donc deux plus un demi et la droite *HA*



وإن عملنا على خطّ ح ب سطحاً مربّعاً عليه ح ك وجعلنا خطّ م ط مثل خطّ ن د، وأخرجنا خطّ م ع موازياً لخطّ ه ح، فبيِّنٌ أنّ سطحَ م س مثل سطح ط د، لأنّ خطّ ا ب مثل خطّ د ب وخطّ ح ب مثل خطّ ب ك، وبقي خطّ ك د مثلَ خطّ ا ح. وخطُّ ا ح مثلُ خطّ ح ه، وخطّ ح ه مثل خطّ ع م، فخطّ ع م مثل خطّ ك د، وخطّ م ط مثل خطّ ن د. فسطح ع ط مثل سطح ط د. ونجعل سطح ه ك مشتركاً. فجميعُ سطح ه د مثل جميع سطحَي ع ط ط ب؛ وسطح ه د أربعة، فسطح ع ط وسطح ط ب أربعة. وبيِّنٌ أنّ سطح ح م مربّع لأنّ خطّ ح ب مثل خطّ ط ه، وخطّ م ط مثل خطّ ه ب؛ فبقي خطّ ح ه مثل خطّ ه م. وخطّ ح ه واحد ونصف، فسطح ح م اثنان وربع؛ فجميع سطح ح ك ستّة وربع، فخطّ ح ب اثنان ونصف وخطّ ا ح واحد ونصف، فخطّ ا ب أربعة، وهو جذر المال، والمال ستّة عشر.

وله صورة أُخرى تؤدّي إلى هذا: وهو أن نجعل المال سطحاً مربّعاً عليه ا ب ج د وهو ثلاثة أجذار وأربعة من العدد. ونقطع من خطّ ا ج خطّ ا ح ونجعله واحداً ونصفاً. ونخرج خطّ ح م موازياً لخطّ ا ب. فسطح ا م جذر ونصف جذر. ونجعل خطّ ع د أيضاً واحداً ونصفاً، ونخرج ع ط موازياً ا ب د. فسطح ع ب أيضاً جذر ونصف جذر. فبيِّنٌ أنّ سطحَ ا م وسطح / ن د وسطح ن ب ثلاثة أجذار وبقي سطح ح ع أربعة من العدد ومثل سطح ن ب. وسطح ن ب اثنان وربع، فصار سطح ح ع ستّة وربعاً. فخطّ ج ح ١١-ظ

9 اثنان: اثنين — 15 واحداً ونصفاً: واحد ونصف — 18 اثنان: اثنين / وربعاً: وربع.

est un plus un demi. Donc la droite *AC* tout entière est quatre, ce qui est la racine du *carré*, et le *carré* est seize. Ce qu'il fallait démontrer.

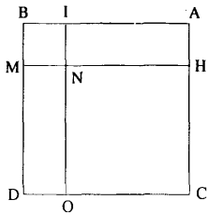


Fig. 9

La cause du procédé qui te mène au *carré* : nous posons le *carré* la droite *AB*, donc la droite *AB* est trois racines plus quatre en nombre ; nous posons la droite *CB* quatre en nombre. Il reste la droite *AC* trois racines de la droite *AB*. Nous construisons ensuite sur la droite *AC* une surface carrée *ACDE* qui est neuf fois la droite *AB* multipliée par un. Nous posons la surface *AH* égale au carré *AE*. Il est clair que la droite *AN* est neuf, et elle est égale à la droite *CK*. La droite *CK* est donc neuf et la droite *CB* est quatre. La surface *CH* est donc trente-six. Nous coupons de la droite *AD* une droite égale à *AN*, soit la droite *AO*, et nous menons la droite *OL* parallèle à la droite *DE* ; la surface *OC* est donc égale à la surface *AK*. Mais la surface *AE* était égale à la surface *AH*. Il reste la surface *OE* égale à la surface *KB*. Mais la surface *KB* est trente-six, donc la surface *OE* est trente-six, et la droite *OA* est neuf, car elle est égale à la droite *AN*. Partageons la droite *OA* en deux moitiés au point [12r] *M* ; la droite *OA* a donc été partagée en deux moitiés au point *M* et sa longueur a été augmentée de la droite *OD*. Le produit de *AD* par *DO*, plus *OM* par elle-même, est égal à *MD* par elle-même, d'après ce qu'a dit Euclide dans le livre deux[25]. Mais le produit de *AD* par *DO* est égal à la surface *OE*, car *AD* est égal à *DE*, et la surface *OE* est trente-six. Le produit de *AD* par *DO* est donc trente-six et le produit de *OM* par

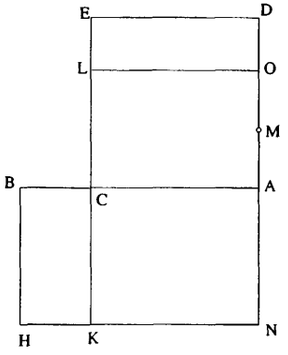
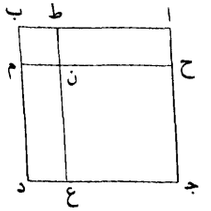


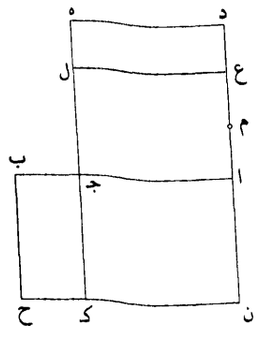
Fig. 10

[25] *Éléments*, II.6.

اثنان ونصف، وخطّ ح ا واحد ونصف، فخطّ ا جـ كلّه أربعة وهو جذر المال، والمال ستّة عشر؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



وأمّا العلّة للباب الذي يخرجك إلى المال، فإنّا نجعل المالَ خطّ ا ب، فخطّ ا ب ثلاثة أجذار وأربعة من العدد. ونجعل خطّ جـ ب أربعة من العدد، فيبقى خطّ ا جـ ثلاثة أجذارٍ خطّ ا ب. ثم نعمل على خطّ ا جـ سطحاً مربّعاً عليه ا جـ د ه وهو تسعة أمثال خطّ ا ب مضروباً في واحد. ونجعل سطح ا ح مثل مربّع ا ه. فبيّنٌ أنّ خطّ ا ن تسعة وهو مثل خطّ جـ ك، فخطّ جـ ك تسعة وخطّ جـ ب أربعة. فسطح جـ ح ستّة وثلاثون. فنقطع من خطّ ا د مثلَ خطّ ا ن وهو خطّ ا ع، ونخرج خطّ ع ل يوازي خطّ د ه. فسطح ع جـ مثلُ سطح ا ك. وقد كان سطحُ ا ه مثلَ سطح ا ح، فبقي سطح ع ه مثل سطح ك ب، وسطح ك ب ستّة وثلاثون فسطح ع ه ستّة وثلاثون، وخطّ ع ا تسعة لأنّه مثل خطّ ا ن. فنقسم خطّ ع ا بنصفين على نقطة / م، ١٢ - و فخطّ ع ا قد قُسم بنصفين على نقطة م وزِيدَ في طوله خطّ ع د. فضرْبُ ا د في د ع وَع م في نفسه مثل م د في نفسه، كما قال أقليدس في المقالة الثانية. وضرْبُ ا د في د ع هو مثل سطح ع ه لأنّ ا د مثل د ه وسطح ع ه ستّة وثلاثون. فضرْب ا د في د ع ستّة وثلاثون وضرب ع م



16 المقالة الثانية: انظر الشكل السادس (هامش ص. 255).

elle-même est vingt plus un quart. Nous les additionnons, on a cinquante-six et un quart. Le produit de *MD* par elle-même est donc cinquante-six et un quart, donc la droite *MD* est sept plus un demi, la droite *AM* est quatre plus un demi et la droite *CB* est quatre ; la droite *AB* est donc seize, ce qui est le *carré*. Ce qu'il fallait démontrer.

Ce sont les six modes que nous avons annoncés dans notre livre ; nous avons montré leur mode d'inférence et la cause de chacun. Trois binômes[26] qui sont des *carrés* égaux à des racines, des *carrés* égaux à un nombre, des racines égales à un nombre, et trois trinômes[27] qui sont des *carrés* plus des racines égaux à un nombre, des *carrés* plus un nombre égaux à des racines, et des racines plus un nombre égaux à des *carrés*. Beaucoup de calculs d'algèbre et d'*al-muqābala* te mènent nécessairement à l'un d'eux. Je poserai pour chacun de ces six modes un problème, auquel te mène le calcul de l'algèbre et d'*al-muqābala*.

Nous commençons d'abord par la multiplication des choses les unes par les autres, des choses et des nombres par eux-mêmes ou par des choses ou par des nombres, ou par d'autres choses que celui qui examine notre livre doit connaître ; il n'y a de puissance qu'en Dieu Très-Grand.

<*Multiplication, addition et soustraction des termes*>[28]

Je te montre comment multiplier les choses qui sont les racines les unes par les autres si elles sont seules ou si elles sont avec des nombres ou si elles sont [12^{v}] soustraites d'un nombre ou si le nombre est soustrait d'elles, et comment les additionner les unes aux autres, et comment les soustraire les unes des autres.

Si les choses sont toutes additionnées à un nombre, alors la quatrième multiplication est donc additive, et la quatrième est dès lors la multiplication des choses les unes par les autres, ou la multiplication des nombres les uns par les autres, car, si on multiplie deux nombres par deux nombres, alors il faut les multiplier quatre fois : on multiplie les deux premiers nombres par chacun des deux autres nombres, alors la multiplication a lieu quatre fois.

[26] Litt. : singuliers (*mufrada*).

[27] Litt. : combinés (*maqrūna*).

[28] Abū Kāmil donne les règles suivantes : 1) $(a + b)(c + d)$; 2) $(a - b)(c - d)$; 3) $(a + b)(c - d)$; 4) $(a - b)(c + d)$ pour $a, b, c, d > 0$.

في نفسه عشرون وربع، فنجمعهما فيكونان ستّة وخمسين وربعاً. فضرْب م د في نفسه ستّة وخمسون وربع، فخطّ م د سبعة ونصف، وخطّ ا م أربعة ونصف وخطّ ج ب أربعة، فخطّ ا ب ستّة عشر، وهو المال؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فهذه الستّة الضروب التي أخبرنا بها في كتابنا هذا، وبيّنّا قياسها والعلّة فيها، ثلاثةٌ منها مفردة: وهي أموال تعدل جذوراً، وأموال تعدل عدداً وجذور تعدل عدداً، وثلاثةٌ منها مقرونة: وهي أموال وجذور تعدل عدداً، وأموال وعدد تعدل جذوراً، وجذور وعدد تعدل أموالاً. فإنّ كثيراً من حِساب الجبر والمقابلة لا بدّ أن يخرجك إلى أحدها. وأنا واضع لكلّ ضربٍ من هذه الستّة الضروب مسألةً يخرجك <فيها> حساب الجبر والمقابلة إليه.

وسنبتدئ أوّلاً بضرب الأشياء بعضها في بعضٍ، والأشياء والأعداد في مثلها، أو في أشياءَ أو في أعدادٍ أو غيرها ممّا لا بد من معرفته لمن أراد النظر في كتابنا هذا، ولا قوّة إلا بالله العظيم.

<*ضرب وجمع ونقصان الحدود*>

وأنا مبيّن لك كيف تضرب الأشياء، وهي الجذور، بعضَها في بعضٍ إذا كانت مفردة، أو كانت مع أعدادٍ، أو كانت / ناقصة من عدد أو كان العدد ١٢-ظ ناقصاً منها، وكيف تجمع بعضها إلى بعض وكيف تُنْقِصُ بعضها من بعض.

فإذا كانت الأشياء زائدةً جميعاً على العدد، فالضَّرب الرابع زائد، والرابع حينئذ ضربُ الأشياء بعضها في بعضٍ، وضرب الأعداد بعضِها في بعضٍ، لأنّ كلّ عددين يُضربان في عددين فلا بدّ من ضَرْبِهما أربعَ مراتٍ، وهو أن تضرب العددين الأوّلين في كلّ واحد من العددين الآخرين، فيقع الضرب أربع مراتٍ.

1 عشرون ... فيكونان: في الهامش. وكتب "فيكونا" بدل "فيكونان" / وخمسين: فوق السطر / وربعاً: وربع – 4 الضروب: للضروب – 11 أشياء: فوق السطر.

Et si les choses sont toutes soustraites d'un nombre, alors la quatrième multiplication est additive, c'est la multiplication des choses les unes par les autres. Si l'une des deux est soustractive et l'autre additive, alors la quatrième multiplication est soustractive. C'est la multiplication des choses les unes par les autres. Si les nombres sont tous soustraits des choses, alors la quatrième multiplication est additive, et la quatrième est la multiplication de l'un des deux nombres par l'autre. Si l'un des nombres est ajouté aux choses et l'autre soustrait des choses, alors la quatrième multiplication est soustractive, c'est la multiplication de l'un des deux nombres par l'autre. Si les choses sont ajoutées à un nombre et un nombre soustrait des choses, alors la quatrième multiplication est soustractive. C'est le produit des choses additives par le nombre soustractif.

Si nous exposons ce qui est la quatrième multiplication d'après ce que nous avons constaté, à savoir que les arithméticiens commencent par elle lors de la multiplication, il est possible que la quatrième multiplication soit différente de ce que nous avons exposé. Il reste que, en général, la multiplication de deux soustraits l'un par l'autre est additive, la multiplication du soustrait par l'additif est soustractive et la multiplication de l'additif par l'additif est additive.

Et sache que le produit des choses par des choses est des *carrés*, et les choses par les nombres sont des choses ou des racines. Car la chose est la racine, et la racine est la chose. Ce ne sont que deux noms qui se rapportent à un même nommé.

Si on te dit : combien est une chose par dix dirhams, [13r] tu dis : dix choses. En voici le procédé : tu poses la chose à la place de un, tu multiplies un par dix, on a dix, ce sont donc dix choses. Si on dit : combien sont deux choses par dix, alors tu dis : vingt choses. En voici le procédé : tu poses les deux choses à la place de deux. Tu multiplies deux par dix, on a vingt, on a donc vingt choses. De même pour plus de choses, pose chaque chose à la place de un, puis multiplie le nombre de cela par le nombre. Ce qu'on obtient, ce sont des choses. Car tout nombre étant multiplié par l'un des genres, alors chaque élément appartenant à ce genre aura la place de un. Si c'est une chose, on la pose un ; si c'est deux choses, on les pose deux, de même si ce sont des *carrés* ou autres ; puis on multiplie par le nombre. Ce qu'on obtient appartient à ce genre.

Le produit de chacun comporte quatre termes. Abū Kāmil énonce alors la règle suivante : le quatrième terme $bd > 0$ dans 1) et 2) et $bd < 0$ dans 3) et 4) ; et la règle des signes : le produit de deux termes additifs ou soustractifs est additif, et le produit d'un terme additif et d'un terme soustractif est soustractif. Il démontre ensuite géométriquement les règles d'associativité et de distributivité : $a\,(b \cdot x) = (a \cdot b)x$; $a(b \cdot x^n) = (ab)\,x^n$; $(ax)(bx) = (ab)x^2$; $(x + a)x = x^2 + ax$; $(a - x)x = ax - x^2$; $a, b \in \mathbf{Q}_+$.

وإذا كانت الأشياء ناقصةً جميعاً من العدد، فالضرب الرابع زائدٌ وهو ضرب الأشياء بعضِها في بعض. وإذا كان أحدهما ناقصاً والآخر زائداً فالضرب الرابع ناقص، وهو ضرب الأشياء بعضِها في بعض. وإذا كانت الأعداد ناقصةً جميعاً من الأشياء، فالضرب الرابع زائدٌ، والرابع ضرب أحد العددين في الآخر. وإذا كان أحدُ الأعدادِ زائداً على الأشياء والآخر ناقصاً من الأشياء، فالضرب الرابع ناقصٌ وهو ضرب أحد العددين في الآخر. وإذا كانت الأشياء زائدةً على العدد، وعددٌ ناقص من الأشياء، فالضربُ الرابع ناقصٌ وهو ضرب الأشياء الزائدة في العدد الناقص.

وإنّما أخبرنا بالضرب الرابع ما هو على سبيل ما رأينا الحُسَّاب يبتدئون به في الضرب — وقد يجوز أنَ يكون الضربُ الرابعُ غير ما أخبرنا— إلاّ أنّ جملةَ الأمر أنّ ضرب الاستثنائين أحدهِما في الآخر زائدٌ، والاستثناءِ في الزائدِ ناقصٌ، والزائدِ في الزائدِ زائدٌ.

واعلم أن الأشياء في الأشياء أموال، والأشياء في الأعداد أشياء أو جذور؛ لأنّ الشيء هو الجذر والجذر هو الشيء، وإنما هما اسمان يتعاقبان على مسمًّى واحدٍ.

فإن قيل لك: كم شيئاً في عشرةِ دراهم / فقل: عشرة أشياء. وبابُه أن ١٢ - و تجعل الشيءَ بمنـــزلةِ واحدٍ، فتضرب واحداً في عشرة فيكون عشرة، فهي عشرة أشياء. فإن قال: كم شيئين في عشرةٍ؟ فقل عشرون شيئاً. وبابه أن تجعل الشيئين بمنزلة اثنين. فتضرب اثنين في عشرة فيكون عشرين، فهي عشرون شيئاً. وكذلك ما زاد من الأشياء، فاجعل كلّ شيءٍ بمنـــزلة واحدٍ، ثم اضرب عدد ذلك في العدد. فما اجتمع فهو أشياء، لأنّ كلّ عددٍ من الأعداد يُضرب في جنس من الأجناس؛ فإنّ كلّ واحد من ذلك الجنس يصير بمنزلةِ واحدٍ: إن كان شيئاً جُعل واحداً وإن كان شيئين جُعل اثنين. وكذلك إن كانت أموالاً أو غيرَ ذلك. ثم يُضرب في العدد، فما اجتمع فهو من ذلك الجنس.

5 على الأشياء: في الهامش — 6-7 وهو ضرب ... ناقص: كرّرها ثم ضرب عليها بالقلم — 16 شيئاً: شيء / عشرة: كتب أوّلاً "أشياء" ثم ضرب عليها بالقلم وكتب تحتها "دراهم" — 21 كلّ: مكرّرة — 22-23 كان شيئاً: كتب أوّلاً "شيء" ثمّ ضرب عليها بالقلم وكتب العبارة فوقها — 24 ذلك: فوق السطر.

Je composerai des figures pour te montrer ce que nous venons de dire de manière évidente. Il n'y a de puissance qu'en Dieu.

Si on dit : combien est une chose par une chose, tu dis un *carré*. En voici le procédé : tu poses la chose à la place de un, puis tu multiplies un par un, on a un, ce qui est le *carré*. Si on dit : combien sont deux choses par deux choses, tu dis quatre *carrés*. En voici le procédé : tu poses les deux choses à la place de deux et tu multiplies deux par deux, on a quatre, comme je te l'ai expliqué. De même trois choses par deux choses, tu multiplies trois par deux, on a six *carrés* ; de même une demi-chose par une demi-chose, on a un quart de *carré*. De même pour plus de choses ou moins de choses. Pose chaque chose à la place de un, et chaque fraction d'une chose à la place d'une fraction de un, puis multiplie les unes par les autres ; ce qu'on obtient, ce sont des *carrés*.

Je compose une figure par laquelle je te fais comprendre la figure du *carré* et de la chose, et nous composons la figure pour la multiplication de deux choses par deux choses.

Posons la droite *AC* deux choses, et la droite *CE* deux choses ; on multiplie la droite *AC* par la droite *CE*, on a la surface *AE*. Je dis que la surface *AE* est quatre *carrés*.

Démonstration : partageons la droite *AC* par le nombre de ce qu'elle comprend de choses. Alors ses parties sont *AB* et *BC*. Et partageons <la droite> *CE* par le nombre [13^{v}] de ce qu'elle comprend de choses. Ses parties sont *CD* et *DE*. Menons du point *B* une droite parallèle à la droite *CE* ; soit la droite *BO* ; et menons du point *D* une droite parallèle à la droite *AC* ; soit la droite *DH*. Il se produit donc dans la surface *AE* quatre carrés égaux qui sont le carré *HB*, le carré *BD*, le carré *DO*, le carré *OH*. Chacun de ces carrés est un *carré*. Mais chacune des droites *AB*, *BC*, *CD*, *DE* multipliée par un est une chose. Ce sont là le *carré* et la chose. La surface *AE* est donc quatre *carrés*. Ce qu'il fallait démontrer.

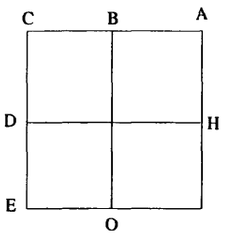


Fig. 11

وأنا واضعٌ لذلك أشكالاً لنبيِّن ما قلنا عياناً، ولا قوّة إلاّ بالله.

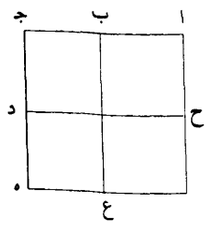
فإن قيل: كم شيئاً في شيء؟ فقل: مالٌ. وبابُه أن تجعل الشيءَ بمنزلةِ واحدٍ، ثم تضربَ واحداً في واحدٍ فيكون واحداً، فهو المال. فإن قيل: كم شيئين في شيئين؟ فقل: أربعة أموال. وبابه أن تجعل الشيئين بمنزلة اثنين، وتضرب اثنين في اثنين فيكون أربعة، كما فسَّرت لك. وكذلك ثلاثة أشياء في شيئين: تضرب ثلاثةً في اثنين فيكون ستّة أموال. وكذلك نصفُ شيء في نصف شيءٍ ربعُ مالٍ. وكذلك ما زاد من الأشياء أو نَقص. فاجعل كلّ شيءٍ بمنزلة واحدٍ، وكلّ كسرٍ من شيء بمنـــزلة كسرٍ من واحدٍ، ثم اضرب بعضَها في بعض فما اجتمع فهو أموال.

وأنا واضعٌ لك صورةً أُفهمك بها صورةَ المالِ والشيء. ونجعل الصورةَ لضرب الشيئين في الشيئين:

نجعل خطّ ا ج شيئين وخطّ ج ه شيئين. وقد ضُرب خطّ ا ج في خطّ ج ه فكان سطح ا ه؛ فأقول: إنّ سطح ا ه أربعة أموال.

وبرهان ذلك: أن نقسم خطّ ا ج بعدد ما فيه من الأشياء، فتكونَ أقسامه ا ب ب ج ونقسم ج ه بعدة / ما فيه من الأشياء، فتكون أقسامه ج د د ه. ١٣ - ظ

ونُخرِجُ من نقطة ب خطّاً موازياً لخطّ ج ه وهو خطّ ب ع، ونُخرِجُ من نقطة د خطّاً موازياً لخطّ ا ج وهو خطّ د ح. فقد حدث في سطح ا ه أربعة مربّعات متساوية وهي مربّع ح ب ومربّع ب د ومربّع د ع ومربّع ع ح. وكلّ واحد من هذه المربّعات مالٌ. وكلّ واحد من خطوط ا ب ب ج ج د د ه مضروبٌ في واحد فهو شيء، فهذا المال والشيء، فسطح ا ه أربعة أموال؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



1 قلنا: كتب أولاً "قلت" ثم صحّحها عليها – 2 كم شيئاً: كم شيء – 11 لضرب: للضرب – 15 ا ب ب ج: ا ب ج ولكنه استدرك فأضاف الباء عليها وأعاد الكتابة في أسفل الصفحة مع "بيان" – 17 أربعة: أربع – 20 خطوط: خط.

Si on dit : combien sont trois choses par six dirhams ; pose les trois choses à la place des trois dirhams, puis multiplie trois par six, on a dix-huit choses.

En voici le procédé : nous posons *AB* six en nombre et la droite *BD* trois choses. Nous multiplions la droite *AB* par la droite *BD*, on a la surface *AD*. Je dis que la surface *AD* est dix-huit choses.

Démonstration : partageons la droite *AB*, qui est six, par le nombre des unités qu'elle contient. On a six parties qui sont *AC*, *CE*, *EF*, *FG*, *GH*, *HB* ; et partageons la droite *BD* par le nombre des choses qu'elle contient, on a les parties *BI*, *IK*, *KD*. Menons ensuite des points *C*, *E*, *F*, *G*, *H* des droites parallèles à la droite *BD*, qui sont *HL*, *GM*, *FN*, *EP*, *CO*. Menons des points *I* et *K* deux droites parallèles à la droite *AB*, qui sont *IQ*, *KS*. Alors il se produit dans la surface *AD* dix-huit surfaces égales, comme nous le voyons dans la figure. Chacune d'elles est égale à la surface *HI*. Mais la surface *HI* est le produit d'une chose, qui est la droite *BI*, par un, [14r] qui est la droite *HB* ; donc la surface *HI* est une chose et la surface *AD* tout entière est dix-huit choses. C'est cela que signifie la multiplication d'un nombre par les choses. Ce qu'il fallait démontrer.

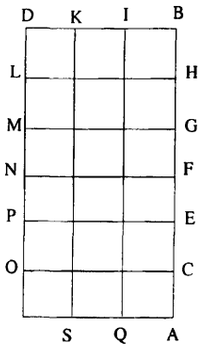


Fig. 12

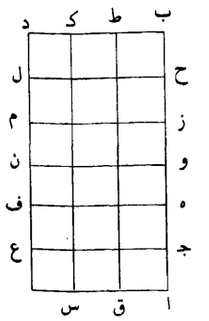
Si on te dit : combien sont dix dirhams plus une chose par une chose ; tu dis : dix choses plus un *carré*.

Procédé : tu multiplies une chose par dix dirhams, on a dix choses, puis tu multiplies une chose par une chose, on a un *carré*. Tu les additionnes, on a dix choses plus un *carré*.

فإن قيل: كم ثلاثة أشياءَ في ستّة دراهم؟ فاجعل الثلاثةَ الأشياءَ بمنـــزلة الثلاثةِ الدراهم، ثم اضرب ثلاثة في ستّة فيكون ثمانية عشر شيئاً.

وباب ذلك: أنّا نجعل ا ب ستّة من العدد، وخطّ ب د ثلاثة أشياء. فنضرب خطّ ا ب في خطّ ب د فيكون سطح ا د؛ فأقول: إنّ سطح ا د ثمانية عشر شيئاً.

وبرهان ذلك: أنّا نقْسِمُ خطّ ا ب الذي هو ستّة بما فيه من الآحاد. فيخرج ستّة أقسام وهي ا ج ج ه ه و و ز ز ح ح ب. ونقْسِمُ خطّ ب د بعدّة الأشياء التي فيه فتخرج أقسامه ب ط ط ك ك د. ثم نُخْرِجُ من نقط ج ه و ز ح خطوطاً موازيةً لخطّ ب د وهي ح ل ز م و ن ه ف ج ع. ونُخْرِجُ من نقطتي ط ك خطّين موازيين لخطّ ا ب وهما ط ق ك س.



١٤-و

فيحدث في سطح ا د ثمانية عشرَ سطحاً متساويةً، على ما نرى في الصورة. كلّ سطحٍ منها مساوٍ لسطح ح ط. وسطح ح ط من ضرب شيء، الذي هو خطّ ب ط، في واحد الذي / هو خطّ ح ب. فسطح ح ط شيء، وسطح ا د كلّه ثمانيةَ عشرَ شيئاً. فهذا معنى ضرب العدد في الأشياء؛ وذلك ما أردنا أن نبيِّن.

فإن قيل لك: كم عشرةَ دراهمَ وشيئاً في شيء؟ فقل: عشرةُ أشياءَ ومالٌ.

وبابه أن تضرب شيئاً في عشرة دراهم فيكونَ عشرة أشياء، ثم تضرب شيئاً في شيءٍ فيكون مالاً. فتجمعُهما فيكون عشرةَ أشياء ومالاً.

1 دراهم: درهم — 2 الدراهم: الدرهم — 3 وباب: ومال — 9 وهي: وهو — 10 ط ك: ط ك — 17 وشيئاً: وشيء — 19 فيكون (الأولى): مكرّرة.

Je te le montre dans cette figure : nous posons les dix dirhams plus la chose, la droite *AC* : *AB* dix, *BC* une chose ; et la droite *CD* une chose. Nous multiplions la droite *AC* par la droite *CD*, on a la surface *AD*. Je dis que la surface *AD* est dix choses plus un *carré*.

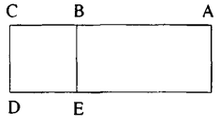


Fig. 13.1

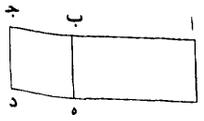
Démonstration : la droite *BE* est égale à la droite *CD*, et la droite *CD* est égale à la droite *BC*. Donc la droite *BE* est égale à la droite *BC*. Mais la droite *BC* est une chose. Donc la droite *BE* est une chose. Mais la droite *AB* est dix et la surface *AE* est le produit de la droite *AB* par la droite *BE* ; elle est donc dix choses. Or la surface *BD* est un *carré* car elle est un carré ; et elle est le produit de *BC*, qui est une chose, par la droite *CD*, qui est une chose. La surface *AD* tout entière est donc dix choses plus un *carré*. Ce qu'il fallait démontrer.

Si on dit : combien sont dix dirhams moins une chose par une chose, tu dis : dix choses moins un *carré*.

En voici le procédé : tu multiplies dix dirhams par une chose, on a alors dix choses. Tu multiplies ensuite une chose par une chose, on a un *carré*, que tu ôtes de dix [14ᵛ] choses. Il reste dix choses moins un *carré*.

Je te le montre dans cette figure : tu poses les dix dirhams la droite *AC* et tu poses la droite *BC* une chose, il reste la droite *AB* dix dirhams moins une chose ; tu poses la droite *BE* une chose, tu multiplies *AB*, qui est dix dirhams moins une chose, par la droite *BE*, qui est une chose ; on a la surface *AE*. Je dis que la surface *AE* est dix choses moins un *carré*.

وأُبيِّنُ لك في هذه الصورة: وهو أن نجعل العشرة الدراهم والشيءَ خطّ ا ج: ا ب عشرةً وب ج شيئاً، وخطّ ج د شيئاً. فنضرب خطّ ا ج في خطّ ج د فيكون سطح ا د؛ فأقول: إنّ سطح ا د عشرة أشياء ومالٌ.



برهان ذلك: أنّ خطّ ب ه مثل خط ج د، وخطّ ج د مثل خطّ ب ج، فخطّ ب ه مثل <خط> ب ج. وخطّ ب ج شيء، فخطّ ب ه شيء، وخطّ ا ب عشرة، وسطح ا ه من ضرب خطّ ا ب في خطّ ب ه فهو عشرة أشياء. وسطح ب د مالٌ لأنّه مربّع، وهو من ضرب ب ج الذي هو شيء في خطّ ج د الذي هو شيء. فجميع سطح ا د عشرة أشياء ومال؛ وذلك ما أردنا أن نبيِّن.

فإن قال: كم عشرة دراهم إلاّ شيئاً في شيء، فقل: عشرة أشياء إلاّ مالاً. وبابُه أن تضربَ عشرة دراهمَ في شيء فيكونَ عشرة أشياء، ثم تضرب شيئاً في شيء فيكون مالاً، فتسقطه من العشرةِ / الأشياء، فيبقى عشرة أشياء إلاّ مالاً. ١٤-ظ

وأبيِّنُ لك هذا في هذه الصورة: وهو أن تجعل العشرة دراهم خطّ ا ج، وتجعل خطّ ب ج شيئاً، فيبقى خطّ ا ب عشرة دراهم إلاّ شيئاً. وتجعل خطّ ب ه شيئاً. فتضرب ا ب، وهو عشرة دراهم إلاّ شيئاً، في خطّ ب ه وهو شيء، فيكون سطح ا ه؛ فأقول: إنّ سطحَ ا ه عشرةُ أشياء إلاّ مالاً.

1 الدراهم: الدرهم / والشيء: في الهامش — 2 ب ج: ب ح — 10 إلاّ شيئاً: إلاّ شيء / مالاً: مال — 14 هذا: فوق السطر — 15 وتجعل ... إلا شيئًا: كرّرها ثم ضرب عليها بالقلم — 16 شيئاً: فوق السطر.

Démonstration : posons la droite *CD* une chose également et achevons la surface *AD* à angles droits. La surface *AD* est dix choses, car la droite *AC* est dix ; la droite *CD* est une chose, et le carré *BD* est un *carré*, car elle est le produit de la droite *BC*, qui est une chose, par la droite *CD* qui lui est égale. Il reste la surface *AE* dix choses moins un *carré*. Ce qu'il fallait démontrer.

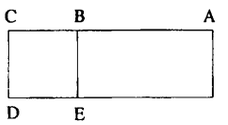


Fig. 13.2

Si on dit : combien sont dix dirhams plus une chose par dix dirhams plus une chose, tu dis : cent dirhams plus un *carré* plus vingt choses.

En voici le procédé : tu multiplies dix dirhams par dix dirhams, on a cent dirhams ; tu multiplies ensuite une chose par dix dirhams, on a dix choses additives. Puis tu multiplies une chose par dix dirhams, on a dix choses additives, puis tu multiplies une chose par une chose, on a un *carré* additif. Et tout cela est cent dirhams plus vingt choses plus un *carré*.

Je te le montre dans cette figure. Nous posons la droite *AB* dix dirhams plus une chose : *AC* dix et *CB* une chose. Nous posons la droite *BD* dix dirhams plus une chose : la droite *DE* dix et la droite *BE* une chose. Nous multiplions ensuite la droite *AB* par la droite *BD*, on a la surface *AD*. Je dis que la surface *AD* est cent dirhams plus un *carré* plus vingt choses.

Démonstration : menons [15r] du point *C* une droite parallèle à la droite *BD*, soit la droite *CH*. Menons du point *E* une droite parallèle à la droite *AB*, soit la droite *EG*. Donc *CE* est un carré et *GH* est un carré. Et Euclide a montré cela[29]. Mais la surface *CG* est égale à la surface *EH* ; et la surface *GH* est cent, car elle est le produit de la droite *AC*, qui est dix, par la droite *ED*, qui est dix. Et la surface *GC* est dix choses, car elle est le produit de la droite *CB*, qui est une chose, par la droite *AC*,

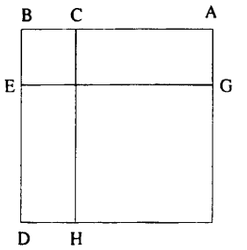
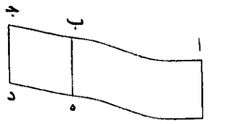


Fig. 14

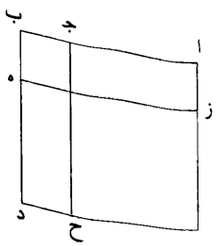
[29] *Éléments*, II.4.



وبرهان ذلك: أنّا نجعل خطّ ج د أيضاً شيئاً، ونتمّ سطح ا د قائمَ الزوايا. فسطح ا د عشرة أشياء، لأنّ خطّ ا ج عشرة، وخطّ ج د شيء، ومربّع ب د مالٌ، لأنّه من ضرب خطّ ب ج الذي هو شيء في خطّ ج د المساوي له، فبقي سطح ا ه عشرة أشياء إلاّ مالاً. وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فإن قيل: كم عشرةَ دراهمَ وشيئاً في عشرة دراهم وشيء؟ فقل: مائةُ درهم ومالٌ وعشرون شيئاً. وبابُه أن تضرب عشرة دراهم في عشرة دراهم فيكون مائة درهم. ثم تضرب شيئاً في عشرة دراهم فيكون عشرة أشياء زائدة، ثم تضرب شيئاً في عشرة دراهم فيكون عشرة أشياء زائدة، ثم تضرب شيئاً في شيء فيكون مالاً زائداً، فذلك كلّه مائة درهم وعشرون شيئاً ومال.

وأبيّن لك في هذه الصورة: وذلك أنّا نجعل خطّ ا ب عشرة دراهم وشيئاً: ا ج عشرة وَج ب شيء، ونجعل خطّ ب د عشرة دراهم وشيئاً: خطّ د ه عشرة وخطّ ب ه شيء. ثم نضرب خطّ ا ب في خطّ ب د فيكون سطح ا د؛ فأقول: إنّ سطح ا د مائةُ درهم ومالٌ وعشرون شيئاً.



وبرهان ذلك: أنّا نُخْرِجُ / من نقطة ج خطّاً موازياً لخطّ ب د وهو خطّ ج ح. ونخرج من نقطة ه خطّاً موازياً لخطّ ا ب وهو خطّ ه ز. فَجه مربّع وَز ح مربّع. وقد بيَّنَ ذلك أقليدس. وسطحُ ج ز مثل سطح ه ح وسطح ز ح مائة؛ لأنّه من <ضرب> خطّ ا ج الذي هو عشرة في خطّ ه د الذي هو عشرة. وسطح ز ج عشرة أشياء؛ لأنّه من ضرب خطّ ج ب

6 وشيئاً: وشيء — 8 في عشرة ... زائدة: في الهامش / دراهم: درهم — 11 دراهم: درهم — 12 وشيئاً: وشيء / عشرة (الأولى): وعشرة / دراهم: درهم / وشيئاً: وشي — 14 وعشرون: وعشرين — 18 أقليدس: انظر الشكل الرابع من المقالة الثانية في ترجمة الحجاج: "كل خط يقسم بقسمين قسمة كيف وقعت، فإن مربع الخط كله مساوٍ لمربعي قسميه مع ضعف السطح الذي يحيط به قسما الخط" (ص. 16) / مثل سطح: مكرّرة، وضرب عليها بالقلم.

qui est dix. Mais la surface *EH* est aussi dix choses, car elle est le produit de la droite *BE*, qui est une chose, par la droite *ED*, qui est dix. Et la surface carrée *CE* est un *carré*, car elle est le produit de la droite *CB*, qui est une chose, par la droite *BE*, qui est une chose. Nous additionnons ensuite les quatre surfaces que sont les surfaces *GH*, *GC*, *CE*, *EH*, on a cent dirhams plus un *carré* plus vingt choses. Or les quatre surfaces sont comme la surface *AD*, donc la surface *AD* est cent dirhams plus un *carré* plus vingt choses. Ce qu'il fallait démontrer.

Si on dit : combien sont dix dirhams moins une chose par dix dirhams moins une chose, alors tu dis : cent dirhams plus un *carré* moins vingt choses[30].

En voici le procédé : tu multiplies dix dirhams par dix dirhams, on a cent dirhams. Tu multiplies ensuite une chose soustractive par dix dirhams, on a dix choses soustractives. Tu multiplies ensuite une chose soustractive par dix dirhams également, on a dix choses soustractives. Puis tu multiplies une chose soustractive par une chose soustractive, on a un *carré* additif. Tu additionnes tout cela, on a cent dirhams plus un *carré* moins vingt choses.

Je montre cela dans cette figure. Tu poses la droite *AB* dix dirhams [15v] moins une chose : *AC* dix et *BC* une chose. Tu poses la droite *DE* dix dirhams moins une chose : *CD* dix et *CE* une chose. Tu multiplies la droite *AB*, qui est dix dirhams moins une chose, par la droite *ED*, qui est dix dirhams moins une chose. On a le carré *GH*. Je dis que le surface *GH* est cent dirhams plus un *carré* moins vingt choses.

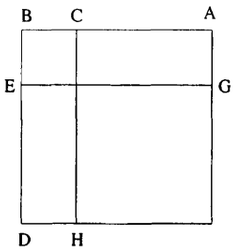


Fig. 15

Démonstration : complétons la surface *AD* et menons du point *B* une droite parallèle à la droite *CD*, soit la droite *BH*. Menons du point *E* une

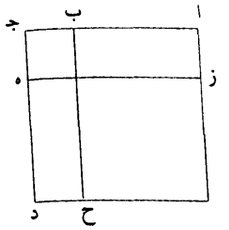
[30] Voir Note complémentaire [2].

الذي هو شيء في خطّ ا جـ الذي هو عشرة. وسطح ه ح أيضاً عشرة أشياء؛ لأنّه من ضرب خطّ ب ه الذي هو شيء في خطّ ه د الذي هو عشرة، وسطح جـ ه المربّع هو مال، لأنّه من ضرب خطّ جـ ب الذي هو شيء في خطّ ب ه الذي هو شيء. ثم نجمع السطوح الأربعة وهي سطوح ز ح ز جـ ه ح، فتكون مائة درهم ومالاً وعشرين شيئاً. والسطوح الأربعة مثل سطح ا د. فصار سطح ا د مائة درهم ومالاً وعشرين شيئاً؛ وذلك ما أردنا أن نبيِّن.

فإن قيل: كم عشرة دراهم إلاّ شيئاً في عشرة دراهم إلاّ شيئاً؟ فقل: مائةُ درهم ومالٌ إلاّ عشرين شيئاً.

وبابه أن تضرب عشرة دراهم في عشرة دراهم فيكون مائة درهم. ثم تضرب شيئاً ناقصاً في عشرة دراهم فيكون عشرة أشياء ناقصة. ثم تضرب شيئاً ناقصاً في عشرة دراهم أيضاً فيكون عشرة أشياء ناقصة. ثم تضرب شيئاً ناقصاً في شيءٍ ناقص فيكون مالاً زائداً. فتجمع ذلك كلّه فيكون مائةَ درهم ومالاً إلاّ عشرين شيئاً.

وأبيِّن ذلك في هذه الصورة: وهو أنْ تجعل خطّ ا ب عشرة دراهم / إلاّ ١٥-ظ شيئاً: ا جـ عشرة وب جـ شيء. وتجعل خطّ د ه عشرة دراهم إلاّ شيئاً: جـ د عشرة وجـ ه شيء. فتضرب خطّ ا ب الذي هو عشرة دراهم إلاّ شيئاً في خطّ ه د الذي هو عشرة دراهم إلاّ شيئاً، فيكون مربّع ز ح، فأقول: إنّ سطح ز ح مائةُ درهم ومال إلاّ عشرين شيئاً.



وبرهان ذلك: أنّا نُتِمُّ سطح ا د. ونخرج من نقطة ب خطّاً موازياً لخطّ جـ د وهو خطّ ب ح،

4 سطوح: سطح — 5 درهم: درهماً / والسطوح: وسطوح — 6 ومالاً: ومال — 7 يستشهد به السموءل: انظر التعليق رقم [2] / دراهم: درهم، وكذلك يفعل الناسخ في معظم المواضع، فيكتب "درهم" بدلاً من "دراهم" ولن نشير إلى هذا مرةً أخرى — 10 عشرة (الأولى): في الهامش — 11 شيئاً: فوق السطر — 15 ب جـ : ب ح.

droite parallèle à la droite *AC*, soit la droite *EG*. La surface *AD* est cent, car la droite *AC* est dix et la droite *CD* est dix. La surface *GC* est dix choses, car la droite *AC* est dix et la droite *CE* une chose. La surface *BD* est aussi dix choses, car la droite *DC* est dix et la droite *CB* une chose. La surface du carré *BE* est un *carré*, car elle est le produit de la droite *BC*, qui est une chose, par la droite *CE*, qui est aussi une chose. Il reste la surface *EH* dix choses moins un *carré*, et la surface *AE* dix choses. Donc la surface *GC* plus la surface *EH* est vingt choses moins un *carré*. Mais la surface *AD* est cent. Il reste la surface *GH* cent dirhams plus un *carré* moins vingt choses. Ce qu'il fallait démontrer.

Si on te dit : combien sont dix dirhams et une chose par dix dirhams moins une chose, alors tu dis : cent dirhams moins un *carré*.

En voici le procédé : tu multiplies dix dirhams par dix dirhams, on a cent dirhams ; puis tu multiplies la chose additive par dix, on a dix choses additives ; tu multiplies ensuite la chose soustractive par dix, on a dix choses soustractives. L'additif est annulé par le soustractif, [16r] et il restera alors cent dirhams. Tu multiplies ensuite la chose additive par la chose soustractive, on aura un *carré* soustractif, que tu ôtes de cent dirhams ; il restera donc cent dirhams moins un *carré*.

Je te le montre dans cette figure : tu poses la droite *AB* dix dirhams plus une chose : *AC* dix et *CB* une chose. Tu poses la droite *BE* dix dirhams moins une chose : la droite *BD* dix et la droite *ED* une chose. Tu multiplies la droite *AB*, qui est dix dirhams plus une chose, par la droite *BE*, qui est dix dirhams moins une chose ; on a alors la surface *AE*. Je dis que la surface *AE* est cent dirhams moins un *carré*.

Démonstration : nous achevons la surface *AD*. La surface *AD* est cent dirhams plus dix choses, puisque la surface *AH* est cent et est le produit de *AC* par *CH*, que *AC* est dix et *CH* égal à *BD*, et que *BD* est

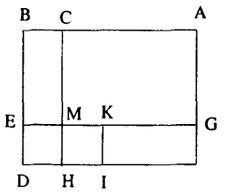


Fig. 16

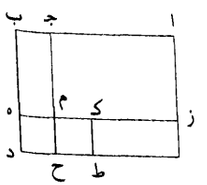
ونُخرج من نقطة ه خطّاً موازياً لخطّ ا ج وهو خطّ ه ز. فسطح ا د مائة؛ لأنّ خطّ ا ج عشرة وخطّ ج د عشرة، وسطح ز ج عشرة أشياء، لأنّ خطّ ا ج عشرة وخطّ ج ه شيء. وسطح ب د أيضاً عشرة أشياء، لأنّ خطّ د ج عشرة وخطّ ج ب شيء. وسطح مربّع ب ه مال، لأنّه من ضرب <خط> ب ج — الذي هو شيء — في خطّ ج ه الذي هو أيضاً شيء. فبقي سطح ه ح عشرة أشياء إلاّ مالاً، وسطح ا ه عشرة أشياء، فسطح ز ج وسطح ه ح عشرون شيئاً إلاّ مالاً. وسطح ا د مائة، فبقي سطح ز ح مائةَ درهم ومالاً إلاّ عشرين شيئاً؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فإن قيل لك: <كم> عشرة دراهم وشيئاً في عشرة دراهم إلاّ شيئاً؟

فقل: مائة درهم إلاّ مالاً.

وبابُه أن تضرب عشرة دراهم في عشرة دراهم فيكون مائة درهم. ثم تضرب الشيء الزائد في عشرة فيكون عشرة أشياء زائدة. ثم تضرب الشيء الناقص في عشرة فيكون عشرة أشياء ناقصة. فتذهب الزيادة بالنقصان / فيبقى ١٦-و مائةُ درهم. ثم تضرب الشيء الزائد في الشيء الناقص فيكون مالاً ناقصاً، فَتُسْقِطُه من المائةِ درهم فيبقى مائةُ درهم إلاّ مالاً.

وأبيِّن لك في هذه الصورة: وهو أن تجعل خطّ ا ب عشرة دراهم وشيئاً: ا ج عشرة وج ب شيء. وتجعل خطّ ب ه عشرة دراهم إلاّ شيئاً: خطّ ب د عشرة وخطّ ه د شيء. فتضرب خطّ ا ب — الذي هو عشرة دراهم وشيء — في خطّ ب ه الذي هو عشرة دراهم إلاّ شيئاً. فيكون سطح ا ه؛ فأقول: إنّ سطح ا ه مائةُ درهم إلا مالاً.



وبرهان ذلك: أنّا نُتِمُّ سطح ا د. فسطح ا د مائة درهم وعشرة أشياء. لأنّ سطح ا ح مائة، وهو من ضرب ا ج في ج ح، وا ج عشرة وج ح مثل ب د

7 ومالاً: ومال — 9 وشيئاً: وشيء / إلاّ شيئاً: إلاّ شيء — 10 مالاً: مال — 19 شيئاً: شيء.

dix, donc *CH* est dix. Mais la surface *CD* est dix choses, car elle est le produit de *CB*, qui est une chose, par *BD*, qui est dix. La somme est la surface *AD*, qui est cent dirhams plus dix choses. Mais la surface *GH* est aussi dix choses car elle est le produit de *MH* par *MG* ; donc la surface *GH* est égale à la surface *HB*. Coupons alors de la surface *HG* une <surface> égale à la surface carrée *MD*, soit la surface *KH*. La surface *KH* est donc aussi un carré qui est un *carré*. Il reste donc la surface *GI* égale à la surface *MB*. La surface *AM* et la surface *GI* sont donc égales à la surface *AE*. Mais la surface *AM* et la surface *GI* sont cent dirhams moins un *carré*, car la surface *KH* est un *carré*. La surface *AE* est par conséquent cent dirhams moins un *carré*. Ce qu'il fallait démontrer.

Si on te dit : combien sont dix dirhams plus une chose par une chose moins dix dirhams, alors dis : un *carré* moins cent dirhams.

En voici le procédé : tu multiplies la chose par la chose, on a un *carré* ; tu multiplies ensuite la chose par [16^{v}] les dix dirhams additifs, on a dix choses additives ; puis tu multiplies la chose par les dix dirhams soustractifs, on a dix choses soustractives. Les choses additives sont annulées par les choses soustractives, il reste un *carré*. Tu multiplies ensuite les dix dirhams additifs par les dix dirhams soustractifs, on a cent dirhams soustractifs, que tu ôtes du *carré* ; il reste donc un *carré* moins cent dirhams.

Je montre cela dans cette figure : nous posons la droite *AB* dix dirhams plus une chose : *AC* dix et *CB* une chose. Nous posons la droite *BE* une chose moins dix : *BD* une chose et *ED* dix. Nous multiplions la droite *AB*, qui est dix dirhams plus une chose, par la droite *BE*, qui est une chose moins dix dirhams ; on a alors la surface *AE*. Je dis que la surface *AE* est un *carré* moins cent dirhams.

Démonstration : complétons la surface *AD*. La surface *AD* est donc dix choses plus un *carré*, car la droite *AB* est dix dirhams plus une chose, et la droite *BD* est une chose.

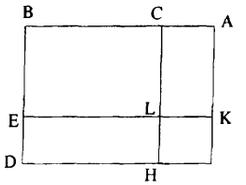


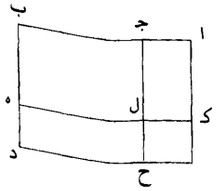
Fig. 17

وَب د عشرة، فَ جـ ح عشرة. وسطح جـ د عشرة أشياء، لأنّه من ضرب جـ ب في ب د الذي هو عشرة، فيجتمع سطح ا د مائة درهم – الذي هو شيء – وعشرة أشياء. وسطح ز ح أيضاً عشرة أشياء، لأنّه من ضرب م ح في م ز، فسطح ز ح مثل سطح ح ب. فنقطع من سطح ح ز مثل سطح م د المربّع، وهو سطح ك ح، فسطح ك ح أيضاً مربّع وهو مال. فيبقى سطح ز ط مثل سطح م ب. فسطح ا م وسطح ز ط مثل سطح ا ه. وسطح ا م وسطح ز ط مائة درهم إلاّ مالاً، لأنّ سطح ك ح مال. فسطح ا ه إذاً مائة درهم إلاّ مالاً؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فإن قيل لك: كم عشرةَ دراهم وشيئاً في شيء إلاّ عشرة دراهم؟ فقل: مالٌ إلاّ مائةَ درهمٍ.

وبابُه أن تضرب الشيء في الشيء فيكون مالاً، ثم تضرب الشيء في / العشرةِ الدراهمِ الزائدةِ، فيكون عشرة أشياء زائدةً. ثم تضرب الشيء في العشرةِ الدراهمِ الناقصةِ فيكون عشرة أشياء ناقصةً. فتُذهب الأشياء الزائدةُ بالأشياء الناقصة، فيبقى مالٌ. ثم تضرب العشرة الدراهم الزائدة في العشرة الدراهم الناقصة فيكون مائة درهمٍ ناقصةً فَتُسْقِطُها من المال فيبقى مالٌ إلاّ مائةَ درهمٍ. ١٦-ظ

وأبيّن ذلك في هذه الصورة: وهو أن نجعل خطّ ا ب عشرة دراهم وشيئاً: ا جـ عشرة وَجـ ب شيئًا. ونجعل خطّ ب ه شيئاً إلا عشرة: ب د شيئاً وَه د عشرة. فنضرب خطّ ا ب الذي هو عشرة دراهم وشيء في خطّ ب ه الذي هو شيء إلاّ عشرة دراهم. فيكون سطح ا ه؛ فأقول: إنّ سطح ا ه مالٌ إلا مائة درهم.



برهان ذلك: أنّا نُتِمُّ سطح ا د. فسطح ا د عشرة أشياء ومالٌ؛ لأنّ خطّ ا ب عشرة دراهم وشيء، وخطّ

9 وشيئاً: وشيء / شيء إلاّ: في الهامش – 19 شيء إلاّ: في الهامش.

Menons la droite *CH* parallèle à la droite *BD* : la surface *CD* est donc un carré et elle est un *carré*, car elle est le produit de *CB*, qui est une chose, par *BD*, qui est une chose. Mais la surface *AH* est égale à la surface *HE* car la droite *CH* est égale à la droite *HD*. Et la droite *AC* est égale à la droite *ED*. La surface *AH* plus la surface *CE* sera un *carré*. Or la surface *KH* est cent, car *AC* est égal à *KL* et *AC* est dix. Donc *KL* est dix. Et *LH* est égal à *ED* et *ED* est dix, donc *LH* est dix. Donc la surface *KH* est cent. Il reste la surface *AE* un *carré* moins cent dirhams. Ce qu'il fallait démontrer.

Si on te dit : combien sont dix dirhams plus deux tiers d'une chose par trois dirhams moins six choses, dis : trente dirhams moins quatre *carrés* moins cinquante-huit choses.

En voici le procédé : tu multiplies dix [17r] dirhams par trois dirhams, on a trente dirhams ; tu multiplies deux tiers d'une chose par trois dirhams, on a deux choses additives. Tu multiplies six choses soustractives par dix dirhams, on a soixante choses soustractives. Tu ôtes les deux choses additives des soixante choses soustractives, il reste trente dirhams moins cinquante-huit choses ; tu multiplies ensuite les six choses soustractives par les deux tiers d'une chose additive, on a quatre *carrés* soustractifs que tu ôtes alors de trente dirhams moins cinquante-huit racines, il reste trente dirhams moins quatre *carrés* moins cinquante-huit racines.

Dans ce que je t'ai expliqué à propos de la multiplication des choses et des nombres les uns par les autres, tu peux procéder ainsi pour tout ce qui te vient de toute cette espèce. Il n'y a de puissance qu'en Dieu Très-Grand.

<Multiplication et division des racines>[31]

[Abū Kāmil a dit] : si tu veux doubler la racine d'un nombre connu ou d'un *carré* inconnu, alors « doubler cela » signifie prendre ses deux racines. Si tu veux multiplier les deux racines d'un nombre connu ou d'un

[31] Voir Chapitre II, p. 54-55.

ب د شيء. ونخرج خطّ ج ح يوازي خطّ ب د. فسطح ج د مربّع وهو مالٌ؛ لأنّه من ضرب ج ب الذي هو شيء في ب د الذي هو شيء. وسطح ا ح مثل سطح ح ه، لأنّ خطّ ج ح مثل خطّ ح د، وخطّ ا ج مثل خطّ ه د. فصار سطح ا ح وسطح ج ه مالاً. وسطح ك ح مائة، لأنّ ا ج مثل ك ل وا ج عشرة، فَ ك ل عشرة، ول ح مثل ه د وَه د عشرة فَ ل ح عشرة، فسطح ك ح مائة. فبقي سطح ا ه مالاً إلاّ مائة درهمٍ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فإن قيل لك: كم عشرة دراهم وثلثي شيءٍ في ثلاثة دراهم إلاّ ستّة أشياء؟ فقل: ثلاثون درهماً إلاّ أربعة أموالٍ وإلاّ ثمانية وخمسين شيئاً.

وبابه أن تضرب عشرة / دراهم في ثلاثة دراهم فيكون ثلاثين درهماً، ١٧ - و
وتضرب ثلثي شيء في ثلاثة دراهم فيكون شيئين زائدين، وتضرب ستّة أشياء ناقصةً في عشرةِ دراهم فيكون ستين شيئاً ناقصة. فتسقط الشيئين الزائدين من الستين شيئاً الناقصة، فيبقى ثلاثون درهماً إلاّ ثمانية وخمسين شيئاً. ثم تضرب الستّة الأشياء الناقصة في ثلثي شيء زائدٍ فيكون أربعةَ أموالٍ ناقصة، فتُسقِطَها من ثلاثين درهماً إلاّ ثمانيةً وخمسين جذراً. فيبقى ثلاثون درهماً إلا أربعةَ أموالٍ وإلاّ ثمانيةً وخمسين جذراً.

وفيما شرحت لك من ضرب الأشياء والأعداد بعضِها في بعض ما يُمَكِّنُك أن تعمل ما جاءك من جميع هذا النوعِ. ولا قوّة إلاّ بالله العظيم.

<ضرب وقسمة الجذور>

[قال أبو كامل]: إذا أردت أن تضعف جذر عددٍ معلومٍ أو مالٍ مجهولٍ فمعنى إضعافك إياه هو أن تأخذ جذريه، فإذا أردت أن تضرب جذرَي العددِ

4 مالاً: مال — 5 فَ: و — 6 مالاً: مال — 8 ثلاثون: ثلاثين — 12 شيئاً: الشيء — 19 قال أبو كامل: هذه العبارة لا توجد في الترجمة اللاتينية (fol. 77v, 799) ولا في الترجمة العبرية (p. 66-67)، ويبدو أنها من الناسخ.

carré inconnu par la racine d'un autre nombre ou d'un autre *carré*, alors pose les deux racines à la place de deux, multiplie ensuite deux par deux, puis par le nombre connu ou le *carré* inconnu ; alors la racine du produit sera les deux racines du nombre connu ou du *carré* inconnu. Si tu veux trois racines, multiplie alors trois par trois puis par le nombre connu ou le *carré* inconnu, alors la racine du produit est trois racines du nombre connu ou du *carré* inconnu. Et si tu veux la moitié de sa racine, alors multiplie un demi par un demi ; on a un quart ; puis par le nombre connu ou le *carré* inconnu, alors la racine du produit est la moitié de la racine du nombre connu ou du *carré* inconnu. De même quand il y en a plus et quand il y en a moins, c'est selon cet exemple.

Exemple : nous voulons doubler la racine de seize. Nous multiplions deux par deux, on a quatre ; puis nous multiplions quatre par seize, on a soixante-quatre. La racine de soixante-quatre est huit, ce qui est le double de la racine de seize.

Je montre cela dans cette figure : nous posons seize une surface carrée *ABCD*, et la droite [17^{v}] *CD* est la racine de la surface carrée *ABCD*. Si nous voulons la doubler, alors nous prolongeons la droite *CD* jusqu'à *E* et nous posons la droite *CE* égale à la droite *CD*. La droite *ED* est le double de la racine de la surface *ABCD*. Si tu veux savoir de quel nombre elle est la racine, alors nous construisons sur la droite *ED* une surface carrée *EG*, donc la droite *ED* est la racine de la surface *EG*. Je dis que la surface *EG* est le quadruple de la surface *CB*.

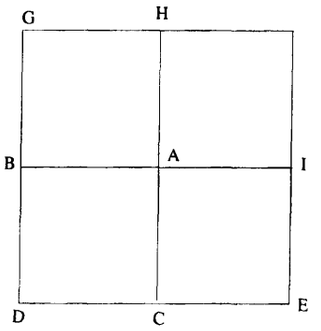


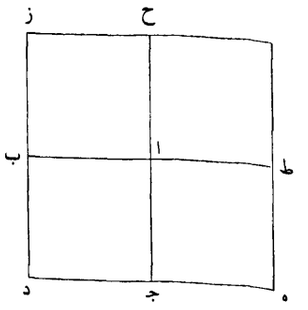
Fig. 18

Démonstration : prolongeons la droite *CA* jusqu'au point *H* et la droite *AB* jusqu'au point *I* ; alors il se produit dans la surface *EG* quatre carrés égaux, qui sont le carré *CB*, le carré *BH*, le carré *HI* et le carré *IC*. On a ainsi montré que le carré *EG* est le quadruple du carré *CB* et que le carré *CB* est

المعلوم أو المال المجهول في جذر عددٍ آخر أو مالٍ آخر، فاجعل الجذرين بمنزلة اثنين، ثم اضرب اثنين في اثنين، ثم في العددِ المعلوم أو المالِ المجهول. فيكون جذرُ ما اجتمع من ذلك جذري العددِ المعلوم أو المال المجهول. فإذا أردت ثلاثة أجذاره، فاضرب ثلاثةً في ثلاثةٍ، ثم في العدد المعلوم أو المال المجهول، فيكون جذرُ ما اجتمع من ذلك ثلاثةَ أجذارِ العددِ المعلوم أو المالِ المجهول. وإن أردت نصفَ جذره، فاضرب نصفاً في نصف فيكون ربعاً، ثم في العدد المعلوم أو المال المجهول، فيكون جذرُ ما خرج من ذلك هو نصف جذر العدد المعلوم أو المال المجهول. وكذلك كلّما زاد أو نقص فعلى هذا المثال.

ومثال ذلك: أنّا أردنا أن نضعف جذر ستّة عشر. فضربنا اثنين في اثنين فكان أربعةً، ثم ضربنا أربعة في ستّة عشر فكان أربعةً وستين. فجذر أربعة وستين ثمانية وهو ضعف جذر ستّة عشر.

١٧-ظ وأبيّن ذلك في هذه الصورة: وهو أنّا نجعل الستّة عشر سطحاً مربّعاً، عليه ا ب ج د، وخطّ / ج د جذر سطح مربّع ا ب ج د. فإذا أردنا أن نضعفه، فإنّا نُخْرِجُ خطّ ج د على استقامة إلى ه ونجعل خطّ ج ه مثل خطّ ج د. فخطّ ه د جذرا سطح ا ب ج د. فإذا أردت أن تعلم جذر أيِّ عددٍ هو، فإنّا نعمل على خطّ ه د سطحاً مربّعاً عليه ه ز. فخطّ ه د جذر سطح ه ز؛ فأقول: إنّ سطحَ ه ز أربعة أمثال سطح ج ب.



برهانُ ذلك: أنّا نخرج خطّ ج ا على استقامةٍ إلى نقطة ط. إلى نقطة ح وخطّ ا ب على استقامةٍ إلى نقطة ط. فقد حدث في سطح ه ز أربعة مربّعات متساويات وهي: مربّع ج ب ومربّع ب ح ومربّع ح ط ومربّع ط ج. فقد تبيّن أنّ مربّع ه ز أربعة أمثال مربّع ج ب،

1 المال: في الهامش / أو مال آخر: في الهامش — 6 العدد: المال — 9 أن: فوق السطر — 15 جذرا: جذري — 20 أربعة: أربع.

seize ; donc le carré *EG* est soixante-quatre. Donc la droite *ED* est la racine de soixante-quatre, ce qui est huit. Ce qu'il fallait démontrer.

Si tu veux prendre la moitié de la racine de neuf, alors multiplie un demi par un demi, on a un quart ; multiplie-le par neuf, on a deux plus un quart ; la racine de deux plus un quart est un et demi, ce qui est la moitié de la racine de neuf.

Si tu veux prendre les deux tiers de la racine de neuf, alors multiplie deux tiers par deux tiers, on a quatre neuvièmes ; multiplie-les par neuf, on a quatre dont la racine est deux, ce qui est les deux tiers de la racine de neuf.

Je montre cela dans cette figure : posons neuf une surface carrée *ABCD*, la droite *CD* est la racine de neuf et elle est la racine d'une surface carrée *ABCD*. Si nous voulons prendre ses deux tiers, alors nous divisons la droite *CD* en trois parties égales, qui sont *CG*, *GE*, *ED* ; la droite *DG* est donc deux tiers de la droite *CD*, et elle est les deux tiers de la racine de la surface carrée *CB*. Si nous voulons savoir de quel *carré* elle est la racine, alors nous construisons sur la droite *GD* la surface carrée *GKLD*. [18r] Je dis que la surface *GKLD* est quatre neuvièmes de la surface *CB* et qu'elle est quatre en nombre.

Démonstration : prolongeons la droite *GK* jusqu'au point *I* et menons du point *E* une droite parallèle à *DB*, soit la droite *EH*. Prolongeons la droite *LK* jusqu'au point *S*, coupons la droite *LD* en deux moitiés au <point> *O* et menons du <point> *O* une droite parallèle à la droite *AB*, soit la droite *OF*. Ainsi il se produit dans la surface *CB* neuf surfaces égales qui sont les surfaces *EO*, *OM*, *MB*, *MI*, *IS*, *KF*, *FG*, *KN*, *NG*. Mais la surface *GL* est quatre surfaces parmi ces neuf. Elle est par conséquent quatre neuvièmes de la surface *CB*, et la surface *CB* est neuf. Donc la surface *GL* est quatre. Donc la droite *GD* est la racine de quatre, ce qui est deux. Ce qu'il fallait démontrer.

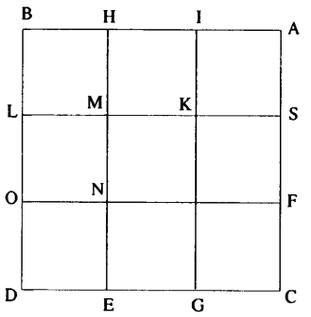


Fig. 19

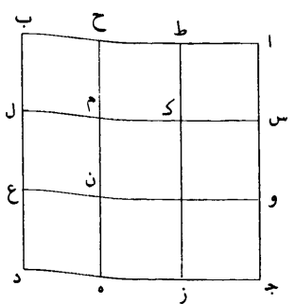
ومربّع ج ب ستّة عشر فمربّع هـ ز أربعة وستون. فخطّ هـ د جذر أربعة وستين، وهو ثمانية؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فإذا أردت أن تأخذ نصفَ جذرِ تسعة فاضرب نصفاً في نصفٍ فيكون ربعاً، فاضْرِبْه في تسعة فيكون اثنين وربعاً. فجذر اثنين وربع واحدٌ ونصف وهو نصف جذر تسعة.

فإن أردت أن تأخذ ثلثَي جذر تسعة فاضرب ثلثين في ثلثين فيكون أربعةَ أتساعٍ، فاضربها في تسعة فيكون أربعة وجذرها اثنان وهو ثلثا جذر تسعة.

وأبيّن ذلك في هذه الصورة: وهو أنّا نجعل التسعة سطحاً مربّعاً عليه ا ب ج د. فخطّ ج د جذر تسعة وهو جذر سطح مربّع ا ب ج د. فإذا أردنا أن نأخذ ثلثَيه فإنّا نقسم خطّ ج د بثلاثة أقسام متساوية وهي ج ز ز ه ه د. فخطّ د ز ثلثا خطّ ج د وهو ثلثا جذر سطح مربّع ج ب. فإذا أردنا أن نعلم جذر أيّ مال هو، فإنّا نعمل على خطّ ز د سطحاً مربّعاً، عليه ز ك / ل د؛ ١٨ - و
فأقول: إنّ سطح ز ك ل د أربعة أتساع سطح ج ب وهو أربعة من العدد.

برهانُ ذلك: أنّا نُخرِج خطّ ز ك على استقامةٍ إلى نقطة ط ونخرج من نقطة ه خطّاً يوازي د ب وهو خطّ ه ح. ونخرج خطّ ل ك على استقامةٍ إلى نقطة س ونقطع خطّ ل د بنصفين على ع، ونخرج من ع خطّاً يوازي خطّ ا ب وهو خطّ ع و. فقد حدث في سطح ج ب تسعة سطوح متساوية وهي سطوح ه ع ع م م ب م ط ط س ك و و ز ك ن ن ز، وسطح ز ل أربعة سطوح من هذه التسعة، وهو إذاً أربعة أتساع سطح ج ب، وسطح ج ب تسعة. فسطح ز ل أربعة، فخطّ ز د جذر أربعة، وهو اثنان؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



4 فجذر اثنين وربع: في الهامش — 11 ثلثا: ثلثي.

Tout ce qui te vient de cette espèce, fais-le selon cet exemple, si Dieu Très-Haut le veut.

Si tu veux multiplier la racine de neuf par la racine de quatre, alors multiplie neuf par quatre, on a trente-six ; prends sa racine qui est six, ce qui est la racine de neuf par la racine de quatre.

Je montre cela dans cette figure : posons la droite *AB* la racine de neuf et la droite *BC* la racine de quatre. Si nous voulons multiplier la droite *AB* par la droite *BC*, alors construisons sur la droite *AC* une surface carrée *AH*. Menons du point *B* une droite parallèle aux droites *AE* et *CH*, soit la droite *BG*. Chacune des droites *AE* et *CH* est la racine de neuf plus la racine de quatre. Posons la droite *MH* racine de quatre et menons du point *M* une droite parallèle aux droites *AC* et *HE*, soit la droite *MK*. La surface *AO* est neuf [18v] et la droite *KO* est la racine de neuf. Et la surface *OH* est quatre et la droite *GO* racine de quatre, car la droite *GO* est égale à la droite *OM* et la droite *OM* est égale à la droite *BC*. Mais *OB* est égale à *OK* et le rapport de *MO* à *OK* est égal au rapport de *GO* à *OB*. Mais le rapport de *MO* à *OK* est égal au rapport de la surface *OH* à la surface *GK*, et le rapport de *GO* à *OB* est égal au rapport de la surface *GK* à la surface *OA*. Le rapport de la surface *GM* à la surface *GK* est donc égal au rapport de la surface *GK* à la surface *OA*. Le produit du nombre qui est dans la surface *GM* par le nombre qui est dans la surface *OA* est égal au nombre qui est dans la surface *GK* par lui-même. Or Euclide a montré cela au sixième livre de son ouvrage[32] et il a dit : si on a trois nombres proportionnels, alors le produit du premier nombre par le troisième est égal au produit du second par lui-même. Nous multiplions

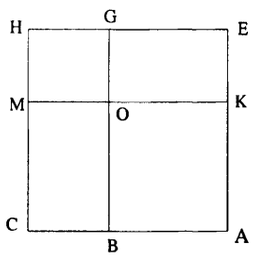


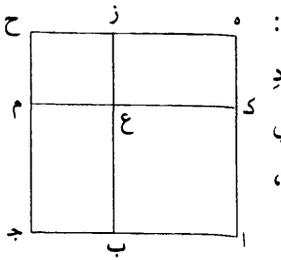
Fig. 20

[32] *Éléments*, VI.17 (éd. Heiberg) et VI.16 (trad. arabe Isḥāq-Thābit).

وكلّ ما جاءك من هذا النوع، فاعمله على هذا المثال إن شاء الله تعالى.

فإن أردت أن تضرب جذرَ تسعة في جذر أربعة، فاضرب تسعة في أربعة، فيكون ستّة وثلاثين، فتأخذ جذرها، وهو ستّة، وهو جذر تسعة في جذر أربعة.

وأبيّن ذلك <في> هذه الصورة: وهو أنّا نجعل خطّ ا ب جذر تسعة وخطّ ب ج جذر أربعة. فإذا أردنا أن نضرب خطّ ا ب في خطّ ب ج، فإنّا نعمل على خطّ ا ج سطحاً مربّعاً، عليه ا ح. ونُخْرِجُ من نقطة ب خطّاً موازياً لخطّي ا ه وَج ح وهو خطّ ب ز. وكلّ واحد من خطّي ا ه ج ح جذر تسعة وجذر أربعة. فنجعل خطّ م ح جذر أربعة ونخرج من نقطة م خطّاً موازياً لخطّي ا ج ح ه، وهو خطّ م ك. فسطح ا ع تسعة / وخطّ ك ع جذر تسعة، ١٨-ظ وسطح ع ح أربعة، وخطّ ز ع جذر أربعة، لأنّ خطّ ز ع مثل خطّ ع م وخطّ ع م مثل خطّ ب ج. وَع ب مثل ع ك، ونسبة م ع إلى ع ك كنسبة ز ع إلى ع ب. ونسبة م ع إلى ع ك كنسبة سطح ع ح إلى سطح ز ك. ونسبة ز ع إلى ع ب كنسبة سطح ز ك إلى سطح ع ا. فنسبة سطح ز م إلى سطح ز ك كنسبة سطح ز ك إلى سطح ع ا، فضرب العدد الذي في سطح ز م في العدد الذي في سطح ع ا مثل العدد الذي في سطح ز ك في نفسه. وقد بيّنَ ذلك أقليدس في المقالة السادسة من كتابه؛ فقال: إذا كانت ثلاثة أعدادٍ متناسبةً، فإنّ ضربَ العددِ الأوّل في العدد الثالث مثلُ ضرب العدد الثاني في نفسه. فنضرب ما في سطح ح ع من الآحاد،



4 الصورة: للصورة – 16 في المقالة السادسة من كتابه: في الهامش؛ ونقرأ أيضًا في الهامش بخط آخر:"ذكره في يز (غير منقّطة)". انظر الشكل السادس عشر من المقالة السادسة: "إذا كانت ثلاثة خطوط متناسبة، فإن السطح القائم الزوايا الذي يحيط به الخط الأول والخط الآخر مساوٍ للمربع الكائن من الخط الأوسط" (Escorial 907, fol. 59v). والشكل التاسع عشر من هذه المقالة، فهو "كل أربعة أعداد متناسبة، فإن مسطح الأول في الرابع مثل مسطح الثاني في الثالث" (Escorial 907, fol. 72v).

donc les unités qui sont dans la surface *HO*, soit quatre, par les unités qui sont dans la surface *AO*, qui sont neuf. On a alors trente-six. Le produit des unités qui sont dans la surface *GK* par elles-mêmes est trente-six. La surface *GK* est donc la racine de trente-six, ce qui est six. C'est ce qu'on obtient du produit de la racine de neuf par la racine de quatre, car *KO* est la racine de neuf et *OM* est la racine de quatre. Ce qu'il fallait démontrer.

Si on te dit : combien sont racine de dix par racine de trois, alors multiplie dix par trois, on a trente ; dis alors : racine de trente. Si on te dit : combien sont deux racines de dix par la moitié de racine de cinq, alors examine les deux racines de dix, de quel nombre elles sont la racine d'après ce que je t'ai montré, alors tu trouves que c'est la racine de quarante. Examine ensuite la moitié de la racine de cinq, de quel nombre elle est la racine ; tu le trouves comme je te l'ai montré, c'est la racine de un plus un quart. C'est comme si on te disait : combien sont la racine de quarante par la racine de un plus un quart. Multiplie quarante par un plus un quart, on a cinquante ; tu dis : [19r] c'est la racine de cinquante. Et elle est la racine de dix par la moitié de la racine de cinq. Je propose pour ce procédé une proposition générale. Il n'y a de puissance qu'en Dieu Très-Haut, Très-Grand.

Tout nombre multiplié par un nombre, dont on prend ensuite la racine du produit, sera égal au produit de la racine de l'un des nombres par la racine de l'autre nombre.

Exemple : *B* est un nombre et *A* est un nombre, la racine de *B* est *C* et la racine de *A* est *D*. On a multiplié *B* par *A*, on obtient *G*. La racine de *G* est *E*. On a multiplié *C* par *D*, on obtient *H*. Je dis que *H* est égal à *E*.

Démonstration : *C* a été multiplié par lui-même, on obtient *B*, et a été multiplié par *D*, on obtient *H*. La grandeur de *C* par rapport à *D* est donc égale à la grandeur de *B* par rapport à *H*. De même *D* a été multiplié par lui-même, on obtient *A* ; multiplié par *C*, on obtient *H*. La grandeur de *C* par rapport à *D* est donc égale à la grandeur de *H* par rapport à *A*. Or la grandeur de *C* par rapport à *D* était égale à la grandeur de *B* par rapport à *H* ; donc le produit de *B* par *A* est

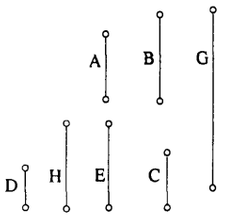


Fig. 21

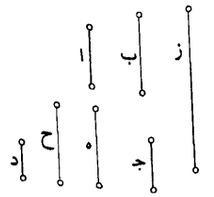
وهو أربعة، في ما في سطح ا ع من الآحاد وهي تسعة، فيكون ستّةً وثلاثين. فضرب ما في سطح ز ك من الآحاد في مثله ستّة وثلاثون. فسطح ز ك جذر ستّة وثلاثين وهو ستّة، وهو من ضرب جذر تسعة في جذر أربعة، لأنّ ك ع جذر تسعة وَ ع م جذر أربعة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فإن قيل لك: كم جذرَ عشرةٍ في جذر ثلاثة؟ فاضرب عشرة في ثلاثة فيكون ثلاثين، فقل: جذر ثلاثين. فإن قيل لك: كم جذري عشرة في نصف جذر خمسة؟ فانظر جذري عشرة: جذرُ أيّ عدد هو؟ على ما أريتك، فتجده جذر أربعين، ثم انظر نصفَ جذرِ خمسة: جذرُ أيِّ عدد هو؟ فتجده — على ما بيّنتُ لك — جذرَ واحدٍ وربع، فكأنّه قال لك: كم جذْر أربعين في جذر واحدٍ وربع؟ فاضرب أربعين في واحدٍ وربع فتكون خمسين. فتقول / جذر خمسين، ١٩-و وهو جذر عشرة في نصف جذر خمسة. وأنا واضع لهذا الباب شكلاً جامعاً ولا قوّة إلاّ باللهِ العليّ العظيم:

كلّ عدد يُضْرَبُ في عددٍ ثم يؤخذ جذر ما اجتمع، فإنّه يكون مثلَ ضربِ جذر أحد العددين في جذرِ العدد الآخرِ

ومثال ذلك: أن ب عددٌ وآ عدد وجذر ب ج وجذر آ د. وقد ضُرِبَ ب في آ فاجتمع ز وجذر ز ه، وضُرب ج في د فاجتمع ح؛ فأقول: إنّ ح مثل ه.

وبرهانُ ذلك: أنّ ج ضُرِبَ في نفسه فاجتمع ب وضُرِبَ في د فاجتمع ح. فقدْر ج عند د كقدْرِ ب عند ح. وأيضاً، د ضُرِبَ في نفسه فاجتمع آ، وضُرِبَ في ج فاجتمع ح، فقدْر ج عند د كقدرِ ح عند آ. وقد كان قدْر ج عند د كقدْرِ ب عند ح. فضَرْبُ ب في آ مثل



2 جذر: فوق السطر — 11 جذر (الأولى): جذرا — 12 العليّ: في الهامش — 15 ب ج: ب ج / آ د: ا د — 21 ج عند د: الجيم عند الدال.

égal au produit de *H* par lui-même. Mais le produit de *B* par *A* est *G*, donc le produit de *H* par lui-même est *G*. Mais le produit de *E* par lui-même est *G*. Donc le produit de *H* par lui-même est égal au produit de *E* par lui-même. Donc *H* est égal à *E*. Ce qu'il fallait démontrer.

Ce que je t'ai expliqué de cette espèce est suffisant. Il n'y a de force et de puissance si ce n'est en Dieu Très-Haut, Très-Grand.

Sache que, quand tu multiplies le quotient par le diviseur, on retrouve le divisé ; comme lorsque tu divises dix par deux, on obtient cinq. Lorsque tu multiplies deux par cinq, on obtient dix, qui est le nombre qu'on vient de diviser. Je compose pour ce procédé une proposition générale.

Pour tout nombre divisé par un nombre, le produit du quotient par le nombre diviseur est égal au nombre divisé.

Exemple : *A* est le nombre divisé, *B* est le diviseur, on a divisé *A* [19ᵛ] par *B*, on obtient *C*. Je dis que le produit de *B* par *C* est *A*.

Démonstration : *A* a été divisé par *B*, on obtient *C*, donc *C* mesure *A* par les unités de *B*. Et l'unité mesure *B* par autant de ses unités. Donc la grandeur de l'unité par rapport au nombre *B* est égale à la grandeur de *C* par rapport à *A*. Or le produit de l'unité par *A* est égal au produit de *B* par *C*, et le produit de l'unité par *A* est *A*, donc le produit de *B* par *C* est *A*. Ce qu'il fallait démontrer.

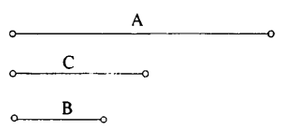


Fig. 22

Si on te dit : divise la racine de neuf par la racine de quatre, alors divise neuf par quatre, on obtient deux plus un quart ; prends sa racine, qui est un plus un demi, c'est la racine de neuf divisée par la racine de quatre. Si on te

ضَرْبِ حَ في مثله، وضربُ بَ في آ هو زَ، فضربُ حَ في مثله هو زَ. وضَرْبُ هَ في مثله هو زَ، فضربُ حَ في مثله مثل ضَرْبِ هَ في مثله. فَ حَ مثل هَ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

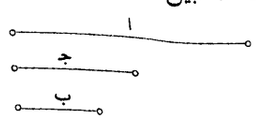
ففيما فسّرت لك من هذا النوع كفايةٌ. ولا حول ولا قوّة إلاّ بالله العليّ العظيم.

اعلم أنّك متى ما ضربت ما خرج من القسم في المقسوم عليه عاد المقسومُ. كأنّك قسمت عشرة على اثنين فخرج خمسة. فمتى ضربت الاثنين في خمسة كان عشرة، وهو العدد المقسوم أوّلاً. وأنا واضع لهذا الباب شكلاً جامعاً إن شاء الله تعالى:

كلّ عددٍ يُقْسَمُ على عددٍ فإنّ ضربَ ما يَخْرُجُ من القسم في العدد المقسوم عليه مثل العدد المقسوم.

مثال ذلك: أنّ الأَلِفَ العددُ المقسومُ والباءَ العدد المقسومُ عليه، وقد قُسِمَ آ على بَ فخرج جَ؛ فأقول: إنّ ضربَ بَ في جَ هو آ. / ١٩-ظ

برهانُ ذلك: أن آ قُسِمَ على بَ فخرج جَ. فَ جَ يعدُّ آ بقدر ما في بَ من الآحاد، والواحد يعدُّ بَ بقدر آحاده. فقَدْر الواحد عند عددِ بَ كقدْرِ جَ عند آ. وضربُ الواحد في آ مثل ضَرْبِ بَ في جَ، وضربُ الواحد في آ هو آ. فضرب بَ في جَ هو آ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



فإن قيل لك: اقسم جذر تسعة على جذر أربعة، فاقسم تسعة على أربعة فيخرج اثنان وربع. فَخُذْ جذرَها، وهو واحد ونصف، وهو جذر تسعة مقسوم

4 العليّ: في الهامش — 15 والواحد ... آحاده: في الهامش — 19 اثنان: اثنين.

dit : divise la racine de dix par la racine de deux, alors divise dix par deux, il vient cinq, dis alors : racine de cinq. Si on te dit : divise les deux racines de vingt par les trois racines de six, alors examine les deux racines de vingt, de quel nombre elles sont la racine, comme je te l'ai expliqué. Tu trouves : racine de quatre-vingts. Examine ensuite trois racines de six, de quel nombre c'est la racine, tu trouves : racine de cinquante-quatre. Divise quatre-vingts par cinquante-quatre. On obtient un dirham et quatre neuvièmes et un tiers d'un neuvième. La racine de cela est deux racines de vingt <divisé par> trois racines de six. De même tout ce qui te vient de cette espèce, c'est selon cet exemple. Je te montre cette espèce dans une proposition générale, si Dieu Très-Haut le veut.

Soit deux nombres dont l'un divise l'autre, alors la racine du quotient est égale à ce qu'on obtient de la division de la racine du nombre divisé par la racine du nombre diviseur.

Exemple : le nombre *A* a été divisé par le nombre *B*, on obtient le nombre *C*. La racine du nombre *B* est *D* et la racine du nombre *A* est *H* ; on a divisé *H* par *D*, on a obtenu *O*. Je dis que *O* est la racine de *C*.

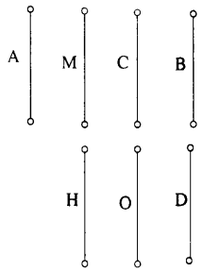


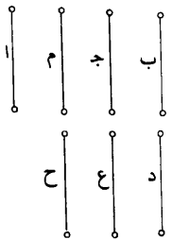
Fig. 23

Démonstration : *A* a été divisé par *B*, on obtient *C*, donc *C* mesure *A* par la quantité des unités qui sont dans *B* ; mais l'unité mesure *B* par la quantité des unités qui sont dans *B*, donc la grandeur de l'unité par rapport à *B* est égale à la grandeur de *C* par rapport à *A*. De même *H* a été divisé par *D*, et on a obtenu *O*, ce qui est le quotient ; donc *O* mesure *H* par la quantité des unités qui sont dans *D*, et l'unité mesure *D* par la quantité des unités qui sont dans *D* ; donc la grandeur de l'unité par rapport à *D* est égale à la grandeur de *O* par rapport à *H*. [20r] Mais un multiplié par lui-

على جذر أربعة. فإن قيل لك: اقسم جذر عشرة على جذر اثنين، فاقسم عشرة على اثنين فيخرج خمسة، فقل جذر خمسة. فإن قيل لك: اقسم جذري عشرين على ثلاثة أجذارِ ستّةٍ. فانظر جذري عشرينَ: جذرُ أيّ عددٍ هو؟ على ما فسَّرت لك، فتَجده جذر ثمانين. ثم انظر ثلاثة أجذارِ ستّة: جذرُ أيِّ عددٍ هو؟ فتجده جذرَ أربعةٍ وخمسين. فاقسم ثمانين على أربعة وخمسين، فيخرج درهمٌ وأربعة أتساعٍ وثلث تسعٍ. فجذرُ ذلك هو جذرا عشرين على ثلاثة أجذار ستّةٍ. وكذلك جميع ما جاءك من هذا النوع فعلى هذا المثال. وأنا مبيّنٌ لك هذا النوع في شكلٍ جامعٍ إن شاء الله تعالى:

كلّ عددين يُقْسَمُ أحدُهما على الآخر، فإنّ جذرَ ما يَخرجُ من القسْم مثلُ الذي يخرج من قسمةِ جذرِ العددِ المقسوم على جذرِ العدد المقسوم عليه.

مثال ذلك: أنّ عدد آ قُسِمَ على عدد ب فَخَرَجَ عددُ جـ. وجذرُ عددِ ب هو دَ وجذرُ عددِ آ هو حَ. وقد قُسِمَ حَ على دَ فَخَرَج عَ؛ فأقول: إنّ عَ جذر جـ.



برهانُ ذلك: أنّ آ قُسِمَ على ب فخرج جـ. فَ جـ يعدُّ آ بقدر ما في ب من الآحاد، والواحد يعدُّ ب بقدر ما في ب من الآحاد. فقدر الواحد من ب كقدر جـ من آ. وأيضاً، حَ قُسِمَ على دَ فخرج عَ - وهو ما يخرج من القسم - فَ عَ يعدُّ حَ بقدر ما في دَ من الآحاد. والواحد يعدُّ دَ بقدر ما في دَ من الآحاد. فقدر الواحد من دَ كقدر عَ من حَ. / والواحدُ ضُرِبَ في نفسه فكان واحداً، ودَ ٢٠ - و

11 وجذر عدد ب: في الهامش — 15-17 والواحد يعدّ ... الآحاد: في الهامش — 16 وهو ما يخرج من القسم: كتب بجانبها في الهامش العلامة "خ"، وهذا يعني أنه وجدها في نسخة أخرى.

même donne un, *D* multiplié par lui-même donne *B*, *O* multiplié par lui-même donne *M* et *H* multiplié par lui-même donne *A*, donc la grandeur de l'unité par rapport à *B* est égale à la grandeur de *M* par rapport à *A*. Or la grandeur de l'unité par rapport à *B* est égale à la grandeur de *C* par rapport à *A*, donc la grandeur de *C* par rapport à *A* est égale à la grandeur de *M* par rapport à *A* ; donc *C* est égale à *M* ; mais *O* est la racine de *M*, donc *O* est la racine de *C*. Ce qu'il fallait démontrer.

<Addition et soustraction des racines>

Si tu veux réunir la racine de l'un des nombres à la racine d'un autre nombre pour savoir de quel *carré* elle est la racine, cela n'est pas possible pour tout nombre, mais c'est possible pour deux nombres carrés dont chacun a une racine, ou si des deux nombres l'un divisé par l'autre le quotient a une racine, et si le produit de l'un multiplié par l'autre a une racine. Mais ce n'est pas possible d'additionner les racines de deux nombres dans les autres cas de sorte que cela devienne la racine d'un seul nombre. De même pour soustraire l'un de l'autre.

Commençons d'abord par les deux nombres carrés qui sont neuf et quatre. Si nous voulons additionner la racine de neuf et la racine de quatre de sorte que vienne la racine d'un seul nombre, alors nous additionnons neuf et quatre ; on a treize, nous le retenons. Puis nous multiplions neuf par quatre ; on a trente-six ; nous prenons leurs deux racines ; on a douze, que nous ajoutons au treize que nous avons retenu ; on a vingt-cinq. Donc la racine de vingt-cinq est la racine de neuf et la racine de quatre additionnées, ce qui est cinq.

Et je montre cela dans cette figure : posons la droite *AB* racine de neuf et la droite *AC* racine de quatre. Si [20^{v}] nous voulons savoir de quel nombre la droite *CB* est racine, alors nous construisons sur la droite *CB* une

ضُرِبَ في نفسه فاجتمع بَ، وَ عَ ضُرِبَ في نفسه فاجتمع مَ، وَ حَ ضُرِبَ في نفسه فاجتمع اَ. فقدر الواحد من بَ كقدر مَ من اَ. وقد كان قدرُ الواحد من بَ كقدر جَ من اَ. فقدرُ جَ من اَ كقدر مَ من اَ فَ جَ يساوي مَ. وَ عَ جذر مَ، فَ عَ جذر جَ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

<جمع وطرح الجذور>

فإن أردت أن تَضُمَّ جذرَ عددٍ من الأعداد إلى جذر عددٍ آخر حتى تعلم جذر أيِّ مال هو، فليس يمكن ذلك في كلّ عددٍ، إنّما يمكن في العددين المربّعين اللذين لكلّ واحدٍ منهما جذرٌ، أو العددين اللذين إذا قُسِمَ أحدُهما على الآخر كان لِما يخرج من القسم جذرٌ، وإذا ضُرِبَ أحدُهما في الآخر كان لِما اجتمع جذرٌ. فأمّا في غير ذلك فليس يمكن أن تجمع جذريهما حتّى تصيِّره جذراً واحداً لعددٍ ما. وكذلك في نقصان أحدهما من الآخر.

فنبدأ أوّلاً بالعددين المربّعين وهما تسعة وأربعة. فإذا أردنا أن نجمع جذر تسعةٍ وجذر أربعةٍ حتى نصيّره جذراً لعددٍ واحدٍ، فإنّا نجمع التسعة والأربعة فيكون ثلاثة عشر، فنحفظها. ثم نضرب تسعةً في أربعة فيكون ستّةً وثلاثين، فنأخذ جَذْريها فيكون اثني عشر. فنـــزيده على الثلاثة عشر التي حفظناها فيكون خمسة وعشرين، فجذرُ خمسة وعشرين هو جذر تسعة وجذر أربعة مجموعين، وهو خمسة.

وأبيِّن ذلك في هذه الصورة: وهو أنّا نجعل خطّ اَ بَ جذر تسعة، وخطّ اَ جَ جذر أربعة. فإذا / أردنا أن نعلمَ خطّ جَ بَ: جذرُ أيِّ عددٍ هو؟ فإنّا نعمل ٢٠-ظ

2 اَ (الثانية): الف، وهو علامة على الإملاء / وقد كان: كتب أوّلاً "وقد" ثمّ كتب فوقها "قد كان" – 3 يساوي: مساوي / مَ (الثانية): ميم.– 15 اثني عشر: اثنا عشر– 16 فجذر: كتب قبلها "فهو" ثمّ ضرب عليها بالقلم.

surface carrée *CG*. La droite *CB* est la racine de la surface *CG* ; nous construisons sur la droite *AB* une surface carrée *ABKL*, et nous prolongeons *AK* jusqu'au point *H* et *KL* jusqu'au point *O* ; la surface *KB* est neuf car la droite *AB* est la racine de neuf, et la surface *OH* est quatre car *AC* est racine de quatre ; mais *AC* est égale à *OK* et la surface *AO* est six, car elle est le produit de la racine de neuf, qui est la droite *AK*, par la racine de quatre, qui est la droite *AC*. Or la surface *KG* est aussi six. Donc la surface *CG* tout entière est vingt-cinq et la droite *CB* est la racine de vingt-cinq, ce qui est cinq. Ce qu'il fallait démontrer.

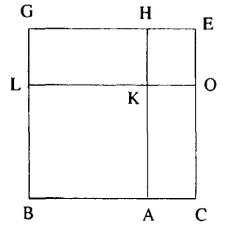


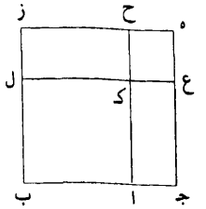
Fig. 24

Si tu veux soustraire la racine de quatre de la racine de neuf, pour que le reste de la racine de neuf soit racine d'un seul nombre, alors tu additionnes le neuf et le quatre ; on a treize, que tu retiens. Tu multiplies ensuite le neuf par le quatre, on a trente-six ; tu prends le double de sa racine, on a douze ; tu l'ôtes de treize que tu as retenu, il reste un. La racine de un est donc la racine de neuf moins la racine de quatre, ce qui est un.

Je montre cela dans cette figure :

Nous posons la droite *AB* racine de neuf et la droite *AC* racine de quatre ; si nous soustrayons la droite *AC* de la droite *AB*, il reste la droite *CB* ; si nous voulons savoir combien est la droite *CB* et de quel nombre elle est la racine, [21r] alors nous construisons sur la droite *AB* une surface carrée *AG* ; la surface *AG* est donc neuf. Nous construisons sur la droite *AC* une surface carrée *AM*, la surface *AM* est donc quatre ; prolongeons la

على خطّ ج ب سطحاً مربّعاً عليه ج ز، فخطّ ج ب جذر سطح ج ز. فنعمل على خطّ ا ب سطحاً مربّعاً عليه ا ب ك ل، ونُخْرِجُ ا ك على استقامةٍ إلى نقطة ح وَك ل على استقامةٍ إلى نقطة ع. فسطح ك ب تسعة؛ لأنّ خطّ ا ب جذر تسعة، وسطح ع ح الأربعة، لأنّ ا ج جذر أربعة وَا ج مثل ع ك. وسطح ا ع ستّة لأنّه من ضرب جذر تسعة، الذي هو خطّ ا ك، في جذر أربعة الذي هو خطّ ا ج، وسطح ك ز أيضاً ستّة. فجميع سطح ج ز خمسة وعشرون، وخطّ ج ب جذر خمسة وعشرين وهو خمسة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



فإن أردت أن تنقص جذرَ أربعة من جذر تسعة، حتى يكون ما بقي من جذر تسعة جذراً لعددٍ واحدٍ، فإنّك تجمع التسعة والأربعة فيكون ثلاثة عشر، فتحفظها. ثم تضرب التسعة في الأربعة فتكون ستّةً وثلاثين فتأخذ جذريها فيكون اثني عشر، فتسقطها من الثلاثة عشر التي حُفظت فيبقى واحدٌ. فجذرُ واحدٍ هو جذر تسعةٍ إلاّ جذر أربعة، وهو واحد.

وأبيّن ذلك في هذه الصورة:

وهو أنّا نجعل خطّ ا ب جذر تسعة، وخطّ ا ج جذر أربعة. فإذا نقصنا خطّ ا ج من خطّ ا ب، بقي خطٌّ ج ب. فإذا أردنا أن نعلم كم خطّ ج ب وجذر أيّ عدد هو،/ فإنّا نعمل على خطّ ا ب سطحاً مربّعاً عليه ا ز، فسطح ٢١و
ا ز تسعة. ونعمل على خطّ ا ج سطحاً مربّعاً عليه ا م، فسطح ا م أربعة.

3 وك ل ... ع: في الهامش — 4 لأنّ: بان (الباء غير منقّطة) — 12 اثني عشر: اثنا عشر.

droite *HM* jusqu'à *N* et la droite *CM* jusqu'à *K*. Il est clair que le carré *MG* est le produit de la droite *CB* par elle-même. Mais la surface *HK* est deux car la surface *AK* est six, puisqu'elle est le produit de *AC* par *AE*, qui est la racine de neuf ; et la surface *AM* est quatre ; il reste la surface *HK*, deux ; de même la surface *CN* est deux ; il reste le carré *MG* égal à un. Mais la droite *MN* est sa racine, elle est un. Or la droite *MN* est égale à la droite *CB*, donc la droite *CB* est un. Ce qu'il fallait démontrer.

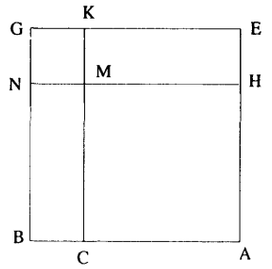


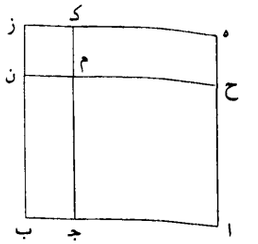
Fig. 25

Si tu veux additionner la racine de dix-huit et la racine de huit de sorte qu'elles soient une racine d'un seul nombre, alors cela peut s'additionner car, si tu divises dix-huit par huit, on obtient deux plus un quart, qui a une racine, et sa racine est un et demi. Si tu divises huit par dix-huit, on obtient quatre neuvièmes, qui a une racine, et sa racine est deux tiers. Et si tu multiplies dix-huit par huit, on a cent quarante-quatre, qui a une racine, et sa racine est douze.

Tout nombre dont la racine peut s'additionner à la racine d'un autre nombre est soumis à cette règle. Leurs deux racines s'additionnent de sorte qu'elles deviennent une racine d'un seul nombre. Si l'une des trois propriétés que nous avons décrites se trouve dans les deux nombres, alors les trois propriétés se trouvent en eux.

Si tu veux savoir de quel nombre elle est la racine, alors procède comme je te l'ai décrit, c'est-à-dire que tu additionnes le dix-huit et le huit, on a vingt-six, que tu retiens. Tu multiplies ensuite huit par dix-huit, on a

ونُخرج خطّ ح م على استقامةٍ إلى ن، وخطّ جـ م على استقامة إلى ك. فَبيِّنٌ أنّ مربّعَ م ز هو من ضرب خطّ جـ ب في نفسه، وسطح ح ك اثنان لأنّ سطح ا ك ستّة، لأنّه من ضرب ا جـ في ا ه الذي هو جذر تسعة، وسطح ا م أربعة، فبقي سطح ح ك اثنان. وكذلك سطح جـ ن اثنان، فبقي مربّع م ز واحداً، وخطّ م ن جذره وهو واحد. وخطّ م ن مثل خطّ جـ ب، فخطّ جـ ب واحد؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



فإن أردتَ أن تجمع جذرَ ثمانية عشر وجذرَ ثمانية حتى يكونا جذراً لعددٍ واحدٍ، فإنّ هذا يجتمع؛ لأنّك إذا قسمت ثمانيةَ عشرَ على ثمانية خرج اثنان وربع، وله جذر، وجذرُه واحد ونصف. وإن قسمت الثمانية على الثمانية عشر، خرج أربعة أتساع وله جذر، وجذرُه ثلثان. وإن ضربت ثمانية عشر في ثمانية كان مائةً وأربعةً وأربعين، ولها جذر، وجذرها اثنا عشر.

وكلّ عددٍ يُجمع جذره إلى جذر عددٍ آخر يكون حكمُهما هذا الحكم، فإنّ جذريهما يجتمعان حتى يكونا جذراً لعددٍ واحد. وإذا كانت خلّة واحدة من هذه الثلاثِ خلال التي وصفناها توجد في العددين، فإنّ الخلال الثلاثة موجودة فيهما.

فإن أردت أن تعلم جذر أيّ عددٍ هو، فاعمل كما وصفت لك: وهو أن تجمع الثمانية عشر والثمانية، فتكون ستّةً وعشرين فاحفظها، ثم اضْرِبْ الثمانية

3 في ا ه: في الهامش — 4 واحداً: واحد — 7 يكونا: يكونان، ثم ضرب على النون بالقلم — 15 موجودة: موجود.

cent quarante-quatre ; tu prends le double de sa racine, qui est vingt-quatre, que tu ajoutes au vingt-six que tu as retenu, on a cinquante. La racine de cinquante est donc la racine de huit et la racine de dix-huit additionnées. Si tu veux soustraire racine de huit de racine de dix-huit, alors tu ôtes le vingt-quatre [21ᵛ] de vingt-six que tu avais retenu, il reste deux. La racine de deux est donc la racine de dix-huit moins la racine de huit.

Si tu veux additionner la racine de dix à la racine de deux, alors ceci ne peut pas être additionné, ni être une racine d'un seul nombre. Car si tu divises le dix par deux, on obtient cinq, et cinq n'a pas de racine. Et si tu divises deux par dix, on obtient un cinquième, et un cinquième n'a pas de racine. Et si tu multiplies deux par dix, on a vingt et vingt n'a pas de racine. Si tu les additionnes comme je te l'ai décrit, on obtient le double de racine de vingt, que tu ajoutes à douze, une fois prise la racine <de la somme>, c'est-à-dire la racine de dix et la racine de deux. Et si tu veux le soustraire de l'autre, tu procèdes comme je te l'ai décrit : on obtient douze moins le double de racine de vingt. Une fois prise la racine du reste, c'est racine de dix moins racine de deux. La question en cela est mieux que la réponse.

Mais il faut, si on te pose une chose de ce genre, que ta réponse soit équivalente à la question, car tu dis : racine de dix et racine de deux est mieux que de dire douze plus le double de racine de vingt une fois prise la racine <de la somme>. Et tu dis également pour la soustraction de l'un de l'autre : racine de dix moins racine de deux est mieux que de dire douze moins le double de racine de vingt, une fois prise la racine du reste, ce qui est racine de dix moins racine de deux. Et le double de racine de vingt est la racine de quatre-vingts. Ce que je viens de te montrer est suffisant, si Dieu le veut.

في ثمانية عشر، فتكون مائةً وأربعة وأربعين. فتأخذ جذريها وهو أربعة وعشرون، فتزيدها على الستّة والعشرين التي حُفظت فيكون خمسين. فجذر خمسين هو جذر ثمانية وجذر ثمانية عشر مجموعَيْن. فإن أردت أن تُنقص جذر ثمانية من جذر ثمانيةَ عشرَ فأسْقِطْ الأربعة والعشرين / من الستّة والعشرين التي ٢١-ظ
حُفظت، فيبقى اثنان. فجذرُ اثنين هو جذر ثمانية عشرَ إلاّ جذرَ ثمانية.

فإن أردت أن تجمع جذر عشرة إلى جذر اثنين فإنّ هذا لا يُجمع ولا يكون جذراً لعددٍ واحدٍ؛ لأنّك إذا قسمت العشرة على اثنين، خرج خمسة وليس للخمسة جذر؛ وإن قسمت اثنين على عشرة، خرج خُمسٌ وليس للخُمسِ جذر. وإن ضربت اثنين في عشرة كان عشرين، وليس للعشرين جذر، فإن جمعتَهما على ما وصفتُ خرج جذرا عشرين تُزاد على اثني عشر، مأخوذٌ جذرُه، هو جذر عشرة وجذر اثنين. وإن أردتَ أن تنقصه من الآخر وعملتَ كما وصفتُ لك خرج اثنا عشر إلاّ جذري عشرين، مأخوذٌ جذرُ ما بقي، هو جذر عشرة إلاّ جذر اثنين. فالسؤال في هذا أحسن من الجواب.

وإنّما ينبغي إذا ألقي عليك شيء من هذا الجنس أن يكون جوابك فيه كما ألقي عليك سَواء. لأنّك تقول جذر عشرة وجذر اثنين أحسن من أن تقول: اثنا عشر وجذرا عشرين، مأخوذٌ جذره. وتقول أيضاً في نقصان أحدهما من الآخر: جذر عشرة إلاّ جذر اثنين، أحسن من أن تقول: اثنا عشر إلاّ جذري عشرين، مأخوذٌ جذرُ ما بقي، هو جذر عشرةٍ إلاّ جذرَ اثنين، وجذرا عشرين هو جذر ثمانين. ففيما بيّنت لك كفايةٌ إن شاء الله.

14 فيه: فيها.

<Les six problèmes>

Voici les six problèmes que je t'ai appris ; je poserai un problème pour chacun de ces modes auquel te ramène le calcul de l'algèbre.

Le premier de ces six <problèmes>

C'est par exemple quand tu dis : tu as divisé dix en deux parties, tu as multiplié l'une des parties par l'autre, puis tu as multiplié la partie la plus grande par elle-même, alors celle multipliée par elle-même est égale à une fois et demie l'une des deux parties par l'autre.

On l'infère ainsi : Tu poses la plus grande partie une chose, et l'autre dix moins une chose, tu multiplies une chose par dix moins une chose, on a dix choses moins un *carré*, puis tu multiplies [22r] la partie la plus grande par elle-même, ce qui est une chose, on a un *carré* ; on a donc une fois et demie dix choses moins un *carré* ; multiplie alors dix choses moins un *carré* par un et demi, on a quinze choses moins un *carré* et demi, égales à un *carré* ; restaure le quinze par le *carré* et demi, afin qu'on ait exactement quinze choses. Ensuite ramène le *carré* plus un demi au *carré* ; on a donc deux *carrés* et demi égaux à quinze choses ; le *carré* est donc égal à six choses et la chose est égale à six. C'est la plus grande partie. L'autre partie est quatre, ce qui reste de dix. Ce problème t'a donc conduit au premier des six modes, qui est : « des *carrés* égaux à des racines »[33].

Je montre ce problème dans l'une des figures. Nous posons la droite *AB* dix, la droite *AC* la grande partie et la droite *CB* la petite partie. Nous multiplions la droite *AC* par la droite *CB* ; on a la surface *CD*. Nous avons en effet posé la droite *CE* égale à la droite *AC*. Nous multiplions la droite *AC* par elle-même, on a une surface carrée *AE*. La surface *AE* est donc égale à une fois et demie la surface *CD* ; donc la droite *AC* est égale à

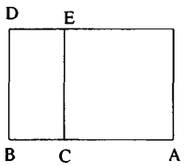


Fig. 26

[33] Cf. Al-Khwārizmī, *Le livre d'algèbre*, p. 144. Notons qu'Abū Kāmil donne une démonstration géométrique pour chaque problème.

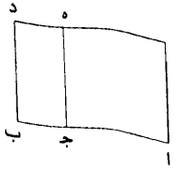
<المسائل الستة>

وهذه الستّ المسائل التي أعلمتك أنّي واضع لكلّ ضرب من الضروب الستّة مسألةً يخرجك <فيها> حسابُ الجبر إليه.

فالأوّلى من الست

نحو قولِك: عشرةٌ قسمتَها قسمين فضربت أحد القسمين في الآخر، ثم ضربت القسم الأكثر في نفسه، فكان المضروبُ في نفسه مثلَ أحد القسمين في الآخر مرّةً ونصفاً.

قياسُه: أن تجعل القسم الأعظم شيئاً والآخرَ عشرةً إلاّ شيئاً. فتضرب شيئاً في عشرة إلاّ شيئاً فيكون عشرة أشياء غيرَ مال. ثم تضرب / القسم الأكثر في مثله، وهو شيء، فيكون مالاً، فيكون مثل عشرة أشياء إلاّ مالاً مرةً ونصفاً. فاضرب عشرة أشياء إلاّ مالاً في واحدٍ ونصف، فيكون خمسة عشر شيئاً إلاّ مالاً ونصفاً تعدل مالاً. واجبر الخمس عشرة بالمال والنصف حتّى تكون خمسة عشر شيئاً سواءً. ثم رُدَّ المال والنصف على المال، فيكون مالين ونصف مال تعدل خمسة عشر شيئاً. فالمالُ يعدل ستّةَ أشياء والشيء يعدل ستّة، وهو القسم الأكْبَر، والقسم الآخر أربعةٌ وهو الباقي من العشرة. فقد أخْرَجَتْك هذه المسألة إلى الضرب الأوّل من الضروب الستّة وهي: أموال تعدل جذوراً.



وأبيِّن هذه المسألة في صورة من الصور: وهو أنّا نجعل خطّ ا ب عشرة وخطّ ا ج القسم الأعظم وخطّ ج ب القسم الأصغر. فنضرب خطّ ا ج في خطّ ج ب فيكون سطحُ ج د، لأنّا جعلنا خطّ ج ه مثل خطّ ا ج. ونضرب خطّ ا ج في نفسه فيكون سطح مربّع ا ه. فسطح ا ه مثل سطح ج د

2 الست: الستّة — 8 الأعظم: فوق السطر / شيئاً (الثانية): شيء — 9 شيئاً: شيء — 13 مال: فوق السطر — 21 سطح (الأولى): كتبها أوّلاً "سطحا" ثم صحّحها عليها.

une fois et demie la droite *CB*. La droite *AB* tout entière est donc égale à deux fois et demie la droite *CB*. Mais la droite *AB* est dix. Donc la droite *CB* est quatre et la droite *AC* est six. Ce qu'il fallait démontrer.

Deuxième problème

Tu as divisé dix en deux parties, tu as multiplié l'une des parties par elle-même, puis tu as multiplié le dix par lui-même, de sorte que le produit de dix par lui-même soit égal à six fois plus un quart de fois l'une des deux parties multipliée par elle-même.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des deux parties une chose, que tu multiplies par elle-même, on a un *carré* ; puis tu multiplies le dix par lui-même, on a cent. Le cent est égal à six fois plus un quart de fois le *carré*. Tu multiplies le *carré* [22ᵛ] par six et un quart, on a six *carrés* plus un quart de *carré*, égaux à cent. Ramène-le à un seul *carré*, qui est quatre parties de vingt-cinq, c'est-à-dire quatre cinquièmes de cinquième. Prends de cent les quatre cinquièmes de son cinquième, ce qui est seize ; on a donc seize égal à un *carré*. Sa racine est quatre, c'est la partie cherchée. Ce problème t'a donc conduit au second des six modes, qui est : « des *carrés* égaux à un nombre ».

Je montre cela dans cette figure. Posons la droite *AB* dix et *CB* la partie cherchée ; multiplions la droite *AB*, qui est dix, par elle-même ; on a cent, ce qui est la surface *AM*. Nous multiplions ensuite la droite *CB* par elle-même, ce qui est la partie cherchée ; on a le carré *CD*. Le carré *AM*, qui est cent, est donc six fois un quart du carré *CD*. Partageons le carré *CD* en quatre parties égales dont chacune est égale au carré *BH*. La surface *AM* est donc vingt-cinq fois le carré *BH*. Mais la surface *AM*

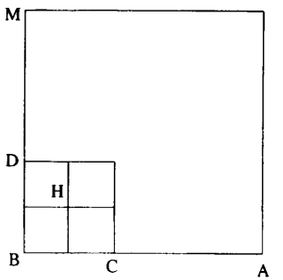


Fig. 27

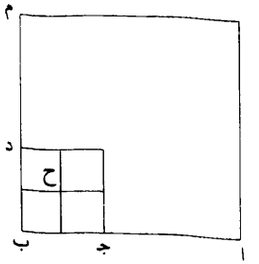
مرّة ونصفاً، فخطّ ا ج مثل خطّ ج ب مرّة ونصفاً. فخطّ ا ب كلّه مثل خطّ ج ب مرّتين ونصفاً. وخطّ ا ب عشرة، فخطّ ج ب أربعة وخطّ ا ج ستّة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

والمسألة الثانية

عشرةٌ قسمتها قسمين فَضَرَبْت أحد القسمين في نفسه، ثم ضربت العشرة في مثلها، فكان مضروب العشرة في مثلها مثل أحد القسمين مضروباً في نفسه ستّ مرّاتٍ وربع مرة.

قياسُه: أن تجعل أحد القسمين شيئاً وتضربه في مثله فيكون مالاً، ثم تضرب العشرة في مثلها فيكون مائة. فهذه المائة مثل المال ستّ مرّات وربع مرّة. فَتَضْرِبُ المال / في ستّة وربع، فيكون ستّة أموالٍ وربع مالٍ يعدل مائةً. ٢٢-ظ فارْدُدْه إلى مالٍ واحدٍ وهو أربعة أجزاءٍ من خمسة وعشرين، وهو أربعة أخماس الخُمس. فخذ من المائة أربعة أخماسِ خُمسِها وهو ستّة عشر، فيكون ستّة عشر يعدل مالاً. فجذرها أربعة وهو القسم المطلوب. فقد أخرجتك هذه المسألة إلى الضرب الثاني من الضروب الستّة: وهي أموال تعدل عدداً.

وأبيّن ذلك في هذه الصورة: وهو أنّا نجعل خطّ ا ب عشرة وَج ب القسم المطلوب. ثم نضرب خطّ ا ب، وهو عشرة، في مثله فيكون مائة، وهو سطح ا م. ثم نضرب خطّ ج ب في نفسه وهو القسم المطلوب، فيكون مربّع ج د. فمربّع ا م، الذي هو مائة، ستّة أمثال وربع مثل مربّع ج د. فنقسم مربّع ج د أربعة أقسام



2 ونصفاً: ونصف — 5 العشرة: للعشرة. وكثيراً ما يصل الألف باللام في هذه الكلمة وفي كلمات أخرى، وهذا من عادة بعض النسّاخ، ولن نشير إليها فيما بعد— 13 أخرجتك: اخرجا، مما يعني أن الناسخ لم يكمل رسم الكاف.

est cent, le carré *BH* est quatre et le carré *CD* est seize ; la droite *CB* est donc quatre, c'est la partie cherchée. Ce qu'il fallait démontrer.

Troisième problème

Tu as divisé dix en deux parties et tu as divisé la plus grande partie par la plus petite partie ; le quotient est quatre.

On l'infère ainsi : posons la plus petite partie une chose et la plus grande dix moins une chose. On divise dix moins une chose par une chose, on obtient quatre. Or je t'ai appris que, si tu multiplies le quotient par le diviseur, tu obtiens le nombre que tu as divisé. Alors tu multiplies une chose par quatre, on a quatre choses égales à dix moins une chose. [23r] Restaure le dix par la chose et ajoute-la aux quatre choses ; on a cinq choses égales à dix dirhams et la chose est égale à deux. Ainsi ce problème t'a mené au troisième des six modes, c'est-à-dire : « des choses sont égales à un nombre »[34].

Je te montre cela dans cette figure. Posons la droite *AB* dix, *CB* la plus petite partie et la droite *AC* la plus grande. Si nous divisons la droite *AC* par la droite *CB*, on obtient quatre. *AC* est donc le quadruple de *CB* ; donc *AB* est le quintuple de *CB*. *CB* est donc le cinquième de *AB* ; mais *AB* est dix, donc *CB* est deux. Ce qu'il fallait démontrer.



Fig. 28

[34] Cf. al-Khwārizmī, *Livre d'algèbre*, p. 148.

متساوية كلّ واحدٍ منها مثل مربّع ب ح. فيكون سطحُ ا م خمسةً وعشرين مرةً مثلَ مربّع ب ح. وسطح ا م مائة، ومربّع ب ح أربعة، ومربّع ج د ستّة عشر، فخطّ ج ب أربعة، وهو القسم المطلوب؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

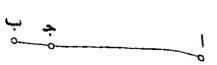
والمسألة الثالثة

عشرةٌ قسمتها قسمين فقسمت القسم الأعظم على القسم الأصغر فخرج أربعةٌ.

قياسُه: أنّا نجعل القسم الأصغر شيئاً والأعظمَ عشرةً إلاّ شيئاً. فنقسم عشرة إلاّ شيئاً على شيء فيخرج أربعة. وقد أعلمتك أنّك إذا ضربت ما خرج من القسم في المقسوم عليه اجتمع العدد الذي قسمته. فتضرب شيئاً في أربعة، فتكون أربعة أشياء تعدل عشرة إلاّ شيئاً، / فاجبر العشرة بالشيء، وزِدْه على الأربعةِ الأشياء، فيكون خمسة أشياء تعدل عشرة دراهم، فالشيء يعدل اثنين. فقد أخرجتْك هذه المسألة إلى الضَرْبِ الثالث من الضروب الستّة وهي: أشياء تعدل عدداً.

٢٣-و

وأبيّن ذلك في هذه الصورة: وهو أنّا نجعل خطّ ا ب عشرة، وج ب القسم الأصغر، وخطّ ا ج القسم الأعظم. فإذا قسمنا خطّ ا ج على خطّ ج ب خرج أربعة. فَ ا ج أربعة أمثال ج ب. فَ ا ب خمسة أمثال ج ب. فَ ج ب خُمس ا ب، وا ب عشرة، فَ ج ب اثنان؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



8 شيئاً: شيء — 10 وزدْه: وزدها.

Quatrième problème

Tu as divisé dix en deux parties et tu as multiplié la plus petite partie par neuf et la plus grande par elle-même ; elles deviennent égales.

On l'infère ainsi : tu poses la grande partie une chose et la petite dix moins une chose. Tu multiplies ensuite une chose par elle-même, on a un *carré*. Tu multiplies dix moins une chose par neuf, on a quatre-vingt-dix dirhams moins neuf choses égaux à un *carré*. Restaure-les par les neuf choses et ajoute-les au *carré*, on a un *carré* plus neuf choses égaux à quatre-vingt-dix dirhams.

Voici le procédé qui te mène à la chose : tu partages en deux moitiés les choses, on a quatre et demi ; tu le multiplies par lui-même, on a vingt plus un quart ; tu l'ajoutes à quatre-vingt-dix, on a cent dix dirhams plus un quart. Prends sa racine, on a dix dirhams et un demi. Ôtes-en la moitié des racines, ce qui est quatre et demi ; il reste donc six, qui est la chose et qui est la plus grande partie.

Voici le procédé qui te mène au *carré* : tu multiplies les neuf choses par elles-mêmes, on a quatre-vingt-un. Tu les multiplies ensuite par les quatre-vingt-dix, on a sept mille deux cent quatre-vingt-dix. Tu partages en deux moitiés le quatre-vingt-un, on a quarante et demi ; multiplie-le par lui-même, on a mille six cent quarante et un quart. Ajoute-le [23v] au sept mille deux cent quatre-vingt-dix, on a huit mille neuf cent trente plus un quart ; prends-donc sa racine, on a quatre-vingt-quatorze plus un demi. Ôte-le de quarante plus un demi, qui est la moitié de quatre-vingt-un, plus quatre-vingt-dix qui était égal au *carré* plus les racines, c'est-à-dire cent trente plus un demi ; il reste trente-six, ce qui est le *carré*. Ce problème t'a donc mené au quatrième des six modes, qui est : « des *carrés* plus des racines sont égaux à un nombre ».

والمسألة الرابعة

عشرةٌ قسمتها قسمين، فضربت القسم الأصغر في تسعة والأعظم في نفسه فاستويا.

قياسُه: أن تجعل القسم الأعظم شيئاً والأصغر عشرة إلاّ شيئاً. فتضرب شيئاً في مثله فيكون مالاً، وتضرب عشرة إلاّ شيئاً في تسعة، فيكون تسعين درهماً إلاّ تسعة أشياء تعدل مالاً. فاجبُرها بالتسعةِ الأشياءِ وزِدها على المال، فيكون مالاً وتسعةَ أشياءَ تعدل تسعين درهماً.

فالباب الذي يُخرجك إلى الشيء هو أن تنصِّف الأشياء، فتكون أربعةً ونصفاً، فاضربها في مثلها فتكون عشرين وربعاً، فزِدها على التسعين فتكون مائةً وعشرة دراهم وربعاً. فخذ جذرها فيكون عشرة دراهم ونصفاً. فأسقط منها نصف الأجذار وهو أربعة ونصف فيبقى ستّة، وهو الشيء، وهو القسم الأعظم.

والباب الذي يُخرجك إلى المال هو أن تضرب التسعةَ الأشياءِ في مثلها، فتكون واحداً وثمانين. فتضربها في التسعين، فتكون سبعة آلاف ومائتين وتسعين. ثم تنصّف الواحد والثمانين، فتكون أربعين ونصفاً. فاضربها في مثلها، فتكون ألفاً وستمائةٍ وأربعين ورُبعاً. فزدها / على السبعة آلاف والمائتين ٢٣-ظ والتسعين، فيكون ثمانيةَ آلافٍ وتسعمائةٍ وثلاثين وربعاً. فخذ جذرها، فيكون أربعةً وتسعين ونصفاً. فأسْقِطْها من الأربعين والنصف التي هي نصف الواحدِ والثمانين، والتسعين التي كانت تعدل المال والأجذار، وذلك مائة وثلاثون ونصف، فيبقى ستّة وثلاثون وهو المال. فقد أخرجتك هذه المسألة إلى الضربِ الرابع من الضروبِ الستّة وهي: أموال وجذور تعدل عدداً.

4 إلاّ شيئاً: إلاّ شيء — 5 إلاّ شيئاً: إلاّ شيء — 10 وربعاً: وربع، وهو أيضاً جائز في وجه آخر، ولكنّه يأخذ عادة بالنصب / ونصفاً: ونصف. انظر التعليق السابق — 13 تضرب التسعة الأشياء: يعني التسعة، أي المعامل؛ ولن نشير إلى مثلها فيما بعد— 14 آلاف: الف، ولن نشير إليها فيما بعد— 16 ألفاً: ألف / فزدها: مكرّرة.

Je montre cela dans une figure. Nous posons la droite *AB* dix, la droite *AC* la plus grande partie et la droite *CB* la plus petite partie. *AC* par elle-même est égale à *CB* par neuf. Mais *AC* par neuf et *CB* par neuf est quatre-vingt-dix. Mais *CB* par neuf est égal à *AC* par elle-même. Donc *AC* par elle-même et par neuf est quatre-vingt-dix. Nous posons le neuf la droite *AD* ; *AC* par elle-même et par *AD* est donc quatre-vingt-dix, ce qui est égal à *DC* par *CA*. Donc *DC* par *CA* est quatre-vingt-dix, et *AD* est neuf. Nous divisons *DA* en deux moitiés en *E* ; la droite *DA* a donc été divisée en deux moitiés en *E* et on lui a ajouté en longueur la droite *AC*. Le produit de *DC* par *CA* et *AE* par elle-même est donc égal au produit de *EC* par elle-même. Mais le produit de *DC* par *AC* est quatre-vingt-dix, et le produit de *AE* par elle-même est vingt plus un quart ; le produit de *EC* par elle-même est donc cent dix et un quart, donc *EC* est dix plus un demi, et *AE* est quatre plus un demi. Il reste donc *AC* six, ce qui est la plus grande partie ; et la plus petite partie est *CB*, qui est quatre. Ce qu'il fallait démontrer.

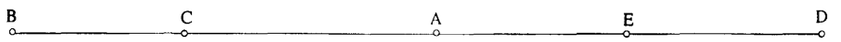


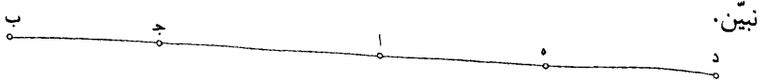
Fig. 29

Cinquième problème

Tu as divisé dix en deux parties et tu as multiplié l'une par l'autre, on a vingt et un.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des parties une chose, et l'autre dix moins une chose. Tu multiplies une chose par dix moins une chose, on a dix choses moins un *carré* égaux à vingt et un dirhams. Restaure les dix choses par le *carré* et ajoute-le à vingt et un ; on a un *carré* [24r] plus vingt et un dirhams, égaux à dix racines.

وأبيّن ذلك في صورة: وهو أنّا نجعل خطّ ا ب عشرة وخطّ ا ج القسم الأعظم و<خط> ج ب <القسم> الأصغر. فَ ا ج في مثله مثل ج ب في تسعة. وا ج في تسعة وج ب في تسعة: تسعون، وج ب في تسعة مثل ا ج في نفسه. فَ ا ج في نفسه وفي تسعة: تسعون. فنجعل التسعة خطّ ا د. فَ ا ج في مثله وفي ا د تسعون، وهو مثل د ج في ج ا. فَ د ج في ج ا تسعون، ود ا تسعة. فنقسم د ا بنصفين على ه. فخطّ د ا قد قُسم بنصفين على ه وزيد في طوله خطّ ا ج. فضرب د ج في ج ا وَا ه في نفسه مثل ضرب ه ج في نفسه. وضرب د ج في ا ج تسعون، وضرب ا ه في نفسه عشرون وربع. فضربُ ه ج في نفسه مائة وعشرة وربع. فَ ه ج عشرة ونصف وا ه أربعة ونصف، فبقي ا ج ستّة وهو القسم الأعظم، والقسم الأصغر ج ب وهو أربعة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



والمسألة الخامسة

عشرةٌ قسمتها قِسمين، فضربت أحدهما في الآخر فكان واحداً وعشرين.

قياسه: أن تجعل أحد القسمين شيئاً والآخر عشرةً إلاّ شيئاً. فتضرب شيئاً في عشرة إلاّ شيئاً، فتكون عشرة أشياء غير مال يعدل واحداً وعشرين درهماً. فاجبر العشرةَ الأشياءِ بالمال وزِدْه على الواحد والعشرين، فيكون مالاً / وواحداً ٢٤-و وعشرين درهماً تعدل عشرة أجذار.

1 وأبيّن ذلك في صورة: (fol. 79v, 1146-7) Et ego exponam tibi hoc in hac figura — 3 تسعون: تسعين — 4 تسعون: تسعين — 5 تسعون (الأولى والثانية): تسعين — 8 تسعون: تسعين / عشرون: عشرين.

Voici le procédé qui te mène à la chose : on partage les choses en deux moitiés, on a cinq ; tu les multiplies par elles-mêmes, on a vingt-cinq ; retranches-en vingt et un, il reste quatre ; tu prends sa racine, on a deux ; retranche-le ensuite de cinq, qui est la moitié des racines, il reste trois, ce qui est l'une des deux parties ; et l'autre partie est le reste de dix, qui est sept. Si tu veux, ajoute le deux au cinq, on a sept, qui est l'une des deux parties ; et l'autre est ce qui reste de dix, soit trois.

Voici le procédé qui te mène au *carré* : tu multiplies les dix racines par elles-mêmes, on a cent ; tu multiplies alors le cent par vingt et un, qui est avec le *carré*, on a deux mille cent ; tu divises ensuite le cent en deux moitiés, on a cinquante ; tu le multiplies par lui-même, on a deux mille cinq cents. Retranches-en les deux mille cent, il reste quatre cents. Prends alors sa racine, on a vingt. Ôte-le de cinquante, qui est la moitié de cent, il reste trente ; tu ôtes de trente vingt et un qui est avec le *carré*, il reste neuf, ce qui est le *carré*. Et en ajoutant : tu ajoutes le vingt au cinquante, on a soixante-dix ; tu en ôtes le vingt et un, il reste quarante-neuf, ce qui est le *carré*. Ce problème t'a donc mené au cinquième des six modes, qui est : « des *carrés* plus un nombre sont égaux à des racines ».

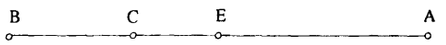
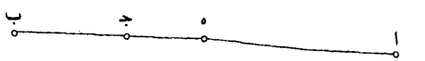


Fig. 30

Je montre cela dans cette figure. Nous posons la droite *AB* dix, nous la partageons en deux parties au point *C*. Le produit de *AC* par *CB* est vingt et un. Partageons la droite *AB* en deux moitiés au <point> *E* ; le produit de *AC* par *CB* plus *EC* par elle-même est égal au produit de *EB* par elle-même. Mais *EB* par elle-même est vingt-cinq, et *AC* par *CB* est vingt et un ; il reste donc *EC* par elle-même quatre, donc *EC* est deux et *EB* est cinq. Il reste alors *CB* trois, donc *AC* est sept. Ce qu'il fallait démontrer. [24^{v}]

فالباب الذي يخرجك إلى الشيء هو أن تنصِّف الأشياء فتكون خمسة، فاضربها في مثلها، فتكون خمسة وعشرين. فأسقط منها الواحدَ والعشرين فيبقى أربعة، فتأخذ جذرها فيكون اثنين. فانقصه من الخمسة التي هي نصف الأجذار، فيبقى ثلاثة وهي أحد القسمين، والقسم الآخر ما بقي من العشرة وهو سبعة. وإن شئت، فَزِدِ الاثنين على الخمسة، فتكون سبعةً وهو أحد القسمين والآخرُ ما بقي من العشرة، وهو ثلاثة.

والباب الذي يُخرجك إلى المال: هو أن تضرب العشرةَ الأجذارِ في مثلها فتكون مائةً. فتضرب هذه المائة في الواحد والعشرين التي مع المالِ فيكون ألفين ومائة. ثم تنصِّف المائةَ فتكون خمسين، فتضربها في مثلها فتكون ألفين وخمسمائة. فأسقط منها الألفين والمائة فيبقى أربعمائة. فَخُذْ جذرها فيكون عشرين. فأسقطها من الخمسين التي هي نصف المائة فيبقى ثلاثون، فتُسْقِطَ من هذه الثلاثين الواحد والعشرين التي كانت مع المال، فيبقى تسعة وهو المالُ. وأما بالزيادة، فتزيد العشرين على الخمسين فتكون سبعين، فتسقط منها الواحد والعشرين فيبقى تسعة وأربعون وهو المالُ. فقد أخرجتك هذه المسألة إلى الضرب الخامس من الضروب الستّة وهي: أموال وعدد تعدل جذوراً.



وأبيّن ذلك في هذه الصورة: وهو أنّا نجعل خطّ ا ب عشرةً، ونقسمه بقسمين على نقطة جـ، فضربُ ا جـ في جـ ب واحد وعشرون. فنقسم خطّ ا ب بنصفين على هـ. فضرْب ا جـ في جـ ب وَهـ جـ في نفسه مثلُ ضرب هـ ب في نفسه. وَهـ ب في نفسه خمسة وعشرون، وَا جـ في جـ ب واحد وعشرون. فبقي هـ جـ في نفسه أربعة، فَـ هـ جـ اثنان وَهـ ب خمسة، فبقي جـ ب ثلاثة. فَـ ا جـ سبعة؛ وذلك ما أردنا بيانه./

8 والعشرين: وعشرين.

Sixième problème

Un *carré* auquel tu ajoutes huit dirhams puis tu multiplies la somme par quatre dirhams, on a le *carré* par lui-même.

On l'infère ainsi : tu poses le *carré* une chose ; tu ajoutes huit dirhams, on a une chose plus huit dirhams ; multiplie-le par quatre, on a quatre choses plus trente-deux dirhams ; multiplie ensuite le *carré*, qui est une chose, par lui-même ; on a un *carré* égal à trente-deux dirhams plus quatre choses[35].

Voici le procédé qui te mène à la chose : tu partages les choses en deux moitiés, on a deux ; tu le multiplies par lui-même, on a quatre ; ajoute-le à trente-deux, on a trente-six. Prends donc sa racine, on a six. Ajoute-lui la moitié du nombre des racines, qui est deux, on a huit, ce qui est le *carré*, car nous avons posé notre *carré* une chose.

Voici le procédé qui te mène au *carré* qui est égal aux racines plus le nombre : tu multiplies les quatre racines par elles-mêmes, on a seize ; tu le multiplies alors par les dirhams, soit trente-deux dirhams, on a cinq cent douze ; tu divises ensuite le seize en deux parties, on a huit ; tu le multiplies par lui-même, on a soixante-quatre. Ajoute-le au cinq cent douze, on a cinq cent soixante-seize ; tu prends donc sa racine, on a vingt-quatre. Ajoute-le au huit, qui est la moitié de seize, et au trente-deux qui était avec les <quatre> racines, et cela est quarante ; on a donc soixante-quatre, ce qui est le *carré* qui est égal aux racines plus le nombre. Tu prends alors la racine de cela, on a huit, ce qui est le *carré* cherché. Ce problème t'a donc mené au sixième des six modes, qui est : « un nombre plus des racines sont égaux à des *carrés* ».

[35] C'est un changement de variable délibéré, purement algébrique, $x^2 \longrightarrow x$.

٢٤-ظ

والمسألة السادسة

مالٌ تزيد عليه ثمانية دراهم، ثم تَضْرِب ما اجْتَمَع في أربعة دراهم، فيكون مثل المال في نفسه.

قياسُهُ: أن تجعلَ المالَ شيئاً فَتَزيدَ ثمانية دراهم، فتكون شيئاً وثمانية دراهم. فاضربه في أربعة فتكون أربعةَ أشياءَ واثنين وثلاثين درهماً. ثم اضرب المال، وهو شيء، في مثله، فيكون مالاً يعدل اثنين وثلاثين درهماً وأربعةَ أشياءَ.

فالباب الذي يُخرجك إلى الشيء: هو أن تنصِّف الأشياء فتكون اثنين. فتضربها في مثلها فتكون أربعة. فَزِدْها على اثنين وثلاثين فتكون ستّة وثلاثين. فخذ جذرها فتكون ستّة. فَزِدْ عليها نصف الأجذار، وهو اثنان، فتكون ثمانية وهو المال، لأنّا جعلنا مالنا شيئاً.

والبابُ الذي يُخْرِجُك إلى المال الذي يعدل الأجذارَ والعددَ: هو أن تَضْرِبَ الأربعةَ الأجذار في مثلها فتكون ستّة عشر. فتضربها في الدراهم، وهي اثنان وثلاثون درهماً، فتكون خمسمائةٍ واثني عشر. ثم تُنَصِّف الستّة عشر فتكون ثمانية. فاضربها في مثلها فتكون أربعةً وستين. فَزِدْها على الخمسمائة والاثني عشر، فتكون خمسَمائةٍ وستّة وسبعين. فتأخذ جذرها فيكون أربعةً وعشرين. فزِدْها على الثمانية - التي هي نصف الستّة عشرَ - والاثنين والثلاثين التي كانت مع الأجذار، وذلك أربعون، فتكون أربعة وستين، وهو المال الذي يعدل الجذورَ والعددَ. فتأخذ جذر ذلك فيكون ثمانية وهو المال المطلوب. فقد أخْرجَتْك هذه المسألةُ إلى الضربِ السادسِ من الضروب الستّة: وهي "عددٌ وجذورٌ تعدل أموالاً".

11 هو: وهو – 17 أربعون: أربعة؛ علّق قارئ بخطّ آخر هنا فكتب في الهامش: "مراده بالأربعة أنها آحاد المرتبتين اللتين يريد جمعهما والله أعلم".

Je montre cela dans une figure. Posons le *carré* la droite *AB* et les huit dirhams la droite *AC*. Posons la droite *BD* quatre. Multiplions la droite *BC* par la droite *BD*, on a la surface *CD*. Multiplions ensuite le *carré* qui est la droite [25r] *AB* par elle-même. On a le carré *AE*. La surface *CD* est donc égale à la surface *AE*. Ôtons la surface *AD* commune, il reste la surface *EM* égale à la surface *CM*. Mais la surface *CM* est trente-deux, car *AC* est huit et *AM* – qui est égale à *BD* – est quatre ; donc la surface *ME* est trente-deux. Mais la surface *ME* est le produit de *AB* par *GM*, donc le produit de *AB* par *GM* est trente-deux ; et *AM* est quatre. Partageons *AM* en deux moitiés en *H* ; le produit de *AG* par *GM* plus *MH* par elle-même est donc égal à *HG* par elle-même. Mais *MH* par elle-même est quatre, donc *HG* par elle-même est trente-six. *HG* est donc six, et *AH* est deux, donc *AG* est huit ; mais elle égale à *AB*, donc *AB* est huit, ce qui est le *carré*. Ce qu'il fallait démontrer[36].

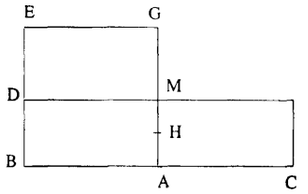


Fig. 31

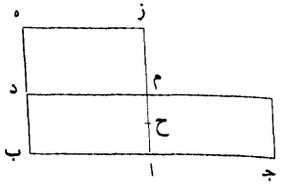
<Chapitre sur des problèmes divers>

<7> Si on te dit : tu as divisé dix en deux parties ; tu multiplies chaque partie par elle-même et tu retranches le plus petit du plus grand ; il reste quatre-vingts.

On l'infère ainsi : tu poses la plus petite partie une chose et la plus grande dix moins une chose. Tu multiplies dix moins une chose par lui-même, on a cent dirhams plus un *carré* moins vingt choses. Puis tu multiplies une chose par elle-même, on a un *carré*. Tu l'ôtes alors de cent dirhams plus un *carré* moins vingt choses, il reste cent dirhams moins vingt

[36] Proposition II.6 des *Éléments* d'Euclide.

وأبيّن ذلك في صورة: وهو أنّا نجعل المالَ خطّ ا ب والثمانيةَ الدراهم خطّ ا ج ونجعل خطّ ب د أربعة. فنضرب خطّ ب ج في خطّ ب د، فيكون سطح ج د. ثم نضرب المال وهو خطٌّ / ا ب في مثله، فيكون مربّع ا ه. فسطح ٢٥-و ج د مثل سطح ا ه. فنسقط سطح ا د المشترك، فيبقى سطح ه م مثل سطح ج م. وسطح ج م اثنان وثلاثون؛ لأنّ ا ج ثمانية وا م <الذي هو مثل ب د> أربعة. فسطح م ه اثنان وثلاثون، وسطح م ه هو من ضرب ا ب في ز م. فضرب ا ب في ز م اثنان وثلاثون، وا م أربعة. فنقسم ا م بنصفين على ح. فضرب ا ز في ز م وم ح في نفسه مثل ح ز في نفسه. وم ح في نفسه أربعة ف ح ز في نفسه ستّة وثلاثون. ف ح ز ستّة، وا ح اثنان [وثلاثون] ف ا ز ثمانية، وهو مثل ا ب، وا ب ثمانية وهو المال؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



<باب المسائل المختلفة>

<٧> إذا قيل لك: عشرة قسمتها قسمين. فتضرب كلّ قسمٍ في نفسه، وتُلقي الأقلّ من الأكثر، فيبقى ثمانون.

قياسه: أن تجعل القسم الأصغر شيئاً والأكبرَ عشرةً إلّا شيئاً. فتضرب عشرة إلّا شيئاً في مثلها فتكون مائة درهم ومالاً إلّا عشرين شيئاً. ثم تضرب شيئاً في مثله فيكون مالاً. فتسقطه من مائةِ درهم ومالٍ إلّا عشرين شيئاً فيبقى:

1 في صورة: Et ego exponam tibi hoc in figura (fol. 80r, 12197) — 6 ا ب: ا ز — 7 ا ب: ا ز — 8 انظر الشكل السادس من المقالة الثانية من *أصول* أقليدس (انظر هامش ص. 255) — 9 وثلاثون: وثلاثين — 12 قسمتها : قسمها — 15 ومالا: ومال.

choses égaux à quatre-vingts dirhams. Restaure les cent dirhams par les vingt choses et ajoute-les aux quatre-vingts ; on a vingt choses plus quatre-vingts dirhams égales à cent dirhams. Ôte quatre-vingts de cent, il reste vingt dirhams égaux à vingt choses. La chose est un, qui est la plus petite partie, et la plus grande est neuf, ce qui reste de dix.

Si nous posons la plus grande partie une chose et la plus petite dix moins une chose, alors nous retranchons cent dirhams plus un *carré* moins vingt choses d'un *carré* ; il reste alors vingt choses moins cent dirhams égales à quatre-vingts dirhams. Restaure alors les vingt choses par les cent dirhams [25v] et ajoute-les aux quatre-vingts dirhams ; on a cent quatre-vingts dirhams égaux à vingt choses ; et la chose est égale à neuf, qui est la plus grande partie, et l'autre, ce qui reste de dix, est un[37].

Et si tu veux, tu peux partager le dix en deux parties par une autre division qui n'est pas en usage chez les arithméticiens pour diviser le dix. Le procédé te sera alors plus facile, tu distingueras la plus grande partie de la plus petite et tu t'épargneras dans beaucoup de problèmes qui te sont posés la difficulté rencontrée lors de la division des racines en deux moitiés. Cela en posant l'une des parties cinq plus une chose, et l'autre cinq moins une chose. Tu multiplies alors chacune d'elles par elle-même et tu retranches ce que tu obtiens avec la plus petite de ce que tu obtiens avec la plus grande. Il reste alors vingt choses égales à quatre-vingts dirhams. Et la chose est égale à quatre, que tu ajoutes au cinq ou retranches du cinq, et tu auras la plus grande partie neuf, et l'autre un.

< 8> Si on te dit : tu as divisé dix en deux parties, tu divises chacune d'elles par l'autre et tu additionnes les quotients ; on a quatre plus un quart.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des parties une chose et l'autre dix moins une chose. Tu multiplies une chose par elle-même, on a un *carré* ; puis tu multiplies dix moins une chose par lui-même, on a cent plus un *carré* moins vingt choses, que tu additionnes ; on a cent dirhams plus deux *carrés* moins vingt choses, retiens-le. Multiplie ensuite l'une des deux parties par l'autre, ce qui est une chose par dix moins une chose ; on a dix

[37] Un énoncé étant donné, il y a plusieurs manières de le traduire en une équation algébrique pour trouver la solution positive.

مائةُ درهمٍ إلاّ عشرين شيئاً تعدل ثمانين درهماً. فاجبُر المائة درهمٍ بالعشرين شيئاً
وزِدْها على الثمانين، فتكون عشرين شيئاً وثمانين درهماً تعدل مائةَ درهمٍ. فألقِ
ثمانين من مائة فيبقى عشرون درهماً تعدل عشرين شيئاً. فالشيء واحد وهو
القسم الأصغر، والأعظم تسعة وهو ما بقي من العشرة.

فإن جعلنا القسمَ الأعظم شيئاً والأصغرَ عشرةً إلاّ شيئاً، أسقطنا مائة
درهم ومالاً إلاّ عشرين شيئاً من مال، فيبقى عشرون شيئاً إلاّ مائة درهمٍ تعدل
ثمانين درهماً. فاجبُر العشرين شيئاً بالمائة درهم / وزِدْها على الثمانين درهماً، ٢٥-ظ
فتكون مائةً وثمانين درهماً تعدل عشرين شيئاً. فالشيءُ يعدل تسعةً وهو القسم
الأعظم، والآخر ما بقيَ من العشرة وهو واحدٌ.

وإن شئت قسمت العشرة قسمين على غير القسمة التي من عادة الحُسّاب
أن يقسموا العشرةَ بها، فيَسهُل عليك العملُ وتَعرف القسمَ الأكبرَ من القسم
الأصغر، وتَسقُط عنك في كثير ممّا يردُ عليك من المسائِل المَؤُونةُ في تنصيفِ
الأجذار، وهو أن تجعل أحد القسمين خمسة وشيئاً والآخرَ خمسة إلاّ شيئاً.
فتضرب كلّ واحدٍ منهما في مثله، وتُسقط ما اجتمع من الأصغر ممّا اجتمع من
الأكبر، فيبقى عشرون شيئاً تعدل ثمانين درهماً. فالشيءُ يعدل أربعةً، فتزيده على
خمسةٍ أو تنقصه من خمسةٍ، فيكون القسم الأعظم تسعةً والآخر واحداً.

<٨> وإن قيل لك: عشرةٌ قسمتها قسمين، قسمت كلّ واحدٍ منهما
على الآخر <وجمعت ما خرج من القسمة>، فخرج أربعة وربع.

قياسه: أن تجعل أحد القسمين شيئاً، والآخرَ عشرة إلاّ شيئاً. فتضرب
شيئاً في مثله فيكون مالاً، ثم تضرب عشرة إلاّ شيئاً في مثلها فتكون مائةً ومالاً
إلاّ عشرين شيئاً، فتجمعهُما فيكون مائةَ درهمٍ ومالين إلاّ عشرين شيئاً،
فاحفظه، ثم اضرب أحد القسمين في الآخر، وهو شيء في عشرةٍ غير شيء،

7 شيئاً: الشيء / درهماً: درهم — 15 فيبقى: فبقي — 17 قسمت: فقسمت.

choses moins un *carré*, que tu multiplies par le quotient qui est quatre plus un quart ; on a quarante-deux choses plus une demi-chose moins quatre *carrés* et un quart de *carré* égaux au produit de chaque partie par elle-même, ce qui est cent dirhams plus deux *carrés* moins vingt choses ; en effet, de deux nombres quelconques dont l'un divise l'autre, les produits de chacun par lui-même additionnés sont égaux au produit de l'un des nombres par l'autre, puis par la somme des deux quotients. Je te montrerai la cause de cela une fois ce problème achevé. Restaure les cent dirhams plus les deux *carrés* moins vingt choses par les vingt choses, et ajoute-les à quarante-deux choses plus la moitié [26r] d'une chose moins quatre *carrés* et un quart de *carré*. On a soixante-deux choses plus une demi-chose moins quatre *carrés* et un quart de *carré* égaux à cent dirhams plus deux *carrés*. Restaure les soixante-deux choses plus la demi-chose par les quatre *carrés* et un quart de *carré* et ajoute-les à cent dirhams plus deux *carrés*. On a cent dirhams plus six *carrés* plus un quart de *carré* égaux à soixante-deux choses plus une demi-chose. Ramène-le à un seul *carré*. Or tu sais qu'un *carré*, par rapport à six *carrés* plus un quart de *carré*, est quatre cinquième d'un cinquième. Prends donc de tout ce que tu obtiens quatre cinquièmes d'un cinquième. On a alors un *carré* plus seize dirhams égaux à dix choses. Partage les choses en deux moitiés, on a cinq ; multiplie-le par lui-même, on a vingt-cinq, duquel tu retranches seize ; il reste neuf ; prends sa racine, soit trois ; retranche-le de la moitié des racines, il reste deux, ce qui est l'une des deux parties, et l'autre est huit.

Et si tu veux, partage dix en deux parties comme je t'ai appris à propos de la division que les arithméticiens n'ont pas l'habitude d'utiliser pour diviser le dix. Alors le procédé sera plus facile et t'épargnera la difficulté de diviser les racines en deux moitiés. Et cela, si tu poses l'une des deux parties cinq plus une chose, et l'autre cinq moins une chose. Tu multiplies chacun d'eux par lui-même et tu les additionnes, on a cinquante dirhams plus deux *carrés*, retiens-le. Puis multiplie l'une des deux parties par

فيكون عشرة أشياء غير مالٍ. فاضربها فيما خرج من القسم وهو أربعة وربع، فتكون اثنين وأربعين شيئاً ونصفَ شيءٍ إلاّ أربعة أموال وربعَ مالٍ تعدل ما خرج من ضرب كلّ قسم في نفسه وهو مائة درهم ومالان إلاّ عشرين شيئاً. لأنّ كلّ عددين يُقسم كلّ واحدٍ منهما على الآخر، فإنّ ضرَب كلّ واحدٍ من العددين في مثله مجموعين مثلُ ضربِ أحد العددين في الآخر ثم في الذي خرج من قسمي العددين، كلّ واحد منهما على الآخر. وسأبيّن لك علّةَ ذلك بعد الفراغ من المسألة. فاجبُر المائة درهمٍ والمالين إلاّ عشرين شيئاً بالعشرين شيئاً، وزِدْها على اثنين وأربعين شيئاً ونصف / شيء إلا أربعة أموال وربع مالٍ، ٢٦-و فتكون اثنين وستين شيئاً ونصف شيءٍ إلاّ أربعة أموال وربع مالٍ تعدل مائة درهم ومالين. فاجبُر الاثنين والستين شيئاً والنصف شيء بالأربعة الأموال وربع مال، وزِدْها على مائة درهم ومالين، فتكون مائة درهمٍ وستّة أموال وربع مال تعدل اثنين وستين شيئاً ونصف شيء. فارْدُدْه إلى مالٍ واحدٍ. وقد علمت أنّ المال من ستّة أموال وربع مال أربعة أخماسِ خُمْسِهِ. فَخُذْ من جميع ما معك أربعة أخماس خُمْسه، فيكون مالاً وستّة عشر درهماً تعدل عشرةَ أشياءَ. فنصّف الأشياء فتكون خمسةً، فاضربها في مثلها فتكون خمسة وعشرين، فانقص منها الستّة عشر فيبقى تسعةٌ. فَخُذْ جذرها يكن ثلاثة. فانقصه من نصف الأجذار فيبقى اثنان، وهو أحد القسمين، والآخر ثمانية.

وإن شئت فاقسم العشرة بقسمين على ما أعلمتك من القسمة التي ليس من عادات الحُسّاب أن يقسموا العشرة بها، فيَسهُل عليك العملُ وتسْقط عنك المؤونة في تنصيف الأجذار، وهو أن تجعلَ أحد القسمين خمسةً وشيئاً والآخر خمسةً إلاّ شيئاً، فتضرب كلّ واحدٍ منهما في مثله وتجمعهما فيكون خمسين درهماً ومالين. فاحفظهما. ثم اضرب أحد القسمين في الآخر فيكون خمسةً

2-3 ما خرج ... وهو: في الهامش — 7 إلاّ عشرين شيئاً: في الهامش — 9 فتكون ... وربع مال: في الهامش — 10 شيئاً: الشيء — 17 أحد: كتب "واحد" ثم محا الواو.

l'autre, on a vingt-cinq dirhams moins un *carré*. Tu multiplies cela par quatre plus un quart, on a cent six plus un quart moins quatre *carrés* et un quart de *carré* égaux à cinquante dirhams plus deux *carrés*. Restaure-les par les quatre *carrés* plus un quart de *carré*, et ajoute-les aux cinquante dirhams plus deux *carrés*. Ôte le cinquante par le cinquante, il reste cinquante-six plus un quart égaux à six *carrés* plus un quart de *carré*. Le *carré* est donc égal à neuf, et la chose est sa racine, c'est-à-dire trois. Retranche-le de cinq et ajoute-le à cinq, car nous avons posé l'une des deux parties cinq plus une chose, et l'autre cinq moins une chose. L'une des deux parties est donc huit et l'autre est deux.

<Lemme 1> Deux nombres quelconques dont l'un est divisé par son associé : le quotient est alors égal au quotient du produit du dividende par lui-même par le produit du dividende par le diviseur.

Exemple : un nombre *A* [26v] a été divisé par un nombre *B*, on obtient le nombre *C*. Mais on a multiplié *A* par lui-même, on obtient *H*. On a multiplié *A* par *B*, on a *D*. Je dis que, si nous divisons *H* par *D*, on obtient *C*.

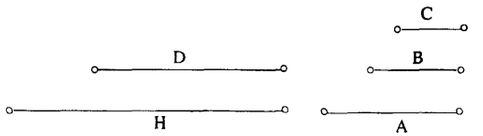


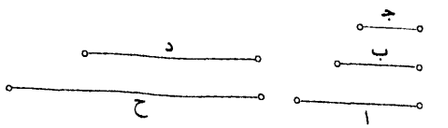
Fig. 32

Démonstration : *A* a été divisé par *B*, on a obtenu *C*. Donc *B* mesure *A* par autant d'unités que dans *C*, et l'unité mesure *C* par autant d'unités que dans *C*. La grandeur de *B* par rapport à *A* est donc égale à la grandeur de l'unité par rapport à *C*. Mais *A* a été multiplié par lui-même et on a obtenu *H*, et il a été multiplié par *B* et on a obtenu *D*. Donc la grandeur de *B* par rapport à *A* est égale à la grandeur de *D* par rapport à *H*. Mais la grandeur de *B* par rapport à *A* est égale à la grandeur de l'unité par rapport à *C*. Donc la grandeur de *D* par rapport à *H* est égale à la grandeur de l'unité par rapport à *C*. Mais l'unité mesure *C* par autant d'unités que dans *C*. Donc *D*

وعشرين درهماً إلاّ مالاً. فتضرب ذلك في أربعة وربع فيكون مائةً وستّة وربعاً إلاّ أربعة أموالٍ وربع مالٍ تعدل خمسين درهماً ومالين. فاجبرها بالأربعة الأموال وربع مالٍ، وزِدْها على الخمسين درهماً ومالين، وألقِ الخمسين بخمسين، فيبقى ستّة وخمسون وربع تعدل ستّة أموال وربعَ مالٍ. فالمالُ يعدل تسعةً والشيءُ جذرها وهو ثلاثة. فأسقطه من خمسة وزده على خمسة؛ لأنّا جعلنا أحد القسمين خمسةً وشيئاً والآخر خمسةً إلاّ شيئاً. فيكون أحدُ القسمين ثمانيةً والآخر اثنين.

<مقدمة ١> كلّ عددين يُقسم أحدهما على صاحبه، فإنّ الذي يخرج من القسم مثلُ الذي يخرج من قسمة ضرب العدد المقسوم في نفسه على ضرب العدد المقسوم في العدد المقسوم عليه.

مثال ذلك: أن عدد آ / قُسم على عدد ب فخرج عدد جـ. وقد ضُرب آ ٢٦-ظ في نفسه فاجتمع حـ وضُرب آ في ب فاجتمع د. فأقول: إنّا إذا قسمنا حـ على د خرج جـ.



وبرهان ذلك: أن آ قسم على ب فخرج جـ، فَـ ب يعدُّ آ بقدر ما في جـ من الآحاد. والواحد يعدُّ جـ بقدر ما في جـ من الآحاد، فقدر ب من آ كقدر الواحد من جـ. وآ ضُرب في نفسه فاجتمع حـ، وضُرب في ب فاجتمع د. فقدر ب من آ كقدر د من حـ. وقد كان قدر ب من آ كقدر الواحد من جـ. فقدر د من حـ كقدر الواحد من جـ. والواحد يعدُّ جـ بقدر ما في جـ من الآحاد، فَـ د يعدُّ حـ

2 الأموال: أموال — 4 ستة وخمسون وربع تعدل: في الهامش.

mesure *H* par autant d'unités que dans *C*. On a ainsi montré que, si on divise *H* par *D*, on obtient *C*. Ce qu'il fallait démontrer.

<Lemme 2> Deux nombres quelconques divisés l'un par l'autre : alors ce qu'on obtient des deux divisions est égal à ce qu'on obtient de la division des produits de chacun d'eux par lui-même par le produit de l'un des nombres par l'autre.

Exemple : le nombre *A* a été divisé par un nombre *B*, on obtient *DE*. Le nombre *B* est divisé par le nombre *A*, on obtient *EG*. Mais on a multiplié le nombre *A* par lui-même, on obtient *C*. On a multiplié le nombre *B* par lui-même, on obtient *H*. On a multiplié le nombre *A* par le nombre *B*, on obtient *O*. Je dis que, si on divise chacun de *C* et de *H* par *O*, on obtient *DG*.

Démonstration : on a divisé *A* par *B*, on obtient *DE*. On multiplie *A* par lui-même, on obtient *C*. On multiplie *A* par *B*, on obtient *O*. Si donc on divise *C* par *O*, on obtient *DE*, d'après la proposition précédente. De même on a divisé *B* par *A*, on obtient *EG*. On multiplie *B* par lui-même, on obtient *H*. On le multiplie par *A*, on obtient *O*. [27r] Si donc nous divisons *H* par *O*, on obtient *EG*, d'après ce que nous avons montré. Ainsi on a montré que, si nous divisons *H* plus *C* par *O*, on obtient *D G*. Si donc nous multiplions *DG* par *O*, on obtient *H* plus *C*. On a ainsi montré que, pour deux nombres, si l'on divise chacun par l'autre, alors les produits additionnés de chacun des deux nombres par lui-même sont égaux au produit de l'un des deux nombres par l'autre, puis par les quotients de chacun des deux nombres par l'autre. Ce qu'il fallait démontrer.

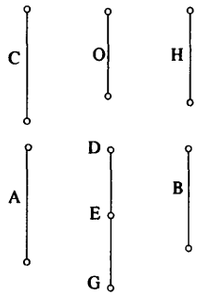


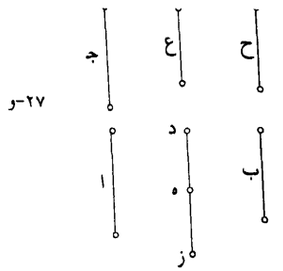
Fig. 33

بقدر ما في جـ من الآحاد. فقد تبيَّن أنّا إذا قسمنا ح على د خرج جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

<مقدمة ٢> كلّ عددين يُقسم كلّ واحد منهما على الآخر، فإنّ الذي يخرج من القسمين مثلُ الذي يخرج من قسمة ضربِ كلّ واحد منهما في نفسه على ضرب أحد العددين في الآخر.

مثال ذلك: أن عدد آ قُسم على عدد ب فخرج د ه، وقُسم عدد ب على عدد آ فخرج ه ز. وقد ضُرِب عدد آ في نفسه فاجتمع جـ، وضُرِب عدد ب في نفسه فاجتمع ح، وضُرِب عدد آ في عدد ب فاجتمع ع؛ فأقول: إنّ جـ وح إذا قُسِم كلّ واحد منهما على ع خرج د ز.

برهان ذلك: أنّ آ قُسِم على ب فخرج د ه، وقد ضُرِب آ في نفسه فاجتمع جـ، وضُرِب آ في ب فاجتمع ع. فإذا قُسِم جـ على ع خرج د ه على ما في الشكل الذي قبله. وأيضاً، ب قُسِم على آ فخرج ه ز، وب ضُرِب في نفسه فاجتمع ح، وضُرِب في آ فاجتمع ع؛ / فإذا قسمنا ح على ع خرج ه ز على ما بيّنا. فقد تبيَّن أنّا إذا قسمنا ح وجـ على ع خرج د ز. فإذا ضربنا د ز في ع خرج ح جـ. فقد تبيّن أنّ كلّ عددين يُقسم كلّ واحدٍ منهما على الآخر: فإنّ ضرب كلّ واحدٍ من العددين في مثلِه، مجموعين، مثلُ ضربِ أحد العددين في الآخر، ثمّ فيما خرج من قَسمي العددين كلّ واحد منهما على الآخر؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



٢٧-و

16 فإذا: فوق السطر.

<Lemme 3> Deux nombres dont chacun est divisé par l'autre : alors le produit de l'une des deux parties par l'autre est toujours égal à un dirham[38].

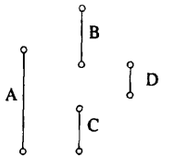


Fig. 34

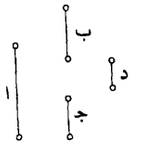
Exemple : divisons le nombre *A* par le nombre *B*, on obtient *C*. Divisons le nombre *B* par le nombre *A*, on obtient *D*. Je dis que le produit de *C* par *D* est toujours un dirham.

Démonstration : on a divisé *A* par *B*, on obtient *C*. Donc *B* mesure *A* par autant d'unités que dans *C* ; et l'unité mesure *C* par autant d'unités que dans *C*. Alors la grandeur de l'unité par rapport à *C* est égale à la grandeur de *B* par rapport à *A*. Donc, par inversion, la grandeur de *A* par rapport à *B* est égale à la grandeur de *C* par rapport à l'unité. De même, *B* a été divisé par *A*, on obtient *D*, *A* mesure *B* par autant d'unités que dans *D* et l'unité mesure *D* par autant d'unités que dans *D*. Donc le rapport de l'unité à *D* est égal au rapport de *A* à *B* ; mais le rapport de *A* à *B* est égal au rapport de *C* à [27^{v}] l'unité. Donc le rapport de *C* à l'unité est égal au rapport de l'unité à *D*. Donc le produit de *C* par *D* est égal au produit de l'unité par elle-même. Mais le produit de l'unité par elle-même est un. Donc le produit de *C* par *D* est un. Ce qu'il fallait démontrer.

Si tu veux, tu peux le calculer de cette autre manière. Si on te dit : tu as divisé dix en deux parties, puis tu as divisé chacune par l'autre ; tu additionnes les quotients et tu obtiens quatre plus un quart. Pose l'une des deux parties une chose et l'autre dix moins une chose, et divise dix moins une chose par une chose. Alors le quotient sera tel que, si on le multiplie par une chose, on a dix moins une chose. Alors tu multiplies quatre plus un

[38] Voir Note complémentaire [3].

<مقدمة ٣> كلّ عددين يُقسم كلّ واحدٍ منهما على الآخر، فإن ضَرْبَ أحد القسمين في الآخر درهمٌ أبداً.



مثال ذلك: أنّا نقسمُ عدد آ على عدد ب فيخرج جـ. ونقسم عدد ب على عدد آ فيخرج دَ؛ فأقول: إنّ ضرب جـ في دَ درهم أبداً.

برهان ذلك: أنّ آ قُسِم على ب فخرج جـ، فـ ب يعدُّ آ بقدر ما في جـ من الآحادِ، والواحد يعدُّ جـ بقدر ما في جـ من الآحاد. فقدر الواحد من جـ كقدر ب من آ. وإذا خالفنا كان قدر آ من ب كقدر جـ من الواحد. وأيضاً، ب قُسم على آ فخرج دَ. وآ يعدُّ ب بقدر ما في دَ من الآحاد. والواحد يعدُّ دَ بقدر ما في دَ من الآحاد. فنسبةُ الواحد إلى دَ كنسبة آ إلى ب، وقد كان نسبة آ إلى ب كنسبة جـ إلى / الواحد. فنسبة جـ إلى الواحد كنسبة الواحد إلى دَ. فضرب جـ في دَ مثل ضرب الواحد في مثله. وضرب الواحد في مثله واحد. فضرب جـ في دَ واحد؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. ٢٧-ظ

وإن شئت حسبتها على هذه الجهة الأخرى: وهو إذا قيل لك: عشرة قسمتها قسمين، فقسمت كلّ واحد من القسمين على الآخر <وجمعت ما خرج من القسم> فخرج أربعة وربع. فاجعل أحدَ القسمين شيئاً والآخرَ عشرةً إلاّ شيئاً. فتقسم العشرة إلاّ شيئاً على شيء، فخرج من القَسم ما إذا ضُرِبَ في

1-2 الكرجي (III.10): "فاعلم أن كل عددين إذا قسمت كل واحد منهما على الآخر وضربت ما خرج من أحد القسمين فيما خرج من القسمة الأولى، يكون درهماً واحداً". انظر أيضًا السموءل، التعليق رقم [3] – 2 درهم: درهماً – 3 ب (الثانية): آ – 13-15 الكرجي (III.10): "فإن قيل: عشرة قسمتها قسمين، فقسمت كل واحد منهما على الآخر، وجمعت المبلغ من ذلك، فكان اثنين وسدسًا" – 16 إلاّ شيئاً (في الموضعين): إلاّ شيء.

quart par une chose, on a quatre choses plus un quart de chose. Tu en soustrais dix dirhams moins une chose. Il reste cinq choses plus un quart de chose moins dix dirhams. Puis tu multiplies une chose par une chose, on a un *carré*. Tu le divises par dix dirhams moins une chose, on a cinq choses plus un quart de chose moins dix dirhams. Or nous avons montré que, si nous multiplions le quotient par le diviseur, il vient le dividende. Donc tu multiplies cinq choses plus un quart de chose moins dix dirhams par dix dirhams moins une chose, on a soixante-deux choses plus une demi-chose moins cinq *carrés* et un quart de *carré* moins cent dirhams, égaux à un *carré*. Tu réduis par ceci, on a six *carrés* plus un quart de *carré* plus cent dirhams égaux à soixante-deux choses plus une demi-chose. Tu procèdes comme je te l'ai décrit, l'une des parties sera huit et l'autre deux.

Il y a une autre manière : posons l'une des parties une chose et l'autre, dix moins une chose. Nous divisons alors dix moins une chose par une chose, on obtient un dinar. Si nous multiplions un dinar par une chose, on obtient dix dirhams moins une chose. Tu divises ensuite une chose par dix moins une chose, on obtient quatre plus un quart moins un dinar. Tu multiplies quatre dirhams plus un quart moins un dinar par dix moins une chose. On a cinquante-deux dirhams plus un demi moins cinq choses et un quart de chose moins dix dinars égaux à une chose. Tu réduis par ceci, comme je te l'ai décrit ; on a dix dinars égaux à cinquante-deux dirhams [28r] plus un demi moins six choses et un quart. Le dinar est donc égal à cinq dirhams plus un quart de dirham moins cinq huitièmes d'une chose.

Mais tu sais maintenant que, si tu divises dix dirhams moins une chose par une chose, on obtient cinq plus un quart moins cinq huitièmes d'une chose. Tu multiplies alors cinq plus un quart moins cinq huitièmes d'une chose par une chose, on a cinq choses plus un quart de chose moins cinq huitièmes de *carré* égaux à dix dirhams moins une chose. Réduis par ceci, on a six choses plus un quart de chose égaux à dix dirhams plus cinq

شيء كان عشرة إلاّ شيئاً. فتضرب الأربعة والربع في شيء فتكون أربعةَ أشياءَ وربعَ شيءٍ. فتُسقط منها عشرة دراهم إلاّ شيئاً. فيبقى خمسة أشياء وربع شيء إلاّ عشرة دراهم. ثم تضرب شيئاً في شيء فيكون مالاً. فتقسمه على عشرة دراهمَ إلاّ شيئاً فيخرج خمسة أشياء وربع شيء إلاّ عشرة دراهم. وقد بيّنّا أنّا إذا ضربنا ما خرج من القسم في المقسوم عليه عاد المقسومُ. فتضرب خمسة أشياء وربع شيء إلاّ عشرة دراهم في عشرة دراهمَ إلاّ شيئاً فتكون اثنين وستين شيئاً ونصف شيء إلاّ خمسة أموالٍ وربع مالٍ وإلاّ مائة درهمٍ تعدلُ مالاً. فتقابل بها فيكون: ستّة أموالٍ وربعُ مالٍ ومائة درهم تعدل اثنين وستين شيئاً ونصف شيء. فتعمل كما وصفت لك، فيخرج أحدُ القسمين ثمانية، والآخر اثنان.

وفيها وجهٌ آخرُ: وهو أنّا نجعل أحد القسمين شيئاً والآخر عشرةً إلاّ شيئاً، فنقسم عشرةً إلاّ شيئاً على شيء فيخرج دينارٌ. فإذا ضربنا ديناراً في شيء كان عشرة دراهم إلاّ شيئاً. ثم نَقْسِم شيئاً على عشرة غير شيءٍ فيخرج أربعةٌ وربعٌ غيرَ دينار. فتضرب أربعة دراهم وربعاً إلاّ ديناراً في عشرةٍ غير شيء، فتكون اثنين وخمسين درهماً ونصفاً إلاّ خمسة أشياء وربع شيءٍ وإلاّ عشرة دنانير تعدل شيئاً. فتقابل بها كما وصفت لك، فيكون عشرة دنانير تعدل اثنين وخمسين درهماً / ونصفاً إلاّ ستّة أشياء وربعاً. فالدينارُ يعدل خمسةَ دراهمَ وربعَ ٢٨-و درهمٍ إلاّ خمسةَ أثمانِ شيء.

فقد علمت الآن أنّك إذا قسمت عشرة دراهم إلاّ شيئاً على شيء خرج خمسة وربع إلاّ خمسة أثمان شيء. فتضرب خمسةً وربعاً إلاّ خمسةَ أثمان شيء في الشيء فيكون: خمسةُ أشياء وربعُ شيء إلاّ خمسةَ أثمان مالٍ تعدل عشرة دراهم وخمسةَ إلاّ شيئاً. فقابل به فيكون: ستّة أشياء وربع شيء تعدل عشرةَ دراهم وخمسةَ

11 فيخرج: فوق السطر — 12 إلاّ شيئاً: إلاّ شيء — 13 دراهم: كتبها "درهم" فوق السطر / وربعاً: وربع / ديناراً: دينار — 14-15 اثنين وخمسين ... تعدل: كرّرها الناسخ وأشار إلى إلغائها في المبدأ والنهاية بحرفَيْ "لا" و"إلى" — 16 ونصفاً: ونصف / وربعاً: وربع — 19 خمسة ... وربعاً إلاّ: في الهامش — 21 شيئاً: شيء.

huitièmes de *carré*. Complète donc les cinq huitièmes de *carré* pour obtenir un *carré* entier, et cela en lui ajoutant ses trois cinquièmes. Tu ajoutes donc à toute chose en ta possession trois cinquièmes, on obtient un *carré* plus seize dirhams égaux à dix choses. Divise les choses en deux, soit cinq, que tu multiplies par lui-même, soit vingt-cinq ; retranches-en seize, il reste neuf ; tu prends sa racine, trois ; ôte-le de la moitié des racines, c'est-à-dire cinq ; il reste deux, qui est l'une des deux parties, et l'autre est huit.

Il y a également une autre manière : nous avons montré que, pour deux nombres dont chacun est divisé par l'autre, le produit des deux quotients l'un par l'autre est un dirham. Mais ce qu'on obtient des deux parties dans ce problème est quatre dirhams plus un quart. Nous posons alors l'une une chose, et l'autre quatre dirhams plus un quart moins une chose. Nous multiplions ensuite l'un par l'autre, on a alors quatre choses plus un quart de chose moins un *carré* égaux à un dirham. Réduis par ceci, on a alors la chose – si tu veux – quatre, ou – si tu veux – un quart. Puis tu reviens au début du problème, et tu dis alors : l'une des deux parties est une chose, et l'autre dix moins une chose. Tu divises dix dirhams moins une chose par une chose, on a alors quatre. Tu multiplies quatre par une chose, on a quatre choses égales à dix dirhams moins une chose ; réduis par ceci, la chose sera alors deux, qui est l'une des deux parties, et l'autre, ce qui reste de dix, c'est-à-dire huit. Et si tu veux, tu dis : nous avons divisé dix moins une chose par une chose, on a alors un quart de dirham ; tu multiplies un quart de dirham par une chose, on a un quart de chose égal à dix dirhams moins une chose. Réduis par ceci, la chose est huit, qui est l'un [28ᵛ] des deux nombres, et l'autre est deux.

<9> Si on dit : tu as divisé dix en deux parties ; tu divises l'une par l'autre, puis tu soustrais l'un de l'autre, alors il reste cinq sixièmes de dirham.

أثمانِ مالٍ. فأكمل الخمسة أثمان مالٍ حتى تكون مالاً كاملاً، وهو أن تزيد عليه مثلَ ثلاثةِ أخماسه. فتزيد على كلّ شيءٍ معك ثلاثةَ أخماسه، فيكون: مالٌ وستّة عشرَ درهماً تعدل عشرةَ أشياء. فنصِّف الأشياء تَكُنْ خمسة. اضْرِبْها في مثلها تكن خمسة وعشرين. فأسْقِطْ منها ستّة عشر، فيبقى تسعة. فتأخذ جذرها ثلاثة، فأسقطها من نصف الأجذار <وهو خمسة> فيبقى اثنان، وهو أحد القسمين، والآخِر ثمانية.

وفيها أيضاً وجه آخر: قد بيّنّا أن كلّ عددين يُقْسَمُ كلّ واحدٍ منهما على الآخر، فإنّ ضرب ما يخرج من القَسمين أحدِهما في الآخِر درهم. والذي يخرج من القَسْمين في هذه المسألة أربعةُ دراهمَ وربعٌ. فنجعل أحدهما شيئاً والآخرَ أربعةَ دراهم وربعاً إلاّ شيئاً. ثمّ نضرب أحدهما في الآخر فيكون: أربعةُ أشياء وربع شيء إلاّ مالاً تعدل درهماً. فقابل بهما فيكون الشيء، إن شئت أربعةً وإن شئت ربعاً. ثم ترجع إلى أوّل المسألة فتقول: أحد القَسمين شيء والآخر عشرة إلاّ شيئاً. فتقسم عشرة دراهم إلاّ شيئاً على شيء فيخرج أربعة. فتضرب أربعة في شيء فيكون: أربعة أشياء تعدل عشرة دراهم إلاّ شيئاً، فتقابل بها، فيكون الشيءُ اثنين وهو أحد القسمين والآخر ما بقي من العشرة وهو ثمانية. وإن شئت فقل: قسمنا عشرة إلاّ شيئاً على شيء فخرج ربعُ درهم. فتضرب ربعَ درهم في شيء فيكون ربعُ شيء يعدل عشرة دراهم إلاّ شيئاً. فتقابل بها فيكون الشيء ثمانيةً، فهو أحد / العددين، والآخر اثنين. ٢٨-ظ

<٩> وإن قال: عشرة قَسَمْتُها قسمين: قسمت كلّ واحدٍ منهما على الآخر، ثم أسقطت أحدَهما من الآخر، فبقي خمسةُ أسداسِ درهم.

2 مال: مالاً — 3 فنصّف: ونصف — 8 درهم: درهماً — 10 وربعاً إلاّ شيئاً: وربع إلاّ شيء / أحدهما: أي أحد القسمين — 12 ربعاً: ربع — 13 إلاّ شيئاً: إلاّ شيء — 14 شيئاً: شيء — 15 أحد القسمين والآخر: في الهامش / وهو: "هو" فوق السطر — 16 شيئاً: شيء — 19 قسمت: فقسمت.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des deux parties une chose et l'autre dix moins une chose. Tu multiplies une chose par elle-même, on a un *carré* ; puis tu multiplies dix moins une chose par lui-même, on a un *carré* plus cent dirhams moins vingt choses. Soustrais l'un de l'autre, il reste cent dirhams moins vingt choses ; retiens-le ; multiplie ensuite l'une des deux parties par l'autre, c'est-à-dire une chose par dix moins une chose, on a dix choses moins un *carré*. Multiplie-le par ce qui reste une fois que tu as soustrait les quotients l'un de l'autre, ce qui est cinq sixièmes de dirham. On a donc huit choses plus un tiers d'une chose moins cinq sixièmes de *carré* égaux à cent dirhams moins vingt racines. Restaure les cent dirhams par les racines et ajoute-les aux huit choses plus un tiers d'une chose moins cinq sixièmes de *carré*. On a donc vingt-huit choses plus un tiers d'une chose moins cinq sixièmes de *carré* égaux à cent dirhams. Restaure-le par cinq sixièmes de *carré* et ajoute-les aux cent dirhams ; on a cent dirhams plus cinq sixièmes de *carré* égaux à vingt-huit choses plus un tiers d'une chose. Complète alors les cinq sixièmes de *carré* pour qu'ils deviennent un seul *carré*, et cela en lui ajoutant son cinquième ; puis ajoute à tout ce que tu as son cinquième, on a alors un *carré* plus cent dirhams plus vingt dirhams égaux à trente-quatre choses. Prends la moitié des racines, multiplie-la par elle-même et retranche du produit cent vingt dirhams ; il reste cent soixante-neuf dirhams ; prends sa racine – treize –, retranche-la de la moitié des choses, qui est dix-sept, il reste donc quatre, l'une des deux parties, et l'autre est six.

La cause de ce problème est comme la cause du problème qui précède. La différence entre eux est que, dans le premier problème, on avait besoin de la cause : si deux nombres sont tels que l'un divise l'autre, alors la somme des produits [29r] de chacun de ces deux nombres par lui-même est égale au produit de l'un des deux nombres par l'autre et par <la somme des> quotients de chacun des deux nombres par l'autre. Nous avons montré la cause de cela. Mais on a besoin dans ce problème-ci de la cause suivante : si deux nombres sont tels que l'un divise l'autre, alors, si tu

قياسُه: أن تجعل أحد القسمين شيئاً والآخر عشرةً إلاّ شيئاً. فتضرب شيئاً في مثله فيكون مالاً، ثم تضرب عشرةً إلاّ شيئاً في مثلِها فيكون مالاً ومائةَ درهمٍ إلاّ عشرين شيئاً. فأسقط أحدهما من الآخر فيبقى مائة درهم إلاّ عشرين شيئاً، فاحفظه. ثم اضرب أحدَ القسمين في الآخر وهو شيء في عشرة إلاّ شيئاً فيكون: عشرةُ أشياء إلاّ مالاً، فاضْرِبْها فيما بقي من القسمين بعد أن أسقطت أحدهما من الآخر، وهو خمسة أسداس درهمٍ. فيكون: ثمانيةُ أشياء وثلث شيء إلاّ خمسة أسداسِ مالٍ تعدل مائةَ درهمٍ إلاّ عشرين جذراً. فاجْبُر المائة درهمٍ بالجذورِ وَزِدها على الثمانية أشياءَ وثلث شيء إلاّ خمسة أسداس مالٍ. فتكون: ثمانيةً وعشرين شيئاً وثلث شيء إلاّ خمسة أسداسِ مالٍ تعدل مائةَ درهمٍ. فاجْبُرْها بخمسة أسداسِ مالٍ وزِدْها على المائة درهم. فتكون: مائة درهم وخمسة أسداسِ مالٍ تعدل ثمانية وعشرين شيئاً وثلث شيء. فأكْمِل خمسة أسداس المال حتى يصير مالاً واحداً. وإكمالُك إيّاه أن تَزيدَ عليه مثل خُمْسِهِ. فتزيدُ على كلّ شيء معك مثلَ خُمْسِهِ. فيكون مالاً ومائة درهم وعشرين درهماً تعدل أربعةً وثلاثين شيئاً. فنصِّف الأجذار واضْرِبْها في مِثلِها ولتُسْقِطْ ممّا اجتمع مائةً وعشرين درهماً، فيبقى مائةٌ وتسعة وستون درهماً، فخذ جذرها: ثلاثة عشر، فأسقطها من نصف الأشياء وهي سبعة عشر، فيبقى أربعة وهو أحد القِسْمينِ والآخر ستّة.

وعلّةُ هذه المسألة مثل عِلّةِ المسألة التي قبلها. والفرق بينهما أنّ المسألة الأوّلى احْتِيجَ فيها إلى العلّة: لكلّ عددين يُقسم كلّ واحدٍ منهما على الآخرِ؛ فإنّ ضَرْبَ / كلّ واحدٍ من العددين في مثله، مجموعين، مثلُ ضربِ أحد ٢٩-و العددين في الآخر وفيما خرج من قَسْمَي العددين كلّ واحدٍ منهما على الآخر. وقد بيّنا عِلّةَ ذلك. وهذه المسألة يُحْتاجُ فيها إلى العلّة: لكلّ عددين يُقسم كلّ

1 إلاّ شيئاً: إلاّ شيء – 4 شيئاً: شيء – 15 وستّون: في الهامش/ درهماً: كتبها "درهم" ثم استدرك فصحّحها عليها – 19 إلى العلّة: تحت السطر.

multiplies chacun des deux nombres par lui-même et que tu soustrais un produit de l'autre, ce qui reste sera égal au produit de l'un des nombres par l'autre et par la différence des quotients de chacun des deux nombres par l'autre. Celui qui considère la cause du premier problème détermine la cause de ce problème car elle lui est semblable. Et on peut traiter ce problème par les trois procédés qui sont dans le premier problème, si Dieu Très-Haut le veut.

<10> Si on te dit : tu répartis cinquante dirhams entre des hommes, alors chacun d'eux obtient une chose. Ensuite tu as ajouté trois hommes, puis tu répartis entre eux les cinquante dirhams, alors chacun d'eux a obtenu trois dirhams plus un demi plus un quart de dirham de moins que ce qu'ont obtenu les premiers.

On l'infère ainsi : tu multiplies les premiers hommes par la différence qui est entre ce qu'obtiennent les premiers et ce qu'obtiennent les seconds. Divise le produit par la différence entre les premiers hommes et les autres. Ce qu'on obtient, multiplie-le par les autres hommes ; le produit sera donc le nombre divisé.

Je pose la cause de ce procédé : posons le nombre divisé, qui est cinquante dirhams, la surface *ABCD*, les premiers hommes la droite *CD*, et la part de chacun de ces premiers hommes la droite *AC*, puisque le produit de la droite *AC* par la droite *CD* est la surface *CB*. Si donc nous divisons la surface *ACDB* par la droite *CD*, qui est le nombre[39] des premiers hommes, alors la part de chacun est la droite *AC*. Ajoutons ensuite aux premiers hommes – la droite *CD* – trois hommes, soit la droite *DE*. Alors la droite *CE* sera les autres hommes. Posons la surface *CEGH* cinquante et partageons-la selon la droite *CE*, qui est les autres hommes. Alors on a la droite *CG*, la part de chacun [29^{v}] des autres hommes. La droite *AG* est donc trois plus un demi plus un quart, car c'est la différence entre la part de chacun des premiers et la part de chacun des seconds.

[39] Nous ajoutons « le nombre » pour les besoins de la traduction ; et ainsi dans la suite.

واحدٍ منهما على الآخر، فإنّك إذا ضربت كلّ واحدٍ من العددين في مثله وأسقطت أحدهما من الآخر، كان ما بقي من ذلك مثلَ ضرب أحدِ العددين في الآخر ثم في فضل ما بين ما خَرَج من قسمة كلّ واحدٍ من العددين على الآخر. فمن تدبَّر عِلَّة المسألة الأوّلى استخرج عِلَّة هذه المسألة لأنّها شبيهة بها. والأعمال الثلاثة التي في المسألة الأوّلى نَعْمَلُ بها هذه المسألةَ، إن شاء اللهُ تعالى.

<١٠> فإن قيل لك: قَسَمْتَ خمسين درهماً على رجالٍ فأصاب الواحدَ شيء، ثم زدت فيهم ثلاثة رجالٍ، ثم قسمت عليهم الخمسين درهماً، فأصاب الواحد أقلُّ ممَّا أصاب الأوّل بثلاثة دراهم ونصفٍ وربعِ درهمٍ.

قياسه: أن تضرب الرجال الأوّلين في النقصان الذي بين ما يصيب الواحد الأوّل وبين ما يصيب الواحد الثاني، فما اجتمع من الضرب فاقسمه على فضل ما بين الرجال الأوّلين والآخرين. فما خرج فاضربه في الرجال الآخرين، فما اجتمع فهو العَدَدُ المقسومُ.

وأنا واضعٌ عِلَّةَ هذا الباب: وهو أنّا نجعل العددَ المقسومَ – وهو خمسون درهماً – سطح ا ب ج د والرجالَ الأوّلين خطّ ج د، والذي يصيبُ كلّ واحدٍ من الرجال الأوّلين خطّ ا ج، لأنّ ضربَ خطّ ا ج في خطّ ج د هو سطح ج ب. فإذا قسمنا سطح ا ج ب د على خطّ ج د – الذي هو الرجال الأوّلون – خرج ما يُصيبُ الواحدَ خطّ ا ج. ثم نزيد على الرجال الأوّلين وهم خطّ ج د ثلاثةَ رجالٍ وهو خطّ د ه. فصار خطُّ ج ه الرجال الآخرين. ونجعل سطح ج ه ز ح خمسين، ونقسمه على خطّ ج ه الذي هو الرجال الآخرون – فيخرج خطّ ج ز وهو ما يصيب كلّ واحدٍ من / الرجال الآخرين. فخطّ ا ز ثلاثةٌ ونصفٌ وربعٌ لأنّه الفضلُ بين ما يصيب الواحدَ الأوّل والواحد الثاني. ٢٩-ظ

7 درهماً: درهم – 9 النقصان: نقصان – 11 الآخرين: كتب بخطّ آخر في الهامش الحاشية التالية: "اكتفى بلفظة الآخرين، وهو يريد الأوّلين والآخرين، فإنّ المجموع صاروا آخرين، فالآخرين: المراد به المجموع" مع الكلمة "بلغ" – 15 ضرب: فوق السطر.

Nous multiplions alors le nombre des premiers hommes, qui est la droite *GM* – car la droite *GM* est égale à la droite *CD* –, par la droite *AG*, qui est la différence entre la part de chacun des premiers et celle de chacun des seconds. On aura la surface *GB* ; mais la surface *GB* est égale à la surface *HD*, car la surface *AD* est égale à la surface *CH*, étant donné que chacune d'elles est cinquante. Nous ôtons ensuite la surface *CM* commune, il reste la surface *GB* égale à la surface *DH*. Nous divisons alors la surface *DH* par la droite *DE*, qui est trois, qui est la différence entre le nombre des premiers hommes et celui des autres. On a la droite *DM*, qui est égale à la droite *CG*, qui est la part de chacun des autres hommes. Nous la multiplions par la droite *CE*, qui est le nombre des autres hommes ; on a alors la surface *CH* cinquante. Ce qu'il fallait démontrer.

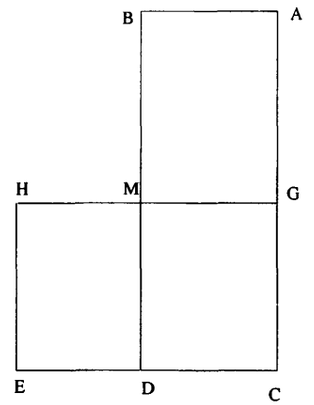
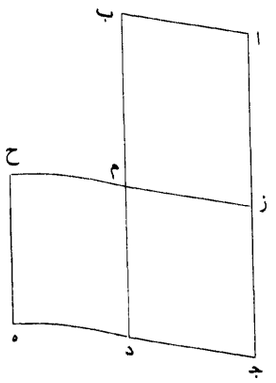


Fig. 35

Cela étant montré, et la cause étant établie pour ce procédé, alors nous posons le nombre des premiers hommes une chose, que nous multiplions par la différence entre ce qu'obtiennent les premiers et ce qu'obtiennent les seconds[40] ; c'est trois plus un demi plus un quart ; on a trois choses plus une demi-chose plus un quart de chose, que nous divisons par la différence entre le nombre des premiers hommes et le nombre des autres, c'est-à-dire trois ; on a une chose plus un quart de chose, que nous multiplions par le nombre des autres hommes, qui est une chose plus trois ; on a alors un *carré* plus un quart de *carré* plus trois choses plus trois quarts de chose égaux à cinquante dirhams. Ramène tout ce que tu as à un seul *carré*, on a un *carré* plus trois choses égaux à quarante dirhams. Partage les choses en deux moitiés, multiplie-les par elles-mêmes et ajoute le produit à quarante ; on a quarante-deux plus un quart ; prends sa racine, on a six plus un demi ; soustrais-en la moitié des racines, qui est un plus un demi, il reste cinq, qui est le nombre des premiers hommes.

[40] Littéralement : entre eux.



فنضرب الرجال الأوّلين، وهم خطّ ز م – لأنّ خطّ ز م مثل خطّ ج د – في خطّ ا ز الذي هو الفضل بين ما يصيب الواحدَ الأوّل والواحد الثاني، فيكون سطح ز ب. وسطح ز ب مثل سطح ح د، لأنّ سطح ا د مثل سطح ج ح، إذْ كان كلّ واحد منهما خمسين، فنلقي سطح ج م المشترك فيبقى سطح ز ب مثل سطح د ح. فنقسم سطح د ح على خطّ د ه، وهو ثلاثة، وهو الفضل ما بين الرجال الأوّلين والآخرين، فيخرج خطّ د م وهو مثل خطّ ج ز وهو ما يصيبُ الواحدَ من الرجال الآخرين. فنضربه في خطّ ج ه الذي هو الرجال الآخرون. فيكون سطح ج ح خمسين؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فإذْ قد بان ذلك وثبتت العلّة في هذا الباب، فإنّا نجعل الرجال الأوّلين شيئاً، فنضربه في النقصان الذي بينهم، وهو ثلاثةٌ ونصفٌ وربعٌ، فيكون ثلاثةَ أشياء ونصفٌ وربع شيء، فنقسمه على فضل ما بين الرجال الأوّلين والآخرين وهو ثلاثة، فيخرج شيء وربع شيء، فنضربه في الرجال الآخرين [والأوّلين] وهم شيء وثلاثة، فيكون مالاً وربعاً وثلاثة أشياء وثلاثةَ أرباعِ شيءٍ تعدل خمسين درهماً. فَرُدَّ كلّ شيء معك إلى مالٍ واحدٍ، فيكون مالاً وثلاثة أشياء تعدل أربعين درهماً. فنصِّف الأشياء واضْرِبْها في مثلها وزِدْ ما اجتمع على الأربعين فيكون اثنين وأربعين وربعاً. فخذ جذرها فيكون ستّة ونصفاً. فانْقص منه نصف الأجذار، وهو واحد ونصف، فيبقى خمسة وهم الرجال الأوّلون.

5 ح د: ج د – 7 خمسين: خمسون – 11 هو: هم / الآخرون: الآخرين – 14 بينهم: يعني الفضل بين ما يصيب الواحد الأول والواحد الثاني – 16 وهو ثلاثة ... والأوّلين: في الهامش – 20 ونصفاً: ونصف.

<11> Si on te dit : tu partages dix dirhams entre des hommes dont chacun obtient une chose. Puis tu leur ajoutes quatre hommes et tu partages entre eux trente dirhams ; la part de chacun sera inférieure à la part de chacun des premiers, de quatre dirhams.

On l'infère ainsi : tu multiplies le nombre des premiers hommes par la différence entre la part de chacun des premiers hommes et la part de chacun des autres hommes, puis tu ajoutes au produit la différence entre les deux nombres divisés ; ce que tu obtiens, tu le divises par la différence entre le nombre des premiers hommes et le nombre des autres ; tu multiplies alors le quotient par le nombre des autres hommes. Le produit sera le plus grand nombre divisé, qui est trente dans ce problème.

J'établis donc la cause de ce procédé : posons le plus petit nombre divisé, qui est dix, la surface *ABCD*, le nombre des premiers hommes la droite *CD* et la part de chacun des premiers hommes la droite *AC*. Ajoutons ensuite au nombre des premiers hommes – la droite *CD* – quatre hommes, soit la droite *DE*. La droite *CE* sera les autres hommes. Posons la surface *CEHG* trente dirhams et divisons-la par la droite *CE* ; alors on aura la droite *CG*, qui est la part de chacun des autres hommes. Il reste la droite *AG*, quatre ; car c'est la différence entre la part de chacun des premiers hommes et celle de chacun des autres hommes. Multiplions le nombre des premiers hommes – la droite *GM*, car la droite *GM* est égale à la droite *CD* – par la droite *AG* ; on a la surface *GB*. Ajoutons ensuite à la surface *GB* la différence entre trente et dix, soit vingt ; on a la surface *DH* ; la surface *DH* sera en effet plus grande de vingt que la surface *GB*, c'est la différence entre les deux nombres divisés ; la surface *AD* est en effet dix et la surface *CH* est trente, donc la surface *CH* est plus grande de vingt que la surface *AD*. On ôte la surface *CM* commune, il reste la surface *DH* plus grande que la surface *GB* de vingt. On divise ensuite la surface *DH* par la droite *DE*, qui est quatre ; on a la droite *DM*, qui est égale à la droite *CG*, ce qui est la part de chacun des autres hommes. On multiplie la droite *CG* par la droite *CE*, on a la surface *CH*, qui est trente. Ce qu'il fallait démontrer.

En voici la figure.

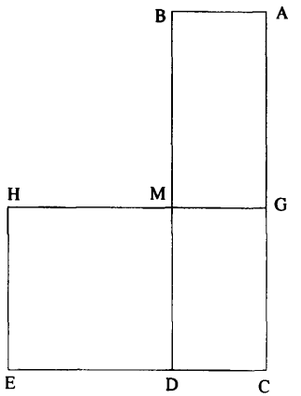
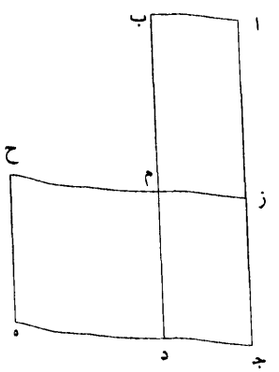


Fig. 36

<١١> فإن قيل: قسمت عشرة دراهم على رجال فأصاب الواحدَ ٣٠-و
منهم شيء، ثم زدتَ / فيهم أربعةَ رجالٍ، ثم قسمت عليهم ثلاثين درهماً،
فأصاب الواحدَ الآخر أقلُّ ممّا أصاب الواحدَ الأوّل بأربعة دراهم.

قياسه: أن تَضْرِبَ الرجال الأوّلين في النقصان الذي بين ما يصيبُ الواحدَ
من الرجال الأوّلين وبين ما يصيب الواحد من الرجال الآخرين. ثمّ تزيد على ما
اجتمع من الضرب فضل ما بين العددين المقسومين، فما بلغ قَسْمتَه على فضل
ما بين الرجال الأوّلين والآخرين. فما خرج ضربْتَه في الرجال الآخرين، فما
اجتمع فهو العدد الأكثر المقسوم، وهو في هذه المسألة ثلاثون.

وأنا واضحٌ عِلّةَ هذا البابِ: وهو أنّا نجعل العددَ الأصغر المقسومَ — وهو
عشرة — سطح ا ب جـ د والرجال الأوّلين خطّ جـ د والذي يصيبُ الواحدَ من
الرجال الأوّلين خطّ ا جـ. ثمّ نزيد على الرجال الأوّلين وهم خطّ جـ د أربعة
رجالٍ وهم خطّ د ه. فصار خطّ جـ ه الرجال الآخرين. ونجعل سطح جـ ه ح ز
ثلاثين درهماً، ونقسمه على خطّ جـ ه فيخرج خطّ جـ ز وهو ما يصيبُ الواحد
من الرجالِ الآخرين، فيبقى خطّ ا ز أربعة؛ لأنّه الفضل بين ما يصيب الواحدَ
من الرجالِ الأوّلين والرجال الآخرين.



فَنَضْرِبُ الرجال الأوّلين وهم خطّ ز م،
لأنّ خطّ ز م مثلُ خطّ جـ د، في خطّ ا ز.
فيكون سطحُ ز ب، ثمّ نزيدُ على سطح
ز ب فضلَ ما بين الثلاثين والعشرة — وهو
عشرون — فيكون سطح د ح، وإنّما صار
سطحُ <د ح> أكبر من سطح ز ب
بعشرين، وهو فضل ما بين العددين

2 شيء: لا تعني المجهول في المسألة – 3 الآخر: فوق السطر / الواحد: الآخر – 6-7 العددين ... ما بين: في الهامش / الرجال الأوّلين و: في الهامش – 15 الرجال الأولين: في الهامش.

Étant donné que nous avons montré la cause de ce procédé, [30v] alors nous posons le nombre des premiers hommes une chose, que nous multiplions par la différence entre eux et les autres, qui est quatre dirhams ; on a donc quatre choses, auxquelles nous ajoutons vingt dirhams, qui est la différence entre les deux nombres divisés ; on a alors quatre choses plus vingt dirhams, que nous divisons par la différence entre le nombre des premiers hommes et le nombre des autres, qui est quatre ; on a une chose plus cinq, que nous multiplions par le nombre des autres hommes, qui est une chose plus quatre ; on a alors un *carré* plus neuf choses plus vingt dirhams égaux au plus grand nombre – le dividende –, qui est trente dirhams. Nous ôtons vingt de trente, il reste un *carré* plus neuf choses égaux à dix ; partage les choses en deux, on a quatre plus un demi ; multiplie-le par lui-même, on a vingt plus un quart. Ajoute-leur les dix dirhams, on a trente plus un quart ; prends la racine, on a cinq plus un demi ; retranches-en la moitié des racines, soit quatre plus un demi, il reste un ; c'est le nombre des premiers hommes.

<12> Si on dit : tu partages dix dirhams entre des hommes dont chacun obtient une chose, puis tu leur ajoutes quatre hommes, entre lesquels tu partages soixante dirhams dont chacun obtient, en plus de ce qu'obtenait chacun des premiers, cinq dirhams.

On l'infère ainsi : tu multiplies le nombre des autres hommes par l'excédent qui est entre les parts de chacun de ceux-là et les parts de chacun des premiers hommes. Ce que tu obtiens, ajoute-le au plus petit nombre

المقسومين، لأنّ سطحَ ا د عشرة وسطح ج ح ثلاثون، فسطح ج ح أكبر من سطح ا د بعشرين. فيُلقى سطح ج م المشترك، فيبقى سطح د ح أكبر من سطح ز ب بعشرين. ثمّ يُقسم سطح د ح على خطّ د ه، الذي هو أربعة، فيخرج خطّ د م وهو مثل خطّ ج ز، وهو ما يصيب الواحدَ من الرجال الآخرين. فيُضرب خطّ ج ز في خطّ ج ه، فيكون سطح ج ح وهو ثلاثون؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. وهذه صورته (ص. 357).

٣٠-ظ

فإذْ قد بيَّنا علّةَ هذا الباب، / فإنّا نجعل الرجال الأوّلين شيئاً فنضربه في النقصان الذي بينهم <وبين الآخرين> وهو أربعة دراهم، فيكون أربعةَ أشياء، فنـــزيد عليها عشرين درهماً، وهو فضلُ ما بين العددين المقسومين، فيكون أربعةَ أشياء وعشرين درهماً، فنقسمه على فضلِ ما بين الرجال الأوّلين والآخرين وهو أربعة. فيخرج شيء وخمسةٌ، فنضربه في الرجال الآخرين، وهو شيء وأربعة، فيكون: مالاً وتسعة أشياء وعشرين درهماً تعدل العدد الأكبر – المقسوم – وهو ثلاثون درهماً. فنلقي عشرين من ثلاثين فيبقى مالٌ وتسعة أشياء تعدل عشرةً. فنصِّف الأشياء يكون أربعةً ونصفاً، فاضربها في مثلها يكون عشرين ورُبعاً، فَزِدْ عليها العشرة الدراهم فيكون ثلاثين وربعاً. فخذ جذرها فيكون خمسةً ونصفاً. فانقص منها نصفَ الأجذار وهو أربعة ونصف فيبقى واحد، وهو الرجال الأوّلون.

<١٢> فإن قال: قسمت عشرة دراهم على رجال فأصاب الواحدَ شيءٌ. ثمّ زدت فيهم أربعة رجال، ثمّ قسمت عليهم ستين درهماً فأصاب الواحدَ الآخر أكثر ممّا أصاب الواحدَ الأوّل بخمسة دراهم.

قياسه: أن تضرب الرجال الآخرين في الزيادة التي بين ما يصيب الواحدَ من الرجال الآخرين والواحدَ من الرجال الأوّلين، فما بلغ فَزِدْ عليه العددَ

12 مالاً: مال – 19 شيء: لا تعني هنا المجهول بل تدلّ على الحصّة – 20 الآخر: في الهامش.

divisé, retranche la somme du plus grand nombre divisé, divise ce qui reste par la différence entre le nombre des premiers hommes et celui des autres et multiplie le quotient par le nombre des premiers hommes. Le produit sera le plus petit nombre divisé.

J'établis la cause de ce procédé : posons le plus petit nombre divisé, qui est dix, la surface [31r] *ABCD* ; le nombre des premiers hommes la droite *CD* et la part de chacun des premiers hommes, la droite *AC* ; ajoutons ensuite aux premiers hommes, qui sont la droite *CD*, quatre hommes, qui sont la droite *DE* ; alors la droite *CE* sera les autres hommes ; posons la surface *CEML* soixante et divisons-la par la droite *CE*, le nombre des premiers hommes ; on a la droite *CL* la part de chacun des autres hommes ; la droite *AL* est cinq, car c'est la différence entre la part de chacun des autres hommes et la part de chacun des premiers hommes ; nous multiplions le nombre des autres hommes – c'est-à-dire la droite *AO*, car la droite *AO* est égale à la droite *CE* – par la droite *AL*, qui est la différence ; on a alors la surface *AM* ; ajoutons-y ensuite la surface *CB*, qui est le plus petit nombre divisé, soit dix ; puis retranchons la somme de la surface *CM*, qui est le plus grand nombre divisé, c'est-à-dire soixante ; il reste la surface *DO* ; divisons-la par la droite *DE*, qui est quatre, c'est-à-dire la différence entre le nombre des premiers hommes et le nombre des autres ; on a la droite *DB*, qui est égale à la droite *AC*, et c'est la part de chacun des premiers hommes ; nous la multiplions par la droite *CD*, les premiers hommes ; on a la surface *CB* dix. Ce qu'il fallait démontrer.

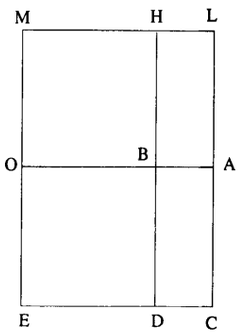
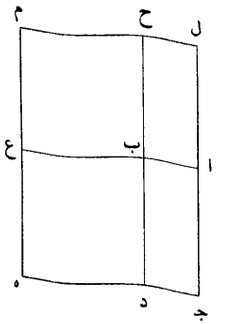


Fig. 37

الأصغر المقسوم، فما اجتمع فأسقطه من العدد الأكبر المقسوم، فما بقي فاقْسِمْه على فضلِ ما بين الرجال الأوّلين والآخرين، فما خرج فاضربه في الرجال الأوّلين. فما بلغ فهو العددُ الأصغر المقسومُ.

وأنا واضعٌ عِلّةَ هذا الباب: وهو أنّا نجعل العدد الأصغر – وهو المقسوم، ٣١-و
وهو عشرةٌ – سطحَ / ا ب ج د والرجال الأوّلين خطّ ج د والذي يصيب
كلّ واحد من الرجال الأوّلين خطّ ا ج، ثمّ نزيد على الرجال الأوّلين – وهم
خطّ ج د – أربعة رجالٍ، وهم خطّ د ه. فصار خطُّ ج ه الرجال الآخرين.
ونجعل سطحَ ج ه م ل ستين، ونقسمه على خطّ ج ه – الذين هم الرجال
الآخرون –، فيخرج خطُّ ج ل هو ما يصيب كلّ واحدٍ من الرجال الآخرين.
فخطّ ا ل خمسةٌ لأنّه الفضل بين ما يصيبُ الواحدَ من الرجال الآخرين والواحدَ
من الرجال الأوّلين. فنضرب الرجال الآخرين، وهم خطّ ا ع – لأنّ خطّ ا ع
مثلُ خطّ ج ه – في خطّ ا ل الذي هو الفضل، فيكون سطحُ ا م. ثمّ نزيد عليه
سطحَ ج ب الذي هو العدد الأصغر المقسوم، وهو عشرة. ثمّ نُسقط ما اجتمع
من سطح ج م الذي هو العدد الأكبر المقسوم، وهو



ستون، فيبقى سطحُ د ع، فنقسمه على خطّ د ه
وهو أربعة، وهو فضل ما بين الرجال الأوّلين
والآخرين، فيخرج خطُّ د ب وهو مثل خطّ ا ج
وهو ما يصيب الواحدَ من الرجال الأوّلين. فنضربه
في خطّ ج د – الذين هم الرجال الأوّلون. فيكون
سطح ج ب عشرة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

5 وهو: فوق السطر / ج د: ج ه – 11 الرجال (الثانية): رجال – 19 ج د: ج ه.

La cause de ce procédé ayant été démontrée, alors nous posons le nombre des autres hommes une chose plus quatre, que nous multiplions par l'excédent qui est entre eux, c'est-à-dire cinq ; on a alors cinq choses plus vingt dirhams à quoi nous ajoutons le plus petit nombre divisé, qui est dix. On a alors cinq choses plus trente dirhams, que nous retranchons du plus grand nombre divisé, qui est soixante dirhams ; il reste trente [31v] dirhams moins cinq choses, que nous divisons par la différence entre le nombre des premiers hommes et le nombre des autres, ce qui est quatre ; on a alors sept plus un demi moins une chose et un quart de chose ; multiplions-le par le nombre des premiers hommes, qui est une chose ; on a alors sept choses plus une demi-chose moins un *carré* et un quart de *carré*, égaux au plus petit nombre divisé, qui est dix ; ramène tout ce que tu as à un seul *carré*, on a alors six choses moins un *carré* égaux à huit. Complète les six choses par le *carré* et ajoute-le au huit ; on a un *carré* plus huit égaux à six choses ; partage les choses en deux moitiés, on a trois ; multiplie-le par lui-même, on a neuf, duquel tu retranches le huit ; il reste un ; prends sa racine, on a un ; retranche-le de la moitié des racines, qui est trois, il reste deux ; c'est le nombre des premiers hommes. Et si tu veux, ajoute le un à la moitié des racines, qui est trois ; on a quatre, qui sont les premiers hommes.

<13> Si on dit : tu partages soixante dirhams entre des hommes de sorte que chacun obtienne une chose, puis tu leur ajoutes trois hommes et tu partages vingt dirhams entre eux de sorte que chacun obtienne vingt-six dirhams de moins que ce qu'obtenaient les premiers.

On l'infère ainsi : tu multiplies le nombre des premiers hommes par la différence entre la part de chacun des premiers et la part des autres. Retranche du produit la différence entre les deux nombres divisés, divise ce qui reste par la différence entre le nombre des premiers hommes et le nombre des autres. Multiplie le quotient par le nombre des autres hommes ; ce qu'on obtient est le plus petit nombre divisé.

فإذْ قد تبيَّن عِلَّة هذا الباب، فإنّا نجعل الآخرين شيئاً وأربعة، ونضربه في الزيادة التي بينهم، وهي خمسة، فتكون خمسة أشياء وعشرين درهماً، فنـزيد عليه العدد الأصغر المقسوم وهو عشرة، فيكون خمسة أشياء وثلاثين درهماً، فنُسقطه من العدد الأكبر المقسوم وهو ستون درهماً، فيبقى ثلاثون / درهماً إلاّ خمسةَ أشياء، فنقسمه على فضلِ ما بين الرجال الأوّلين والآخرين وهو أربعة، فيخرج سبعةٌ ونصفٌ إلاّ شيئاً وربعَ شيء، فنضربه في الرجال الأوّلين وهم شيء، فيكون: سبعةُ أشياء ونصف شيء إلاّ مالاً وربعاً تعدِل العددَ الأصغر المقسوم وهو عشرة. فَرُدَّ كلّ شيء معك إلى مالٍ واحدٍ فيكون: ستّة أشياء إلاّ مالاً تعدل ثمانية. فأكمل الستّة الأشياءِ بالمالِ وزِدْه على الثمانية، فيكون: مالٌ وثمانية تعدل ستّة أشياء. فنصِّف الأشياء، فتكون ثلاثة، فاضربها في مثلها فتكون تسعةً، فأسقط منها الثمانيةَ فيبقى واحدٌ، فَخُذْ جذرَه فيكون واحداً. فانْقِصْهُ من نصف الأجذار وهو ثلاثة، فيبقى اثنان وهم الرجال الأوّلون. وإن شئت فَزِدْ الواحد على نصفِ الأجذار وهو ثلاثة، فيكون أربعة وهم الرجالُ الأوّلون.

٣١-ظ

<١٣> فإن قال: قَسَمت ستين درهماً على رجالٍ فأصاب الواحدَ شيءٌ. ثمّ زِدْتَ فيهم ثلاثةَ رجالٍ، ثمّ قَسَمْتَ عليهم عشرين درهماً فأصاب الواحدَ أقلُّ ممّا أصاب الواحدَ الأوّل بستّة وعشرين درهماً.

قياسُه: أن تضرب الرجالَ الأوّلينَ في النقصان الذي بين ما يصيب الواحدَ من الأوّلين والآخرين. فما اجتمع فأسْقِطْ منه فضلَ ما بين العددين المقسومين، فما بقي فاقسمه على فضل ما بين الرجال الأوّلين والآخرين. فما خرج فاضربه في الرجال الآخرين، فما اجتمع فهو العددُ الأصغر المقسوم.

2 بينهم: أي بينهم وبين الأوّلين — 4 ستّون: ستّين — 6 شيئاً: شيء — 9 مال: الرفع هنا جائز، كالنصب أيضاً، وفي معظم الأحوال يؤثر النصب — 17 النقصان: نجد في الهامش بخطّ آخر الحاشية التالية "يريد بالنقصان فضل ما يصيب الأوّل والآخر"؛ يعقبها كلمة مطموسة — 17-18 بين ... والآخرين: في الهامش.

J'établis la cause de ce procédé : posons le plus grand nombre divisé qui est soixante dirhams la surface *ABCD*, le nombre des premiers hommes la droite *CD* et la part qui revient à chacun des premiers hommes la droite *AC*. Ajoutons ensuite au nombre des premiers hommes, qui est la droite *CD*, trois hommes, c'est-à-dire la droite *DE*. La droite *CE* sera le nombre des autres hommes. Posons la surface *CEHG* vingt et divisons-la par la droite *CE*, qui est le nombre des autres hommes. On a la droite *CG* la part de chacun des autres hommes. La droite *AG* est donc vingt-six, car c'est la différence entre la part de chacun des premiers hommes [32r] et la part de chacun des autres hommes. Multiplions le nombre des premiers hommes, ce qui est la droite *GM*, par la droite *AG* ; on a la surface *GB*. Retranchons-en la différence entre les deux nombres divisés, soit quarante ; il reste la surface *DH*. Il est clair que la surface *GB* est plus grande que la surface *DH* de quarante car la surface *AD* est soixante et la surface *CH* est vingt. Elle est donc plus grande qu'elle de quarante. Retranchons la surface *GD* commune, il reste la surface *GB* plus grande que la surface *D H* de quarante. Divisons ensuite la surface *DH* par la droite *DE*, qui est trois. On a la droite *DM*, qui est égale à la droite *CG* et qui est la part de chacun des autres hommes. Multiplions la droite *CG* par la droite *CE*, qui est le nombre des autres hommes ; on a la surface *CH*, qui est le plus petit nombre divisé ; c'est vingt.

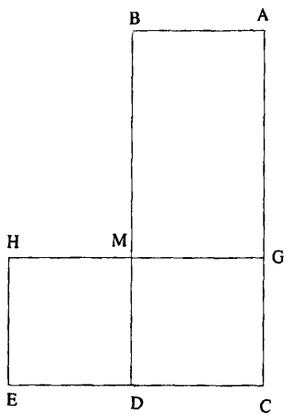
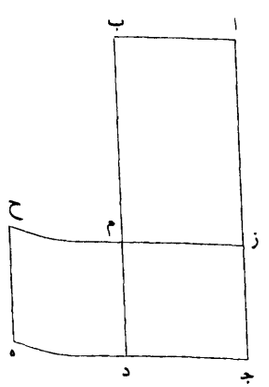


Fig. 38

Étant donné qu'on a démontré la cause de ce procédé, alors posons le nombre des premiers hommes une chose, multiplions-le par la différence entre la part de chacun des premiers hommes et la part de chacun des autres, qui est vingt-six ; on a vingt-six choses. Ôtons-en la différence entre

وأنا واضعٌ علّة هذا الباب: وهو أنّا نجعل العددَ الأكبر المقسوم، وهو ستون درهماً، سطحَ ا ب ج د والرجال الأوّلين خطّ ج د والذي يصيب كلّ واحدٍ من الرجال الأوّلين خطّ ا ج، ثمّ نزيد على الرجال الأوّلين، وهم خطّ ج د، ثلاثة رجال وهو خطّ د ه. فصار خطّ ج ه الرجال الآخرين. ونجعل سطحَ ج ه ح ز عشرين ونقسمه على خطّ ج ه الذي هو الرجال الآخرون. فيخرج خطّ ج ز، وهو ما يصيب الواحد من الرجال الآخرين، فخطّ ا ز ستّة وعشرون، لأنّه الفضل بين ما يصيب الواحدَ من الرجال الأوّلين / والواحدَ من ٣٢-و
الرجال الآخرين. فنضرب الرجال الأوّلين وهم خطّ ز م في خطّ ا ز، فيكون سطحُ ز ب، فنُسقط منه فضلَ ما بين العددين المقسومين، وهو أربعون، فيبقى سطحُ د ح. فبيّن أنّ سطحَ ز ب أكبرُ من سطح د ح بأربعين؛ لأنّ سطحَ ا د ستون وسطح ج ح عشرون، فهو أكبر منه بأربعين. فنُلقي سطح ز د المشترك، فيبقى سطح ز ب أكبر من سطح د ح بأربعين. ثمّ نقسم سطحَ د ح على خطّ د ه وهو ثلاثة، فيخرج <خطّ> د م وهو مثلُ خطّ ج ز وهو ما يصيب الواحدَ من الرجال الآخرين. فنضرب خطّ ج ز في خطّ ج ه - الذي هم الرجال الآخرون — فيكون سطح ج ح وهو العددُ الأصغرُ المقسوم، وهو عشرون.



فإذْ قد تبيّن علّة هذا الباب، فإنّا نجعل الرجال الأوّلين شيئاً، فنضربه في النقصان الذي بين ما يصيب الواحدَ من الأوّلين وبين ما يصيب الواحدَ من الآخرين، وهو ستّة وعشرون، فيكون ستّة وعشرون شيئاً. فنسقط منه فضلَ ما

3 على: عليه — 5 الآخرون: الآخرين — 11 ستّون: ستّين — 12 عشرون: عشرين — 15 مثل: كتب بعدها "فضل" ثم ضرب عليها بالقلم — 21-22 بين ما يصيب ... الآخرين: في الهامش.

les deux nombres divisés, qui est quarante ; il reste vingt-six choses moins quarante dirhams, que nous divisons par la différence entre le nombre des premiers hommes et le nombre des autres, qui est trois ; on a alors huit choses plus deux tiers d'une chose moins treize dirhams et un tiers de dirham, que nous multiplions par le nombre des autres hommes, qui est une chose plus trois. On a alors huit *carrés* plus deux tiers d'un *carré* plus douze choses et deux tiers d'une chose moins quarante dirhams égaux au plus petit nombre, qui est vingt dirhams. Restaure-le par les quarante dirhams et ajoute-le aux vingt dirhams, on aura huit *carrés* plus deux tiers de *carré* plus douze [32ᵛ] choses et deux tiers d'une chose égaux à soixante dirhams. Ramène tout ce que tu as à un seul *carré*. Or nous savons que le *carré* de huit *carrés* plus deux tiers de *carré* est trois parties de vingt-six ; prends donc de tout ce que tu as trois parties de vingt-six, on a alors un *carré* et une chose et douze parties de vingt-six parties d'une chose égaux à six dirhams plus vingt-quatre parties de vingt-six parties de dirham. Partage les choses en deux moitiés, on a dix-neuf parties de vingt-six parties d'une chose ; multiplie-les par elles-mêmes, on a treize parties de vingt-six parties et vingt-trois parties de six cent soixante-seize parties. Ajoute-le aux dirhams, qui sont six plus vingt-quatre parties de vingt-six, on a sept plus onze parties de vingt-six et vingt-trois parties de six cent soixante-seize. Prends sa racine, on a deux dirhams plus dix-neuf parties de vingt-six ; retranches-en la moitié des racines qui est dix-neuf parties de vingt-six, il reste deux, ce qui est le nombre des premiers hommes.

J'établis la cause du premier des quatre problèmes sous une forme numérique qui te donne plus de force pour démontrer les trois problèmes qui restent, si Dieu Très-Haut le veut.

<Lemme> Si on divise un nombre par deux nombres différents, alors le produit du premier diviseur par la différence des deux quotients obtenus

بين العددين المقسومين، وهو أربعون، فيبقى ستّة وعشرون شيئاً إلاّ أربعين درهماً، فنقسمه على فضلِ ما بين الرجال الأوّلين والآخرين، وهو ثلاثة، فيخرج ثمانيةُ أشياء وثلثا شيءٍ إلاّ ثلاثة عشر درهماً وثلث درهم. فنضربه في الرجال الآخرين وهم شيء وثلاثة، فيكون ثمانيةُ أموال وثلثا مال واثنا عشر شيئاً وثلثا شيءٍ إلاّ أربعين درهماً تعدل العددَ الأصغر المقسوم وهو عشرون درهماً. فاجْبُرْها بالأربعين درهماً، وزِدْها على العشرين درهماً، فيكون ثمانيةُ أموالٍ وثلثا مالٍ واثنا عشر / شيئاً وثلثا شيء تعدل ستين درهماً، فَرُدَّ كلّ شيءٍ معك إلى مالٍ واحدٍ. ٣٢-ظ
وقد علمنا أنّ المالَ من ثمانية أموالٍ وثلثي مالٍ ثلاثةُ أجزاء من ستّة وعشرين. فَخُذْ من كلّ شيءٍ معك ثلاثة أجزاء من ستّة وعشرين، فيكون مالاً وشيئاً واثني عشر جزءاً من ستّة وعشرين جزءاً من شيء تعدل ستّة دراهم وأربعة وعشرين جزءاً من ستّة وعشرين جزءاً من درهم. فنصِّف الأشياء فتكون تسعةَ عشرَ جزءاً من ستّة وعشرين جزءاً من شيء، فاضْرِبْها في مِثلِها فتكون ثلاثةَ عشرَ جزءاً من ستّة وعشرين جزءاً، وثلاثة وعشرين جزءاً من ستمائةٍ وستّة وسبعين. فَزِدْها على الدراهم وهي ستّة وأربعة وعشرون جزءاً من ستّة وعشرين. فيكون سبعةً وأحد عشرَ جزءاً من ستّة وعشرين، وثلاثةً وعشرين جزءاً من ستمائةٍ وستّة وسبعين. فخُذ جذرها فيكون درهمين وتسعةَ عشرَ جزءاً من ستّة وعشرين، فأسْقِطْ منها نصف الأجذار، وهو تسعة عشر جزءاً من ستّة وعشرين، فيبقى اثنان وهو الرجال الأوّلون.

وأنا واضع علّة المسألةِ الأوّلى من المسائل الأربع في شكل عدديّ تتقوّى به على برهان المسائل الثلاثة الباقية إن شاء الله تعالى:

<مقدمة> كلّ عددٍ يُقسم على عددين مختلفين؛ فإنّ الذي يكون من ضرب العدد الأوّل المقسوم عليه في فضل ما بين القَسْمَين اللّذين خرجا من قَسْمِ

3 وثلثا: وثلثي – 6 درهماً (الأولى والثانية): درهم – 9 واثني: واثنا – 14 وأربعة: في الهامش / وعشرين: وعشرون – 19 إلى الصفحة التالية (سطر 13): وأنا واضع ... وهذه صفته: في الهامش مع "في الأصل".

lors de la division du nombre par les deux nombres, puis par le diviseur le plus grand, est égal au produit du nombre divisé par la différence entre les deux diviseurs.

Démonstration : *A* a été divisé par *EC*, on obtient *GD* ; le produit de *CE* par *GD* est *A*. De même, *A* a été divisé par *CL*, on obtient *GM* ; le produit de *GM* par *CL* est *A*. Donc le produit de *CE* par *GD* est égal au produit de *CL* par *GM*. Donc le rapport de *CE* à *CL* est égal au rapport de *GM* à *GD*. Si nous inversons, on a le rapport de *CL* à *CE* égal au rapport de *DG* à *GM* ; si nous séparons, on a le rapport de *LE* à *EC* égal au rapport de *DM* à *GM*. Donc le produit de *LE* par *MG* est égal au produit de *CE* par *MD*. Posons dans la multiplication la droite *LC* commune ; le produit de *MG* par *LE* puis de ce qu'on obtient par *CL* est donc égal au produit de *CE* par *MD* puis de ce qu'on obtient par *CL*. Mais le produit de *MG* par *LE* puis de ce qu'on obtient par *CL* est égal au produit de *MG* par *CL* puis de ce qu'on obtient par *LE*. Mais le produit de *MG* par *CL* est *A*, donc le produit de *A* par *LE* est égal au produit de *CE* par *MD* puis de ce qu'on obtient par *CL*. Ce qu'il fallait démontrer.

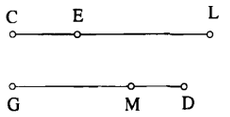


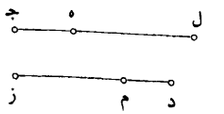
Fig. 39

Et ceci est sa propriété. Il y a deux manières pour ces quatre problèmes et leurs semblables qui sont analogues aux deux manières que nous avons appliquées pour « dix que tu divises en deux parties et tu divises chacune par l'autre, tu obtiens quatre plus un quart ». Je te montre l'une d'elles, pour que tu puisses en déduire l'autre procédé.

<14> Si on te dit : vingt dirhams que tu partages entre des hommes dont chacun obtient une chose, puis tu leur ajoutes deux hommes, et tu partages ensuite entre eux soixante dirhams de sorte que chacun obtienne cinq dirhams de plus que ce qu'obtenait chacun des premiers.

العددِ على العددين، ثمّ ما اجتمع في العدد الأكبر المقسوم عليه، مثلُ الذي يكون من ضرب العددِ المقسومِ في فضلِ ما بين العددين المقسوم عليهما.

برهانه: أنّ آ قُسِم على ه جـ فخرج ز د. فضرب جـ ه في ز د هو آ. وأيضاً، آ قسم على جـ ل فخرج ز م. فَضَرْبُ ز م في جـ ل هو آ. فصار ضَرْبُ جـ ه في ز د مثلَ ضرب جـ ل في ز م. فنسبةُ جـ ه إلى جـ ل كنسبة ز م إلى ز د. وإذا خالفنا كان نسبةُ جـ ل إلى جـ ه كنسبةِ د ز إلى ز م. فإذا فصلنا كان نسبةُ ل ه إلى ه جـ كنسبةِ د م إلى ز م. فضرب ل ه في م ز مثل ضرب جـ ه في م د. ونجعل خطّ ل جـ مشتركاً في الضرب، فخطُّ م ز مضروبٌ في ل ه ثمّ ما اجتمع في جـ ل مثل ضرب جـ ه في م د ثمّ ما اجتمع في جـ ل، وضرب م ز في ل ه ثمّ ما اجتمع في جـ ل مثل ضرب م ز في جـ ل ثمّ ما اجتمع في ل ه، وضرب م ز في جـ ل هو آ، فصار آ في ل ه مثل ضرب جـ ه في م د ثمّ ما اجتمع في جـ ل؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



وهذه صفته: ولهذه المسائل الأربعة وما أشبهها وجهان، وهما شبيهان بالوجهين اللّذين عملناهما في "عشرةٍ قَسمتَها قسمين فقَسمت كلّ واحدٍ منهما على الآخر، فخرج أربعة ورُبع". وأنا مبيّن لك أحدهما لتستدلّ به على العمل الآخر.

<١٤> وهو إذا قيل لك: قسمت عشرين درهماً على رجال، فأصاب الواحدَ شيءٌ، ثمّ زِدْتَ فيهم رجلين، ثمّ قسمت عليهم ستين درهماً، فأصاب الواحدَ أكثرُ ممّا أصاب الواحدَ الأوّل بخمسة دراهم.

14 منهما: منها.

On l'infère ainsi : tu poses le nombre des premiers hommes une chose et tu partages vingt dirhams entre eux de sorte que chacun obtienne un dinar. Si nous multiplions le dinar par une chose, il vient vingt dirhams. Nous ajoutons aux premiers hommes, qui sont une chose, deux hommes ; on a une chose plus deux le nombre des autres hommes. Nous divisons soixante dirhams par une chose plus deux, on a un dinar plus cinq. Si nous multiplions [33r] un dinar plus cinq par une chose plus deux, on a soixante dirhams. Nous multiplions un dinar plus cinq par une chose plus deux, on a trente dirhams plus cinq choses plus deux dinars égaux à soixante dirhams. Nous ôtons trente dirhams et cinq choses de soixante. Il reste trente dirhams moins cinq choses égaux à deux dinars, et le dinar est égal à quinze dirhams moins deux choses et demie. Nous revenons ensuite au début du problème et nous disons : nous avons divisé vingt dirhams par une chose, on a obtenu quinze dirhams moins deux choses et demie. Nous multiplions alors une chose par quinze dirhams moins deux choses et demie. On a alors quinze choses moins deux *carrés* et demi égaux à vingt dirhams. Ramène tout ce que tu as à un seul *carré*. Or nous savons qu'un *carré* par rapport à deux *carrés* et demi est leur deux cinquièmes. Prends donc de tout ce que tu as ses deux cinquièmes ; on a alors six choses moins un *carré* égaux à huit dirhams. Restaure les six choses par le *carré* et ajoute-le aux huit dirhams, on a donc un *carré* plus huit dirhams égaux à six choses. Partage les choses en deux moitiés, on a trois. Multiplie-le par lui-même, on a neuf ; ôtes-en huit, il reste un. Prends sa racine, ce sera un. Retranche-le de la moitié des choses qui est trois, il reste deux ; c'est le nombre des premiers hommes. Et si tu veux, ajoute le un à la moitié des racines, qui est trois ; on a quatre, qui est le nombre des premiers hommes. Comprends cela, si Dieu le veut.

<15> Si on te dit : dix dirhams que tu partages entre des hommes dont chacun obtient une chose, puis tu leur ajoutes six hommes, entre lesquels tu partages quarante dirhams de sorte que chacun obtienne ce qu'obtenaient les premiers.

قياسه: أن تجعل الرجال الأوّلين شيئاً فتقسم عليهم عشرين درهماً، فيصيب الواحدَ دينارٌ، فإذا ضربنا الدينارَ في شيءٍ صار عشرين درهماً، ثمّ نزيد على الرجال الأوّلين، وهم شيء، رجلين فيكون شيء واثنان وهم الرجال الآخرون. فنقسم ستين درهماً على شيء واثنين، فيخرج دينارٌ وخمسة. فإذا ضربنا / ديناراً وخمسةَ في شيءٍ واثنين، كان ستين درهماً. فنضرب ديناراً وخمسةً ٣٣-و في شيء واثنين، فتكون: ثلاثين درهماً وخمسة أشياء ودينارين تعدل ستين درهماً. فنُلقي ثلاثين درهماً وخمسة أشياء من ستين، فيبقى: ثلاثون درهماً إلاّ خمسة أشياء تعدل دينارين، فالدينارُ يعدِل خمسةَ عشر درهماً إلاّ شيئين ونصفاً. ثمّ نرجع إلى أوّل المسألة؛ فنقول: قسمنا عشرين درهماً على شيءٍ فخرج خمسة عشر درهماً إلاّ شيئين ونصفاً. فنضرب شيئاً في خمسة عشر درهماً إلاّ شيئين ونصفاً، فيكون: خمسة عشر شيئاً إلاّ مالين ونصف مال يعدِل عشرين درهماً. فَرُدَّ كلّ شيءٍ معك إلى مالٍ واحد. وقد علمنا أنّ مالاً من مالين ونصف خُمساها. فخذ من كلّ شيءٍ معك خُمْسَيْه. فيكون: ستّة أشياء إلاّ مالاً تعدل ثمانيةَ دراهمَ. فاجْبُرْ الستّة الأشياء بالمالِ وزِدْه على الثمانية الدراهم، فيكون مالاً وثمانية دراهمَ تعدِل ستّة أشياء. فنصّف الأشياءَ فتكون ثلاثة، فاضربها في مثلها فتكون تسعة، فألقِ منها ثمانيةً فيبقى واحدٌ. فَخُذْ جَذْرَه فيكون واحداً. فانْقِصْه من نصفِ الأشياء، وهو ثلاثة، فيبقى اثنان وهم الرجال الأوّلون. وإن شئت فَزِدِ الواحدَ على نصفِ الأجذار، وهو ثلاثة، فيكون أربعة وهم الرجال الأوّلون. فافهم ذلك إن شاء الله.

<١٥> فإن قيل لك: قَسمت عشرة دراهم على رجالٍ فأصاب الواحدَ شيءٌ، ثم زِدْتَ فيهم ستّة رجالٍ، ثمّ قسمت عليهم أربعين درهماً، فأصاب الواحدَ مثلُ ما أصاب الأوّل.

3 واثنان: واثنين — 5 ديناراً (الأولى والثانية): دينار — 10 شيئاً: شيء — 16 فألقِ: فالقي

On l'infère ainsi : tu multiplies le plus petit nombre divisé, qui est dix, par la différence entre le nombre des premiers hommes et le nombre des autres, et tu divises le produit par la différence des deux nombres divisés. Ce qu'on obtient est le nombre des premiers hommes. Multiplie le plus petit nombre, qui est dix, par la différence entre le nombre des premiers hommes et celui des autres, qui est six ; on a soixante, que tu divises par la différence entre les deux nombres divisés, [33^{v}] qui est trente ; on obtient deux, c'est le nombre des premiers hommes. Si tu veux, divise la différence entre les deux nombres divisés, qui est trente, par la différence entre le nombre des premiers hommes et les autres, qui est six ; on a cinq. Divise ensuite le plus petit nombre divisé, qui est dix, par celui-ci ; on a deux, c'est le nombre des premiers hommes. La cause de cela est claire.

Il y a une autre manière : tu sais que le rapport des premiers hommes aux autres hommes est égal au rapport des parts des premiers aux parts des seconds hommes. Or nous savons que les parts des premiers hommes font dix, et que les parts des seconds font quarante. Et le rapport de dix à quarante est le quart. Donc le nombre des premiers hommes est le quart du nombre des autres hommes ; nous posons les premiers hommes une chose, donc les autres hommes sont une chose plus six. Or nous savons qu'une chose est égale au quart d'une chose plus six. Nous prenons le quart d'une chose plus six, on a le quart d'une chose plus un dirham et demi égal à une chose ; ôte le quart d'une chose d'une chose, il reste trois quarts d'une chose égaux à un plus un demi. La chose est donc deux. C'est le nombre des premiers hommes.

<16> Si on te dit : dix robes de valeurs différentes mais dont la valeur est soixante-douze dirhams, que l'on divise entre deux hommes, la moitié pour chacun, de valeur trente-six dirhams. L'un des deux hommes a pris

قياسه: أن تضرب العدد الأصغر المقسوم، وهو عشرة، في فضل ما بين الرجال الأوّلين والآخرين، وتقسم ما اجتمع من الضرب على فضل ما بين العددين المقسومين، فما خرج فهو الرجال الأوّلون. فاضرب العددَ الأصغر المقسوم، وهو عشرة، في فضلِ ما بين الرجالِ الأوّلين والآخرين وهو ستّة، فيكون ستين، فتقسمها على فضلِ ما بين العددين المقسومين / وهو ثلاثون، ٣٣-ظ فيخرج اثنان، وهم الرجال الأوّلون. وإن شئت فاقسم فضل ما بين العددين المقسومين، وهو ثلاثون، على فضلِ ما بين الرجال الأوّلين والآخرين، وهو ستّة، فيخرج خمسة، فتقسم عليها العددَ الأصغر المقسوم، وهو عشرة، فيخرج اثنان وهم الرجال الأوّلون. وعِلّةُ هذه المسألة واضحةٌ.

وفيها وجهٌ آخر: وهو أنّك قد علمت أنّ قدرَ الرجال الأوّلين من الرجال الآخرين كقدرِ ما يصيب الرجال الأوّلين ممّا يصيب الرجال الآخرين. وقد علمنا أنّ الذي يصيب الرجال الأوّلين عشرةٌ والذي يصيب الرجال الآخرين أربعون، وأنّ قدر العشرةِ من الأربعين الربع. فالرجال الأوّلون ربع الرجال الآخرين. فنجعل الرجال الأوّلين شيئاً، فالرجال الآخرون شيء وستّة. وقد علمنا أنّ شيئاً يعدِل رُبْع شيء وستّة. فنأخذ ربعَ شيءٍ وستّة، فيكون ربعَ شيء ودرهماً ونصفاً يعدل شيئاً. فأسْقِطْ ربعَ شيءٍ من شيءٍ، فيبقى ثلاثةُ أرباعِ شيءٍ تعدل واحداً ونصفاً، فالشيءُ اثنان وهم الرجال الأوّلون.

<١٦> فإن قال لك: عشرة أثوابٍ تتفاضل في القيمة، وقيمتُها اثنان وسبعون درهماً، <قسمت> بين رجلين نصفين لكلٍّ واحدٍ منهما من العشرة الأثواب بقيمة ستّة وثلاثين درهماً، وأخذ أحدُ الرجلين بعضَ الثيابِ، وأخذ

6 وهم: وهو — 12 أربعون: أربعين — 14 شيء: شيئاً — 15 يعدل: مطموسة — 20 الرجلين: رجلين.

quelques robes et l'autre a pris ce qui reste des dix robes, et la valeur de chacune des robes prises par l'un d'eux est supérieure à la valeur de chacune des robes prises par l'autre, de trois dirhams.

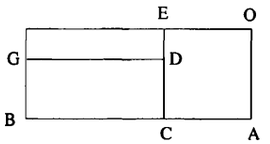
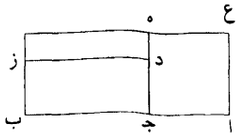


Fig. 40

On l'infère ainsi : posons les robes la droite *AB*, et les robes qu'a prises l'un des deux la droite *AC*, l'autre la droite *CB*. Posons la valeur de chaque robe de la droite *CB*, la droite *CD*. La valeur totale des robes de la droite *CB* est la surface *DB*. La surface *DB* est donc trente-six. Posons la valeur de chaque robe de la droite *AC* la droite *CE* ; la valeur totale des robes de la droite *AC* est donc la surface *AE*. La surface *AE* est aussi trente-six. Mais la droite *DE* est trois, car c'est la différence entre les deux valeurs. Posons ensuite la droite *CB* une chose ; elle [34r] est égale à la droite *DG* ; et la droite *DE* est trois, donc la surface *EG* est trois choses. La surface *BO* tout entière est soixante-douze plus trois choses. Mais la droite *AB* est dix, donc la droite *AO* est sept plus un cinquième plus trois dixièmes d'une chose, qui est égale à la droite *EC* ; mais la droite *DE* est trois, il reste la droite *CD*, quatre, plus un cinquième plus trois dixièmes d'une chose. Nous la multiplions par la droite *CB*, qui est une chose. On a quatre choses plus un cinquième d'une chose plus trois dixièmes de *carré* égaux à trente-six dirhams. Complète les trois dixièmes de ton *carré*, et tu le complètes pour qu'il soit un *carré* entier, en le multipliant par trois plus un tiers. Tu multiplies tout ce que tu as par trois plus un tiers, on a un *carré* plus quatorze choses égaux à cent vingt dirhams. Procède comme je te l'ai décrit, tu auras la chose, six. Ce qui est le nombre de robes de la droite *CB*, et l'autre, ce qui reste de dix robes, quatre, et c'est la droite *AC*. Ce qu'il fallait démontrer.

Pour ce problème et ses analogues, il y a une autre manière, comme je te l'ai expliqué. Et cela si on pose ce que l'un a pris, une chose de dix robes, et l'autre, dix moins une chose. Or nous savons que notre

الآخرُ ما بقي من العشرة الأثواب، وقيمةُ كلِّ ثوبٍ مما أخذ أحدهُما أكبرُ من قيمةِ كلِّ ثوبٍ ممّا أخذه الآخر بثلاثة دراهم.



قياسه: أن نجعل الأثواب خطّ ا ب والذي أخذ أحدهما من الأثواب خطّ ا جـ والآخر خطّ جـ ب. ونجعل قيمةَ كلِّ ثوبٍ من خطّ جـ ب خطّ جـ د. فجميع قيمة أثواب خطّ جـ ب سطح د ب. فسطحُ د ب ستّة وثلاثون. ونجعل قيمة كلِّ ثوب من خطّ ا جـ خطّ جـ ه. فجميع قيمة أثواب خطّ ا جـ سطح ا ه. فسطح ا ه أيضاً ستّة وثلاثون. وخطّ د ه ثلاثة لأنّه الفضل ما بين القيمتين. ثم نجعل خطّ جـ ب شيئاً وهو / مثل د ز وخطّ د ه ثلاثة، فسطحُ ه ز ثلاثة أشياء. فجميع سطح ب ع اثنان وسبعون وثلاثة أشياء. وخطُّ ا ب عشرة فخطّ ا ع سبعةٌ وخُمس وثلاثة أعشار شيءٍ، وهو مثل خطّ ه جـ. وخطّ د ه ثلاثة. فيبقى خطّ جـ د أربعةً وخُمْس وثلاثة أعشار شيء. فنضربه في خطّ جـ ب وهو شيءٌ فيكون أربعةُ أشياء وخُمْس شيءٍ وثلاثةُ أعشار مالٍ تعدل ستّة وثلاثين درهماً. فأكمل ثلاثة أعشار مالك. وإكمالُك إيّاه حتى يصير مالاً تاماً: أن تضربَه في ثلاثة وثُلث. فتضرب كلّ شيءٍ معك في ثلاثة وثلث، فيكون مالاً وأربعة عشر شيئاً تعدل مائة وعشرين درهماً. فاعمل كما وصفت لك فيخرج الشيء ستّة؛ وهو عدد أثواب خطّ جـ ب والآخر ما بقي من العشرة الأثواب وهي أربعة، وذلك خطّ ا جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيِّن.

٣٤-ر

ولهذه المسألة وما أشبهها وجهٌ آخر كنَحْوِ ما فسَّرتُ لك: وهو أن تجعل الذي أخَذَ أحدُهُما، شيئاً من العشرة الأثواب، والآخر عشرة إلاّ شيئاً. وقد

2 أخذه: أخذ — 7 القيمتين: القسمين.

multiplication d'une chose par la valeur de toute robe est trente-six dirhams, et notre multiplication de dix moins une chose par la valeur de toute robe plus trois est trente-six dirhams. Notre multiplication de l'ensemble des dix robes par la valeur de toute robe plus trois est alors soixante-douze plus trois choses. Si nous le divisons par dix, on obtient la valeur de chacune des dix robes moins une chose : sept et un cinquième et trois dixièmes d'une chose. Tu procèdes ensuite comme nous l'avons décrit précédemment ; on obtient la chose six robes, ce que l'un a pris, et l'autre a pris ce qui reste des robes, c'est-à-dire quatre robes.

Ce problème tient lieu de ton énoncé : tu divises dix en deux parties et tu multiplies l'une des parties par une chose, on a trente-six ; tu multiplies l'autre par une chose plus trois, on a trente-six. Alors tu procèdes également de la manière que nous avons appliquée dans ce qui précède. Cela tient lieu aussi d'énoncé : tu partages trente-six entre des hommes de sorte que chacun ait une chose, puis tu leur ajoutes dix hommes moins le double des premiers hommes, puis tu partages entre eux trente-six de sorte que chacun des autres hommes reçoive ce que chacun des premiers a reçu moins trois dirhams. Tu le calcules de la manière que je t'ai indiquée ; tu réussiras, si Dieu le veut.

<17> Si on dit : dix que tu partages en deux parties telles que tu multiplies l'une des parties par six et que tu divises le produit par la seconde partie ; puis tu prends le tiers du quotient que tu ajoutes au produit de l'une des deux parties par six, on a cinquante-six.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des deux parties une chose, l'autre dix moins une chose. Tu multiplies une chose par six, on a six choses. Si tu divises six choses par dix moins une chose, alors le tiers du quotient est

علمنا أنّ ضَرْبنا شيئاً في قيمةِ كلِّ ثوبٍ منه ستّة وثلاثون درهماً، وضَرْبنا عشرةً إلاّ شيئاً في قيمة كلّ ثوبٍ وثلاثةٍ ستّة وثلاثون <درهماً> [وثلاثة أشياء]، فَضَرْبُنا العشرةَ الأثواب كلَّها في قيمةِ كلِّ ثوبٍ من أثواب الشيء وثلاثةٍ، اثنان وسبعون وثلاثة أشياء. فإذا قسمناها على عشرةٍ خرج قيمةُ كلِّ ثوبٍ من أثواب العشرة إلاّ شيئاً: سبعةً وخُمْساً وثلاثة أعشار شيء. فقيمةُ كلّ ثوبٍ من أثواب الشيء أربعة / وخُمْسٌ وثلاثة أعشار شيء. ثمّ تعمل كما وصفنا فيما تقدّم ٣٤-و فيخرج الشيء ستّة أثواب، وهو ما أخذ أحدُهُما، والآخر ما بقي من الأثوابِ وهو أربعة أثواب.

وهذه المسألة بمنـــزلة قولِكَ: عشرة قسمتَها قسمين فضربتَ أحد القِسمين في شيء فكان ستّة وثلاثين، وضربتَ الآخر في شيء وثلاثةٍ، فكان ستّة وثلاثين. فتعملها أيضاً كَنَحْوِ ما تقدّم من عَمَلنا. وهي أيضاً بمنزلة قولك: ستّة وثلاثون قسمتها على رجال فأصاب الواحدَ منهم شيء، ثمّ زِدْتَ فيهم عشرةَ رجال إلاّ مثلي الرجال الأوّلين، ثمّ قسمت عليهم ستّة وثلاثين، فأصاب الواحدَ الآخر أقلُّ ممّا أصاب الواحدَ الأوّل بثلاثة دراهمٍ، فتحسبها من هذا الوجه على ما بيّنتُ لك تُصِبْ إن شاء الله.

<١٧> فإن قال: عشرة قسمتها قسمين، فضربت أحد القسمين في ستّة، وقسمت ما اجتمع من الضرب على القسم الآخر، ثمّ أخذت ثلثَ ما خرج من القَسْم وزِدْته على ما اجتمع من ضربِ أحد القسمين في ستّة فكان ستّة وخمسين.

قياسه: أن تجعل أحدَ القسمين شيئاً والآخرَ عشرةً إلاّ شيئاً، فتضرب شيئاً في ستّة فيكون ستّة أشياء. فإذا قسمت ستّة أشياء على عشرة إلاّ شيئاً فإنّ ثلثَ

1-2 ضربنا ... وثلاثون: مكررة — 1 عشرة: في الهامش — 2 وثلاثون: وثلاثين — 3-4 اثنان وسبعون: اثنين وسبعين — 5 وخُمْسا: وخمس — 11-15 وهي أيضاً ... شاء الله: في الهامش مع "في الأصل" — 13 فأصاب: أصاب — 20 إلاّ شيئاً: إلاّ شيء — 21 إلاّ شيئاً: إلاّ شيء.

cinquante-six dirhams moins six choses, car il a dit : si on le réunit à six choses, on aura cinquante-six dirhams. Le quotient est donc cent soixante-huit moins dix-huit choses. Tu multiplies cent soixante-huit moins dix-huit choses par dix moins une chose, on a mille six cent quatre-vingts dirhams plus dix-huit *carrés* moins trois cent quarante-huit choses égaux à six choses. Restaure et réduis, on a mille six cent quatre-vingts dirhams plus dix-huit *carrés* égaux à trois cent cinquante-quatre choses. Ramène tout ce que tu as à un seul *carré* ; or tu sais que le *carré* par rapport à dix-huit *carrés* est la moitié de son neuvième ; alors prends de tout ce que tu as la moitié de son neuvième, on a un *carré* plus quatre-vingt-treize dirhams plus un tiers de dirham égal à dix-neuf choses plus deux tiers d'une chose. Tu réduis par ceci, comme je te l'ai décrit ; on obtient la chose, huit, qui est l'une des deux parties, et l'autre deux.

<18> Si on te dit : un *carré* dont tu ôtes le tiers et deux dirhams, puis tu multiplies ce qui reste par lui-même, on obtient le *carré* plus vingt-quatre dirhams.

On l'infère ainsi : tu poses le *carré* une chose et tu en retranches son tiers et deux dirhams, [35r] il reste deux tiers d'une chose moins deux dirhams, que tu multiplies par lui-même ; on a quatre neuvièmes de *carré* plus quatre dirhams moins deux choses et deux tiers d'une chose, égaux à une chose plus vingt-quatre dirhams. Retranche quatre dirhams de vingt-quatre dirhams, restaure les quatre neuvièmes par les deux choses et les deux tiers et ajoute-les aux dirhams et à la chose, on aura vingt dirhams plus trois choses plus deux tiers d'une chose égaux à quatre neuvièmes de *carré*. Complète quatre neuvièmes de ton *carré* afin d'avoir un *carré* entier, et cela en le multipliant par deux plus un quart ; tu multiplies donc tout ce que tu as par deux plus un quart, on a quarante-cinq dirhams plus huit choses plus un quart de chose égaux à un *carré*. Tu procèdes comme je te l'ai décrit ; on a douze, ce qui est le *carré*.

ما يخرج من القسم ستّة وخمسون درهماً إلاّ ستّة أشياء. لأنّه قال: إذا ضمّ إلى ستّة أشياء كان ستّة وخمسين درهماً. فالذي يخرج من القسم مائة وثمانية وستون إلاّ ثمانية عشر شيئاً. فتضرب مائةً وثمانية وستين إلاّ ثمانية عشر شيئاً في عشرة إلاّ شيئاً، فيكون: ألفٌ وستمائة وثمانون درهماً وثمانية عشر مالاً إلا ثلاثمائة وثمانية وأربعين شيئاً تعدل الستّة الأشياء. فاجْبُرْ وقابِلْ، فيكون: ألفٌ وستمائة وثمانون درهماً وثمانية عشر مالاً تعدل ثلاثمائة وأربعة وخمسين شيئاً. فَرُدَّ كلّ شيءٍ معك إلى مالٍ واحدٍ. وقد علمت أنّ المالَ من ثمانية عشر مالاً نصفُ تُسْعِهِ، فَخُذْ من كلّ شيءٍ معك نصف تُسْعِهِ فيكون مالاً وثلاثةً وتسعين درهماً وثلث درهم تعدل تسعةَ عشر شيئاً وثلثي شيء. فتقابل بها كنَحْوِ ما وصفتُ لك فيخرج الشيءُ ثمانية، وهو أحد القسمين، والآخر اثنان.

<١٨> فإن قيل لك: مال تسقط منه ثُلْثَه ودرهمين، ثمّ تضرب ما بقي في مثله، فيعود المال وزيادة أربعة وعشرين درهماً.

فقياسه: أن تجعل المال شيئاً فتسقط منه ثُلْثَه ودرهمين / فيبقى ثلثا شيء إلاّ ٣٥-و درهمين، فتضربه في مِثلِه فيكون أربعةُ أتساع مالٍ وأربعةُ دراهم إلاّ شيئين وثلثي شيء تعدل شيئاً وأربعةً وعشرين درهماً. فألقِ أربعةَ دراهم من أربعة وعشرين درهماً، واجْبُرْ الأربعةَ الأتساعِ بالشيئين والثلثين، وزِدْهُ على الدراهم والشيء، فيكون عشرين درهماً وثلاثةَ أشياء وثلثي شيء تعدل أربعةَ أتساع مالٍ. فأكمل أربعة أتساعِ مالِك حتى يكون مالاً تاماً، وذلك أن تَضْرِبَه في اثنين وربع. فَتَضْرِبَ كلّ ما معك في اثنين وربع، فيكون خمسةً وأربعين درهماً وثمانية أشياء وربع شيء تعدل مالاً. فتعمل كما وصفتُ لك، فيكون اثنا عشر وهو المال.

1 وخمسون: وخمسين — 4 شيئاً: شيء / وثمانون: وثمانين — 5 فاجبر وقابل: في الهامش / وثمانون: وثمانين — 6 وأربعة: الواو تحت السطر — 7-8 فخذ ... تسعه: في الهامش — 15 فألق: فالقي — 16 الدراهم: الدرهم.

Il y a une autre manière : tu poses le *carré* un *carré* moins vingt-quatre dirhams, puis tu en retranches son tiers et deux dirhams, il reste deux tiers d'un *carré* moins dix-huit dirhams égaux à une racine. Réduis par ceci, comme je te l'ai décrit, alors le *carré* est trente-six ; tu en retranches vingt-quatre car tu as posé le *carré* un *carré* moins vingt-quatre, il reste douze qui est le *carré* cherché.

<19> Si on te dit : un *carré* tel que trois de ses racines plus quatre des racines de ce qui reste soit vingt dirhams.

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* un *carré*, puis tu dis : trois racines plus quatre racines du *carré* moins trois racines sont égaux à vingt dirhams. Retranche les trois racines de vingt, il reste vingt dirhams moins trois racines égaux à quatre racines du *carré* moins trois racines. Son quart est la racine du *carré* moins trois racines, ce qui est cinq dirhams moins trois quarts de racine ; multiplie-le par lui-même, on a la moitié du *carré* plus un demi-huitième de *carré* plus vingt-cinq dirhams moins sept racines et demie égaux à un *carré* moins trois racines. Restaure-les par sept racines et demie, et ajoute-le à un *carré* moins trois racines ; on a un *carré* plus quatre racines plus une demi-racine égaux à la moitié du *carré* et la moitié du huitième de *carré* plus vingt-cinq dirhams. Retranche la moitié du *carré* plus la moitié d'un huitième de *carré* du *carré*, il reste trois huitièmes de *carré* plus la moitié d'un huitième de *carré* plus quatre racines plus une demi-racine égaux à vingt-cinq dirhams. Complète ton *carré* [35^{v}] en lui ajoutant lui-même et ses deux septièmes, on a un *carré* entier ; tu ajoutes donc à tout ce que tu as lui-même et ses deux septièmes, on a donc un *carré* plus dix choses plus deux septièmes d'une chose égaux à cinquante-sept plus un septième ; prends la moitié des racines, on a cinq plus un septième, multiplie-le par lui-même, on a vingt-six dirhams et trois septièmes et un

وفيها وجه آخر: وهو أن تجعل المالَ مالاً إلاّ أربعة وعشرين درهماً، فَتُسْقِطَ منه ثُلُثَه ودرهمين فيبقى ثلثا مالٍ إلاّ ثمانية عشر درهماً يعدل جذراً. فتقابل بها كما وصفت لك، فيخرج المال ستّة وثلاثين، فتسقط منه أربعةً وعشرين، لأنّك كنت جعلت المالَ مالاً إلاّ أربعة وعشرين فيبقى اثنا عشر، وهو المال المطلوب.

<١٩> فإن قال: مالٌ ثلاثةُ أجذارِه وأربعة أجذار ما بقي منه عشرون درهماً.

فقياسه: أن تجعل مالَك مالاً ثمّ تقول: ثلاثةُ أجذارٍ وأربعةُ أجذارِ مالٍ إلاّ ثلاثةَ أجذارٍ تعدل عشرين درهماً. فألقِ الثلاثةَ الأجذارَ من العشرين، فيبقى: عشرون درهماً إلا ثلاثة أجذار تعدل أربعةَ أجذار مالٍ إلاّ ثلاثة أجذارٍ. فربعُها هو جذر مالٍ إلاّ ثلاثة أجذار، وهو خمسة دراهم إلاّ ثلاثة أرباع جذر، فاضْرِبْه في مثله فيكونُ: نصفُ مالٍ ونصف ثُمن مالٍ وخمسة وعشرون درهماً إلاّ سبعةَ أجذار ونصف جذرٍ يعدل مالاً إلاّ ثلاثة أجذار. فاجبُرها بسبعة أجذار ونصف جذر، وزِدْها على مالٍ إلاّ ثلاثة أجذار، فيكون: مالاً وأربعة أجذار ونصف جذرٍ تعدل نصفَ مالٍ ونصف ثُمن مالٍ وخمسةً وعشرين درهماً. فألقِ نصف مالٍ ونصف ثمن مالٍ من مالٍ فيبقى ثلاثة أثمانِ مالٍ ونصف ثمنِ مالٍ، وأربعة أجذار ونصفُ جذر تعدل خمسة وعشرين درهماً. فأكمل مالَك / وإكمالك إيّاه ٣٥-ظ أن تَزيدَ عليه مثلَه ومثلَ سُبعَيه، فيكون مالاً تاماً، فتَزيد على كلّ شيء معك مثله ومثل سُبعَيه فيكون مالاً وعشرةَ أشياء وسُبْعي شيءٍ يعدل سبعةً وخمسين وسبعاً. فنصِّفَ الأجذار فيكون خمسةً وسُبعاً. فاضْرِبْها في مثلِها فيكون ستّة

6 وأربعة أجذار ما بقي منه: يعني أربعة أجذار المال إلاّ الثلاثة الأجذار — 11 وهو خمسة ... جذر: في الهامش — 12 وعشرون: وعشرين — 13 مالاً: مال — 14 أجذار: الألف ممحوة — 15-16 وخمسة وعشرين ... ثمن مال: في الهامش / من مال: مكررة — 18 مثله: الضمير يعود على "ثلاثة أثمان مالٍ وثمن مالٍ" — 20 وسبعاً: وسبع.

septième d'un septième ; tu l'ajoutes au cinquante-sept plus un septième, on a quatre-vingt-trois dirhams plus quatre septièmes et un septième d'un septième. Prends-en la racine, on a neuf plus un septième ; retranches-en la moitié des racines, qui est cinq plus un septième ; il reste quatre, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est seize.

Si tu veux, dis : trois racines et quatre racines du *carré* moins trois racines égaux à vingt dirhams. Mais quatre racines du *carré* moins trois racines, c'est la racine de seize *carrés* moins quarante-huit racines ; tu dis alors : trois racines et la racine de seize *carrés* moins quarante-huit racines égaux à vingt dirhams. Tu retranches trois racines de vingt dirhams, il reste vingt dirhams moins trois racines égaux à la racine de seize *carrés* moins quarante-huit racines. Tu multiplies vingt moins trois racines par eux-mêmes, et tu multiplies également la racine de seize *carrés* moins quarante-huit racines par elle-même ; tu réduis seize *carrés* moins quarante-huit racines par le produit, et tu procèdes comme je te l'ai décrit ; on obtient le *carré*, seize.

Si tu veux, pose ce qui reste du *carré* une fois que tu en as ôté trois de ses racines, un *carré*, et prends quatre de ses racines, ce qui est quatre racines. Mais on sait que, si tu ajoutes ces quatre racines aux trois racines du premier *carré*, on a vingt dirhams ; il est nécessaire que trois racines du premier *carré* soient vingt dirhams moins quatre racines. Son tiers est la racine du premier *carré*, qui est six dirhams plus deux tiers moins une racine et un tiers. Tu le multiplies par lui-même, on a un *carré* plus sept neuvièmes de *carré* plus quarante-quatre dirhams plus quatre neuvièmes de dirham moins dix-sept choses et sept neuvièmes de chose, [36r] ce qui est le *carré* recherché. Tu en retranches trois de ses racines, ce qui est vingt

وعشرين درهماً وثلاثة أسباع وسُبْعَ سُبْعٍ. فَزِدْها على السبعةِ والخمسين والسُّبعِ فتكون ثلاثةً وثمانين درهماً وأربعةَ أسباعٍ وسُبعَ سُبعٍ. فَخُذْ جذرها فيكون تسعةً وسبعاً. فانقص منه نصفَ الأجذار وهو خمسةٌ وسبعٌ، فيبقى أربعة وهو جذر المال، والمال ستّة عشر.

وإن أحببت فقل: ثلاثةُ أجذارٍ وأربعةُ أجذارِ مالٍ إلاّ ثلاثة أجذار تعدل عشرين درهماً. وأربعة أجذار مالٍ إلاّ ثلاثة أجذار هو جذر ستّة عشرَ مالاً إلاّ ثمانية وأربعين جذراً. فتقول: ثلاثة أجذار وجذر ستّة عشر مالاً إلاّ ثمانية وأربعين جذراً تعدل عشرين درهماً. فتلقي ثلاثة أجذار من عشرين درهماً فيبقى: عشرون درهماً غير ثلاثةِ أجذارٍ تعدل جذر ستّة عشر مالاً إلاّ ثمانية وأربعين جذراً. فتضرب عشرين إلاّ ثلاثة أجذار في مثلها <وكذلك تضرب جذرَ ستّة عشر مالاً إلاّ ثمانية وأربعين جذراً في مثله> وتقابل بما اجتمع من الضرب ستّة عشر مالاً إلاّ ثمانيةً وأربعين جذراً، وتعمل كما وصفتُ لك فيخرج المال ستّة عشر.

وإن أحببت فاجعل ما بقي من المال بعد إسقاطك منه ثلاثة أجذاره مالاً. فتأخذ أربعةَ أجذارِه وهو أربعة أجذار. فمعلوم أنك إذا زدتَ هذه الأربعةَ أجذارٍ على ثلاثةِ أجذار المال <الأوّل> كان عشرين درهماً. فواجبٌ أن ثلاثةَ أجذارِ المالِ الأوّل عشرون درهماً إلاّ أربعة أجذار، فثُلثُها جذرُ المالِ <الأوّل> وهو ستّة دراهم وثلثان إلا جذراً وثلثاً. فتضربه في مثله فيكون مالٌ وسبعةُ أتساعِ مالٍ وأربعة وأربعون درهماً وأربعةُ أتساع درهمٍ إلاّ سبعة عشر شيئاً وسبعةَ أتساعِ شيءٍ / وهو المالُ المسؤول عنه. فتسقط منه ثلاثةَ أجذاره وهو ٣٦-و

3 وسبعاً: وسبع – 6 مالاً: مال – 7 فتقول ... مالاً: كرر هذه العبارة وأشار الناسخ إلى التكرار –
8 ثلاثة ... فيبقى: في الهامش – 9 عشرون: عشرين – 17 الأوّل: في الهامش / عشرون: عشرين –
18 مال: مالاً – 20 أجذاره: الضمير يعود إلى المال المسؤول عنه.

dirhams moins quatre racines ; il reste vingt-quatre dirhams et quatre neuvièmes de dirham plus un *carré* et sept neuvièmes de *carré* moins treize racines et sept neuvièmes de racine égaux à un *carré*. Tu procèdes comme je te l'ai décrit, on aura la chose, deux, qui est la racine de ce qui reste du *carré* une fois que tu en as ôté trois de ses racines. Tu le multiplies par lui-même, on a quatre, ce qui reste du *carré*. Tu prends quatre racines de quatre, ce qui est huit. Tu l'ôtes de vingt, il reste douze, qui est trois racines du *carré* ; son tiers est donc la racine du *carré*, qui est quatre, et le *carré* est seize, ce qui est le *carré* recherché.

<20> Si on te dit : un *carré*, tu en retranches son tiers, puis tu multiplies ce qui reste par trois racines du premier *carré*, alors on retrouve le premier *carré*. Tu sais que, si tu soustrais du *carré* son tiers, il reste ses deux tiers, et qu'on multiplie ses deux tiers par un dirham plus un demi pour ramener le *carré* à son origine. Alors le dirham et un demi sont trois racines de *carré*. La racine du *carré* est donc un demi et le *carré* est un quart[41].

[41] On trouve en marge le commentaire suivant : « Abū Yūsuf a dit : si tu veux, procède de cette autre manière : tu poses le *carré* une chose, tu en retranches le tiers, il reste deux tiers de chose. Multiplie-les par trois racines de la chose, c'est-à-dire la racine de neuf choses, on a la racine de quatre cubes égale à une chose. Multiplie donc une chose par elle-même, on a un *carré*, et multiplie la racine de quatre cubes par elle-même, on a alors quatre cubes égaux à un *carré*. Divise tout ce que tu as par un *carré*, tu obtiens quatre choses égales à un dirham ; la chose est donc égale à un quart de dirham. »

عشرون درهماً إلاّ أربعة أجذار، فيبقى أربعةٌ وعشرون درهماً وأربعة أتساعِ درهم ومالٌ وسبعة أتساعِ مالٍ إلاّ ثلاثة عشر جذراً وسبعة أتساع جذرٍ تعدل مالاً. فَتَعْمَل كما وصفتُ لك فيخرج الشيءُ اثنين، وهو جذرُ ما بقي من المالِ بعد إسقاطك منه ثلاثة أجذاره. فتضربه في مثله فيكون أربعةً وهو ما بقي من المال. فتأخذ أربعةَ أجذار أربعة فتكون ثمانيةً. فتسقطها من العشرين فيبقى اثنا عشر وهو ثلاثةُ أجذارِ المال. فَثُلثُها جذر المال وهو أربعة والمالُ ستّة عشر، وهو المال المطلوب.

<٢٠> فإن قيل لك: مالٌ تُسقط منه ثُلُثَه، ثمّ تضرب ما بقي في ثلاثة أجذارِ المال الأوّل فيعود المالُ الأوّل. فقد علمتَ أنّك – إذا أسقطتَ من المال ثُلثَه – أنّ الذي يبقى ثلثاه، وأنّ – هذا – الثلثين يُضربُ في درهمٍ ونصفٍ حتى يعود المال إلى أصله. فالدرهمُ والنصفُ ثلاثة أجذار المال، فجذرُ المال نصف والمال ربعٌ.

1 أجذار: أي أجذار المال الجديد – 2 جذر: يعني الجذر الجديد – 3 اثنين: اثنان / ما بقي: في الهامش – 6 المال (الأولى): نجد في الهامش "أي المطلوب" بخطّ آخر – 8 الكرجي (III.22): "مال إذا ألقيت ثلثه وضربت الباقي في ثلاثة أجذاره، عاد المال" – 10 هذا: يعني "هذا الباقي" وهو الثلثين – 12 ربع: بعد انتهاء المسألة، كتب في فراغٍ بينها وبين المسألة التالية لها عبارة "قال أبو يوسف" بخط آخر. ثمّ وضع الإشارة إلى كلامه في الهامش. ولعلّ أبا يوسف هذا هو ناسخ أو المعلّق عليها، وكتب في الهامش ما يلي: "قال أبو يوسف: وإن شئت فاعمل على هذه الجهة الأخرى؛ وهو أن تجعل المالَ شيئاً فتُسقط منه ثُلُثَه فيبقى ثلثا شيءٍ، فاضربه في ثلاثةِ أجذار الشيءِ وهو جذرُ تسعةِ أشياء، فيكون جذرُ أربعة كعاب يعدل شيئاً. فاضرب شيئاً في مثله فيكون مالاً، واضرب جذرَ أربعة كعاب في مثله فيكون: أربعة كعاب يعدل مالاً. فاقسم كلّ ما معك على مال فيخرج لك أربعة أشياء تعدل درهماً فالشيءُ يعدل ربعَ درهمٍ"؛ ولا نجد هذا التعليق في الترجمة اللاتينية (fol. 83v) ولا في الترجمة العبرية، انظر تحقيق M. Levey (p. 124-126).

<21> Si on te dit : un *carré*, tu en retranches son tiers, puis tu multiplies ce qui reste par trois fois la racine de ce qui reste du *carré* ; on retrouve alors le *carré*.

Tu sais qu'un dirham plus un demi est le triple de la racine de ce qui reste du *carré*, ce sont les deux tiers ; que la racine des deux tiers est un demi-dirham ; que les deux tiers sont un quart ; et que le *carré* est trois huitièmes de dirham.

Si tu veux, procède d'une autre manière : tu poses le *carré* une chose, dont tu retranches le tiers. Il reste deux tiers d'une chose. Tu multiplies deux tiers d'une chose par trois racines des deux tiers d'une chose, ce qui est la racine de six choses. On a donc la racine de deux cubes et deux tiers d'un cube égale au *carré*, qui est une chose. Multiplie-la par elle-même, et réduis par ceci deux cubes et deux tiers d'un cube, alors la chose sera égale à trois huitièmes[42].

<22> Si on te dit : un *carré* tel que trois de ses racines plus deux racines de ce qui reste lui soient égales.

Tu sais que deux des racines de ce qui reste sont égales à ce qui reste. Alors ce qui reste est quatre dirhams. Tu en ôtes trois de ses racines, il reste quatre dirhams. Et le *carré* est seize.

<23> Si on te dit : un *carré* tel que trois de ses racines plus quatre fois la racine de ce qui en reste soient égales au *carré* plus quatre dirhams.

Or tu sais que ce qui reste du *carré* une fois enlevées les trois racines est égal à quatre fois ses racines moins quatre dirhams. Appelle ce qui reste du *carré* une fois enlevées trois de ses racines, un *carré*. Tu dis ensuite : un *carré* tel que quatre de ses racines moins [36^{v}] quatre dirhams lui soient égales, le *carré* est donc quatre dirhams. Tu dis ensuite : un *carré* tel que tu en retranches trois de ses racines, il reste quatre dirhams. Le *carré* est donc seize dirhams, ce qui est le *carré* cherché.

[42] Ce paragraphe est absent de la traduction latine.

<٢١> فإن قيل لك: مالٌ تُسقط منه ثُلُثَه، ثمّ تضرب ما بقي في ثلاثة أجذارِ ما بقي من المال فيعود المال.

فقد علمت أن الدرهمَ والنصفَ ثلاثة أجذارِ ما بقي من المالِ، وهو الثلثان، وأنّ جذرَ الثلثين نصفُ درهمٍ، والثلثان ربعٌ، والمال ثلاثة أثمان درهم.

وإن شئت فاعمل على هذه الجهة الثانية، وهو أن تجعل المالَ شيئاً فتُسقط منه ثلثَه فيبقى ثلثا شيءٍ، فتضرب ثلثي شيءٍ في ثلاثةِ أجذارِ <ثلثي> شيء وهو جذر ستّة أشياء. فيكون جذر كعبين وثلثي كعب يعدل المالَ وهو شيء، فاضربه في مثله، وقابل به كعبين وثلثي كعب، فالشيء يعدل ثلاثة أثمان.

<٢٢> فإن قيل لك: مالٌ ثلاثةُ أجذاره وجذرا ما بقي يعدله.

فقد علمت أنّ جذري ما بقي منه يعدل ما بقي منه، فإنّ الذي بقي أربعة دراهم. فهذا مال تسقط منه ثلاثةَ أجذاره فيبقى أربعة دراهم فالمال ستّة عشر.

<٢٣> فإن قيل لك: مالٌ ثلاثةُ أجذاره وأربعة أجذار ما بقي منه مثلُ المال وأربعة دراهم.

فقد علمت أنّ الذي بقي من المال - بعد رفع ثلاثة أجذاره- مثلُ أربعة أجذاره إلاّ أربعة دراهم. فسَمِّ الذي بقي من المال بعد رفع ثلاثة أجذاره مالاً، ثمّ تقول: مالٌ أربعةُ أجذاره إلاّ / أربعة دراهم يعدله. فالمالُ أربعةُ دراهمَ. ثمّ تقول: مالٌ تُسقِط منه ثلاثةَ أجذاره فيبقى أربعة دراهم، فالمالُ ستّة عشر درهماً، وهو المال المطلوبُ. ٣٦-ظ

5-8 وإن شئت ... أثمان: ينقص الترجمة اللاتينية، ولكنه في الترجمة العبرية — 9 الكرجي (III.23): "فإن قيل مال ثلاثة أجذاره وجذرا ما بقي يعدله" — 12 مال: فوق السطر — 15 فسمّ: يسمي.

<24> Si on dit : tu divises dix en deux parties et tu divises l'une des deux parties par l'autre, alors le quotient plus le diviseur est cinq plus un demi.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des deux parties une chose, et l'autre dix moins une chose. Mais tu sais que, si tu divises dix moins une chose par une chose, alors, si on ajoute au quotient une chose, on a cinq plus un demi. Si on enlève une chose de cinq plus un demi, alors le reste est ce que l'on obtient comme quotient, ce qui est cinq plus un demi moins une chose. Tu dis ensuite : nous avons divisé dix moins une chose par une chose, on obtient cinq plus un demi moins une chose. Or nous savons que, lorsque nous multiplions le quotient par le diviseur, on retrouve notre bien qui a été divisé. Nous multiplions donc cinq plus un demi moins une chose par une chose, et nous réduisons dix moins une chose par le produit. On obtient la chose, quatre.

<25> Si on dit : tu divises dix en deux parties, et tu divises l'une des deux parties par l'autre, puis tu ajoutes le quotient au dividende, tu multiplies ensuite ce que tu obtiens par le diviseur, on a trente.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des deux parties une chose, et l'autre dix moins une chose. Si nous divisons dix moins une chose par une chose, nous savons que, si nous multiplions le quotient par une chose, on a dix moins une chose. Si nous multiplions dix moins une chose par une chose, on a dix choses moins un *carré*, à quoi nous ajoutons dix moins une chose ; on a donc dix dirhams plus neuf choses moins un *carré* égaux à trente dirhams. Tu réduis par ceci, comme je te l'ai décrit, alors la chose sera quatre, ce qui est l'une des deux parties, c'est-à-dire le diviseur.

<٢٤> فإن قيل: عشرةٌ قسمتها قسمين، فقسمتَ أحد القسمين على الآخر، فكان الذي يصيب القَسْمَ مع المقسوم عليه خمسة ونصفاً.

قياسه: أن تجعل أحد القسمين شيئاً والآخر عشرة إلاّ شيئاً. وقد علمت أنّك إذا قسمت عشرةً إلاّ شيئاً على شيءٍ، أنّ الذي يخرج من القَسْم إذا زِيدَ على شيءٍ كان خمسة ونصفاً. فإذا أسقطنا الشيء من خمسةٍ ونصفٍ كان الباقي ما يصيب القَسْمَ وهو خمسة ونصف إلاّ شيئاً. ثمّ تقول: قسمنا عشرةً غيرَ شيء على شيء فخرج خمسة ونصف إلاّ شيئاً. وقد علمنا أنّا متى ضربنا الخارج من القسمة في المقسومِ عليه عاد مالُنا المقسوم. فنضرب خمسةً ونصفاً إلاّ شيئاً في شيء، ونقابل بما اجتمع من الضرب عشرةً إلاّ شيئاً فيخرج الشيء أربعة.

<٢٥> فإن قال: عشرةٌ تقسمها قسمين، فتقسم أحدَ القِسمين على الآخر، ثمّ تأخذ ما خرج من القَسْمِ فتزيده على المقسوم، ثمّ تضرب ما اجتمع في المقسوم عليه فيكون ثلاثين.

قياسه: أن تجعل أحدَ القسمين شيئاً والآخر عشرة إلاّ شيئاً. فإذا قسمنا عشرة إلاّ شيئاً على شيء، فقد علمنا أنّ الذي يخرج من القَسْمِ إذا ضربناه في شيء كان عشرة إلاّ شيئاً. وإذا ضربنا عشرة إلاّ شيئاً في شيءٍ كان عشرة أشياء إلاّ مالاً، فنـــزيد عليه عشرةَ إلاّ شيئاً فيكون: عشرةُ دراهمَ وتسعة أشياءَ إلاّ مالاً تعدل ثلاثين درهماً. فتقابل بها كما وصفتُ لك فيكون الشيء أربعةً، وهو أحد القسمين، وهو المقسوم عليه.

1 الكرجي (III.12): "فإن قيل: عشرة قسمتها قسمين، فقسمت أحد القسمين على الآخر، وما خرج زدته على المقسوم عليه، فكان خمسة ونصفًا، كل واحد منهما" – 2 ونصفاً: ونصف– 6 شيئاً: شيء – 7 شيئاً: شيء – 8 ونصفاً: ونصف – 14 شيئاً: شيء.

<26> Si on dit : tu divises dix en deux parties, tu divises l'une des deux parties par l'autre, puis tu multiplies le quotient par le dividende, on a donc neuf dirhams.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des deux parties une chose et l'autre dix moins une chose. [37r] Si donc nous divisons dix moins une chose par une chose, alors ce qu'on obtient, si nous le multiplions par une chose, sera dix moins une chose. Et si nous le multiplions par dix moins une chose, on a neuf. Tu les additionnes, on aura dix-neuf moins une chose.

Il est clair, d'après ce que nous avons décrit, que ce qu'on obtient de la division de dix dirhams moins une chose par une chose, si nous le multiplions par dix dirhams, on a dix-neuf dirhams moins une chose. Nous divisons donc dix-neuf moins une chose par dix, on obtient un dirham plus neuf dixièmes de dirham moins un dixième de chose, ce qui est le quotient. Tu reviens ensuite et tu dis : nous avons divisé dix dirhams moins une chose par une chose, on a obtenu un dirham plus neuf dixièmes de dirham moins un dixième de chose. Tu procèdes ensuite comme je te l'ai décrit, tu obtiens la chose, quatre, ce qui est l'une des deux parties, et c'est le diviseur.

<27> Si on te dit : tu divises dix en deux parties et tu divises l'une des deux parties par l'autre, puis tu multiplies le quotient par lui-même, et ensuite par le diviseur, et on a trente-deux dirhams.

On l'infère ainsi : Tu poses l'une des deux parties, une chose, et l'autre, dix moins une chose. Si nous divisons dix moins une chose par une chose, alors, si nous multiplions le quotient par une chose, on a dix moins une chose, ce qui est le dividende. Si nous multiplions dix moins une chose par le quotient, on a trente-deux, car tout nombre multiplié par lui-même puis par un autre nombre est égal au produit du premier nombre par l'autre nombre puis le résultat par le premier nombre ; ceci est clair.

<٢٦> فإن قيل: عشرةٌ قسمتها قسمين، فقسمتَ أحدَ القسمين على الآخر، ثمّ ضربتَ ما خرج من القَسْمِ في المقسوم فكان تسعة دراهم.

٣٧-و قياسه: أن تجعل أحد القسمين شيئاً والآخرَ عشرةً إلاّ شيئاً. / فإذا قسمنا عشرةً إلاّ شيئاً على شيءٍ، فالذي يخرج إذا ضربناه في شيءٍ كان عشرةً إلاّ شيئاً، والذي يخرج إذا ضربناه في عشرةٍ إلاّ شيئاً كان تسعة، فتجمعهما فيكون تسعةَ عشر إلاّ شيئاً.

فبيّنٌ ممّا وصفنا أنّ الذي يخرج من قسمة عشرةٍ دراهمَ إلاّ شيئاً على شيءٍ، إذا ضربناه في عشرة دراهمَ كان تسعةَ عشر درهماً إلاّ شيئاً. فَنَقْسِم تسعةَ عشر إلاّ شيئاً على عشرة، فيخرج درهم وتسعة أعشار درهمٍ إلاّ عُشْرَ شيء، وهو الذي يخرج من القسم. ثمّ ترجع فتقول: قسمنا عشرة دراهم إلاّ شيئاً على شيء، فخرج درهم وتسعة أعشار درهمٍ إلاّ عُشر شيء، ثمّ تعمل كما وصفت لك، فيخرج الشيء أربعة وهو أحد القسمين <وهو> المقسوم عليه.

<٢٧> فإن قيل لك: عشرةٌ قسمتها قسمين، فقسمت أحدَ القسمين على الآخر، ثمّ ضربت ما خرج من القَسْمِ في نفسه؛ ثمّ في المقسوم عليه فكان اثنين وثلاثين درهماً.

قياسه: أن تجعل أحد القسمين شيئاً والآخر عشرة إلاّ شيئاً. فإذا قسمنا عشرة إلاّ شيئاً على شيء، فالذي يخرج من القَسْمِ إذا ضربناه في شيء كان عشرةً إلاّ شيئاً وهو المقسوم. وإذا ضربنا عشرة إلاّ شيئاً في الذي خرج من القَسْمِ كان اثنين وثلاثين، لأنّ كلّ عدد يُضرب في مثلِه ثمّ في عدد آخر، فإنّه مثلُ ضربِ العدد الأوّل في العدد الآخر، ثمّ ما اجتمع في العدد الأوّل، وذلك بيّنٌ.

4 شيئاً: شيء – 9 شيئاً: شيء – 14 في نفسه ثم: في الهامش – 18 إلاّ شيئاً: إلاّ شيء – 20 العدد: للعدد.

Tout cela étant montré, c'est comme si on disait : tu as divisé dix en deux parties, tu as divisé l'une des parties par son associée, puis tu as multiplié le quotient par le dividende, et on a trente-deux. Or nous avons montré cela dans le problème précédent.

<28> Si on dit : tu divises dix en deux parties, tu divises l'une des deux parties par l'autre, puis tu multiplies le quotient par la différence entre les deux parties, et on a vingt-quatre dirhams.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des deux parties une chose, et l'autre dix moins une chose ; si nous divisons dix moins une chose par [37ᵛ] une chose, nous savons que, si nous multiplions le quotient par la différence entre les deux parties, c'est-à-dire dix moins deux choses, on a vingt-quatre dirhams. Or nous savons que le produit du quotient par une chose est dix moins une chose, et par deux choses, c'est vingt moins deux choses ; nous les additionnons aux vingt-quatre, on aura quarante-quatre moins deux choses. Il est donc clair, d'après ce que nous avons décrit, que le produit du quotient par dix est quarante-quatre moins deux choses. Nous divisons quarante-quatre moins deux choses par dix, on obtient quatre dirhams et deux cinquièmes de dirham moins un cinquième d'une chose, ce qui est le quotient. Nous revenons ensuite et nous disons : nous avons divisé dix moins une chose par une chose, et on obtient quatre dirhams et deux cinquièmes de dirham moins le cinquième d'une chose. Tu procèdes comme je te l'ai décrit ; on a la chose, deux, ce qui est l'une des deux parties, c'est-à-dire le diviseur, et l'autre partie est huit.

فإذْ قد بان هذا فكأنّه قال: عشرةٌ قسمتها قسمين، فقسمت أحد القسمين على صاحبه؛ ثمّ ضربت ما خرج من القَسْمِ في المقسومِ فكان اثنين وثلاثين. وقد بيّنا ذلك في المسألة التي قبلها.

<٢٨> فإن قال: عشرةٌ قسمتها قسمين، فقسمت أحد القسمين على الآخر ثمّ ضربت ما خرج من القَسْمِ في فضل ما بين القسمين فكان أربعة وعشرين درهماً.

قياسه: أن تجعل أحدَ القسمين شيئاً والآخرَ عشرةً إلاّ شيئاً. فإذا قسمنا عشرة إلاّ شيئاً على / شيء، علمنا أنّ الذي يخرج إذا ضربناه في فضل ما بين ٣٧-ظ
القسمين — وهو عشرة إلاّ شيئين —، كان أربعةً وعشرين درهماً. وقد علمنا أنّ ضرب ما يخرج من القَسْمِ في شيء عشرةٌ إلاّ شيئاً، وفي شيئين عشرون إلاّ شيئين، فنجمعه مع الأربعة والعشرين فيكون أربعة وأربعين إلاّ شيئين. فبيِّنٌ ممّا وصفنا أنّ ضرب ما يخرج من القَسْمِ في عشرةٍ أربعة وأربعون إلاّ شيئين. فنقسم أربعةً وأربعين إلاّ شيئين على عشرة، فيخرج أربعةُ دراهم وخُمْسَا درهم إلاّ خُمْسَ شيء، وهو الذي يخرج من القَسْمِ. ثمّ نرجع فنقول: قسمنا عشرة إلاّ شيئاً على شيء فخرج أربعةُ دراهم وخُمْسا درهم إلاّ خُمْس شيء. فتعمل كما وصفتُ لك. فيخرج الشيء اثنين، وهو أحد القسمين، وهو المقسوم عليه، والقسم الآخر ثمانية.

7 إلاّ شيئاً: إلاّ شيء — 8 إلاّ شيئاً: إلاّ شيء — 10 إلاّ شيئاً: إلاّ شيء / عشرون: عشرين — 12 عشرة: كتبها أوّلاً "المقسوم"، ثم كتب "عشرة" فوقها / وأربعون: وأربعين — 13 وخُمْسا: وخمسي — 14-15 إلاّ شيئاً: إلاّ شيء — 15 وخُمسا: وخمسي — 16 اثنين: اثنان — 17 والقسم: والمقسوم.

<29> Si on dit : tu divises dix en deux parties, tu divises chacune par l'autre, tu les additionnes et tu multiplies ensuite la somme par l'une des deux parties, on a trente-quatre dirhams.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des deux parties une chose, et l'autre dix moins une chose. Si nous divisons dix moins une chose par une chose, et une chose par dix moins une chose et que nous additionnons les deux quotients puis nous multiplions le tout par dix moins une chose, on a trente-quatre dirhams. Or nous savons que, lorsque nous multiplions le quotient d'une chose par dix moins une chose par dix moins une chose, on a une chose. Nous ôtons donc une chose de trente-quatre, il reste trente-quatre moins une chose. Il est clair, d'après ce que nous avons décrit, que, si nous divisons dix moins une chose par une chose puis nous multiplions le quotient par dix moins une chose, on a trente-quatre moins une chose. Et si nous multiplions le quotient de dix moins une chose par une chose par une chose, on a dix moins une chose, que nous ajoutons à trente-quatre moins une chose ; on a alors quarante-quatre moins deux choses, ce qui est égal au produit du quotient de dix moins une chose par une chose, par dix. Nous divisons donc quarante-quatre moins deux choses par dix, on a quatre dirhams plus deux cinquièmes moins un cinquième d'une chose.

Nous revenons ensuite et nous disons : nous avons divisé dix dirhams moins une chose par une chose ; on obtient donc quatre dirhams plus deux cinquièmes moins un cinquième d'une chose. Or nous savons que, lorsque nous multiplions [38r] le quotient par le diviseur, on retrouve notre bien divisé. Nous multiplions quatre dirhams plus deux cinquièmes de dirham moins un cinquième de chose par une chose, on a quatre choses et deux cinquièmes d'une chose moins un cinquième de *carré* égaux à dix dirhams moins une chose. Tu réduis par ceci, comme je te l'ai décrit ; on a la chose deux, ce qui est l'une des deux parties, et l'autre est huit.

<٢٩> فإن قال: عشرةٌ قسمتها قسمين، فقسمت كلَّ واحدٍ من القسمين على الآخر وجمعتهما، ثمّ ضربت ما اجتمع في أحد القسمين فكان أربعةً وثلاثين درهماً.

قياسه: أن تجعل أحد القسمين شيئاً والآخر عشرة إلاّ شيئاً. فإذا قسمنا عشرةً إلاّ شيئاً على شيءٍ، وشيئاً على عشرةٍ إلاّ شيئاً، وجمعنا ما خرج من القسمين، ثمّ ضربناه في عشرة إلاّ شيئاً، كان أربعة وثلاثين درهماً. وقد علمنا أنّا متى ضربنا ما خرج لنا من قِسمَةِ شيءٍ على عشرة إلاّ شيئاً في عشرةٍ إلاّ شيئاً، كان شيئاً. فنسقط شيئاً من أربعة وثلاثين، فيبقى أربعة وثلاثون غير شيء. فبيِّنٌ ممّا وصفنا أنّا إذا قسمنا عشرة إلاّ شيئاً على شيء، ثمّ ضربنا ما خرج لنا من القسمة في عشرة إلاّ شيئاً كان أربعة وثلاثين إلاّ شيئاً. وإذا ضربنا ما يخرج من قسم عشرة إلاّ شيئاً على شيء في شيء، كان عشرة إلاّ شيئاً. فنـزيدها على أربعة وثلاثين إلاّ شيئاً فيكون أربعة وأربعين إلاّ شيئين؛ وهو مثل ضرب ما يخرج من قَسْمِ عشرةٍ إلاّ شيئاً على شيء في عشرة. فنقسم أربعة وأربعين إلا شيئين على عشرة فيخرج أربعة دراهم وخُمْسان إلاّ خُمْسَ شيءٍ.

ثمّ نرجع فنقول: قسمنا عشرة دراهم إلاّ شيئاً على شيء، فخرج أربعة دراهم وخُمْسان إلاّ خُمْسَ شيءٍ. فقد علمنا أنّا متى ضربنا ما / يخرج لنا من القَسْمِ في المقسوم عليه عاد مالُنا المقسومُ. فنضرب أربعة دراهم وخُمْسَي درهم إلاّ خُمْس شيء في شيء، فيكون أربعةَ أشياء وخُمْسي شيء إلاّ خُمْسَ مالٍ تعدل عشرة دراهم إلاّ شيئاً. فتقابل بها كما وصفتُ لك، فيخرج الشيء اثنين، وهو أحد القسمين، والآخر ثمانية. ٣٨-و

4 شيئاً (الأولى): فوق السطر / شيئاً (الثانية): شيء — 4-5 فإذا قسمنا ... على عشرة إلاّ شيئاً: في الهامش — 5 إلاّ شيئاً: (في الموضعين): إلاّ شيء — 6 كان: فكان — 7 متى: فوق السطر / إلاّ شيئاً: إلاّ شيء — 9 إلاّ شيئاً: إلاّ شيء — 10 إلاّ شيئاً: إلاّ شيء — 11 إلاّ شيئاً: إلاّ شيء— 13 إلاّ شيئاً: إلاّ شيء، ومثل هذا تكرّر في معظم المواضع ونكتفي بما أشرنا إليه منها فيما سبق. ولن نشير إلى ذلك ثانية — 17 مالنا: لا تعني هنا مربع الشيء، بل المقسوم فقط. ولن نشير إلى مثلها فيما بعد.

Si tu veux, pose l'une des deux parties une chose et l'autre dix moins une chose, puis tu dis : nous avons divisé une chose par dix moins une chose, et on obtient un dinar. Et nous avons divisé dix moins une chose par une chose, on obtient un fels. Nous les additionnons, on a un dinar plus un fels. Or nous savons que, si nous multiplions un dinar et un fels par une chose, on a trente-quatre. Et si nous multiplions un fels par une chose, on a dix dirhams moins une chose. Nous ôtons dix moins une chose de trente-quatre, il reste vingt-quatre plus une chose. Or nous savons que le produit d'un dinar par une chose est vingt-quatre dirhams plus une chose, et si nous multiplions un dinar par dix moins une chose, on a une chose, que nous ajoutons à vingt-quatre plus une chose ; on a alors vingt-quatre plus deux choses. Il est donc clair que, si nous multiplions un dinar par dix, on a vingt-quatre dirhams plus deux choses. Nous divisons donc vingt-quatre plus deux choses par dix, on obtient deux dirhams plus deux cinquièmes plus un cinquième d'une chose, ce qui est le dinar. Nous revenons ensuite et nous disons : nous avons divisé une chose par dix moins une chose et on obtient deux dirhams plus deux cinquièmes de dirham plus un cinquième d'une chose. Or nous savons que, lorsque nous multiplions le quotient par le diviseur, on retrouve notre bien divisé ; multiplions donc deux dirhams plus deux cinquièmes <de dirham> plus un cinquième d'une chose par dix moins une chose. On a donc vingt-quatre dirhams moins deux cinquièmes d'une chose moins un cinquième de *carré* égaux à une chose. Tu réduis par ceci, comme je te l'ai décrit, alors on a la chose, huit, ce qui est l'une des deux parties, et l'autre est deux.

<30> Si on dit : tu divises dix en deux parties, tu divises la plus grande par la plus petite, puis tu ajoutes le quotient à dix, puis tu multiplies la somme par la partie la plus petite, et on a quarante-six dirhams.

On l'infère ainsi : tu poses la petite partie, une chose, et la grande, dix moins une chose ; or nous savons que, si nous divisons dix moins une chose par une chose, que nous ajoutons [38^{v}] le quotient à dix et multiplions la somme par une chose, on a quarante-six dirhams. Il est clair que le

وإن شئت فاجعل أحدَ القسمين شيئاً والآخرَ عشرةً إلاّ شيئاً، ثمّ تقول: قسمنا شيئاً على عشرةٍ إلاّ شيئاً فخرج دينارٌ، وقسمنا عشرةً إلاّ شيئاً على شيءٍ فخرج فلْسٌ، فجمعناهما فكانا ديناراً وفلْساً. فقد علمنا أنّا إذا ضربنا ديناراً وفلساً في شيءٍ كان أربعةً وثلاثين، وإذا ضربنا فلساً في شيء كان عشرة دراهم إلاّ شيئاً. فنُسقط عشرةَ إلاّ شيئاً من أربعة وثلاثين، فيبقى أربعة وعشرون وشيء. وقد علمنا أنّ ضرْبنا ديناراً في شيء أربعةٌ وعشرون درهماً وشيئاً. وإذا ضربنا ديناراً في عشرة إلاّ شيئاً كان شيئاً، فنـــزيده على أربعة وعشرين وشيء، فيكون أربعة وعشرين وشيئين. فقد استبان أنّا إذا ضربنا ديناراً في عشرة كان أربعة وعشرين درهماً وشيئين. فنقسم أربعة وعشرين وشيئين على عشرة فيخرج درهمان وخُمْسان وخُمْسُ شيءٍ وهو الدينار. ثمّ نرجع فنقول: قسمنا شيئاً على عشرة إلاّ شيئاً فخرج درهمان وخُمْسَان وخُمْسُ شيءٍ. وقد علمنا أنّا متى ما ضربنا ما خرج لنا من القَسْمِ في المقسوم عليه عاد مالُنا المقسوم. فنضرب درهمين وخُمْسَيْن وخُمْس شيءٍ في عشرة إلاّ شيئاً، فيكون أربعةً وعشرين درهماً إلاّ خُمْسي شيءٍ وإلاّ خُمْسَ مالٍ تعدل شيئاً. فتقابل به كنَحْوِ ما وصفتُ لك، فيخرج الشيءُ ثمانيةً، وهو أحد القسمين، والآخر اثنين.

<٣٠> وإن قال: عشرةٌ قسمتها قسمين، فقسمت الأكبر على الأصغر، ثمّ زدت ما خرج من القَسْمِ على العشرة، ثمّ ضربت ما اجتمع في القسم الأصغر فكان ستّة وأربعين درهماً.

قياسه: أن تجعل القسم الأصغر شيئاً والأكبر عشرة إلاّ شيئاً. فقد علمنا أنّا إذا قسمنا عشرة إلاّ شيئاً على شيء وزدْنا ما / يخرج من القَسْمِ على العشرة، ٣٨-ظ وضربنا ما يجتمعُ في شيء، كان ستّة وأربعين درهماً، وبيّنٌ أنّ ضَرْبَنا العشرةَ في

6 وعشرون: وعشرين — 10 درهمان وخمسان: درهمين وخمسين — 11 درهمان وخمسان: درهمين وخمسين.

produit de dix par une chose est dix choses, que nous ôtons de quarante-six dirhams ; il reste donc quarante-six dirhams moins dix choses, ce qui est égal au produit du quotient de dix moins une chose par une chose par une chose. Mais le produit du quotient de dix moins une chose par une chose par une chose est dix moins une chose. On a donc dix moins une chose égal à quarante-six moins dix choses. Tu réduis par ceci, comme je te l'ai montré ; la chose sera alors quatre.

<31> Si on te dit : tu divises dix en deux parties, tu divises la plus grande par la plus petite, tu ajoutes au quotient dix et tu multiplies la somme par la partie le plus grande, on a soixante-neuf dirhams.

On l'infère ainsi : tu poses la plus petite partie une chose et la plus grande dix moins une chose. Si nous divisons dix moins une chose par une chose et que nous ajoutons le quotient à dix, puis nous multiplions la somme par dix moins une chose, alors on a soixante-neuf. Nous multiplions dix dirhams par dix moins une chose, on a cent dirhams moins dix choses, que nous ôtons de soixante-neuf dirhams ; il reste dix choses moins trente et un dirhams, ce qui est égal au produit du quotient de dix moins une chose par une chose par dix moins une chose. Mais le produit du quotient de dix moins une chose par une chose par une chose est dix moins une chose, que nous ajoutons à dix choses moins trente et un dirhams ; on a neuf choses moins vingt et un, ce qui est égal au produit du quotient de dix moins une chose par une chose, par dix. Tu divises neuf choses moins vingt et un par dix, on obtient neuf dixièmes d'une chose moins deux dirhams moins un dixième, ce qui est le quotient de dix moins une chose par une chose. Tu multiplies neuf dixièmes de chose moins deux dirhams et un dixième par une chose. On a neuf dixièmes de *carré* moins deux choses moins un dixième de chose égaux à dix moins une chose. Tu réduis par ceci [39r] et tu complètes ton *carré*. On a un *carré* égal à onze dirhams plus un

شيء عشرةُ أشياء. فنسقطها من ستّة وأربعين درهماً، فيبقى ستّة وأربعون إلاّ عشرة أشياء، وهو مثل ضرْب ما يخرج من قسمةِ عشرةٍ إلاّ شيئاً على شيء في شيء. وضرب ما يخرج من قسمة عشرة إلاّ شيئاً على شيء في شيء عشرة إلاّ شيئاً. فيكون: عشرةٌ إلاّ شيئاً تعدل ستّة وأربعين إلاّ عشرة أشياء. فتقابل بها على ما بيّنت لك، فيكون الشيء أربعة.

<٣١> وإن قيل لك: عشرةٌ قسمتها قسمين، فتقسم الأكبر على الأصغر، ثمّ تزيد ما يخرج من القَسْمِ على العشرة، ثمّ تضرب ما اجتمع في القسم الأكبر فيكون تسعةً وستين درهماً.

قياسه: أن تجعل القسمَ الأصغر شيئاً والأكبرَ عشرةً إلاّ شيئاً. فإذا قسمنا عشرةً إلاّ شيئاً على شيء، وزدنا ما يخرج من القَسم على العشرة، ثمّ ضربنا ما اجتمع في عشرة إلاّ شيئاً، فكان تسعةً وستين. فنضرب عشرة دراهم في عشرة إلاّ شيئاً فيكون مائة درهم إلاّ عشرة أشياء، فنُسقطها من تسعةٍ وستين درهماً فيبقى عشرة أشياء إلاّ واحداً وثلاثين درهماً، وهو مثل ضرب ما يخرج من قَسْمِ عشرة إلاّ شيئاً على شيء في عشرة إلاّ شيئاً. وضرب ما يخرج من قَسْمِ عشرة إلاّ شيئاً على شيء في شيء عشرةٌ إلاّ شيئاً، فنـــزيده على عشرة أشياء إلاّ واحداً وثلاثين درهماً، فيكون: تسعة أشياء إلاّ واحداً وعشرين، وهو مثل ضرب ما يخرج من قسم عشرة إلاّ شيئاً على شيء في عشرة. فتقسم تسعة أشياء إلاّ واحداً وعشرين على عشرة، فيخرج تسعة أعشار شيء إلاّ درهمين وعُشْراً، وهو ما يخرج من قسم عشرة إلاّ شيئاً على شيء. فتضرب تسعة أعشار شيء إلاّ درهمين وعُشراً في شيء. فيكون تسعةُ أعشار مال إلاّ شيئين وعُشْر شيء تعدل عشرةً إلاّ شيئاً. فتقابل بها / وتكمِّل مالَك فيكون: مالاً يعدل أحدَ عشر درهماً ٣٩-و وتُسْعَ درهمٍ وشيئاً وتُسْعَي شيءٍ. فنصِّف الشيء والتُسْعَيْ شيء فيكون نصفاً

16 واحداً: واحد / واحداً: واحد – 18 واحداً: واحد / وعُشراً: وعُشر – 20 وعُشراً: وعُشر.

neuvième de dirham plus une chose plus deux neuvièmes de chose. Partage en deux la chose et les deux neuvièmes de chose, on a un demi plus un neuvième ; multiplie-le par lui-même, on a un quart plus un neuvième plus le neuvième du neuvième, que tu ajoutes à onze dirhams et à un neuvième de dirham, on a onze dirhams plus un quart, plus un sixième, plus la moitié d'un neuvième plus le neuvième de neuvième ; tu prends la racine, on a trois dirhams plus deux tiers plus la moitié d'un neuvième, auquel tu ajoutes la moitié des racines, c'est-à-dire un demi plus un neuvième ; on a quatre, ce qui est la chose et c'est la plus petite partie.

Si tu veux, pose l'une des parties, une chose, ce qui est la plus petite, et la plus grande est dix moins une chose. Si nous divisons dix moins une chose par une chose, on a un dinar, que tu ajoutes au dix ; on a dix dirhams et un dinar. Si nous multiplions dix dirhams plus un dinar par dix dirhams moins une chose, on a soixante-neuf dirhams. Mais le produit de dix dirhams par dix dirhams moins une chose est cent dirhams moins dix choses, que tu ôtes de soixante-neuf. Il reste dix choses moins trente et un dirhams. On a donc montré que le produit d'un dinar par dix dirhams moins une chose est dix choses moins trente et un dirhams. Mais le produit d'un dinar par une chose est dix dirhams moins une chose, que tu ajoutes à dix choses moins trente et un ; on a neuf choses moins vingt et un. Or nous savons que le produit du dinar par dix dirhams est neuf choses moins vingt et un ; nous divisons neuf choses moins vingt et un par dix, on obtient neuf dixièmes de chose moins deux dirhams plus un dixième, ce qui est le dinar. C'est comme si on disait : dix moins une chose que tu as divisé par une chose et on a neuf dixièmes de chose moins deux dirhams et un dixième. Tu procèdes ensuite comme je te l'ai décrit ; on a la chose, quatre, qui est la plus petite partie, et la plus grande est six.

وتُسعاً. فاضربه في مثله فيكون ربعٌ وتُسْعٌ وتُسْعُ تُسْعٍ. فتزيده على أحد عشر درهماً وتُسْعِ درهم، فيكون أحد عشر درهماً وربعٌ وسدسٌ ونصفُ تُسْعٍ وتُسْع تُسْعٍ. فتأخذ جذرها فيكون ثلاثةَ دراهم وثلثاً ونصف تسعٍ، فتزيد عليه نصف الأجذار وهو نصفٌ وتُسْع، فيكون أربعةً وهو الشيء، وهو القسم الأصغر.

وإن شئت، فاجعل أحدَ القسمين شيئاً وهو الأصغر والأكبر عشرةً إلاّ شيئاً. فإذا قسمنا عشرةً إلاّ شيئاً على شيءٍ خرج دينارٌ. فتزيده على العشرة، فيكون عشرة دراهم ودينارٌ. فإذا ضربنا عشرةَ دراهمَ ودیناراً في عشرةِ دراهمَ إلاّ شيئاً، كان تسعة وستين درهماً. وضرْب عشرة دراهم في عشرة دراهم إلاّ شيئاً مائةُ درهمٍ غيرَ عشرة أشياء. فتُسْقِطَها من التسعة والستين فيبقى عشرة أشياء إلاّ واحداً وثلاثين درهماً. فقد تبيّن أنّ ضرب دينار في عشرة دراهم إلاّ شيئاً عشرة أشياء إلاّ واحدًا وثلاثين درهماً. وضَرْبُ دينارٍ في شيء عشرة دراهم إلاّ شيئاً، فتزيده على عشرة أشياء إلاّ واحداً وثلاثين، فيكون تسعة أشياء إلاّ واحداً وعشرين. فقد علمنا أنّ ضَرْبَ الدينار في عشرة دراهم تسعةُ أشياء إلاّ واحداً وعشرين. فنقسم تسعة أشياء إلاّ واحداً وعشرين على عشرة فيخرج تسعةُ أعشار شيء إلاّ درهمين وعُشْر وهو الدينارُ. فكأنّه قال: عشرة إلاّ شيئاً قسمتها على شيء فخرج تسعة أعشار شيء إلاّ درهمين وعُشْراً. ثمّ تعمل كما وصفتُ لك، فيخرج الشيءُ أربعة وهو القسم الأصغر، والأكبر ستّة.

2–3 وربعٌ وسدسٌ ونصفُ تُسْعٍ وتُسْع تُسْعٍ: كتب بخطّ آخر في الهامش ما يلي: "يرادفه ربع وتسعان وتُسع تُسع" وهو صحيح — 7 ودیناراً: ودينار — 10 واحداً: واحد — 11 إلاّ واحداً: إلاّ واحد — 12 إلاّ واحداً: إلاّ واحد — 13 واحداً: واحد — 14 إلاّ واحداً (الثانية): إلاّ واحد — 15 إلاّ شيئاً: في الهامش — 16 وعُشراً: وعشر.

<32> Si on dit : tu divises dix en deux parties, tu divises la plus grande partie par la plus petite et la plus petite par la plus grande, tu les additionnes et tu les ajoutes à dix, [39^{v}] puis tu multiplies la somme par la plus grande partie, on a soixante-treize dirhams.

On l'infère ainsi : tu poses la plus grande partie, une chose, et la plus petite, dix moins une chose. Si nous divisons dix moins une chose par une chose, et une chose par dix moins une chose, et que nous ajoutons les quotients à dix, puis nous multiplions la somme par une chose, on a soixante-treize. Or nous savons que le produit de dix par une chose est dix choses, que nous ôtons de soixante-treize ; il reste soixante-treize moins dix choses, ce qui est égal au produit du quotient d'une chose par dix moins une chose plus le quotient de dix moins une chose par une chose, par une chose. Mais le produit du quotient de dix moins une chose par une chose, par une chose, est égal à dix moins une chose, que nous soustrayons de soixante-treize moins dix choses. Il reste soixante-trois moins neuf choses, ce qui est égal au produit du quotient d'une chose par dix moins une chose par une chose. Mais le produit du quotient d'une chose par dix moins une chose, par dix moins une chose, est une chose, que tu ajoutes à soixante-trois moins neuf choses ; on a soixante-trois moins huit choses, ce qui est égal au produit du quotient d'une chose par dix dirhams moins une chose par dix. Tu divises le soixante-trois moins huit choses par dix, on obtient six dirhams plus trois dixièmes de dirham moins quatre cinquièmes d'une chose. Il est clair, d'après ce que nous avons décrit, que, si nous divisons une chose par dix moins une chose, on a six dirhams plus trois dixièmes de dirham moins quatre cinquièmes d'une chose. Or nous savons que, lorsque nous multiplions le quotient par le diviseur, on retrouve notre bien divisé. Nous multiplions donc six dirhams plus trois dixièmes de dirham moins quatre cinquièmes d'une chose par dix moins une chose. On a donc soixante-trois dirhams plus quatre cinquièmes de *carré* moins quatorze choses plus trois

<٣٢> فإن قال: عشرةٌ قَسَمْتُها قسمين، وقسمت القسم الأكبرَ على الأصغر والأصغرَ على الأكبرِ، وجمعتهما، وزدتَهُما على العشرة، / ثمّ ضربت ما ٣٩-ظ
اجتمع في القسم الأكبر فكان ثلاثةً وسبعين درهماً.

قياسه: أن تجعل القسمَ الأكبر شيئاً والأصغرَ عشرةً إلاّ شيئاً. فإذا قسمنا عشرةً إلاّ شيئاً على شيءٍ، وشيئاً على عشرةٍ إلاّ شيئاً، وزدنا ما خرج من القسمين على العشرة، ثمّ ضربنا ما اجتمع في شيء؛ كان ثلاثةً وسبعين. وقد عَلِمْنا أنّ ضرْبَنا عشرةً في شيء عشرةُ أشياء، فنلقيها من ثلاثةٍ وسبعين، فيبقى ثلاثة وسبعون إلاّ عشرة أشياء، وهو مثلُ ضرْب ما يخرج من قسمة شيء على عشرةٍ إلاّ شيئاً وقسمةِ عشرة إلاّ شيئاً على شيء، في شيء، وضربُ ما يخرج من قسمة عشرة إلاّ شيئاً على شيء في شيء عشرةٌ إلاّ شيئاً. فنلقيها من ثلاثة وسبعين إلاّ عشرة أشياء، فيبقى ثلاثة وستـــون إلاّ تسعة أشياء، وهو مثلُ ضربِ ما يخرج من قسمة شيءٍ على عشرة إلاّ شيئاً في شيء. وضرْبُ ما يخرج من قسمة شيء على عشرة إلاّ شيئاً في عشرةٍ إلاّ شيئاً شيءٌ، فتزيده على الثلاثة والستين إلاّ تسعة أشياء، فيكون ثلاثةً وستين إلاّ ثمانية أشياء، وهو مثل ضرب ما يخرج من قسمة شيء على عشرة دراهم إلاّ شيئاً في عشرة. فتقسم الثلاثة والستين إلاّ ثمانية أشياء على عشرة، فيخرج ستّة دراهم وثلاثة أعشار درهم إلاّ أربعة أخماسِ شيءٍ. فبيِّنٌ ممّا وصفنا أنّا إذا قسمنا شيئاً على عشرة إلاّ شيئاً خرج ستّة دراهم وثلاثة أعشار درهم إلاّ أربعة أخماس شيء. وقد علمنا أنّا متى ضربنا ما خرج لنا من القَسْمِ في المقسوم عليه عاد مالُنا المقسوم. فنضرب ستّة دراهم وثلاثة أعشار درهم إلاّ أربعة أخماس شيء في عشرة إلاّ شيئاً، فيكون ثلاثةً وستين درهماً وأربعة أخماس مالٍ إلاّ أربعة عشر شيئاً وثلاثة أعشار شيء تعدل

8 وسبعون: وسبعين / ضرْب: فوق السطر – 11 وستّون: وستّين / إلاّ تسعة أشياء: بعدها أربعة أسطر مطموسة تماماً – 11-14 وهو مثل ... أشياء: في الهامش مع العبارة التالية "لعل هذا سقط من هنا"، ونجد نفس النص مترجمًا إلى اللاتينية مما يدل على أنه نص الأصل – 19 عليه: فوق السطر / مالنا: تعني المقسوم ولا تعني مربّع الشيء.

dixièmes d'une chose égaux à une chose. Tu réduis par ceci, on a quinze choses et trois dixièmes d'une chose égaux à quatre cinquièmes de *carré* plus soixante-trois dirhams. Complète ton *carré*, on a un *carré* plus soixante-dix-huit dirhams plus un demi plus un quart égaux à dix-neuf choses plus un huitième de chose. Partage les choses en deux moitiés, on a neuf plus un demi plus un demi d'un huitième ; [40r] multiplie-le par lui-même, on a quatre-vingt-onze plus un quart plus un huitième plus la moitié d'un huitième plus une partie de deux cent cinquante-six. Ôtes-en soixante-dix-huit plus un demi plus un quart, il reste douze plus un demi plus un huitième plus la moitié d'un huitième plus une partie des deux cent cinquante-six. Prends-en la racine, on a trois plus un demi plus un demi-huitième, que tu ôtes de la moitié des choses, qui est neuf plus un demi plus un demi-huitième ; il reste six, ce qui est la chose, et c'est la partie la plus grande.

<33> Si on dit : tu divises dix en deux parties, tu divises chacune des deux parties par l'autre puis tu prends la différence entre les deux parties obtenues de la division de chacune des deux parties par l'autre, que tu multiplies par l'une des deux parties, on a cinq dirhams.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des parties, une chose et l'autre, dix moins une chose. Nous savons que, lorsque nous divisons une chose par dix moins une chose et dix moins une chose par une chose, et que nous prenons la différence entre eux, que nous multiplions par une chose, on obtient cinq dirhams. Si nous multiplions le complément des deux quotients par une chose, on a vingt dirhams moins deux choses, car le complément des deux quotients par une chose est le double du quotient de dix moins une chose par une chose, <multiplié> par une chose, que nous ajoutons à cinq dirhams ; on aura vingt-cinq dirhams moins deux choses.

On a ainsi montré que le produit de la somme des quotients de chacune des deux parties par l'autre, par une chose, est vingt-cinq dirhams moins deux choses.

شيئاً، فتقابل بها فيكون خمسةَ عشرَ شيئاً وثلاثة أعشار شيء تعدل أربعة أخماس مالٍ وثلاثة وستين درهماً. فأكمل مالك فيكون مالاً وثمانيةً وسبعين درهماً ونصفاً وربعاً تعدل تسعةَ عشرَ شيئاً وثُمنَ شيء. فنصِّف الأشياء فيكون تسعةً ونصفاً ونصفَ ثُمنٍ، / فاضربه في مثله فيكون واحداً وتسعين وربعاً وثُمناً ٤٠-و
ونصف ثُمنٍ وجزءاً من مائتين وستّة وخمسين. فأسقط منها ثمانية وسبعين ونصفاً وربعاً فيبقى اثنا عشر ونصفٌ وثُمنٌ ونصف ثُمن وجزءٌ من مائتين وستّة وخمسين. فخذ جذرها فيكون ثلاثةً ونصفاً ونصف ثُمن فأسقطها من نصف الأشياء وهو تسعة ونصف ونصف ثُمن، فيبقى ستّة، وهو الشيء، وهو القسم الأكبرُ.

<٣٣> فإن قال: عشرة قسمتها قسمين، فتقسم كلّ واحدٍ من القسمين على الآخر، ثم تأخذ فضلَ ما بين القَسْمَيْنِ اللذين خرجا من قسمة كلّ واحدٍ من القسمين على الآخر، فتضربه في أحد القسمين فيكون خمسة دراهم.

قياسه: أن تجعل أحد القسمين شيئاً والآخرَ عشرةً غيرَ شيء. فقد علمنا أنّا إذا قسمنا شيئاً على عشرة إلاّ شيئاً، وعشرةً إلاّ شيئاً على شيءٍ، وأخذنا الفضلَ الذي بينهما وضربناه في شيءٍ، كان خمسة دراهم. وإذا ضربنا تمامَ ما خرج من القَسْمَيْن في شيء كان عشرين درهماً إلاّ شيئين؛ لأنّ تمامَ ما خرج من القَسْمَين في شيء هو مِثْلا ما يخرج من قسمة عشرة إلاّ شيئاً على شيءٍ في شيءٍ، فنـــزيده على خمسة دراهم فيكون خمسة وعشرين درهماً إلا شيئين.

فقد تبيّن أنّ ضربَ ما يخرج من قِسمةِ كلّ واحدٍ من القسمين على الآخر، إذا جُمعا في شيء خمسة وعشرون درهماً إلاّ شيئين.

3 ونصفاً وربعاً: ونصف وربع – 4 ورُبعاً وثُمناً: وربع وثُمن – 5 وستّة: ستّة – 13 أحد القسمين: كتب هنا بخطّ آخر في الهامش:"اي المضروب فيه" وهو صحيح – 17-18 في شيء: في الهامش مع صح – 20 وعشرون: وعشرين.

C'est comme si on disait : tu divises dix en deux parties et tu divises chacune des deux parties par l'autre, puis tu les multiplies par l'une des deux parties, on a vingt-cinq dirhams moins deux choses ; c'est-à-dire vingt-cinq dirhams moins le double de l'une des deux parties. Tu procèdes ici comme nous l'avons montré précédemment.

Si tu veux, pose l'une des deux parties, une chose, et l'autre, dix moins une chose. Puis nous disons : nous avons divisé une chose par dix moins une chose, on obtient un dinar, et nous avons divisé dix moins une chose par une chose, on obtient un fels. Nous prenons la différence entre le dinar et le fels, c'est-à-dire un dinar moins un fels. Nous le multiplions par une chose, on a cinq dirhams, car telle était la question. Or nous savons que <la différence> entre le dinar plus le fels – ce qui résulte de la somme des deux quotients – et un dinar moins un fels est deux fels. Mais le produit des deux fels par une chose [40^{v}] est vingt dirhams moins deux choses, à quoi tu ajoutes cinq dirhams. On a donc vingt-cinq dirhams moins deux choses. C'est comme si on disait : tu as divisé dix en deux parties, et tu as divisé chacune des deux par l'autre, et tu as additionné les quotients, puis tu as multiplié cela par l'une des deux parties, on a vingt-cinq dirhams moins deux choses. Tu le fais comme je te l'ai décrit.

<34> Si on te dit : tu as divisé dix en deux parties, tu as divisé le plus grand par le plus petit et tu as ajouté le quotient au plus grand, puis tu as divisé le plus petit par le plus grand et tu as ajouté le quotient au plus petit, puis tu as multiplié l'un par l'autre ; on a trente-cinq.

On l'infère ainsi : nous posons la plus grande partie, une chose, et la plus petite, dix moins une chose. Nous divisons une chose par dix moins une chose et nous ajoutons le quotient à une chose ; on aura une chose plus le quotient d'une chose par dix moins une chose. Puis nous divisons dix moins une chose par une chose et nous ajoutons le quotient à dix moins une chose ; on a dix dirhams moins une chose, plus le quotient de dix moins une chose par une chose. Nous le multiplions par une chose et par le

فكأنه قال: عشرةٌ قسمتها قسمين فقسمت كلّ واحدٍ من القسمين على الآخر، ثمّ ضربتهُما في أحد القِسْمين فكان خمسة وعشرين درهماً إلاّ شيئين، وهو خمسة وعشرون درهماً إلاّ مثلي أحد القسمين. فتعمل فيها كما بيّنا فيما تقدّم.

وإن شئت فاجعل أحدَ القِسْمين شيئاً والآخرَ عشرة إلاّ شيئاً، ثمّ نقول: قسمنا شيئاً على عشرة إلاّ شيئاً فخرج دينار، وقسمنا عشرة إلاّ شيئاً على شيء فخرج فلس. فنأخذ فضلَ ما بين الدينار والفلس وهو دينار إلاّ فلساً، فنضربه في شيء فيكون خمسة دراهم؛ لأنّ السؤال كذلك. وقد علمنا أنّ الذي بين الدينار والفلس – الذي خرج من القَسْمين جميعاً – وبين دينارٍ إلاّ فلساً، فلسان. وضرب فلسين في شيء / عشرون درهماً إلا شيئين، فتزيد عليه الخمسةَ الدراهم ٤٠-ظ فيكون خمسةً وعشرين درهماً إلاّ شيئين. فكأنه قال: عشرةٌ قسمتها قسمين فقسمت كلّ واحدٍ من القِسْمين على الآخر وجمعتهما، ثمّ ضربت ذلك في أحد القِسْمين فكان خمسةً وعشرين درهماً إلاّ شيئين، فتعملها على ما وصفتُ لك.

<٣٤> فإن قيل: عشرةٌ قسمتها قسمين، فقسمت الكثير على القليل، وزدت ما خرج من القَسْمِ على الكثير، ثمّ قسمت القليل على الكثير، وزدت ما خرج من القَسْم على القليل، ثمّ ضربت أحدهما في الآخر، فكان خمسةً وثلاثين.

قياسه: أن نجعل القسم الأكبر شيئاً والأصغر عشرة إلاّ شيئاً. فنقسم شيئاً على عشرةٍ إلاّ شيئاً، فما خرج نزيده على شيء فيكون شيئاً وما خرج من قِسْمة شيء على عشرة إلاّ شيئاً. ثمّ نقسم عشرة إلاّ شيئاً على شيء، فما خرج نزيده على عشرة إلاّ شيئاً، فيكون عشرة دراهم إلاّ شيئاً وما يخرج من قسمة عشرة إلاّ شيئاً على شيء، فنضربه في شيء وما خرج من قسمة شيء على

6 ديناراً: ديناراً – 7 فلساً: فلس – 9 فلساً: فلس / فلسان: فلسين – 10 عشرون: عشرين – 15 وزدت ما ... القليل على الكثير: في الهامش – 18 وما: معطوفة على "شيئاً" أي شيئاً مضافاً إليه ما خرج.

quotient d'une chose par dix moins une chose. Mais le produit d'une chose plus le quotient d'une chose par dix moins une chose, par dix moins une chose, plus le quotient de dix moins une chose par une chose, est égal au produit d'une chose par dix moins une chose, plus le produit du quotient de dix moins une chose par une chose par une chose, plus le produit du quotient d'une chose par dix moins une chose par dix dirhams moins une chose, plus le produit du quotient d'une chose par dix moins une chose par le quotient de dix moins une chose par une chose. Or tu sais que le produit d'une chose par dix moins une chose est dix choses moins un *carré*, que le produit du quotient d'une chose par dix moins une chose par dix moins une chose est une chose, que le produit du quotient de dix dirhams moins une chose par une chose par une chose est dix moins une chose et que le produit du quotient d'une chose par dix moins une chose par le quotient de dix moins une chose par une chose est un dirham, car nous avons montré que, si on a deux nombres dont l'un divise l'autre, alors le produit des deux quotients l'un par l'autre est toujours un. La somme des produits est dix choses moins un *carré* plus une chose plus dix [41r] <dirhams> moins une chose plus un dirham. La somme des produits est donc onze dirhams plus dix choses moins un *carré*, égaux à trente-cinq dirhams. Réduis par ceci, comme je te l'ai décrit ; on obtient la chose, six, ce qui est la plus grande partie, et l'autre, quatre, ce qui est la plus petite partie.

Si tu veux : pose la plus grande partie une chose et la plus petite dix moins une chose, et divise une chose par dix moins une chose ; on obtient un dinar, que tu ajoutes à la chose ; on a une chose plus un dinar. Puis tu divises dix moins une chose par une chose, on obtient un fels, que tu ajoutes à dix moins une chose ; on a donc dix plus un fels moins une chose. Tu le multiplies par une chose et un dinar. Tu multiplies une chose par dix dirhams moins une chose, on a dix choses moins un *carré* ; et tu multiplies un

عشرة إلاّ شيئاً. وضربُ شيءٍ وما خرج من قسمة شيءٍ على عشرةٍ إلاّ شيئاً في
عشرةٍ إلاّ شيئاً وما خرج من قسمة عشرة إلاّ شيئاً على شيء، مثلُ ضربِ شيءٍ
في عشرة إلاّ شيئاً، وضربِ ما خرج من قسمة عشرة إلاّ شيئاً على شيء في
شيء، وضربِ ما خرج من قسمة شيء على عشرة إلاّ شيئاً في عشرة دراهم إلاّ
شيئاً، وضربِ ما خرج من قسمة شيء على عشرة إلاّ شيئاً فيما يخرج من
قسمة عشرة إلاّ شيئاً على شيء. وقد علمت أنّ ضربَ شيءٍ في عشرة إلاّ شيئاً
عشرة أشياء إلاّ مالاً، وأنّ ضَرْبَ ما خرج من قسمة شيءٍ على عشرةٍ إلاّ شيئاً
في عشرةٍ إلاّ شيئاً شيءٌ، وأنّ ضرْب ما يخرج من قسمةِ عشرةَ دراهمَ إلاّ شيئاً
على شيءٍ في شيءٍ عشرةٌ إلاّ شيئاً، وأنّ ضرْب ما يخرج من قسمة شيء على
عشرة إلاّ شيئاً فيما خرج من قسمة عشرةٍ إلاّ شيئاً على شيءٍ درهمٌ؛ لأنّا قد
بيّنا أنّ كلّ عددين يُقسم كلّ واحدٍ منهما على الآخر، فإنّ ضربَ ما خرج من
القَسْمين أحدِهما في الآخر واحدٌ أبداً. فيجتمع الضربُ كلّه وهو عشرة أشياء
إلاّ مالاً وشيء وعشرة / إلاّ شيئاً، ودرهم. فيكون ذلك كلّه: أحدَ عشرَ درهماً ٤١-و
وعشرةُ أشياء إلاّ مالاً تعدل خمسةً وثلاثين درهماً. فتقابل بها كما وصفتُ لك،
فيخرج الشيءُ ستّة وهو القسم الأكبر، والآخر أربعة وهو القسم الأصغر.

وإن شئت فاجعل القسم الأكبر شيئاً والأصغر عشرة إلاّ شيئاً. فتقسم
شيئاً على عشرة إلاّ شيئاً فيخرج دينار، فتزيده على الشيء فيكون شيئاً وديناراً.
ثمّ تقسم عشرةً إلاّ شيئاً على شيء فيخرج فلس، فتزيده على عشرة إلاّ شيئاً
فيكون عشرة وفلس إلاّ شيئاً. <فتضربه في شيء ودينار>: فتضرب شيئاً في
عشرة دراهم إلاّ شيئاً فيكون عشرة أشياء إلاّ مالاً، وتضرب ديناراً في عشرة

12 واحد: واحداً — 12-13 أشياء ... وعشرة: كرّرها ثم ضرب عليها بالقلم — 13 وعشرة: كتب بعدها "درهم" ونسي أن يضرب عليها بالقلم — 18 فيخرج: فخرج إلاّ شيئاً، كتب الناسخ بعدها عبارة ثم ضرب عليها بالقلم وهي: "تضرب فلس في عشرة دراهم إلاّ شيئاً فيكون شيئاً وتضرب فلساً في شيء فيكون عشرة دراهم إلاّ شيئاً" — 19 <فتضربه في شيء ودينار>: نجد هذه العبارة في الترجمة اللاتينية.

dinar par dix dirhams moins une chose, on a une chose. Tu multiplies un fels par une chose, on a dix dirhams moins une chose ; et tu multiplies un dinar par un fels, on a un dirham. Tu additionnes tout cela, on a onze dirhams plus dix choses moins un *carré* égaux à trente-cinq dirhams. Tu réduis par ceci, d'après ce que je t'ai montré.

<35> Si on te dit : tu divises dix en deux parties et tu divises la plus grande par la plus petite et tu ajoutes le quotient à dix ; et tu divises la plus petite par la plus grande et tu ajoutes le quotient à dix ; et tu multiplies l'une par l'autre, on a cent vingt-deux dirhams plus deux tiers.

On l'infère ainsi : tu poses le quotient de la plus grande par la plus petite, une grande chose, que tu ajoutes à dix ; on a donc dix plus une grande chose. Tu poses le quotient de la plus petite par la plus grande, une petite chose. Tu l'ajoutes à dix, on a dix plus une petite chose. Tu le multiplies par dix et une grande chose. Tu multiplies dix par dix, on a cent ; tu multiplies une grande chose par dix, on a dix grandes choses ; tu multiplies une petite chose par dix, on a dix petites choses et tu multiplies une grande chose par une petite chose, on a un dirham. [41^{v}] Tu additionnes. On a donc cent dirhams plus un dirham plus dix grandes choses plus dix petites choses égaux à cent vingt-deux dirhams plus deux tiers de dirham. Tu ôtes de cent vingt-deux dirhams plus deux tiers de dirham cent un dirhams ; il reste vingt et un dirhams plus deux tiers égaux à dix grandes choses plus dix petites choses. La somme de la petite chose et de la grande chose est donc deux dirhams plus un sixième. C'est comme si on disait : tu as divisé dix en deux parties et tu as divisé chacune d'elles par l'autre, on obtient deux dirhams plus un sixième. Nous avons montré cela.

دراهم إلاّ شيئاً فيكون شيئاً، وتضرب فلساً في شيء فيكون عشرة دراهم إلاّ شيئاً، وتضرب ديناراً في فلس فيكون درهماً، فتجمع ذلك كلّه فيكون أحد عشر درهماً وعشرة أشياء إلا مالاً يعدل خمسةً وثلاثين درهماً. فتقابل بها على ما بيّنتُ لك.

<٣٥> فإن قيل لك: عشرةٌ تقسمها قِسْمين فتقسم الكثيرَ على القليلِ، وتزيد ما خرج من القَسْمِ على العشرة، وقسمت القليلَ على الكثيرِ وزِدْتَ ما خرج من القسم على العشرة، وضربت أحدَهما في الآخر فكان مائةً واثنين وعشرين درهماً وثلثين.

قياسه: أن تجعل ما يخرج من قسمة الكثيرِ على القليلِ شيئاً كبيراً، فتزيده على العشرة فيكون عشرةً وشيئاً كبيراً، وتجعل ما يخرج من قسمةِ القليلِ على الكثير شيئاً صغيراً، فتزيده على العشرة فيكون عشرة وشيئاً صغيراً. فتضربه في عشرة وشيء كبير. فتضرب عشرةً في عشرةٍ فيكون مائةً، وتضرب شيئاً كبيراً في عشرةٍ فيكون عشرةَ أشياء كباراً، وتضرب شيئاً صغيراً في عشرة فيكون عشرة أشياء صغاراً، وتضرب شيئاً كبيراً في شيءٍ صغيرٍ فيكون درهماً / فتجمعه، فيكون: مائةُ درهمٍ ودرهمٌ وعشرة أشياء كبار وعشرة أشياء صغار ٤١-ظ تعدل مائةً واثنين وعشرين درهماً وثلثي درهم، فتلقي مائة درهمٍ ودرهماً من مائة واثنين وعشرين درهماً وثلثي درهم، فيبقى: أحد وعشرون درهماً وثلثان تعدل عشرةَ أشياءَ كبارٍ وعشرةَ أشياء صغارٍ. فالشيءُ الصغير والشيءُ الكبير درهمان وسدس. فكأنه قال: عشرة قسمتها قسمين فقسمت كلّ واحدٍ منهما على الآخر فخرج درهمان وسُدس؛ وقد بيّنا ذلك.

11 وشيئاً صغيراً: بعدها معظم السطر مطموس، لعلّ الناسخ قد محاه، ومما يؤكد هذا الترجمة اللاتينية، انظر ص. 85v — 14 صغاراً: صغار — 16 ودرهماً: ودرهم — 18 كبار: بالجرّ صفة لأشياء. ومثلها "صغار" بعدها. واختار النصب من قبل وصفاً لعشرة، وكلاهما جائز / درهمان: درهمين — 20 درهمان: درهمين.

<36> Si on te dit : tu divises dix en deux parties, tu divises la plus grande par la plus petite et tu ajoutes le quotient à dix ; puis tu divises la plus petite par la plus grande, tu retranches le quotient de dix et tu multiplies ensuite l'une par l'autre ; on a cent sept et un tiers.

On l'infère ainsi : tu poses le quotient de la plus grande par la plus petite, une grande chose, que tu ajoutes à dix ; on a dix plus une grande chose. Tu poses le quotient de la plus petite par la plus grande une petite chose et tu le retranches de dix ; il reste dix moins une petite chose, que tu multiplies par dix plus une grande chose ; on a quatre-vingt-dix-neuf dirhams plus dix grandes choses moins dix petites choses égaux à cent sept dirhams et un tiers. Tu réduis par ceci, il reste dix grandes choses moins dix petites choses égales à huit plus un tiers. La grande chose moins la petite chose est donc égale à cinq sixièmes de dirham. C'est comme si on disait : tu divises dix en deux parties, tu divises chacune d'elles par l'autre et tu ôtes la plus petite de la plus grande ; il reste cinq sixièmes de dirham. Tu procèdes comme je te l'ai indiqué.

<37> Si on te dit : divise dix dirhams par deux plus la racine de trois[43].

On l'infère ainsi : tu poses ce qui revient à chacun une chose. C'est comme si on disait : divisons dix dirhams par deux dirhams plus la racine de trois ; on obtient une chose. Or tu sais que, lorsque tu multiplies le quotient par le diviseur, on retrouve notre bien divisé. Tu multiplies une chose par [42r] deux plus la racine de trois. On a deux choses plus la racine de trois *carrés* égaux à dix dirhams. Retranche deux choses de dix, il reste dix moins deux choses, égaux à la racine de trois *carrés*. Multiplie dix

[43] Littéralement : partage dix dirhams entre deux plus la racine de trois.

<٣٦> فإن قيل لك: عشرةٌ قسمتها قسمين، فقسمت الكثير على القليل، وزدت ما خرج من القَسْم على العشرة، ثمّ قسمت القليل على الكثير ونقصت ما خرج من القسم من العشرة، ثمّ ضربت أحدَهما في الآخر فكان مائةً وسبعةً وثلثاً.

قياسه: أن تجعل ما يخرج من قسمة الكثير على القليل شيئاً كبيراً، فتزيده على العشرة، فيكون عشرةً وشيئاً كبيراً. وتجعل ما يخرج من قسمةِ القليلِ على الكثيرِ شيئاً صغيراً فتنقصه من العشرة فيبقى عشرة إلاّ شيئاً صغيراً، فتضربه في عشرةٍ وشيءٍ كبيرٍ، فيكون تسعةً وتسعين درهماً وعشرة أشياء كبار إلاّ عشرة أشياء صغار تعدل مائةَ درهم وسبعةً وثلثاً. فتقابل بها فيبقى: عشرة أشياء كبار إلاّ عشرة أشياء صغار تعدل ثمانيةً وثلثاً، فالشيء الكبيرُ إلاّ شيئاً صغيراً يعدل خمسةَ أسداس درهمٍ. فكأنه قال: عشرةٌ قسمتها قسمين فقسمت كلّ واحد منهما على الآخر، فألقيت الأقلّ منهما من الأكثرِ فبقي خمسةُ أسداسِ درهمٍ. فتعمل على ما بيّنتُ لك.

<٣٧> فإن قيل لك: اِقْسم عشرةَ دراهمَ بين اثنين وجذرِ ثلاثة.

قياسه: أن تجعل ما يصيب الواحدَ شيئاً. فكأنه قال: قسمنا عشرةَ دراهمَ على درهمين وجذرِ ثلاثةٍ، فخرج شيءٌ. وقد علمتَ أنّك متى ضربت ما خرج من القَسْمِ في المقسوم عليه عاد المال المقسومُ. فتضرب شيئاً في / اثنين وجذرِ ٤٢-و ثلاثة، فيكون شيئين وجذر ثلاثة أموال تعدل عشرة دراهم. فألقِ شيئين من عشرة فيبقي: عشرة غير شيئين تعدل جذر ثلاثة أموال، فاضرب عشرة إلاّ

9 درهم: درهماً — 10 شيئًا صغيراً: شيء صغير – 15 قياسه: والصواب "فقياسه"؛ ولكن آثرنا ترك النص على حاله، فربما كان المقصود العبارة الأولى تامة – 17 المال: يعني المال المقسوم فقط، ولا علاقة له بمربّع الشيء – 18 فيكون شيئين وجذر: في الهامش. وكتب بعدها على السطر عبارة: "إلاّ عشرة أشياء صغار تعدل ثمانية" ثم ضرب عليها بالقلم / فألقِ: فالقي — 19 جذر: في الهامش مع "صح".

moins deux choses par lui-même ; on a cent dirhams plus quatre *carrés* moins quarante choses égaux à trois *carrés*. Réduis par ceci, on a un *carré* plus cent dirhams égaux à quarante choses. Partage les choses en deux moitiés, on a vingt ; multiplie-le par lui-même, on a quatre cents ; retranches-en le cent qui est avec le *carré*, il reste trois cents. Sa racine soustraite de vingt est ce qui revient à un individu. Si donc nous divisons dix par deux plus la racine de trois, alors ce qui revient à chacun est vingt moins la racine de trois cents.

J'ai trouvé de nombreux problèmes de calcul de l'algèbre qui te mènent à d'autres modes que les six que j'ai mentionnés dans ce livre. Je t'en montre quelques-uns pour t'indiquer cet art du calcul de l'algèbre, si Dieu le veut.

<Équations à coefficients irrationnels>

<38> Si on te dit : un *carré* que tu multiplies par lui-même et par la racine de dix dirhams, on a neuf fois le *carré*.

On l'infère ainsi : tu poses le *carré* une chose, que tu multiplies par une chose et la racine de dix dirhams, on a un *carré* plus la racine de dix *carrés* égaux à neuf choses. Retranche la racine de dix *carrés* de neuf choses, il

شيئين في مثلها فيكون: مائة درهم وأربعة أموال إلاّ أربعين شيئاً تعدل ثلاثة أموال. فتقابل بها فيكون مالاً ومائةَ درهم تعدل أربعين شيئاً. فنصِّف الأشياء فيكون عشرين، فاضربها في مثلها فيكون أربعمائة، فألقِ منها المائة التي مع المالِ فيبقى ثلاثمائة. فجذرُها، منقوصاً من عشرين، هو ما يصيب الواحدَ. فإذا قسمنا عشرة على اثنين وجذرِ ثلاثةٍ فإنّ الذي يصيب الواحدَ عشرون إلاّ جذر ثلاثمائة.

ووجدت مسائل كثيرة من حساب الجبر تُخرجك إلى غير الضروب الستّة التي ذكرتُها في كتابي هذا. وأنا مُبينٌ لك بعضها لتستدلّ به على هذا الفنّ من حساب الجبر إن شاء الله.

<معادلات ذات العوامل الصم>

<٣٨> إذا قيل لك: مالٌ تضربه في مثلِه وجذر عشرة دراهم، فيكون تسعة أمثالِ المالِ.

قياسه: أن تجعل المالَ شيئاً، فتضربَه في شيءٍ وجذر عشرة دراهم، فيكون: مالٌ وجذر عشرة أموال يعدل تسعةَ أشياء. فألقِ جذرَ عشرة أموالٍ من

4 منقوصاً: منقوص – 8 نجد في هامش المخطوطة بخطّ آخر الإجازة التالية "الحمد لله، ، قرأ عليّ الأخ في الله تعالى الشيخ الفقيه العالم العلم المتفنّن المتقن، القاضي الأعدل تاج الدين أبو الطاهر إسماعيل بن الشيخ الإمام العالم العدل المرحوم برهان الدين بن إسحق إبراهيم بن الشيخ الإمام المقدس المرحوم شمس الدين ابن عبد الله محمّد الكناني الحنفي، من أوّل كتاب الجبر والمقابلة لأبي كامل شجاع المكتتب هذا عليه من أوّله إلى هنا قراءة فهم وتحقيق وضبط وتدقيق، باحثاً عن دقائقه مستخرجاً لحقائقه ما عدا بعض مسائل من آخر ما قرأه، فإنّه عملها بعملٍ غير عمل أبي كامل، فتمّ له بذلك معرفة جميع ما قرأه، أذنت له، حفظه الله وأعانه، أن يقرأ ذلك ويُقرئه لمن شاء حيث شاء وذلك لمعرفته به وقيامه بعمله. قال ذلك وكتبه العبد الفقير إلى الله تعالى سعد بن محمّد بن جعفر (؟) بتاريخ أوائل ذي الحجّة عام اثنين وستين وسبعمائة بمدينة القاهرة المحروسة مصلّياً على رسول الله صلّى الله عليه وسلّم".

reste neuf choses moins la racine de dix *carrés* égaux à un *carré*. Une chose est donc égale à neuf dirhams moins la racine de dix dirhams, ce qui est le *carré*.

<39> Si on te dit : un *carré* dont tu multiplies la racine de huit fois lui-même par la racine de trois fois lui-même puis tu ajoutes au produit vingt dirhams, on a le *carré* par lui-même.

On l'infère ainsi : tu poses le *carré* une chose, tu multiplies alors la racine de huit fois celle-ci par la racine de trois fois celle-ci, on a la racine de vingt-quatre *carrés* ; puis tu lui ajoutes vingt dirhams, on a vingt dirhams plus la racine de vingt-quatre *carrés* égaux à un *carré*. Car il a dit « ce qu'on obtient est égal au *carré* par lui-même [42v] et le *carré* est une chose ». Partage les choses en deux moitiés, ce qui est la racine de vingt-quatre *carrés* ; on a racine de six, que tu multiplies par elle-même ; on a six, que tu ajoutes aux dirhams qui sont vingt dirhams ; on a vingt-six dirhams. Prends-en la racine et ajoute-la à la racine de six ; ce que tu obtiens est le *carré*, c'est-à-dire la racine de vingt-six plus la racine de six.

<40> Si on te dit : un *carré* dont tu multiplies la racine de six fois lui-même par la racine de cinq fois lui-même, puis tu ajoutes au produit dix fois le *carré* plus vingt dirhams, on a le *carré* par lui-même.

On l'infère ainsi : tu poses le *carré* une chose et tu multiplies la racine de six fois celle-ci par la racine de cinq fois celle-ci, on a la racine de trente *carrés* ; puis tu lui ajoutes dix choses plus vingt dirhams, on a dix choses plus vingt dirhams plus la racine de trente *carrés* égaux à un *carré*. Partage les choses et la racine de trente *carrés* en deux moitiés, on a cinq plus la racine de sept et demi ; multiplie-le par lui-même, on aura trente-deux

تسعة <أشياء> يبقَ تسعةُ أشياءَ إلاّ جذر عشرة أموالٍ يعدل مالاً. فالشيءُ يعدل تسعةَ دراهم إلاّ جذر عشرة دراهم وهو المالُ.

<٣٩> فإن قيل لك: مالٌ تضرب جذرَ ثمانيةِ أمثالِه في جذرِ ثلاثة أمثالِه، ثمّ تزيد على ما اجتمع عشرين درهماً فيكون مثل المال في نفسه.

قياسه: أن تجعل المالَ شيئاً، فتضرب جذرَ ثمانيةِ أمثالِه في جذرِ ثلاثةِ أمثالِه، فيكون جذرَ أربعةٍ وعشرين مالاً، ثمّ تزيد عليه عشرين درهماً فيكون عشرين درهماً وجذرَ أربعةٍ وعشرين مالاً تعدل مالاً، لأنّه قال "فكان ما اجتمع مثل المال في نفسه / والمال شيء". فنصِّف الأشياء وهي جذر أربعة وعشرين ٤٢-ظ مالاً فيكون جذر ستّة، فتضربه في مثله فيكون ستّة، فَزِدْه على الدرهم وهو عشرون درهماً، فيكون ستّة وعشرين درهماً. فخذ جذرها فَزِدْ عليه جذرَ ستّة، فما بلغ فهو المال وهو جذر ستّة وعشرين وجذر ستّة.

<٤٠> فإن قيل لك: مالٌ تضرب جذرَ ستّة أمثالِه في جذرِ خمسةِ أمثالِه، ثمّ تزيد على ما اجتمع من الضرب عشرةَ أمثالِ المالِ وعشرين درهماً، فيكون مثل المال في نفسه.

قياسه: أن تجعل المال شيئاً، فتضرب جذرَ ستّة أمثالِه في جذرِ خمسةِ أمثالِه، فيكون جذر ثلاثين مالاً، ثمّ تزيد عليه عشرةَ أشياءَ وعشرين درهماً فيكون عشرةَ أشياء وعشرين درهماً وجذر ثلاثين مالاً تعدل مالاً. فنصِّف الأشياء وجذر ثلاثين مالاً فيكون خمسةً وجذرَ سبعةٍ ونصفاً. فاضربه في مثله

1 من تسعة ... عشرة أموال: وردت في الهامش على النحو التالي: "من تسعة يبقَ جذر عشرة أموال إلاّ تسعة أشياء"؛ وما أثبتناه تؤكده الترجمة اللاتينية (fol. 86r, 2272-2275): Prohice radicem 10 censuum de 9 rebus, et remanebunt 9 res diminuta radice 10 censuum, [equales] que equantur censui — 10 درهماً: درهم — 16-17 عشرة أشياء ... فيكون: في الهامش — 17 فنصِّف: مكرّرة — 18 ونصفًا: ونصف.

dirhams plus un demi plus la racine de sept cent cinquante dirhams ; ajoute-le aux vingt dirhams, on a cinquante-deux dirhams plus un demi plus la racine de sept cent cinquante dirhams. La racine de cela, à quoi on ajoute cinq et la racine de sept plus un demi, est le *carré*.

<41> Si on dit : dix que tu divises en deux parties, tu multiplies l'une par l'autre puis tu divises le produit par la différence entre les deux parties, on obtient la racine de six.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des deux parties une chose et l'autre dix moins une chose. Tu multiplies l'une par l'autre ; on a dix choses moins un *carré*. Partage cela par la différence entre les deux parties, c'est-à-dire dix moins deux choses, le quotient sera racine de six. Or nous savons que, lorsque nous multiplions le quotient par le diviseur, on retrouve notre bien divisé. Multiplions donc la racine de six par dix moins deux choses ; on a racine de six cents dirhams moins racine de vingt-quatre *carrés* égaux à dix choses moins un *carré*. Restaure la racine de six cents dirhams par la racine de vingt-quatre *carrés* et ajoute-le aux dix choses moins un *carré*. Puis restaure les dix choses par le *carré* et ajoute-le à la racine des six cents dirhams ; on a un *carré* plus la racine des six cents dirhams égaux à dix choses [43r] plus la racine de vingt-quatre *carrés*. Partage les dix choses plus la racine de vingt-quatre *carrés* en deux moitiés, on a cinq plus la racine de six. Multiplie-le par lui-même, on a trente et un dirhams plus la racine de six cents dirhams. Enlèves-en la racine des six cents dirhams qui sont avec le *carré*, il reste trente et un. Prends alors la racine de trente et un, que l'on retranche de cinq plus racine de six. C'est l'une des deux parties, et l'autre qui reste de dix est cinq plus racine de trente et un moins racine de six.

فيكون اثنين وثلاثين درهماً ونصفاً وجذر سبعمائة وخمسين درهماً، فزدها على العشرين درهماً، فتكون اثنين وخمسين درهماً ونصفاً وجذر سبعمائة وخمسين درهماً. فجذر ذلك مزيداً عليه خمسةٌ وجذر سبعةٍ ونصفٍ هو المال.

<٤١> فإن قال: عشرةٌ قسمتها قسمين، فضربتَ أحدَهما في الآخرِ، ثمّ قسمت ما اجتمع من الضرب على فضل ما بين القسمين، فخرج جذر ستّة.

قياسه: أن تجعل أحد القسمين شيئاً والآخر عشرة إلاّ شيئاً، فتضرب أحدَهما في الآخر فيكون عشرة أشياء إلاّ مالاً، فاقسم ذلك على فضلِ ما بين القسمين وهو عشرة إلا شيئين، فيخرج جذر ستّة. وقد علمنا أنّا متى ما ضربنا ما خرج لنا من القَسْمِ في المقسوم عليه عاد مالُنا المقسومُ. فنضرب جذرَ ستّة في عشرة إلاّ شيئين، فيكون: جذر ستمائة درهم إلاّ جذر أربعة وعشرين مالاً يعدل عشرة أشياء إلاّ مالاً. فاجْبُرْ جذرَ ستمائة درهمٍ بجذرِ أربعةٍ وعشرين مالاً وزِدْه على العشرة الأشياء إلاّ مالاً، ثمّ اجْبُرْ العشرة الأشياء بالمال وزِدْه على جذرِ ستمائة درهمٍ، فيكون مالاً وجذرَ ستمائة درهم يَعدل عشرة أشياء / وجذر أربعة وعشرين مالاً. فنصِّف العشرة الأشياء وجذر أربعة وعشرين مالاً ٤٣-و فيكون خمسةً وجذر ستّة، فاضْرِبْه في مثلِه فيكون واحداً وثلاثين درهماً وجذر ستمائة درهم. فأسْقِطْ منه جذرَ ستمائة درهم التي مع المال، فيبقى واحدٌ وثلاثون. فَخُذْ جذرَ واحدٍ وثلاثين منقوصاً منه خمسةٌ وجذر ستّة، فهو أحد القسمين، والآخر ما بقي من العشرة وهو خمسة وجذر أحدٍ وثلاثين إلاّ جذر ستّة.

3 مزيداً: مزيد / هو: وهو — 6 أحد القسمين: المقصود القسم الأصغر — 9 مالنا: أي المقسوم، ولا علاقة له بمربّع الشيء — 12 إلاّ مالاً: إلاّ مال — 15 واحدًا: واحد — 17 منقوصاً: منقوص / فهو: هو.

<42> Si on dit : dix que tu divises en deux parties, tu multiplies l'une des deux parties par elle-même et l'autre par racine de huit puis tu retranches le produit de l'une des deux parties par racine de huit du produit de celle qui est multipliée par elle-même ; il reste quarante dirhams.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des deux parties une chose et l'autre dix moins une chose. Tu multiplies dix moins une chose par lui-même, on a cent dirhams plus un *carré* moins vingt choses. Puis tu multiplies une chose par racine de huit, on a la racine de huit *carrés*, que tu retranches de cent dirhams plus un *carré* moins vingt choses. Il reste cent dirhams plus un *carré* moins vingt racines[44] moins la racine de huit *carrés* égal à quarante dirhams. Restaure les cent dirhams et le *carré* par vingt choses et par racine de huit *carrés*, et ajoute-les aux quarante dirhams ; tu auras cent dirhams plus un *carré* égaux à quarante dirhams plus vingt choses plus racine de huit *carrés*. Retranche quarante dirhams de cent dirhams, il reste soixante dirhams plus un *carré* égaux à vingt choses plus la racine de huit *carrés*. Partage les vingt choses et la racine de huit *carrés* en deux moitiés. On a dix plus la racine de deux ; multiplie-le par lui-même, on a cent dirhams plus deux dirhams plus la racine de huit cents. Retranches-en les soixante dirhams qui sont avec le *carré*, il reste quarante-deux dirhams plus racine de huit cents. Sa racine retranchée de dix et de la racine de deux est la partie multipliée par la racine de huit. Et l'autre, ce qui reste de dix, c'est quarante-deux dirhams plus la racine [43^{v}] de huit cents, dont on prend la racine et dont on retranche la racine de deux.

Si tu veux, multiplie la chose par elle-même, on a un *carré* ; et multiplie l'autre partie, qui est dix moins une chose, par la racine de huit ; on a racine de huit cents dirhams moins racine de huit *carrés*. Retranche la racine de huit cents dirhams moins la racine de huit *carrés* du *carré*. Il reste un *carré* plus la racine de huit *carrés* moins la racine de huit cents dirhams égaux à quarante dirhams. Restaure le *carré* et la racine de huit *carrés* par la racine de huit cents dirhams, et ajoute-le aux quarante dirhams. On a quarante dirhams plus la racine de huit cents dirhams égaux à un *carré* plus la racine de huit *carrés*. Partage en deux moitiés la racine de huit *carrés* ;

[44] Ici Abū Kāmil utilise indifféremment « chose » et « racine ».

<٤٢> فإن قال: عشرةٌ تقسمها قسمين فتضرب أحد القسمين في نفسه، والآخر في جذر ثمانية، ثمّ تلقي ما اجتمع من ضرب أحد القسمين في جذر ثمانيةٍ ممّا اجتمع من المضروب في نفسه، فيبقى أربعون درهماً.

قياسه: أن تجعل أحدَ القسمين شيئاً والآخر عشرةً إلاّ شيئاً، فتضرب عشرة إلاّ شيئاً في مثلها فيكون مائةُ درهمٍ ومالٌ إلاّ عشرين شيئاً. ثمّ تضرب شيئاً في جذر ثمانية فيكون جذر ثمانية أموالٍ، فتسقطها من مائةِ درهمٍ ومالٍ إلاّ عشرين شيئاً فيبقى مائة درهمٍ ومالٌ إلاّ عشرين جذراً وإلاّ جذر ثمانية أموالٍ تعدل أربعين درهماً. فاجْبُرْ المائةَ درهمٍ والمالَ بعشرين شيئاً وبجذر ثمانيةِ أموالٍ، وزِدْها على الأربعين درهماً، فيكون معك: مائة درهمٍ ومالٌ تعدل أربعين درهماً وعشرين شيئاً وجذر ثمانية أموالٍ. فألقِ أربعين درهماً من مائة درهمٍ فيبقى: ستون درهماً ومالٌ تعدل عشرين شيئاً وجذر ثمانية أموالٍ. فتنصِّف العشرين شيئاً وجذر ثمانية أموال، فيكون عشرةٍ وجذرَ اثنين، فاضْرِبْه في مثله فيكون مائةَ درهمٍ ودرهمين وجذر ثمانمائة، فألقِ منها الستين درهماً التي مع المال، فيبقى اثنان وأربعون درهماً وجذر ثمانمائة. فجذرُه منقوصاً من عشرة وجذر اثنين هو القسم المضروب في جذر ثمانية، والآخر ما بقي من العشرة: وهو اثنان وأربعون درهماً وجذرُ / ثمانمائة مأخوذٌ جذرُه منقوصٌ منه جذرُ اثنين. ٤٣-ظ

وإن شئت فاضْرِبْ الشيءَ في مثلِه فيكون مالاً واضرب القسمَ الآخرَ وهو عشرة إلاّ شيئاً في جذرِ ثمانيةٍ فيكون جذر ثمانمائة درهمٍ إلاّ جذر ثمانية أموالٍ. فألقِ جذر ثمانمائة درهمٍ إلاّ جذر ثمانية أموالٍ من مالٍ، فيبقى: مالٌ وجذر ثمانية أموالٍ إلاّ جذر ثمانمائة درهمٍ يعدل أربعين درهماً. فاجبر المالَ وجذر ثمانية أموال بجذر ثمانمائة درهمٍ، وزدها على الأربعين درهماً، فيكون أربعين درهماً وجذر ثمانمائة درهمٍ تعدل مالاً وجذرَ ثمانية أموالٍ. فنصِّفْ جذرَ ثمانية أموال فيكون

9 درهماً: درهم — 11 العشرين شيئاً: العشرين الشيء — 13 درهماً: الدرهم — 14 منقوصاً: منقوص — 21 الأربعين درهماً: الأربعين الدرهم.

on a racine de deux, que tu multiplies par elle-même ; on a deux, que tu ajoutes aux quarante dirhams plus la racine de huit cents ; on a quarante-deux dirhams plus la racine de huit cents dirhams ; la racine de cela dont on retranche la racine de deux est la partie multipliée par elle-même.

<43> Si on dit : dix que tu as divisé en deux parties, tu as multiplié l'une des parties par la racine de dix et l'autre par elle-même, elles seront égales.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des deux parties une chose et l'autre dix moins une chose. Tu multiplies une chose par elle-même, on a un *carré*, et tu multiplies dix moins une chose par la racine de dix, on a la racine de mille dirhams moins la racine de dix *carrés* égaux à un *carré*. Restaure la racine de mille dirhams par la racine de dix *carrés*, et ajoute-le au *carré* ; on a un *carré* plus la racine de dix *carrés* égaux à la racine de mille dirhams. Partage en deux moitiés la racine de dix *carrés*, on a la racine de deux et demi ; multiplie-la par elle-même, on a deux plus un demi. Ajoute-le à la racine de mille, on a deux dirhams et un demi plus la racine de mille dirhams. La racine de cela dont on retranche la racine de deux plus un demi est la partie multipliée par elle-même, et l'autre est ce qui reste de dix, c'est-à-dire deux plus un demi plus la racine de mille, dont la racine est retranchée de dix, plus racine de deux plus un demi.

<44> Si on te dit : un *carré* auquel tu ajoutes dix dirhams, puis tu multiplies la somme par la racine de cinq, et on a [44^{r}] le *carré* par lui-même.

On l'infère ainsi : tu poses le *carré*, une chose, à quoi tu ajoutes dix dirhams. On a dix dirhams plus une chose, que tu multiplies par la racine de cinq dirhams ; on a racine de cinq cents dirhams plus racine de cinq *carrés* égales à un *carré*. Partage la racine de cinq *carrés* en deux moitiés ; on a la racine d'un *carré* plus un quart. Multiplie-la par elle-même ; on a un plus un quart. Ajoute-le à la racine de cinq cents dirhams, on a un plus un

جذر اثنين، فاضربه في مثلِه يكُنْ اثنين، فَزِدْه على الأربعين درهماً وجذر ثمانمائة درهمٍ، فيكون اثنين وأربعين درهماً وجذرَ ثمانمائة درهمٍ، فجذر ذلك منقوصاً منه جذر اثنين هو القسمُ المضروب في نفسه.

<٤٣> فإن قيل: عشرةٌ قسمتها قِسمين، فضربت أحدَ القسمين في جذرِ عشرة والآخر في مثله فاستويا.

قياسه: أن تجعل أحدَ القسمين شيئاً والآخرَ عشرة إلاّ شيئاً، فتضرب شيئاً في مثله فيكون مالاً، ثمّ تضرب عشرةً إلاّ شيئاً في جذر عشرةٍ فيكون جذر ألف درهمٍ إلاّ جذر عشرة أموالٍ يعدل مالاً. فاجْبُرْ جذرَ ألف درهمٍ بجذر عشرةِ أموالٍ وزِدْه على المال، فيكونَ مالاً وجذرَ عشرة أموالٍ يعدل جذرَ ألفِ درهمٍ. فنصّف جذرَ عشرة أموالٍ فيكون جذر اثنين ونصفٍ. فاضربه في مثله، فيكون اثنين ونصفاً. فَزِدْه على جذرِ ألفٍ فيكون درهمين ونصفاً وجذر ألف درهمٍ. فجذرُ ذلك منقوصاً منه جذر اثنين ونصف هو القسم المضروب في نفسه، والآخرُ ما بقي من العشرة وهو اثنان ونصف وجذر ألف، مأخوذٌ جذره منقوصٌ من عشرة، وجذر اثنين ونصفٍ.

<٤٤> فإذا قيل لك: مالٌ تزيد عليه عشرةَ دراهمَ ثمّ تضرب ما اجتمع في جذرِ خمسةٍ فيكون / مثل المال في مثله. ٤٤-و

قياسه: أن تجعل المالَ شيئاً فتزيد عليه عشرةَ دراهمَ، فيكون عشرةَ دراهمَ وشيء، تضربه في جذر خمسة دراهم فيكون: جذرُ خمسمائة درهمٍ وجذرُ خمسة أموالٍ يعدل مالاً، فنصِّف جذر خمسة أموالٍ فيكون جذرَ واحدٍ وربعٍ <فاضربه في مثله فيكون واحداً وربعاً> فَزِدْه على جذر خمسمائة درهم فيكون

1 فاضربه في ...اثنين: في الهامش / درهماً: الدرهم — 2 منقوصاً: منقوص — 11 ونصفاً: ونصف — 12 منقوصاً: منقوص — 19 جذر واحدٍ وربع: جذراً واحداً وربع.

quart plus la racine de cinq cents dirhams. La racine de cela, à laquelle on ajoute la racine de un plus un quart, est le *carré*.

<45> Si on te dit : deux *carrés* dont la différence est cinq dirhams, tels que, si tu multiplies le plus grand par dix fois lui-même puis tu prends la racine du produit, il sera égal au plus petit par lui-même.

On l'infère ainsi : tu poses l'un des *carrés* une chose et l'autre une chose moins cinq dirhams. Tu multiplies le plus grand, qui est une chose, par dix fois elle-même ; on a dix *carrés*. La racine de dix *carrés* est donc égale à vingt-cinq dirhams plus un *carré* moins dix racines. Restaure les vingt-cinq dirhams et le *carré* par les dix choses et ajoute-les à la racine de dix *carrés* ; on aura racine de dix *carrés* plus dix choses égal à un *carré* plus vingt-cinq dirhams. Partage les dix choses et la racine de dix *carrés* en deux moitiés ; on aura cinq plus racine de deux et demi ; multiplie-le par lui-même, on a vingt-sept plus un demi, plus la racine de deux cent cinquante. Retranches-en le vingt-cinq qui est avec le *carré*, il reste deux dirhams et demi plus la racine de deux cent cinquante. La racine de cela à laquelle est ajouté cinq plus la racine de deux plus un demi est le plus grand *carré*. Le *carré* le plus petit lui est inférieur de cinq ; ce qui est deux dirhams plus un demi plus la racine de deux cent cinquante, dont on prend la racine à laquelle on ajoute la racine de deux dirhams plus un demi.

<46> Si on dit : un *carré* que tu multiplies par deux fois lui-même ; puis tu prends la racine du produit, à quoi tu ajoutes deux dirhams ; puis tu le multiplies par le *carré*, on a trente dirhams.

On l'infère ainsi : tu poses le *carré* une chose et tu le multiplies par deux fois lui-même, on a deux *carrés*. Puis tu multiplies deux dirhams plus la racine de deux *carrés* par une chose, on a deux choses plus la racine des deux *carrés-carrés* égaux à trente dirhams. Ramène toute chose que tu as à un *carré*, et cela en multipliant la racine des deux *carrés-carrés* par la

واحداً وربعاً وجذر خمسمائة درهمٍ، فجذر ذلك مزاداً عليه جذر واحدٍ وربعٍ هو المالُ.

<٤٥> فإن قيل لك: مالان بينهما خمسة دراهم، ضربت الكثير في عشرة أمثاله، ثمّ تأخذ جذر ما اجتمع، فيكون مثل القليل في نفسه.

قياسُه: أن تجعل أحد المالين شيئاً والآخر شيئاً إلاّ خمسة دراهم، فتضرب الكثير – وهو شيءٌ – في عشرةِ أمثالِه فيكون عشرة أموالٍ. فجذرُ عشرةِ أموال يعدل خمسةً وعشرين درهماً ومالاً إلاّ عشرة أجذارٍ. فاجبُر الخمسةَ والعشرين درهماً والمال بالعشرة الأشياء وزِدْها على جذرِ عشرة أموالٍ، فيكون: جذرُ عشرةِ أموالٍ وعشرة أشياء يعدل مالاً وخمسة وعشرين درهماً. فنصِّف العشرة الأشياء وجذرَ عشرة أموالٍ فيكون خمسة وجذر اثنين ونصفٍ. فاضربه في مثله فيكون سبعة وعشرين ونصفاً، وجذر مائتين وخمسين. فألقِ منها الخمسةَ والعشرين التي مع المال فيبقى درهمان ونصفٌ وجذر مائتين وخمسين، فجذر ذلك مُزاداً عليه خمسةٌ وجذرُ اثنين ونصف، هو المالُ الأكثر، والمالُ الأقل أقلُّ منه بخمسةٍ، وهو درهمان ونصفٌ وجذر مائتين وخمسين مأخوذٌ جذرُه مُزادٌ على جذر درهمين ونصفٍ.

<٤٦> فإن قال: مالٌ تضربه في مِثْلَيْه، ثمّ تأخذ جذرَ ما اجتمع فتزيد عليه درهمين، ثمّ تضربه في المال فيكون ثلاثين درهماً.

قياسه: أن تجعل المالَ شيئاً فتضربه في مِثْلَيْه فيكون مالين، ثمّ تضرب درهمين وجذر مالين في شيءٍ فيكون شيئين وجذر مالَيْ مالٍ يعدل ثلاثين درهماً. فارْدُدْ كلّ شيءٍ معك إلى مالٍ، وهو أن تضربَ جذر مالَيْ مال في جذر

1 مزاداً: مزاد، وهي اسم مفعول من "أزاد" وهو استعمال بعض الرياضيين منذ القرن الثالث للهجرة – 2 هو: وهو – 7 أجذار: كتبها احدا؛ وتعني هنا أشياء / والعشرين: وعشرين – 13 مزاداً: مزاد / الأكثر: الأكبر. وبدلناها لأنّه يجري على مقابلة الأكبر بالأصغر، والأكثر بالأقلّ – 18 مثليه: مثله.

racine d'un demi-dirham [44^{v}], afin d'avoir un *carré*. Cela est en effet devenu ainsi, car le *carré* est la racine du *carré-carré*, et les deux racines du *carré-carré*, si tu les multiplies par la racine d'un demi-dirham, on obtient la racine du *carré-carré*. Mais la racine du *carré-carré* est un *carré*. Tu multiplies donc tout ce que tu as par la racine d'un demi-dirham. Tu multiplies la racine d'un demi-dirham par la racine des deux *carrés-carrés*, on a un *carré*. Puis tu multiplies deux choses par la racine d'un demi-dirham, on a la racine de deux *carrés*, car si tu multiplies deux choses par elles-mêmes, on a quatre *carrés*. Puis tu multiplies quatre *carrés* par un demi-dirham, on a deux *carrés* ; la racine de cela est la racine d'un demi-dirham par deux choses. Tu multiplies ensuite trente dirhams par la racine d'un demi, on a la racine de quatre cent cinquante. Tu additionnes ensuite tout cela, on a un *carré* plus la racine de deux *carrés* égaux à quatre cent cinquante. Partage en deux moitiés la racine des deux *carrés*, on a la racine d'un demi. Multiplie-la par elle-même, on a un demi. Ajoute-le à la racine de quatre cent cinquante, on a alors un demi-dirham plus la racine de quatre cent cinquante. La racine de cela, dont on retranche la racine d'un demi-dirham, est le *carré*.

<47> Si on te dit : tu divises dix en deux parties, tu divises chacune des deux parties par l'autre et tu les additionnes, on a la racine de cinq dirhams.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des deux parties une chose et l'autre dix moins une chose. Multiplie donc chacune d'elles par elle-même et additionne-les. On a cent dirhams plus deux *carrés* moins vingt choses. Retiens-le. Multiplie ensuite l'une des deux parties par l'autre, ce qui est une chose par dix moins une chose. On a dix choses moins un *carré*. Multiplie-le par la racine de cinq. On a la racine de cinq cents *carrés* moins la racine de cinq *carrés-carrés* égaux à cent dirhams plus deux *carrés* moins vingt racines. Restaure la racine de cinq cents *carrés* par la racine de cinq *carrés-carrés* et ajoute-le aux cent dirhams plus deux *carrés* moins vingt choses. Restaure les cent dirhams et les deux *carrés* moins vingt choses par les vingt choses et ajoute-le à la racine de cinq cents *carrés*. On a vingt choses plus la racine de cinq cents *carrés* égales à cent dirhams plus deux *carrés* [45^{r}] plus la racine de cinq *carrés-carrés*. Ramène tout ce que tu as à

نصف / درهمٍ حتى يكون مالاً. وإنّما صار هذا هكذا لأنّ المالَ جذرُ مالِ مال، ٤٤-ظ
وجذرا مالِ مالٍ إذا ضربتَه في جذرِ نصفِ درهمٍ خرج جذرُ مالِ مالٍ. وجذرُ
مالِ مالٍ هو مالٌ. فتضربُ كلّ ما معك في جذرِ نصف درهمٍ. فتضرب جذرَ
نصفِ درهمٍ في جذر مالَيْ مالٍ فيكون مالاً. ثمّ تضرب شيئين في جذرِ نصفِ
درهمٍ فيكون جذر مالين، لأنّك تضرب شيئين في مثليهما فيكون أربعة أموال.
ثمّ تضرب أربعةَ أموالٍ في نصف درهمٍ فيكون مالين. فجذرُ ذلك هو جذرُ
نصفِ درهمٍ في شيئين. ثمّ تضرب ثلاثين درهماً في جذرِ نصفٍ، فيكون جذر
أربعمائة وخمسين. ثمّ تجمع ذلك فيكون: مالٌ وجذر مالين يعدل أربعمائة
وخمسين، فنصِّف جذرَ مالين فيكون جذر نصفٍ، فاضربه في مثلِهِ فيكون نصفاً.
فَزِدْه على جذرِ أربعمائةٍ وخمسين، فيكون نصف درهمٍ وجذر أربعمائة
وخمسين، فجذرُ ذلك منقوصٌ منه جذرُ نصف درهمٍ هو المال.

<٤٧> إذا قيل لك: عشرةٌ قسمتها قسمين، فقسمتَ كلّ واحد من القسمين على الآخر وجمعتَهما، فكان جذر خمسة دراهمٍ.

قياسه: أن تجعل أحدَ القسمين شيئاً والآخرَ عشرةً إلاّ شيئاً. فاضرب كلّ
واحدٍ منهما في مثلِهِ واجمعهما، فيكون مائةَ درهم ومالين إلاّ عشرين شيئاً
فاحفظه. ثمّ اضرب أحد القسمين في الآخر، وهو شيء في عشرة إلاّ شيئاً،
فيكون عشرة أشياء إلاّ مالاً. فاضربها في جذرِ خمسةٍ فيكون: جذرُ خمسمائة
مالٍ إلاّ جذر خمسة أموالِ مالٍ يعدل مائةَ درهمٍ ومالين إلاّ عشرين جذراً. فاجْبُر
جذرَ خمسمائة مالٍ بجذرِ خمسةِ أموالِ مالٍ وزدها على مائة درهم ومالين إلاّ
عشرين شيئاً، واجبُر المائة درهمٍ والمالين إلاّ عشرين شيئاً بالعشرين شيئاً وزِدْها
على جذرِ خمسمائةِ مالٍ، فيكون عشرين شيئاً وجذرَ خمسمائة مالٍ تعدل مائةَ
درهمٍ ومالين / وجذرَ خمسة أموال مالٍ. فَرُدَّ كلّ شيءٍ معك إلى مالٍ واحدٍ، ٤٥-و

2 وجذرا: وجذري — 5 مثليهما: مثلها — 11 منقوص: منقوصاً.

un seul *carré*, et cela en multipliant les deux *carrés* et la racine de cinq *carrés-carrés* par la racine de cinq dirhams moins deux dirhams. Tu le multiplies en effet par la racine de cinq dirhams moins deux dirhams car, si tu divises un dirham par deux plus racine de cinq, alors il revient à chacun la racine de cinq moins deux dirhams. Or nous avons montré cela. Tu multiplies donc toute chose que tu as par la racine de cinq dirhams moins deux dirhams. On a donc un *carré* plus la racine de cinquante mille dirhams moins deux cents dirhams égaux à dix choses. Partage donc les choses en deux moitiés, on a cinq ; multiplie-le par lui-même, on a vingt-cinq dirhams ; enlèves-en la racine de cinquante mille dirhams moins deux cents dirhams, il reste deux cent vingt-cinq dirhams moins la racine de cinquante mille. La racine de cela, retranchée de cinq, est l'une des parties, et ajoutée à cinq, elle est l'autre partie.

Si tu veux, calcule-le d'une autre manière, et cela en divisant la racine de cinq en deux parties dont le produit de l'une par l'autre est un dirham. Pose l'une des deux parties une chose et l'autre la racine de cinq moins une chose. Tu multiplies l'une par l'autre, on a la racine de cinq *carrés* moins un *carré* égaux à un dirham. Restaure la racine de cinq *carrés* par le *carré* et ajoute-le au dirham ; on a un *carré* plus un dirham égaux à la racine de cinq *carrés*. Partage la racine de cinq *carrés* en deux moitiés ; on a la racine de un plus un quart. Multiplie-la par elle-même, on a un plus un quart. Retranches-en le dirham, il reste un quart. Prends sa racine, on a un demi. Enlève-la de la racine de un plus un quart, il reste la racine de un plus un quart moins un demi-dirham. C'est ce qu'on cherchait.

Nous avons montré que pour les choses qui appartiennent aux trois modes combinés, si on multiplie la moitié par elle-même, alors le produit est un nombre – les racines des *carrés* sont des choses. Si donc tu prends la moitié et tu la multiplies par elle-même, tu as un nombre. Tu reviens ensuite au commencement du problème, tu poses l'une des deux parties une chose et l'autre dix moins une chose et tu divises dix moins une chose par une chose ; on obtient, d'après ce que nous avons montré, la racine de un plus un quart moins un demi-dirham que tu multiplies par une chose ; on a

وهو أن تضرب المالين وجذر خمسة أموال مالٍ في جذرِ خمسة دراهمَ إلا درهمين. وإنّما ضربته في جذر خمسة دراهمَ إلاّ درهمين، لأنّك إذا قسمت درهماً على اثنين وجذر خمسةٍ، أصاب الواحدَ جذر خمسة إلاّ درهمين. وقد بيّنا ذلك. فتضرب كلّ شيء معك في جذر خمسة دراهم إلاّ درهمين، فيكون: مالاً وجذرَ خمسين ألف درهمٍ إلاّ مائتي درهمٍ يعدل عشرةَ أشياءَ. فنصِّف الأشياء فيكون خمسة، فاضربها في مثلها فيكون خمسةً وعشرين درهماً. فأسقط منها جذر خمسين ألف درهمٍ إلاّ مائتي درهم فيبقى مائتان وخمسةٌ وعشرون درهماً إلاّ جذر خمسين ألفاً. فجذرُ ذلك منقوصاً من [جذر] خمسةٍ هو أحد القسمين ومزاداً على خمسة هو القسم الآخر.

وإن شئت فاحسبها بالوجه الآخر، وهو أن تقْسم جذر خمسة بقسمين يكون أحدهما في الآخر درهماً، واجعل أحد القسمين شيئاً والآخر جذر خمسةٍ إلاّ شيئاً. فتضرب أحدهما في الآخر فيكون جذر خمسة أموال إلاّ مالاً يعدل درهماً. فاجبر جذرَ خمسة أموالٍ بالمالِ وزِدْه على الدرهم فيكون: مالاً ودرهماً يعدل جذر خمسةِ أموالٍ. فنصِّف جذرَ الخمسةِ الأموالِ فيكون جذر واحدٍ وربعٍ فاضربه في مثلِه فيكون: واحد وربع فألقِ منه الدرهمَ فيبقى رُبعٌ، فَخُذْ جذرَه فيكون نصفاً، فأسقطه من جذر واحدٍ وربعٍ فيبقى جذرُ واحدٍ وربعٍ إلاّ نصف درهمٍ وهو المطلوب.

وقد بيّنّا أنّ الأشياء التي في الثلاثة الضروب المقرونة، إذا ضُرِب نصفها في مثله، كان الذي يجتمع من الضَرْب عددٌ، وجذور الأموال هي أشياء، فإذا أخذت نصفَه وضربته في مثلِه كان عدداً. ثمّ ترجع إلى أوّل المسألة، فتجعل أحدَ القسمين شيئاً والآخر عشرةً إلاّ شيئاً، فتقسم عشرةً إلاّ شيئاً على شيء فيخرج على ما بيّنا جذرُ واحدٍ وربع إلاّ نصف درهمٍ. فتضربه في شيء فيكون: جذر

7 خمسين: خمسة – 8 منقوصًا: منقوص – 9 ومزادًا: ومزاد – 13 ودرهماً: ودرهم – 16 فيكون: فوق السطر – 15 فيكون: واحد وربع، على اعتبار أن "كان" تامة، ولن نشير إلى مثلها – 19 كان: ان / الضرب: الضروب.

la racine d'un *carré* [45^{v}] plus un quart de *carré* moins une demi-chose égaux à dix moins une chose. Restaure la racine du *carré* plus un quart de *carré* par la moitié d'une chose et ajoute-la à dix moins une chose ; on a dix moins une demi-chose égaux à la racine du *carré* plus un quart de *carré*. Multiplie dix moins une demi-chose par lui-même, on a cent dirhams plus un quart de *carré* moins dix racines, égaux à un *carré* plus un quart de *carré*. Restaure les cent dirhams plus le quart de *carré* par les dix choses, ajoute-les au *carré* plus un quart <de *carré*> et retranche un quart de *carré* par un quart de *carré* ; on aura un *carré* plus dix racines égaux à cent dirhams. La chose égale donc la racine de cent vingt-cinq dirhams moins cinq dirhams ; c'est l'une des deux parties et l'autre partie est le reste de dix, c'est-à-dire quinze moins la racine de cent vingt-cinq dirhams.

Si tu veux, calcule-le de l'autre manière, et cela en posant l'une des deux parties une chose et l'autre dix moins une chose. Divise dix dirhams moins une chose par une chose. On obtient un dinar. Lorsque tu multiplies un dinar par une chose, on a dix moins une chose. Divise ensuite une chose par dix moins une chose, on a la racine de cinq moins un dinar. Lorsque tu multiplies la racine de cinq moins un dinar par dix moins une chose, on a une chose. Tu multiplies la racine de cinq dirhams moins un dinar par dix moins une chose. On a dix dirhams moins une chose, plus la racine de cinq cents dirhams, moins la racine de cinq *carrés*, moins dix dinars, égaux à une chose. Restaure-les par les dix dinars et ajoute-les à la chose. On a une chose plus dix dinars égaux à dix dirhams moins une chose, plus la racine de cinq cents dirhams moins la racine de cinq *carrés*. Retranches-en une chose, il reste dix dirhams moins deux choses plus la racine de cinq cents dirhams moins la racine de cinq *carrés* égaux à dix dinars. Le dinar est donc égal à un dirham, plus la racine de cinq dirhams, moins le cinquième d'une chose, moins la racine de la moitié d'un dixième de *carré*. Tu reprends et tu dis : nous avons divisé dix dirhams moins une chose par une chose ; on a obtenu un dirham, plus la racine de cinq dirhams, moins le cinquième d'une chose, moins la racine de la moitié d'un dixième de *carré*. Lorsque nous le multiplions par une chose, on a dix dirhams moins une chose. Nous multiplions un dirham, plus la racine de cinq dirhams, moins le cinquième d'une chose, moins la racine de la moitié d'un dixième de

[مائة] مالٍ / وربع مالٍ إلاّ نصف شيءٍ يعدل عشرةً إلاّ شيئاً. فاجْبُر جذرَ مالٍ ٤٥-ظ
وربع مالٍ بالنصف شيءٍ وزِدْه على عشرة إلاّ شيئاً فيكون: عشرةٌ إلاّ نصفَ شيءٍ يعدلُ جذرَ مالٍ ورُبْعَ مال، فاضرب عشرة إلاّ نصف شيءٍ في مثلها فيكون: مائةُ درهمٍ وربعُ مالٍ إلاّ عشرةَ أجذارٍ تعدل مالاً وربعاً. فاجْبُر المائةَ درهمٍ والربعَ مالٍ بالعشرةِ أشياءَ وزِدْها على المالِ وربع، وأَلْقِ ربعَ مالٍ بربع مالٍ، فيكون مالاً وعشرة أجذار تعدل مائةَ درهمٍ، فالشيءُ يعدلُ جذرَ مائةٍ وخمسةٍ وعشرين درهماً إلاّ خمسة دراهم، وهو أحد القسمين، والقسم الآخر باقي العشرة وهو خمسة عشر إلاّ جذر مائة وخمسة وعشرين درهماً.

فإن شئت فاحسبها في الوجه الآخر: وهو أن تجعل أحد القسمين شيئاً والآخر عشرة إلاّ شيئاً. فتقسم عشرة دراهم إلاّ شيئاً على شيءٍ، فيخرج ديناراً، ثمّ تقسم شيئاً على عشرةٍ إلاّ شيئاً، فيخرج جذرُ خمسةٍ إلاّ ديناراً. فمتى ضربت جذرَ خمسةٍ إلاّ ديناراً في عشرةٍ إلاّ شيئاً كان شيئاً. فتضرب جذرَ خمسة دراهم إلاّ ديناراً في عشرة إلاّ شيئاً، فيكون عشرة دراهم إلاّ شيئاً وجذر خمسمائة درهم إلاّ جذر خمسة أموالٍ وإلاّ عشرة دنانير يعدل شيئاً. فاجْبُرْها بالعشرةِ الدنانير وزِدْها على الشيءِ فيكون: شيئاً وعشرة دنانير تعدل عشرة دراهم إلاّ شيئاً وجذر خمسمائة درهم إلاّ جذر خمسة أموالٍ. فألْقِ شيئاً منها فيبقى عشرة دراهم إلاّ شيئين وجذر خمسمائة درهم إلاّ جذر خمسة أموال تعدل عشرةَ دنانيرَ. فالدينارُ يعدل درهماً وجذر خمسة دراهم إلاّ خُمْس شيءٍ وإلاّ جذر نصف عُشْرِ مالٍ. ثمّ ترجع فتقول: قسمنا عشرة دراهم إلاّ شيئاً على شيءٍ، فخرج درهمٌ وجذرُ خمسة دراهمَ إلاّ خُمْس شيءٍ وإلاّ جذر نصفِ عُشْرِ مالٍ. فمتى ضربناه في شيء كان عشرة دراهم إلاّ شيئاً. فنضرب درهماً وجذر خمسة دراهم إلاّ خُمْس شيء وإلاّ

12 فمتى ضربت ... ديناراً: في الهامش– 18 درهماً: درهم.

carré, par une chose ; on a une chose plus la racine de cinq *carrés* [46r] moins le cinquième du *carré* moins la racine d'un demi-dixième de *carré-carré* égaux à dix dirhams moins une chose. Restaure par le cinquième de *carré* et par la racine d'un demi-dixième de *carré-carré* et ajoute-les à dix dirhams moins une chose. Restaure les dix dirhams par la chose et ajoute-la à une chose plus la racine de cinq *carrés* ; on a deux choses plus la racine de cinq *carrés* égaux à dix dirhams, un cinquième de *carré* et la racine d'un demi-dixième de *carré-carré*. Complète ton *carré* afin que ce soit un *carré* parfait. Pour le compléter, multiplie-le par la racine de cinq cents dirhams moins vingt dirhams. Tu multiplies toute chose que tu as par la racine de cinq cents dirhams moins vingt dirhams. On a dix choses égales à un *carré* plus la racine de cinquante mille dirhams moins deux cents dirhams. Partage les choses en deux moitiés, on a cinq ; multiplie-le par lui-même, on a vingt-cinq ; retranches-en donc la racine de cinquante mille moins deux cents dirhams, il reste deux cent vingt-cinq dirhams moins la racine de cinquante mille. La racine de cela, retranchée de cinq, est l'une des deux parties, et la racine de deux cent vingt-cinq dirhams moins la racine de cinquante mille est la racine de cent vingt-cinq dirhams moins dix dirhams ; retranche-le de cinq, il reste quinze dirhams moins la racine de cent vingt-cinq, ce qui est l'une des deux parties ; et l'autre, ce qui reste de dix, c'est-à-dire la racine de cent vingt-cinq dirhams moins cinq dirhams.

<48> Si on te dit : tu divises dix en deux parties et tu divises chacune d'elles par l'autre. Tu multiplies ensuite chacun des quotients de l'une par l'autre par lui-même, et on a trois dirhams. Or tu sais que le produit de l'une des parties obtenues dans la division de chacune des deux parties de dix par l'autre est toujours un dirham ; et ce produit par l'autre, deux fois, est deux dirhams. Tu ajoutes donc les deux dirhams aux trois, on a cinq. Il est donc clair, d'après la description d'Euclide[45], que le produit <de la somme> des deux quotients – obtenus de la division de chacune des deux

[45] *Éléments*, II.4.

جذر نصف عُشْرِ مالٍ في شيء، فيكون شيئاً وجذر خمسة أموال / إلاّ خُمْس ٤٦-و
مالٍ وإلاّ جذر نصف عُشرِ مالِ مالٍ تعدل عشرةَ دراهم إلاّ شيئاً. فاجْبُر بخُمْسِ
مالٍ وبجذر نصفِ عشْرِ مالِ مالٍ وزِدْه على عشرةِ دراهمَ إلاّ شيئاً. واجْبُر
العشرةَ دراهم بالشيء وزِدْه على شيءٍ وجذر خمسةِ أموالٍ، فيكون شيئين
وجذر خمسة أموال تعدل عشرةَ دراهمَ وخُمْس مالٍ وجذرَ نصفِ عُشْرِ مالِ
مالٍ. فأكمل مالك حتى يكون مالاً تاماً. وإكمالُك إيّاه أن تضربه في جذرِ
خمسمائةِ درهمٍ إلاّ عشرين درهماً. فتضرب كلّ شيءٍ معك في جذرِ خمسمائةِ
درهمٍ إلاّ عشرين درهماً، فيكون: عشرة أشياء تعدل مالاً وجذرَ خمسين ألف
درهمٍ إلاّ مائتي درهمٍ. فنصِّف الأشياء فتكون خمسةً، فاضربها في مثلها فتكون
خمسة وعشرين، فأسقط منها جذر خمسين ألفاً إلاّ مائتي درهمٍ فيبقى مائتان
وخمسة وعشرون درهماً إلاّ جذر خمسين ألفاً. فجذرُ ذلك منقوصاً من خمسة هو
أحد القسمين، وجذر مائتين وخمسة وعشرين درهماً إلاّ جذر خمسين ألفاً هو
جذر مائة وخمسة وعشرين درهماً إلاّ عشرة دراهم، فأنْقِصه من خمسة، فيبقى
خمسة عشر درهماً إلاّ جذر مائة وخمسة وعشرين، وهو أحدُ القِسْمين، والآخر
ما بقي من العشرة، وهو جذر مائة وخمسة وعشرين درهماً إلاّ خمسة دراهمَ.

<٤٨> فإن قيل لك: عشرةٌ قسمتَها قسمين، وقسمتَ كلّ واحد منهما
على الآخر، ثمّ ضربتَ كلّ واحدٍ من القَسْمين اللذين خرجا من قِسمة كلّ
واحدٍ منهما على الآخر في مِثْلِه فكان ثلاثة دراهم، وقد علمت أنّ ضربَ أحد
القَسْمَين – اللذين خرجا من قسمة كلّ واحدٍ من قسمي العشرة على الآخر –
في الآخر درهم أبداً، فضربه في الآخر مرّتين درهمان، فتزيد الدرهمين على الثلاثة
فتكون خمسةً. فبيِّنٌ ممّا وصف أقليدس أنّ ضربَ القَسْمين – اللذين خرجا من

2 وإلاّ: "الا" فوق السطر – 5 عشرة: عشر – 11 وعشرون: وعشرين / منقوصاً: منقوص – 12 وخمسة: خمسة – 13 وخمسة: خمسة – 20 درهمان: درهمين – 21 أقليدس: *الأصول*، الشكل الرابع من المقالة الثانية (انظر هامش ص. 291).

parties de dix par l'autre – par elle-même est cinq dirhams. [46^{v}] La racine des deux quotients est donc la racine de cinq dirhams. C'est comme si on disait : tu divises dix en deux parties et tu divises chacune d'elles par l'autre, on obtient la racine de cinq dirhams. Or j'ai expliqué ce problème.

<49> Si on dit : tu divises dix en deux parties et tu divises chacune d'elles par l'autre. Puis tu retranches le quotient du plus petit par le plus grand du quotient du plus grand par le plus petit ; il reste cinq sixièmes de dirham.

On l'infère ainsi : tu poses le quotient du plus petit par le plus grand, une chose, et tu l'ajoutes aux cinq sixièmes de dirham ; on a donc une chose plus cinq sixièmes de dirham, c'est le quotient du plus grand par le plus petit. Tu le multiplies par une chose ; on a un *carré* plus cinq sixièmes d'une chose égaux à un dirham. Or nous avons montré précédemment dans notre livre ce problème par un autre procédé. Si tu veux, fais-le par l'autre procédé.

<50> Si on te dit : tu divises dix en deux parties et tu divises chacune par l'autre. Puis tu multiplies chacun des quotients par lui-même. Puis tu retranches le plus petit du plus grand, il reste deux dirhams.

On l'infère ainsi : tu poses le quotient du plus petit par le plus grand égal à une chose. Tu le multiplies par lui-même, on a un *carré*, que tu ajoutes aux deux dirhams ; on a un *carré* et deux dirhams. Il est clair, d'après ce que nous avons décrit, que le produit du quotient du plus grand par le plus petit par lui-même est un *carré* plus deux dirhams. Tu multiplies donc un *carré* par un *carré* plus deux dirhams ; on a un *carré-carré* plus deux *carrés* égaux à un dirham, car nous avons montré que l'un par l'autre est un dirham. Mais le produit du carré de l'un par le carré de l'autre est égal au dirham par lui-même ; et le produit du dirham par lui-même est un dirham. Partage donc les deux *carrés* en deux moitiés, on a un. Multiplie-le

قِسمة كلّ واحدٍ من قسمي العشرة على الآخر– في مثله، خمسةُ دراهم / فهما ٤٦-ظ
إذاً جذر خمسة دراهم. فكأنه قال: عشرةٌ قسمتها قسمين، فقسمت كلّ واحدٍ منهما على الآخر فخرج جذر خمسة دراهم. وقد شرحت هذه المسألة.

<٤٩> فإن قال: عشرة قَسَمْتَها قسمين، فقسَمَت كلّ واحدٍ منهما على الآخر، ثمّ ألقيت الذي خرج من قسمة القليلِ على الكثيرِ من الذي خرج من قسمةِ الكثير على القليل، فبقي خمسة أسداس درهمٍ.

قياسه: أن تجعل ما خرج <من> قسمةِ القليلِ على الكثير شيئاً، فتزيده على الخمسة الأسداس درهمٍ، فيكون شيئاً وخمسةَ أسداسِ درهمٍ، وهو ما يخرج من قسمةِ الكثيرِ على القليلِ. فتضربه في شيءٍ فيكون مالاً وخمسة أسداسِ شيءٍ يعدل درهماً. فقد بيّنا هذه المسألة فيما تقدّم من كتابنا بغير هذا العمل. وإن أحببت فاعملها بالعملِ الآخر.

<٥٠> فإن قيل لك: عشرةٌ قسمتها قسمين، فقسمت كلّ واحدٍ على الآخر، ثمّ ضربت كلّ واحدٍ من القسمين اللذين خرجا من قسمةِ كلّ واحدٍ منهما على الآخر في مثله، وألقيت الأقلّ من الأكثرِ فبقي درهمان.

قياسه: أن تجعل ما خرج من قسمةِ الأقلّ على الأكثر شيئاً، فتضربه في مثله فيكون مالاً، فتزيده على الدرهمين فيكون مالاً ودرهمين. فبيِّنٌ ممّا وصفنا أنّ ضربَ ما يخرج من قسمةِ الكثيرِ على القليلِ في مثله مال ودرهمان. فتضرب مالاً في مالٍ ودرهمين، فيكون مالَ مالٍ ومالَيْن تعدل درهماً، لأنّا قد بيّنا أنّ أحدهما في الآخر درهم. وضرب مربّع أحدِهما في مربّعِ الآخر مثل الدرهم في مثله، وضرب الدرهم في مثله درهم. فنصِّف المالين فيكون واحداً، فاضربه في مثله

1 ضرب القسمين ... في مثله: المقصود ضرب مجموع القسمين في نفسه – 9 الكثير على القليل: القليل على الكثير. ولكنّ الناسخ وضع فوق "القليل" كلمة "مقدم" وفوق الكثير كلمة "مؤخر" / شيْ: مال – 17 ودرهمان: ودرهمين.

par lui-même, on a un. Ajoute-le au dirham, on a deux. Si donc on prend la racine de deux, dont on retranche un, et qu'on prend la racine de ce qui reste, c'est le quotient du plus petit [47r] par le plus grand. Tu reviens ensuite au début du problème et tu dis : nous avons divisé dix dirhams moins une chose par une chose ; on a obtenu la racine de deux, dont on retranche un, et on prend la racine de ce qui reste ; nous le multiplions alors par une chose. Si tu veux cela, multiplie dix moins une chose par lui-même, on a cent dirhams plus un *carré* moins vingt choses ; multiplie une chose par elle-même, on a un *carré* ; et multiplie la racine de deux, dont on retranche un et dont on prend la racine du reste, par lui-même, on a la racine de deux dont on retranche un. Tu dis ensuite : nous avons divisé cent dirhams plus un *carré* moins vingt choses par un *carré* ; on a obtenu la racine de deux diminuée de un. Multiplie ceci par un *carré* ; on a la racine de deux *carrés-carrés*, diminuée d'un *carré*, égale à cent dirhams plus un *carré* moins vingt choses. Réduis par ceci, et cela en restaurant les cent dirhams et le *carré* par vingt choses, que tu ajoutes à la racine des deux *carrés-carrés*. Tu restaures la racine des deux *carrés-carrés* par le *carré*, tu l'ajoutes aux cent dirhams plus un *carré* et tu retranches la racine de deux *carrés-carrés* de cent dirhams plus deux *carrés* ; on a cent dirhams plus deux *carrés* moins la racine de deux *carrés-carrés*, égaux à vingt racines. Ramène tout ce que tu as à un *carré*, et cela en multipliant tout ce que tu as par un plus la racine d'un demi. Tu multiplies deux *carrés* moins la racine de deux *carrés-carrés* par un dirham plus la racine de la moitié du dirham ; on a un *carré* ; puis tu multiplies vingt choses par un dirham plus la racine d'un demi-dirham, on a vingt choses plus la racine de deux cents *carrés*. Tu multiplies ensuite cent dirhams par un dirham plus la racine d'un demi-dirham, on a cent dirhams plus la racine de cinq mille dirhams. Tu additionnes cela, on a un *carré* plus cent dirhams plus la racine de cinq mille dirhams égaux à vingt choses plus la racine de deux cents *carrés*. Partage en deux moitiés vingt choses plus la racine de deux cents *carrés*, on a dix plus la racine de cinquante. Multiplie-le par lui-même, on a cent cinquante dirhams plus la racine de vingt mille. Retranches-en cent dirhams et la racine de cinq mille dirhams, il reste cinquante dirhams plus la racine

فيكون واحداً. فزِدْه على الدرهم فيكون اثنين، فجذرُ اثنين، منقوص منه واحدٌ، مأخوذ جذرُ ما بقي، هو ما يخرج من قسمة القليلِ / على الكثير. ثمّ ترجع إلى ٤٧-و
أوّل المسألة، فتقول: قسمنا عشرة دراهم إلاّ شيئاً على شيءٍ فخرج جذرُ اثنين، منقوصٌ منه واحدٌ، مأخوذٌ جذرُ ما بقي، فنضربه في شيء. فإذا أردت ذلك، فاضرب عشرة إلاّ شيئاً في مثله فتكون مائة درهمٍ ومالاً إلاّ عشرين شيئاً، واضرب شيئاً في مثله فيكون مالاً، واضرب جذرَ اثنين منقوصاً منه [جذر] واحدٌ، مأخوذاً جذرُ ما بقي في مثله، فيكون جذرُ اثنين منقوصٌ منه واحدٌ. ثمّ تقول: قسمنا مائة درهم ومالاً إلاّ عشرين شيئاً على مالٍ فخرج جذر اثنين منقوصٌ منه واحدٌ، فاضربه في مال فيكون: جذرُ مالَي مالٍ منقوصٌ منه مالٌ يعدل مائة درهم ومالاً إلاّ عشرين شيئاً. فقابل به، وهو أنْ تجبُر المائة درهمٍ والمال بعشرين شيئاً وتزيدها على جذر مالَيْ مال، وتجبُر جذر مالَيْ مالٍ بالمالِ، وتزيده على مائة درهمٍ ومال، وتلقي جذر مالَيْ مالٍ من مائة درهمٍ ومالين، فيكون: مائةَ درهمٍ ومالين إلاّ جذرَ مالَيْ مالٍ تعدِلُ عشرين جذراً. فَرُدّ كلّ شيءٍ معك إلى مالٍ، وهو أن تضرب كلّ شيءٍ معك في واحد وجذر نصف واحدٍ. فتضرب مالين إلاّ جذر مالَيْ مالٍ في درهمٍ وجذر نصف درهمٍ، فيكون مالاً؛ ثمّ تضرب عشرين شيئاً في درهمٍ وجذر نصفِ درهمٍ، فيكون عشرين شيئاً وجذر مائتي مال؛ ثمّ تضرب مائةَ درهمٍ في درهمٍ وجذر نصف درهمٍ، فيكون مائة درهمٍ وجذر خمسة آلاف درهم. فتجمع ذلك فيكون مالٌ ومائة درهمٍ وجذر خمسة آلاف درهم يعدل عشرين شيئاً وجذر مائتي مال. فنصِّف عشرين شيئاً وجذر مائتي مالٍ، فيكون عشرة وجذر خمسين. فاضربه في مثله، فيكون مائة وخمسين درهماً وجذر عشرين ألفاً. فانقص منه مائةَ درهمٍ وجذر خمسة آلاف درهمٍ فيبقى خمسون درهماً وجذر خمسة آلاف درهمٍ، فجذر ذلك

6 منقوصاً: منقوص — 7 مأخوذاً: مأخوذ — 20 مائتي: مائتين.

de cinq mille dirhams. La racine de cela retranchée [47v] de dix plus la racine de cinquante est le plus grand quotient. Et le plus petit quotient est le reste de dix.

Si tu veux, calcule-le de cette autre manière : on sait que les carrés <des quotients> des deux parties de dix divisées chacune par l'autre, si on retranche le plus petit du plus grand, le reste est deux dirhams. Car, pour tout nombre divisé par un nombre, si tu multiplies le quotient par lui-même, alors le produit est égal au quotient du produit du dividende par lui-même par le produit du diviseur par lui-même. Posons alors le quotient du carré du plus grand par le carré du plus petit deux dirhams plus une chose, et le quotient du carré du plus petit par le carré du plus grand une chose. Or nous avons montré que le produit de l'un par l'autre est un dirham. Tu multiplies donc une chose par deux dirhams plus une chose ; on a deux choses plus un *carré*. Réduis par ceci un, on obtient la chose : racine de deux diminuée de un. Tu reviens ensuite au dix et tu poses l'une des deux parties une chose, et l'autre dix moins une chose. Le carré de l'un est un *carré* et le carré de l'autre est cent dirhams plus un *carré* moins vingt choses. Tu divises ensuite cent dirhams plus un *carré* moins vingt choses par un *carré*, on obtient la racine de deux diminuée de un. Tu le multiplies par un *carré*, on a la racine de deux *carrés-carrés*, diminuée d'un *carré*, égale à cent dirhams plus un *carré* moins vingt choses ; réduis par ceci, comme je l'ai montré dans le premier problème, si Dieu le veut.

<51> Si on dit : tu ôtes d'un *carré* ses deux racines plus dix dirhams, puis tu multiplies ce qui reste par lui-même, on a huit fois le *carré*.

On l'infère ainsi : pose ton *carré* un *carré* et ôtes-en deux racines plus dix dirhams ; il reste un *carré* moins deux racines moins dix dirhams, égaux à la racine de huit *carrés*, car il a dit « tu multiplies ce qui reste par lui-même ; on a huit fois le *carré* ». Ce qui reste est donc la racine de huit

منقوصاً / من عشرة وجذر خمسين هو القِسم الأكبر، والقسمُ الأصغر باقي ٤٧-ظ العشرة.

وإن شئت فاحسُبها على هذه الجهة الأخرى، وهو: معلومٌ أنّ مربّع كلّ واحدٍ من قِسْمي العشرة — إذا قُسِمَ كلُّ واحدٍ منهما على الآخر — وألقي الأقل من الأكثرِ، أنّ الذي يبقى درهمان. لأنّ كلّ عددٍ يُقْسَم على عددٍ، فإنّك إذا ضربت ما خرج من القسم في نفسه كان الذي يجتمع من ذلك مثل ما يخرج من قِسْمة ضربِ العددِ المقسومِ <في نفسه على ضربِ العددِ المقسوم> عليه في نفسه. فنجعل الذي يخرج من قسمة مربّعِ الكثير على مربّعِ القليل درهمين وشيئاً، والذي يخرج من قسمة مربّع القليل على مربّع الكثير شيئاً. وقد بيّنا أنّ أحدهما في الآخر درهم. فتضرب شيئاً في درهمين وشيءٍ فيكون شيئين ومالاً. فتقابل به واحداً، فيخرج الشيء جذرَ اثنين منقوصاً منه واحدٌ. ثمّ ترجع إلى العشرة، فتجعل أحد القسمين شيئاً والآخر عشرة إلاّ شيئاً. فمربّع أحدِهما مال، ومربّع الآخر مائة درهمٍ ومالٌ إلاّ عشرين شيئاً. ثمّ تقسم مائة درهم ومالاً إلاّ عشرين شيئاً على مالٍ، فيخرج جذرُ اثنين منقوصٌ منه واحدٌ. فتضربه في مال، فيكون جذرُ مالَي مالٍ منقوصٌ منه مالٌ يعدل مائة درهم ومالاً إلاّ عشرين شيئاً. فتقابل به على ما بيّنت في المسألة الأولى إن شاء الله.

<٥١> فإن قال: مالٌ تُسقِط منه جذريه وعشرةَ دراهمَ، ثمّ تضرب ما بقي في مثله، فيكون ثمانية أمثال المال.

قياسه: أن تجعل مالَك مالاً فتسقط منه جذريه وعشرة دراهمَ، فيبقى: مال إلاّ جذرين وإلاّ عشرة دراهمَ يعدل جذرَ ثمانيةِ أموالٍ؛ لأنّه قال "تضْربُ ما بقي في مثله فيكون ثمانية أمثال المال"؛ فالذي بقي هو جذر ثمانية أموالٍ. فتقابل

1 منقوصاً: منقوص — 4 قسم: كتب "قسم على" ثمّ ألغى "على" — 6 في نفسه: في الهامش — 9 وشيئاً: وشيء / شيئاً: شيء — 11 منقوصًا: منقوص — 13 ومالاً: ومال — 15 ومالاً: ومال — 21 المال: فوق السطر.

carrés. Réduis par ceci ; on a deux racines plus dix dirhams plus la racine de huit *carrés* égaux à un *carré*. Prends la moitié des deux racines plus la racine de huit *carrés*, on a un plus racine de deux. Multiplie-le par lui-même, [48r] on a trois plus racine de huit ; ajoute-le au dix, on a treize plus racine de huit. La racine de cela est donc ajoutée à un plus la racine de deux ; ce qu'on obtient est la racine du *carré*. Tu la multiplies par elle-même, ce qu'on obtient est le *carré*.

<52> Si on dit : un *carré* dont les deux racines plus la racine de sa moitié plus la racine de son tiers lui sont égaux, combien est le *carré* ?

On l'infère ainsi : pose ton *carré* un *carré* ; puis tu dis : deux racines plus la racine de la moitié du *carré* plus la racine d'un tiers de *carré* sont égaux à un *carré*. Donc la chose égale deux plus la racine d'un demi plus la racine d'un tiers, ce qui est la racine du *carré*, et le *carré* est quatre plus un demi plus un tiers plus la racine de huit plus la racine de cinq et un tiers plus la racine de deux tiers.

<53> Si on dit : un *carré* dont les deux racines et la racine de sa moitié et la racine de son tiers égalent vingt dirhams, combien est le *carré* ?

On l'infère ainsi : pose ton *carré* un *carré* ; prends ses deux racines et la racine de sa moitié et la racine de son tiers; on a deux choses plus la racine de la moitié du *carré* plus la racine du tiers du *carré* égaux à vingt dirhams. Retranche deux choses de vingt dirhams, il reste vingt dirhams moins deux choses égaux à la racine de la moitié du *carré* et à la racine du tiers du *carré*. Multiplie vingt dirhams moins deux choses par lui-même, on a quatre cents dirhams plus quatre *carrés* moins quatre-vingts choses égaux à la racine de la moitié du *carré* plus la racine du tiers du *carré* multiplié par lui-même, ce qui est la moitié du *carré* plus le tiers du *carré* plus la racine des deux tiers du *carré-carré*. Réduis par ceci, comme je te l'ai décrit ; on a quatre-vingts choses égales à quatre cents dirhams plus trois *carrés* plus un sixième de *carré* moins la racine de deux tiers du *carré-carré*. Ramène tout ce que tu as à un *carré* et procède comme je te l'ai décrit, si Dieu le veut.

بها فيكون: جذرَيْن وعشرة دراهمَ وجذرَ ثمانية أموالٍ تعدل مالاً. فنصِّف جذرين وجذرَ ثمانية أموال، فيكون واحد وجذر اثنين. فاضربه في مثله / فيكون ٤٨-و
ثلاثةً وجذر ثمانية. فَزِدْه على العشرة، فيكون ثلاثة عشر وجذر ثمانية. فجذرُ ذلك مزادٌ على واحد وجذر اثنين. فما كان، فهو جذر المال. فتضربه في مثله فما كان فهو المال.

<٥٢> فإن قيل: مالٌ جذراه وجذرُ نصفِه وجذرُ ثلثه يعدله، كم المال؟

فقياسه: أن تجعلَ مالَك مالاً. فتقول: جذران وجذرُ نصفِ مالٍ وجذرُ ثلث مالٍ تعدل مالاً. فالشيء يعدل اثنين وجذرَ نصفٍ وجذر ثلثٍ، وهو جذر المالِ، والمالُ أربعة ونصف وثلث وجذر ثمانيةٍ، وجذر خمسة وثلث، وجذر ثلثين.

<٥٣> فإن قيل: مالٌ، جذراه وجذر نصفه وجذر ثلثه عشرون درهماً، كم المال؟

قياسه: أن تجعل مالَك مالاً فتأخذ جذريه وجذر نصفِه وجذر ثلثِه فيكون شيئَيْن وجذر نصف مالٍ وجذر ثلث مالٍ يعدل عشرين درهماً. فألقِ شيئين من عشرين درهماً فيبقى عشرون درهماً إلاّ شيئين يعدل جذر نصف مالٍ وجذر ثلث مالٍ؛ فاضرب عشرين درهماً إلاّ شيئين في مثله فيكون: أربعمائة درهمٍ وأربعة أموالٍ إلاّ ثمانين شيئاً تعدل جذر نصف مالٍ وجذر ثلث مالٍ مضروباً في مثله، وهو نصفُ مالٍ وثلث مالٍ وجذر ثلثي مالِ مالٍ. فتقابل بها كما وصفتُ، فيكون ثمانين شيئاً تعدل أربعمائةِ درهمٍ وثلاثة أموالٍ وسدس مالٍ إلاّ جذر ثلثي مالِ مالٍ. فرُدَّ كلّ شيءٍ معك إلى مالٍ، واعملْ كما وصفتُ لك إن شاء الله.

5 فهو المال: كتبها "فهو جذر المال"، ثم ضرب على "جذر" بالقلم — 6 جذراه: جذريه — 7 جذران: جذرين — 11 جذراه: جذريه.

<54> Si on dit : un *carré* auquel tu ajoutes quatre de ses racines plus la racine de sa moitié plus la racine de ses deux tiers, on a dix dirhams, combien est le *carré*?

On l'infère ainsi : pose ton *carré* un *carré*, ajoute-lui quatre racines plus la racine de sa moitié plus la racine de ses deux tiers ; on a un *carré* plus quatre choses plus la racine de la moitié du *carré* plus la racine des deux tiers du *carré* égaux à dix dirhams. Tu procèdes comme je te l'ai décrit, si Dieu le veut.

<55> Si on dit : un *carré* auquel tu ajoutes sa racine plus la racine de sa moitié, puis tu multiplies la somme par elle-même, on a [48^{v}] le quintuple du premier *carré*. On a donc un *carré* plus sa racine plus la racine de la moitié du *carré* égaux à la racine de cinq *carrés*. La chose est donc égale à la racine de cinq dirhams moins un dirham moins la racine de la moitié d'un dirham, ce qui est la racine du *carré* ; et le *carré* est six dirhams plus un demi plus la racine de deux moins la racine de vingt moins la racine de dix.

<56> Si on dit : un *carré* auquel tu ajoutes sa racine et la racine de sa moitié, puis tu multiplies la somme par elle-même, tu auras vingt dirhams. Ainsi tu as un *carré* plus une chose plus la racine d'un demi-*carré*, qui sont égaux à la racine de vingt dirhams. Partage en deux moitiés la chose plus la racine de la moitié du *carré* ; on a un demi plus la racine d'un huitième. Tu le multiplies par lui-même, on a trois huitièmes de dirham plus la racine d'un huitième de dirham. Tu l'ajoutes à la racine de vingt dirhams, on aura trois huitièmes de dirham plus la racine de vingt dirhams plus la racine d'un huitième de dirham. Tu prends sa racine, de laquelle tu enlèves un demi et la racine d'un huitième. Ce qui reste est la racine du *carré*.

<57> Si on te dit : un *carré* auquel tu ajoutes la racine de sa moitié, puis tu multiplies la somme par elle-même, on aura le quadruple du premier *carré*.

<٥٤> فإن قيل: مالٌ تزيد عليه أربعةَ أجذاره وجذرَ نصفه وجذرَ ثلثيه، فيكون عشرة دراهم، كم المال؟

قياسه: أن تجعل المال مالاً، فتزيد عليه أربعةَ أجذارِه وجذر نصفِهِ وجذر ثلثيه، فيكون مالاً وأربعة أشياء وجذر نصفِ مالٍ وجذرَ ثلثي مالٍ يعدل عشرة دراهم. فتعمل كما وصفتُ لك إن شاء الله.

<٥٥> فإن قيل: مالٌ تزيد عليه جذره وجذرَ نصفِه، ثمّ تضرب ما اجتمع في مثلِه فيكون / خمسة أمثال المالِ الأوّل: فهذا مالٌ وجذرٌ وجذر نصفِ ٤٨-ظ مالٍ يعدل جذرَ خمسةِ أموالٍ. فالشيءُ يعدل جذرَ خمسة دراهمَ إلاّ درهماً وإلاّ جذرَ نصف درهمٍ، وهو جذر المالِ؛ والمالُ ستّة دراهم ونصفٌ وجذر اثنين إلاّ جذرَ عشرين وإلاّ جذرَ عشرة.

<٥٦> فإن قيل لك: مالٌ تزيد عليه جذرَه وجذرَ نصفِه، ثمّ تضرب ما اجتمع في مثله فيكون عشرين درهماً. فهذا مالٌ وشيءٌ وجذر نصفِ مالٍ يعدلُ جذرَ عشرين درهماً. فنصِّف الشيءَ وجذر نصفَ مالٍ فيكونُ نصفاً وجذرَ ثُمْنٍ. فاضربه في مثله، فيكون ثلاثة أثمان درهمٍ وجذرَ ثُمْنِ درهمٍ. فزِدْها على جذرِ عشرين درهماً فيكون: ثلاثة أثمان درهمٍ وجذر عشرين درهماً وجذر ثُمْنِ درهمٍ. فتأخذ جذرها فتسقط منه نصفاً وجذرَ ثُمْنٍ فما بقي، فهو جذرُ المالِ.

<٥٧> فإن قيل لك: مالٌ تزيد عليه جذر نصفِه، ثمّ تضرب ما اجتمع في مثلِه فيكون أربعة أمثال المالِ الأوّل.

1 ثلثيه: ثلثه – 6 جذره وجذر: في الهامش – 8 إلاّ درهماً: إلاّ درهم – 16 نصفاً: نصف.

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré*, une chose, à laquelle tu ajoutes la racine de sa moitié ; on a alors une chose plus la racine de la moitié d'une chose, que tu multiplies par elle-même ; on a un *carré* plus une demi-chose plus la racine de deux cubes égal à quatre choses. Sache que le *carré* est le produit de la chose par elle-même, que le cube est le produit de la chose par le *carré*, que le *carré-carré* est le produit du *carré* par le *carré* et que le cubo-cube est le produit du cube par le cube. Le *carré* plus une demi-chose plus la racine de deux cubes sont donc égaux à quatre choses. Retranche un *carré* plus une demi-chose de quatre choses, il reste trois choses plus une demi-chose moins un *carré* égaux à la racine de deux cubes. Multiplie trois choses plus une demi-chose moins un *carré* par lui-même ; on a un *carré-carré* plus douze *carrés* plus un quart de *carré* moins sept cubes égaux à deux cubes. Restaure-les [49r] par les sept cubes et ajoute-les aux deux cubes ; on a un *carré-carré* plus douze *carrés* plus un quart de *carré* égaux à neuf cubes. Ramène tout ce que tu as à un *carré* ; on a un *carré* plus douze dirhams plus un quart de dirham égaux à neuf choses. Prends la moitié des choses ; on a quatre plus un demi, que tu multiplies par lui-même ; on a vingt plus un quart, duquel tu enlèves le douze plus le quart ; il reste huit. Sa racine sera retranchée de quatre plus un demi ; ce qui reste est le *carré*, qui est quatre plus un demi moins la racine de huit.

Et si tu veux, pose ton *carré* un *carré* auquel tu ajoutes la racine de sa moitié ; on a un *carré* plus la racine de la moitié du *carré* égaux à la racine de quatre *carrés*. Car il a dit : « si tu le multiplies par lui-même, on a le quadruple du *carré* ». On a alors un *carré* plus la racine de sa moitié égal à la racine du quadruple du *carré*, ce qui est deux choses. Enlève la racine de la moitié du *carré* de la racine de quatre *carrés* ; il reste la racine de quatre *carrés* moins la racine de la moitié du *carré* égaux à un *carré*. La racine du *carré* est donc égale à la racine de quatre moins la racine d'un demi, ce qui est deux dirhams moins la racine d'un demi-dirham. Et le *carré* est quatre plus un demi moins la racine de huit.

Si tu veux, pose ton *carré* deux *carrés* ; ajoute-lui la racine de sa moitié, on a deux *carrés* plus une chose ; multiplie-le par lui-même, on a quatre *carrés-carrés* plus un *carré* plus quatre cubes égaux à huit *carrés*.

قياسه: أن تجعل مالَك شيئاً فتزيد عليه جذر نصفه فيكون شيئاً وجذر نصف شيءٍ، فتضربه في مثلِهِ، فيكون مالاً ونصف شيءٍ وجذر كعبين يعدلُ أربعةَ أشياء. واعلم أنّ المالَ من ضربِ الشيءِ في مثله، والكعب من ضرب الشيءِ في المالِ، ومال مالٍ من ضرب المال في المالِ، وكعب كعبٍ من ضرب الكعبِ في الكعبِ، فالمالُ ونصف شيءٍ وجذر كعبين يعدل أربعةَ أشياء. فألق [كعبين واضرب ثلاثةَ أشياء ونصف شيءٍ إلاّ مالاً في مثله] مالاً ونصفَ شيءٍ من أربعة أشياء، فتبقى ثلاثة أشياء ونصف شيءٍ إلاّ مالاً يعدل جذرَ كعبين. فاضرب ثلاثةَ أشياء ونصف شيءٍ إلاّ مالاً في مثله، فيكون مالَ مالٍ واثني عشر مالاً وربع مالٍ إلاّ سبعةَ كعابٍ يعدل كعبين. فاجبرها / بالسبعة الكعاب وزِدْها ٤٤٩ظ على الكعبين، فيكون: مالَ مالٍ واثني عشر مالاً وربعَ مالٍ تعدلُ تسعةَ أكعُبٍ، فرُد كلّ شيءٍ معك إلى مالٍ فيكون: مالاً واثني عشر درهماً وربع درهمٍ تعدلُ تسعةَ أشياء فنصِّف الأشياءَ فتكون أربعةً ونصفاً، فاضربها في مثلها فتكون عشرين وربعاً. فأسقط منها الاثني عشر والربع فيبقى ثمانية. فجذرُها منقوصٌ من أربعة ونصف، فما بقي فهو المال وهو أربعةٌ ونصفٌ إلاّ جذر ثمانيةٍ.

وإن شئت جعلت مالَك مالاً فتزيد عليه جذر نصفه فيكون مالاً وجذرَ نصفِ مالٍ يعدُلُ جذر أربعة أموال؛ لأنّه قال: وإذا ضربته في مثله كان أربعة أمثال المالِ؛ فصارَ مالٌ وجذرُ نصفِ مالٍ يعدُلُ جذرَ أربعة أمثال المالِ وهو شيئان؛ فأسقط جذر نصفِ مالٍ من جذرِ أربعة أموالٍ، فيبقى جذرُ أربعة أموالٍ إلاّ جذر نصفِ مالٍ يعدُلُ مالاً. فجذر المالِ جذر أربعةٍ إلاّ جذر نصفٍ، وهو درهمان إلاّ جذر نصفِ درهمٍ والمالُ أربعة ونصفٌ إلاّ جذر ثمانيةٍ.

وإن شئت فاجعل مالَك مالين، فزِدْ عليه جذرَ نصفه فيكون مالين وشيئاً، فاضربه في مثله فيكون: أربعةُ أموالِ مالٍ ومالٌ وأربعةُ كعابٍ تعدل ثمانية أموال.

1-2 فيكون ... مثله: مكررة — 6 إلاّ مالاً: إلاّ مال — 7 إلاّ مالاً: إلاّ مال — 9 سبعة: سبع / فاجبرها: فاجبرها / بالسبعة: بالسبع / الكعاب: كعاب — 21 وشيئاً: وشيء.

Enlève un *carré* de huit *carrés*, il reste quatre *carrés-carrés* plus quatre cubes égaux à sept *carrés*. Ramène tout ce que tu as au *carré-carré* ; on a un *carré-carré* plus un cube égaux à un *carré* plus trois quarts de *carré*. Ramène tout ce que tu as à un *carré* en divisant tout ce que tu as par un *carré* – en effet tu divises tout ce que tu as par un *carré* car, si tu divises un *carré-carré* par un *carré*, tu obtiens un *carré* ; si tu divises un cube par un *carré*, on a une chose ; et si tu divises un *carré* plus trois quarts de *carré* par un *carré*, on obtient un dirham plus trois quarts de dirham. On a donc un *carré* plus une chose égal à un dirham plus trois quarts de dirham. Divise les racines en deux moitiés, on a un demi ; multiplie-le par lui-même, [49^{v}] on a un quart, que tu ajoutes au dirham plus les trois quarts ; on a deux dirhams. La racine de deux dirhams de laquelle on retranche un demi, ce qui est la racine de la moitié du *carré*, multiplie-le par lui-même ; on a deux dirhams plus un quart moins la racine de deux, ce qui est la moitié du *carré* ; double-le, on a quatre dirhams plus un demi moins la racine de huit, ce qui est le *carré*.

<58> Si on te dit : deux *carrés* égaux, tu ajoutes à l'un la racine de trois et à l'autre la racine de deux dirhams, puis tu multiplies l'un par l'autre, on a vingt dirhams.

On l'infère ainsi : tu poses chacun des deux *carrés* une chose et tu ajoutes à l'un la racine de trois et à l'autre la racine de deux dirhams. Puis tu multiplies l'un par l'autre, ce qui est une chose plus la racine de trois par une chose plus la racine de deux dirhams. On a donc un *carré* plus la racine de six dirhams plus la racine de trois *carrés* plus la racine de deux *carrés* égaux à vingt dirhams. Retranche donc la racine de six dirhams de vingt dirhams. Il reste vingt dirhams moins la racine de six dirhams égaux à un *carré* plus la racine de trois *carrés* plus la racine de deux *carrés*. Prends la moitié de la racine de trois *carrés* plus la racine de deux *carrés*, on a la racine de trois quarts plus la racine d'un demi. Multiplie-le par lui-même, on a un dirham plus un quart plus la racine d'un dirham et un demi-dirham. Ajoute-le à vingt dirhams moins la racine de six dirhams, on a vingt et un

فأسقط مالاً من ثمانية أموال، فيبقى أربعة أموال مال وأربعة كعاب تعدلُ سبعةَ أموالٍ. فرُدّ كلّ شيءٍ معكَ إلى مالِ مالٍ فيكون: مالُ مالٍ وكعبٌ يعدلُ مالاً وثلاثةَ أرباعِ مالٍ، فرُدَّ كلّ شيءٍ معكَ إلى مالٍ وهو أن تقسم كلّ شيءٍ معكَ على مالٍ. وإنّما قسمتَ كلّ شيءٍ معكَ على مالٍ لأنّك إذا قسمت مالَ مالٍ على مالٍ خرج مالٌ، وتقسم كعباً على مالٍ فيكون شيئاً، وتقسم مالاً وثلاثةَ أرباعِ مالٍ على مالٍ فيخرج درهمٌ وثلاثةُ أرباعِ درهمٍ، فيكون: مالاً وشيئاً يعدل درهماً وثلاثة أرباعِ درهمٍ. فنَصِّف الأجذار فتكون نصفاً، فاضربها في مثلها / فتكون ربعاً. فزِدْه على الدرهمِ وثلاثةِ أرباعٍ فيكون درهمين. فجذر ٤٩-ظ
درهمين منقوصٌ منه نصفٌ وهو جذر نصف المال. فاضربه في مثلِهِ فيكون درهمين وربعاً إلاّ جذر اثنين وهو نصف المال؛ فأضعفه، فيكون أربعةُ دراهم ونصف إلاّ جذر ثمانيةٍ، وهو المال.

<٥٨> فإن قيل لك: مالان متساويان تزيد على أحدهما جذرَ ثلاثة، وعلى الآخر جذر درهمين، ثمّ تضرب أحدهما في الآخر فيكون عشرين درهماً.

قياسه: أن تجعل كلّ واحدٍ من المالين شيئاً، فتزيد على أحدهما جذرَ ثلاثةٍ وعلى الآخر جذر درهمين، ثمّ تضرب أحدَهما في الآخر، وهو شيء وجذر ثلاثة في شيء وجذر درهمين، فيكون: مالاً وجذر ستّة دراهم وجذر [جذر] ثلاثة أموالٍ وجذر مالين يعدل عشرين درهماً. فألْقِ جذرَ ستّة دراهمَ من [جذر] عشرين درهماً، فيبقى: عشرون درهماً إلاّ جذر ستّة دراهم تعدل مالاً وجذر ثلاثة أموالٍ وجذر مالين. فنصِّف جذر ثلاثة أموال وجذر مالين فيكون جذر ثلاثة أرباعٍ وجذر نصفٍ. فاضربه في مثله فيكون درهماً وربعاً وجذر درهم ونصف درهمٍ. فزِدْه على عشرين درهماً إلاّ جذر ستّة دراهم، فيكون واحداً

7 يعدل درهماً: يعدل درهم — 9 نصف: بعدها كلمة مطموسة ربّما محاها الناسخ — 9-10 فاضربه ... وهو نصف المال: في الهامش.

dirhams plus un quart plus la racine d'un dirham et un demi moins la racine de six dirhams ; ce qui est vingt et un dirhams plus un quart de dirham moins la racine de un et demi. Le reste de la racine de cela, dont on retranche la racine de trois quarts plus la racine d'un demi, est l'un des deux *carrés* ; et l'autre *carré* lui est égal, si Dieu le veut.

<59> Si on te dit : un *carré* auquel tu ajoutes sept dirhams, puis tu multiplies la somme par la racine de trois fois le *carré* et on a dix fois le *carré*.

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* une chose, à laquelle tu ajoutes sept dirhams. On a une chose plus sept dirhams ; tu les multiplies par la racine du triple du *carré*, c'est-à-dire la racine de trois choses. On a donc la racine de trois cubes plus la racine de cent quarante-sept choses égaux à dix fois le *carré*, qui est dix choses. Divise tout ce que tu as [50r] par la racine de trois choses. On obtient une chose plus la racine de quarante-neuf dirhams égaux à la racine de trente-trois choses plus un tiers de chose. Multiplie une chose plus la racine de quarante-neuf dirhams par lui-même. On a un *carré* plus quarante-neuf dirhams plus la racine de cent quatre-vingt-seize *carrés* égaux à trente-trois choses plus un tiers de chose. Retranche la racine de cent quatre-vingt-seize *carrés* de trente-trois choses plus un tiers de chose ; il reste trente-trois choses plus un tiers de chose moins la racine de cent quatre-vingt-seize *carrés* égaux à un *carré* plus quarante-neuf dirhams.

Si tu veux, tu partages en deux moitiés les choses moins la racine de cent quatre-vingt-seize *carrés*, et tu procèdes comme je te l'ai décrit.

Si tu veux, prends la racine de cent quatre-vingt-seize *carrés*, ce qui est quatorze choses, que tu retranches de trente-trois choses plus un tiers d'une chose ; il reste dix-neuf choses plus un tiers d'une chose égaux à un *carré* plus quarante-neuf dirhams. Partage les choses en deux moitiés, on a neuf

وعشرين درهماً وربعاً وجذر درهمٍ ونصف إلاّ جذر ستّة دراهمَ وهو واحدٌ وعشرون درهماً وربعٌ إلاّ جذر واحدٍ ونصفٍ، فجذرُ ذلك منقوصٌ منه جذر ثلاثة أرباع وجذر نصفٍ، فما بقي فهو أحد المالين، والمال الآخر مثله، إن شاء الله.

<٥٩> فإن قيل لك: مالٌ تزيد عليه سبعةَ دراهمَ، ثمّ تضرب ما اجتمع في جذر ثلاثة أمثال المال، فيكون عشرة أمثال المال.

قياسه: أن تجعل مَالَك شيئاً فتزيد عليه سبعةَ دراهمَ، فيكون شيئاً وسبعة دراهمَ، فتضربه في جذرِ ثلاثة أمثالِ المالِ وهو جذر ثلاثة أشياءَ، فيكون: جذر ثلاثة كعابٍ وجذر مائة وسبعة وأربعين شيئاً يعدل عشرةَ أمثال المالِ، وهو عشرة أشياء. فاقْسِم كلّ شيءٍ معك / على جذر ثلاثة أشياء، فيخرج: شيء ٥٠-و وجذر تسعة وأربعين درهماً يعدل جذر ثلاثة وثلاثين شيئاً وثلث شيء. فاضرب شيئاً وجذر تسعة وأربعين درهماً في مثله فيكون مالاً وتسعة وأربعين درهماً وجذر مائةٍ وستّة وتسعين مالاً تعدل ثلاثة وثلاثين شيئاً وثلث شيء. فألق جذر مائةٍ وستّة وتسعين مالاً من ثلاثة وثلاثين شيئاً وثلث شيء فيبقى: ثلاثة وثلاثون شيئاً وثلث شيء إلاّ جذر مائة وستّة وتسعين مالاً تعدل مالاً وتسعة وأربعين درهماً.

وإن شئت نصَّفتَ الأشياء إلاّ جذر مائةٍ وستّة وتسعين مالاً، وعَملتَ كما وصفتُ لك.

وإن شئت فَخُذْ جذرَ مائةٍ وستّة وتسعين مالاً، وهو أربعة عشر شيئاً، فانْقصها من ثلاثة وثلاثين شيئاً وثلث شيء فيبقى: تسعة عشر شيئاً وثلث شيء يعدل مالاً وتسعة وأربعين درهماً. فنصِّف الأشياء فتكون تسعةً وثُلثين فاضربها

6 فيكون عشرة أمثال المال: في الهامش – 8 ثلاثة: ثلاث – 13-14 فألقِ ... وثلث شيء: في الهامش – 19 وستّة: ستة.

plus deux tiers ; multiplie-le par lui-même, on a quatre-vingt-treize plus quatre neuvièmes. Retranches-en les dirhams, qui sont quarante-neuf ; il reste quarante-quatre plus quatre neuvièmes ; prends sa racine, on a trente-six ; retranche-le de la moitié des choses, qui est neuf plus deux tiers, il reste trois, qui est le *carré*.

Si tu veux, ajoute le trente-six à la moitié des choses, qui est neuf plus deux tiers ; on a seize plus un tiers, ce qui est le *carré*.

Si tu veux, si le problème parvient à une chose plus la racine de quarante-neuf dirhams, tu prends la racine de quarante-neuf, ce qui est sept ; tu multiplies une chose plus sept par lui-même, tu réduis par ceci trente-trois choses plus un tiers d'une chose et tu procèdes comme je l'ai décrit, tu obtiens le *carré* trois ou seize plus un tiers, celui que tu voudras.

Si tu veux, tu le calcules de l'autre manière en posant ton *carré*, une chose, à laquelle tu ajoutes sept dirhams ; on a une chose plus sept dirhams. Or tu sais que, si tu le multiplies par la racine de trois choses, on a dix choses. Divise alors dix choses par la racine de trois choses, on obtient : racine de trente-trois choses plus un tiers d'une chose [50^{v}] égaux à une chose plus sept dirhams. Tu le multiplies par lui-même, on a un *carré* plus quarante-neuf dirhams plus quatorze choses égaux à trente-trois choses plus un tiers d'une chose.

Si tu veux, pose ton *carré* un tiers d'un *carré* et ajoute-lui sept dirhams ; on a alors un tiers d'un *carré* plus sept dirhams, que tu multiplies par la racine de son triple, ce qui est une chose. On a alors le tiers d'un cube plus sept choses égaux à trois *carrés* plus un tiers de *carré*. Car il a dit : « on a dix fois le *carré* » – or nous avons posé le *carré* un tiers d'un *carré* ; dix fois celui-ci est donc trois *carrés* plus un tiers d'un *carré*. Divise tout ce que tu as par une chose, on obtient un tiers d'un *carré* plus sept dirhams égaux à trois choses plus un tiers d'une chose. Complète le tiers de ton *carré* pour que ce soit un *carré*. Pour le compléter, multiplie-le par trois. Multiplie donc tout ce que tu as par trois. On a un *carré* plus vingt et

في مثلها فيكون ثلاثة وتسعين وأربعة أتساعٍ، فانْقِصْ منها الدراهم وهي تسعةٌ وأربعون، فيبقى أربعةٌ وأربعون وأربعة أتساعٍ، فخُذ جذرها فيكون ستّة وثُلثين، فانقصها من نصف الأشياء وهو تسعة وثُلثان فيبقى ثلاثة وهو المال.

وإن شئت فَزِدْ الستّة وثُلثين على نصف الأشياء وهو تسعة وثلثان فيكون ستّة عشرَ وثُلثٌ وهو المال.

وإن شئت، إذا بلغت من المسألة إلى شيءٍ وجذر تسعة وأربعين درهماً، أخذتَ جذرَ تسعة وأربعين <وهو> سبعةٌ، فتضربُ شيئاً وسبعة في مثله، وتقابل به ثلاثة وثلاثين شيئاً وثلث شيء، وتعمل كما وصفتُ، فيخرج المالُ ثلاثة أو ستّة عشر وثلثاً، أيَّهما أحببت.

وإن شئت حسَبْتَها على هذه الجهة الأخرى، وهو أن تجعل مالَك شيئاً، فتزيد عليه سبعة دراهم فيكون شيئاً وسبعة دراهمَ. وقد علمتَ أنّك إذا ضربتَه في جذرِ ثلاثة أشياءَ كان عشرة أشياءَ. فاقسم عشرةَ أشياءَ على جذرِ ثلاثةِ أشياءَ فيخرج: جذرُ ثلاثةٍ وثلاثين شيئاً وثلث شيء / يعدل شيئاً وسبعة دراهم، ٥٠-ظ فاضربه في مثله، فيكون مالاً وتسعةً وأربعين درهماً وأربعة عشر شيئاً يعدل ثلاثة وثلاثين شيئاً وثلثَ شيء.

وإن شئت فاجعل مالَك ثلث مالٍ وزِدْ عليه سبعةَ دراهم، فيكون ثلث مالٍ وسبعة دراهم، فتضربه في جذر ثلاثةٍ أمثاله وهو شيءٌ، فيكون: ثلث كعبٍ وسبعة أشياء تعدل ثلاثة أموالٍ وثلث مالٍ. لأنّه قال "فيكون عشرة أمثال المالِ". وكنا جعلنا المال ثلث مالٍ، وعشرة أمثاله ثلاثة أموالٍ وثلث مالٍ. فاقسم كلّ ما معك على شيء فيخرج: ثلثُ مالٍ وسبعةُ دراهمَ يعدل ثلاثة أشياء وثلث شيءٍ. فأكمل ثلث مالك حتى يكونَ مالاً. وإكمالك إيّاه أن تضربه في ثلاثة، فتضرب كلّ ما معك في ثلاثة، فيكون: مالاً وواحداً وعشرين

3 فيبقى ... المال: كرّرها ثم أشار إلى حذفها – 4 وإن ... وثلثان: كرّرها ثم أشار إلى حذفها – 9 وثلثاً: وثلث – 14 فاضربه: من هنا إلى ص. 465.21: نافصة في الترجمة اللاتينية – 16 زد عليه: في الهامش – 22 وواحداً وعشرين: وواحد وعشرون.

un dirhams égaux à dix racines. Partage les racines en deux moitiés, on a cinq ; multiplie-le par lui-même, on a vingt-cinq ; retranches-en le vingt et un, il reste quatre. Prends-en la racine, deux ; enlève-le de la moitié des racines, qui est cinq ; il reste trois, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est neuf. Mais nous avons posé notre *carré* un tiers d'un *carré*, prends donc son tiers ; on a trois, qui est le *carré*.

Et si tu veux, ajoute le deux à la moitié des racines qui est cinq ; on a sept, c'est la racine du *carré* et le *carré* est quarante-neuf. Mais nous avons posé notre *carré* le tiers d'un *carré*. Tu prends son tiers, on a seize plus un tiers, ce qui est le *carré*.

<60> Si on te dit : un *carré* auquel tu ajoutes la racine de son triple, puis tu multiplies la somme par la racine de son double, on a le quadruple du *carré*.

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* une chose, à laquelle tu ajoutes la racine de son triple ; on a une chose plus la racine de trois choses, que tu multiplies par la racine de deux choses ; on a la racine de deux cubes plus la racine de six *carrés* égaux à quatre choses. Car il a dit : « on a le quadruple du *carré* ». Divise tout ce que tu as par une chose, on a la racine de deux choses plus la racine de six [51r] dirhams égaux à quatre dirhams. Retranche la racine de six dirhams de quatre dirhams, il reste quatre dirhams moins la racine de six dirhams égaux à la racine de deux choses. Multiplie alors quatre dirhams moins la racine de six dirhams par lui-même, on a vingt-deux dirhams moins la racine de trois cent quatre-vingt-quatre dirhams égaux à deux choses ; la chose est donc égale à onze moins la racine de quatre-vingt-seize dirhams, ce qui est le *carré*.

Si tu veux, enlève la racine de six *carrés* de quatre choses, il reste quatre choses moins la racine de six *carrés* égaux à la racine de deux cubes. Multiplie quatre choses moins la racine de six *carrés* par lui-même, on a vingt-deux *carrés* moins la racine de trois cent quatre-vingt-quatre *carrés-carrés* égaux à deux cubes. Nous les restaurons par la racine de trois cent quatre-vingt-quatre *carrés-carrés* et nous l'ajoutons aux deux cubes ; on a

درهماً يعدل عشرةَ أجذارٍ. فنصِّف الأجذار فيكون خمسةً، فاضربها في مثلها فيكون خمسةً وعشرين، فأسقط منها الواحدَ والعشرين فيبقى أربعةٌ. فَخُذ جذرَها اثنين فأسقطه من نصف الأجذار وهو خمسةٌ فيبقى ثلاثة وهو جذر المالِ، والمالُ تسعةٌ. وكنّا جعلنا مالَنا ثلث مالٍ، فتأخذ ثلثها فيكون ثلاثة وهي المال.

وإن شِئْتَ فزِدْ الاثنين على نصف الأجذارِ وهو خمسةٌ، فيكون سبعة، فهو جذرُ المالِ والمالُ تسعةٌ وأربعون، وكنّا جعلنا مالنا ثلث مالٍ، فتأخذ ثلثها فيكون ستّة عشرَ وثلث، وهو المالُ.

<٦٠> فإن قيل لك: مالٌ تزيد عليه جذر ثلاثة أمثاله ثمّ تضرب ما اجتمع في جذر مثليه، فيكون أربعة أمثالِ المالِ.

قياسه: أن تجعل مالَك شيئاً فتزيد عليه جذر ثلاثة أمثاله فيكون شيئاً وجذر ثلاثة أشياءَ، فاضربه في جذر شيئين فيكون: جذر كعبين وجذر ستّة أموال يعدل أربعةَ أشياء، لأنّه قال "فيكون أربعة أمثال المالِ". فاقسم كلّ شيء معك على شيء، فيكون جذر شيئين وجذر ستّة / دراهمَ يعدل أربعة دراهم. ٥١-و

فألْقِ جذر ستّة دراهم من أربعة دراهم، فيبقى أربعة دراهم إلاّ جذر ستّة دراهم يعدلَ جذر شيئين. فاضرب أربعة دراهم إلاّ جذر ستّة دراهم في مثله، فيكون اثنين وعشرين درهماً إلاّ جذر ثلاثمائة وأربعة وثمانين درهماً تعدل شيئين. فالشيءُ يعدلُ أحدَ عشر درهماً إلاّ جذر ستّة وتسعين درهماً وهي المال.

وإن شئت فأسقط جذر ستّة أموال من أربعة أشياء فيبقى: أربعة أشياء إلاّ جذر ستّة أموال تعدل جذر كعبين، فاضرب أربعةَ أشياءَ إلاّ جذر ستّة أموال في مثلها، فيكون: اثنين وعشرين مالاً إلاّ جذر ثلاثمائةٍ وأربعة وثمانين مال مالٍ يعدل كعبين. فنَجبُرها بجذرِ ثلاثمائة وأربعة وثمانين مال مالٍ ونزيده على

10 فيكون: مكررة — 17 وأربعة: أربعة — 21 وعشرين: في الهامش.

deux cubes plus la racine de trois cent quatre-vingt-quatre *carrés-carrés* égaux à vingt-deux *carrés*. Divise tout ce que tu as par un *carré*. Tu divises donc deux cubes par un *carré*, on a deux choses ; et tu divises la racine de trois cent quatre-vingt-quatre *carrés-carrés* par un *carré*, on obtient la racine de trois cent quatre-vingt-quatre dirhams. Tu divises vingt-deux *carrés* par un *carré* ; on obtient vingt-deux dirhams. On a donc deux choses plus la racine de trois cent quatre-vingt-quatre dirhams égaux à vingt-deux dirhams. Une chose est donc égale à onze moins la racine de quatre-vingt-seize, ce qui est le *carré*.

Si tu veux, tu retranches les deux cubes de vingt-deux *carrés*, il reste vingt-deux *carrés* moins deux cubes égaux à la racine de trois cent quatre-vingt-quatre *carrés-carrés*. Multiplie alors vingt-deux *carrés* moins deux cubes par lui-même ; on a quatre cent quatre-vingt-quatre *carrés-carrés* plus quatre cubes-cubes moins quatre-vingt-huit cubes multipliés par un *carré* ; et si tu veux, dis : moins quatre-vingt-huit *carrés-carrés* multipliés par une chose – le tout égal à trois cent quatre-vingt-quatre *carrés-carrés*. Restaure-les par quatre-vingt-huit *carrés-carrés* multipliés par une chose, que tu ajoutes [51ᵛ] à trois cent quatre-vingt-quatre *carrés-carrés* ; on a donc trois cent quatre-vingt-quatre *carrés-carrés* plus quatre-vingt-huit *carrés-carrés*, multipliés par une chose, égaux à quatre cent quatre-vingt-quatre *carrés-carrés* plus quatre cubes-cubes. Enlève trois cent quatre-vingt-quatre *carrés-carrés* de quatre cent quatre-vingt-quatre *carrés-carrés* ; il reste quatre cubes-cubes plus cent *carrés-carrés* égaux à quatre-vingt-huit *carrés-carrés* multipliés par une chose. Ramène tout ce que tu as à un cubo-cube, et cela en prenant le quart de tout ce que tu as. On a donc un cubo-cube plus vingt-cinq *carrés-carrés* égaux à vingt-deux *carrés-carrés* multipliés par une chose. Divise tout ce que tu as par un *carré-carré* ; tu divises donc un cubo-cube par un *carré-carré* ; on obtient un *carré*. Divisons vingt-cinq *carrés-carrés* par un *carré-carré* ; on obtient

الكعبين، فيكون كعبين وجذر ثلاثمائة وأربعة وثمانين مال مالٍ يعدل اثنين وعشرين مالاً. فاقسم كلّ ما معك على مال. فتقسم كعبين على مالٍ فيكون شيئين، وتقسم جذر ثلاثمائةٍ وأربعة وثمانين مال مالٍ على مالٍ فيخرج جذرُ ثلاثمائةٍ وأربعة وثمانين درهماً. وتقسم اثنين وعشرين مالاً على مالٍ فيخرج اثنان وعشرون درهماً. فصار شيئين وجذر ثلاثمائة وأربعة وثمانين درهماً تعدل اثنين وعشرين درهماً. فالشيء يعدل أحدَ عشرَ إلاّ جذر ستّة وتسعين وهو المال.

وإن شئت فألقِ الكعبين من اثنين وعشرين <مالاً> فيبقى: اثنان وعشرون مالاً إلاّ كعبين يعدل جذرَ ثلاثمائة وأربعة وثمانين مال مالٍ. فاضرب اثنين وعشرين مالاً إلاّ كعبين في مثله، فيكون أربعمائةٍ وأربعةً وثمانين مال مالٍ وأربعة كعاب كعبٍ إلاّ ثمانية وثمانين كعباً مضروبة في مالٍ — وإن شئت فقل إلاّ ثمانية وثمانين مالَ مالٍ مضروبة في شيءٍ —، تعدل ثلاثمائةٍ وأربعةً وثمانين مالَ مال. فاجبرها بثمانيةٍ وثمانين مالَ مالٍ مضروبة في شيءٍ، وزِدْها / على ثلاثمائةٍ ٥١-ظ وأربعةٍ وثمانين مالَ مالٍ، فيكون ثلاثمائةٍ وأربعة وثمانين مالَ مالٍ وثمانية وثمانين مالَ مالٍ مضروبة في شيءٍ تعدل أربعمائة وأربعة وثمانين مالَ مالٍ وأربعة كعاب كعبٍ. فأسْقِطْ ثلاثمائةٍ وأربعةً وثمانين مالَ مالٍ من أربعمائةٍ وأربعة وثمانين مالَ مالٍ، فيبقى أربعةُ كعاب كعبٍ ومائة مال مالٍ تعدل ثمانيةً وثمانين مالَ مال مضروبة في شيءٍ. فَرُدّ كلّ شيءٍ معك إلى كعبٍ كعبٍ، وهو أن تأخذ من كل شيءٍ معك رُبْعَه، فيكون كعبَ كعبٍ وخمسة وعشرين مالَ مالٍ يعدل اثنين وعشرين مالَ مالٍ مضروبةً في شيء. فاقسم كلّ ما معك على مالِ مالٍ، فتقسم كعبَ كعبٍ على مالِ مالٍ فيخرج مالٌ، وقسمنا خمسة وعشرين مالَ مالٍ على

3 مالَ مال: في الهامش — 4 وأربعة: أربعة / درهماً: درهم — 4-5 اثنان وعشرون: اثنين وعشرين — 5 وجذر: وجذرا — 8 وأربعة: أربعة — 10 وأربعة كعاب: وأربع كعاب — 14 وأربعة كعاب: وأربع كعاب — 15 وأربعة (الأولى والثانية): أربعة — 16 أربعة كعاب: أربع كعاب / مالٍ (الخامسة): فوق السطر — 19-20 فتقسم كعب كعبٍ على مالِ مالٍ: في الهامش.

vingt-cinq dirhams. Divisons vingt-deux *carrés-carrés* multipliés par une chose par un *carré-carré* ; on obtient vingt-deux choses. Il vient un *carré* plus vingt-cinq dirhams, égaux à vingt-deux choses. Partage les racines en deux moitiés, on a onze. Tu le multiplies par lui-même, on a cent vingt et un ; retranches-en les vingt-cinq, il reste quatre-vingt-seize. La racine de cela, retranchée de onze, est le *carré*, qui est onze moins la racine de quatre-vingt-seize.

Si tu veux, pose ton *carré* la moitié d'un *carré* et ajoute-lui la racine de son triple ; on a la moitié d'un *carré* plus la racine d'un *carré* plus un demi, que tu multiplies par la racine de son double, qui est une chose ; on a donc un demi d'un cube plus la racine d'un *carré-carré* et un demi *carré-carré* égaux à deux *carrés*. Car il a dit : « on a le quadruple du *carré* ». Et le *carré* est un demi, et son quadruple est deux *carrés*. Divise donc tout ce que tu as par un *carré*, on a une demi-chose plus la racine d'un dirham et un demi, égaux à deux dirhams. La chose est donc égale à quatre dirhams moins racine de six. Multiplie-le par lui-même, on a vingt-deux moins racine de trois cent quatre-vingt-quatre, ce qui est le *carré*. Or nous avons posé notre *carré* [52r] un demi-*carré* ; nous prenons donc son demi, on a onze moins la racine de quatre-vingt-seize, ce qui est le *carré*.

Si tu veux, retranche la moitié du cube de deux *carrés*, il reste deux *carrés* moins la moitié d'un cube égaux à la racine d'un *carré-carré* plus un demi-*carré-carré*. Multiplie deux *carrés* moins un demi-cube par lui-même, on a quatre *carrés-carrés* plus un quart de cubo-cube moins deux *carrés-carrés* multipliés par une chose, égaux à un *carré-carré* plus un demi-*carré-carré*. Restaure-le par deux *carrés-carrés* multipliés par une chose et ajoute-les au *carré-carré* plus un demi-*carré-carré*. Il vient un *carré-carré* plus un demi-*carré-carré* plus deux *carrés-carrés* multipliés par une chose, égaux à un quart de cubo-cube plus quatre *carrés-carrés*. Enlève un *carré-carré* et un demi-*carré-carré* de quatre *carrés-carrés* ; il reste un quart de cubo-cube plus deux *carrés-carrés* plus un demi-*carré-*

مالِ مالٍ فخرج خمسةٌ وعشرون درهماً، وقسمنا اثنين وعشرين مالَ مالٍ مضروباً في شيء على مالِ مالٍ فخرج اثنان وعشرون شيئاً. فصار مال وخمسة وعشرون درهماً يعدل اثنين وعشرين شيئاً. فنصّف الأجذار، فيكون أحدَ عشر، فاضربه في مثله فيكون مائة وأحدٌ وعشرون. فأسقط منها الخمسة والعشرين،
5 فيبقى ستّة وتسعون، منقوصٌ جذر ذلك من أحدَ عشرَ وهو المالُ، وهو أحد عشر إلاّ جذر ستّة وتسعين.

وإن شئت، فاجعل مالك نصف مالٍ، فَزِدْ عليه جذرَ ثلاثةِ أمثاله، فيكون نصف مالٍ وجذر مالٍ ونصف. فاضربه في جذر مثليه وهو شيء، فيكون نصف كعبٍ وجذر مالِ مالٍ ونصفِ مالِ مالٍ يعدل مالين، لأنّه قال "فيكون أربعة
10 أمثالِ المال"، والمالُ نصفٌ، وأربعة أمثالُه مالانِ. فاقسم كلّ شيء معك على مالٍ، فيكون نصف شيءٍ وجذر درهمٍ ونصفٍ يعدل درهمين. فالشيء يعدل أربعةَ دراهم إلاّ جذر ستّة. فاضربه في مثله فيكون اثنين وعشرين إلاّ جذر ثلاثمائة وأربعة وثمانين وهو المال. وكنّا جعلنا مالَنا / نصفَ مالٍ فنأخذ نصفه، ٥٢-و
فيكون أحدَ عشرَ إلاّ جذر ستّة وتسعين، وهو المال.

15 وإن شئت، فألقِ نصفَ كعبٍ من مالين، فيبقى مالانِ إلاّ نصف كعبٍ يعدل جذرَ مالِ مالٍ ونصفَ مالِ مالٍ، فاضرب مالين إلاّ نصف كعبٍ في مثله، فيكون أربعةَ أموالِ مالٍ وربع كعبِ كعبٍ إلاّ مالي مالٍ مضروباً في شيء يعدل مالِ مالٍ ونصف مالِ مالٍ. فاجْبِرها بمالي مالٍ مضروبين في شيء، وزِدْها على مالِ مالٍ ونصفِ مالِ مالٍ. فصار مالَ مالٍ ونصفَ مالِ مالٍ ومالي مالٍ مضروبةً
20 في شيءٍ تعدل ربعَ كعبِ كعبٍ وأربعة أموالِ مالٍ. فأسقط مالَ مالٍ ونصف مالِ مالٍ من أربعة أموالِ مالٍ، فيبقى: ربع كعبِ كعبٍ ومالا مالٍ ونصف مالِ

1 خمسة وعشرون: خمسة وعشرين – 2 مضروباً: مضروب / اثنان وعشرون: اثنين وعشرين – 2-3 وخمسة وعشرون: وخمسة وعشرين – 5 وهو المال: إلاّ المال – 9 ونصف مالِ مالٍ: "مال" الثانية فوق السطر – 10 مالان: مالين – 17 مضروباً: مضروب – 18 مضروبين: مضروبة – 19 ونصف مالِ مالٍ (الأولى): في الهامش – 21 ومالا: ومالي.

carré égaux à deux *carrés-carrés* multipliés par une chose. Complète le quart de cubo-cube afin que ce soit un cubo-cube. Pour le compléter, multiplie-le par quatre, et tu multiplies tout ce que tu as par quatre. On a un cubo-cube plus dix *carrés-carrés* égaux à huit *carrés-carrés* multipliés par une chose. Divise tout ce que tu as par un *carré-carré*, on a un *carré* plus dix dirhams égaux à huit choses. Partage les choses en deux, on a quatre ; tu le multiplies par lui-même, on a seize, dont tu retranches dix dirhams ; il reste six ; prends-en la racine, que tu enlèves de quatre. Ce qui reste est la chose, c'est-à-dire quatre moins la racine de six. Et le *carré* est vingt-deux dirhams moins racine de trois cent quatre-vingt-quatre dirhams. Or nous avons posé notre *carré* un demi-*carré*. Prenons donc sa moitié, on a onze dirhams moins racine de quatre-vingt-seize, ce qui est le *carré* cherché.

<61> Si on te dit : un *carré* tel que tu ajoutes à la racine de sa moitié trois dirhams et à la racine de son tiers deux dirhams, puis tu multiplies l'un par l'autre, on a vingt dirhams.

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* une chose et tu ajoutes à la racine de sa moitié trois dirhams, on a trois dirhams plus la racine d'une demi-chose ; [52^{v}] et tu ajoutes à la racine de son tiers deux dirhams, on a deux dirhams plus la racine d'un tiers d'une chose. Tu multiplies trois dirhams plus la racine de la moitié d'une chose par deux dirhams plus la racine d'un tiers d'une chose. Si tu veux cela, multiplie la racine d'une demi-chose par la racine d'un tiers de chose, on a la racine d'un sixième de *carré*. Puis tu multiplies trois dirhams par la racine d'un tiers d'une chose, on a la racine de trois choses. Puis tu multiplies deux dirhams par la racine d'une demi-chose, on a la racine de deux choses. Puis tu multiplies trois dirhams par deux dirhams, on a six dirhams. Puis tu additionnes tout cela ; on a six dirhams plus la racine d'un sixième de *carré* plus la racine de trois choses plus la racine de deux choses égaux à vingt dirhams. Alors tu ôtes six dirhams de vingt, il reste quatorze dirhams égaux à la racine d'un sixième de *carré* plus la racine de trois choses plus la racine de deux choses. Tu ôtes la racine d'un sixième de *carré* de quatorze dirhams ; il reste quatorze dirhams moins la racine d'un sixième de *carré* égaux à la racine de trois

مال يعدل مالي مال مضروبين في شيء. فأكمل ربع كعب كعبٍ حتى يكون كعبَ كعبٍ، وإكمالُك إيّاه أن تضربه في أربعة وتضرب كلّ شيء معك في أربعة، فيكون: كعب كعبٍ وعشرة أموالِ مالٍ يعدل ثمانية أموال مالٍ مضروبة في شيء. فاقسم كلّ ما معك على مال مالٍ، فيكون مالاً وعشرةَ دراهم تعدل ثمانية أشياء. فنصِّف الأشياء فيكون أربعة، فاضربها في مثلها فيكون ستّة عشر، فأسْقِطْ منها العشرة دراهم، فيبقى ستّة فَخُذْ جذرَها فأسقطه من أربعة، فما بقي فهو الشيء، وهو أربعة إلاّ جذر ستّة، والمالُ اثنان وعشرون درهماً إلاّ جذر ثلاثمائةٍ وأربعة وثمانين درهماً. وكنا جعلنا مالَنا نصفَ مالٍ فنأخذ نصفَه، فيكون أحد عشر درهماً إلا جذر ستّة وتسعين، وهو المال المطلوب.

<٦١> فإن قيل لك: مالٌ تزيد على جذر نصفِه ثلاثةَ دراهمَ وعلى جذر ثلثه درهمين، ثمّ تضرب أحدهما في الآخر فيكون عشرين درهماً.

قياسه: أن تجعل مالَك شيئاً فتزيد على جذرِ نصفِه ثلاثةَ دراهمَ فيكون ثلاثة دراهمَ وجذر نصفِ شيءٍ / وتزيد على جذرِ ثلثِه درهمين، فيكون درهمين وجذرَ ثلث شيء. فتضرب ثلاثةَ دراهمَ وجذر نصف شيءٍ في درهمين وجذر ثلث شيءٍ. فإذا أردتَ ذلك فاضرب جذر نصف شيء في جذر ثلث شيءٍ فيكون جذر سُدس مال، ثمّ تضرب ثلاثةَ دراهمَ في جذر ثُلث شيء، فيكون جذر ثلاثة أشياء، ثمّ تضرب درهمين في جذر نصف شيء، فيكون جذر شيئين، ثمّ تضرب ثلاثةَ دراهمَ في درهمين فيكون ستّة دراهم، ثمّ تجمع ذلك كلّه فيكون: ستّة دراهمَ وجذرُ سُدسِ مالٍ وجذرُ ثلاثة أشياءَ وجذر شيئين تعدل عشرين درهماً. فتُلْقِي ستّة دراهمَ من عشرين، فيبقى: أربعة عشر درهماً تعدل جذر سدس مالٍ وجذر ثلاثة أشياءَ وجذر شيئين. فتلقي جذر سُدس مالٍ من أربعة عشر درهماً، فيبقى أربعة عشر درهماً إلاّ جذر سدس مالٍ تعدل جذر ثلاثة أشياء

52-ظ

1 مالي: مال / مضروبين: مضروباً — 14-15 وجذر ثلث شيء: في الهامش.

choses plus la racine de deux choses. Multiplie alors quatorze dirhams moins la racine d'un sixième de *carré* par lui-même ; on a cent quatre-vingt-seize plus un sixième de *carré* moins la racine de cent trente *carrés* et deux tiers d'un *carré* égaux à la racine de trois choses plus la racine de deux choses, multiplié par lui-même ; ce qui est cinq choses plus la racine de vingt-quatre *carrés*. Restaure les cent quatre-vingt-seize dirhams plus le sixième de *carré* par la racine de cent trente *carrés* plus deux tiers de *carré* et ajoute-le aux cinq choses plus la racine de vingt-quatre *carrés*. On a cinq choses plus la racine de vingt-quatre *carrés* plus la racine de cent trente *carrés* plus deux tiers de *carré* égaux à cent quatre-vingt-seize dirhams plus un sixième de *carré*. Complète le sixième de ton *carré* afin qu'il vienne un *carré*. Pour le compléter, tu le multiplies par six et donc tu multiplies tout ce que tu as par six ; on a un *carré* plus mille cent soixante-seize dirhams égaux à trente choses plus la racine de huit cent soixante-quatre *carrés* plus la racine de quatre mille sept cent quatre *carrés*. Partage en deux moitiés les choses, la racine de quatre [53r] mille sept cent quatre *carrés* et la racine de huit cent soixante-quatre *carrés*. On a quinze plus la racine de mille cent soixante-seize plus racine de deux cent seize, que tu multiplies par lui-même. On a mille six cent dix-sept plus la racine de mille mille et cinquante-huit mille et quatre cents, plus la racine de mille mille et seize mille et soixante-quatre, plus la racine de cent mille quatre-vingt-quatorze mille et quatre cents. Retranches-en mille cent soixante-seize, il reste quatre cent quarante et un dirhams plus la racine de mille mille cinquante-huit mille et quatre cents, plus la racine de mille mille seize mille soixante-quatre, plus la racine de cent quatre-vingt-quatorze mille et quatre cents. Tu prends la racine de tout cela et tu la retranches de quinze plus la racine de mille cent soixante-seize plus la racine de deux cent seize. Ce qui reste est le *carré*.

Et si tu veux, procède comme je vais te le décrire : lorsque tu parviens dans le calcul de ce problème à cinq choses plus la racine de vingt-quatre *carrés* plus la racine de cent trente *carrés* plus deux tiers de *carré* égaux à

وجذر شيئين. فاضرب أربعة عشر درهماً إلاّ جذر سُدْسِ مالٍ في مثله، فيكون: مائةً وستّة وتسعين وسدس مالٍ إلاّ جذر مائة وثلاثين مالاً وثلثي مال تعدل جذر ثلاثة أشياء وجذر شيئين مضروباً في مثله، وهو خمسة أشياء وجذر أربعة وعشرين مالاً. فاجْبُر المائةَ والستّة والتسعين درهماً وسدس مال بجذرِ مائةٍ وثلاثين مالاً وثلثي مال، وزِدْه على خمسة أشياء وجذر أربعة وعشرين مالاً، فصار خمسةُ أشياء وجذرُ أربعة وعشرين مالاً وجذرُ مائة وثلاثين مالاً وثلثي مالٍ تعدل مائةً <و>ستّة وتسعين درهماً وسدس مالٍ. فأكمل سدس مالِك حتى يكون مالاً. وإكمالك إيّاه أن تضربه في ستّة، فتضرب كلّ شيء معك في ستّة، فيكون مالاً وألفاً ومائةً وستّة وسبعين درهماً تعدل ثلاثين شيئاً وجذر ثمانمائةٍ وأربعة وستين مالاً وجذر أربعة آلاف وسبعمائة مالٍ وأربعة أموالٍ. فنصِّف الأشياء وجذر أربعة / آلافٍ وسبعمائةِ مالٍ وأربعة أموالٍ وجذر ثمانمائة ٥٣-و وأربعة وستين مالاً، فيكون خمسة عشر وجذر ألفٍ ومائةٍ وستّة وسبعين وجذر مائتين وستّة عشر، فاضربه في مثله فيكون ألفاً وستمائة وسبعة عشر، وجذر ألف ألفٍ وثمانية وخمسين ألفاً وأربعمائة، وجذر ألفِ ألفٍ وستّة عشر ألفاً وأربعة وستّين، وجذر مائة ألفٍ وأربعة وتسعين ألفاً وأربعمائة. فأسقط منها ألفاً ومائةً وستّة وسبعين فيبقى أربعمائةٍ وأحدٌ وأربعون درهماً وجذر ألف ألفٍ وثمانية وخمسين ألفاً وأربعمائة، وجذر ألف ألفٍ وستّة عشر ألفاً وأربعة وستين، وجذر مائة وأربعة وتسعين ألفاً وأربعمائة. فتأخذ جذرَ ذلك، فما كان نَقَصْتَه من خمسة عشر وجذر ألف ومائة وستّة وسبعين، وجذر مائتين وستّة عشر. فما بقي فهو المال.

وإن شئت، فاعمل على ما أصف لك، وهو أنّك إذا صِرْتَ من حِساب هذه المسألة إلى خمسة أشياء وجذر أربعة وعشرين مالاً وجذر مائة وثلاثين مالاً

2 وثلثي: وثلثين — 4 درهماً: درهم — 12 وسبعين: وتسعين — 13 ألفًا: ألف — 15 ألفًا: ألف — 16 وأربعون: وأربعين — 17 وخمسين ألفاً: وخمسين ألف / وستّة عشر ألفاً: وستّة عشر ألف — 19 مائتين: مائتي.

cent quatre-vingt-seize dirhams plus un sixième de *carré*, alors tu additionnes la racine de vingt-quatre *carrés* plus la racine de cent trente *carrés* plus les deux tiers de *carré*, comme je te l'ai indiqué. On a dès lors cinq choses plus la racine de deux cent soixante-six *carrés* plus les deux tiers d'un *carré* égaux à cent quatre-vingt-seize dirhams plus un sixième de *carré*. Complète alors ton *carré* en le multipliant par six ; on a un *carré* plus mille cent soixante-seize dirhams égaux à trente choses plus la racine de neuf mille six cents *carrés*. Partage en deux moitiés les choses et la racine de neuf mille six cents *carrés*, on a quinze plus la racine de deux mille quatre cents. Multiplie-le par lui-même, on a deux mille six cent vingt-cinq plus la racine de deux mille mille, cent mille et soixante mille. Retranches-en les mille cent soixante-seize qui sont avec le *carré* ; il reste mille quatre cent quarante-neuf plus la racine de deux mille mille cent mille et soixante mille. [53^{v}] Tu prends la racine de cela et tu retranches ce que tu obtiens de quinze plus racine de deux mille quatre cents. Ce qui reste est le *carré*.

Si tu veux, tu poses ton *carré* deux *carrés*, tu ajoutes à la racine de sa moitié trois dirhams, on a une chose plus trois dirhams ; et tu ajoutes à la racine de son tiers deux dirhams, on a deux dirhams plus la racine de deux tiers de *carré* ; tu multiplies une chose plus trois dirhams par deux dirhams plus la racine de deux tiers de *carré*, on a deux choses plus six dirhams plus la racine de deux tiers de *carré-carré* plus la racine de six *carrés*, égaux à vingt dirhams. Ôte six dirhams de vingt dirhams, il reste quatorze dirhams égaux à deux choses plus la racine de deux tiers de *carré-carré* plus la racine de six *carrés*. Complète la racine de deux tiers de *carré-carré* pour avoir la racine du *carré-carré*. Pour la compléter, multiplie-la par la racine de un plus un demi. On a la racine du *carré-carré* plus la racine de six *carrés* plus la racine de neuf *carrés* – qui est trois choses –, égaux à la racine de deux cent quatre-vingt-quatorze dirhams. Mais la racine du *carré-carré* est un *carré*. Il vient donc un *carré* plus la racine de six *carrés* plus la racine de neuf *carrés* – qui est trois choses –, égaux à la racine de deux cent quatre-vingt-quatorze dirhams. Partage donc en deux moitiés trois choses plus la racine de six *carrés* ; on a un plus un demi et la racine de un plus un

وثلثي مالٍ تعدل مائةً وستّة وتسعين درهماً وسدس مالٍ، جمعتَ جذرَ أربعةٍ وعشرين مالاً وجذر مائة وثلاثين مالاً وثلثي مالٍ، على ما بيّنتُ لك. فيكون حينئذ خمسة أشياء وجذر مائتين وستّة وستين مالاً وثلثي مالٍ يعدل مائة وستّة وتسعين درهماً وسدس مالٍ. فأكمل مالَك وهو أن تضربه في ستّة فيكون مالاً وألفاً ومائة وستّة وسبعين درهماً تعدل ثلاثين شيئاً وجذر تسعة آلافٍ وستمائة مالٍ. فنصِّفِ الأشياء وجذر تسعة آلاف وستمائة مالٍ، فيكون خمسة عشر وجذر ألفين وأربعمائة، فاضربه في مثله فيكون ألفين وستمائةٍ وخمسةً وعشرين وجذر ألفي ألفٍ ومائة ألفٍ وستين ألفاً. فأسقط منها الألفَ والمائة والستّة والسبعين التي مع المال، فيبقى ألف وأربعُمائةٍ وتسعةٌ وأربعون وجذر ألفي ألفٍ ومائة ألف وستون ألفاً. / فتأخذ جذرَ ذلك فما كان نقصته من خمسة عشر ٥٣-ظ وجذر ألفين وأربعمائة، فما بقي فهو المالُ.

وإن شئت، جعلت مالَك مالين، فتزيد على جذرِ نصفِه ثلاثةَ دراهمَ، فيكون شيئاً وثلاثة دراهم، وتزيد على جذر ثلثه درهمين، فيكون درهمين وجذر ثلثي مالٍ. فتضرب شيئاً وثلاثة دراهم في درهمين وجذر ثلثي مالٍ، فيكون: شيئين وستّة دراهمَ وجذرَ ثلثي مالِ مالٍ وجذر ستّة أموالٍ تعدل عشرين درهماً. فألْقِ ستّة دراهمَ من عشرين درهماً، فيبقى: أربعة عشر درهماً تعدل شيئين وجذر ثلثي مالِ مالٍ وجذر ستّة أموالٍ. فأكمل جذر ثلثي مالِ مالٍ حتى يكون جذر مالِ مالٍ. وإكمالك إيّاه أن تضربه في جذر واحدٍ ونصفٍ، فيكون جذر مالِ مالٍ وجذر ستّة أموال وجذر تسعة أموالٍ – وهو ثلاثة أشياء – تعدل جذر مائتين وأربعة وتسعين درهماً. وجذر مالِ مالٍ وهو مالٌ، فصار مالٌ <وجذر ستّة أموال> وجذر تسعة أموالٍ – وهو ثلاثة أشياء – يعدل جذر مائتين وأربعة وتسعين درهماً. فنصِّف ثلاثة أشياء وجذر ستّة أموالٍ، فيكون واحداً

1 وستة: ستة – 2 وعشرين: فوق السطر – 3 وستّة: ستّ – 5 وستّة: ستّة – 6 فنصف الأشياء ... مال: في الهامش – 8-10 فأسقط ... وستون ألفاً: مكرّرة – 10 وستون: وستين – 9 والسبعين: والتسعين / وأربعون: وأربعين – 14 مال (الثانية): كرّرها ثم طمسها.

demi. Multiplie-le par lui-même, on a trois plus un demi plus un quart plus la racine de treize et un demi, que tu ajoutes à la racine de deux cent quatre-vingt-quatorze dirhams ; on a trois plus un demi plus un quart plus la racine de deux cent quatre-vingt-quatorze dirhams plus la racine de treize et un demi. Mais la racine de deux cent quatre-vingt-quatorze plus la racine de treize et un demi est la racine de quatre cent trente-trois plus un demi. Il vient donc trois plus un demi plus un quart, plus la racine de quatre cent trente-trois plus un demi. Tu prends la racine de cela et tu retranches de ce que tu obtiens un plus un demi et la racine de un plus un demi. Ce qui reste est la racine de la moitié du *carré*, car nous avons posé notre *carré* deux *carrés*. Nous le multiplions par lui-même ; ce que tu obtiens est la moitié du *carré*, que nous doublons. Ce qu'on obtient, c'est le *carré*. [54r]

<62> S'il dit : un *carré* que tu multiplies par racine de dix et tu divises le produit par deux plus racine de trois, le gain de la personne est égal au *carré* moins dix dirhams. Et si tu veux, dis : un homme a acheté pour racine de dix et a vendu pour deux plus racine de trois, et il reste dix, combien est le capital?

On l'infère ainsi : pose ton *carré* une chose, multiplie-le par racine de dix, on a racine de dix *carrés*. Divise racine de dix *carrés* par deux plus racine de trois, on obtient racine de quarante *carrés* moins racine de trente *carrés* ; alors tu dis : j'ai divisé racine de dix par deux plus racine de trois, on obtient une chose ; alors, lorsque nous multiplions une chose par deux plus racine de trois, on a racine de dix. Alors nous multiplions une chose par deux plus racine de trois, on a deux choses plus racine de trois *carrés* égales à racine de dix. Ôte deux choses de racine de dix, il reste racine de dix moins deux choses égaux à racine de trois *carrés*. Multiplie racine de dix moins deux choses par lui-même, on a dix dirhams plus quatre *carrés* moins racine de cent soixante *carrés* égaux à trois *carrés*. Réduis-les par la racine de cent soixante *carrés*, ajoute-la à trois *carrés* et ôte trois *carrés* de

ونصفاً وجذر واحدٍ ونصفٍ. فاضربه في مثله فيكون ثلاثةً ونصفاً وربعاً وجذرَ ثلاثةَ عشرَ ونصفٍ فَزِدْها على جذر مائتين وأربعة وتسعين درهماً، فيكون ثلاثة ونصفٌ وربع وجذر مائتين وأربعة وتسعين درهماً وجذر ثلاثة عشر ونصفٍ. وجذر مائتين وأربعة وتسعين وجذر ثلاثة عشر ونصف هو جذر أربعمائةٍ وثلاثة وثلاثين ونصف. فصار ثلاثة ونصف وربع وجذر أربعمائة وثلاثة وثلاثين ونصف. فتأخذ جذر ذلك فما خرج نقصت منه واحداً ونصفاً وجذر واحدٍ ونصف. فما بقي فهو جذر نصف المالِ لأنّا كنا جعلنا مالَنا مالين، فنضربه في مثله، فما كان فهو نصف المالِ، فنُضعِفُه، فما اجتمع فهو المال. /

٥٤-و <٦٢> فإن قال: مالٌ تضربه في جذر عشرة، ثمّ تقسم ما اجتمع من الضرب على اثنين وجذرِ ثلاثةٍ، فيصيب الواحد مثل المال إلاّ عشرة دراهم. وإن شئت فقل: اشترى رجلٌ على جذر عشرة، وباع على اثنين وجذر ثلاثة، فبقي عشرة. كم رأس المال؟

قياسه: أن تجعل مالَك شيئاً فتضربه في جذرِ عشرةٍ، فيكون جذر عشرة أموال. فتقسم جذر عشرة أموالٍ على اثنين وجذرِ ثلاثةٍ، فيخرج جذر أربعين مالاً إلاّ جذر ثلاثين مالاً، فإنّك تقول: قسمت جذرَ عشرة على اثنين وجذر ثلاثة، فخرج شيءٌ. فمتى ضربنا شيئاً في اثنين وجذر ثلاثة، كان جذر عشرةٍ. فنضرب شيئاً في اثنين وجذر ثلاثة، فيكون: شيئين وجذر ثلاثة أموال يعدل جذرَ عشرةٍ. فأسقط شيئين من جذر عشرةٍ، فيبقى: جذر عشرةٍ إلاّ شيئين يعدل جذر ثلاثة أموال. فاضرب جذر عشرة إلاّ شيئين في مثله، فيكون: عشرة دراهم وأربعة أموال إلاّ جذر مائة وستين مالاً تعدل ثلاثة أموال. فاجْبُرْها بجذر مائةٍ وستين مالاً، وزِدْه على ثلاثة أموالٍ، وألْقِ ثلاثةَ أموالٍ من أربعة أموال، فيبقى:

1 وجذر واحد ونصف: في الهامش — 11 رجل: في الهامش / فبقي: غير واضحة تماماً — 12 عشرة: في الهامش.

quatre *carrés*. Il reste un *carré* plus dix dirhams égaux à la racine de cent soixante *carrés*. Partage la racine de cent soixante *carrés* en deux moitiés. On a la racine de quarante, que tu multiplies par elle-même ; on a quarante. Retranches-en dix, il reste trente. La racine de trente est donc retranchée de la racine de quarante, ce qui reste est la chose, c'est le gain de la personne, c'est-à-dire la racine de quarante moins la racine de trente.

On a ainsi montré que, si nous divisons la racine de dix dirhams par deux plus racine de trois, alors ce qui revient à la personne est la racine de quarante dirhams moins la racine de trente dirhams. Il est donc clair que, si nous divisons la racine de dix *carrés* par deux plus racine de trois, alors ce qui revient à la personne est la racine de quarante *carrés* moins la racine de trente *carrés*. Car, tout nombre étant divisé par un nombre, si l'on multiplie le dividende par l'un des nombres, quel que soit ce nombre, et que l'on divise ensuite le produit par le premier nombre – le diviseur –, alors ce qu'on obtient [54ᵛ] est égal à ce qu'on obtient de la première division, si tu le multiplies par le nombre par lequel a été multiplié le dividende. Or nous avons divisé la racine de dix dirhams par deux dirhams plus racine de trois ; on a obtenu racine de quarante dirhams moins racine de trente dirhams. Si donc nous divisons racine de dix *carrés* par deux plus racine de trois, alors le quotient est racine de quarante *carrés* moins racine de trente *carrés*, car si tu multiplies racine de dix dirhams, qui est le dividende, par une chose, on a racine de dix *carrés* ; multiplie donc racine de quarante dirhams moins racine de trente dirhams par une chose, on a racine de quarante *carrés* moins racine de trente *carrés*.

Nous avons ainsi montré que, si nous divisons la racine de dix *carrés* par deux plus la racine de trois, ce qui revient à la personne est la racine de quarante *carrés* moins la racine de trente *carrés* ; la racine de quarante *carrés* moins la racine de trente *carrés* est alors égal à une chose moins dix. Car il a dit : « le gain de la personne est égal à un *carré* moins dix ». Mais le *carré* est une chose, alors multiplie une chose moins dix par lui-même ; on a un *carré* plus cent dirhams moins vingt choses égal à la racine de quarante *carrés* moins la racine de trente *carrés*, multiplié par lui-même, ce qui est soixante-dix *carrés* moins la racine de quatre mille huit cents

مالٌ وعشرة دراهم يعدل جذر مائةٍ وستين مالاً. فنصّفْ جذر مائةٍ وستين مالاً فيكون جذر أربعين، فاضربه في مثله فيكون أربعين، فأسْقِطْ منه عشرةً، فيبقى ثلاثون، فجذر ثلاثين منقوص من جذر أربعين، فما بقي فهو الشيء، وهو ما يصيب الواحدَ، فهو جذر أربعين إلاّ جذر ثلاثين.

فقد تبيّن أنّا إذا قسمنا جذرَ عشرة دراهمَ على اثنين وجذر ثلاثة، أنّ الذي يصيب الواحدَ جذر أربعين درهماً إلاّ جذر ثلاثين درهماً. فبيّنٌ أنّا إذا قسمنا جذرَ عشرةِ أموالٍ على اثنين وجذر ثلاثة، أنّ الذي يصيب الواحدَ جذرُ أربعين مالاً إلاّ جذر ثلاثين مالاً، لأنّ كلّ عددٍ يُقْسَمُ على عددٍ فإنّ العددَ المقسوم إذا ضُرِبَ في عدد من الأعداد، أيّ عدد كان، ثمّ يُقسم ما اجتمع من الضرب على — العدد الأوّل — المقسوم عليه، فإنّ الذي يخرج / مثل ما يخرج ٥٤-ظ من القَسْمِ الأوّل إذا ضربته في العدد الذي ضُرِبَ فيه العدد المقسوم. ونحن إنّما قسمنا جذر عشرةِ دراهم على درهمين وجذرِ ثلاثة، فخرج جذر أربعين درهماً إلاّ جذرَ ثلاثين درهماً. فإذا قسمنا جذرَ عشرةِ أموالٍ على اثنين وجذرِ ثلاثة، كان الذي يخرج جذر أربعين مالاً إلاّ جذر ثلاثين مالاً، لأنّ جذرَ عشرةِ دراهم، الذي هو العدد المقسوم، إذا ضربتَه في شيءٍ كان جذر عشرة أموالٍ؛ فاضرب جذر أربعين درهماً إلاّ جذر ثلاثين درهماً في شيءٍ فيكون جذر أربعين مالاً إلاّ جذر ثلاثين مالاً.

فقد تبيَّن أنّا إذا قسمنا جذرَ عشرةِ أموالٍ على اثنين وجذر ثلاثة، أنّ الذي يصيب الواحدَ جذرُ أربعين مالاً إلاّ جذرَ ثلاثين مالاً؛ <فجذر أربعين مالاً إلا جذر ثلاثين مالاً> يعدل شيئاً إلاّ عشرة. لأنّه قال "فأصاب الواحدَ مثلُ المال إلاّ عشرة"، والمالُ شيءٌ. فاضرب شيئاً إلاّ عشرة في مثله، فيكون: مالاً ومائةَ درهمٍ إلاّ عشرين شيئاً يعدل جذر أربعين مالاً إلاّ جذر ثلاثين مالاً، مضروباً في نفسه، وهو سبعون مالاً إلاّ جذر أربعةِ آلافٍ وثمانمائةِ مالِ مالٍ.

11 إنما: فإنّما — 15 الذي: فوق السطر.

carrés-carrés. Retranche donc un *carré* de soixante-dix *carrés*, il reste soixante-neuf *carrés* ; restaure les cent dirhams par vingt choses, ajoute-les aux soixante-neuf *carrés*, restaure les soixante-neuf *carrés* par la racine de quatre mille huit cents *carrés-carrés* et ajoute-les aux cent dirhams. On a alors cent dirhams plus la racine de quatre mille huit cents *carrés-carrés* égaux à soixante-neuf *carrés* plus vingt choses. Retranche les soixante-neuf *carrés* de cent dirhams plus la racine de quatre mille huit cents *carrés-carrés* ; il reste vingt choses égales à cent dirhams plus la racine de quatre mille huit cents *carrés-carrés* moins soixante-neuf *carrés*. Ramène tout ce que tu as à un *carré*, et cela en multipliant tout ce que tu as par un dirham plus trente parties de trente-neuf parties de dirham plus racine de trois dirhams plus deux cent trente-sept parties de mille cinq cent vingt et une parties de dirham. Si en effet nous divisons un dirham par racine de quatre mille huit cents moins soixante-neuf, [55r] alors il revient à chacun un dirham plus trente parties de trente-neuf parties de dirham, plus racine de trois dirhams plus deux cent trente-sept parties de mille cinq cent vingt et une parties de dirham. Il est clair, d'après ce que nous avons décrit, que, si nous divisons un par racine de quatre mille huit cents *carrés-carrés* moins soixante-neuf *carrés*, alors ce qui revient au *carré* est un dirham plus trente parties de trente-neuf parties de dirham plus la racine de trois dirhams plus deux cent trente-sept parties de mille cinq cent vingt et une parties. Si nous multiplions la racine de quatre mille huit cents *carrés-carrés* moins soixante neuf *carrés* par un dirham plus trente parties de trente-neuf parties de dirham, plus la racine de trois dirhams plus deux cent trente-sept parties de mille cinq cent vingt et une parties de dirham, on a un *carré*. Tu multiplies ensuite cent dirhams par un dirham plus trente parties de trente-neuf parties de dirham plus la racine de trois dirhams plus deux cent trente-sept parties de mille cinq cent vingt et une parties de l'unité, on a cent soixante-seize dirhams plus trente-six parties de trente-neuf parties de

فألْقِ مالاً من سبعين مالاً، فيبقى تسعةٌ وستون مالاً. فاجْبُر المائة الدرهم بعشرين شيئاً، وزِدْها على التسعة والستين مالاً، واجْبُر التسعةَ والستين مالاً بجذرِ أربعةِ آلافٍ وثمانمائةِ مالِ مالٍ، وزِدْها على المائةِ الدرهمِ، فيكون مائة درهم وجذر أربعةِ آلافٍ وثمانمائةِ مالِ مالٍ يعدل تسعةً وستين مالاً وعشرين شيئاً. فألْقِ التسعةَ والستين مالاً من مائةِ درهمٍ وجذر أربعةِ آلافٍ وثمانمائةِ مالِ مالٍ، فيبقى عشرون شيئاً يعدل مائةَ درهمٍ وجذر أربعةِ آلافٍ وثمانمائةِ مالِ مالٍ إلّا تسعة وستين مالاً. فَرُدّ كلّ شيءٍ معك إلى مالٍ، وهو أن تضرب كلّ ما معك في درهمٍ وثلاثين جزءاً من تسعةٍ وثلاثين جزءاً من درهمٍ، وجذر ثلاثة دراهم ومائتين وسبعة وثلاثين جزءاً من ألفٍ وخمسمائةٍ وأحد وعشرين جزءاً من درهمٍ؛ لأنّا إذا قسمنا درهماً على جذرِ أربعةِ آلافٍ وثمانمائةٍ إلّا تسعة / وستين؛ ٥٥-و كان الذي يصيب الواحدَ درهماً وثلاثين جزءاً من تسعةٍ وثلاثين جزءاً من درهمٍ وجذر ثلاثة دراهم ومائتين وسبعة وثلاثين جزءاً من ألفٍ وخمسمائةٍ وأحدٍ وعشرين جزءاً من درهمٍ. وبيّنٌ ممّا وصفنا أنّا إذا قسمنا واحداً على جذرِ أربعةِ آلافٍ وثمانمائةِ مالِ مالٍ إلّا تسعة وستين مالاً، كان الذي يصيب المال درهماً وثلاثين جزءاً من تسعةٍ وثلاثين جزءاً من درهمٍ وجذر ثلاثةِ دراهم ومائتين وسبعة وثلاثين جزءاً من ألفٍ وخمسمائةٍ وأحدٍ وعشرين جزءاً. فإذا ضربنا جذرَ أربعةِ آلافٍ وثمانمائةِ مالِ مالٍ إلّا تسعة وستين مالاً في درهمٍ وثلاثين جزءاً من تسعة وثلاثين جزءاً من درهمٍ وجذر ثلاثة دراهم ومائتين وسبعة وثلاثين جزءاً من ألفٍ وخمسمائةٍ وأحدٍ وعشرين جزءاً من درهمٍ، كان مالاً. ثمّ تضرب مائةَ درهمٍ في درهمٍ وثلاثين جزءاً من تسعةٍ وثلاثين جزءاً من درهمٍ وجذر ثلاثة دراهم ومائتين وسبعة وثلاثين جزءاً من ألفٍ وخمسمائةٍ وأحدٍ وعشرين جزءاً من واحدٍ، فيكون مائة وستّة وسبعين درهماً وستّة وثلاثين جزءاً من تسعة

1 سبعين مالاً: سبعين مال — 2 والستين: وستين — 3-4 وزِدْها ... مالِ مالٍ: في الهامش — 5 مالاً: المال — 9 وأحد: أحد — 11 درهماً: درهم — 14 درهماً: درهم — 19 وأحد: أحد — 21 وأحد: أحد.

l'unité, plus la racine de trente et un mille cinq cent cinquante-huit dirhams plus deux cent quatre-vingt-deux parties de mille cinq cent vingt et une parties de dirham. Tu multiplies ensuite vingt choses par un dirham plus trente parties de trente-neuf parties de dirham plus la racine de trois dirhams plus deux cent trente-sept parties de mille cinq cent vingt et une parties de l'unité ; on a alors trente-cinq choses plus quinze parties de trente-neuf parties de chose plus la racine de mille deux cent soixante-deux *carrés*, plus quatre cent quatre-vingt-dix-huit parties de mille cinq cent vingt et une parties de *carré*. Il vient alors un *carré* plus cent soixante-seize dirhams plus trente-six parties de trente-neuf parties de dirham [55^{v}] plus la racine de trente et un mille cinq cent cinquante-huit dirhams plus deux cent quatre-vingt-deux parties de mille cinq cent vingt et une parties de dirham, égaux à trente-cinq choses plus quinze parties de trente-neuf parties d'une chose plus la racine de mille deux cent soixante-deux *carrés* plus quatre cent quatre-vingt-dix-huit parties de mille cinq cent vingt et une parties de *carré*. Partage alors en deux moitiés trente-cinq choses plus quinze parties de trente-neuf parties de chose plus la racine de mille deux cent soixante-deux *carrés* plus quatre cent quatre-vingt-dix-huit parties de mille cinq cent vingt et une parties de *carré*. On a alors dix-sept plus vingt-sept parties de trente-neuf parties plus la racine de trois cent quinze plus huit cent quatre-vingt-cinq parties de mille cinq cent vingt et un. Multiplie-le par lui-même ; on a six cent vingt-huit dirhams plus neuf cent douze parties de mille cinq cent vingt et une parties de dirham plus la racine de trois cent mille quatre-vingt-quinze mille cent trente dirhams plus deux mille mille cinquante-sept mille six cent soixante-dix parties de deux mille mille trois cent mille treize mille quatre cent quarante et une parties de dirham. Ôtes-en les dirhams qui

وثلاثين جزءاً من واحدٍ وجذر واحدٍ وثلاثين ألفاً وخمسمائة وثمانية وخمسين
درهماً ومائتين واثنين وثمانين جزءاً من ألفٍ وخمسمائة وأحد وعشرين جزءاً من
درهمٍ. ثمّ تضرب عشرين شيئاً في درهمٍ وثلاثين جزءاً من تسعةٍ وثلاثين جزءاً
من درهمٍ وجذر ثلاثة دراهم ومائتين وسبعة وثلاثين جزءاً من ألفٍ وخمسمائةٍ
وأحدٍ وعشرين جزءاً من واحدٍ؛ فيكون خمسةً وثلاثين شيئاً وخمسةَ عشرَ جزءاً
من تسعة وثلاثين جزءاً من شيء، وجذر ألفٍ ومائتين واثنين وستين مالاً
وأربعمائة وثمانية وتسعين جزءاً من ألفٍ وخمسمائة وأحدٍ وعشرين جزءاً من
مال. فصار مالاً ومائة وستّة وسبعين درهماً وستّة وثلاثين جزءاً من تسعة
وثلاثين جزءاً من درهمٍ / وجذر واحدٍ وثلاثين ألفاً وخمسمائة وثمانية وخمسين ٥٥-ظ
درهماً ومائتين واثنين وثمانين جزءاً من ألفٍ وخمسمائة وأحد وعشرين جزءاً من
درهم تعدل خمسةً وثلاثين شيئاً وخمسة عشر جزءاً من تسعة وثلاثين جزءاً من
شيءٍ، وجذر ألفٍ ومائتين واثنين وستين مالاً وأربعمائة وثمانية وتسعين جزءاً
من ألفٍ وخمسمائة وأحدٍ وعشرين جزءاً من مالٍ. فنصِّفْ خمسةً وثلاثين شيئاً
وخمسة عشر جزءاً من تسعةٍ وثلاثين جزءاً من شيءٍ، وجذر ألفٍ ومائتين
واثنين وستين مالاً وأربعمائة وثمانية وتسعين جزءاً من ألفٍ وخمسمائة وأحدٍ
وعشرين جزءاً من مالٍ، فيكون سبعةَ عشر وسبعةً وعشرين جزءاً من تسعةٍ
وثلاثين جزءاً، وجذر ثلاثمائة وخمسة عشر وثمانمائة وخمسة وثمانين جزءاً من
ألفٍ وخمسمائة وأحدٍ وعشرين. فاضْرِبْه في مثلِه فيكون ستمائةٍ وثمانيةً وعشرين
درهماً وتسعمائة واثني عشر جزءاً من ألفٍ وخمسمائة وأحدٍ وعشرين جزءاً من
درهمٍ وجذر ثلاثمائة ألفٍ وخمسة وتسعين ألفاً ومائة وثلاثين درهماً وألفي ألفٍ
وسبعة وخمسين ألفاً وستمائة وسبعين جزءاً من ألفي ألفٍ وثلاثمائة ألف وثلاثة
وعشر ألفاً وأربعمائة وأحد وأربعين جزءاً من درهمٍ. فأسْقِطْ منها الدراهم التي

2 وأحد: أحد — 7 وأحد: أحد — 8 مالاً ومائة: مائة ومال — 19 اثني: اثنا / وعشرين جزءاً من: في الهامش — 21 وسبعين جزءاً: كتب الناسخ بعدها بضع كلّمات ثم محا بعضها وضرب على بعضها الآخر.

sont avec le *carré* ; c'est-à-dire cent soixante-seize dirhams plus trente-six parties de trente-neuf parties de dirham plus la racine de trente et un mille cinq cent cinquante-huit dirhams plus deux cent quatre-vingt-deux parties de mille cinq cent vingt et une parties de dirham. Il reste quatre cent cinquante et un dirhams plus mille vingt-neuf [56r] parties de mille cinq cent vingt et une parties de dirham plus la racine de trois cent mille quatre-vingt-quinze mille cent trente dirhams plus deux mille mille cinquante-sept mille six cent soixante-dix parties de deux mille mille trois cent mille treize mille quatre cent quarante et une parties de dirham moins la racine de trente et un mille cinq cent cinquante-huit dirhams plus deux cent quatre-vingt-deux parties de mille cinq cent vingt et une parties de dirham. Tu prends la racine de cela et tu y ajoutes dix-sept dirhams plus vingt-sept parties de trente-neuf parties de dirham plus la racine de trois cent quinze dirhams plus huit cent quatre-vingt-cinq parties de mille cinq cent vingt et une parties de dirham. Ce que tu obtiens est le *carré*.

3 9 5 1 3 0
2 0 5 7 6 7 0
2 3 1 3 4 4 1

<63> S'il dit : deux *carrés* dont l'un est égal au triple de l'autre ; tu ajoutes à chacun sa racine et tu multiplies ensuite l'un par l'autre ; on a dix fois le plus grand *carré*.

On l'infère ainsi : tu poses l'un des deux *carrés* une chose et l'autre trois choses. Tu ajoutes à la chose sa racine, on a alors une chose plus la racine d'une chose ; puis tu ajoutes aux trois choses leur racine, on a trois choses plus la racine de trois choses ; tu multiplies alors une chose plus la racine d'une chose par trois choses plus la racine de trois choses, on a trois *carrés* plus la racine de trois *carrés* plus la racine de neuf cubes plus la

مع المال وهي مائةٌ وستّة وسبعون درهماً وستّة وثلاثون جزءاً من تسعةٍ وثلاثين جزءاً من درهمٍ وجذر واحدٍ وثلاثين ألفاً وخمسمائة وثمانية وخمسين درهماً ومائتين واثنين وثمانين جزءاً من ألفٍ وخمسمائة وأحدٍ وعشرين جزءاً من درهمٍ، فيبقى أربعمائةٍ وأحد وخمسون درهماً وألف وتسعة / وعشرون جزءاً من ألفٍ ٥٦-و وخمسمائة وأحدٍ وعشرين جزءاً من درهمٍ وجذر ثلاثمائة ألف وخمسة وتسعين ألفاً ومائة وثلاثين درهماً وألفي ألفٍ وسبعة وخمسين ألفاً وستمائة وسبعين جزءاً من ألفي ألفٍ وثلاثمائة ألفٍ وثلاثة وعشر ألفاً وأربعمائة وأحد وأربعين جزءاً من درهمٍ إلاّ جذرَ واحدٍ وثلاثين ألفاً وخمسمائة وثمانية وخمسين درهماً ومائتين واثنين وثمانين جزءاً من ألفٍ وخمسمائة وأحد وعشرين جزءاً من درهمٍ. فَتأخذ جذرَ ذلك، فما كان زِدْتَ عليه سبعةَ عشر درهماً وسبعة وعشرين جزءاً من تسعةٍ وثلاثين جزءاً من درهمٍ وجذر ثلاثمائة وخمسة عشر درهماً وثمانمائة وخمسة وثمانين جزءاً من ألفٍ وخمسمائة وأحد وعشرين جزءاً من درهمٍ. فما بلغ فهو المالُ.

٣ ٩ ٥ ١ ٣ ٠
٢ ٠ ٥ ٧ ٦ ٧ ٠
٢ ٣ ١ ٣ ٤ ٤ ١

<٦٣> فإن قال: مالان أحدهُما ثلاثة أمثال الآخر، زدتَ على كلٍّ واحدٍ منهما جذرَه، ثمّ ضربتَ أحدَهما في الآخر فكان عشرةَ أمثالِ المالِ الأكبر.

قياسه: أن تجعل أحدَ المالين شيئاً والآخر ثلاثةَ أشياء، فتزيد على الشيءِ جذرَه فيكون شيئاً وجذر شيءٍ. ثمّ تزيدَ على الثلاثة الأشياء جذرها فيكون ثلاثة أشياء وجذر ثلاثة أشياء. فتضرب شيئاً وجذر شيء في ثلاثة أشياء وجذر ثلاثة أشياء فيكون: ثلاثة أموال وجذر ثلاثة أموال وجذر تسعة كعابٍ وجذر

4 وعشرون: وعشرين — 7 وأحد: أحد — 10 درهماً: درهم — 19 تسعة: تسع.

racine de trois cubes égaux à dix fois le plus grand *carré*, c'est-à-dire trente choses. Divise tout ce que tu as par une chose, on a alors trois choses plus la racine de trois dirhams plus la racine de neuf choses plus la racine de trois choses égaux à trente dirhams. Ôte trois choses plus la racine de trois dirhams de trente dirhams, il reste trente dirhams moins trois choses moins la racine de trois dirhams égaux à la racine de neuf choses plus la racine de trois choses. Multiplie trente dirhams moins trois choses moins la racine de trois dirhams par lui-même ; on a neuf cents dirhams plus trois dirhams plus neuf *carrés* plus la racine de cent *carrés* plus huit *carrés* moins [56v] cent quatre-vingts choses moins la racine de dix mille huit cents dirhams égaux à douze choses plus la racine de cent *carrés* plus huit *carrés*. Retranche la racine de cent *carrés* plus huit *carrés* de la racine de cent *carrés* plus huit *carrés*, il reste neuf cents dirhams plus trois dirhams plus neuf *carrés* moins cent quatre-vingts choses moins la racine de dix mille huit cents dirhams égaux à douze choses. Restaure-les par les cent quatre-vingts choses et ajoute-les aux douze choses ; on a alors cent quatre-vingt-douze choses égales à neuf cents dirhams plus trois dirhams plus neuf *carrés* moins racine de dix mille huit cents dirhams. Tu procèdes ensuite comme je te l'ai montré.

<64> Si on te dit : un *carré* dont la racine plus la racine de sa racine plus la racine de ses deux racines plus la racine de son quintuple sont égaux à dix dirhams.

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* un *carré* et tu prends sa racine et la racine de sa racine et la racine de ses deux racines et la racine de son quintuple ; on a alors une chose plus la racine d'une chose plus la racine de deux choses plus la racine de cinq *carrés* égaux à dix dirhams. Ôte une chose et la racine de cinq *carrés* de dix dirhams, il reste dix dirhams moins une chose moins la racine de cinq *carrés* égaux à la racine d'une chose plus la racine de deux choses. Multiplie alors dix dirhams moins une chose moins la racine de cinq *carrés* par lui-même, on a cent dirhams plus six

ثلاثة كعاب يعدل عشرةَ أمثال المالِ الأكبر، وهو ثلاثون شيئاً. فاقْسِمْ كلّ شيء معك على شيءٍ، فيكون: ثلاثة أشياء وجذر ثلاثة دراهم وجذر تسعة أشياء وجذر ثلاثة أشياء يعدل ثلاثين درهماً. فأسْقِط ثلاثةَ أشياء وجذر ثلاثة دراهمَ من ثلاثين درهماً، فيبقى: ثلاثون درهماً إلاّ ثلاثة أشياء وإلاّ جذر ثلاثة دراهمَ تعدل جذرَ تسعةِ أشياء وجذر ثلاثة أشياء. فاضْرب ثلاثين درهماً إلاّ ثلاثة أشياء وإلاّ جذر ثلاثة دراهمَ في مثلِه، فيكون: تسعمائة درهم وثلاثة دراهم وتسعة أموال، وجذر مائة مال وثمانية أموالٍ إلاّ / مائة وثمانين شيئاً وإلاّ جذر عشرة آلافٍ وثمانمائة درهمٍ تعدل اثني عشر شيئاً وجذر مائةِ مالٍ وثمانية أموالٍ. فألْقِ جذرَ مائة مالٍ وثمانية أموالٍ من جذرِ مائةِ مالٍ وثمانية أموالٍ، فيبقى: تسعمائة درهمٍ وثلاثة دراهمَ وتسعة أموالٍ إلاّ مائة وثمانين شيئاً وإلاّ جذر عشرة آلافٍ وثمانمائةِ درهمٍ تعدل اثني عشر شيئاً. فاجْبُرها بالمائةِ والثمانين شيئاً وزِدْها على الاثني عشر شيئاً، فيكون: مائةً واثنين وتسعين شيئاً تعدل تسعمائة درهمٍ وثلاثة دراهمَ وتسعة أموال إلاّ جذر عشرة آلافٍ وثمانمائة درهمٍ. ثمّ تعمل على ما بيّنتُ لك. 56-ظ

<٦٤> فإن قيل لك: مالٌ جذره وجذر جذره وجذر جذريه وجذر خمسة أمثاله عشرة دراهمَ.

قياسه: أن تجعل مالَك مالاً فتأخذ جذرَه وجذر جذره وجذر جذريه وجذر خمسةِ أمثالِه، فيكون: شيئاً وجذر شيءٍ وجذر شيئين وجذر خمسة أموالٍ تعدل عشرةَ دراهمَ. فألْقِ شيئاً وجذر خمسةِ أموالٍ من عشرةِ دراهمَ، فيبقى عشرة دراهمَ إلاّ شيئاً وإلاّ جذر خمسة أموالٍ تعدل جذرَ شيءٍ وجذر شيئين. فاضْرِبْ عشرة دراهمَ إلاّ شيئاً وإلاّ جذر خمسة أموالٍ في مثله، فيكون: مائة

1 ثلاثة: ثلاث — 8 شيئاً: فوق السطر — 9 من جذر: بجذر — 11 والثمانين شيئاً: والثمانين الشيء — 12 عشر شيئاً: عشر الشيء.

carrés plus la racine de vingt *carrés-carrés* moins vingt choses moins la racine de deux mille *carrés* égaux à la racine d'une chose plus la racine de deux choses, multiplié par lui-même, ce qui est trois choses plus la racine de huit *carrés*. Réduis par ceci ; on a après réduction vingt-trois choses plus la racine de deux mille *carrés* plus la racine de huit *carrés* égaux à cent dirhams plus six *carrés* plus racine de vingt *carrés-carrés*. Ramène tout ce que tu as à un *carré*, et cela en multipliant par trois huitièmes de dirham moins la racine de cinq huitièmes de huitième de dirham. Tu multiplies alors six *carrés* plus la racine de vingt *carrés-carrés* par trois huitièmes moins la racine de cinq huitièmes de huitième ; on a alors un *carré*. Tu multiplies cent dirhams par trois huitièmes moins la racine de cinq huitièmes de huitième, on a trente-sept dirhams plus un demi moins la racine de sept cent quatre-vingt-un dirhams plus un quart. Puis tu multiplies vingt-trois choses par trois huitièmes moins la racine de cinq huitièmes de huitième ; [57r] on a huit choses plus cinq huitièmes de chose moins la racine de quarante et un *carrés* plus un quart de *carré* plus cinq huitièmes de huitième de *carré*. Tu multiplies la racine de deux mille *carrés* par trois huitièmes moins la racine de cinq huitièmes de huitième. On a la racine de deux cent quatre-vingt-un *carrés* plus un quart de *carré* moins douze choses plus une demi-chose. Tu multiplies ensuite la racine de huit *carrés* par trois huitièmes moins la racine de cinq huitièmes de huitième ; on a la racine d'un *carré* plus un huitième de *carré* moins la racine de cinq huitièmes de huitième de *carré*. Il vient après tout cela un *carré* plus trente-sept dirhams plus un demi moins la racine de sept cent quatre-vingt-un dirhams plus un quart, égaux à la racine de deux cent quatre-vingt-un *carrés* plus un quart de *carré* plus la racine d'un *carré* et un huitième de *carré* moins trois choses et sept huitièmes de chose moins la racine de quarante et un *carrés* et un quart de *carré* et cinq huitièmes de huitième de *carré* moins la racine de cinq huitièmes de *carré*. Tu procèdes ensuite comme je te l'ai montré.

درهمٍ وستّة أموالٍ وجذر عشرين مالَ مالٍ إلاّ عشرين شيئاً وإلاّ جذر ألفي مالٍ تعدل جذر شيءٍ وجذر شيئين مضروباً في مثله وهو ثلاثة أشياء وجذر ثمانية أموالٍ. فتقابل بها، فيكون بعد المقابلة: ثلاثة وعشرون شيئاً وجذر ألفي مالٍ وجذر ثمانية أموالٍ يعدل مائةَ درهمٍ وستّة أموالٍ وجذر عشرين مالِ مالٍ. فرُدَّ كلّ شيء معك إلى مالٍ، وهو أن تضربه في ثلاثة أثمان درهمٍ إلاّ جذر خمسة أثمان ثُمْنِ درهمٍ. فتضرب ستّة أموالٍ وجذر عشرين مالَ مالٍ في ثلاثة أثمان إلاّ جذر خمسة أثمان ثُمنٍ، فيكون مالاً؛ وتضرب مائةَ درهمٍ في ثلاثة أثمان إلاّ جذر خمسة أثمان ثُمْنٍ، فيكون سبعةً وثلاثين درهماً ونصفاً إلاّ جذر سبعمائة وأحدٍ وثمانين درهماً وربعٍ؛ وتضرب ثلاثةً وعشرين شيئاً في ثلاثة أثمانٍ إلاّ جذر خمسة أثمان ثُمْنٍ، / فتكون ثمانية أشياء وخمسة أثمان شيء إلاّ جذر واحدٍ وأربعين مالاً وربعِ مالٍ وخمسة أثمان ثُمْنِ مالٍ؛ وتضرب جذر ألفي مالٍ في ثلاثة أثمان إلاّ جذر خمسة أثمان ثُمْنٍ، فيكون جذر مائتين وأحدٍ وثمانين مالاً وربع مالٍ إلاّ اثني عشر شيئاً ونصف شيءٍ؛ ثم تضرب جذر ثمانية أموالٍ في ثلاثة أثمان إلاّ جذر خمسة أثمانِ ثُمْنٍ، فيكون جذر مالٍ وثُمْن مالٍ إلاّ جذر خمسة أثمانِ ثُمْنِ مالٍ. فيصير بعد ذلك كلّه: مالاً وسبعة وثلاثين درهماً ونصفاً إلاّ جذر سبعمائة وأحدٍ وثمانين درهماً وربعٍ تعدل جذرَ مائتين وأحد وثمانين مالاً وربع مالٍ، وجذر مالٍ وثُمْن مالٍ إلاّ ثلاثة أشياء وسبعة أثمان شيء، وإلاّ جذر واحدٍ وأربعين مالاً وربع مالٍ وخمسة أثمانِ ثُمْنِ مالٍ، وإلاّ جذر خمسة أثمانِ [ثُمْنِ] مالٍ، ثمّ تعمل كما بيّنتُ لك.

3 ألفيْ مال: كتبها "ألفي ألف"، ثم ضرب على ألف بالقلم — 7 في: مكرّرة — 10 جذر واحدٍ: جذراً واحد — 11-12 إلاّ جذر: في الهامش - 12 خمسة: وخمسة — 15 مالاً: مال / ونصفاً: ونصف — 16 مالاً: مال.

<65> Si on te dit : trois *carrés* différents, si tu multiplies le plus petit par lui-même et le moyen par lui-même, la somme sera égale au plus grand par lui-même ; si tu multiplies le plus grand par le plus petit, le produit sera égal au moyen par lui-même ; et si tu multiplies le plus petit par le moyen, on aura dix dirhams.

On l'infère ainsi : tu poses le plus petit une chose, le moyen sera dix dirhams divisés par une chose et le plus grand cent dirhams divisés par un cube, car si le carré du moyen est divisé par le plus petit, on obtient le plus grand ; mais le carré du moyen est cent dirhams divisés par un *carré*, et s'il est divisé par le plus petit, qui est une chose, on obtient le plus grand *carré*, cent dirhams divisés par un cube. On a ainsi montré que, si nous posons le plus petit *carré* une chose, alors le *carré* moyen sera dix dirhams divisés par une chose et le plus grand *carré* cent dirhams divisés par un cube. Tu multiplies le plus petit *carré*, qui est une chose, par lui-même ; on a un *carré*. Tu multiplies le *carré* moyen, qui est dix dirhams divisés par une chose, par lui-même, on a cent dirhams divisés par un *carré*. Tu les additionnes, on a alors un *carré* plus cent dirhams divisés par un *carré*. Tu multiplies le *carré* par le *carré*, on a un *carré-carré* ; [57ᵛ] alors le produit du plus petit *carré* par lui-même plus le moyen par lui-même est un *carré-carré* plus cent dirhams, le tout divisé par un *carré*. Tu le multiplies par un *carré-carré*. On a un *carré-carré-carré-carré* plus cent *carrés-carrés*. On a donc montré que, si nous divisons un *carré-carré-carré-carré* plus cent *carrés-carrés* par un cubo-cube, on a le carré du *carré* moyen plus le carré du plus petit *carré*. Nous multiplions ensuite le plus grand *carré*, qui est cent dirhams divisés par un cube, par lui-même ; on a alors le carré du plus grand *carré*, dix mille dirhams divisés par un cubo-cube, égal au carré du *carré* moyen plus le carré du plus petit *carré*, qui est un *carré-carré-carré-carré* plus cent *carrés-carrés* divisés par un cubo-cube ; il vient alors dix mille dirhams égaux à un *carré-carré-carré-carré* plus cent *carrés-carrés*. Partage donc en deux moitiés les cent *carrés-carrés*, on a cinquante, que tu multiplies par lui-même ; on a deux mille cinq cents, que tu ajoutes aux dix

<٦٥> فإن قيل لك: ثلاثةُ أموالٍ مختلفة، إن ضربتَ الأصغرَ في مثله والأوسطَ في مثله، كان مثلَ الأكبر في مثله؛ وإن ضربت الأكبرَ في الأصغرِ، كان مثلَ الأوسط في مثله؛ وإن ضربتَ الأصغر في الأوسط، كان عشرة دراهمَ.

قياسه: أن تجعل الأصغر شيئاً، فيكون الأوسط عشرة دراهمَ مقسومة على شيءٍ، ويكون الأكبر مائة درهمٍ مقسومةً على كعب، لأنّ مربّعَ الأوسط إذا قُسِمَ على الأصغر خرج الأكبرُ؛ ومربع الأوسط مائةُ درهمٍ مقسومةٌ على مالٍ، وإذا قُسِمَ على الأصغر — وهو شيء — خرج المالُ الأكبرُ مائةَ درهمٍ مقسومةً على كعبٍ. فقد تبيَّن لنا أنّ المالَ الأصغرَ إذا جعلناه شيئاً، كان المالُ الأوسط عشرة دراهمَ مقسومةً على شيءٍ، والمال الأكبر مائةُ درهمٍ مقسومةٌ على كعبٍ. فتضرب المالَ الأصغر — وهو شيء — في مثله، فيكون مالاً؛ وتضرب المالَ الأوسط — وهو عشرة دراهم مقسومة على شيء — في مثله، فيكون مائة درهمٍ مقسومة على مالٍ؛ فتجمعها فيكون مالاً ومائةَ درهمٍ مقسومةً على مالٍ. فتضرب المالَ في مالٍ فيكون مالَ مالٍ، / فيصير ضربُ المالِ الأصغرِ في نفسه ٥٧-ظ والأوسطِ في نفسه مالَ مالٍ ومائةَ درهمٍ مقسوماً ذلك على مالٍ. فتضربه في مالِ مالٍ، فيكون مالَ مالِ مالٍ ومائة مالِ مالٍ. فقد تبيّن لنا أنّا إذا قسمنا مالَ مالٍ مالِ مالٍ ومائةَ مالِ مالٍ على كعبٍ كعبٍ، خرج مربّعُ المالِ الأوسط ومربّعُ المالِ الأصغر؛ ثمّ نضرب المالَ الأكبرَ — وهو مائةُ درهمٍ مقسومةٌ على كعبٍ — في مثله، فيكون مربّع المال الأكبر عشرة آلافِ درهمٍ مقسومةً على كعبٍ كعبٍ فهو يعدل مربّع المالِ الأوسط ومربّع المال الأصغر، وهو مالُ مالِ مالٍ ومائة مالِ مالٍ مقسومةٌ على كعبٍ كعبٍ، فصار عشرة آلاف درهم يعدلُ مالَ مالِ مالِ مالٍ ومائة مالِ مالٍ. فنصِّف المائة مالِ مالٍ، فيكون خمسين؛ فاضربها في مثلها، فيكون ألفين وخمسمائة؛ فَزِدْها على العشرة آلاف، فيكون

9 عشرة: عشر — 11–12 فيكون ... فتجمعها: في الهامش — 14 مقسوماً: كتبها "مقسومة" ثمّ استدرك فصحّحها — 16 مالَ مالِ مال مالٍ: زاد بعدها كلمة "مال" ثمّ ضرب عليها بالقلم.

mille ; on a douze mille cinq cents ; tu en prends la racine et tu ôtes de ce qu'on obtient cinquante dirhams ; tu prends ensuite la racine de la racine de ce qui reste, ce que tu obtiens est le plus petit *carré*.

<66> Si on te dit : tu divises dix dirhams en trois parties et tu multiplies la plus petite par elle-même et la moyenne par elle-même, on a la plus grande par elle-même. Tu multiplies la plus petite par la plus grande, elle sera égale à la moyenne par elle-même. Tu laisses pour le moment les dix dirhams, puis tu dis :

Si on te dit : trois *carrés* différents, si tu multiplies le plus petit par lui-même et le moyen par lui-même, ce sera égal au plus grand par lui-même. Si tu multiplies le plus petit par le plus grand, ce sera égal au moyen par lui-même.

On l'infère ainsi : tu poses le plus petit un dirham, le moyen une chose et le plus grand un *carré*. Car, si tu multiplies le plus petit par le plus grand, il sera comme le produit du moyen par lui-même. Puis tu multiplies le plus petit par lui-même et le moyen par lui-même et tu les additionnes ; on a un *carré* plus un dirham égaux au *carré-carré*, qui est égal au produit du plus grand par lui-même. Tu procèdes comme je te l'ai décrit ; on a le *carré*, un demi-dirham plus la racine de un plus un quart, ce qui est le plus grand ; le *carré* moyen est la racine de cela qui est un demi-dirham plus la racine de un plus un quart dont on prend la racine, et le plus petit *carré* est un dirham. Tu additionnes les trois *carrés*, on a un dirham plus un demi plus la racine de un plus un quart, plus un demi-dirham plus la racine de un plus un quart dont on prend la racine.

Tu reviens ensuite aux dix dirhams [58r] et tu dis : nous avons divisé dix dirhams par un dirham plus un demi plus la racine de un plus un quart, et par un demi-dirham plus la racine de un plus un quart dont on prend la racine, et ainsi on obtient une chose. Or nous savons que, lorsque l'on multiplie le quotient par le diviseur, on retrouve le dividende ; alors nous multiplions une chose par un dirham plus un demi plus la racine de un plus un quart, plus un demi-dirham et la racine de un plus un quart dont on prend la racine. On a alors une chose plus une demi-chose plus la racine du *carré* plus un quart, plus un demi-*carré* plus la racine du *carré-carré* plus un quart de *carré-carré* dont on prend la racine, égaux à dix dirhams. Ôte

اثني عشر ألفاً وخمسمائة. فتأخذ جذرَها فما كان أسقطت منه خمسين درهماً، فما بقي أخذت جذرَ جذرِه؛ فما خرج فهو المالُ الأصغر.

<٦٦> فإن قيل لك: عشرةُ دراهمَ تقسمها ثلاثةَ أقسامٍ، فتضرب الأصغرَ في مثلِه، والأوسطَ في مثلِه، فيكون مثل الأكبر في مثله، وتضرب الأصغر في الأكبر فيكون مثل الأوسط في مثلِه؛ فتترك العشرةَ دراهم في هذا الوقت، ثمّ تقول: إذا قيل لك ثلاثةُ أموال مختلفة إن ضربت الأصغرَ في مثله والأوسط في مثله، كان مثلَ الأكبر في مثلِه؛ وإذا ضربت الأصغرَ في الأكبرِ، كان مثلَ الأوسط في مثلِه.

قياسه: أن تجعل الأصغرَ درهماً والأوسط شيئاً والأكبر مالاً، لأنّك إذا ضربت الأصغرَ في الأكبرِ كان مثلَ ضربِ الأوسط في مثلِه، ثمّ تضرب الأصغرَ في مثلِه والأوسط في مثلِه وتجمعهما، فيكون: مالاً ودرهماً يعدل مالَ مال، وهو مثل ضربِ الأكبرِ في مثله؛ فتعمل كما وصفتُ لك، فيكون المالُ نصفَ درهمٍ وجذرَ واحدٍ وربعٍ، وهو الأكبر. والمالُ الأوسط جذر هذا، وهو نصف درهمٍ وجذر واحد وربعٍ مأخوذٌ جذره، والمال الأصغرُ درهمٌ، فتجمع الأموال الثلاثة، فيكون درهماً ونصفاً، وجذرَ واحدٍ وربعٍ، ونصف درهم وجذر واحد وربع مأخوذاً جذره.

ثمّ ترجع إلى العشرةِ الدراهمِ / فتقول: قسمنا عشرةَ دراهمَ على درهمٍ ونصفٍ، وجذرِ واحدٍ وربعٍ، ونصف درهم وجذر واحد وربع مأخوذ جذرُه، فخرج شيءٌ. وقد علمنا أنّا متى ما ضربنا الخارجَ من القسْمةِ في المقسوم عليه عاد المقسومُ، فنضرب شيئاً في درهمٍ ونصفٍ، وجذر واحدٍ وربعٍ ونصف درهم وجذر واحدٍ وربعٍ، مأخوذ جذرُه، فيكون شيئاً ونصف شيءٍ وجذر مالٍ وربعٍ، ونصف مالٍ وجذر مالِ مالٍ وربعِ مالِ مالٍ مأخوذ جذره، يعدل عشرةَ دراهمَ. ٥٨-و

10–11 ثمّ تضرب ... والأوسط في مثله: في الهامش – 13 وهو: "هو" فوق السطر.

de dix dirhams la chose et la demi-chose et la racine du *carré* plus un quart de *carré*, il reste dix dirhams moins une chose et demie moins la racine du *carré* plus un quart de *carré*, égaux à la moitié du *carré* plus la racine du *carré-carré* plus un quart de *carré-carré*, dont on prend la racine ; multiplie alors dix dirhams moins une chose et demie moins la racine du *carré* et un quart de *carré* par lui-même, on a cent dirhams plus trois *carrés* plus un demi-*carré* plus la racine de onze *carrés-carrés* plus un quart de *carré-carré* moins trente choses moins la racine de cinq cents *carrés* égaux à un demi-*carré* plus la racine d'un *carré-carré* plus un quart de *carré-carré*. Restaure les cent dirhams par trente choses plus la racine de cinq cents *carrés* et ajoute l'égal à un demi-*carré* plus la racine du *carré-carré* plus un quart de *carré-carré*. Retranche un demi-*carré* de trois *carrés* plus un demi, et retranche la racine du *carré-carré* plus un quart de *carré-carré* de la racine de onze *carrés-carrés* plus un quart de *carré-carré*. Il reste donc cent dirhams plus trois *carrés* plus la racine de cinq *carrés-carrés*, égaux à trente choses plus la racine de cinq cents *carrés*. Ramène tout ce que tu as à un *carré*, et cela en le multipliant par trois quarts moins la racine d'un quart et un demi-huitième. Tu multiplies tout ce que tu as par trois quarts moins la racine d'un quart et un demi-huitième. On a un *carré* plus soixante-quinze dirhams moins la racine de trois mille cent vingt-cinq dirhams égaux à dix choses. Partage les choses en deux moitiés. On a cinq. Multiplie-le par lui-même, on a vingt-cinq ; ôtes-en le soixante-quinze moins la racine de trois mille cent vingt-cinq, il reste la racine de trois mille cent vingt-cinq moins cinquante dirhams. La racine de cela est soustraite de cinq ; ce qui reste est la plus petite partie des trois parties dont la somme est dix dirhams.

Si tu veux connaître la plus grande partie, pose alors le plus grand des trois [58ᵛ] différents *carrés* un dirham, le plus petit une chose et le moyen la racine d'une chose. Nous avons posé ainsi les trois *carrés* que nous avons nommés car le produit du plus petit par le plus grand est égal au moyen par lui-même. Tu multiplies ensuite le plus petit par lui-même, on a un *carré*, et le moyen par lui-même, on a une chose ; tu les additionnes, on a un *carré* plus une chose, égaux au plus grand par lui-même, c'est-à-dire un dirham ; la chose est donc égale à la racine de un plus un quart, moins

فأسْقِطْ الشيءَ ونصفَ الشيءِ وجذرَ مالٍ وربع مالٍ من عشرةِ دراهمَ، فيبقى عشرةُ دراهمَ إلاّ شيئاً ونصفاً وإلاّ جذر مالٍ وربع مالٍ، يعدل نصفَ مالٍ وجذر مالِ مالٍ وربع مالِ مالٍ مأخوذاً جذره؛ فاضرب عشرة دراهم إلاّ شيئاً ونصفاً وإلاّ جذر مالٍ وربع مالٍ، في مثلِه، فيكون مائةُ درهمٍ وثلاثةُ أموالٍ ونصفُ مالٍ وجذرُ أحد عشر مالَ مالٍ وربع مالِ مالٍ إلاّ ثلاثين شيئاً، وإلاّ جذر خمسمائة مالٍ يعدل نصفَ مالٍ، وجذرَ مالِ مالٍ وربع مالِ مالٍ. فاجْبُرْ المائةَ الدرهم بثلاثين شيئاً وجذر خمسمائة مالٍ، وزِدْ مثلَها على نصفِ مالٍ وجذر مالِ مالٍ وربع مالِ مالٍ، وألْقِ نصف مالٍ من ثلاثة أموالٍ ونصف، وألْقِ جذرَ مالِ مالٍ وربع مالِ مالٍ من جذرِ أحد عشر مالَ مالٍ وربع مالِ مالٍ، فيبقى مائةُ درهمٍ وثلاثةُ أموال وجذر خمسة أموالِ مالٍ يعدل ثلاثين شيئاً وجذر خمسمائةِ مالٍ، فَرُدَّ كلَّ شيءٍ معك إلى مالٍ؛ وهو أن تضربه في ثلاثةِ أرباعٍ إلاّ جذر رُبعٍ ونصف ثُمْنٍ. فتضرب كلَّ شيء معك في ثلاثة أرباع إلاّ جذر ربعٍ ونصفِ ثُمْنٍ، فيكون: مالاً وخمسةً وسبعين درهماً إلاّ جذر ثلاثة آلافٍ ومائةٍ وخمسة وعشرين درهماً يعدل عشرةَ أشياء؛ فنصِّف الأشياء، فتكون خمسة؛ فاضربها في مثلها، فتكون خمسة وعشرين؛ فألْقِ منها الخمسةَ والسبعين إلاّ جذر ثلاثةِ آلافٍ ومائةٍ وخمسة وعشرين، فيبقى جذرُ ثلاثةِ آلافٍ ومائةٍ وخمسة وعشرين إلاّ خمسين درهماً. فَجذْرُ ذلك منقوصٌ من خمسة، فما بقي فهو القسم الأصغر من الأقسام الثلاثة التي جميعها عشرة دراهم.

فإذا أردتَ أن تعْلم القسمَ الأكبر؛ فاجعل المالَ الأكبرَ من الثلاثة الأموال المختلفة درهماً والأصغر شيئاً والأوسط جذر شيء، وإنّما جعلنا الأموال الثلاثة ٥٨-ظ / هذا الذي سمَّينا، لأنّ ضربَ الأصغرِ في الأكبرِ مثلُ الأوسطِ في نفسه؛ ثمّ تضرب الأصغرَ في مثله فيكون مالاً، والأوسطَ في مثله فيكون شيئاً؛ ثمّ تجمعهما، فيكون: مالاً وشيئاً يعدل الأكبرَ في مثله، وهو درهمٌ. فالشيءُ يعدل جذرَ واحدٍ

6 فاجبر المائة الدرهم: فاجبره بالمائة الدرهم — 17 من (الأولى): منه — 20 الثلاثة: فوق السطر.

un demi-dirham ; ce qui est le plus petit *carré* ; et le moyen est la racine de cela. C'est donc la racine de un plus un quart, moins un demi, dont on prend la racine. Et le plus grand est un dirham. Tu additionnes les trois *carrés*, on a un demi-dirham plus la racine de un plus un quart, plus la racine de un plus un quart moins un demi, dont on prend la racine. Tu procèdes ensuite comme tu avais procédé pour la petite partie, et cela en te ramenant aux dix dirhams.

Tu dis alors : nous avons divisé dix dirhams par un demi-dirham plus la racine de un plus un quart plus la racine de un plus un quart moins un demi, dont on a pris la racine, et on a obtenu une chose. Mais, quand nous multiplions le quotient par le diviseur, on a dix dirhams. Multiplie alors une chose par un demi-dirham plus la racine de un plus un quart plus la racine de un plus un quart moins un demi, dont on a pris la racine. On a alors une demi-chose plus la racine du *carré* plus le quart du *carré* plus la racine du *carré-carré* plus le quart du *carré-carré* moins la moitié d'un *carré*, dont on a pris la racine, égaux à dix dirhams. Ôte donc de dix dirhams une demi-chose plus la racine du *carré* plus le quart du *carré*, il reste donc dix dirhams moins une demi-chose moins la racine du *carré* et un quart de *carré*, égaux à la racine du *carré-carré* plus le quart du *carré-carré*, moins un demi-*carré*, dont on a pris la racine. Tu multiplies dix moins une demi-chose moins la racine du *carré* et un quart de *carré* par lui-même, on a cent dirhams plus un *carré* et un demi-*carré* plus la racine du *carré-carré* plus un quart de *carré-carré* moins dix choses moins la racine de cinq cents *carrés*, égaux à la racine d'un *carré-carré* plus un quart de *carré-carré* moins un demi-*carré*. Restaure les cent dirhams par dix choses et la racine de cinq cents *carrés*, et ajoute-le à la racine du *carré-carré* plus un quart de *carré-carré* moins un demi-*carré* ; restaure la racine du *carré-carré* plus un quart de *carré-carré* [59r] par la moitié du *carré*, ajoute-le au *carré* plus un demi et ôte la racine du *carré-carré* plus un quart de *carré-carré* de la racine du *carré-carré* plus un quart de *carré-carré* ; il reste cent dirhams plus deux *carrés* égaux à dix choses plus la racine de cinq cents *carrés-carrés*. Ramène les deux *carrés* à un seul *carré*.

وربعٍ إلاّ نصف درهمٍ، وهو المالُ الأصغر، والأوسط جذر هذا، <فهو> جذر واحدٍ وربعٍ إلاّ نصفاً، مأخوذاً جذره، والأكبر درهمٌ. فتجمع الأموالَ الثلاثة، فيكون نصفَ درهمٍ وجذرَ واحدٍ وربعٍ، وجذرَ واحدٍ وربعٍ إلاّ نصفاً، مأخوذاً جذره. ثمّ تعمل كما عملتَ في القسم الأصغر، وهو أن ترجع إلى العشرةِ الدراهمِ.

فتقول: قسمنا عشرةَ دراهمَ على نصفِ درهمٍ <وجذر واحدٍ وربع> وجذرِ واحدٍ وربعٍ إلاّ نصفاً، مأخوذاً جذره، فخرج شيءٌ. فمتى ما ضربنا ما خرج لنا من القَسْمِ في المقسوم عليه كان عشرة دراهم؛ فاضرب شيئاً في نصفِ درهمٍ، وجذرِ واحدٍ وربعٍ، وجذرِ واحدٍ وربعٍ إلاّ نصفاً، مأخوذاً جذره، فيكون: نصف شيءٍ وجذر مالٍ وربع مالٍ، وجذر مالِ مالٍ وربع مالِ مالٍ، إلاّ نصف مالٍ مأخوذاً جذره يعدلُ عشرةَ دراهمَ. فألْقِ نصفَ شيءٍ وجذر مالٍ وربع مالٍ من عشرة دراهم، فيبقى عشرة دراهمَ إلاّ نصف شيءٍ وإلاّ جذر مالٍ وربع مالٍ تعدل جذرَ مالِ مالٍ وربع مالِ مالٍ إلاّ نصف مالٍ مأخوذاً جذره. فتضرب عشرةً إلاّ نصفَ شيءٍ، وإلاّ جذرَ مالٍ وربع مالٍ، في مثلِه، فيكون: مائةُ درهمٍ ومالٌ ونصفُ مالٍ وجذر مالٍ ومالٍ وربعُ مالِ مالٍ إلاّ عشرة أشياء وإلاّ جذر خمسمائة مالٍ تعدلُ جذرَ مالِ مالٍ وربعَ مالِ مالٍ إلاّ نصف مالٍ. فاجْبُر المائة درهمٍ بعشرة أشياء وجذر خمسمائة مالٍ، وزِدْها على جذر مالِ مالٍ وربع مالِ مالٍ إلاّ نصف مالٍ، واجبُر جذر مالِ مالٍ وربعِ مالِ / مالٍ بنصفِ ٥٩-و مالٍ وزِدْه على مالٍ ونصفٍ، وألْقِ جذرَ مالِ مالٍ وربع مالِ مالٍ بجذرِ مالِ مالٍ وربع مالِ مالٍ، فيبقى: مائةُ درهمٍ ومالان تعدلُ عشرةَ أشياء وجذر خمسمائة مالِ مالٍ. فَرُدَّ المالَيْن إلى مالٍ واحدٍ.

1 جذر: وجذر — 3 مأخوذاً: مأخوذ — 11 مأخوذ: مأخوذاً — 15-16 مال مال وربع ... خمسمائة مال: كرّرها ثم ضرب عليها بالقلم، وكرر ثلاثة أسطر من النص ظنّ أنّه نسيها، ثم ضرب عليها بالقلم.

Or tu sais qu'un *carré* est la moitié de deux *carrés*. Prends donc de tout ce que tu as la moitié, on a alors un *carré* plus cinquante dirhams égaux à cinq choses plus la racine de cent vingt-cinq *carrés*. Partage en deux moitiés les choses plus la racine de cent vingt-cinq *carrés*, on a deux plus un demi plus la racine de trente et un plus un quart. Multiplie-le par lui-même, on a trente-sept plus un demi, plus la racine de sept cent quatre-vingt-un plus un quart ; ôtes-en les cinquante dirhams, il reste la racine de sept cent quatre-vingt-un plus un quart moins douze moins un demi. La racine de cela est soustraite de deux plus un demi plus la racine de trente et un plus un quart. Ce qui reste est la plus grande partie.

Mais nous avons montré que la plus petite partie est la racine de trois mille cent vingt-cinq moins cinquante dirhams, dont on a pris la racine, retranché de cinq. Il est donc clair, d'après ce que nous avons décrit, que la partie moyenne est ce qui reste de dix, c'est-à-dire deux dirhams plus un demi, plus la racine de sept cent quatre-vingt-un plus un quart moins douze et un demi, dont on prend la racine, plus la racine de trois mille cent vingt-cinq dirhams moins deux cinquièmes de dirham, dont on prend la racine, et tout cela est diminué de la racine de trente et un dirhams plus un quart.

On peut aussi y répondre autrement ; les deux réponses mènent à la même chose. Et cela en disant que la partie moyenne est douze plus un demi plus la racine de sept cent quatre-vingt-un et un quart, dont on prend la racine, dont on soustrait la racine de trente et un dirhams plus un quart moins deux dirhams et un demi. Et si tu veux, dis : deux dirhams plus un demi, plus douze dirhams et un demi plus la racine de sept cent quatre-vingt-un plus un quart dont on prend la racine, et de cette somme on retranche la racine de trente et un plus un quart.

وقد علمت أنّ مالاً من مالين نصفهُما، فَخُذْ من كلّ شيء معك نصفَه، فيكون مالاً وخمسين درهماً يعدل خمسةَ أشياء وجذرَ مائةٍ وخمسة وعشرين مالاً. فنصِّف الأشياء وجذر مائة وخمسة وعشرين مالاً فيكون اثنين ونصفاً وجذر واحد وثلاثين وربع، فاضربه في مثله فيكون سبعةً وثلاثين ونصفاً وجذر سبعمائةٍ وأحدٍ وثمانين وربعٍ، فألْقِ منها الخمسين درهماً، فيبقى جذر سبعمائةٍ وأحدٍ وثمانين وربعٍ إلاّ اثني عشر وإلاّ نصفاً. فجذرُ ذلك منقوصٌ من اثنين ونصف وجذر واحد وثلاثين وربع، فما بقي فهو القسمُ الأكبر.

وقد بيّنّا أنّ القِسمَ الأصغر جذر ثلاثة آلافٍ ومائة وخمسة وعشرين إلاّ خمسين درهماً مأخوذاً جذره منقوصاً من خمسة. فبيِّنٌ ممّا وصفنا أنّ القسمَ الأوسط ما بقي من العشرة، وهو درهمان ونصف وجذر سبعمائةٍ وأحدٍ وثمانين وربع إلاّ اثني عشر ونصفاً، مأخوذاً جذره وجذر ثلاثة آلاف ومائة وخمسة وعشرين درهماً إلاّ خمسين درهماً مأخوذاً جذره، منقوصاً من جميع ذلك جذرُ واحدٍ وثلاثين درهماً وربعٍ.

وهو أيضاً يكون على غير هذا الجواب، وهما يؤدِّيان إلى شيءٍ واحدٍ وهو أن تقول: إنّ القسمَ الأوسط اثنا عشر ونصف وجذر سبعمائة وأحدٍ وثمانين وربع مأخوذاً جذره منقوصاً منه جذرِ واحدٍ وثلاثين درهماً وربع إلاّ درهمين ونصفاً. وإن شئت فقل: درهمان ونصف، واثنا عشر درهماً ونصف وجذر سبعمائة وأحدٍ وثمانين وربع مأخوذٌ جذره، منقوصٌ من جميع ذلك جذرُ واحدٍ وثلاثين وربع.

1 نصفهما: نصفها — 3 فنصف ... مالاً: وردت في متن المخطوطة وكرّرها الناسخ في الهامش / وخمسة: خمسة — 5 درهماً: الدرهم — 6 وإلاّ نصفاً: كتب "مالاً ونصفاً" ثمّ طمس "مالاً" وترك الواو ونسي كتابة "إلاّ" — 10 وأحد: احد — 11 مأخوذاً: مأخوذ / وخمسة: خمسة — 12 مأخوذاً: مأخوذ — 16 مأخوذاً: مأخوذ — 18 وأحد وثمانين: أحد وثمانين.

Et si tu veux procéder pour la partie moyenne comme tu l'as fait pour la petite partie et la grande partie, alors pose le *carré* moyen parmi les trois *carrés* différents, deux dirhams, le plus petit *carré*, une chose, et le plus grand *carré*, la racine d'un *carré* plus quatre dirhams. Multiplie alors une chose par la racine du *carré* plus quatre dirhams, [59^{v}] on a la racine du *carré-carré* plus quatre *carrés* égaux à quatre dirhams. Multiplie quatre dirhams par lui-même, on a seize dirhams égaux à un *carré-carré* plus quatre *carrés*. Le *carré* est donc égal à la racine de vingt moins deux dirhams. La racine de cela est le petit *carré*, le moyen est deux dirhams et le grand *carré* est deux dirhams plus la racine de vingt, dont on prend la racine. Divisons donc vingt selon les trois *carrés* différents que nous avons mentionnés. Nous divisons vingt dirhams et rien d'autre car nous avons posé le *carré* moyen deux dirhams et on a obtenu une chose ; nous multiplions donc une chose par deux dirhams et par la racine de vingt moins deux dirhams, dont on a pris la racine, et par deux dirhams plus la racine de vingt, dont on a pris la racine. On a donc deux choses, plus la racine de vingt *carrés-carrés* plus deux *carrés*, dont on a pris la racine, plus la racine de vingt *carrés-carrés* moins deux *carrés*, dont on a pris la racine, égal à vingt dirhams. Retranche donc deux choses de vingt dirhams, il reste vingt dirhams moins deux choses, égal à deux *carrés* plus la racine de vingt *carrés-carrés* dont on a pris la racine, plus la racine de vingt *carrés-carrés* moins deux carrés dont on a pris la racine. Multiplie donc vingt dirhams moins deux choses par lui-même, on a alors quatre cents dirhams plus quatre *carrés* moins quatre-vingts choses, égaux à deux *carrés* plus la racine de vingt *carrés-carrés* dont on a pris la racine plus la racine de vingt *carrés-carrés* moins deux *carrés* dont on a pris la racine, <le tout> par lui-même. Ce qui est huit *carrés* plus la racine de quatre-vingts *carrés-carrés*. Il vient donc huit *carrés* plus la racine de quatre-vingts *carrés-carrés* égaux à quatre cents dirhams plus quatre *carrés* moins quatre-vingts choses. Restaure les quatre cents plus les quatre *carrés* par quatre-vingts choses, ajoute son égal aux huit *carrés* plus la racine de quatre-vingts *carrés-carrés* et retranche quatre *carrés* de huit *carrés* ; il reste quatre cents dirhams égaux à quatre *carrés* plus quatre-vingts choses plus la racine de quatre-vingts *carrés-carrés*. Ramène tout ce que tu as à un seul *carré*, et cela en

وإن أحببت أن تعملَ في القسم الأوسط كما عملتَ في القسم الأصغر والقسم الأكبر، فاجعل المال الأوسط من الثلاثة الأموال المختلفة درهمين، والمالَ الأصغر شيئاً، والمالَ الأكبر جذر مالٍ وأربعة دراهمَ، فاضرب شيئاً في جذرِ مالٍ وأربعة دراهمَ، / فيكون جذر مالٍ مالٍ وأربعة أموال يعدل أربعة دراهم. ٥٩-ظ
فاضرب أربعة دراهم في مثلها، فيكون ستّة عشر درهماً تعدل مالَ مالٍ وأربعة أموال، فالمال يعدل جذر عشرين إلاّ درهمين، فجذر ذلك هو المال الأصغر. والمال الأوسط درهمان، والمال الأكبر درهمان وجذر عشرين مأخوذٌ جذره. فنقسم عشرين على هذه الأموال المختلفة الثلاثة التي ذكرناها. وإنّما قسمنا عشرين درهماً دون غيرها، لأنّا جعلنا المال الأوسط درهمين، فخرج شيءٌ، فنضرب شيئاً في درهمين وفي جذرِ عشرين إلاّ درهمين، مأخوذاً جذره، وفي درهمين وجذر عشرين مأخوذ جذره، فيكون شيئين وجذر عشرين مالَ مالٍ ومالين مأخوذاً جذره، وجذر عشرين مالَ مالٍ إلاّ مالين مأخوذاً جذره يعدل عشرين درهماً. فألْقِ شيئين من عشرين درهماً، فيبقى عشرون درهماً إلاّ شيئين يعدل مالين، وجذر عشرين مال مالٍ مأخوذ جذره، وجذر عشرين مال مالٍ إلاّ مالين مأخوذ جذره. فاضرب عشرين درهماً إلاّ شيئين في مثلها، فيكون أربعمائة درهمٍ وأربعة أموالٍ إلاّ ثمانين شيئاً تعدل مالَيْن وجذر عشرين مالَ مالٍ مأخوذاً جذره وجذر عشرين مال مالٍ إلاّ مالَيْن مأخوذاً جذره في مثله؛ وهو ثمانية أموال وجذر ثمانين مال مال، فصار ثمانية أموالٍ وجذر ثمانين مال مالٍ يعدل أربعمائة درهم وأربعة أموال إلاّ ثمانين شيئاً. فاجبر الأربعمائة والأربعة الأموال بثمانين شيئاً، وزد مثلها على الثمانية الأموال، وجذر ثمانين مالَ مالٍ وألْقِ أربعة أموال من ثمانية أموال، فيبقى أربعمائة درهم تعدل أربعة أموال، وثمانين شيئاً وجذر ثمانين مالَ مالٍ، فردّ كلّ شيءٍ معك إلى مالٍ واحد، وهو أن تضرب كلّ

7 درهمان (الأولى والثانية): درهمين – 9 فخرج: فيخرج – 10 مأخوذاً: مأخوذ – 12 مأخوذاً (الأولى والثانية): مأخوذ – 16 مأخوذاً: مأخوذ – 17 مأخوذاً: مأخوذ – 19-20 فاجبر ... بثمانين شيئاً: في الهامش.

multipliant tout ce que tu as par la racine du huitième de huitième plus le quart d'un huitième de huitième, moins le demi-huitième d'un dirham. On a donc un *carré* plus la racine de cent vingt-cinq carrés, dont on retranche cinq choses, égaux à la racine de trois mille cent vingt-cinq dirhams, dont on retranche vingt-cinq dirhams. Partage en deux moitiés la racine de cent vingt-cinq *carrés*, de laquelle on retranche cinq choses, on a la racine de trente et un plus un quart, moins deux plus un demi. Multiplie-le par lui-même, on a trente-sept plus un demi moins la racine de sept cent quatre-vingt-un plus un quart, auquel tu ajoutes la racine de trois [60r] mille plus cent vingt-cinq dirhams moins vingt-cinq dirhams ; on a alors douze plus un demi plus la racine de sept cent quatre-vingt-un plus un quart. De la racine de cela on retranche la racine de trente et un plus un quart moins deux plus un demi. Ce qui reste est la partie moyenne, qui est deux dirhams plus un demi plus la racine de sept cent quatre-vingt-un plus un quart, auquel est ajouté douze plus un demi dont on a pris la racine, et de tout cela on retranche la racine de trente et un plus un quart.

<67> Si on dit : tu divises dix en deux parties, tu ajoutes à l'une des deux parties ses deux racines et tu retranches de l'autre ses deux racines, et elles seront égales.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des parties cinq plus une chose et l'autre cinq moins une chose, et tu ajoutes au cinq moins une chose ses deux racines. On a donc cinq moins une chose plus la racine de vingt moins quatre choses ; et tu retranches de cinq plus une chose ses deux racines, il reste cinq plus une chose moins la racine de vingt plus quatre choses, égaux à cinq moins une chose plus la racine de vingt moins quatre choses. Restaure cinq plus une chose par la racine de vingt plus quatre choses qu'on ajoute à cinq moins une chose plus la racine de vingt moins quatre choses. On a alors cinq moins une chose plus la racine de vingt plus quatre choses plus la racine de vingt moins quatre choses égaux à cinq plus une chose. Restaure alors le cinq moins une chose plus la racine de vingt plus quatre choses plus la racine de vingt moins quatre choses par une chose, ajoute-la à cinq plus une chose, et retranche cinq de cinq ; il reste deux

شيءٍ معك في جذر ثُمْن الثُمْن وربع ثُمْن الثُمْن إلاّ نصف ثُمْن درهمٍ، فيكون مالاً وجذر مائةٍ وخمسةٍ وعشرين مالاً منقوصاً منه خمسة أشياء يعدل جذر ثلاثة آلافٍ ومائةٍ وخمسةٍ وعشرين درهماً منقوصاً منه خمسة وعشرون درهماً. فنصّف جذر مائة وخمسة وعشرين مالاً منقوصاً منه خمسة أشياء، فيكون جذر أحدٍ وثلاثين وربع إلاّ اثنين ونصفاً، فاضربه في مثله، فيكون سبعةً وثلاثين ونصفاً، إلاّ جذر سبعمائة وأحد وثمانين وربع، فزِدْ عليه جذر ثلاثة / آلاف ٦٠-و ومائة وخمسة وعشرين درهماً، إلاّ خمسة وعشرين درهماً، فيكون اثني عشر ونصفاً وجذر سبعمائة وأحدٍ وثمانين وربع. فجذر ذلك منقوص منه جذر واحدٍ وثلاثين وربع إلاّ اثنين ونصفاً، فما بقي فهو القسم الأوسط، وهو درهمان ونصف وجذر سبعمائة وأحدٍ وثمانية وربع، مُزاداً عليه اثنا عشر ونصف مأخوذاً جذره منقوصاً من جميع ذلك جذر واحدٍ وثلاثين وربع.

<٦٧> فإن قال: عشرةٌ قَسَمْتها قسمين، فَزِدْتَ على أحد القسمين جذريه ونقصت من الآخر جذريه فاستويا.

قياسه: أن تجعل أحدَ القسمين خمسةً وشيئاً والآخر خمسة إلاّ شيئاً، فتزيد على خمسة إلاّ شيئاً جذريه، فيكون خمسةً إلاّ شيئاً وجذر عشرين إلاّ أربعة أشياءَ، وتُسْقِط من خمسةٍ وشيء جذريه، فيبقى خمسةٌ وشيءٌ إلاّ جذر عشرين وأربعة أشياء تعدل خمسةً إلاّ شيئاً وجذر عشرين إلاّ أربعة أشياء. فاجْبُرْ خمسةً وشيئاً بجذرِ عشرين وأربعة أشياء وزِدْها على خمسةٍ إلاّ شيئاً وجذر عشرين إلاّ أربعة أشياء، فيكون: خمسة إلاّ شيئاً وجذر عشرين وأربعة أشياء وجذر عشرين إلاّ أربعة أشياء تعدل خمسةً وشيئاً. فاجْبُرْ الخمسة إلاّ شيئاً وجذر عشرين وأربعة أشياء وجذر عشرين إلاّ أربعة أشياء بالشيء، وزِدْه على خمسةٍ وشيء، وألْقِ

2 وخمسة: خمسة / جذر: فوق السطر — 3 وخمسة: خمسة — 4 وخمسة: خمسة — 5-6 فاضربه ... سبعمائة: في الهامش — 8 منقوص: منقوصاً — 10 مزاداً: مزادٌ / اثنا: اثني.

choses égales à la racine de vingt plus quatre choses plus la racine de vingt moins quatre choses. Multiplie deux choses par deux choses, on a quatre *carrés*. Et multiplie la racine de vingt plus quatre choses et la racine de vingt moins quatre choses par elle-même.

Si tu veux cela, multiplie la racine de vingt moins quatre choses par elle-même, on a vingt moins quatre choses, et multiplie la racine de vingt plus quatre choses par elle-même, on a vingt plus quatre choses ; additionne-les, on a quarante dirhams, puis multiplie racine de vingt moins quatre choses par racine de vingt plus quatre [60^{v}] choses, on a racine de quatre cents moins seize *carrés* ; double-le, on a la racine de mille six cents moins soixante-quatre *carrés*. Prends cela ajouté à quarante, ce qui est la racine de vingt plus quatre choses par elle-même plus la racine de vingt moins quatre choses par elle-même, il vient donc quarante dirhams plus la racine de mille six cents moins soixante-quatre *carrés*, égaux à quatre *carrés*. Retranche quarante dirhams de quatre *carrés*, il reste quatre *carrés* moins quarante dirhams égaux à la racine de mille six cents moins soixante-quatre *carrés*. Multiplie donc quatre *carrés* moins quarante dirhams par lui-même, on a seize *carrés-carrés* plus mille six cents dirhams moins trois cent vingt *carrés* égaux à mille six cents dirhams moins soixante-quatre *carrés*. Réduis par ceci, on a seize *carrés-carrés* égaux à deux cent cinquante-six *carrés*. Donc le *carré-carré* est égal à seize *carrés*, le *carré* est égal à seize dirhams, et la chose est égale à quatre dirhams, que tu ajoutes à cinq et que tu ôtes de cinq car tu as posé l'une des deux parties cinq plus une chose et l'autre cinq moins une chose. On a donc l'une des parties, neuf, et l'autre, un.

Et si tu veux, tu procèdes de cette manière : tu poses l'une des deux parties cinq plus une chose et l'autre cinq moins une chose ; tu ajoutes à la plus petite ses deux racines ; on a cinq moins une chose plus les deux racines de cinq moins une chose, et tu retranches de l'autre ses deux racines ; il reste cinq plus une chose moins les deux racines de cinq plus une chose, égaux à cinq moins une chose plus les deux racines de cinq moins une chose. Restaure cinq plus une chose par les deux racines de cinq plus une chose et ajoute-le à cinq moins une chose plus les deux racines de

خمسةً بخمسةٍ، فيبقى شيئان تعدل جذرَ عشرين وأربعة أشياء وجذر عشرين إلاّ أربعة أشياء؛ فاضْرِبْ شيئين في شيئين، فيكون أربعة أموالٍ؛ واضْربْ جذرَ عشرين وأربعة أشياء وجذر عشرين إلاّ أربعة أشياء في مثله.

فإن أردتَ ذلك، فاضْرب جذرَ عشرين إلاّ أربعة أشياء في مثله، فيكون عشرين إلاّ أربعة أشياء، واضْرب جذر عشرين وأربعة أشياء في مثله، فيكون عشرين وأربعة أشياء؛ فاجمعه فيكون أربعين درهماً، ثمّ اضرب جذرَ عشرين إلاّ أربعة أشياء في جذر عشرين وأربعة / أشياء، فيكون جذر أربعمائة إلاّ ستّة عشر ٦٠-ظ مالاً، فأضعفه فيكون جذر ألف وستمائة إلاّ أربعة وستين مالاً. فَخُذْ ذلك مُزاداً على أربعين، وهو جذر عشرين وأربعة أشياء <في مثله> وجذر عشرين إلاّ أربعة أشياء في مثله، فصار: أربعين درهماً وجذرَ ألفٍ وستمائةٍ إلاّ أربعةً وستين مالاً تعدل أربعةَ أموالٍ. فألْقِ أربعين درهماً من أربعةِ أموالٍ، فيبقى: أربعة أموال إلاّ أربعين درهماً تعدلُ جذرَ ألفٍ وستمائةٍ إلاّ أربعة وستين مالاً. فاضرب أربعةَ أموالٍ إلاّ أربعين درهماً في مثله. فيكون: ستّة عشرَ مالَ مالٍ وألف وستمائةِ درهمٍ إلاّ ثلاثمائة وعشرين مالاً تعدل ألفاً وستمائة درهمٍ إلاّ أربعة وستين مالاً. فتقابل بها، فيكون ستّة عشر مالَ مالٍ تعدل مائتين وستّة وخمسين مالاً. فمال المال يعدل ستّة عشر مالاً، والمالُ يعدلُ ستّة عشرَ درهماً، والشيءُ يعدل أربعةَ دراهمَ، فتزيده على خمسةٍ وتسقطه من خمسةٍ لأنّك جعلتَ أحدَ القسمين خمسةً وشيئاً والآخر خمسةً إلاّ شيئاً. فيكون أحدُ القسمين تسعةً والآخرُ واحداً.

وإن شئت عملت على هذه الجهة: وهو أن تجعل أحد القسمين خمسةً وشيئاً، والآخر خمسةً إلاّ شيئاً. فتزيد على الأصغرِ جذريه، فيكون خمسةً إلاّ شيئاً وجذري خمسة إلاّ شيئاً، وتنقص من الآخر جذريه، فيبقى خمسة وشيء إلاّ جذري خمسة وشيء تعدل خمسةً إلاّ شيئاً وجذري خمسةٍ إلاّ شيئاً. فاجْبُرْ خمسةً وشيئاً بجذري خمسةٍ وشيءٍ، وزِدْه على خمسةٍ إلاّ شيئاً وجذري خمسةٍ إلاّ شيئاً

8 فخذ: فجذر / مزاداً: مزاد.

cinq moins une chose ; on a donc cinq moins une chose plus les deux racines de cinq plus une chose plus les deux racines de cinq moins une chose égaux à cinq plus une chose ; réduis le cinq par la chose, ajoute-la à cinq plus une chose et retranche cinq de cinq ; il reste deux choses égales aux deux racines de cinq moins une chose plus les deux racines de cinq plus une chose. [61r] Une seule chose est donc égale à la racine de cinq plus une chose plus la racine de cinq moins une chose. Multiplie une chose par une chose, on a un *carré*. Multiplie la racine de cinq plus une chose par elle-même et la racine de cinq moins une chose par elle-même, on a dix dirhams plus la racine de cent dirhams moins quatre *carrés* égaux à un *carré*. Ôte donc dix dirhams du *carré*, il reste un *carré* moins dix dirhams égaux à la racine de cent dirhams moins quatre *carrés*. Multiplie donc un *carré* moins dix dirhams par lui-même, on a un *carré-carré* plus cent dirhams moins vingt *carrés* égaux à cent dirhams moins quatre *carrés*. Réduis par ceci ; on a la chose égale à quatre dirhams. Tu l'ajoutes à cinq et tu la retranches de cinq, on a l'une des deux parties, neuf, et l'autre, un.

Si tu veux, si tu parviens à une chose égale à la racine de cinq plus une chose plus la racine de cinq moins une chose, alors tu retranches la racine de cinq plus une chose d'une chose ; il reste une chose moins la racine de cinq plus une chose, égaux à la racine de cinq moins une chose. Multiplie alors une chose moins la racine de cinq plus une chose par lui-même. Si tu veux cela, multiplie une chose par elle-même, on a un *carré* ; puis multiplie la racine de cinq plus une chose par une chose, on a la racine de cinq *carrés* plus un cube, soustractif ; multiplie ensuite également la racine de cinq plus une chose par une chose, on a la racine de cinq *carrés* plus un cube, soustractif ; puis multiplie la racine de cinq plus une chose par elle-même, on a cinq plus une chose, additif. Puis additionne-les. On a un *carré* plus cinq dirhams plus une chose moins la racine de vingt *carrés* plus quatre cubes égaux à cinq dirhams moins une chose. Restaure le cinq moins une chose par la chose et ajoute-la au *carré* plus cinq dirhams plus une chose. Restaure le *carré* et le cinq et les deux choses par la racine de vingt *carrés* plus quatre cubes, ajoute-la au cinq, et retranche cinq de cinq ; il reste un *carré* plus deux choses égaux à la racine de vingt *carrés* plus quatre cubes. Multiplie alors un *carré* plus deux choses par lui-même, on a un *carré-*

فيكون خمسةً إلاّ شيئاً، وجذري خمسةٍ وشيء، وجذري خمسةٍ إلاّ شيئاً، يعدل خمسةً وشيئاً. فاجبُر الخمسة بالشيء، وزِدْه على خمسةٍ وشيء، وألْقِ خمسةً بخمسةٍ، فيبقى شيئان يعدلان جذري خمسةٍ إلاّ شيئاً وجذري خمسةٍ وشيء، / فالشيءُ الواحدُ يعدل جذرَ خمسةٍ وشيء، وجذر خمسةٍ إلاّ شيئاً. فاضرب شيئاً ٦١-و
في شيءٍ يكن مالاً، واضرب جذرَ خمسةٍ وشيء <في مثلِه> وجذر خمسةٍ إلاّ شيئاً في مثله يَكُنْ: عشرة دراهمَ وجذر مائة درهمٍ إلاّ أربعة أموال تعدل مالاً. فألْقِ عشرةَ دراهمَ من مالٍ فيبقى: مالٌ إلاّ عشرة دراهمَ يعدل جذرَ مائةِ درهمٍ إلاّ أربعة أموال. فاضرب مالاً إلاّ عشرة دراهمَ في مثلِه يَكُن: مالُ مالٍ ومائةُ درهمٍ إلاّ عشرين مالاً يعدل مائة درهمٍ إلاّ أربعة أموال، فتقابل بها فيكون: الشيءُ يعدل أربعةَ دراهم، فتزيده على خمسةٍ وتنقصه من خمسةٍ، فيكون أحدُ القسمين تسعةً والآخر واحداً.

وإن شئت – إذا بلغت إلى شيء يعدل جذرَ خمسةٍ وشيء، وجذرَ خمسةٍ إلاّ شيئاً – أن تُلقِيَ جذرَ خمسةٍ وشيءٍ من شيءٍ، فيبقى شيءٌ إلاّ جذر خمسةٍ وشيءٍ يعدل جذرَ خمسةٍ إلاّ شيئاً، فاضرب شيئاً إلاّ جذر خمسةٍ وشيءٍ في مثله. فإذا أردتَ ذلك فاضرب شيئاً في مثله يكن مالاً، ثم اضرب جذرَ خمسةٍ وشيء في شيءٍ يَكُنْ جذرَ خمسةِ أموالٍ وكعب ناقصًا، ثمّ اضرب أيضاً جذرَ خمسةٍ وشيء في شيءٍ يَكُنْ جذرَ خمسةِ أموالٍ وكعب ناقصًا، ثمّ اضرب جذر خمسةٍ وشيءٍ في مثله يَكُنْ خمسةً وشيئاً زائداً، ثمّ اجمعه يكن: مالٌ وخمسةُ دراهمَ وشيءٍ إلاّ جذر عشرين مالاً وأربعة كعابٍ تعدل خمسةَ دراهمَ إلاّ شيئاً، فاجبر الخمسة إلاّ شيئاً بالشيءِ، وزِدْه على مالٍ وخمسةِ دراهمَ وشيء، واجْبُر المالَ والخمسة والشيئين بجذر عشرين مالاً وأربعة كعاب، وزِدْه على الخمسةِ، وألقِ خمسةً بخمسةٍ فيبقى: مالٌ وشيئان يعدل جذرَ عشرين مالاً وأربعة كعاب، فاضرب مالاً وشيئين في مثله يَكُنْ: مالُ مالٍ وأربعة أموالٍ وأربعة كعابٍ يعدل

12 إذا: فإذا – 17 شيء: مثله – 18 مال: مالاً – 21 والشيئين: والشيء.

carré plus quatre *carrés* plus quatre cubes égaux à vingt *carrés* plus quatre cubes. Retranche quatre cubes de quatre cubes, et quatre *carrés* de quatre *carrés*, il reste un *carré-carré* égal à seize *carrés*. Le *carré* [61^{v}] est donc égal à seize dirhams, et la chose est égale à quatre dirhams. Ajoute-la au cinq et retranche-la de cinq, l'une des deux parties sera neuf et l'autre un.

Si tu veux, procède de cette autre manière : on divise un nombre en deux parties, tu ajoutes à l'une sa racine, et tu retranches de l'autre sa racine, alors elles seront égales ; ou tu ajoutes à l'une ses deux racines, et tu retranches de l'autre ses deux racines, alors elles seront égales, ou ce que tu veux des racines, de sorte que le nombre des racines soit égal par addition et par soustraction ; on sait alors qu'elles seront toujours égales lors de la multiplication de la racine de l'une des deux parties par la racine de l'autre, quel que soit <le nombre> de racines.

Exemple : tu divises dix en deux parties et tu poses l'une des deux parties neuf et l'autre un. Alors, si nous ajoutons à un ses deux racines et si nous retranchons de neuf ses deux racines, il reste de neuf, trois, et le un aboutit à trois, et ils seront égaux. Or on sait que le trois est le produit de la racine de neuf par la racine de un. S'il en était ainsi, pose l'une des deux parties un *carré*, et l'autre dix moins un *carré* ; multiplie la racine du *carré* par la racine de dix moins un *carré*, alors on a la racine de dix *carrés* moins un *carré-carré*, égale à un *carré* plus deux racines. Multiplie un *carré* plus deux racines par lui-même et réduis par ceci dix *carrés* moins un *carré-carré*, on a la racine du *carré* un dirham, et le *carré* un dirham, ce qui est l'une des deux parties, et l'autre neuf.

Si tu veux, procède de cette autre manière : on a deux nombres inégaux, tels que l'on retranche du plus grand sa racine et qu'on ajoute au plus petit sa racine, alors ils sont égaux ; la racine du plus grand nombre est donc plus grande que la racine du plus petit nombre de un car il a dit : une racine et une racine ; mais s'il avait dit : on retranche du plus grand ses deux racines et on ajoute au plus petit ses deux racines, alors ils sont égaux, la racine du plus grand nombre serait supérieure de deux à la racine du plus petit ; et s'il avait dit : trois racines et trois racines, alors la racine du plus

عشرين مالاً وأربعة كعاب. فألقِ أربعةَ كعابٍ بأربعةِ كعابٍ وأربعة أموالٍ بأربعة أموالٍ فيبقى مالُ مالٍ يعدل ستّة عشر مالاً. فالمالُ / يعدل ستّة عشر ٦١-ظ
درهماً، والشيءُ يعدل أربعةَ دراهمَ. فتزيده على خمسةٍ وتنقصه من خمسة، فيكون أحدُ القسمين تسعةً والآخر واحداً.

وإن شئت فاعْمَلْ على هذه الجهة الأخرى: وهو أنّ كلّ عددٍ يُقْسَمُ بقسمين فتزيدُ على أحدِهما جذرَه وتُنْقِصُ من الآخر جذرَه فيستويان، أو تزيد على أحدِهما جذرَيه وتنقص من الآخر جذريه فيستويان، أو ما أحببت من الأجذار بعد أن يستوي عدد الأجذار بالزيادة والنقصان، فمعلوم أنّهما يستويان أبداً مع ضرب جذرِ أحدِ القسمين في جذرِ القسمِ الآخر كائناً ما كانت الأجذار.

ومثالُ ذلك: أن تقسم عشرةً بقسمين، وتجعل أحد القسمين تسعةً والآخر واحداً. فإذا زِدْنا على الواحدِ جذريه ونقصنا من التسعةِ جذريها، يبقى من التسعة ثلاثةٌ، وانتهى الواحد إلى ثلاثةٍ، واستويا. ومعلومٌ أنّ الثلاثة من ضرب جذر التسعة في جذر الواحد. فإذا كان هذا كذلك، فاجعل أحد القسمين مالاً والآخر عشرةً إلاّ مالاً، واضرب جذرَ مالٍ في جذر عشرةٍ إلاّ مالاً يَكُنْ: جذرُ عشرةِ أموالٍ إلاّ مال مال يعدل مالاً وجذرين. فاضرب مالاً وجذرين في مثله، وقابل به عشرةَ أموالٍ إلاّ مالَ مالٍ، يكن جذر المالِ درهماً، والمالُ درهمٌ، وهو أحد القسمين، والآخر تسعة.

وإن شئت فاعْمَلْ على هذه الجهة الأخرى: وهو أنّ كلّ عددَيْن مختلفَيْن يُنْقَصُ من الأكبر جذره، ويُزادُ على الأصغر جذره فيعتدلان، فإنّ جذرَ العددِ الأكبر أكبرُ من جذر العدد الأصغر بواحدٍ، لأنّه قال: جذر وجذر؛ ولو قال: يُنقَصُ من الأكبر جذراه ويزاد على الأصغر جذراه فيستويان، كان جذرُ العددِ الأكبر أكثر من جذر الأصغر باثنين. ولو قال: ثلاثة أجذار وثلاثة أجذار، لكان

22 جذراه (في الموضعيْن): جذريه.

grand serait supérieure à celle du plus petit de trois, autant que le nombre des racines, de sorte qu'elles deviennent égales. Il en est ainsi pour les deux racines de nombres, et de même pour ce qui est plus grand ou plus petit, si <les nombres> de racines ajoutées ou retranchées sont égaux ; et c'est selon ceci, si Dieu le veut. [62r]

Exemple : posons les *carrés* les carrés *ABCD*, *EDFG* sur une même droite, soit la droite *CDGP*. Posons le plus grand *carré*, le carré *ACBD*, et le plus petit *carré*, le carré *EDFG*. Posons le plus grand carré tel que, si on en soustrait ses deux racines et que, si on ajoute au petit carré ses deux racines, ils soient égaux ; mais on sait que le côté du carré *ABCD* est plus grand que le côté <du carré> *EDFG* de la droite *EB*. Je dis que la droite *EB* est deux.

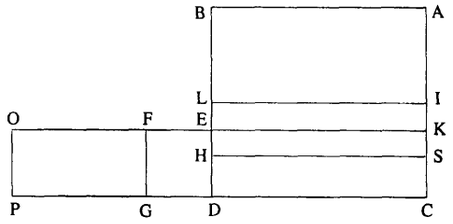
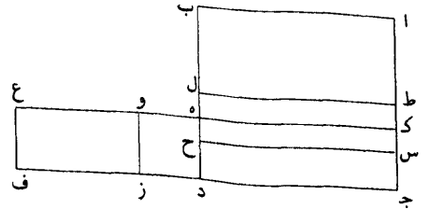


Fig. 41

Si elle n'était pas deux, qu'elle soit plus grande ou plus petite que deux. Posons-la d'abord plus grande, et posons la droite *BL* deux. Menons la droite *LI* parallèle à *CD*. Alors le rectangle *AL* est les deux racines du rectangle *AD*. Ajoutons deux à la droite *EF* ; soit la droite *FO* ; et complétons le rectangle *FP*. Le rectangle *FP* est les deux racines du carré *EG*. Les rectangles *LC* et *EP* sont par conséquent égaux. Mais la droite *DL* est plus grande que la droite *ED*, et la droite *ED* est égale à la droite *DG* ; donc la droite *LD* est plus grande que la droite *DG* ; mais la droite *BL* est égale à la droite *GP*, donc la droite *BD* est plus grande que la droite *DP*. Mais la droite *BD* est égale à la droite *DC*, donc la droite *DC* est plus grande que la droite *DP*, et la droite *DL* est plus grande que la droite *DE*. Donc le rectangle *LC* est plus grand que le rectangle *EP*. Or il lui était égal, ce qui est absurde et ne se peut pas. *BE* n'est donc pas plus grande que deux. Et je dis qu'elle n'est pas plus petite qu'elle. Si c'était possible, posons-la plus petite que deux, et posons *BH* deux. Donc le rectangle *AH* est deux racines du carré *AD* ; le rectangle *SD* est par conséquent égal au rectangle *DO*. Mais la

جذر الأكبر أكثر من جذر الأصغر بثلاثةٍ على قدرِ عددِ الأجذار التي يستويان فيها، فكذلك يكون من الجذرين من العدد. وكذلك كُلّما كَثُرَ أو قلّ، إذا استوت الأجذار في الزيادة والنقصان. فعلى ذلك إن شاء الله. /

٦٢-و ومثال ذلك: أنّا نجعل المالَيْن مُرَبَّعَيْ ا ب ج د ه د و ز على خطّ واحد وهو خطّ ج د ز ف. ونجعل المالَ الأكبر مربّع ا ج ب د والمال الأصغر مربّع ه د و ز. ونجعل المربّع الأكبر إذا نُقِص منه جذراه وزِيدَ على المربّع الأصغر جذراه استويا. ومعلومٌ أنّ ضلعَ مربّعِ ا ب ج د أطول من ضلع ه د و ز بخطّ ه ب؛ فأقول: إنّ خطّ ه ب اثنان.



فإن لم يكن اثنين فليكن أكثر أو أقلّ من اثنين. فنجعله أوّلاً أكثر ونجعل خطّ ب ل اثنين، ونخرج خطّ ل ط يوازي ج د. فسطحُ ا ل جذرا سطح ا د. ونزيد على خطّ ه و اثنين، وهو خطّ و ع؛ ونتمّ سطح و ف. فسطح و ف جذرا مربّع ه ز. فسطح ل ج وَه ف إذاً متساويان، وخطّ د ل أطول من خطّ ه د، وخطّ ه د مثل خطّ د ز، فخطّ ل د أطول من خطّ د ز، وخطّ ب ل مثل خطّ ز ف، فخطّ ب د أطول من خطّ د ف. وخطّ ب د مثل خطّ د ج، فخطّ د ج أطول من خطّ د ف وَ<خطّ> د ل أطول من خطّ د ه، فسطحُ ل ج أعظم من سطح ه ف. وقد كان مساوياً له؛ هذا خُلفٌ لا يمكن، فليس ب ه بأكثر من اثنين؛ وأقول: ولا أقلّ منه. فإن أمكن فلنجعله أقلّ من اثنين ونجعل ب ح اثنين. فسطح ا ح جذرا مربّع ا د، فسطح س د إذن مثلُ سطحِ

2 وكذلك: ولذلك — 9 أكثر: أقلّ — 13 د ز: ج ز / د ز: ه ج ز.

droite *DH* est plus petite que la droite *DE* et la droite *DE* est égale à la droite *DG*, donc la droite *DG* est plus grande que la droite *DH*. Mais la droite *HB* est égale à la droite *GP*, car chacune est deux. La droite *DP* est donc plus grande que la droite *DB*. Mais la droite *DB* est égale à la droite *CD*, donc la droite *DP* est plus grande que la droite *CD* et la droite *CS* est plus petite que la droite *DE* ; donc le rectangle *DO* est plus grand que le rectangle *DS* ; or il lui était égal, ce qui est absurde et ne se peut pas. Donc la droite *BE* n'est pas plus petite que deux. Or on a montré qu'elle n'était pas plus grande, la droite *BE* est par conséquent deux.

Si donc nous menons la droite *EK* [62^{v}] parallèle à la droite *CD*, le rectangle *AE* sera les deux racines du carré *AD* ; mais la droite *BE* est égale à la droite *GP*, et *DG* est égal à *DE*, donc *BD* est égal à *DP*. Mais *BD* est égal à *DC*, donc *CD* est égal à *DP*, et *CK* est égal à *DE* ; donc le rectangle *KD* est égal au rectangle *DO*.

On a ainsi montré que, si tu ôtes du plus grand *carré* ses deux racines et que tu ajoutes au plus petit ses deux racines, et qu'ils deviennent égaux, alors la racine du plus grand *carré* est plus grande que la racine du plus petit de deux. Et, selon cette propriété, tu sais que, si tu ôtes du plus grand trois de ses racines, et si tu ajoutes au plus petit l'analogue et qu'ils sont égaux, la différence entre eux sera trois dirhams ; et c'est selon la grandeur des nombres des racines ajoutées ou retranchées, s'ils sont égaux.

La cause de cela par la voie de l'algèbre est en effet vraie et claire : pour deux *carrés* dont la racine de l'un est plus grande que la racine de l'autre d'un dirham, alors, si tu retranches du plus grand sa racine et si tu ajoutes au plus petit sa racine, ils deviennent égaux, comme je te l'ai indiqué ; en effet, quand tu poses la racine de l'un des deux *carrés* une chose et l'autre une chose et un dirham, alors tu multiplies chacun d'eux par lui-même, le plus petit sera un *carré* et le plus grand un *carré* plus deux choses plus un dirham. Alors, si tu ajoutes au plus petit sa racine, qui est une chose, et que tu retranches du plus grand sa racine, qui est une chose plus un dirham, il reste du plus grand un *carré* plus une chose et le plus petit devient un *carré* plus une chose et ils seront égaux.

د ع. وخطّ د ح أصغر من خطّ د ه وخطّ د ه مثل خطّ د ز، فخطّ د ز أطول من خطّ د ح. وخطّ ح ب مثل خطّ ز ف لأنّ كلّ واحدٍ منهما اثنان، فخطّ د ف أطول من خطّ د ب. وخطّ د ب مثل خطّ ج د، فخطّ د ف أطول من خطّ ج د وخطّ ج س أصغر من خطّ د ه، فسطح د ع أعظم من سطح د س؛ وقد كان مساوياً له، <هذا خلف، لا يمكن> فليس خطّ ب ه بأقل من اثنين، وقد بُيّن ولا بأكثر منه؛ فخطّ ب ه إذن اثنان.

فإذا أخرجنا خطّ ه ك / يوازي خط ج د، كان سطح ا ه جذري مربّع ا د؛ وخطّ ب ه مثل خطّ ز ف، ود ز مثل د ه؛ فَ ب د مثل د ف. وَب د مثل د ج، فَ ج د مثل د ف، وَج ك مثل د ه. فسطحُ ك د مثل سطح د ع. ٦٢-ظ

فقد تبيّن أنّك، إذا أسقطتَ من المالِ الأكبر جذريه، وزِدْتَ على الأصغر جذريه فاستويا، أنّ جذرَ المالِ الأكبر أكثرُ من جذرِ الأصغر باثنين. وبهذه الصفةِ تعلم أنّك، إذا أسقطت من الأكبر ثلاثة أجذاره وزِدْتَ على الأصغر مثلها فاستويا، أنّ الفضلَ بينهما ثلاثة دراهم، وهو يكون على قدر عدد الأجذار إذا استوَت في الزيادة والنقصان.

والعلّةُ فيه من طريق الجبر صحيحةٌ واضحةٌ، وذلك أنّ كلّ مالَيْن يكون جذرُ أحدِهما أكثر من جذر الآخر بدرهمٍ، فإنّك إذا نقصتَ من الأكبر جذرَه وزِدْتَ على الأصغرِ جذره استويا على نَحْوِ ما ذكرتُ لك، وذلك أنّك تجعل جذرَ أحدِ المالَيْن شيئاً والآخر شيئاً ودرهماً، فتضرب كلّ واحد منهما في مثلِه، فيكون الأصغرُ مالاً والأكبرُ مالاً وشيئين ودرهماً. فإذا زِدْتَ على الأصغرِ جذرَه، وهو شيء ونقصت من الأكبر جذره وهو شيء ودرهم، بقي من الأكبر مالٌ وشيء وانتهى الأصغرُ إلى مالٍ وشيء، فقد استويا.

7 ج د: ح د — 17 استويا: في الهامش.

De même s'il dit : posons la racine du plus petit une chose et la racine du plus grand une chose plus deux dirhams. Nous multiplions chacun d'eux par lui-même, alors le plus petit sera un *carré* et le plus grand un *carré* plus quatre choses plus quatre dirhams. Si tu ajoutes au plus petit ses deux racines, ce qui est deux choses, et si tu retranches de l'autre ses deux racines, ce qui est deux choses plus quatre dirhams, il reste du plus grand un *carré* plus deux choses et le plus petit devient un *carré* plus deux choses, et ils sont égaux aussi. Il en est de même quand c'est plus grand que cela ou plus petit, et cela se ramène à ce que nous avons dit une fois <les nombres> de racines ajoutées ou retranchées égaux.

S'il en est ainsi, nous posons la racine de la plus petite partie de dix une chose ; la plus petite sera donc un *carré* ; puis nous posons la racine de la plus grande – ce qui reste de dix – une chose [63^r] plus deux dirhams. Nous le multiplions par lui-même, on a un *carré* plus quatre choses plus quatre dirhams, ce qui est la plus grande partie ; nous lui ajoutons la plus petite, qui est un *carré*, on a deux *carrés* plus quatre racines plus quatre dirhams égaux à dix dirhams ; tu réduis de la manière que je t'ai expliquée, alors la chose sera un, qui est la racine de la plus petite partie, et la racine de la plus grande partie l'excède de deux dirhams, ce qui est trois ; alors la plus grande partie sera neuf et la plus petite un.

<68> S'il dit : tu divises dix en deux parties et tu divises dix par chacune des deux parties, on obtient six plus un quart.

Ôte toujours deux de six plus un quart, il reste quatre plus un quart ; c'est comme s'il avait dit : tu divises dix en deux parties, tu divises chacune des deux parties par l'autre et on obtient quatre plus un quart. Alors tu procèdes comme je te l'ai décrit.

La cause pour laquelle tu ôtes le deux est vraie par la voie de l'indication[46]. Car tu sais que, si tu divises l'une des deux parties par l'autre, alors le quotient sera une chose ; si donc tu divises le dix par cette chose[47], le quotient sera une chose plus un dirham, car le dix est égal à la

[46] Voir chap. VII, p. 235-239.

[47] Voir commentaire.

وكذلك لو قال: جعلنا <جذرَ> الأصغر شيئاً وَ<جذر> الأكبر شيئاً ودرهمين؛ وضربنا كلّ واحدٍ منهما في مثله كان الأصغرُ مالاً والأكبرُ مالاً وأربعة أشياءَ وأربعة دراهمَ. فإذا زِدْتَ على الأصغرِ جذريه – وهو شيئان – ونقَصتَ من الآخر جذرَيْه، وهو شيئان وأربعة دراهمَ، بقي من الأكبر مالٌ وشيئان، وانتهى الأصغر إلى مالٍ وشيئين فقد استويا أيضاً. وكذلك ما كثُرَ من ذلك أو قلّ يرجع إلى ما قلنا بعدَ أن تستويَ الأجذار في زيادتها ونقصانها.

فإذا كان هكذا، جعلنا جذرَ القسمِ الأصغر من العشرة شيئاً، فيكون الأصغر مالاً، ثمّ نجعل جذرَ الأكبر – وهو الباقي من العشرة – شيئاً / ودرهمين، ٦٣-و ونضربه في مثله فيكون مالاً وأربعة أشياء وأربعة دراهم، وهو القسم الأكبر، فنضيف إليه القسمَ الأصغر وهو مالٌ فيكون: مالَيْن وأربعةَ أجذارٍ وأربعةَ دراهمَ تعدل عشرةَ دراهمَ. فتقابل بها على نَحْوِ ما فسَّرتُ لك، فيكون الشيءُ واحداً وهو جذر القسمِ الأصغر، وجذرُ القسمِ الأكبر أكثر منه بدرهمين وهو ثلاثة، فيكون القسمُ الأكبر تسعةً والأصغرُ واحداً.

<٦٨> فإن قال: عشرةٌ قَسَمْتُها قسمين. فقَسمت العشرةَ على كلّ واحدٍ من القسمين، فخرج ستّة وربع.

فأسْقِطْ من الستّة والربع اثنين أبداً، فيبقى أربعةٌ وربع، فكأنّه قال: عشرةٌ قَسَمْتها قسمين فقسمت كلّ واحدٍ من القسمين على الآخر، فخرج أربعةٌ وربع. فتعمل كما وصفتُ لك.

والعلّةُ في إلقائك الاثنين صحيحة من طريق الإشارة، لأنّك قد علمتَ أنّك إذا قسمتَ أحدَ القسمين على الآخرِ فخرج من القسمِ شيءٌ، أنّك إذا قسمتَ العشرةَ على ذلك الشيء <فإنّ> الذي يخرج من القسْمِ شيءٌ ودرهمٌ، لأنّ العشرة مثل ذلك القِسم الذي قسمته ومثل المقسوم عليه، وكذلك يخرج من

16 وربع: في الهامش – 19 طريق الإشارة هو طريق للبرهان بالتحليل، انظر ص. 235–239.

partie que tu as divisée plus le diviseur. Tu obtiens de même de l'autre côté ; si en effet tu divises le dix par l'autre partie, alors le quotient excède de un le quotient de l'autre par la partie selon laquelle tu as divisé les dix dirhams.

On a montré par cette méthode que, si tu divises le dix par chacune de ces deux parties, alors <la somme> des quotients excède toujours de deux <la somme> des quotients de chacune des deux parties du dix par l'autre.

Nous montrons cela par la voie de la géométrie. Nous disons : si on divise un nombre en deux parties puis on divise le nombre par l'une des deux parties, alors le quotient excède le quotient de la partie qui n'a pas été divisée par la partie par laquelle le nombre a été divisé, toujours de un.

Exemple : nous divisons le nombre *AC* en deux parties au point *B*, ce sont les deux parties *AB* et *BC*. Or on a divisé *AC* par *BC*, on a obtenu *DE* ; on a divisé *AB* par *BC*, on a obtenu *GE* ; et *DE* est plus grand que *GE* de *DG* ; je dis que *DG* est un. [63ᵛ]

Démonstration : on a divisé *AC* par *BC*, on a obtenu *DE* ; donc le produit de *DE* par *BC* est *AC*, d'après ce que nous avons montré précédemment ; on a divisé *AB* par *BC*, on a obtenu *GE*, donc le produit de *GE* par *BC* est *AB*. Mais le produit de *BC* par *DE* est égal au produit de *GE* par *BC* plus *DG* par *BC* ; le produit de *DE* par *BC* est *AC*, et le produit de *GE* par *BC* est *AB*. Il reste le produit de *DG* par *BC*, qui est *BC*. Mais le produit de un par *BC* est *BC*, donc le produit de un par *BC* est égal au produit de *DG* par *BC*, donc *DG* est égal à un. Ce qu'il fallait démontrer.

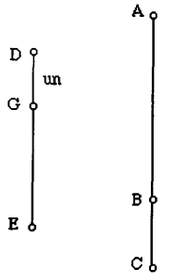


Fig. 42

الناحية الأخرى، وهو أنّك إذا قسمت العشرةَ على القسمِ الآخر، كان الذي يخرج يزيد على ما يخرج من القَسْمِ الآخرِ على القِسْمِ الذي قسمت عليه العشرة دراهم <واحداً>.

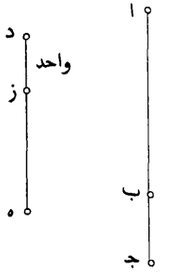
فقد تبيَّن من هذا الطريق أنّك، إذا قسمت العشرةَ على كلّ واحدٍ من القِسمين، فإنّه يزيد على ما يخرج من قِسْمي العشرة كلّ واحدٍ منهما على الآخر اثنين أبداً.

وبيِّنٌ ذلك من طريق الهندسة. وهو أنّا نقول: إنّ كلّ عددٍ يُقسم بقسمين، ثمّ يقسم العدد على أحدِ القسمين، فإنّ الذي يخرج من القَسْمِ أكثر ممّا يخرج من قِسْمةِ القِسْمِ الذي لم يُقسم على القِسمِ الذي قُسم عليه العدد بواحدٍ أبداً.

مثالُ ذلك: أنّا نقسم عددَ ا ج بقسمين على نقطة ب، وهما قسما ا ب ب ج. وقد قُسم ا ج على ب ج فخرج د ه، وقُسم ا ب على ب ج فخرج ز ه، وَد ه أكثر من ز ه بـ د ز؛ فأقول: إنّ د ز واحدٌ. /

٦٣-و

وبرهانُ ذلك: أنّ ا ج قُسِم على ب ج فخرج د ه، فَضَرْبُ د ه في ب ج هو ا ج لِما قد قدّمنا بيانه، وَا ب قُسِم على ب ج فخرج ز ه، فضَرْب ز ه في ب ج هو ا ب. وقد كان ضَرْبُ ب ج في د ه مثلَ ضرب ز ه في ب ج وَد ز في ب ج وضرب د ه في ب ج هو ا ج، وضرْب ز ه في ب ج هو ا ب، فبقي ضرب د ز في ب ج هو ب ج. وضرب الواحد في ب ج هو ب ج، فصار ضربُ الواحدِ في ب ج مثلَ ضربِ د ز في ب ج، فَ د ز مساوٍ للواحدِ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



1 كان:أن — 3 دراهم: درهماً — 5 فإنه: انه — 20 مساوٍ: مساوية.

Et si tu veux, tu sais que le produit de *DE* par *BC* est *AC*. Donc *BC* mesure *AC* par autant d'unités qu'il y en a dans *DE*. Et le produit de *GE* par *BC* est *AB*. Donc *BC* mesure *AB* par autant d'unités qu'il y en a dans *GE*. Il reste *BC*, qui mesure elle-même par autant d'unités qu'il y en a dans *DG*. Mais *BC* mesure elle-même une seule fois, donc *DG* est un. Ce qu'il fallait démontrer.

D'après cette propriété, nous savons que, si nous divisons *AC* par *AB*, alors le quotient excède le quotient de *CB* par *BA* de un également.

On a ainsi montré que, si on divise un nombre en deux parties puis que l'on divise le nombre par chacune des deux parties, alors les quotients excèdent les quotients de chacune des deux parties du nombre par l'autre, toujours de deux.

Si on dit : tu divises dix en deux parties, puis tu divises le dix par chacune des deux parties, puis tu multiplies l'une par l'autre, on a six plus un quart, je dis que le produit des deux quotients l'un par l'autre est égal à la somme des deux quotients.

La cause de cela est vraie et établie par la voie de l'indication[48] : en effet, nous avons montré que, si tu divises dix par chacune [64r] des deux parties, alors les quotients des deux divisions excèdent chacun le quotient des deux parties de dix l'une par l'autre d'un dirham. Or il est clair, d'après ce que nous avons décrit, que le quotient des deux parties de dix l'une par l'autre, c'est quatre plus un quart. Si nous posons l'une une chose, l'autre quatre plus un quart moins une chose, alors les quotients des deux parties de dix par chacune des deux parties sont l'un une chose plus un dirham et l'autre cinq plus un quart moins une chose. Je dis donc que le produit d'un dirham et une chose par cinq plus un quart moins une chose est égal à un dirham plus une chose plus cinq plus un quart moins une chose, ce qui est six plus un quart.

[48] Voir chap. VII, p. 235-239.

وإن شئت فقد علمتَ أنّ ضربَ د ه في ب ج هو ا ج، فَ ب ج يعدّ ا ج بقدر ما في د ه من الآحاد؛ وضربُ ز ه في ب ج هو ا ب، فَ ب ج يعدّ ا ب بقدر ما في ز ه من الآحاد. وبقي ب ج يعدُّ نفسه بقدر ما في د ز من الآحاد؛ وَب ج يعدُّ نفسه مرةً واحدةً، فَ د ز واحدٌ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وبهذه الصفة نعلم أنّا، إذا قسمنا ا ج على ا ب، أنّ الذي يخرج يزيد على ما يخرج من قسمةِ ج ب على ب ا واحداً أيضاً.

فقد تبيَّن أنّ كلّ عددٍ يُقْسم بقسمين ثمّ يُقسَم العددُ على كلّ واحدٍ من القسمين، أنّ الذي يخرج يزيد على ما يخرج من قِسْمي العدد كلّ واحدٍ منهما على الآخر اثنين أبداً.

فإن قال: عشرةٌ، قسمتها قسمين فقسمت العشرةَ على كلّ واحدٍ من القسمين، ثمّ ضربت أحدهما في الآخر فكان ستّة وربعاً. فأقول: إنّ ضربَك ما خرج من القسمين أحدِهما في الآخر هو مثلُ جمعك القسمين.

والعلّةُ في ذلك صحيحةٌ قائمةٌ من طريق الإشارة. وهو أنّا قد بيّنا أنك إذا قسمت العشرةَ على كلّ واحدٍ من / القسمين فإنّ الذي يخرج من القِسْمين يزيد ٦٤-و كلّ واحدٍ منهما على الذي يخرج من قِسمي العشرة أحدِهما على الآخر درهماً. وبيّنّ ممّا وصفنا أنّ الذي يخرجُ من قِسْمي العشرة كلّ واحدٍ منهما على الآخر أربعة وربع. فإذا جعلنا أحدهما شيئاً والآخرَ أربعة وربعاً إلاّ شيئاً كان الذي يخرج من قسْمي العشرة على كلّ واحد من القسمين: أحدهُما شيء ودرهم، والآخرُ خمسة وربع إلاّ شيئاً؛ فأقول: إنّ ضربَ درهمٍ وشيء في خمسة وربع إلاّ شيئاً هو مثل درهم وشيء وخمسة وربع إلاّ شيئاً، وذلك ستّة وربع.

13 من طريق الإشارة: ex via intuitionis est — 19-20 فأقول ... إلاّ شيئاً: في الهامش.

Démonstration : tu sais que le produit d'un dirham plus une chose par cinq plus un quart moins une chose est égal au produit d'une chose par quatre plus un quart moins une chose, plus un dirham par quatre plus un quart moins une chose, plus un dirham par une chose, plus un dirham par un dirham. Or nous avons montré que le produit d'une chose par quatre plus un quart moins une chose est égal à un dirham, et le produit du dirham par quatre plus un quart moins une chose est quatre plus un quart moins une chose, et un dirham par une chose est une chose, et un dirham par un dirham est un dirham. Tu additionnes, il vient six plus un quart.

Nous montrons cela par la voie de la géométrie. Nous disons : si on divise un nombre en deux parties, puis on divise le nombre par chacune de ces deux parties, alors le produit des deux quotients l'un par l'autre est égal à la somme des deux quotients.

Exemple : on a divisé le nombre *A* en deux parties qui sont les nombres *B* et *C*. Alors *A* a été divisé par *B*, on a *E*. *A* a été divisé par *C*, on a *D*. Je dis que le produit de *E* par *D* est égal à *E* plus *D*.

Démonstration : *A* a été divisé par *B*, on a *E*. Donc le produit de *E* par *B* est *A*. De même le produit de *D* par *C* est *A*. Donc le produit de *E* par *B* devient égal au produit de *D* par *C*. Le rapport est donc : la grandeur de *C* par rapport à *B* est égale à la grandeur de *E* par rapport à *D*. Or nous avons montré que le produit de *D* par *C* est *A*, et le produit de un par *A* est *A* ; alors le produit de un par *A* est égal au produit de *D* par *C*. Le rapport est donc : la grandeur de un par rapport à *D* est égale à la grandeur de *C* par rapport à *A*. Mais *A* est égal à *B* plus *C*. Donc la grandeur de un par rapport à *D* est égale à la grandeur de *C* par rapport à *B* plus *C*. Et la grandeur de *C* par rapport à *B* plus *C* est égale à la grandeur de *E* par rapport à *E* plus *D*, car nous avons montré que la grandeur de *C* [64^{v}] par rapport à *B* est égale à la grandeur de *E* par rapport à *D*. Si nous composons, on a la grandeur de *C* par rapport à *B* plus *C* égale à la grandeur de *E* par rapport à *E* plus *D*. Donc la grandeur de un par rapport à *D* est égale à la grandeur de *E* par rapport à *E* plus *D*. Donc le produit de un par *E* plus *D* est égal au produit de *E* par *D*. Mais le produit de un par *E* plus *D* est *E* plus *D* ; donc le produit de *E* par *D* est égal à *E* plus *D*. Ce qu'il fallait démontrer[49].

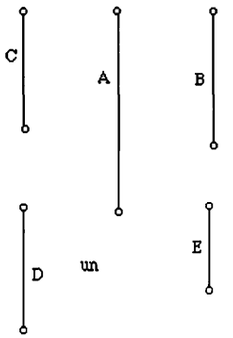


Fig. 43

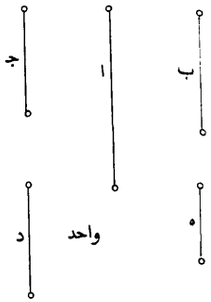
[49] Voir Note complémentaire [4].

برهان ذلك: أنّك قد علمتَ أنّ ضربَ درهمٍ وشيء في خمسةٍ وربع إلاّ شيئاً مثلُ ضربِ شيءٍ في أربعةٍ وربعٍ إلاّ شيئاً، ودرهمٍ في أربعةٍ وربع إلاّ شيئاً، ودرهمٍ في شيء، ودرهمٍ في درهم. وقد بيّنا أنّ ضربَ شيءٍ في أربعةٍ وربع إلاّ شيئاً درهمٌ، وضرب درهم في أربعة وربع إلاّ شيئاً أربعةٌ وربع إلاّ شيئاً، ودرهم في شيءٍ شيءٌ، ودرهم في درهمٍ درهمٌ. فتجمعه فيكون ستّة وربعاً.

ونبيّن ذلك من طريق الهندسةِ وهو أنّا نقول: إنّ كلّ عددٍ يُقسم بقسمين، ثمّ يُقسم العدد على كلّ واحدٍ من القسمين، فإنّ ضربَ ما يخرج من القسمين، أحدهما في الآخر، مثلُ الذي يخرج من القسمين.

مثالُ ذلك: أنّ عددَ آ قُسِم بقسمين وهما عددا ب وَجـ. فقد قُسِم آ على ب فخرج هـ وقُسِم آ على جـ فخرج دَ؛ فأقول: إنّ ضربَ هـ في دَ هو مثل هـ وَدَ.

برهان ذلك: أنّ آ قُسِم على ب فخرج هـ، فضربُ هـ في ب هو آ وكذلك ضربُ دَ في جـ هو آ، فصار ضربُ هـ في ب مثلَ ضربِ دَ في جـ. فالنسبةُ: قدرُ جـ عند ب كقدر هـ عند دَ. وقد بيّنا أنّ ضربَ دَ في جـ هو آ، وضرب الواحد في آ هو آ. فضربُ الواحدِ في آ مثلُ ضرب دَ في جـ؛ فالنسبة: قدرُ الواحد عند دَ كقدر جـ عند آ، وآ مثل ب وَجـ. فقدر الواحدِ عند دَ كقدرِ جـ عند ب وَجـ وقدرُ جـ عند ب وَجـ كقدرِ هـ عند هـ وَدَ، لأنّا قد بيّنا أنّ قدرَ جـ / عند ب كقدر هـ عند دَ. فإذا ركّبنا كان قدرُ جـ عند ب وَجـ كقدرِ هـ عند هـ وَدَ؛ فصار قدرُ الواحدِ عند دَ كقدرِ هـ عند هـ وَدَ. فضربُ الواحدِ في هـ وَدَ مثل ضربِ هـ في دَ، وضرب الواحدِ في هـ وَدَ هو هـ وَدَ. فصار ضَرْبُ هـ في دَ هو هـ وَدَ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



٦٤-ظ

2 ودرهم: ودرهماً — 3 ودرهم (الثانية): ودرهماً — 6 من طريق الهندسة: per via geometricam —
10 فخرج دَ: فخرج جـ — 15 قدر: بقدر — 19 فإذا: وإذا / عند هـ: في الهامش.

Je dis également : si on divise deux nombres chacun par un nombre et si on multiplie les quotients des deux nombres l'un par l'autre, alors le produit est égal au quotient du produit des deux nombres divisés, l'un par l'autre, par le produit des deux diviseurs, l'un par l'autre.

Exemple : nous divisons un nombre *A* et un nombre *B* par un nombre *C* et un nombre *D*. Nous divisons *A* par *C*, on a *E* ; et nous divisons *B* par *D*, on a *G*. On multiplie *A* par *B*, on a *H* ; et on multiplie *C* par *D*, on a *L*. On a multiplié *E* par *G*, on a *M*. Je dis que, si nous divisons *H* par *L*, on a *M*.

Démonstration : on a divisé *A* par *C*, on a *E*. Donc le produit de *E* par *C* est *A*. Et le produit de *E* par *G* est *M*. Donc *E* a été multiplié par deux nombres, qui sont *G* et *C* ; on a *M* et *A*. Donc la grandeur de *G* par rapport à *C* est égale à la grandeur de *M* par rapport à *A*. Donc le produit de *G* par *A* est égal au produit de *M* par *C*. Posons *D* commun dans la multiplication. Donc le produit de *G* par *A* puis par *D* est égal au produit de *M* par *C* puis par *D*. Mais le produit de *M* par *C* puis par [65r] *D* est égal au produit de *C* par *D* puis par *M*, et le produit de *C* par *D* est *L* ; donc le produit de *M* par *L* est égal au produit de *C* par *D* puis par *M*. Mais le produit de *C* par *D* puis par *M* est égal au produit de *M* par *C* puis par *D*, et le produit de *M* par *C* puis par *D* est égal au produit de *G* par *A* puis par *D*. Donc le produit de *M* par *L* sera égal au produit de *G* par *A* puis par *D*. Mais le produit de *G* par *A* puis par *D* est égal au produit de *G* par *D* puis par *A* ; et le produit de *G* par *D* est *B*. Donc le produit de *A* par *B* sera égal au produit de *G* par *A* puis par *D*. Or on a montré que le produit de *G* par *A* puis par *D* est égal au produit de *M* par *L*, donc le produit de *M* par *L* sera égal au produit de *A* par *B* ; mais le produit de *A* par *B* est *H*, donc le produit de *M* par *L* est *H*. On a ainsi montré que, si nous divisons *H* par *L*, on obtient *M*, car, si nous multiplions deux nombres l'un par l'autre, alors, si on divise le produit par l'un des deux nombres, on obtient l'autre nombre. Ce qu'il fallait démontrer.

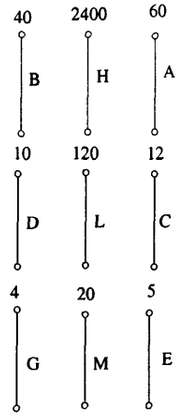
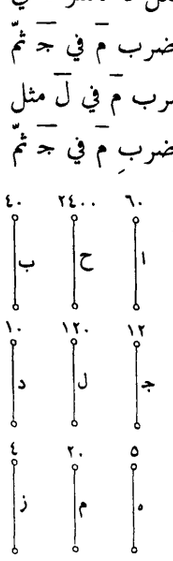


Fig. 44

وأقول أيضاً: إنّ كلّ عددين يُقسَم كلّ واحد منهما على عددٍ، وضُرب ما خرج من قسمي العددين على العددين أحدِهما في الآخر، فإنّ الذي يجتمع من الضرب مثلُ ما يخرج من قِسْمةِ ضربِ العددين المقسومين، أحدِهما في الآخر، على ما يجتمع من ضرب العددين المقسومين عليهما، أحدِهما في الآخر.

ومثالَ ذلك: أنّا نَقْسِم عددَ آ وعدد ب على عدد جـ وعدد دـ. فنقسم آ على جـ فيخرج هـ، ونقسم ب على دـ فيخرج زـ. وقد ضرب آ في ب فاجتمع حـ، وضرب جـ في دـ فاجتمع لـ، وضرب هـ في زـ فاجتمع مـ؛ فأقول: إنّا إذا قسمنا حـ على لـ خرج مـ.

برهانُ ذلك: أنّ آ قُسِم على جـ فخرج هـ، فَضَرْبُ هـ في جـ هو آ، وضرب هـ في زـ هو مـ، فـ هـ قد ضُرِبَ في عددين وهما زـ وجـ فاجتمع منه مـ وآ، فقدرُ زـ عند جـ كقدرِ مـ عند آ. فضربُ زـ في آ مثل ضرب مـ في جـ. ونجعل دـ مشتركاً في الضرب. فضرب زـ في آ ثمّ في دـ مثل ضرب مـ في جـ ثمّ في دـ وضرب مـ في جـ ثمّ في / دـ مثل ضرب جـ في دـ ثمّ في مـ، وضرب جـ في دـ هو لـ. فضرب مـ في لـ مثل ضرب جـ في دـ ثمّ في مـ. وقد كان ضربُ جـ في دـ ثمّ في مـ مثلَ ضربِ مـ في جـ ثمّ في دـ؛ وضرب مـ في جـ ثمّ في دـ مثل ضرب زـ في آ ثمّ في دـ؛ وضرب زـ في آ فصار ضربُ مـ في لـ مثلَ ضربِ زـ في آ ثمّ في دـ؛ وضرب زـ في دـ هو ب. ثمّ في دـ مثل ضرب زـ في دـ ثمّ في آ؛ وضرب زـ في دـ هو ب. وقد بُيّن أنّ فصار ضربُ آ في ب مثلَ ضربِ زـ في آ ثمّ في دـ. فصار ضربُ مـ في لـ ضربَ زـ في آ ثمّ في دـ مثل ضرب مـ في لـ، فضربُ مـ في لـ هو مثلَ ضرب آ في ب. وضرب آ في ب هو حـ، لأنّ كلّ عددين حـ. فقد تبيّن أنّا إذا قسمنا حـ على لـ خرج مـ، فإنّ المجتمعَ من الضربِ إذا قُسِم على نضرب أحدهما في الآخر، أحد العددين خرج العددُ الآخر؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.



11-12 ونجعل ... في آ: كرّرها الناسخ وأشار إلى حذفها — 14 قد كان: فوق السطر.

Ainsi, ce que nous avons introduit est vrai : si tu divises dix en deux parties, puis tu divises le dix par chacune des deux parties, et tu obtiens six plus un quart, alors, si tu multiplies le nombre de l'une des deux parties par l'autre puis par six et un quart, c'est comme si tu multipliais le dix par lui-même.

Il s'ensuit de ce qui précède que, si tu divises dix en deux parties, que tu divises vingt dirhams par chacune des deux parties et que tu obtiens douze et un demi, c'est par exemple lorsque tu divises dix par chacune des deux parties et que tu obtiens la moitié de douze plus un demi, qui est six plus un quart. Car dix est la moitié de vingt. Cela s'ensuit également si tu divises dix en deux parties et que tu divises cinq par chacune des deux parties pour obtenir trois plus un huitième. C'est par exemple lorsque tu divises [65^{v}] dix par chacune des deux parties pour obtenir le double de trois plus un huitième, qui est six plus un quart. Car dix est le double de cinq. Il s'ensuit également que, si tu divises dix en deux parties et que tu divises vingt par chacune des deux parties, puis que tu multiplies l'une par l'autre et qu'on a vingt-cinq, c'est par exemple lorsque tu divises dix par chacune des deux parties, que tu multiplies ensuite l'une par l'autre pour obtenir le quart de vingt-cinq, ce qui est six plus un quart ; car dix est la moitié de vingt, et le demi <d'une chose>, si on le multiplie par lui-même, c'est comme un quart <de la chose> par elle-même. Cela s'ensuit également, si tu divises dix en deux parties et que tu divises trente par chacune des deux parties, puis tu multiplies l'une par l'autre pour obtenir cinquante-six plus un quart ; c'est comme si tu divises dix par chacune des deux parties puis tu multiplies l'une par l'autre pour obtenir le neuvième de cinquante-six plus un quart, ce qui est six plus un quart ; car dix est le tiers de trente, et le tiers <d'une chose> multiplié par lui-même est égal au neuvième de cette chose par elle-même. Cela s'ensuit aussi, si tu divises dix en deux parties, puis tu divises cinq par chacune des deux parties, puis tu multiplies l'une par l'autre pour obtenir un dirham plus un demi plus la moitié d'un huitième. C'est par exemple lorsque tu divises dix par chacune des deux parties, puis

فقد صحّ ممّا قدّمنا أنّك، إذا قسمت عشرةً بقسمين، فقسمتَ العشرةَ على كلّ واحدٍ من القسمين فخرج ستّةٌ وربع، أنّك إذا ضربت عددَ أحدِ القسمين في الآخر ثمّ في ستّةٍ وربع، كان مثل ضربك العشرة في مثلها.

ويجب ممّا قد تقدّم أيضاً أنّك، إذا قسمت عشرة بقسمين، فقسمت عشرين درهماً على كلّ واحدٍ من القسمين فخرج اثنا عشر ونصف، أن يكون إذا قسمت العشرة على كلّ واحدٍ من القسمين أنّ الذي يخرج نصف اثني عشر ونصف، وهو ستّة وربع، لأنّ العشرةَ نصفُ العشرين. ويجب أيضاً أنّك، إذا قسمت عشرة بقسمين، فقسمت خمسة على كلّ واحدٍ من القسمين فخرج ثلاثةٌ وثُمْن، أن يكون إذا قسمتَ / العشرةَ على كلّ واحدٍ من القسمين، أن ٦٥-ظ يخرج ضعفُ ثلاثة وثُمْنٍ، وهو ستّة وربع، لأنّ العشرةَ ضعفُ الخمسةِ. ويجب أن يكون، إذا قسمتَ العشرة بقسمين، فقسمتَ عشرين على كلّ واحدٍ من القسمين، ثمّ ضربت أحدهما في الآخر فكان خمسةً وعشرين، أن يكون إذا قسمت العشرة على كلّ واحدٍ من القسمين، ثمّ ضربتَ أحدهما في الآخر أن يخرج ربعُ الخمسةِ والعشرين وهو ستّة وربع. لأنّ العشرةَ نصفُ العشرين، والنصفُ إذا ضُرِب في مثله كان مثلَ ربعِ ذلك في مثله. ويجب أن يكون، إذا قسمت العشرة بقسمين، فقسمتَ ثلاثين على كلّ واحدٍ من القسمين، ثمّ ضربت أحدهما في الآخر فكان ستّة وخمسين وربعاً، أن يكون إذا قسمت العشرةَ على كلّ واحدٍ من القسمين، ثمّ ضربتَ أحدهما في الآخر أن يخرجَ تُسْعُ ستّة وخمسين وربعٍ وهو ستّة وربع، لأنّ العشرةَ ثلثُ الثلاثين، والثلثُ إذا ضُرِب في مثله كان مثلَ تُسْعِ ذلك الشيءِ في مثله. ويجب أن يكون، إذا قسمت العشرة بقسمين، ثمّ قسمت خمسةً على كلّ واحدٍ من القسمين، ثمّ ضربتَ أحدَهما في الآخر فكان درهماً ونصفاً ونصف ثُمْنٍ، أن يكون إذا قسمت العشرة على كلّ

6 اثني عشر: اثنا عشر – 15 إذا ضرب في مثله: الضمير في "مثله" يعود على الشيء الذي يضرب نصفه في مثله. وهذه الملاحظة ترد في مواقف مماثلة فيما يلي هذه الصفحة — 21 خمسة: في الهامش — 22 ونصفًا: وربعًا.

tu multiplies l'une par l'autre pour obtenir quatre fois un dirham plus un demi plus la moitié d'un huitième, ce qui est six plus un quart. Car dix est le double de cinq, et le double d'une chose, s'il est multiplié par lui-même, on a quatre fois cette chose par elle-même. Nous avons montré que, si tu divises un nombre en deux parties et que tu divises le nombre par chacune de ces deux parties, puis que tu multiplies l'une par l'autre, alors le produit est égal au quotient des deux parties.

Si cela est comme nous l'avons décrit, alors il est clair que, si tu divises dix en deux parties et que tu divises dix par chacune des deux parties, puis que tu multiplies l'une par l'autre pour avoir six plus un quart, alors le quotient de chacune des deux parties par l'autre est aussi [66r] quatre plus un quart.

Il est clair, d'après ce que nous avons décrit, que, si on te dit : tu divises dix en deux parties, tu divises quarante par chacune des deux parties, puis tu multiplies l'une par l'autre, on a cent dirhams, alors tu poses l'une des deux parties cinq plus une chose, et l'autre cinq moins une chose. Tu multiplies l'une par l'autre, on a vingt-cinq moins un *carré*. Tu multiplies cela par cent dirhams, on a deux mille cinq cents moins cent *carrés* égaux à quarante dirhams par eux-mêmes, ce qui est mille six cents dirhams ; tu procèdes comme je te l'ai décrit ; le *carré* sera égal à neuf dirhams et la chose, leur racine, est trois, que tu ajoutes à cinq et que tu retranches de cinq ; alors l'une des deux parties est huit et l'autre deux.

Nous avons procédé ainsi car nous avons montré que, si on multiplie l'un par l'autre les quotients de deux nombres, chacun divisé par un nombre, alors le produit est égal au quotient du produit des deux nombres divisés l'un par l'autre par les deux nombres diviseurs l'un par l'autre. Or nous avons dit que l'une des deux parties de dix est huit et l'autre deux. Si donc

واحدٍ من القسمين، ثم ضربت أحدهما في الآخر، أن يخرج أربعةُ أمثالِ درهمٍ ونصف ونصف ثُمْنٍ وهو ستّة وربع، لأنّ العشرةَ ضعفُ الخمسةِ، وضعفُ الشيءِ إذا ضُرِب في مثله كان أربعةَ أمثال ذلك الشيء في مثله. وقد بيّنا أنّك إذا قسمت عدداً بقسمين، فقسمت العددَ على كلّ واحدٍ من القسمين، ثم ضربتَ أحدَهما في الآخر، أنّ الذي يجتمع من الضرب هو مثلُ ما يخرج من القسمين.

فإذا كان هذا على ما وصفنا فبيِّنٌ أنّك، إذا قسمت عشرةً بقسمين، فقسمت العشرةَ على كلّ واحدٍ من القِسمين، ثم ضربتَ أحدهما في الآخر فكان ستّةً وربعاً، أنّ الذي يخرج من قِسمة كلّ واحدٍ من القسمين على الآخر أيضاً / أربعة وربع. ٦٦-و

وبيِّنٌ ممّا وصفنا أنّه إذا قيل لك: عشرة تقسمها بقسمين، فتقسم أربعين على كلّ واحدٍ من القسمين، ثم تضربُ أحدهما في الآخر فيكون مائةَ درهمٍ، أن تجعل أحدَ القسمين خمسةً وشيئاً والآخر خمسةً إلاّ شيئاً، فتضرب أحدهما في الآخر فيكون خمسةً وعشرين إلاّ مالاً، فتضرب ذلك في مائةِ درهمٍ فيكون ألفين وخمسمائة إلاّ مائة مالٍ تعدل أربعين درهماً في مثلها وهو ألفٌ وستمائة درهمٍ. فتعمل على ما وصفتُ لك، فيكون المالُ يعدل تسعةَ دراهمَ، والشيء جذرها، وهو ثلاثة، فتزيده على خمسةٍ وتنقصه من خمسةٍ، فيكون أحدُ القسمين ثمانيةً والآخر اثنين.

وإنّما فعلنا ذلك لأنّا قد بيّنا أنّ كلّ عددين يُقسَم كلُّ واحدٍ منهما على عددٍ ويُضْرَبُ ما خرج من قسمي العددين على العددين أحدِهما في الآخر، فإنّ الذي يجتمع من الضرب هو مثلُ ما يخرج من قسمة ضرب العددين المقسومين أحدهما في الآخر على ما يجتمع من ضرب العددين المقسومين عليهما أحدِهما في الآخر. وقد قلنا إنّ أحدَ القسمين من العشرة ثمانية والآخر اثنان، فإذا قسمنا

5 الضرب: فوق السطر — 9 أربعة: ستة.

nous divisons quarante par huit, et quarante par deux ; quarante et quarante tiennent lieu de deux nombres ; huit et deux sont deux nombres également.

Il est clair également d'après ce que nous avons décrit que, s'il dit : tu divises dix en deux parties, tu divises cinquante par l'une des deux parties et quarante par l'autre, puis tu multiplies l'une par l'autre, on a cent vingt-cinq dirhams ; tu poses l'une des deux parties de dix, cinq plus une chose, et l'autre, cinq moins une chose ; tu multiplies l'une par l'autre, on a vingt-cinq dirhams moins un *carré* ; tu multiplies cela par cent vingt-cinq, on a trois mille cent vingt-cinq dirhams moins cent vingt-cinq *carrés* égaux à cinquante par quarante, ce qui est deux mille. Tu procèdes comme je te l'ai décrit, on aura le *carré* neuf dirhams et la chose, leur racine, trois, que tu ajoutes à cinq et que tu retranches [66^{v}] de cinq ; alors l'une des deux parties est huit et l'autre deux.

Et si tu veux, tu sais que, si tu divises dix par chacune des deux parties, puis tu multiplies l'une par l'autre, on obtient la moitié du dixième de cent vingt-cinq, ce qui est six plus un quart, car le dix est le quart de quarante et le cinquième de cinquante ; et si on multiplie le quart par le cinquième, c'est égal à la moitié d'un dixième de cette chose multipliée par elle-même ; or ceci est clair également, d'après ce que nous avons montré et expliqué précédemment, à partir de ce qu'il a dit : tu divises dix en deux parties et tu divises chacune des deux parties par l'autre pour obtenir quatre plus un quart, tu ajoutes à quatre plus un quart toujours deux, on a six plus un quart ; tu poses ensuite l'une des deux parties cinq plus une chose et l'autre cinq moins une chose ; tu multiplies l'une par l'autre, on a vingt-cinq dirhams moins un *carré*. Tu multiplies cela par six plus un quart, on a cent cinquante-six plus un quart moins six *carrés* plus un quart égaux à cent dirhams ; tu réduis par ceci et tu restaures, et tu ramènes tout ce que tu

أربعين على ثمانيةٍ، وأربعين على اثنين، صار: أربعون وأربعون بمنـــزلةِ عددين، والثمانيةُ والاثنان عددان أيضاً.

وتبَيَّن أيضاً ممّا وصفنا أنّه، إذا قال: عشرة قسمتها قسمين فَقَسمت خمسين على أحدِ القسمين وأربعين على الآخر، ثم ضربتَ أحدهما في الآخر فكان مائةً وخمسة وعشرين درهماً، أن تجعل أحد القسمين من العشرة خمسةً وشيئاً والآخر خمسةً إلاّ شيئاً، فتضربَ أحدَهما في الآخر فيكون خمسةً وعشرين درهماً إلاّ مالاً. فتضرب ذلك في مائةٍ وخمسةٍ وعشرين، فيكون ثلاثةَ آلافٍ ومائةً وخمسة وعشرين درهماً إلاّ مائةً وخمسة وعشرين مالاً تعدل خمسين في أربعين، وهو ألفان. فتعمل كما وصفتُ لك، فيكون المالُ يعدل تسعةَ دراهم، والشيء جذرها، وهو ثلاثة، فتزيده على خمسةٍ وتُنْقصه / من خمسةٍ، فيكون ٦٦-ظ أحدُ القسمين ثمانيةً والآخر اثنين.

وإن شئت فقد علمت أنّك، إذا قسمتَ العشرة على كلّ واحدٍ من القسمين، ثم ضربتَ أحدهما في الآخر، أنّ الذي يخرج نصفُ عُشرِ مائةٍ وخمسة وعشرين، وهو ستّة وربع، لأنّ العشرةَ رُبْعُ الأربعين وخُمْسُ الخمسين؛ والرُبْعُ إذا ضُرِب في الخُمسِ كان مثلَ نصف عُشرِ ذلك الشيء مضروباً في مثلِه. وبيِّنٌ ممّا وصفنا أيضاً ممّا قد تقدّم بيانه وشرحه من قوله: عشرةٌ قسمتها قسمين، فقسمت كلّ واحدٍ من القسمين على الآخر فخرج أربعةٌ ورُبْع، أن تزيد على الأربعة والرُبْع اثنين أبداً فيكون ستّة وربعاً. ثمّ تجعل أحدَ القسمين خمسةً وشيئاً والآخر خمسةً إلاّ شيئاً، فتضرب أحدهما في الآخر فيكون خمسةً وعشرين درهماً غير مال، فتضرب ذلك في ستّة وربع، فيكون مائةً وستّة وخمسين وربعاً إلاّ ستّة أموالٍ وربعاً تعدل مائةَ درهمٍ. فتُقابل بها وتَجْبُر وتَرُدُّ كلّ شيءٍ معك إلى مالٍ.

1 صار أربعون وأربعون: صار أربعين وأربعين – 15 الخمس: الخمسين – 18 والرُّبع: ورُبع – 21 وربعاً: وربع.

as à un *carré* ; on a alors : un *carré* égal à neuf dirhams, et la chose qui est la racine est trois, que tu ajoutes à cinq et que tu retranches de cinq. L'une des deux parties est alors huit et l'autre deux.

<69> S'il dit : dix que tu divises en deux parties ; tu as divisé le dix par chacune des deux parties, puis tu as multiplié les deux quotients par eux-mêmes, on a vingt dirhams plus un quart.

Alors la racine de vingt plus un quart, ce qui est le quotient des deux parties, est quatre plus un demi ; or nous en avons expliqué le procédé.

S'il dit : nous multiplions le quotient des deux parties par lui-même pour obtenir trente, alors la racine de trente est le quotient des deux parties. Si tu veux connaître combien est chacune des deux parties, alors procède comme je te l'ai décrit en posant l'une des deux parties de dix cinq plus une chose et l'autre cinq moins une chose. Tu multiplies l'une par l'autre, on a vingt-cinq dirhams moins un *carré*. Tu multiplies cela par la racine de trente. Si tu veux, tu multiplies vingt-cinq dirhams moins un *carré* par lui-même, on a six cent vingt-cinq dirhams plus un *carré-carré* moins cinquante *carrés*. Puis tu multiplies cela [67r] par trente, on a trente *carrés-carrés* plus dix-huit mille sept cent cinquante dirhams moins mille cinq cents *carrés* ; la racine de tout cela est égale à cent dirhams. Multiplie cent dirhams par eux-mêmes, on a dix mille dirhams égaux à trente *carrés-carrés* plus dix-huit mille sept cent cinquante dirhams moins mille cinq cents *carrés*. Tu restaures et réduis et ramènes tout ce que tu as à un *carré-carré* ; on a un *carré-carré* plus deux cent quatre-vingt-onze dirhams plus deux tiers égaux à cinquante *carrés*. Partage en deux <le nombre> de *carrés*. On a vingt-cinq. Multiplie-le par lui-même, on a six cent vingt-cinq ; retranches-en deux cent quatre-vingt-onze plus deux tiers ; ce qui reste est trois cent trente-trois plus un tiers ; la racine de cela est soustraite

فيكون: مالاً يعدل تسعةَ دراهمَ، والشيء جذرها، وهو ثلاثة، فتزيده على خمسة وتنقصه من خمسةٍ، فيكون أحدُ القسمين ثمانية والآخر اثنين.

<٦٩> فإن قال: عشرةٌ قسمتها قسمين، فقسمت العشرةَ على كلِّ واحدٍ من القسمين، ثم ضَربتَ ما خرج من القسمين في مثله فكان عشرين درهماً ورُبْعاً.

فجذرُ عشرين ورُبْع – وهو ما خرج من القسمين – هو أربعة ونصف.

وقد شرحنا العمل في ذلك.

فإن قال: ضربنا ما خرج من القسمين في مثله فكان ثلاثين، فجذرُ ثلاثين هو ما خرج من القسمين. فإن أردت أن تعلم كم كلُّ واحدٍ من القسمين، فاعْمل على ما وصفتُ لك، وهو أن تجعل أحدَ القسمين من العشرةِ خمسةً وشيئاً، والآخر خمسةً إلاّ شيئاً، فتضربَ أحدهما في الآخر فيكون خمسةً وعشرين درهماً إلاّ مالاً، فتضرب ذلك في جذر ثلاثين. فإذا أردت ذلك ضربتَ خمسةً وعشرين درهماً إلاّ مالاً في مثله، فكان ستَّمائةٍ وخمسة وعشرين درهماً ومالَ مالٍ إلاّ خمسين مالاً، ثمّ تضرب ذلك / في ثلاثين، فيكون ثلاثين مالَ مالٍ وثمانية ٦٧-و عشر ألفاً وسبعمائة وخمسين درهماً إلاّ ألفاً وخمسمائة مال، فجذرُ ذلك يعدل مائةَ درهمٍ. فاضْرب مائةَ درهمٍ في مثلها، فيكون عشرةَ آلاف درهمٍ تعدل ثلاثين مالَ مالٍ وثمانية عشر ألفاً وسبعمائةٍ وخمسين درهماً إلاّ ألفاً وخمسمائةِ مال. فتَجبُر وتقابل وتَرُدُّ كلّ شيء معك إلى مالِ مالٍ فيكون مالَ مالٍ ومائتين وأحداً وتسعين درهماً وثلثين يعدل خمسين مالاً. فنصِّف الأموال فتكون خمسة وعشرين، فاضربها في مثلها فتكون ستمائة وخمسة وعشرين، فأسْقِط منها مائتين وأحداً وتسعين وثلثين، فما بقي هو ثلاثمائة وثلاثة وثلاثون وثلث. فجذرُ ذلك

6 هو أربعة: وهو أربعة – 15 إلاّ ألفاً: إلاّ ألف – 16 فاضرب مائة درهم: في الهامش – 17 إلاّ ألفاً: إلاّ ألف – 19 وأحداً: وأحد / وثلثين: وثلثي – 21 وأحداً وتسعين وثلثين: وأحد وتسعين وثلثي.

de vingt-cinq, et tu prends la racine de ce qui reste, que tu ajoutes à cinq, ce qui est l'une des deux parties ; soustraite de cinq, c'est l'autre partie.

<70> S'il dit : dix que tu as divisé en deux parties, et tu as divisé le quarante par chacune des deux parties, puis tu multiplies le quotient de cela par lui-même, on a six cent vingt-cinq.

Il faut donc, si tu divises dix par chacune des deux parties et que tu multiplies le quotient par lui-même, que cela soit la moitié du huitième de six cent vingt-cinq, ce qui est trente-neuf plus un demi-huitième, car le dix est le quart de quarante ; et si on multiplie le quart par lui-même, le résultat est la moitié du huitième de ce qu'on obtient de la somme par elle-même. Or nous en avons expliqué le procédé.

Si tu veux dériver de ce problème de nombreux problèmes par cette méthode ou par d'autres, le procédé pour le résoudre est facile, d'après ce que j'ai expliqué dans ce qui précède de mon livre, si Dieu le veut.

منقوصٌ من خمسةٍ وعشرين، مأخوذٌ جذر ما بقي، مُزادٌ على خمسة وهو أحد القسمين، ومنقوصٌ من خمسة وهو القسم الآخر.

<٧٠> فإن قال: عشرة قسمتَها قسمين، فقسمتَ الأربعين على كلّ واحدٍ من القسمين، ثم ضربت ما خرج من ذلك في مثله، فكان ستمائة وخمسة وعشرين.

فيجب أن يكون، إذا قسمت العشرةَ على كلّ واحدٍ من القسمين وضربت ما خرج من ذلك في مثله، أن يكون نصفُ ثُمْنِ ستمائةٍ وخمسة وعشرين وهو تسعة وثلاثون ونصف ثُمْنٍ. لأنّ العشرةَ رُبْعُ الأربعين، والرُبْعُ إذا ضُرِبَ في مثله كان ما اجتمع منه مثلَ نصفِ ثُمْنِ ما يجتمع من جميعه في مثله.

وقد فسَّرنا العمل في ذلك.

فإن أردت أن تُفَرِّع من هذه المسألة مسائلَ كثيرةً على هذا الطريق وغيره، سَهُل عليك العملُ في حلّها على نحو ما تقدّم ممّا شَرَحْتُ لك في كتابي هذا، إن شاء الله.

Au Nom de Dieu Clément et Miséricordieux
C'est de Lui que nous implorons le secours

Le pentagone et le décagone réguliers

Abū Kāmil Shujā' ibn Aslam a dit : Étant donné que nous avons montré ce qu'il faut montrer de ce qui est difficile d'accès, dans le calcul *d'al-jabr* et d'*al-muqābala*, pour ceux qui sont avancés dans la connaissance ou le raisonnement à son propos, aussi bien que pour les habiles d'entre les géomètres, instruits du livre d'Euclide et d'autres livres, et que nous avons éclairé cela et l'avons expliqué dans notre livre que voici, nous allons montrer la grandeur de chacun des côtés du pentagone et du décagone ayant des côtés et des angles égaux et dont chacun est circonscrit à un cercle connu ou inscrit dans un cercle connu ; et la grandeur du diamètre du cercle circonscrit à un pentagone ou à un décagone connu dont les côtés et les angles sont égaux, ou inscrit dans chacun d'eux ; et la grandeur de la corde d'une partie des quinze parties de la circonférence d'un cercle connu ; et la grandeur de chacun des côtés du pentagone et du décagone d'angles et de côtés égaux, si leur aire est connue ; et la grandeur des côtés des triangles d'aire connue, s'ils sont inscrits dans un pentagone ou un décagone de côtés et d'angles égaux ; et d'autres de ces choses que nous avons expliquées dans notre livre que voici, et dont la détermination, pour beaucoup d'entre elles, était hors de portée de ceux des arithméticiens et des géomètres de notre temps que nous avons rencontrés, et de ceux dont nous avons ouï-dire, qui sont avancés dans la science de l'arithmétique et de la géométrie. Dieu, Puissant et Glorieux, m'a facilité la voie pour saisir ce qui leur était interdit et pour atteindre ce qui leur était difficile à comprendre.

Grâces, remerciements, bénédiction et éternité à Dieu, qui est Unique.

<1> Commençons par déterminer la grandeur de la corde d'un cinquième d'un cercle connu à partir de son diamètre.

بسم الله الرحمن الرحيم
وبه استعين

<المخمس والمعشر المتساوي الأضلاع والزوايا>

قال أبو كامل شجاع بن أسلم: أما إذ قد بينا ما نحتاج إلى تبيينه مما انغلق من حساب الجبر والمقابلة على المتقدمين في المعرفة والمقايسة فيه والحذاق من المهندسين العلماء بكتاب أقليدس وغيره، وأوضحنا ذلك وشرحناه في كتابنا هذا، فإنا نبيّن قدر كل ضلع من أضلاع كل واحد من المخمّس والمعشر المتساوي الأضلاع والزوايا، الذي تحيط بكل واحد منهما دائرة معلومة أو يحيط كل واحد منهما بدائرة معلومة، وقدر قطر الدائرة التي تحيط بمخمس أو معشر معلومين متساوي الأضلاع والزوايا أو يحيط كل واحد منهما بها، وقدر وتر جزء من خمسة عشر جزءاً من محيط الدائرة المعلومة، وقدر كل ضلع من أضلاع المخمس والمعشر المتساوي الأضلاع والزوايا إذا كانت مساحتهما معلومة، وقدر أضلاع مثلثات معلومة المساحة إذا كانت في مخمسة أو معشرة متساوي الأضلاع والزوايا، وغير ذلك مما شرحناه في كتابنا هذا مما كان استخراج كثير منه يتعذر على من شاهدنا من الحسّاب والمهندسين من أهل زماننا ومن انتهى إلينا خبره من المتقدمين في العلم بالحساب والهندسة. فسهل الله لي عزّ وجل الوصول إلى ما امتنع عليهم منه والتخلص إلى ما عسّر عليهم من فهمه.

فللّه الحمدُ والشكرُ والمن والَوْل لا شريك له.

<١> فنبدأ باستخراج قدر وتر خُمس الدائرة المعلومة من قطرها.

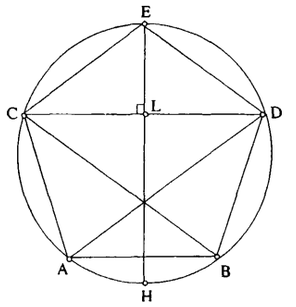
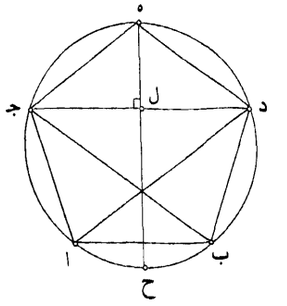


Fig. 1

Posons le cercle connu le cercle *ABDEC* dont le diamètre est dix en nombre – soit la droite *HE* –, et dans lequel est inscrit un pentagone régulier[1], – soit le pentagone *ABDCE*. Si nous voulons savoir quelle est la grandeur de chacun des côtés de ce pentagone [68r], nous menons la droite *CLD* qui est la corde de deux cinquièmes de cercle et nous posons la droite *ED* une chose. On sait que la droite *EL* est un dixième du *carré*, car le produit de *ED* par lui-même est égal au produit de *HE* par *EL* ; la droite *DL* est la racine du *carré* moins un dixième d'un dixième du *carré-carré* et la droite *CL* est égale à la droite *LD* ; la droite *CD* est donc la racine de quatre *carrés* moins deux cinquièmes d'un dixième du *carré-carré*. Mais on sait que la somme du produit de *AB* par *CD* et de *AB* par lui-même est égale au produit de *CD* par lui-même, puisque le produit de *AB* par *CD* plus *AC* par *BD* est égal au produit de *AD* par *BC* ; or *AC* par *BD* est égal à *AB* par lui-même, *AD* par *BC* est égal à *CD* par lui-même, et *CD* par lui-même est quatre *carrés* moins deux cinquièmes d'un dixième de *carré-carré*. On élimine de ceci le produit de *AB* par lui-même, qui est un *carré* ; il reste alors trois *carrés* moins deux cinquièmes d'un dixième de *carré-carré*, égal au produit de *AB* par *CD*. Nous divisons alors trois *carrés* moins deux cinquièmes d'un dixième de *carré-carré* par la droite *AB*, qui est une chose ; il vient la droite *CD*, trois choses moins deux cinquièmes d'un dixième de cube.

Mais nous avons montré que la droite *CD* est la racine de quatre *carrés* moins deux cinquièmes d'un dixième de *carré-carré*. Nous multiplions trois choses moins deux cinquièmes d'un dixième de cube par eux-mêmes ; on a neuf *carrés* et une partie de six cent vingt-cinq parties de cubo-cube moins six parties de vingt-cinq parties de *carré-carré* égaux à quatre *carrés*

[1] Littéralement : un pentagone ayant des angles et des côtés égaux, que nous traduisons par « pentagone régulier ».



وهو أن نجعل الدائرة المعلومة دائرة ا ب د ه ج وقطرها عشرة من العدد، وهو خط ح ه، وفيها مخمس متساوي الأضلاع والزوايا تحيط به الدائرة، وهو مخمس ا ب د ج ه. فإذا أردنا أن نعلم كم مقدار كل ضلع من أضلاع هذا المخمس، / فأنا نخرج خط ج ل د، وهو وتر خمسي الدائرة، ونجعل خط ه د ٦٨-و
شيئًا. فمعلوم أن خط ه ل عُشر مال، لأن ضرب ه د في مثله مثل ضرب ح ه في ه ل؛ وخط د ل جذر مال إلا عُشر عُشر مال مال، وخط ج ل مثل خط ل د؛ فخط ج د جذر أربعة أموال إلا خُمسي عُشر مال مال. ومعلومٌ أن ضرب ا ب في ج د وا ب في نفسه مثل ج د في نفسه، لأن ضرب ا ب في ج د وا ج في ب د مثل ضرب ا د في ب ج؛ وا ج في ب د مثل ا ب في نفسه وا د في ب ج مثل ج د في نفسه، وج د في نفسه أربعة أموال إلا خمسي عشر مال. فيسقط منه ضرب ا ب في نفسه، وهو مال، فيبقى ثلاثة أموال إلا خمسي عشر مال مال يعدل ضرب ا ب في ج د. فنقسم ثلاثة أموال إلا خمسي عشر مال مال على خط ا ب، وهو شيء، فيخرج خط ج د ثلاثة أشياء إلا خمسي عشر كعب.

وقد كنا بيّنا أن خط ج د جذر أربعة أموال إلا خمسي عشر مال مال. فنضرب ثلاثة أشياء إلا خمسي عشر كعب في مثلها، فيكون تسعة أموال وجزء من ستمائة وخمسة وعشرين من كعب كعب إلا ستة أجزاء من خمسة وعشرين جزءًا من مال مال يعدل أربعة أموال إلا خمسي عشر مال مال. فنقابل بها،

moins deux cinquièmes d'un dixième de *carré-carré*. Réduisons par ceci, on a un cinquième de *carré-carré* égal à cinq *carrés* et une partie de six cent vingt-cinq parties de cubo-cube. Divise tout ce que tu as par un *carré*, il vient cinq dirhams et une partie de six cent vingt-cinq parties de *carré-carré* égaux à un cinquième de *carré*. Rends entier ton *carré-carré* pour qu'il y ait un *carré-carré*, et ceci en le multipliant par six cent vingt-cinq, ainsi que tout ce que tu as par six cent vingt-cinq ; on a un *carré-carré* plus trois mille cent vingt-cinq dirhams égaux à cent vingt-cinq *carrés*. Partage les *carrés* en deux moitiés, il vient soixante-deux et demi ; multiplie-les par eux-mêmes, il vient trois mille neuf cent six et un quart ; [68^{v}] ôtes-en trois mille cent vingt-cinq, il reste sept cent quatre-vingt-un et un quart. On retranche ensuite la racine de cela de soixante-deux et un demi, on prend la racine de ce qui reste, on a la droite *ED* qui est l'un des côtés du pentagone. Ce qu'il fallait démontrer.

<2> Si nous voulons connaître la grandeur[2] de la corde d'un dixième de cercle connu et dont nous avons connu auparavant la corde du cinquième, nous traçons un cercle *ABCDEH* et nous posons son diamètre dix en nombre ; soit la droite *AH*. Nous traçons dans sa moitié cinq cordes égales, qui sont les droites *AB*, *BC*, *CD*, *DE* et *EH*. Il est clair que la droite *DH* est la corde d'un cinquième de ce cercle ; or nous avons montré que son produit par elle-même est soixante-deux et un demi moins la racine de sept cent quatre-vingt-un plus un quart ; or la droite *AC* lui est égale et le produit de *AC* par *DH* plus *CD* par *AH* est égal à *AD* par *CH* ; mais *AD* est égal à *CH* et *AC* est égal à *DH*, donc le produit de *DH* par lui-même plus *CD* par *AH* est égal au produit de *CH* par lui-même ; mais la

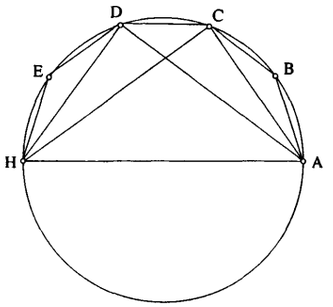
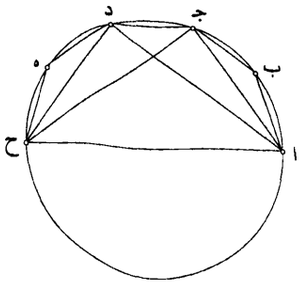


Fig. 18

[2] Littéralement : la grandeur de la quantité ; le traducteur latin a rendu cette expression par « mensuram quantitatis » (éd. Lorch, p. 235, l. 46).

فيكون خمس مال مال يعدل خمسة أموال وجزء من ستمائة وخمسة وعشرين جزءاً من كعب كعب. فاقسم كل شيء معك على مال، فيخرج خمسة دراهم وجزء من ستمائة وخمسة وعشرين جزءاً من مال مال يعدل خُمس مال. فأكمل مال مالك حتى يكون مال مال، وهو أن تضربه في ستمائة وخمسة وعشرين، فاضرب كل شيء معك في ستمائة وخمسة وعشرين، فيكون مال مال وثلاثة آلاف ومائة وخمسة وعشرين درهمًا يعدل مائة وخمسة وعشرين مالاً. فنصّف الأموال، فتكن اثنين وستين ونصفًا، فاضربها في مثلها، تكن ثلاثة آلاف وتسعمائة وستة وربعًا؛ / فأسقط منها ثلاثة آلاف ومائة وخمسة وعشرين، ٦٨-ظ فيبقى سبعمائة وأحد وثمانون وربع. فجذر ذلك منقوص من اثنين وستين ونصف مأخوذ مما بقي جذره، وهو خط ه د الذي هو أحد أضلاع المخمّس؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

<٢> فإذا أردنا أن نعلم قدر كميّة وتر عُشر من دائرة معلومة وقد عرفنا وتر خمسها، فإنا ندير دائرة عليها ا ب ج د ه ح ونجعل قطرها عشرة من العدد، وهو خط ا ح. ونرسم في نصفها خمسة أوتار متساوية، وهي خطوط ا ب ب ج ج د د ه ه ح.



فبيّنٌ أن خط د ح وتر خُمس هذه الدائرة؛ وقد كنا بيّنا أن مضروبه في مثله اثنان وستون ونصف إلا جذر سبعمائة وأحد وثمانين وربع؛ وخط ا ج مثله. وضرب ا ج في د ح وج د في ا ح مثل ا د في ج ح؛ وا د مثل ج ح وا ج مثل د ح، فضرب د ح في مثله وج د في ا ح مثل

12 قدر كميّة: mensuram quantitatis / وتر عشر من: وتر عشري؛ corde 1/10 circuli (p. 235, 46).

droite *CD* est la corde d'un dixième de ce cercle, nous la posons une chose et nous la multiplions par la droite *AH*, qui est le diamètre du cercle et qui est dix ; on a donc dix choses ; nous multiplions la droite *DH* par elle-même, on a donc soixante-deux et demi moins la racine de sept cent quatre-vingt-un et un quart ; ainsi le produit de la droite *CH* par elle-même sera soixante-deux et un demi plus dix choses moins la racine de sept cent quatre-vingt-un et un quart. Nous lui ajoutons le produit de *AC* par lui-même, qui est soixante-deux et un demi moins la racine de sept cent quatre-vingt-un et un quart ; on a cent vingt-cinq dirhams plus dix choses moins la racine de trois mille cent vingt-cinq dirhams égaux au produit de *AH* [69r] par lui-même, qui est cent dirhams ; nous réduisons par ceci ; on a après réduction la racine de trois mille cent vingt-cinq moins vingt-cinq dirhams égaux à dix choses ; une chose est donc égale à la racine de trente et un et un quart moins deux et demi, ce qui est la droite *CD* qui est la corde d'un dixième de cercle. Ce qu'il fallait démontrer.

<3> Si nous voulons connaître la grandeur[3] de la corde <qui est> l'un des côtés du pentagone régulier circonscrit à un cercle connu, nous traçons un cercle connu, nous posons son diamètre dix et nous construisons sur lui un pentagone régulier, soit le pentagone *ABCDG*.

Il est clair que la corde *IH* est la corde du cinquième de la circonférence du cercle ; or nous avons montré que son produit par elle-même est soixante-deux et un demi moins la racine de sept cent quatre-vingt-un et un quart, et le carré de la droite *IL* est quinze et cinq huitièmes moins la racine de quarante-huit plus un demi plus un quart plus cinq huitièmes d'un huitième ; nous l'ôtons du carré de la droite *IE*, qui est le demi-diamètre ; ce

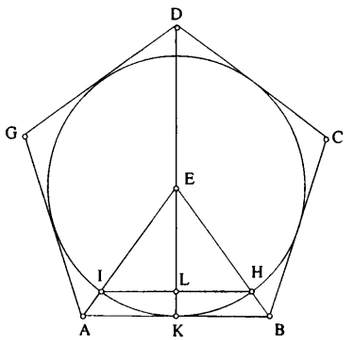
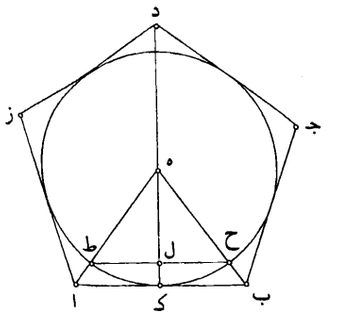


Fig. 3

[3] Littéralement : la quantité ; le traducteur latin a rendu cette expression par « quanta sit » (éd. Lorch, p. 236, l. 65).

ضرب ج ح في مثله؛ وخط ج د وتر عُشر هذه الدائرة، فنجعله شيئًا ونضربه في خط ا ح، الذي هو قطر الدائرة وهو عشرة، فيكون عشرة أشياء؛ ونضرب خط د ح في مثله، فيكون اثنين وستين ونصفًا إلا جذر سبعمائة وأحد وثمانين وربع. فصار ضرب خط ج ح في مثله اثنين وستين ونصفًا وعشرة أشياء إلا جذر سبعمائة وأحد وثمانين وربع. فنـــزيد عليه ضرب ا ج في مثله، وهو اثنان وستون ونصف إلا جذر سبعمائة وأحد وثمانين وربع، فيكون مائة وخمسة وعشرين درهمًا وعشرة أشياء إلا جذر ثلاثة آلاف ومائة وخمسة وعشرين درهمًا يعدل ضرب ا ح / في مثله، وهو مائة درهم. فنقابل بها، فيكون بعد المقابلة ٦٩-و جذر ثلاثة آلاف ومائة وخمسة وعشرين إلا خمسة وعشرين درهمًا تعدل عشرة أشياء؛ فالشيء يعدل جذر واحد وثلاثين وربع إلا اثنين ونصفًا، وهو خط ج د الذي هو وتر عشر الدائرة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

<٣> فإذا أردنا أن نعلم كميّة قدر وتر أحد جوانب المخمس المتساوي الأضلاع والزوايا الذي يحيط بدائرة معلومة، فإنّا ندير دائرة معلومة، ونجعل قطرها عشرة ونعمل عليها مخمسًا متساوي الأضلاع والزوايا، وهو مخمس ا ب ج د ز.



فبيّنٌ أن وتر ط ح وتر خُمس محيط الدائرة؛ وقد كنّا بينا أن مضروبه في نفسه اثنان وستون ونصف إلا جذر سبعمائة وأحد وثمانين وربع، ومربع خط ط ل خمسة عشر وخمسة أثمان إلا جذر ثمانية وأربعين ونصف وربع وخمسة أثمان الثمن؛ فنسقطه من مربع خط ط ه، الذي هو نصف القطر، وهو

10 ونصفًا: ونصف – 12 كمية قدر: quanta sit (p. 236, l. 65).

carré est vingt-cinq ; il reste alors le carré de la droite *LE*, neuf plus un quart plus un huitième plus la racine de quarante-huit plus un demi plus un quart plus cinq huitièmes d'un huitième. Posons ensuite la droite *AB*, qui est l'un des côtés du pentagone circonscrit au cercle, une chose ; son carré est un *carré* et sa grandeur par rapport au carré de *KE*, qui est vingt-cinq, est égale à la grandeur du carré de *IH*, qui est la corde d'un cinquième de la circonférence du cercle, qui est soixante-deux plus un demi moins la racine de sept cent quatre-vingt-un plus un quart, par rapport au carré de *EL*, qui est neuf plus un quart plus un huitième plus la racine de quarante-huit plus un demi plus un quart plus cinq huitièmes d'un huitième. Multiplions alors un *carré* par neuf plus trois-huitièmes plus la racine de quarante-huit [69^{v}] plus un demi, plus un quart plus cinq huitièmes d'un huitième ; on a neuf *carrés*, plus trois huitièmes de *carré*, plus la racine de quarante-huit *carrés-carrés*, plus trois quarts de *carré-carré* plus cinq huitièmes de huitième de *carré-carré* ; ceci est égal au carré de *KE* par le carré de *IH*, ce qui est mille cinq cent soixante-deux plus un demi moins la racine de quatre cent mille quatre-vingt-huit mille deux cent quatre-vingt-un plus un quart. Ramène tout ce que tu as à un *carré*, c'est-à-dire que tu multiplies tout ce que tu as par un cinquième plus un cinquième d'un cinquième moins la racine de vingt parties de six cent vingt-cinq parties de dirham ; tu multiplies alors neuf *carrés* plus trois huitièmes de *carré* plus la racine de quarante-huit *carrés-carrés* plus trois quarts de *carré-carré* plus cinq huitièmes de huitième de *carré-carré* par un cinquième plus un cinquième d'un cinquième moins la racine de vingt parties de six cent vingt-cinq parties de l'unité ; on a alors un *carré* ; tu multiplies ensuite mille cinq cent soixante-deux plus un demi moins la racine de quatre cent mille plus quatre-vingt-huit mille plus deux cent quatre-vingt-un plus un quart par un cinquième plus un cinquième d'un cinquième moins la racine de vingt parties de six cent vingt-cinq parties de l'unité ; tout cela sera trois cent soixante-quinze dirhams plus la racine de quinze mille six cent vingt-cinq dirhams moins la racine de vingt-huit mille cent vingt-cinq moins la racine de soixante-dix-huit mille cent vingt-cinq dirhams, ce qui est cinq cents moins la racine de deux cent mille. Un *carré* sera égal alors à cinq cents moins la racine de deux cent mille. Sa racine est la droite *AB*, qui est l'un des côtés du

خمسة وعشرون، فيبقى مربع خط ل ه تسعة وربعًا وثمنًا وجذر ثمانية وأربعين ونصف وربع وخمسة أثمان الثمن. ثم نجعل خط ا ب، الذي هو أحد أضلاع المخمس المحيط بالدائرة، شيئًا؛ فمربعه مالٌ، وقدره من مربع ك ه، وهو خمسة وعشرون، كقدر مربع ط ح، الذي هو وتر خُمس محيط الدائرة، وهو اثنان وستون ونصف إلا جذر سبعمائة وأحد وثمانين وربع، من مربع ه ل، وهو تسعة وربع وثمن وجذر ثمانية وأربعين ونصف وربع وخمسة أثمان الثمن. فنضرب مالاً في تسعة وثلاثة أثمان وجذر ثمانية وأربعين / ونصف وربع وخمسة ٦٩-ظ أثمان الثمن، فيكون تسعة أموال وثلاثة أثمان مال وجذر ثمانية وأربعين مال مال وثلاثة أرباع مال مال وخمسة أثمان ثمن مال مال؛ فهذا يعدل مربع ك ه في مربع ط ح، وهو ألف وخمسمائة واثنان وستون ونصف إلا جذر أربعمائة ألف وثمانية وثمانين ألفًا ومائتين وأحد وثمانين وربع. فردّ كل شيء معك إلى مال، وهو أن تضرب كل ما معك في خمس وخمس خمس إلا جذر عشرين جزءًا من ستمائة وخمسة وعشرين جزءًا من درهم. فتضرب تسعة أموال وثلاثة أثمان مال وجذر ثمانية وأربعين مال مال وثلاثة أرباع مال مال وخمسة أثمان ثمن مال مال في خمس وخمس خمس إلا جذر عشرين جزءًا من ستمائة وخمسة وعشرين جزءًا من واحد، فيكون مالاً. ثم تضرب ألفًا وخمسمائة واثنين وستين ونصفًا إلا جذر أربعمائة ألف وثمانية وثمانين ألفًا ومائتين وأحد وثمانين وربع في خمس وخمس خمس إلا جذر عشرين جزءًا من ستمائة وخمسة وعشرين جزءًا من واحد، فيكون ذلك ثلاثمائة وخمسة وسبعين درهمًا وجذر خمسة عشر ألفًا وستمائة وخمسة وعشرين درهمًا إلا جذر ثمانية وعشرين ألفًا ومائة وخمسة وعشرين إلا جذر ثمانية وسبعين ألفًا ومائة وخمسة وعشرين درهمًا؛ وذلك خمسمائة إلا جذر مائتي ألف. فصار مالاً يعدل خمسمائة إلا جذر مائتي ألف. فجذره خط ا ب

12-13 عشرين ... جزءًا: نجد في الترجمة اللاتينية unius 4/125 (p. 237, l. 84) — 10 ونصفًا: ونصف.

pentagone régulier circonscrit au cercle connu dont le diamètre est dix en nombre. On a donc montré que le carré de la droite *AB*, qui est l'un des côtés du pentagone, [70r] est cinq cents moins la racine de deux cent mille. Ce qu'il fallait démontrer.

<4> Si on te dit : nous voulons connaître la grandeur[4] de la corde du décagone régulier circonscrit à un cercle connu, alors nous traçons un cercle, nous posons son diamètre dix en nombre et nous traçons sur le cercle un décagone qui l'entoure, soit le décagone *ABCDOSUQRM* ; et nous voulons connaître combien est la droite *AB*, qui est l'un des côtés du décagone.

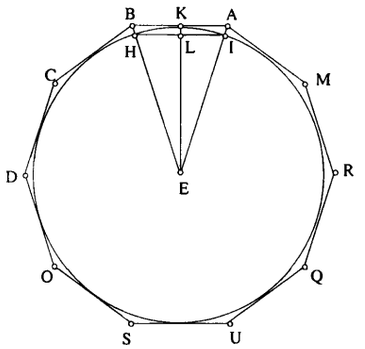


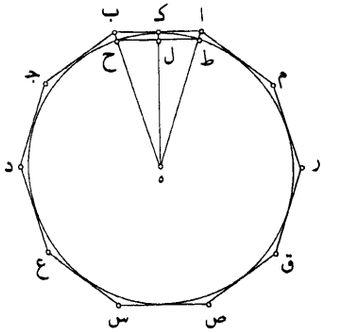
Fig. 4

Il est clair que la droite *IH* intercepte le dixième de la circonférence du cercle ; or nous avons montré qu'elle est la racine de trente et un plus un quart moins deux plus un demi. Mais la droite *IL* est sa moitié et elle est la racine de sept plus un demi plus un quart plus la moitié d'un huitième moins un et un quart. Son carré est donc neuf plus un quart plus un huitième moins la racine de quarante-huit plus un demi plus un quart plus cinq huitièmes d'un huitième ; nous le retranchons du carré de *IE*, qui est vingt-cinq ; il reste le carré de *EL*, quinze plus cinq huitièmes plus la racine de quarante-huit plus un demi plus un quart plus cinq huitièmes d'un huitième. Mais le carré de *IH* est trente-sept plus un demi moins la racine de sept cent quatre-vingt-un plus un quart. Posons ensuite la droite *AB* une chose, qui est l'un des côtés du décagone circonscrit au cercle, et son carré

[4] Littéralement : la quantité de la grandeur ; le traducteur latin a rendu cette expression par « quanta sit mensura » (éd. Lorch, p. 237, l. 92).

الذي هو أحد أضلاع المخمس المتساوي الأضلاع والزوايا المحيط بالدائرة المعلومة التي قطرها عشرة من العدد. فقد تبين أن مربع خط ا ب الذي هو أحد جوانب المخمس / خمسمائة إلا جذر مائتي ألف؛ وذلك ما أردنا أن نبين. ٧٠-و

<٤> فإن قيل لك: نريد أن نعلم كمية قدر وتر المعشر المتساوي الأضلاع والزوايا الذي يحيط بدائرة معلومة، فإنا ندير دائرة ونجعل قطرها عشرة من العدد، ونرسم عليها معشرًا يحيط بها، وهو معشر ا ب ج د ع س ص ق ر م، ونريد <أن> نعلم كم خط ا ب الذي هو أحد أضلاع المعشر.



فبينٌ أن خط ط ح يوتر عشر محيط الدائرة؛ وقد كنا بينا أنه جذر واحد وثلاثين وربع إلا اثنين ونصفًا. وخط ط ل نصفه، وهو جذر سبعة ونصف وربع ونصف ثمن إلا واحدًا وربعًا. فمربعه تسعة وربع وثمن إلا جذر ثمانية وأربعين ونصف وربع وخمسة أثمان الثمن؛ فنلقيه من مربع ط ه، وهو خمسة وعشرون، فيبقى مربع ه ل خمسة عشر وخمسة أثمان وجذر ثمانية وأربعين ونصف وربع وخمسة أثمان ثمن. ومربع ط ح سبعة وثلاثون ونصف إلا جذر سبعمائة وأحد وثمانين وربع. ثم نجعل خط ا ب شيئًا، وهو أحد أضلاع المعشر

4 كمية قدر: quanta sit mensura (p. 237, l. 92) – 9 ونصفًا: ونصف.

un *carré* ; la grandeur du *carré* par rapport au carré de *IH*, qui est trente-sept plus un demi moins la racine de sept cent quatre-vingt-un plus un quart, est égale à la grandeur du carré de *KE*, qui est vingt-cinq, par rapport au carré de *EL*, qui est quinze plus cinq huitièmes plus la racine de quarante-huit plus un demi plus un quart plus cinq huitièmes d'un huitième. Nous le multiplions par le carré de *AB*, qui est un *carré* ; on a quinze *carrés* plus cinq huitièmes de *carré* plus la racine de quarante-huit *carrés-carrés* plus trois-quarts de *carré-carré* plus cinq huitièmes d'un huitième de *carré-carré* égaux au carré de *KE* par le carré de *IH*, qui est neuf cent trente-sept plus un demi moins la racine de quatre cent mille plus quatre-vingt-huit mille plus deux cent quatre-vingt-un plus un quart. Ramène tout ce que tu as à un *carré*, et ceci en multipliant tout ce que tu as par deux cinquièmes d'un cinquième d'unité moins la racine des quatre cinquièmes d'une partie de la six cent vingt-cinquième partie de l'unité ; on a un *carré* égal [70^{v}] à soixante-quinze dirhams plus la racine de six cent vingt-cinq dirhams moins la racine de trois mille cent vingt-cinq dirhams moins la racine de mille cent vingt-cinq dirhams. Tout ceci est cent dirhams moins la racine de huit mille, qui est le carré de la droite *AB*, qui est l'un des côtés du décagone circonscrit au cercle connu dont le diamètre est dix en nombre. Ce qu'il fallait démontrer.

<5> Si nous voulons connaître la grandeur[5] du diamètre d'un cercle circonscrit à un pentagone connu et régulier, nous posons le pentagone connu le pentagone *ABCDE* et nous traçons chacun de ses côtés dix en nombre, et le cercle qui l'entoure, dont le diamètre est la droite *KD*. Pour connaître le diamètre, joignons *EC* et posons-la une chose.

[5] Littéralement : la quantité ; le traducteur latin a rendu cette expression par « quanta est » (éd. Lorch, p. 238, l. 115).

الذي يحيط بالدائرة ومربعه مال؛ فقدر مال من مربع ط ح، وهو سبعة وثلاثون ونصف إلا جذر سبعمائة وأحد وثمانين وربع، كقدر مربع ك ه، وهو خمسة وعشرون، من مربع ه ل وهو خمسة عشر وخمسة أثمان وجذر ثمانية وأربعين ونصف وربع وخمسة أثمان الثمن. فنضربه في مربع ا ب وهو مال، فيكون خمسة عشر مالاً وخمسة أثمان مال وجذر ثمانية وأربعين مال مال وثلاثة أرباع مال مال وخمسة أثمان ثمن مال مال يعدل مربع ك ه في مربع ط ح، وهو تسعمائة وسبعة وثلاثون ونصف إلا جذر أربعمائة ألف وثمانية وثمانين ألفاً ومائتين وأحد وثمانين وربع. فردّ كل شيء معك إلى مال، وهو أن تضرب كل ما معك في خمسي خمس واحد إلا جذر أربعة أخماس جزء من ستمائة وخمسة وعشرين جزءاً من واحد، فيكون مالاً يعدل خمسة / وسبعين درهمًا وجذر ستمائة وخمسة وعشرين درهمًا إلا جذر ثلاثة آلاف ومائة وخمسة وعشرين درهمًا وإلا جذر ألف ومائة وخمسة وعشرين درهمًا؛ وذلك مائة درهم إلا جذر ثمانية آلاف، وهو مربع خط ا ب الذي هو أحد أضلاع المعشر الذي يحيط بالدائرة المعلومة التي قطرها عشرة من العدد؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

٧٠-ظ

<٥> فإذا أردنا أن نعلم كمية قطر دائرة تحيط بمخمس معلوم متساوي الأضلاع والزوايا، فنجعل المخمس المعلوم مخمس ا ب ج د ه، ونرسم كل جانب منه عشرة من العدد وعليه دائرة تحيط به وقطرها خط ك د. فمعرفة قطرها أن نصل ه ج ونجعله شيئًا.

10-11 وجذر ... درهمًا: في الهامش.

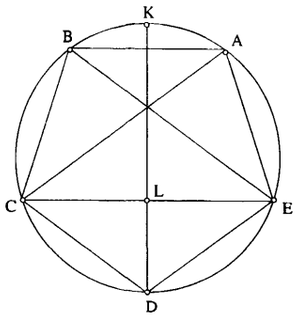
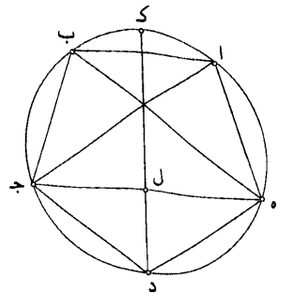


Fig. 5

Il est clair que son produit par *AB*, qui est dix plus *AB* par lui-même, est égal au produit de *EC* par lui-même. Donc le produit de *EC*, qui est une chose, par *AB*, qui est dix, est dix choses ; mais *AB* par lui-même est cent, et *EC* par lui-même est un *carré*. Il vient un *carré* égal à dix choses plus cent dirhams ; une chose est donc égale à cinq plus la racine de cent vingt-cinq, ce qui est la droite *EC*. Sa moitié est donc deux dirhams plus un demi plus la racine de trente et un et un quart, qui est la droite *EL*. Multiplions-la par elle-même ; on a trente-sept plus un demi plus la racine de sept cent quatre-vingt-un plus un quart. Ôtons ce carré de *DE* par lui-même, qui est cent ; il reste soixante-deux plus un demi moins la racine de sept cent quatre-vingt-un plus un quart, ce qui est le carré de la droite *DL*. Posons ensuite le diamètre du cercle, qui est la droite *KLD*, une chose ; son carré est un *carré*. La grandeur du *carré* par rapport au carré de *DE*, qui est cent, est égale à la grandeur du carré de *DE*, qui est cent, par rapport au carré de *DL*, qui est soixante-deux plus un demi moins la racine de sept cent quatre-vingt-un plus un quart. Multiplions-le [71r] par un *carré* ; on a soixante-deux *carrés* plus un demi-*carré* moins la racine de sept cent quatre-vingt-un *carrés-carrés* et un quart de *carré-carré* égal au produit du carré de *ED* par lui-même, qui est dix mille. Ramène tout ce que tu as à un *carré* en multipliant tout ce que tu as par un cinquième d'un dixième d'unité plus la racine d'une partie plus un quart de la quinze mille six cent vingt-cinquième partie d'unité ; on a alors un *carré* égal à deux cents plus la racine de huit mille. On a ainsi montré que le carré du diamètre du cercle, qui est la droite *KLD*, est deux cents plus la racine de huit mille. Ce qu'il fallait démontrer.



وبيّن أن ضربه في ا ب، وهو عشرة، وا ب في مثله، مثل ضرب ه ج في مثله. فضرب ه ج، وهو شيء، في ا ب، وهو عشرة، عشرة أشياء، وا ب في مثله مائة وه ج في مثله مال، فصار مال يعدل عشرة أشياء ومائة درهم؛ فالشيء يعدل خمسة وجذر مائة وخمسة وعشرين، وهو خط ه ج. فنصفُه درهمان ونصف وجذر واحد وثلاثين وربع، وهو خط ه ل؛ فنضربه في مثله، فيكون سبعة وثلاثين ونصفًا وجذر سبعمائة وأحد وثمانين وربع. فنسقطه من ه د في مثله، وهو مائة، فيبقى اثنان وستون ونصف إلا جذر سبعمائة وأحد وثمانين وربع، وهو مربع خط د ل. ثم نجعل قطر الدائرة، وهو خط ك ل د شيئًا؛ فمربعه مال، فقدر مال من مربع د ه، وهو مائة، كقدر مربع د ه، وهو مائة، من مربع د ل، وهو اثنان وستون ونصف إلا جذر سبعمائة وأحد وثمانين وربع؛ فنضربه / في مال، فيكون اثنين وستين مالاً ونصف مال إلا جذر سبعمائة وأحد ٧١-و وثمانين مال مال وربع مال مال يعدل ضرب مربع ه د في مثله، وهو عشرة آلاف. فردّ كل شيء معك إلى مال، وهو أن تضرب كل شيء معك في خُمسِ عُشرِ واحدٍ وجذر جزء وربع جزء من خمسة عشر ألفًا وستمائة وخمسة وعشرين جزءًا من واحد، فيكون مالاً يعدل مائتين وجذر ثمانية آلاف. فقد تبين أن مربع قطر الدائرة، الذي هو خط ك ل د، مائتان وجذر ثمانية آلاف؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

<6> Si nous voulons connaître le diamètre du cercle inscrit dans le pentagone *ABCDE* connu et régulier, dont chacun des côtés est dix en nombre ; le centre du cercle est *M*, son demi-diamètre est la droite *KM* et le demi-diamètre du cercle qui entoure le pentagone est la droite *AM* – or nous avons montré que le carré du diamètre de ce cercle est deux cents plus la racine de huit mille –, le carré de la droite *AM*, qui est son demi-diamètre, est donc cinquante plus la racine de cinq cents. Nous retranchons de ce carré le carré de *AK*, qui est vingt-cinq ; il reste le carré de *KM*, qui est le demi-diamètre du cercle inscrit dans ce pentagone. Ce carré est vingt-cinq plus la racine de cinq cents. Le carré du diamètre du cercle inscrit dans ce pentagone est donc cent plus la racine de huit mille. Ce qu'il fallait démontrer.

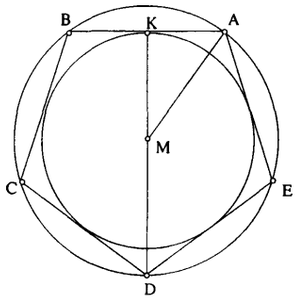
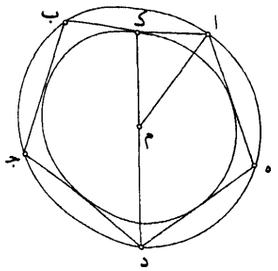


Fig. 6

Si tu veux, multiplie l'un des côtés du pentagone par lui-même, retranche-le du produit du diamètre du cercle circonscrit à ce pentagone par lui-même et prend la racine de ce qui reste. Ce que tu obtiens est le diamètre du cercle inscrit dans le pentagone. Ce procédé est valable pour tout polygone régulier, saisis cela.

<٦> فإذا أردنا <أن> نعلم قطر الدائرة التي يحيط بها مخمس ا ب ج د ه المعلوم المتساوي الأضلاع والزوايا، الذي كل جانب منه عشرةٌ من العدد، ومركز الدائرة م ونصف قطرها خط ك م ونصف قطر الدائرة التي تحيط بالمخمس خط ا م – وقد بينا أن مربع قطرها مائتين وجذر ثمانية آلاف –، فمربع خط ا م، الذي هو نصف قطرها، خمسون وجذر خمسمائة؛ فنسقط منه مربع ا ك، وهو خمسة وعشرون، فيبقى مربع ك م، وهو نصف قطر الدائرة التي تقع في هذا المخمس، خمسة وعشرين وجذر خمسمائة، فمربع قطر الدائرة التي تقع في هذا المخمس مائة وجذر ثمانية آلاف؛ وذلك ما أردنا أن نبين.



وإن شئت، فاضرب أحد أضلاع المخمس في مثله، وأسقطه من مضروب قطر الدائرة التي تقع على هذا المخمس في مثله، وخذ جذر ما بقي، فما كان فهو قطر الدائرة التي تقع داخل المخمس؛ وهذا الباب يخرج في كل شكل متساوي الأضلاع والزوايا، فافهم ذلك.

3 ونصف قطرها خط ك م: ساقطة في الترجمة اللاتينية، وربما كانت هذه العبارة ساقطة في المخطوط العربي المترجم، فلقد سقط ما بين نصف الأولى ونصف الثانية – 10-11 هذا المخمس ... التي تقع: يبدو أن هذه العبارة سقطت من المخطوط العربي المترجم.

<7> Si nous voulons connaître la grandeur du diamètre d'un cercle circonscrit à un pentagone connu et régulier [71^{v}], dont chacun des côtés est dix, par un procédé autre que celui que nous avons indiqué précédemment, il est clair, d'après ce qu'Euclide a décrit[6], que, pour toute corde d'une partie d'un cercle, sa grandeur par rapport à une autre corde qui intercepte une partie égale à cette partie d'un autre cercle est égale à la grandeur des diamètres des deux cercles l'un par rapport à l'autre. Or nous avons montré que, si un cercle a pour diamètre dix en nombre, le carré de la corde de son cinquième est soixante-deux plus un demi moins la racine de sept cent quatre-vingt-un et un quart. Il est donc clair, d'après ce que nous avons défini, que la grandeur de cent par rapport à soixante-deux et demi moins la racine de sept cent quatre-vingt-un et un quart est égale à la grandeur du *carré*, qui est le carré du diamètre du cercle inconnu circonscrit au pentagone dont chacun des côtés est dix, car nous avons posé ce *carré* quelque chose de cent, qui est le carré du diamètre du cercle connu circonscrit au pentagone connu. Nous multiplions donc cent par cent, on a dix mille ; nous multiplions ensuite un *carré* par soixante-deux et demi moins la racine de sept cent quatre-vingt-un et un quart, on a soixante-deux *carrés* plus un demi-*carré* moins la racine de sept cents *carrés-carrés*, quatre-vingt-un *carrés-carrés* et un quart de *carré-carré*, ce qui est égal à dix mille. Ramène tout ce que tu as à un *carré*, et ceci en multipliant tout ce que tu as par un cinquième d'un dixième d'unité plus la racine d'une partie plus un quart d'une partie de la quinze mille six cent vingt-cinquième partie de l'unité ; on a alors un *carré* égal à deux cents dirhams plus la racine de huit mille, ce qui est le carré du diamètre du cercle circonscrit au pentagone, si chacun de ses côtés est dix.

<8> De même, si nous voulons inscrire un cercle dans le pentagone, à partir d'un pentagone connu régulier dont chacun des côtés est dix – or nous avons montré, pour un cercle dont le diamètre est dix en nombre, que [72^{r}] le carré de chaque côté du pentagone circonscrit à ce cercle est cinq cents moins la racine de deux cent mille –, alors nous disons que la grandeur de cent, qui est le carré de l'un des côtés du pentagone, par

6 *Éléments*, XII.1.

<٧> وإن أردنا <أن> نعلم كمية قطر دائرة تحيط بمخمس معلوم
متساوي / الأضلاع والزوايا، كل جانب عشرة من العدد، بغير العمل الذي ٧١-ظ
بيناه فيما تقدّم، فبيّن مما وصف أقليدس أن كل وتر جزء من دائرة فإن قدره
عند وتر آخر يوتر مثل ذلك الجزء من دائرة أخرى كقدر قطري الدائرتين
أحدهما إلى الآخر. وقد بينا أن دائرة قطرها عشرة من العدد أن مربعَ وترِ
خُمسها اثنان وستون ونصف إلا جذر سبعمائة وأحد وثمانين وربع. فبين مما
رسمنا أن قدر مائة من اثنين وستين ونصف إلا جذر سبعمائة وأحد وثمانين وربع
كقدر مال، وهو مربع قطرِ الدائرة المجهولة التي تحيط بالمخمس الذي كل جانب
منه عشرة، لأنا جعلناه شيئاً من مائة، وهو مربع قطر الدائرة المعلومة التي تحيط
بالمخمس المعلوم. فنضرب مائة في مائة، فيكون عشرة آلاف؛ ثم نضرب مالاً في
اثنين وستين ونصف إلا جذر سبعمائة وأحد وثمانين وربع، فيكون اثنين وستين
مالاً ونصف مال إلا جذر سبعمائة مال مال وأحد وثمانين مال مال وربع مال
مال، فهو يعدل عشرة آلاف. فردّ كل شيء معك إلى مال، وهو أن تضرب
كل ما معك في خُمسِ عُشرِ واحدٍ وجذر جزء وربع جزء من خمسة عشر ألفاً
وستمائة وخمسة وعشرين جزءاً من واحد، فيكون مالاً يعدل مائتي درهم وجذر
ثمانية آلاف، وهو مربع قطر الدائرة التي تحيط بالمخمس، إذا كان كل جانب منه
عشرة.

<٨> وكذلك إن أردنا أن نعمل من مخمس معلوم متساوي الأضلاع
والزوايا، كل جانب منه عشرة، دائرة يحيط بها المخمس – وقد بينا أن دائرة
قطرها عشرة من العدد أن / مربع كل جانب من المخمس الذي يحيط بها ٧٢-و
خمسمائة إلا جذر مائتي ألف؛ فنقول: إن قدر مائة، وهو مربع أحد جوانب

3 انظر *الأصول*، الكتاب الثاني عشر، الشكل ١: "كل سطحين كثيري الزوايا متشابهين في دائرتين، فإن نسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة مربعي قطري الدائرتين أحدهما إلى الآخر" (مخطوطة أسكوريال ٩٠٧، ص. ١٥٨ظ).

rapport à cinq cents moins la racine de deux cent mille, est égale à la grandeur du *carré*, qui est le carré du diamètre du cercle inconnu, dont on cherche à connaître le diamètre, par rapport au carré du diamètre du cercle connu, qui est cent. Multiplions donc cent par cent, on a dix mille ; multiplions ensuite un *carré* par cinq cents moins la racine de deux cent mille ; on a cinq cents *carrés* moins la racine de deux cent mille *carrés-carrés*, ce qui est égal à dix mille dirhams. Ramène tout ce que tu as à un *carré*, c'est-à-dire en multipliant par un dixième d'un dixième d'unité plus la racine des quatre cinquièmes d'une partie de la dix millième partie de l'unité ; on a donc un *carré* égal à cent plus la racine de huit mille, qui est le carré du diamètre du cercle inscrit dans ce pentagone dont chacun des côtés est dix.

<9> De même, si nous voulons circonscrire un cercle à un décagone connu et régulier, dont chacun des côtés est dix – or nous avons montré, pour un cercle dont le diamètre est dix, que la corde du décagone inscrit dans ce cercle est la racine de trente et un plus un quart moins deux et demi – alors nous posons le diamètre du cercle une chose et nous disons ensuite que la grandeur d'une chose par rapport à dix est égale à la grandeur de dix par rapport à la racine de trente et un plus un quart moins deux et demi. Nous multiplions alors dix par dix ; on a cent. Nous multiplions ensuite une chose par la racine de trente et un plus un quart moins deux et demi, on a la racine de trente et un *carrés* plus un quart de *carré* de laquelle on soustrait deux choses et demie, ce qui est égal à cent. Nous le restaurons par les deux choses et demie, que nous ajoutons à cent ; on a cent dirhams plus deux choses plus une demi-chose égaux à la racine de trente et un *carrés* plus un quart de *carré*. Multiplie cent dirhams plus deux choses plus une demi-chose par lui-même, on a dix mille dirhams plus six *carrés* plus un quart de *carré* plus cinq cents choses égaux à trente et un *carrés* plus un quart de *carré*. Nous réduisons par ceci, nous avons la chose égale à dix plus la racine de cinq cents, qui est le diamètre du cercle circonscrit au décagone dont chaque côté est dix.

المخمس، من خمسمائة إلا جذر مائتي ألف كقدر مال، وهو مربع <قطر> الدائرة المجهولة المطلوب معرفة قطرها، عند مربع قطر الدائرة المعلومة، وهو مائة. فنضرب مائة في مائة، فتكون عشرة آلاف؛ ثم نضرب مالاً في خمسمائة إلا جذر مائتي ألف، فيكون خمسمائة مال إلا جذر مائتي ألف مال مال، فهو يعدل عشرة آلاف درهم. فردّ كل ما معك إلى مال، وهو أن تضربه في عُشرِ عُشر واحدٍ وجذر أربعة أخماس جزء من عشرة آلاف جزء من واحد، فيكون مالاً يعدل مائة وجذر ثمانية آلاف، وهو مربع قطر الدائرة التي تقع في هذا المخمس الذي كل جانب منه عشرة.

<٩> وكذلك إن أردنا أن نعمل على معشر معلوم متساوي الأضلاع والزوايا، كل جانب منه عشرة، دائرة تحيط به – وقد بينا أن دائرة قطرها عشرة أن وتر المعشر الذي يقع فيها جذر واحد وثلاثين وربع إلا اثنين ونصفًا – فنجعل قطر الدائرة شيئًا؛ ثم نقول: قدر شيء من عشرة كقدر عشرة من جذر واحد وثلاثين وربع إلا اثنين ونصفًا، فنضرب عشرة في عشرة، فيكون مائة. ثم نضرب شيئًا في جذر واحد وثلاثين وربع إلا اثنين ونصفًا، فيكون جذر واحد وثلاثين مالاً وربع مال منقوصًا منه شيئين ونصفًا، فهو يعدل مائة. فنجبره بالشيئين ونصف، ونزيده على مائة، فيكون مائة درهم وشيئين ونصف شيء يعدل جذر واحد وثلاثين مالاً وربع مال؛ فاضرب مائة درهم وشيئين ونصف في مثله، تكن عشرة آلاف درهم وستة أموال وربع مال وخمسمائة شيء يعدل واحدًا وثلاثين مالاً وربع مال. فنقابل بها، فيكون الشيء عشرة وجذر خمسمائة، وهو قطر الدائرة التي تحيط بالمعشر الذي كل جانب منه عشرة.

2 الدائرة المجهولة المطلوب معرفة قطرها: circuli ignoti quesiti (p. 240-241, l. 171-172) — 11 ونصفًا: ونصف — 13 ونصفًا: ونصف.

<10> De même, si nous voulons inscrire un cercle dans un décagone connu et régulier dont chacun des côtés est dix – or nous avons montré pour tout cercle dont le diamètre est dix que le carré de la corde du décagone circonscrit est cent [72^{v}] moins la racine de huit mille – nous disons alors que la grandeur de cent moins la racine de huit mille par rapport à cent est égale à la grandeur de cent par rapport à un *carré*. Multiplie donc cent par cent, il vient dix mille ; multiplie ensuite cent moins la racine de huit mille par un *carré*, il vient cent *carrés* moins la racine de huit mille *carrés-carrés*, ce qui est égal à dix mille. Ramène tout ce que tu as à un seul *carré*, et ceci en multipliant par la moitié d'un dixième d'unité plus la racine des quatre cinquièmes d'une partie de la quatre centième partie de l'unité ; on a un *carré* égal à cinq cents plus la racine de deux cent mille, qui est le carré du diamètre du cercle inscrit dans ce décagone dont chaque côté est dix.

Si tu veux, multiplie le diamètre du cercle circonscrit à ce décagone par lui-même. Or nous avons montré qu'il est dix plus la racine de cinq cents ; on obtient donc six cents plus la racine de deux cent mille. Retranches-en cent, c'est-à-dire le produit du côté du décagone par lui-même ; il reste cinq cents plus la racine de deux cent mille. La racine de cela est le diamètre du cercle inscrit dans ce décagone. J'établis la cause de ce procédé, si Dieu le veut.

Pour tout polygone régulier circonscrit à un cercle et inscrit dans un cercle, la somme du produit de l'un de ses côtés par lui-même et du produit du diamètre du cercle inscrit dans le polygone par lui-même est égale au produit du diamètre du cercle circonscrit au polygone par lui-même.

Exemple : construisons un triangle équilatéral, soit le triangle *ABC*, circonscrit au cercle *HGL*, inscrit dans un cercle *ABC* et dont le diamètre est la droite *AD* ; le diamètre du cercle inscrit dans le triangle est la droite *KO*. Je dis que la somme du produit de *AC* par lui-même et de *KO* par lui-même est égale au produit de *AD* par lui-même.

<١٠> وكذلك إن أردنا أن نعمل في معشر معلوم متساوي الأضلاع والزوايا، كل جانب منه عشرة، دائرة يحيط بها المعشر — وقد بيّنا أن دائرة قطرها عشرة أن مربع وتر المعشر الذي يقع عليها مائة / إلا جذر ثمانية آلاف — ٧٢-ظ فنقول: إن قدر مائة إلا جذر ثمانية آلاف من مائة كقدر مائة من مال. فاضرب مائة في مائة، تكن عشرة آلاف؛ ثم اضرب مائة إلا جذر ثمانية آلاف في مال، تكن مائة مال إلا جذر ثمانية آلاف مال مال، فهو يعدل عشرة آلاف؛ فردّ كل ما معك إلى مال واحد، وهو أن تضربه في نصف عشر واحد وجذر أربعة أخماس جزء من أربعمائة جزء من واحد، فيكون مالاً يعدل خمسمائة وجذر مائتي ألف وهو مربع قطر الدائرة التي تقع داخل هذا المعشر الذي كل جانب منه عشرة.

وإن شئت، فاضرب قطر الدائرة التي تقع خارج هذا المعشر في مثله؛ وقد كنا بيّنا أنه عشرة وجذر خمسمائة، فيكون ستمائة وجذر مائتي ألف. فألق منه مائة، وهو ضرب ضلع المعشر في مثله، فيبقى خمسمائة وجذر مائتي ألف؛ فجذر ذلك هو قطر الدائرة التي يحيط بها هذا المعشر. وأنا واضع علة هذا الباب، إن شاء الله.

كل شكل متساوي الأضلاع والزوايا يحيط بدائرة وتحيط به دائرة، فإن ضرب أحد أضلاعه في نفسه وقطر الدائرة التي يحيط بها الشكل في نفسه مجموعين مثل ضرب قطر الدائرة التي تحيط بالشكل في نفسه.

مثال ذلك: أنا نعمل مثلثًا متساوي الأضلاع والزوايا، وهو مثلث ا ب ج وفيه دائرة يحيط بها المثلث عليها ح ز ل وخارج المثلث دائرة تحيط به عليها ا ب ج وقطرها خط ا د، وقطر الدائرة التي يحيط بها المثلث خط ك ع؛ فأقول: إن ضرب ا ج في نفسه وك ع في نفسه مثل ضرب ا د في نفسه.

3 وتر: الأفضل "ضلع"، ولكنه أخذ أيضًا بكلمة "وتر" لتعني ذلك. انظر مثلاً المسألة الرابعة.

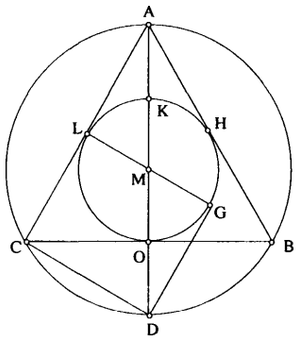
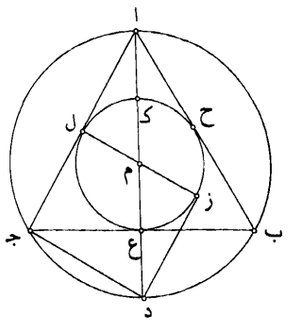


Fig. 7

Démonstration : menons à la droite AC du point L, c'est-à-dire de la position où le cercle <inscrit> touche la droite AC, une perpendiculaire. Il est clair qu'elle passe par le centre des deux cercles et que son extrémité aboutit à la circonférence du cercle HGL ; c'est la droite LG. La droite LG est donc le diamètre du cercle HGL et elle est égale à la droite KO. Joignons le point G au point D par la droite GD et le point D [73r] au point C par la droite DC ; la droite AM est égale à la droite MD et la droite ML est égale à la droite MG ; les deux droites AM et ML sont respectivement égales aux deux droites DM et MG, l'angle AML est égal à l'angle DMG, donc la base DG est égale à la base AL. Mais AL est égale à LC, donc LC est égale à DG ; le triangle AML est égal au triangle DMG et ses angles sont égaux à ses angles ; l'angle ALM est donc égal à l'angle MGD et la droite GD est donc parallèle à la droite LC ; or on a montré qu'elle lui est égale et on a joint leurs extrémités par les deux droites GL et DC ; la droite GL est donc parallèle et égale à la droite DC ; le produit de AC par lui-même plus CD par lui-même est égal au produit de AD par lui-même, car l'angle ACD est droit ; DC est égal à LG et LG est égal à KO ; la somme des produits de AC par lui-même et de KO par lui-même est donc égale au produit de AD par lui-même. Ce qu'il fallait démontrer.

<11> Si on a un polygone régulier à quinze angles, inscrit dans un cercle dont le diamètre est dix, et si nous voulons connaître la grandeur de chacun de ses côtés, alors nous posons le cercle connu le cercle ACB, dont



وبرهان ذلك: أن نخرج على خط ا ج من نقطة ل، وهو الموضع الذي ماست فيه الدائرة خط ا ج، خطًا على زاوية قائمة. فبيّن أنه يمر بمركز الدائرتين جميعًا وينتهي طرفه إلى محيط دائرة ح ز ل، وهو خط ل ز. فخط ل ز قطر دائرة ح ز ل، وهو مساوٍ لخط ك ع. ونصل نقطة ز بنقطة د بخط ز د ونقطة د
٧٣-و / بنقطة ج بخط د ج، وخط ا م مثل خط م د وخط م ل مثل خط م ز، وكلا خطي ا م م ل مثل كلا خطي د م م ز، وزاوية ا م ل مثل زاوية د م ز، فقاعدة د ز مثل قاعدة ا ل. وا ل مثل ل ج، فـ ل ج مثل د ز؛ ومثلث ا م ل مثل مثلث د م ز وزواياه مثل زواياه، فزاوية ا ل م مثل زاوية م ز د، فخط ز د موازٍ لخط ل ج. وقد كنا بيّنا أنه مساوٍ له، وقد وصل فيما بين أطرافهما بخطي ز ل د ج، فخط ز ل موازٍ ومساوٍ لخط د ج، وضرب ا ج في نفسه وج د في نفسه مثل ضرب ا د في نفسه، لأن زاوية ا ج د قائمة، ود ج مثل ل ز وك ز مثل ك ع، فضرب ا ج في نفسه وك ع في نفسه مثل ضرب ا د في نفسه؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

<١١> إذا كان شكل له خمس عشرة زاوية تحيط به دائرة قطرها عشرة، وهو متساوي الأضلاع والزوايا، وأردنا أن نعلم كم كل جانب منه، فإنا نجعل

le diamètre est *AB* ; nous traçons dans ce cercle le côté d'un décagone qui intercepte une partie et demie et qui est la droite *BD* ; or nous avons montré qu'il est la racine de trente et un plus un quart moins deux et demi ; la corde *AD* est son complément, elle est la corde de deux cinquièmes de cercle et elle est soixante-deux et demi plus la racine de sept cent quatre-vingt-un plus un quart, dont on a pris la racine. Traçons dans le cercle la corde du sixième, soit *BC* ; elle intercepte deux parties et demie et elle est cinq ; la droite *AC* est son complément, elle est la corde d'un tiers et elle est la racine de soixante-quinze ; nous multiplions la droite *AC* par la droite *BD*, on aura la racine de deux mille trois cent quarante-trois plus un demi plus un quart moins la racine de quatre cent soixante-huit plus un demi plus un quart ; nous le retranchons ensuite du produit de la droite *AD* par la droite *BC*, qui est mille [73ᵛ] cinq cent soixante-deux plus un demi plus la racine de quatre cent mille quatre-vingt-huit mille deux cent quatre-vingt-un et un quart, dont on a pris la racine ; il reste mille cinq cent soixante-deux plus un demi plus la racine de quatre cent mille quatre-vingt-huit mille deux cent quatre-vingt-un plus un quart, dont on a pris la racine, auquel on ajoute la racine de quatre cent soixante-huit plus un demi plus un quart ; on retranche de tout cela la racine de deux mille trois cent quarante-trois plus un demi plus un quart, ce qui est égal au produit de la droite *AB* par la droite *CD* ; nous divisons par la droite *AB*, qui est dix ; on obtient la droite *CD*, quinze plus cinq huitièmes plus la racine de quarante-huit plus trois quarts plus cinq huitièmes d'un huitième, dont on a pris la racine, plus la racine de quatre dirhams et demi plus un huitième plus la moitié d'un huitième, moins la racine de vingt-trois plus trois huitièmes plus la moitié d'un huitième. Ce qu'il fallait démontrer.

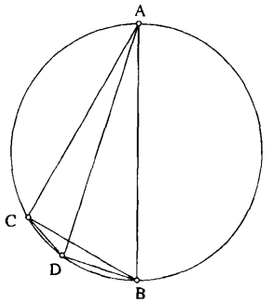
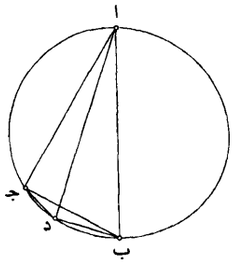


Fig. 8

Nous allons donner une approximation de la détermination de la corde *CD* pour que tu comprennes comment prendre la racine de quarante-huit plus trois quarts plus cinq huitièmes d'un huitième par approximation ; tu

الدائرة المعلومة دائرة ا ج ب وقطرها ا ب، ونعمل فيها ضلع معشر، وهو يوتر جزءًا ونصفًا، وهو خط ب د. وقد بيّنا أنه جذر واحد وثلاثين وربع إلا اثنين ونصفًا ووتر ا د تمامه، وهو وتر خمسي الدائرة، وهو اثنان وستون ونصف وجذر سبعمائة وأحد وثمانين وربع مأخوذًا جذره. ونرسم فيها وتر السدس، وهو ب ج، وهو يوتر جزئين ونصفًا، وهو خمسة؛ وخط ا ج تمامه، وهو وتر الثلث وهو جذر خمسة وسبعين؛ <ونضرب خط ا ج في خط ب د>، فيكون جذر ألفين وثلاثمائة وثلاثة وأربعين ونصف وربع إلا جذر أربعمائة وثمانية وستين ونصف وربع. ثم نلقيه من ضرب خط ا د في خط ب ج، وهو ألف / وخمسمائة واثنان وستون ونصف وجذر أربعمائة ألف وثمانية وثمانين ألفًا ٧٣-ظ ومائتين وأحد وثمانين وربع مأخوذًا جذره، فيبقى ألف وخمسمائة واثنان وستون ونصف وجذر أربعمائة ألف وثمانية وثمانين ألفًا ومائتين وأحد وثمانين وربع مأخوذًا جذره مزادًا عليه جذر أربعمائة وثمانية وستين ونصف وربع منقوصًا من جميع ذلك جذر ألفين وثلاثمائة وثلاثة وأربعين ونصف وربع، وهو مثل ضرب خط ا ب في خط ج د. فنقسم على خط ا ب،



وهو عشرة، فيخرج خط ج د خمسة عشر وخمسة أثمان وجذر ثمانية وأربعين وثلاثة أرباع وخمسة أثمان الثمن مأخوذًا جذره وجذر أربعة دراهم ونصف وثمن ونصف ثمن إلا جذر ثلاثة وعشرين وثلاثة أثمان ونصف ثمن؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

فنقرّب استخراج وتر ج د لتفهم كيف تأخذ جذر ثمانية وأربعين وثلاثة أرباع وخمسة أثمان الثمن بالتقريب، فتجده ستة وتسع وخمسين دقيقة وخمس

1 وهو: مكررة — 3 تمامه: ناقصة في الترجمة اللاتينية — 6 <وضرب خط ا ج في خط ب د>: Ducamus lineam AG in lineam BD (p. 243, l. 239) — 21 وتسع: وتسعة . وخمس: وخمسة.

la trouveras six plus cinquante-neuf minutes plus quinze secondes plus quarante-six tierces, que tu ajoutes à quinze plus cinq huitièmes ; on a vingt-deux plus trente-six minutes quarante-cinq secondes et quarante-six tierces, dont tu prends la racine que tu trouves par approximation, quatre plus quarante-cinq minutes plus dix-neuf secondes plus une tierce ; tu lui ajoutes alors la racine de quatre plus cinq huitièmes plus un demi-huitième par approximation, qui est deux plus neuf minutes plus cinquante-quatre secondes plus douze tierces ; on a six plus cinquante-cinq minutes plus treize secondes plus treize tierces, dont tu soustrais la racine de vingt-trois plus trois huitièmes plus un demi-huitième par approximation, ce qui est quatre dirhams cinquante minutes vingt-huit secondes et vingt-cinq tierces ; il reste deux plus quatre minutes plus quarante-quatre secondes plus quarante-huit tierces, ce qui est la corde *CD* par approximation. Ce qu'il fallait démontrer [74r].

<12> Si on te dit : soit un triangle équilatéral dont l'aire et la hauteur ont pour somme dix en nombre, quelle est sa hauteur? Posons le triangle, le triangle *ABC*, dont la hauteur est *AD*. Si nous voulons connaître combien est la droite *AD* qui est la hauteur, nous la posons une chose ; la droite *DC* est donc la racine du tiers du *carré*, tout côté du triangle *ABC* est la racine d'un *carré* plus un tiers <de *carré*>, l'aire du triangle *ABC* est la racine d'un tiers d'un *carré-carré* et sa hauteur est une chose ; il vient alors une chose plus la racine d'un tiers d'un *carré-carré* égal à dix. Rends entière la racine du tiers de ton *carré-carré* pour qu'elle soit la racine d'un *carré-carré*, ce qui est un *carré* ; pour le rendre entier, tu le multiplies par la racine de trois, on aura un *carré* ; tu multiplies tout ce que tu as par la racine de trois, on aura un *carré* plus

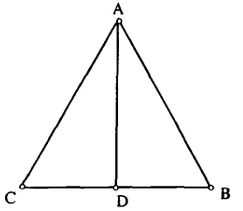
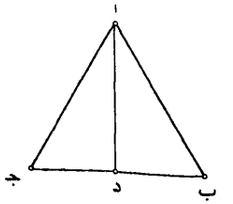


Fig. 9

عشرة ثانية وست وأربعين ثالثة، فتـــزيده على خمسة عشر وخمسة أثمان، فيكون ذلك اثنين وعشرين وست وثلاثين دقيقة وخمس وأربعين ثانية وست وأربعين ثالثة، فتأخذ جذرها، فتجده بالتقريب أربعة وخمس وأربعين دقيقة وتسع عشرة ثانية وثالثة واحدة. فتزيد عليه جذر أربعة وخمسة أثمان ونصف ثمن بالتقريب، وهو اثنان وتسع دقائق وأربع وخمسون ثانية واثنتا عشرة ثالثة، فيكون ستة وخمس وخمسين دقيقة وثلاث عشرة ثانية وثلاث عشرة ثالثة، فتنقص منه جذر ثلاثة وعشرين وثلاثة أثمان ونصف ثمن بالتقريب، وهو أربعة دراهم وخمسون دقيقة وثمانٍ وعشرون ثانية وخمس وعشرون ثالثة، فيبقى اثنان وأربع دقائق وأربع وأربعون ثانية وثمان وأربعون ثالثة، وهو وتر ج د بالتقريب؛ وذلك ما أردنا أن نبين. /

٧٤-و <١٢> فإن قيل لك: مثلثة متساوية الأضلاع والزوايا مساحتها مع عمودها عشرة من العدد، كم عمودها؟ فإنا نجعل المثلث مثلث ا ب ج وعموده ا د. فإذا أردنا أن نعلم كم خط ا د الذي هو العمود، جعلناه شيئًا، فخط د ج جذر ثُلث مال وكل جانب من مثلث ا ب ج جذر مال وثلث، ومساحة مثلث ا ب ج جذر ثلث مال مال وعموده شيء، فصار شيء وجذر ثلث مال مال يعدل عشرة. فأكمل جذر ثلث مال مالك حتى يكون جذر مال مال، وهو مال؛ وإكمالك إياه أن تضربه في جذر



1-4 فتجده ... ثالثة: فتجده ستة وتسعة وخمسين دقيقة وخمسة عشر ثانية وستة وأربعين ثالثة، فتـــزيده على خمسة عشر وخمسة أثمان، فيكون ذلك اثنين وعشرين وستة وثلاثين دقيقة وخمسة وأربعين ثانية وستة وأربعين ثالثة، فتأخذ جذرها، فتجده بالتقريب أربعة وخمسة وأربعين دقيقة وتسعة عشر ثانية وثالثة واحدة — 6 ستة وخمس وخمسين دقيقة وثلاث عشرة ثانية وثلاث عشرة ثالثة: et erit 56 et 2/5 partes et 13 secunda et 13 tertia (p. 244, l. 252) — 9 ج د: ب ج د — 15 مال وثلث ... جذر: في الهامش — 18 وهو مال: ناقصة في الترجمة اللاتينية.

la racine de trois *carrés* égaux à la racine de trois cents. Partage en deux moitiés la racine de trois *carrés* ; il vient la racine de trois quarts que tu multiplies par elle-même ; il vient trois quarts que tu ajoutes à la racine de trois cents ; il vient trois quarts plus la racine de trois cents ; tu prends la racine de cela de laquelle tu retranches la racine de trois quarts ; ce qui reste est la droite *AD*, qui est la hauteur. Ce qu'il fallait démontrer.

<13> Si on te dit : soit un triangle équilatéral dont chacun des côtés est dix et dans lequel est inscrit un rectangle[7] dont l'aire est dix, quelle est la longueur du rectangle ?

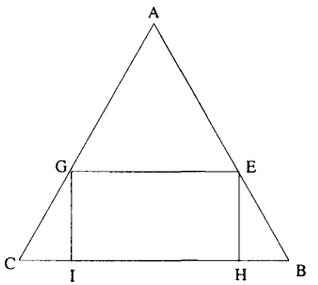


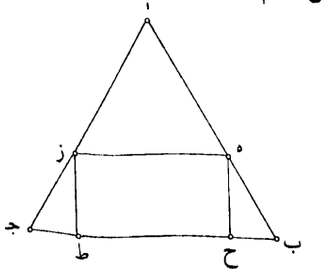
Fig. 10

Exemple : posons le triangle, le triangle *ABC*, et le rectangle inscrit, le rectangle *EGHI*. Si nous voulons savoir quelle est la droite *EH* qui est la longueur du rectangle, nous la posons une chose ; alors la droite *BH* est la racine d'un tiers du *carré* ; de même la droite *IC* est la racine d'un tiers du *carré* ; il reste la droite *HI*, dix moins la racine du *carré* et du tiers du *carré*, que tu multiplies par la droite *EH*, qui est une chose ; on aura dix [74^{v}] choses moins la racine du *carré-carré* et du tiers d'un *carré-carré* égal à dix dirhams. Restaure les choses par la racine du *carré-carré* plus un tiers de *carré-carré* et ajoute une quantité égale aux dirhams ; il vient dix dirhams plus la racine du *carré-carré* plus un tiers de *carré-carré* égal à dix choses. Ramène tout ce que tu as à la racine du *carré-carré*, qui est un *carré*, en le multipliant par la racine de trois quarts et en multipliant tout ce

[7] Litt. : carré allongé (*murabba' mustaṭil qā'im al-zawāyā*).

ثلاثة، فيكون <مالاً>، فتضرب كل ما معك في جذر ثلاثة، فيكون مالاً وجذر ثلاثة أموال يعدل جذر ثلاثمائة. فنصّفْ جذر ثلاثة أموال، يكن جذر ثلاثة أرباع، فاضربه في مثله، يكن ثلاثة أرباع؛ فزده على جذر ثلاثمائة، يكن ثلاثة أرباع وجذر ثلاثمائة فتأخذ جذره، فتلقي منه جذر ثلاثة أرباع، فما بقي فهو خط ا د الذي هو العمود؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

<١٣> فإن قيل لك: مثلث متساوي الأضلاع والزوايا كل جانب منه عشرة وفيه مربع مستطيل قائم الزوايا مساحته عشرة، كم طول المربع؟



مثال ذلك: أنا نجعل المثلث مثلث ا ب ج والمربع المستطيل فيه مربع ه ز ح ط. فإذا أردنا أن نعلم كم خط ه ح الذي هو طول المربع، فإنا نجعله شيئًا، فخط ب ح جذر ثلث مال؛ وكذلك خط ط ج جذر ثلث مال، فيبقى خط ح ط عشرة إلا جذر مال وثلث <مال>، فتضربه في خط ه ح، وهو شيء، فيكون عشرة / أشياء إلا جذر مال مال وثلث مال مال يعدل عشرة دراهم. فاجبر الأشياء بجذر مال مال وثلث مال مال وزد مثله على الدراهم، فتصير عشرة دراهم وجذر مال مال وثلث مال مال يعدل عشرة أشياء. فردّ كل شيء معك إلى جذر مال مال، وهو مال وهو أن تضربه في جذر ثلاثة أرباع

٧٤-ظ

6 المسألة هي نفسها في الترجمة اللاتينية، إلا أن النص "من مثال ذلك" إلى آخر المسألة لا يختلف عن النص العربي فقط، بل يجانب الصواب أيضًا. انظر رقم ١٣، ١٤ في الترجمة اللاتينية — 13

الدراهم: الدرهم.

que tu as par la racine de trois quarts ; on aura un *carré* plus la racine de soixante-quinze dirhams égal à la racine de soixante-quinze *carrés*. Partage en deux moitiés la racine de soixante-quinze *carrés* ; on aura la racine de dix-huit plus un demi plus un quart, que tu multiplies par elle-même ; il vient dix-huit plus un demi plus un quart, dont tu retranches la racine de soixante-quinze ; il reste dix-huit plus un demi plus un quart moins la racine de soixante-quinze, dont tu prends la racine, et à ce que tu obtiens tu ajoutes la racine de dix-huit plus un demi plus un quart ; la somme est la longueur du rectangle, qui est la droite *EH*. Ce qu'il fallait démontrer[8].

<14> Si on te dit : soit un triangle équilatéral *ABC* dans lequel est inscrit un carré, soit le carré *HLOM* tel que la somme de l'aire du triangle et de celle du carré soit dix, combien est chaque côté du carré *OLHM* ?

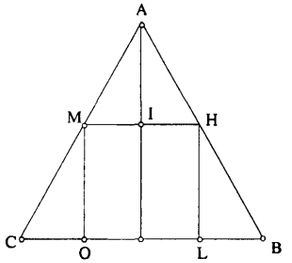


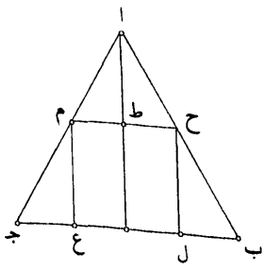
Fig. 11

On l'infère ainsi : Pose chacun des côtés du carré une chose, son aire est un *carré* et l'aire du triangle *ABC* est dix moins un *carré* ; il reste l'aire du triangle *BLH* plus l'aire du triangle *MOC* plus l'aire du triangle *AHM*, dix moins deux *carrés*. Or nous avons posé chacun des côtés du carré une chose ; la droite *MO* est alors une chose et la droite *OC* est la racine d'un tiers de *carré* ; l'aire des deux triangles *MOC* et *HLB* est donc la racine du tiers du *carré-carré*. Mais la droite *AI* est la racine des trois quarts du *carré*, donc l'aire du triangle *AHM* est la racine d'un huitième de *carré-carré* plus un demi-huitième de *carré-carré*. <La somme des aires> du triangle *MOC*, du triangle *HBL* et du triangle *HMA* est la somme de la racine d'un tiers de *carré-carré* et de la racine d'un huitième de *carré-*

[8] Ce problème n'est possible que pour le rectangle. Voir chap. III, p. 132, n. 2.

وتضرب كل ما معك في جذر ثلاثة أرباع، فيكون مالاً وجذر خمسة وسبعين درهمًا يعدل جذر خمسة وسبعين مالاً. فنصّفْ جذر خمسة وسبعين مالاً، فيكون جذر ثمانية عشر ونصف وربع، فاضربه في مثله، يكن ثمانية عشر ونصفًا وربعًا، فألق منه جذر خمسة وسبعين، فيبقى ثمانية عشر ونصف وربع إلا جذر خمسة وسبعين. فتأخذ جذره، فما خرج زدت عليه جذر ثمانية عشر ونصف وربع، فما اجتمع فهو طول المربع الذي هو خط ه ح؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

<١٤> فإن قيل لك: مثلث متساوي الأضلاع والزوايا عليه ا ب ج وفيه مربع قائم الزوايا متساوي الأضلاع، وهو مربع ح ل ع م، ومساحة المثلث والمربع عشرة، كم كل جانب من مربع ع ل ح م؟



قياسه: أن تجعل كل جانب من المربع شيئًا ومساحته مال ومساحة المثلث الذي عليه ا ب ج عشرة إلا مالاً، فيبقى مساحة مثلث ب ل ح ومثلث م ع ج ومثلث ا ح م عشرة إلا مالين. وقد كنا جعلنا كل جانب من المربع شيئًا، فخط م ع شيء وخط ع ج جذر ثلث مال، فمساحة مثلثي م ع ج ح ل ب جذر ثلث مال مال. وخط ا ط جذر ثلاثة أرباع مال، فمساحة مثلث ا ح م جذر ثمن مال مال ونصف ثمن مال؛ فصار مثلث م ع ج ومثلث ح ب ل ومثلث ح م ا جذر ثلث مال مال وجذر ثمن مال مال ونصف ثمن

2 فنصّف ... مالاً: في الهامش — 6 وذلك ... نبين: في الهامش / فيبقى: فبقي.
في الترجمة اللاتينية — 11 الذي عليه ا ب ج: في الهامش — 7 <١٤>: هذه المسألة ناقصة

carré plus un demi-huitième de *carré-carré*, et elle est égale à dix moins deux *carrés*. Rends entière la racine du tiers du *carré-carré* pour qu'elle soit la racine du *carré-carré* [75r], qui est un *carré* ; pour la rendre entière, multiplie-la par la racine de trois, multiplie donc la racine d'un tiers de *carré-carré* par la racine de trois, on aura la racine du *carré-carré*, qui est un *carré* ; multiplie aussi la racine d'un huitième de *carré-carré* plus un demi-huitième de *carré-carré* par la racine de trois ; on a la racine d'un demi-*carré-carré* plus un demi-huitième de *carré-carré*, ce qui est trois quarts de *carré* ; ce sera alors un *carré* plus trois quarts de *carré*. Tu multiplies dix moins deux *carrés* par la racine de trois, on aura la racine de trois cents moins la racine de douze *carrés-carrés*. Il vient un *carré* plus trois quarts de *carré* égal à la racine de trois cents moins la racine de douze *carrés-carrés*. Restaure la racine de trois cents par la racine de douze *carrés-carrés* et ajoute-la au *carré* plus trois quarts de *carré* ; il vient un *carré* plus trois quarts de *carré* plus la racine de douze *carrés-carrés* égal à la racine de trois cents. Ramène tout ce que tu as à un seul *carré* en le multipliant par la racine de trois mille soixante-douze parties de vingt mille quatre cent quarante-neuf parties de l'unité moins vingt-huit parties de cent quarante-trois parties de l'unité ; on aura un *carré* égal à la racine de quarante-cinq dirhams plus mille trois cent quatre-vingt-quinze parties de vingt mille quatre cent quarante-neuf parties de l'unité moins la racine de onze dirhams plus dix mille deux cent soixante et une parties de vingt mille quatre cent quarante-neuf parties de dirham, qui est l'aire du carré *HMLO* inscrit dans le triangle *ABC*, que tu retranches de dix. Ce qui reste est l'aire du triangle *ABC*.

Si tu veux, dis que l'aire du carré est six plus cent parties plus deux parties de cent quarante-trois parties d'unité moins la racine de onze dirhams plus dix mille deux cent soixante et une parties de vingt mille quatre cent quarante-neuf parties de dirham. L'aire du triangle reste trois plus quarante et une parties de cent [75v] quarante-trois parties d'unité plus la racine de onze plus dix mille deux cent soixante et une parties de vingt mille quatre cent quarante-neuf parties d'unité.

مال مال، فهو يعدل عشرة إلا مالين. فأكمل جذر ثلث مال مال حتى يكون
جذر مال مال / وهو مال؛ وإكمالك إياه أن تضربه في جذر ثلاثة، فتضرب ٧٥-و
جذر ثُلث مال مال في جذر ثلاثة، فيكون جذر مال مال، وهو مال، وتضرب
جذر ثمن مال مال ونصف ثمن مال مال في جذر ثلاثة، فيكون جذر نصف مال
مال ونصف ثمن مال مال، وهو ثلاثة أرباع مال، فصار مالاً وثلاثة أرباع مال،
وتضرب عشرة إلا مالين في جذر ثلاثة، فيكون جذر ثلاثمائة إلا جذر اثني عشر
مال مال، فصار مال وثلاثة أرباع مال يعدل جذر ثلاثمائة إلا جذر اثني عشر
مال مال. فاجبر جذر ثلاثمائة بجذر اثني عشر مال مال وزده على مال وثلاثة
أرباع مال، فصار مالاً وثلاثة أرباع مال وجذر اثني عشر مال مال يعدل جذر
ثلاثمائة. فردّ كل شيء معك إلى مال واحد، وهو أن تضربه في جذر ثلاثة
آلاف واثنين وسبعين جزءاً من عشرين ألفًا وأربعمائة وتسعة وأربعين جزءاً من
واحد إلا ثمانية وعشرين جزءاً من مائة وثلاثة وأربعين جزءاً من واحد، فيكون
مالاً يعدل جذر خمسة وأربعين درهمًا وألف وثلاثمائة وخمسة وتسعين جزءاً من
عشرين ألفًا وأربعمائة وتسعة وأربعين جزءاً من واحد إلا جذر أحد عشر درهمًا
وعشرة آلاف ومائتين وأحد وستين جزءاً من عشرين ألفًا وأربعمائة وتسعة
وأربعين جزءاً من درهم وهو مساحة مربع ح م ل ع الذي في مثلث ا ب ج.
فتسقطه من عشرة، فما بقي فهو مساحة مثلث ا ب ج.

وإن شئت، فقل: مساحة المربع ستة ومائة جزء وجزءان من مائة وثلاثة
وأربعين جزءاً من واحد إلا جذر أحد عشر درهمًا وعشرة آلاف ومائتين وأحد
وستين جزءاً من عشرين ألفًا وأربعمائة وتسعة وأربعين جزءاً من درهم، وتبقى
مساحة المثلث ثلاثة وأحد وأربعين جزءاً من مائة / وثلاثة وأربعين جزءاً من ٧٥-ظ
واحد وجذر أحد عشر وعشرة آلاف ومائتين وأحد وستين جزءاً من عشرين
ألفًا وأربعمائة وتسعة وأربعين <جزءاً> من واحد.

7 مال (الأولى): مالاً — 8 فاجبر: فأكمل.

<15> Si on te dit : soit un carré, dont chacun des côtés est dix, soit le carré *ABCD*, dans lequel nous inscrivons un pentagone selon cette figure, soit le pentagone *AEHRM*. Pour connaître chacun de ses côtés, pose un de ses côtés, soit la droite *AE*, une chose ; il reste la droite *EB*, dix moins une chose, et la droite *CH* est la racine de la moitié d'un *carré* ; il reste la droite *HB*, dix moins la racine de la moitié d'un *carré*. Mais la droite *EB* est dix moins une chose ; tu multiplies chacune d'elles par elle-même et tu les additionnes ; on aura deux cents dirhams, plus un *carré*, plus un demi-*carré* moins vingt choses moins la racine de deux cents *carrés* égal à un *carré* ; tu réduis par ceci, comme je te l'ai expliqué ; on obtient la droite *AE* qui est l'un des côtés du pentagone, deux cents plus la racine de trois cent mille plus vingt mille, dont on a pris la racine, retranché de vingt plus la racine de deux cents. Ce qu'il fallait démontrer.

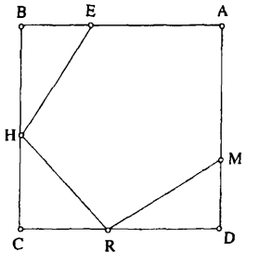


Fig. 12

<16> Si on dit : soit un pentagone régulier dont l'aire est cinquante coudées, combien est chacun de ses côtés?

On l'infère ainsi : Tu poses le pentagone, le pentagone *ABCDE*, et le centre du cercle circonscrit, *M*, et tu mènes les droites *AM*, *MB*, *MC*, *MD*, *ME*. Il est clair qu'il a été partagé en cinq triangles égaux, qui sont les triangles *AMB*, *BMC*, *CMD*, *DME* et *EMA*. Le triangle *EMD* est donc dix en nombre ; or nous avons montré précédemment dans notre livre que, si on a un pentagone régulier dont chacun des côtés est dix, alors le carré du diamètre du

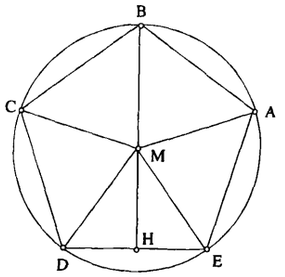
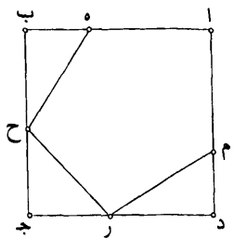


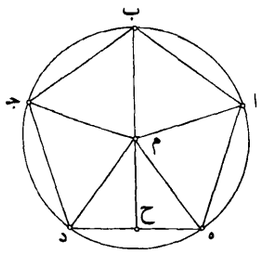
Fig. 13

<١٥> فإن قيل لك: مربع متساوي الأضلاع قائم الزوايا كل جانب منه عشرة، وهو مربع ا ب ج د، عملنا فيه مخمسًا على هذه <الصورة>، وهو مخمس ا ه ح ر م. فمعرفة كل جانب منه أن تجعل أحد جوانبه، وهو خط ا ه، شيئًا، فيبقى خط ه ب عشرة إلا شيئًا، وخط ج ح جذر نصف مال، فيبقى خط ح ب عشرة إلا جذر نصف مال؛ وخط ه ب عشرة إلا شيئًا، فتضرب كل واحد منهما في مثله وتجمعهما، فيكون مائتي درهم ومالاً ونصف مال إلا عشرين جزءًا وإلا جذر مائتي مال يعدل مالاً. فتقابل به كنحو ما بينت لك، فيخرج خط ا ه الذي هو أحد أضلاع المخمس مائتين وجذر ثلاثمائة ألف وعشرين ألفًا مأخوذًا جذره منقوصًا من عشرين وجذر مائتين؛ وذلك ما أردنا أن نبين.



<١٦> فإن قيل: مخمس متساوي الأضلاع والزوايا مساحته خمسون ذراعًا، كم كل جانب منه؟

<قياسه>: فتجعل المخمس مخمس ا ب ج د ه ومركز الدائرة التي تحيط به م وتخرج خطوط ا م م ب م ج م د م ه، فبيّن أنه قد انقسم خمسة مثلثات متساويات، وهي مثلثات ا م ب ب م ج ج م د د م ه ه م ا، فمثلث ه م د عشرة من العدد؛ وقد بيّنا فيما تقدّم من كتابنا أنه إذا كان مخمس متساوي الأضلاع والزوايا، كل جانب منه عشرة، أن



2 على هذه <الصورة>: نجد في الترجمة اللاتينية secundum hanc figuram (p. 245, l. 281) — 15 <قياسه>: نجد في الترجمة اللاتينية verbi gratia (p. 247, l. 291) — 16 م ب: م د — 17 خمسة: ناقصة في الترجمة اللاتينية.

cercle circonscrit est deux cents plus la racine de huit mille. Il est donc clair, d'après ce que nous avons décrit, que, si tu veux connaître le diamètre du cercle circonscrit à un pentagone régulier et connu, tu multiplies l'un de ses côtés par lui-même, tu doubles ce que tu obtiens et tu le retiens, puis tu multiplies également l'un de ses côtés par lui-même et ensuite ce que tu obtiens par lui-même et tu en prends les quatre cinquièmes [76r] ; tu prends alors la racine de ce que tu as obtenu, tu ajoutes le résultat à ce que tu as retenu, tu prends alors la racine de tout ce que tu as obtenu, ce que tu as alors est le diamètre du cercle. S'il en est ainsi, nous posons la droite *DE* une chose, c'est-à-dire l'un des côtés du pentagone ; alors le carré du diamètre du cercle circonscrit à ce pentagone est comme nous l'avons montré : deux *carrés* plus la racine des quatre cinquièmes du *carré-carré* ; le carré de son demi-diamètre, c'est-à-dire la droite *EM*, est un demi-*carré* plus la racine d'un demi-dixième de *carré-carré*. Menons ensuite la hauteur du triangle *EMD* ; il est clair qu'elle tombe au milieu de la droite *ED* ; c'est la droite *MH*. La droite *EH* est une demi-chose ; nous la multiplions par elle-même, on a un quart de *carré* ; on le retranche du carré de la droite *EM*, qui est un demi-*carré* plus la racine d'un demi-dixième de *carré-carré* ; il reste le carré de la droite *MH*, un quart de *carré* plus la racine d'un demi-dixième de *carré-carré*. Nous le multiplions par le carré de la droite *EH*, qui est une demi-chose, on a la moitié d'un huitième de *carré-carré* plus la racine d'une partie de trois cent vingt parties du *carré-carré-carré-carré*, égal à dix multiplié par lui-même, ce qui est cent. Rends entier un demi-huitième de ton *carré-carré* pour avoir un *carré-carré* en le multipliant par seize ; tu multiplies alors tout ce que tu as par seize, on a un *carré-carré* plus la racine de deux cent cinquante-six parties de trois cent vingt parties d'un *carré-carré-carré-carré* égal à mille six cents. Ramène tout ce que tu as à un *carré-carré* en le multipliant par cinq moins la racine de vingt, on a un *carré-carré* égal à huit mille moins la racine de cinquante et un mille mille plus deux cent mille ; prends la racine <quatrième> de tout cela, tu as chacun des côtés du pentagone.

مربع قطر الدائرة المحيطة به مائتان وجذر ثمانية آلاف. فبيّن مما وصفنا أنك إذا أردت معرفة قطر دائرة تحيط بمخمس متساوي الأضلاع والزوايا معلوم، أنك تضرب أحد جوانبه في مثله، ثم تضعفه وتحفظه، ثم تضرب أيضًا أحد جوانبه في مثله، ثم ما اجتمع في مثله، ثم تأخذ أربعة / أخماسه، فما كان أخذت جذره، ٧٦-و
فما خرج زدته على ما حفظت، فما بلغ أخذت جذره، فما كان فهو قطر الدائرة. فإذا كان هكذا، فإنا نجعل خط د ه شيئًا، وهو أحد جوانب المخمس، فمربع قطر الدائرة التي يحيط بهذا المخمس على ما بينا: مالان وجذر أربعة أخماس مال مال؛ ومربع نصف قطرها، وهو خط ه م، فهو نصف مال وجذر نصف عشر مال مال. ثم نخرج عمود مثلث ه م د، فبيّن أنه يقع على نصف خط ه د، وهو خط م ح؛ فخط ه ح نصف شيء، فنضربه في مثله، فيكون ربع مال؛ فيسقط من مربع خط ه م، وهو نصف مال وجذر نصف عشر مال مال، فيبقى مربع خط م ح ربع مال وجذر نصف عشر مال مال. فنضربه في <مربع> خط ه ح، وهو نصف شيء، فيكون نصف ثمن مال مال وجذر جزء من ثلاثمائة وعشرين جزءًا من مال مال مال مال يعدل عشرة مضروبة في مثلها، وهو مائة. فأكمل نصف ثمن مال مالك حتى يكون مال مال، وهو أن تضربه في ستة عشر، فتضرب كل ما معك في ستة عشر، فيكون <مال مال وجذر مائتين ستة وخمسين جزءًا من ثلاثمائة وعشرين جزءًا من> مال مال مال مال يعدل ألفًا وستمائة. فردّ كل شيء معك إلى مال مال، وهو أن تضربه في خمسة إلا جذر عشرين، فيكون مال مال يعدل ثمانية آلاف إلا جذر واحد وخمسين ألف ألف ومائتي ألف. فخذ جذر ذلك، فهو كل جانب من المخمس.

8 فهو نصف: ونصف — 11 مال (الثانية): ناقصة في الترجمة اللاتينية — 13 <مربع>: ناقصة في الترجمة اللاتينية — 16-17 <مال ... من>: نجد في الترجمة اللاتينية census census et radix 4/5 (p. 247, l. 319) — 18 ألفًا: الف — 19 إلا: و؛ نجد في الترجمة اللاتينية: et (p. 247, l. 317).

<17> Si on te dit : soit un décagone régulier dont l'aire est cent en nombre, combien est chacun de ses côtés ?

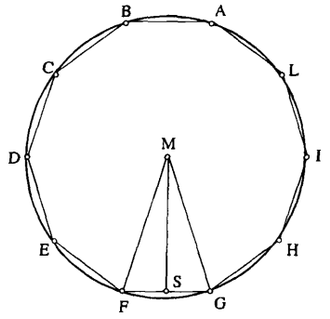


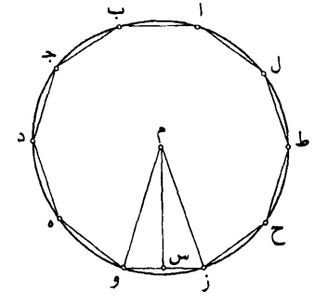
Fig. 14

Exemple : pose le décagone, le décagone *ABCDEFGHIL* et le centre du cercle circonscrit, *M*. Il est clair qu'il se partage en dix triangles égaux ; ainsi le triangle *GMF* est son dixième. Or nous avons montré dans ce qui précède que si, pour un décagone régulier, chacun de ses côtés est dix, alors le diamètre du cercle circonscrit [76^{v}] est dix plus la racine de cinq cents. Il est donc clair, d'après ce que nous avons décrit, que, si tu veux connaître le diamètre d'un cercle circonscrit à un décagone connu, tu multiplies l'un des côtés du décagone par lui-même et ensuite par cinq, et puis tu prends la racine de ce que tu obtiens, que tu ajoutes à l'un des côtés du décagone ; ce qu'on a est le diamètre du cercle. Ce que nous avons dit étant devenu clair, posons la droite *GF* une chose, et c'est l'un des côtés du décagone. Il faut donc que le diamètre du cercle circonscrit soit, comme nous l'avons montré, une chose plus la racine de cinq *carrés* ; et son demi-diamètre, qui est la droite *GM*, est une demi-chose plus la racine d'un *carré* plus un quart de *carré*. Ce que nous avons dit est également clair d'après ce qu'Euclide a exposé[9]. Il a dit en effet : si on partage une droite en moyenne et extrême raison et si on prolonge cette droite d'une <longueur> égale à la plus grande partie, alors tout cela se partage en moyenne et extrême raison, dont la plus grande partie est la première droite[10].

[9] *Éléments*, XIII.5, éd. Heiberg, qui correspond à XIII.6 de la traduction arabe Isḥāq-Thābit.

[10] Voir chap. III, note 1, p. 138-139.

<١٧> فإن قيل لك: معشر متساوي الأضلاع والزوايا مساحته مائة من العدد، كم كل جانب منه؟



مثال ذلك: أنك تجعل المعشر معشر ا ب ج د ه و ز ح ط ل ومركز الدائرة المحيطة به م؛ وبيّن أنه ينقسم بعشرة مثلثات متساويات، فمثلث ز م و عُشره. وقد كما بينا فيما تقدّم أنه إذا كان معشر متساوي الأضلاع والزوايا كل جانب منه عشرة أن قطر الدائرة المحيطة به / عشرة وجذر خمسمائة. فبيّن ٧٦-ظ مما وصفنا أنه إذا أردت معرفة قطر دائرة تحيط بمعشر معلوم أنك تضرب أحد جوانب المعشر في مثله، ثم في خمسة، ثم تأخذ جذر ما اجتمع، فتـــزيده على أحد جوانب المعشر، فما كان فهو قطر الدائرة. فإذ قد بان ما قلنا، فإنا نجعل خط ز و شيئًا، وهو أحد جوانب المعشر. فيجب أن يكون قطر الدائرة المحيطة به على ما بينا شيئًا وجذر خمسة أموال، ونصف قطرها وهو خط ز م نصف شيء وجذر مال وربع <مال>. وبيّن أيضًا ما قلنا مما ذكر أقليدس، وذلك أنه قال "إذا قسم خط على نسبة ذات وسط وطرفين، وزيد في طول الخط مثل القسم الأعظم، فإن جميع ذلك ينقسم على نسبة ذات وسط وطرفين والقسم الأعظم هو الخط الأول".

3 بعشرة: بعشر – 12 <مال>: نجد في الترجمة اللاتينية census (p. 248, l. 335) – 15 أقليدس: *الأصول*، الكتاب الثالث عشر، الشكل ٦ من الترجمة العربية: "كل خط يقسم على نسبة ذات وسط وطرفين، ويزاد في طول الخط مثل القسم الأطول، فإن جميع ذلك الخط قد انقسم على نسبة ذات وسط وطرفين، وقسمه الأطول هو الخط الأول" (مخطوطة رباط ١١٠١، ص. ١١٦-ظ).

Il est donc clair, d'après ce que nous avons mentionné, que, si on partage une droite en moyenne et extrême raison, alors, si on partage la plus grande partie en moyenne et extrême raison, la plus grande partie de cette droite est la plus petite partie de la première droite.

Il a dit dans un autre endroit[11] : si on prolonge le côté d'un hexagone par le côté d'un décagone d'un même cercle, alors toute la droite est divisée en moyenne et extrême raison et le côté de l'hexagone est la plus grande partie. Mais la droite *GF* est le côté du décagone et la droite *GM* est le côté de l'hexagone ; alors, si ces deux droites deviennent une seule droite, celles-ci se partagent en moyenne et extrême raison et la plus grande partie de la droite *GM*, si elle est divisée en moyenne et extrême raison, est égale à la droite *GF*[12].

Si tu poses *GF* une chose que tu retranches de *GM*, si ensuite tu ajoutes à ce qui reste la moitié de la droite *GF* et si tu multiplies ce que tu obtiens par lui-même, le produit sera égal à cinq fois le carré de la moitié de la droite *GF*, comme l'a mentionné Euclide[13].

Multiplie donc la moitié de la droite *GF* par elle-même, ensuite par cinq ; tu prends la racine que tu ajoutes à la moitié de la droite *GF*, qui est une demi-chose ; il vient alors la droite *GM*. On a ainsi montré que la droite *GM* est une demi-chose plus la racine d'un *carré* plus un quart de *carré*. Mène ensuite la hauteur du triangle *GMF*, soit *MS* ; il est clair qu'elle tombe sur la moitié de la droite *GF*, c'est-à-dire *GS*[14].

Multiplie ensuite la droite *GM* par elle-même, ce qui est une demi-chose plus la racine d'un *carré* plus un quart de *carré* ; on aura un *carré* [77r] plus un demi-<*carré*> plus la racine du *carré-carré* plus un quart de *carré-carré*. Multiplie ensuite la droite *GS*, qui est une demi-chose, par

[11] *Éléments*, XIII.12.
[12] Voir chap. III, note 2, p. 139-140.
[13] Euclide, *Éléments*, XIII.1 (voir relation β, note 2, p. 139).
[14] Abū Kāmil sous-entend au point *S*.

فبيّن مما ذكرنا أنه إذا قسم خط على نسبة ذات وسط وطرفين أن القسم الأعظم إذا قسم على نسبة ذات وسط وطرفين، فإن القسم الأعظم منه هو القسم الأصغر من الخط الأول.

وقال في موضع آخر: "إذا وصل ضلع مسدس بضلع معشر في دائرة واحدة على استقامة، فإن الخط كله مقسوم على نسبة ذات وسط وطرفين وضلع المسدس هو القسم الأعظم"، وخط ز و هو ضلع المعشر وخط ز م ضلع المسدس. فإذا صار هذان الخطان خطًا واحدًا، فقد انقسما على نسبة ذات وسط وطرفين والقسم الأعظم من خط ز م إذا قسم على نسبة ذات وسط وطرفين مثل خط ز و.

فإذا جعلت ز و شيئًا ونقصته من ز م، ثم زدت على ما بقي نصف خط ز و وضربت ما اجتمع في مثله، كان مثل خمسة أمثال مربع نصف خط ز و على ما ذكر أقليدس.

فتضرب نصف خط ز و في مثله، ثم في خمسة، وتأخذ جذره، فتزيده على نصف خط ز و وهو نصف شيء، فيخرج خط ز م. فقد تبين أن خط ز م نصف شيء وجذر مال وربع <مال>. ثم تخرج عمود مثلث ز م و، وهو م س. فبيّن أنه وقع على نصف خط ز و وهو ز س.

ثم تضرب خط ز م في مثله، وهو نصف شيء وجذر مال وربع <مال>، فيكون مالاً / ونصفًا وجذر مال مال وربع مال مال. ثم تضرب خط ز س، ٧٧-و

4 وقال: أقليدس، *الأصول*، الكتاب الثالث عشر، الشكل ١١ من الترجمة العربية: "كل دائرة يقع فيها وتر ضلع المعشر، ويتصل به ضلع المسدس على استقامة من خارج الدائرة، فإن جميع الخط مقسوم على نسبة ذات وسط وطرفين وقسمه الأطول هو ضلع المسدس" (مخطوطة رباط ١١٠١، ص. ١١٧و) — 12 أقليدس: *الأصول* الكتاب الثالث عشر، الشكل ١ من الترجمة العربية: "كل خط يقسم على نسبة ذات وسط وطرفين، ويضاف إلى قسمه الأطول نصف الخط كله، فإن مربع ذلك خمسة أمثال مربع نصف الخط" (مخطوطة رباط ١١٠١، ص. ١١٤-ظ) — 16 ز و: ب.

elle-même ; on a un quart de *carré*. Retranche celui-ci de celui-là ; il reste un *carré* plus un quart <de *carré*> plus la racine d'un *carré-carré* plus un quart de *carré-carré*. La racine de cela est la droite *MS* ; multiplie-la par la droite *GS*, qui est une demi-chose ; il vient un quart de *carré-carré* plus un demi-huitième de *carré-carré* plus la racine de cinq parties de soixante-quatre parties de *carré-carré-carré-carré*, ce qui est égal à cent dirhams. Rends entier le quart de ton *carré-carré* et le demi-huitième de ton *carré-carré* pour qu'il y ait un *carré-carré*, et ceci en le multipliant par trois plus un cinquième ; multiplie alors tout ce que tu as par trois plus un cinquième, il vient un *carré-carré* plus la racine de quatre cinquièmes de *carré-carré-carré-carré*, égal à trois cent vingt dirhams. Ramène tout ce que tu as à un *carré-carré* en le multipliant par cinq moins la racine de vingt, il vient un *carré-carré* égal à mille six cents moins la racine de deux mille mille quarante-huit mille. Prends la racine[15] de tout cela, c'est la droite *GF*, et c'est l'un des côtés du décagone. Ce qu'il fallait démontrer.

<18> Si on dit : un pentagone *ABCDE* régulier est tel que l'aire du triangle *BED* est dix, combien est la droite *DE* qui est la base du triangle et l'un des côtés du pentagone?

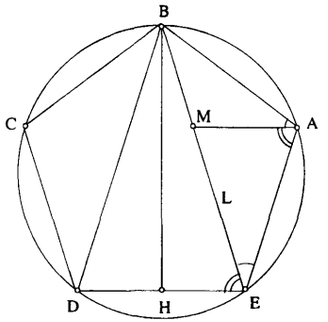


Fig. 15

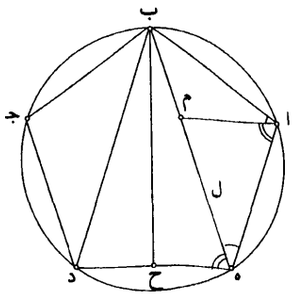
On l'infère ainsi : pose la droite *ED* une chose. Or Euclide[16] a montré que, si la droite *BE* est divisée en moyenne et extrême raison, alors la plus grande partie est égale à la droite *DE* et il a montré aussi que, si on divise une droite suivant une moyenne et extrême raison et si on ajoute à la plus grande partie de celle-ci la droite tout entière, le tout additionné sera selon

[15] Ici encore, comme dans les problèmes 18, 19 et 20, il s'agit de la racine quatrième.

[16] *Éléments*, XIII.8 (éd. Heiberg) ou XIII.13 (trad. arabe Isḥāq-Thābit).

وهو نصف شيء، في مثله، فيكون ربع مال. فتسقطه منه، فيبقى مال وربع وجذر مال مال وربع مال مال. فجذر هذا هو خط م س، فتضربه في خط ز س، وهو نصف شيء، فيكون ربع مال مال ونصف ثمن مال مال وجذر خمسة أجزاء من أربعة وستين جزءاً من مال مال مال مال يعدل مائة درهم. فأكمل ربع مال مالك ونصف ثمن مال مالك حتى يكون مال مال، وهو أن تضربه في ثلاثة وخمس، فتضرب كل شيء معك في ثلاثة وخمس، فيكون مال وجذر أربعة أخماس مال مال مال مال يعدل ثلاثمائة وعشرين درهماً. فردّ كل ما معك إلى مال مال، وهو أن تضربه في خمسة إلا جذر عشرين، فيكون مال مال يعدل ألفاً وستمائة إلا جذر ألفي ألف وثمانية وأربعين ألفاً. فخذ جذر ذلك، فهو خط ز و، وهو أحد جوانب المعشر؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

<١٨> فإن قيل: مخمس ا ب ج د ه متساوي الأضلاع والزوايا ومساحة مثلثة ب د ه عشرة، كم خط د ه الذي هو قاعدة المثلث وأحد جوانب المخمس؟



قياسه: أن تجعل خط ه د شيئاً؛ وقد بيّن أقليدس أن خط ب ه إذا قسم على نسبة ذات وسط وطرفين أن القسم الأعظم مساوٍ لخط د ه. <وبيّن أيضاً أنه إذا قسم خط على نسبة ذات وسط وطرفين، وأضيف إلى القسم الأعظم منه

1 وهو نصف شيء: في الهامش — 15 أقليدس: *الأصول*، الكتاب الثالث عشر، الشكل الثالث عشر من ترجمة إسحاق-ثابت، وهي رقم ٨ في تحقيق هيبرج للنص اليوناني: "كل دائرة فيها مخمس متساوي الأضلاع وفيها وتران لزاويتين من زوايا المخمس يقطع كل واحد منهما الآخر، فإن كل واحد منهما مقسوم على نسبة ذات وسط وطرفين على النقطة التي تقاطعا عليها والقسم الأطول من كل واحد منهما يساوي ضلع المخمس" (مخطوطة رباط ١١٠١، ص. ١١٧ظ؛ أسكوريال ٩٠٧، ص. ١٧٠ظ).

la même raison et la plus grande partie sera la première droite ; et il a montré également que, si on divise une droite suivant une moyenne et extrême raison, si on ajoute à la petite partie la moitié de la partie la plus longue et si on multiplie cela par lui-même, alors le carré obtenu est cinq fois le carré obtenu de la moitié de la plus longue partie par elle-même[17]. Partageons la droite *BE* en *M* suivant une moyenne et extrême raison et posons la plus grande partie la droite *ME*, alors la droite *ME* est égale à la droite [77ᵛ] *ED*. Partageons la droite *ME* en deux moitiés au <point> *L*, alors le produit de *BL* par elle-même est cinq fois le produit de *LE* par elle-même ; mais le produit de *LE* par elle-même est le quart du produit de *DE* par elle-même ; il est donc un quart de *carré*, car nous avons posé la droite *ED* une chose ; la droite *ME* est donc une chose et *LE* est une demi-chose, donc le produit de *BL* par elle-même est un *carré* plus un quart. La droite *BL* est donc la racine d'un *carré* plus un quart ; mais la droite *LE* est une demi-chose, donc la droite *BE* est une demi-chose plus la racine d'un *carré* plus un quart. Menons ensuite la hauteur du triangle *BED*, soit *BH* ; la droite *EH* est une demi-chose ; nous la multiplions par elle-même, on a un quart de *carré*, que nous retranchons du produit de *BE* par elle-même, ce qui est un *carré* plus un demi plus la racine d'un *carré-carré* plus un quart de *carré-carré* ; il reste alors un *carré* plus un quart plus la racine d'un *carré-carré* plus un quart de *carré-carré* ; la racine de cela est la droite *BH* ; multiplions-la par la droite *EH*, qui est une demi-chose, on aura un quart de *carré-carré* plus un demi-huitième de *carré-carré* plus la racine de cinq parties de soixante-quatre parties d'un *carré-carré-carré-carré*, égal à

[17] *Éléments*, XIII.4 (trad. arabe Isḥāq-Thābit).

الخط كله، فإن مجموع ذلك يقسم على نفس النسبة ويكون القسم الأعظم منه الخط الأول>. وبيّن أيضًا أنه "إذا قسم خط على نسبة ذات وسط وطرفين وأضيف إلى القسم الأصغر نصف القسم الأطول وضرب ذلك في نفسه، فإن المربع الذي يكون منه خمسة أمثال المربع الذي يكون من نصف القسم الأطول في نفسه". فنقسم خط ب ه على نسبة ذات وسط وطرفين على م، ونجعل القسم الأعظم خط م ه، فخط م ه مساوٍ لخط / ه د، ونقسم خط م ه بنصفين ٧٧-ظ على ل، فضرب ب ل في نفسه خمسة أمثال ضرب ل ه في نفسه؛ وضرب ل ه في نفسه ربع <ضرب د ه في نفسه، فهو ربع> مال، لأنا جعلنا خط ه د شيئًا، فخط م ه شيء ول ه نصف شيء، فضرب ب ل في مثله مال وربع، فخط ب ل جذر مال وربع؛ وخط ل ه نصف شيء، فخط ب ه نصف شيء وجذر مال وربع. ثم نخرج عمود مثلث ب ه د وهو ب ح، فخط ه ح نصف شيء، فنضربه في مثله، فيكون ربع مال ونسقطه من ضرب ب ه في نفسه، وهو مال ونصف وجذر مال مال وربع مال مال، فيبقى مال وربع وجذر مال مال وربع مال مال، فجذر هذا هو خط ب ح، فنضربه في خط ه ح، وهو نصف شيء، فيكون ربع مال مال ونصف ثمن مال مال وجذر خمسة أجزاء من أربعة وستين

1-2 (من ص. 567.2) <وبيّن ... الأول> نجد في الترجمة اللاتينية هذا النص، وهو ينقص النص العربي والترجمة العبرية؛ ويبدو أنه سقط من النصين الأخيرين، ولهذا اقترحنا إضافته (p. 249, 374-377) et exposuit etiam quia, quando dividetur linea secundum proportionem medii et extremorum et addetur toti linee sicut maior pars eius, tota addita divisa erit secundum proportionem eandem et maior pars erit linea prima؛ انظر *الأصول*، الكتاب الثالث عشر، شكل ٦ (ص. 283) — 7 نفسه: أقليدس، *الأصول*، الكتاب الثالث عشر، شكل ٤: "كل خط يقسم على نسبة ذات وسط وطرفين، ويضاف إلى القسم الأقصر نصف القسم الأطول، فإن مربع ذلك خمسة أمثال مربع نصف القسم الأطول" (مخطوطة رباط ١١٠١، ص. ١١٦ظ) — 8 <ضرب د ه في نفسه، فهو ربع>: نجد في الترجمة اللاتينية (p. 250, Et multiplicatio LE in se est 1/4 multiplicationis DE in se, ergo est ¼ census l. 384-5)؛ ومن الواضح أن <ضرب د ه في نفسه، فهو ربع> سقطت من النص العربي ومن الترجمة العبرية.

cent dirhams. Rends entier le quart de ton *carré-carré* plus le demi-huitième de ton *carré-carré* pour qu'il y ait un seul *carré-carré*, et ceci en multipliant par trois plus un cinquième ; multiplie tout ce que tu as par trois plus un cinquième, il vient un *carré-carré* plus la racine de quatre cinquièmes d'un *carré-carré-carré-carré*, égal à trois cent vingt dirhams. Ramène tout ce que tu as à un *carré-carré* en multipliant par cinq moins la racine de vingt ; il vient un *carré-carré* égal à mille six cents moins la racine de deux mille mille quarante-huit mille ; la racine de cela est la droite *ED*. Il est clair que le triangle *BED* de ce pentagone que nous venons de décrire est semblable au triangle *GMF* du décagone que nous avons décrit dans la proposition précédente, si Dieu le veut.

<19> Si on dit : l'aire du triangle *ABE* est dix en nombre, combien est la droite *BE*?

On l'infère ainsi : pose la droite *BE* une chose. Mais Euclide[18] a montré que, si on partage une droite suivant une moyenne et extrême raison, alors, si on allonge la plus grande partie de la moitié de la droite tout entière [78r] et si on multiplie cela par lui-même, le carré obtenu est cinq fois le carré obtenu de la moitié de la droite par elle-même.

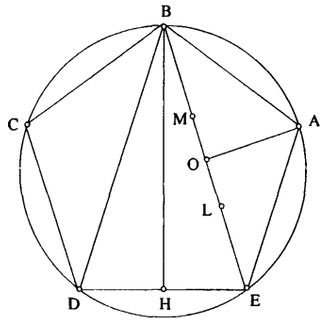


Fig. 16

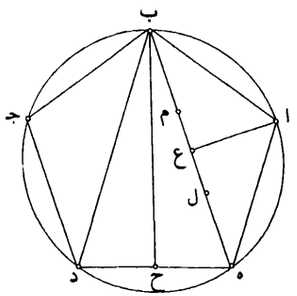
Posons la droite *BE* une chose. Si on multiplie sa moitié par elle-même et puis par cinq, on a un *carré* plus un quart <de *carré*>. Il est clair, d'après

[18] *Éléments*, XIII.1.

جزءاً من مال مال مال يعدل مائة درهم. فأكمل ربع مال مالك ونصف ثمن مال مالك حتى يكون مال مال، وهو أن تضربه في ثلاثة وخمس، فتضرب كل ما معك في ثلاثة وخمس، فيكون مال مال، وجذر أربعة أخماس مال مال مال مال يعدل ثلاثمائة وعشرين درهماً. فردّ كل شيء معك إلى مال مال، وهو أن تضربه في خمسة إلا جذر عشرين، فيكون مال مال يعدل ألفاً وستمائة إلا جذر ألفي ألف وثمانية وأربعين ألفاً. فجذر ذلك هو خط ه د؛ وبيّن أن مثلث ب ه د من هذا المخمس الذي وصفناه شبيه بمثلث ز م و من المعشر الذي وصفناه في الشكل الذي قبل هذا، إن شاء الله.

<١٩> فإن قيل: مساحة مثلث ا ب ه عشرة من العدد، كم خط ب ه؟

قياسه: أن نجعل خط ب ه شيئاً؛ وقد بين أقليدس أنه "إذا قسم خط على نسبة ذات وسط وطرفين، فإن القسم الأعظم إذا زيد في طوله مثل نصف الخط كله / وضرب ذلك في نفسه، فإن المربع الكائن منه خمسة أمثال المربع الكائن ٧٨-و من نصف الخط في مثله".



ونجعل خط ب ه شيئاً. فإذا ضرب نصفه في مثله، ثم في خمسة، كان مالاً وربعاً. فبيّن مما وصفنا أن خط ا ه جذر مال وربع إلا نصف شيء. فنخرج

2 فتضرب: مكررة – 7-8 شبيه ... وصفناه: في الهامش – 13 مثله: أقليدس، *الأصول*، الكتاب الثالث عشر، الشكل الأول؛ انظر "تحليل النظرية الأولى دون شكل" بعد القضية الخامسة.

ce que nous avons décrit, que la droite *AE* est la racine d'un *carré* plus un quart, moins une demi-chose. Menons la perpendiculaire à la droite *BE*, soit la droite *AO* ; multiplions la droite *AE* par elle-même ; on a un *carré* plus un demi moins la racine d'un *carré-carré* plus le quart d'un *carré-carré*. Multiplions ensuite la droite *EO*, qui est une demi-chose, par elle-même ; on a un quart de *carré* ; retranchons celui-ci de celui-là, il reste un *carré* plus un quart <de *carré*> moins la racine d'un *carré-carré* plus un quart de *carré-carré* ; on aura alors le carré de la droite *AO* un *carré* plus un quart moins la racine d'un *carré-carré* plus un quart de *carré-carré* ; sa racine est donc la droite *AO*, qui est la hauteur du triangle *BAE*. Multiplions le carré de *AO* par le carré de la droite *EO*, qui est une demi-chose ; on a un quart d'un *carré-carré* plus un demi-huitième d'un *carré-carré* moins la racine de cinq parties de soixante-quatre parties d'un *carré-carré-carré-carré* ; sa racine est égale à l'aire du triangle *AEB*, qui est dix. Multiplie celle-ci par elle-même ; on a cent égal à un quart de *carré-carré* plus un demi-huitième de *carré-carré* moins la racine de cinq parties de soixante-quatre parties d'un *carré-carré-carré-carré*. Rends entier le quart de ton *carré-carré* plus un demi-huitième de ton *carré-carré*, pour qu'il y ait un *carré-carré*, en multipliant par trois plus un cinquième ; multiplie tout ce que tu as par trois plus un cinquième ; il vient un *carré-carré* moins la racine de quatre cinquièmes d'un *carré-carré-carré-carré*, égal à trois cent vingt. Rends-le entier pour qu'il y ait un *carré-carré* en le multipliant par cinq plus la racine de vingt ; il vient un *carré-carré* égal à mille six cents dirhams plus la racine de deux mille mille quarante-huit mille ; la racine de cela est la droite *BE*. Ce qu'il fallait démontrer.

<20> Si on dit : soit un décagone régulier *ABCDEFGHIK* et soit l'aire du triangle *KIH*, dix en nombre ; combien est la droite *KH*, qui est la corde d'un cinquième du cercle circonscrit au décagone?

العمود على خط ب ه، وهو ا ع. فنضرب خط ا ه في نفسه، فيكون مالاً ونصفًا إلا جذر مال مال وربع مال مال. ثم نضرب خط ه ع في نفسه، وهو نصف شيء، فيكون ربع مال، فنسقطه منه فيبقى مال وربع إلا جذر مال مال وربع مال مال، فيكون <مربع خط ا ع مالاً وربعًا إلا جذر مال مال وربع> مال مال، فجذره هو خط ا ع الذي هو عمود مثلث ب ا ه، فنضربه في <مربع> خط ه ع، وهو نصف شيء، فيكون ربع مال مال ونصف ثمن مال مال إلا جذر خمسة أجزاء من أربعة وستين جزءًا من مال مال مال مال، فجذره يعدل مساحة مثلث ا ه ب، وهو عشرة. فنضربها في مثلها، فتكون مائة تعدل ربع مال مال ونصف ثمن مال مال إلا جذر خمسة أجزاء من أربعة وستين جزءًا من مال مال مال مال. فأكمل ربع مال مالك ونصف ثمن مال مالك حتى يكون مال مال، وهو أن تضربه في ثلاثة وخمس، فتضرب كل ما معك في ثلاثة وخمس، فيكون مال مال إلا جذر أربعة أخماس مال مال مال مال يعدل ثلاثمائة وعشرين. فأكمله حتى يكون مال مال، وهو أن تضربه في خمسة وجذر عشرين، فيكون مال مال يعدل ألفًا وستمائة درهم وجذر ألفي ألف وثمانية وأربعين ألفًا؛ فجذر ذلك هو خط ب ه؛ وذلك ما أردنا بيانه.

<٢٠> فإن قيل: معشر ا ب ج د ه و <ز> ح ط ك متساوي الأضلاع والزوايا ومساحة مثلث ك ط ح عشرة من العدد، كم خط ك ح الذي هو وتر خُمس الدائرة المحيطة بالمعشر؟

11 جذر: فوق السطر.

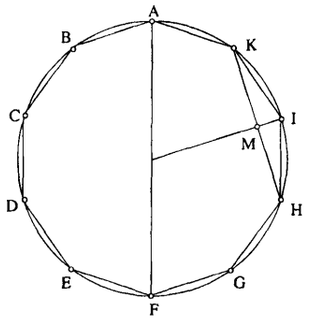
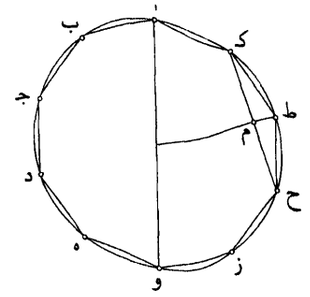


Fig. 17

On l'infère ainsi : pose la droite *KH* une chose. Mais nous avons montré que, si la corde d'un cinquième de cercle est une chose, le carré de son diamètre est deux *carrés* plus la racine de quatre cinquièmes de *carré-carré*. Le carré de son demi-diamètre est donc un demi-*carré* plus la racine d'un demi-dixième de *carré-carré* ; retranchons ceci du carré de la corde d'un cinquième, ce qui est un *carré* ; il reste le carré de *KI*, un demi-*carré* moins la racine d'un demi-dixième de *carré-carré*. Nous avons procédé ainsi car Euclide[19] [78^v] a montré que la corde du cinquième peut la corde du sixième plus la corde du dixième, si le cercle est le même. Retranchons de celui-ci[20] le carré de ***KM***, qui est le produit d'une demi-chose par elle-même, ce qui est un quart de *carré* ; il reste le carré de *IM*, qui est la hauteur du triangle *KIH*, un quart de *carré* moins la racine d'un demi-dixième de *carré-carré*. Nous le multiplions par le carré de ***KM***, qui est le quart d'un *carré* ; on a un demi-huitième de *carré-carré* moins la racine d'une partie de trois cent vingt parties de *carré-carré-carré-carré*. La racine de cela est égale à l'aire du triangle *KIH*, qui est dix en nombre. Multiplie dix par lui-même ; il vient cent égal à la moitié d'un huitième de *carré-carré* moins la racine d'une partie de trois cent vingt parties du *carré-carré-carré-carré*. Rends entier le demi-huitième de ton *carré-carré* pour qu'il y ait un *carré-carré*, en le multipliant par seize ; multiplie tout ce que tu as par seize ; on a un *carré-carré* moins la racine de quatre

[19] *Éléments*, XIII.12 (trad. arabe Isḥāq-Thābit).
[20] Il s'agit du carré de *KI*.



قياسه: أن تجعل خط ك ح شيئًا؛ وقد كنا بينا أنه إذا كان وتر خمس الدائرة شيئًا، كان مربع قطرها مالين وجذر أربعة أخماس مال مال، فمربع نصف قطرها نصف مال وجذر نصف عُشر مال مال. فنسقطه من مربع وتر الخُمس، وهو مال، فيبقى مربع ك ط نصف مال إلا جذر نصف عُشر مال مال. وإنّما فعلنا هذا لأن أقليدس / قد بيّن أن "وتر الخمس يقوى على وتر السدس والعشر، إذا كانت الدائرة واحدة". فنسقط منه مربع ك م <الكائن من ضرب نصف شيء> في نفسه، وهو ربع مال، فيبقى مربع ط م، الذي هو عمود مثلث ك ط ح ربع مال إلا جذر نصف عُشر مال مال. فنضربه في مربع ك م، وهو ربع [مربع] مال، فيكون نصف ثمن مال مال إلا جذر جزء من ثلاثمائة وعشرين جزءًا من مال مال مال؛ فجذر هذا يعدل مساحة مثلث ك ط ح، وهو عشرة من العدد. فاضرب العشرة في مثلها، تكن مائة تعدل نصف ثمن مال مال إلا جذر جزء من ثلاثمائة وعشرين جزءًا من مال مال مال، وهو أن تضربه في ستة عشر، فتضرب كل ثمن مال مالك حتى يكون مال مال، فيكون مال مال إلا جذر أربعة أخماس مال مال مال مال ما معك في ستة عشر،

٧٨-ظ

5 أقليدس، *الأصول*، الكتاب الثالث عشر، شكل ١٢: "ضلع المخمس المتساوي الأضلاع في كل دائرة يقوى على ضلع المسدس وضلع المعشر فيها" (مخطوطة رباط ١١٠١، ص. ١١٧و) — 7-6 <الكائن من ضرب نصف شيء>: (p. 251, l. 435) Prohiciamus ex eo quadratum CM in se ؛ فسقط منه "مربع ك م في نفسه" — 7 ربع: مربع — 8 ك ط ح : و ط ح — 12-13 نصف ثمن: في الهامش.

cinquièmes du *carré-carré-carré-carré*, égal à mille six cents. Complète-le pour qu'il y ait un *carré-carré* parfait en le multipliant par cinq plus racine de vingt ; multiplie tout ce que tu as par cinq plus la racine de vingt ; on aura un *carré-carré* égal à huit mille plus la racine de cinquante et un mille mille et deux cent mille. La racine de cela est la droite *KH*, qui est la corde du cinquième de cercle circonscrit au décagone. Ce qu'il fallait démontrer.

تعدل ألفًا وستمائة. فأكمله حتى يكون مال مال تامًا، وهو أن تضربه في خمسة وجذر عشرين، فتضرب كل شيء معك في خمسة وجذر عشرين، فيكون مال مال يعدل ثمانية آلاف وجذر واحد وخمسين ألف ألف ومائتي ألف فجذر ذلك هو خط $\overline{كح}$ الذي هو وتر خمس الدائرة المحيطة بالمعشر؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

Au nom de Dieu Clément et Miséricordieux
Il n'y a de force et de puissance si ce n'est en Dieu.

<Analyse indéterminée rationnelle>

<1. *Équations et systèmes d'équations du second degré*>

Nous avons achevé la résolution de ce qui était en grande partie difficile pour les arithméticiens de notre temps que nous avons étudiés, et pour ceux des Anciens dont nous avons eu connaissance, à propos des cordes du pentagone et du décagone, chacun étant inscrit dans un cercle connu ou circonscrit à un cercle connu ; à propos de la détermination du diamètre du cercle circonscrit à un pentagone ou à un décagone connu et du cercle inscrit dans un pentagone ou un décagone connu ; à propos de la détermination de la grandeur de la corde d'une partie de quinze parties de la circonférence d'un cercle connu ; à propos de la détermination de la grandeur du côté du pentagone et du décagone réguliers[1], si leur aire est connue, et des côtés de triangles d'aire connue, s'ils sont inscrits dans un pentagone ou un décagone régulier ; ainsi que bien d'autres choses que nous avons montrées dans ce livre, d'une manière suffisante.

Nous expliquons maintenant beaucoup de problèmes indéterminés que certains arithméticiens appellent fluides, je veux dire par cela qu'on peut déterminer de nombreuses solutions vraies par une inférence convaincante et une méthode claire ; certains de ces problèmes circulent parmi les arithméticiens selon des types[2], sans qu'ils aient établi la cause à partir de laquelle ils procèdent. J'ai résolu certains d'entre eux à l'aide d'un principe valide et d'une procédure facile et très utile, grâces soient rendues à Dieu pour ce qu'il a rendu aisé. C'est Lui qui sait ce qui est dans les cœurs.

Nous expliquons également une grande partie de ce que les arithméticiens ont défini dans leurs livres et qu'ils ont fait par types, par l'algèbre et par l'inférence, pour que celui qui le lit et l'examine le comprenne véritablement et ne se contente pas de le réciter par cœur et d'imiter leur auteur. Qu'en cela Dieu nous dispense Son aide.

[1] Litt. : qui ont des côtés et des angles égaux.
[2] Sur la traduction du terme *bāb*, voir p. 146, n. 3.

بِسْمِ اللهِ الرَّحمنِ الرَّحيمِ ولا حولَ ولا قوَّةَ إلاّ بِهِ

<التحليل اللامحدود>

<١- معادلات ونظم معادلات من الدرجة الثانية>

قد انتهينا من استخراج ما كان يتعذّر كثيرٌ منه على مَن شاهدنا مِن الحُسَّاب من أهلِ عصرنا، ومَن انتهى إلينا خَبَرُه من المتقدّمين من أوتار المُخَمَّسِ والمُعشَّرِ اللّذين يحيط بكلّ واحدٍ منهما دائرةٌ معلومةٌ أو يحيطان بدائرةٍ معلومةٍ، واستخراج قطرِ الدائرة المحيطة بِمُخمَّسٍ أو مُعشّرٍ معلومَين أو يُحيطُ بها مُخَمَّسٌ أو مُعَشَّرٌ معلومان، واستخراج قدرِ وترِ جزءٍ من خمسة عشرَ جزءاً من محيط الدائرة المعلومة، واستخراج قَدْرِ ضلعِ المُخَمَّسِ والمُعَشَّرِ المتساوي الأضلاع والزوايا، إذا كانت مِساحَتُهما معلومةً، وأضلاعِ مثلّثاتٍ معلومة المساحة إذا كانت في مُخَمَّسٍ أو مُعَشَّرٍ متساوي الأضلاع والزوايا، وغير ذلك ممّا بيّناه في كتابِنا هذا، على ما فيه كفاية.

وإنّا نُبَيِّن الآن كثيراً من المسائل التي هي غير محدودةٍ ويُسمِّيها بعضُ الحُسَّابِ سيَّالة، أعني بها <أن> نخرج بصوابات كثيرة بقياسٍ مُقنعٍ ومَذْهَبٍ واضح، منها ما يدور بَيْن الحُسَّابِ بالأبواب بلا عِلّةٍ قائمةٍ يعملون عليها، ومنها ما استخرجته بأصل صحيحٍ وحيلةٍ سهلةٍ كثيرة المنفعة، والحمدُ لله على ما سهَّل من ذلك، إنه عليمٌ بذات الصدور.

ونُبيِّن أيضاً كثيراً ممّا رَسَمَ الحُسَّابُ في كتبهم وعملوه بالأبواب، بالجبر والقياس ليفهمه من قرأه ونظر فيه فهماً صحيحاً، ولا يرويه روايةً، ويقلّد من وضعه، والله المعينُ على ذلك.

6 اللذين: الذي — 19 ويقلّد: ويقلّده.

<1> Si on te dit : un *carré* ayant une racine, si tu lui ajoutes cinq dirhams, il aura une racine, quel est le *carré* ? Ce problème est alors indéterminé et peut avoir d'innombrables solutions vraies[3]. Nous rapportons deux de ces solutions, ainsi que la manière de procéder dans ce problème pour te faciliter la recherche des solutions que tu vises, si Dieu le veut[4].

La manière de déterminer l'une des deux solutions, c'est de poser ton *carré* un seul *carré* ayant une racine, sa racine étant une chose ; tu lui ajoutes cinq dirhams, on aura un *carré* plus cinq dirhams ; il est nécessaire que <cette somme> ait une racine. Mais tu sais que [79^{v}] sa racine est plus grande qu'une chose, car le seul *carré* a pour racine une chose ; pose la racine <de la somme> une chose plus un nombre, tel que, si on multiplie ce nombre par lui-même, il vienne un nombre de dirhams moindre que celui de ceux qui sont avec le *carré* et qui dans le problème est cinq dirhams. Pose-le une chose plus un dirham et multiplie-le par lui-même ; on a un *carré* plus un dirham plus deux choses égaux à un *carré* plus cinq dirhams. Retranche un *carré* et un dirham d'un *carré* plus cinq dirhams, il reste deux choses égales à quatre dirhams ; la chose est donc deux et le *carré* est quatre. Si tu lui ajoutes cinq dirhams, on a neuf, dont la racine est trois. Si tu poses sa racine une chose plus deux dirhams et que tu le multiplies par lui-même, il vient un *carré*, plus quatre choses, plus quatre dirhams égaux à un *carré* plus cinq dirhams. Retranche un *carré* plus quatre dirhams d'un *carré* plus cinq dirhams, il reste quatre choses égales à un dirham ; la chose est donc égale à un quart de dirham, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est la moitié du huitième d'un dirham ; si tu lui ajoutes cinq dirhams, on a cinq plus un demi-huitième <de dirham> et sa racine est deux dirhams plus un quart.

Si tu veux, pose la racine du *carré* une chose plus un demi-dirham ou une chose plus un dirham et demi ou une chose plus un dirham plus deux tiers ou un nombre à volonté tel que, ajouté à la chose et multiplié par lui-même, il vienne moins que cinq. De même pour tout ce qui te parvient de cette espèce, tu procèdes selon cet exemple.

[3] Désormais l'expression « solutions vraies » sera remplacée par le mot « solutions ».

[4] $x^2 + 5 = y^2$, $y > x$.
Posons $y = x + u$, avec $u^2 < 5$

$$x^2 + 5 = x^2 + 2ux + u^2, \text{ d'où } x = \frac{5 - u^2}{2u}.$$

Pour $u = 1$, on a $x = 2$, $y = 3$; pour $u = 2$, on a $x = \frac{1}{4}$, $y = \frac{9}{4}$.

<١> فإن قيل لك: مالٌ له جذرٌ، إن زدتَ عليه خمسةَ دراهم، كان له جذرٌ، كم المالُ؟ هذه المسألةُ غير محدودةٍ ويخرج لها من الصَّوابات ما لا يُحْصَى كثرةً، ونحن نُخْبِرُ بصوابَين منها وكيف العملُ فيها، ليسهل عليك طلبُ ما أردَت من الصوابات إن شاء الله.

فالوجهُ في استخراج أحدِ الصوابَين في هذه المسألةِ أن تجعلَ مالَك مالاً وله جذرٌ وجذره شيءٌ، فتزيد عليه خمسةَ دراهمَ فيكون مالاً وخمسة دراهم، فتحتاج أن يكون له جذر، وقد علمت أنّ / جذرَه أكثرُ من شيءٍ؛ لأنّ المالَ ٧٩ - ظ وحدَه جذرُه شيءٌ. فاجْعَلْ جذرَه شيئاً وعدداً، ويكون من العدد ما إذا ضربته في مثله كان أقلَّ من الدراهم التي مع المال، وهو في هذه المسألة خمسة دراهمَ. فتجعله شيئاً ودرهماً وتضربه في مثله فيكون: مالاً ودرهماً وشيئين تعدل مالاً وخمسة دراهمَ، فألقِ مالاً ودرهماً من مالٍ وخمسة دراهمَ، فيبقى شيئان يَعدل أربعةَ دراهمَ. فالشيءُ اثنان والمالُ أربعةٌ. فإذا زِدْتَ عليه خمسةَ دراهمَ كان تسعة، وجذرها ثلاثة. وإن جعلت جذره شيئاً ودرهمين وضربتَه في مثلِه كان مالاً وأربعة أشياء وأربعة دراهم يعدل مالاً وخمسة دراهمَ. فألْقِ مالاً وأربعة دراهم من مالٍ وخمسة دراهمَ فيبقى أربعةُ أشياء تعدل درهماً، فالشيءُ يعدل ربعَ درهمٍ وهو جذر المال والمالُ نصفُ ثُمْنِ درهمٍ. فإن زدتَ عليه خمسةَ دراهمَ كان خمسةً ونصف ثُمْنٍ، وجذره درهمان وربع.

وإن شئتَ فاجْعَلْ جذرَ المالِ شيئاً ونصف درهمٍ، أو شيئاً ودرهماً ونصفاً، أو شيئاً ودرهماً وثلثاً، أو ما شِئْتَ من العددِ بعد أن يكون ما تزيده على الشيء إذا ضربتَه في مثله كان أقلَّ من خمسةٍ، وكذلك جميعُ ما جاءك من هذا النوع فَعَلَى هذا المثال.

2 هذه: الصواب "فهذه"؛ ولكن آثرنا ترك النص على حاله، فربما كان المقصود العبارة الأولى تامة، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد — 12 أربعة (الثانية): كتب بعدها "وهو جذر المال"، ثمّ ضرب عليها بالقلم.

<2> Si on te dit : un *carré* ayant une racine, si tu en retranches dix dirhams, le reste a une racine, alors ce problème est également indéterminé[5].

Mais tu sais que la racine du *carré* est une chose et que la racine d'un *carré* moins dix dirhams est plus petite qu'une chose. Pose-la une chose moins un dirham ou moins deux dirhams, ou moins un nombre ou une fraction ou un nombre et une fraction à volonté. Nous le posons une chose moins un dirham, nous le multiplions par lui-même ; on a un *carré* plus un dirham moins deux choses, égal à un *carré* moins dix dirhams. Restaure le *carré* par les dix dirhams et ajoute-les au *carré* plus le dirham moins deux choses ; on a un *carré* plus onze dirhams moins deux choses égal à un *carré* ; restaure ceci par les deux choses, ajoute-les au *carré* et retranche un *carré* de chaque membre ; il reste onze dirhams égaux à deux choses ; la chose est donc cinq dirhams et demi, ce qui est la racine du *carré*, et le *carré* [80r] est trente dirhams et un quart. Si tu en enlèves dix, il reste vingt dirhams et un quart dont la racine est quatre plus un demi. Si tu poses la racine de ton *carré* moins dix dirhams, une chose moins deux dirhams, que tu la multiplies par elle-même et que tu réduis par ce que tu obtiens de la multiplication, un *carré* moins dix dirhams, <après réduction> il résulte que la racine du *carré* est trois plus un demi et le *carré* douze plus un quart. Si tu en retranches dix, il reste deux dirhams et un quart, dont la racine est un et un demi.

Si le nombre retranché de la chose et multiplié par lui-même est supérieur au nombre de dirhams retranchés du *carré*, sache que la racine du *carré* sera alors ce nombre retranché de la chose moins cette chose, car la racine du *carré* moins dix sera ce nombre retranché de la chose moins la chose ; en effet le produit d'un nombre moins une chose par lui-même est égal au produit de la chose moins ce nombre par lui-même[6].

[5] $x^2 - 10 = y^2$.
Posons $y = x - u$.

$$x^2 - 10 = x^2 - 2ux + u^2, \text{ d'où } x = \frac{u^2 + 10}{2u}.$$

Pour $u = 1$, on a $x = \frac{11}{2}$ et $y = \frac{9}{2}$; pour $u = 2$, on a $x = \frac{7}{2}$ et $y = \frac{3}{2}$.

[6] Si $\sqrt{x^2 - 10} = x - u$ avec $u > 10$, alors $(x - u) < 0$ et $(x - u)^2 > 0$; or $y^2 = x^2 - 10 = (x - u)^2 = (u - x)^2$ et $y = u - x$.

<٢> فإن قيل لك: مالٌ له جذرٌ، إن نقصتَ منه عشرةَ دراهمَ، كان لِما بقي جذرٌ. هذه المسألة أيضًا غير محدودةٍ.

وقد علمتَ أنّ جذرَ المالِ شيءٌ، وأنّ جذرَ مالٍ إلاّ عشرة دراهمَ أقلُّ من شيءٍ، فاجعله شيئاً إلاّ درهماً، أو إلاّ درهمين، أو إلاّ ما أردتَ من العددِ أو الكسورِ أو العددِ والكسورِ. فجعلناه شيئاً إلاّ درهماً وضربناه في مثله فكان: مالاً ودرهماً إلاّ شيئين يعدل مالاً إلاّ عشرة دراهمَ. فاجْبُرْ المالَ بالعشرةِ الدراهم، وزِدْها على المالِ والدرهم إلاّ شيئين تَكُنْ مالاً وأحدَ عشر درهماً إلاّ شيئين تعدل مالاً. فاجْبُره بالشيئين وزِدْهُما على المالِ، وألْقِ مالاً بمالٍ فيبقى أحد عشر درهماً تعدل شيئين. فالشيءُ خمسةُ دراهمَ ونصف وهو جذرُ المالِ، والمالُ / ثلاثون ٨٠-و درهماً وربع، فإن أسقطت منه عشرة بقي عشرون درهماً وربع، وجذرُه أربعة ونصف. وإن جعلتَ جذرَ مالك إلاّ عشرة دراهمَ، شيئاً إلاّ درهمين، وضربتَه في مثله وقابلت بما اجتمع من الضرب مالاً إلاّ عشرة دراهم، خرج جذرُ المال ثلاثةً ونصفاً، والمالُ اثنا عشر وربع. فإن نقصتَ منه عشرة بقي درهمان وربع، وجذره واحد ونصف.

وإنْ كان العددُ المستثنى من الشيءِ إذا ضربتَه في مثلِه بلغ أكثر من الدراهم المستثناة من المال؛ فاعْلَمْ أن جذرَ المالِ حينئذ ذلك العددُ المستثنى من الشيء إلا ذلك الشيء، لأن جذرَ المالِ إلاّ عشرةً يكون ذلك العدد المستثنى من الشيءِ إلاّ الشيء، وذلك أنّ ضَرْبَ عددٍ إلاّ شيئاً في مثله مثل ضربِ شيءٍ إلاّ ذلك العدد في مثله.

6 الدراهم: للدراهم – 16 جذر المال: المقصود بالمال هنا المال المؤلف من المال إلا عشرة دراهم- 17 إلاّ (الأول): لا- 18 إلاّ (الأول): لا.

<3> Si on te dit : un *carré* ayant une racine, si tu lui ajoutes trois racines, la somme a une racine, quel est le *carré* ? alors ce problème est également indéterminé[7].

Pose la racine du *carré* plus trois choses, une chose plus un dirham ou une chose plus un demi-dirham, ou une chose plus un tiers de dirham ou un nombre à volonté, tel qu'il soit plus petit que la moitié du nombre des choses ajoutées au *carré*, qui sont dans ce problème trois choses. Nous la posons alors une chose plus un dirham, nous la multiplions par elle-même, on aura un *carré* plus un dirham plus deux choses égal à un *carré* plus trois choses. Retranche un *carré* et deux choses d'un *carré* et trois choses ; il reste une chose égale à un dirham, ce qui est la racine du *carré*, et le *carré* est un dirham. Si tu lui ajoutes trois de ses racines, il vient quatre dirhams, dont la racine est deux dirhams.

<4> Si on te dit : un *carré* ayant une racine, si tu en retranches six de ses racines, la différence a une racine, alors ce problème est également indéterminé[8].

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* un *carré* et tu en retranches six racines, il reste alors un *carré* moins six racines ; sa racine est inférieure à une chose. Pose-la une chose moins quatre dirhams ou moins cinq dirhams, ou moins trois dirhams et demi, ou moins un nombre à volonté tel qu'il soit plus grand que la moitié des six choses retranchées du *carré*. Posons-la une chose moins quatre dirhams, que nous multiplions par elle-même ; [80^{v}] on aura un *carré* plus seize dirhams moins huit choses égal à un *carré* moins six choses. Réduis par ceci ; la chose sera huit et le *carré* soixante-quatre. Retranche du *carré* six de ses racines, c'est-à-dire quarante-huit, il reste seize dont la racine est quatre.

<5> Si on te dit : un *carré* ayant une racine, si tu lui ajoutes dix de ses racines plus vingt dirhams, la somme aura une racine, alors ce problème est également indéterminé[9].

[7] $x^2 + 3x = y^2$. Posons $y = x + u$, avec $u < \frac{3}{2}$, d'où $x = \frac{u^2}{3-2u}$ et $y = \frac{u(3-u)}{3-2u}$, pour $u = 1$, $x = 1$, $y = 2$.

[8] $x^2 - 6x = y^2$. Posons $y = x - u$, avec $u > \frac{6}{2}$ d'où $x = \frac{u^2}{2u-6}$, $y = \frac{u(6-u)}{2u-6}$, pour $u = 4$, $x = 8$, $y = 4$.

[9] $x^2 + 10x + 20 = y^2$.

<٣> فإن قيل لك: مالٌ له جذرٌ، إن زِدْتَ عليه ثلاثةَ أجذاره، كان له جذر، كم المالُ؟ هذه المسألةُ أيضاً غير محدودةٍ.

فاجْعَل جذرَ مالٍ وثلاثة أشياء شيئاً ودرهماً، أو شيئاً ونصف درهم، أو شيئاً وثلث درهم، أو ما شئْتَ من العددِ، بعد أن يكون أقل من نصفِ الأشياء المزيدةِ على المالِ، وهي في هذه المسألة ثلاثةُ أشياء. فجعلناه شيئاً ودرهماً وضربناه في مثله فكان مالاً ودرهماً وشيئين يعدل مالاً وثلاثة أشياء. فألْقِ مالاً وشيئين من مالٍ وثلاثةِ أشياء يبقَ شيءٌ يعدل درهماً، وهو جذرُ المالِ والمالُ درهمٌ. فإن زِدْتَ عليه ثلاثةَ أجذاره صار أربعةَ دراهمَ، جذرُها درهمان.

<٤> فإن قيل لك: مالٌ له جذر إن نقصَت منه ستةَ أجذاره، كان له جذرٌ. هذه المسألة أيضاً غير محدودةٍ.

وقياسُه: أن تجعل مالَك مالاً فتلقي منه ستةَ أجذاره فيبقى مالٌ إلاّ ستة أجذارٍ. فجذرُه أقلُّ من شيءٍ. فاجْعَله شيئاً إلاّ أربعة دراهمَ، أو إلاّ خمسة دراهمَ، أو إلاّ ثلاثةً ونصفاً، أو إلاّ ما شِئتَ من العددِ، بعد أن يكون أكثر من نصف الستةِ الأشياءِ المستثناةِ من المالِ. فجعلناه شيئاً إلاّ أربعة دراهم، وضربناه في مثله / فكان مالاً وستة عشر درهماً إلاّ ثمانية أشياءَ تعدل مالاً إلاّ ستة أشياءَ. ٨٠-ظ فَقابِل بها يَكُن الشيء ثمانيةً والمالُ أربعة وستين. فألْقِ منه ستةَ أجذاره وهو ثمانيةٌ وأربعون يبقَ ستة عشر وجذرُها أربعةٌ.

<٥> فإن قال: مالٌ له جذر إن زِدْتَ عليه عشرةَ أجذاره، وعشرين درهماً، كان له جذر. وهذه المسألة أيضاً غير محدودةٍ.

4 وثلث درهم: ودرهمًا وثلثًا — 6 وثلاثة أشياء: وثلثا شيء — 7 يبقَ: يبقى — 17 يبقَ: يبقى.

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré*, un *carré* et tu lui ajoutes dix de ses racines et vingt dirhams, on a alors un *carré* plus dix choses plus vingt dirhams. Pose sa racine une chose plus un nombre, tel que, si tu la multiplies par elle-même, il résulte de la multiplication, pour les choses moins que les dix <choses> et pour les dirhams plus que vingt dirhams ; et il n'est pas possible qu'ils soient moins que les deux ensemble ni plus que les deux ensemble, car, s'il en était ainsi, tu réduis par le résultat de la multiplication le *carré* plus les dix choses plus les vingt dirhams et il reste des choses et des dirhams égaux à rien. Tu poses la racine une chose plus quatre dirhams et demi et tu la multiplies par elle-même, on a un *carré* plus neuf choses plus vingt dirhams et un quart égal à un *carré* plus dix choses plus vingt dirhams ; tu réduis par ceci, on aura la chose égale à un quart de dirham, ce qui est la racine du *carré*, et le *carré*, un demi-huitième de dirham. Si tu lui ajoutes dix de ses racines et vingt dirhams, on a vingt-deux dirhams plus un demi-<dirham> plus un demi-huitième dont la racine est quatre dirhams plus un demi plus un quart. Saisis donc cela.

Si tu veux, pose la racine du *carré* un nombre à volonté – tel que, si tu le multiplies par lui-même, le résultat sera plus grand que les dirhams qui sont avec le *carré* – et retranche du nombre une chose.

<6> Si on te dit : un *carré* ayant une racine, si tu en retranches huit de ses racines et trente dirhams, le reste a une racine, alors ce problème est indéterminé[10].

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré*, un *carré*, et tu en retranches huit racines et trente dirhams ; il reste alors un *carré* moins huit choses moins trente dirhams. Sa racine est donc plus petite qu'une chose. Pose-la une chose moins cinq dirhams ou moins un nombre à volonté tel qu'il soit plus grand que la moitié des huit choses retranchées du *carré*. Si tu veux, pose sa racine un nombre moins une chose, tel que le nombre soit plus grand que la

[10] $x^2 - 8x - 30 = y^2$.

وقياسه: أن تجعل مالَك مالاً فتَزيدَ عليه عشرةَ أجذاره وعشرين درهماً، فيكون مالاً وعشرة أشياءَ وعشرين درهماً. فاجعلْ جذرَه شيئاً وعدداً إذا ضربتَه في مثلِه كان ما يجتمع من الضرب: من الأشياء أقلَّ من العشرةِ، ومن الدراهم أكثر من العشرين درهماً، ولا يجوز أن يكون أقلّ منهما جميعاً ولا أكثر منهما جميعاً؛ لأنه إذا كان هكذا وقابلتَ بما يجتمع من الضرب المالَ والعشرةَ الأشياءِ والعشرين درهماً، بقيتْ أشياء ودراهم تعدل لا شيء. فتجعله شيئاً وأربعة دراهم ونصفاً وتضربه في مثله فيكون: مالاً وتسعةَ أشياء وعشرين درهماً وربعاً تعدل مالاً وعشرة أشياء وعشرين درهماً. فتقابل بها، فيكون الشيءُ ربعَ درهمٍ، وهو جذر المال، والمالُ نصفُ ثُمْنِ درهمٍ. فإن زِدْتَ عليه عشرة أجذاره وعشرين درهماً، كان اثنين وعشرين درهماً ونصفاً ونصفَ ثُمْنٍ، وجذرُها أربعةُ دراهمَ ونصفٌ وربعٌ. فافهمْ ذلك.

وإن شئتَ فاجعل جذرَ المالِ أيَّ عددٍ شئت، بعد أن يكون إذا ضربتَه في مثله كان أكثر من الدراهم التي مع المال، واستثن من العدد شيئاً.

<٦> فإن قيل: مالٌ له جذر، إن نقصت منه ثمانيةَ أجذاره وثلاثين درهماً، كان لِما بقي جذرٌ. وهي أيضاً غير محدودةٍ.

وقياسه: أن تجعل مالَك مالاً فتلقي منه ثمانيةَ أجذاره وثلاثين درهماً. فيبقى مالٌ إلاّ ثمانية أشياءَ وثلاثين درهماً، فجذرُه أقلُّ من شيءٍ، فاجعله شيئاً إلاّ خمسة دراهمَ، أو إلاّ ما شئتَ من العددِ بعد أن يكون أكثرَ من نصف الثمانية الأشياءِ المستثناة من المالِ. وإن شئتَ فاجعل جذرَه عدداً إلاّ شيئاً، بعد أن يكون

3 من (الثانية): في — 3-4 ومن الدراهم أكثر من العشرين درهماً: وأكثر من العشرين الـدرهم — 5 المال: المقصود بالمال هنا المال المؤلّف من المال وعشرة أشياء — 6 درهماً: الدرهم — 13 واسـتثن: واستثني — 19 عدداً إلاّ: عدد الا.

moitié [81r] des choses retranchées du *carré*. Nous l'avons posée une chose moins cinq dirhams et nous l'avons multipliée par elle-même ; on a un *carré* plus vingt-cinq dirhams moins dix choses égal à un *carré* moins huit choses et trente dirhams. Réduis par ceci ; la chose sera égale à vingt-sept dirhams et un demi, ce qui est la racine du *carré*, et le *carré*, sept cent cinquante-six dirhams et un quart ; retranches-en huit de ses racines et trente dirhams, c'est-à-dire deux cent cinquante ; il reste cinq cent six et un quart, sa racine est vingt-deux et un demi.

<7> Si on dit : un *carré* ayant une racine, si tu lui ajoutes sa racine, la somme a une racine, et si tu lui ajoutes le double de sa racine, la somme a une racine, alors ce problème est également indéterminé[11].

La méthode pour cela est de chercher un nombre ayant une racine, tel que, si tu lui ajoutes un autre nombre, la somme aura une racine ; et, si tu lui ajoutes également le double de ce nombre, la somme aura une racine. Si tu trouves ce nombre, tu le divises par le nombre ajouté, et le résultat sera la racine du *carré*. Le nombre qui a une racine est un et les nombres qui lui sont ajoutés sont vingt-quatre et quarante-huit. Mais tu sais que, si tu ajoutes vingt-quatre à un, la somme a une racine et sa racine est cinq ; et si tu ajoutes quarante-huit à un, on aura quarante-neuf, dont la racine est sept. Si tu veux connaître quel est le *carré*, tu divises un par vingt-quatre ; le résultat sera un tiers d'un huitième, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est une partie de cinq cent soixante-seize parties d'unité. Si tu lui ajoutes sa racine, qui est le tiers d'un huitième, on a le tiers d'un huitième et une partie de cinq cent soixante-seize parties de l'unité, ce qui est vingt-cinq parties de cinq cent soixante-seize parties de l'unité, qui a une racine, qui est cinq parties de vingt-quatre parties de l'unité. Si tu ajoutes au *carré*, qui est une partie de cinq cent soixante-seize parties de l'unité, le double de sa racine, qui est un demi-sixième, il vient un demi-sixième plus une partie de cinq cent

11 $\begin{cases} x^2 + x = y^2 \\ x^2 + 2x = z^2 \end{cases}$

أكثر من نصفِ / الأشياء المستثناة من المالِ. فجعلناه شيئاً إلاّ خمسة دراهم، ٨١ - و
وضربناه في مثله فكان مالاً وخمسة وعشرين درهماً إلاّ عشرة أشياء يعدل مالاً
إلاّ ثمانية أشياء وثلاثين درهماً. فقابل بها يكن الشيءُ يعدل سبعةً وعشرين درهماً
ونصفاً وهو جذر المالِ، والمالُ سبعمائةٍ وستة وخمسون درهماً وربع. فأسْقِطْ منه
ثمانيةَ أجذاره وثلاثين درهماً، وهو مائتان وخمسون، فيبقى خمسمائةٍ وستة وربع،
فجذرُها اثنان وعشرون ونصف.

<٧> فإن قيل: مالٌ له جذر إن زِدْتَ عليه جذره كان له جذر، وإن زِدتَ عليه جذريه كان له جذر. وهذه أيضاً غير محدودةٍ.

والوجهُ في ذلك أن تطلبَ عدداً له جذر إن زدتَ عليه عدداً آخر كان له جذر، وإن زدتَ عليه أيضاً مِثْلَيْ ذلك العدد كان له جذر. فإذا وجدتَ ذلك العددَ قسمتَه على العددِ المزيدِ، فما خرج فهو جذرُ المالِ. والعددُ الذي له جذر واحد والعددان المزيدان عليه أربعة وعشرون وثمانية وأربعون. وأنت تعلم أنّك إذا زِدْتَ أربعةً وعشرين على واحدٍ، كان له جذر وجذره خمسة، وإن زدتَ على الواحدِ ثمانيةً وأربعين، كان تسعة وأربعين وجذرها سبعة. فإذا أردت أن تعلم كم المال، قسمت واحداً على أربعة وعشرين، فيخرج ثلثُ ثُمْنٍ وهو جذر المالِ، <والمالُ> جزءٌ من خمسمائةٍ وستة وسبعين جزءاً من واحدٍ. فإذا زدتَ عليه جذرَه وهو ثلثُ ثُمْنٍ، كان ثلث ثمنٍ وجزءاً من خمسمائةٍ وستة وسبعين جزءاً من واحدٍ، وهو خمسة وعشرون جزءاً من خمسمائة وستة وسبعين جزءاً من واحدٍ وله جذر، هو خمسة أجزاء من أربعة وعشرين جزءاً من واحدٍ. فإذا زِدْتَ على المالِ — وهو جزء من خمسمائة وستة وسبعين جزءاً من واحد — جذريْه، وهو نصف سُدْسٍ، صار نصفَ سدسٍ وجزءاً من خمسمائةٍ وستة

12 والعددان المزيدان: والعدد المزيد — 16 وستة: ستة — 17 وجزءًا: وجزء — 19 هو: وهو — 21 وجزءًا: وجزء.

soixante-seize parties de l'unité, ce qui est quarante-neuf parties de cinq cent soixante-seize parties d'unité, qui a une racine qui est sept parties de vingt-quatre parties de l'unité, c'est-à-dire [81^{v}] un sixième plus un huitième.

Si tu veux, tu poses le nombre cherché qui a une racine quarante-neuf et les nombres qui lui sont ajoutés cent vingt et deux cent quarante. Mais tu sais que, si tu ajoutes cent vingt à quarante-neuf, on a cent soixante-neuf dont la racine est treize ; et si tu lui ajoutes deux cent quarante, qui est le double de cent vingt, on a deux cent quatre-vingt-neuf, dont la racine est dix-sept. Si nous voulons savoir quel est le *carré*, divise alors quarante-neuf par cent vingt ; on obtiendra un cinquième plus un huitième plus un demi-sixième, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est deux mille quatre cents parties plus une partie de quatorze mille quatre cents parties de dirham ; si tu lui ajoutes sa racine, c'est-à-dire cinq mille huit cent quatre-vingt-huit parties de quatorze mille quatre cents parties de dirham, on obtient huit mille deux cent quatre-vingt-une parties de quatorze mille quatre cents parties de dirham, qui a une racine, et sa racine est quatre-vingt-onze parties de cent vingt parties de dirham. Si tu lui ajoutes le double de sa racine, c'est-à-dire onze mille sept cent soixante parties de quatorze mille quatre cents parties de dirham, on obtient quatorze mille cent soixante et une parties de quatorze mille quatre cents parties de dirham, qui a une racine qui est cent dix-neuf parties de cent vingt parties de dirham.

<8> De même si on dit : un *carré* ayant une racine, si tu lui ajoutes sa racine, la somme aura une racine ; et si tu lui ajoutes le triple de sa racine, la somme aura aussi une racine[12].

12 $\begin{cases} x^2 + x = y^2 \\ x^2 + 3x = z^2 \end{cases}$

وسبعين جزءاً من واحدٍ، وهو تسعة وأربعون جزءاً من خمسمائةٍ وستة وسبعين جزءاً من واحد، وله جذر وهو سبعة أجزاء من أربعة وعشرين جزءاً من واحدٍ، وهو / سُدْسٌ وثُمْنٌ. ٨١-ظ

وإن شئت جعلت العددَ المطلوبَ الذي له جذرٌ تسعةً وأربعين، والعددان المزيدان عليه مائةً وعشرين ومائتين وأربعين. وأنت تعلم أنك إذا زِدْتَ على تسعةٍ وأربعين مائةً وعشرين، كان مائةً وتسعةً وستين، وجذرُها ثلاثة عشر، وإن زدتَ عليه مائتين وأربعين، وهو مِثْلاَ مائة وعشرين، كان مائتين وتسعة وثمانين وجذرها سبعة عشر. فإذا أردنا أن نعلم كم المالُ، فاقْسِمْ تسعةً وأربعين على مائةٍ وعشرين، فيخرج خُمْسٌ وثُمْنٌ ونصفُ سُدْسٍ، وهو جذرُ المالِ، والمالُ ألفان وأربعمائة جزءٍ، وجزءٌ من أربعة عشر ألفاً وأربعمائة جزءٍ من درهمٍ، فإن زدت عليه جذرَه، وهو خمسة آلاف وثمانمائةٍ وثمانيةٌ وثمانون جزءاً من أربعة عشر ألفاً وأربعمائة جزءٍ من درهمٍ، بلغ ثمانية آلاف ومائتين وأحداً وثمانين جزءاً من أربعة عشر ألفاً وأربعمائة جزءٍ من درهمٍ، ولها جذر، وجذرها واحدٌ وتسعون جزءاً من مائة وعشرين جزءاً من درهمٍ. وإن زِدْتَ عليه جذريه، وهو أحد عشر ألفاً وسبعمائة وستون جزءاً، من أربعة عشر ألفاً وأربعمائةِ جزءٍ من درهمٍ، بلغ أربعة عشر ألفاً ومائةً وأحداً وستين جزءاً من أربعة عشر ألفاً وأربعمائة جزءٍ من درهمٍ، ولها جذر، وهو مائة وتسعة عشر جزءاً من مائة وعشرين جزءاً من درهمٍ.

<٨> وكذلك إن قال: مالٌ له جذر، إن زِدْتَ عليه جذرَه، كان له جذر، وإن زِدتَ عليه ثلاثة أجذاره، كان له جذر.

4-5 والعددان المزيدان: والعدد المزيد — 12 وأحداً: واحد — 16 وأحداً: واحد.

Cherche donc un nombre qui a une racine, tel que, si tu lui ajoutes un autre nombre, la somme aura une racine ; et si tu lui ajoutes trois fois ce nombre, la somme aura une racine ; ceci en effet, car les trois racines sont trois fois la racine. Le nombre cherché qui a une racine est alors un et les nombres qui lui sont ajoutés sont huit et vingt-quatre. Divise alors un par huit, on aura un huitième de dirham, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est un huitième d'un huitième. Si tu lui ajoutes sa racine, c'est-à-dire un huitième, on a un huitième plus un huitième d'un huitième, qui a une racine, et sa racine est trois huitièmes. [82^{r}] Si tu lui ajoutes trois de ses racines, c'est-à-dire trois huitièmes, il vient trois huitièmes plus un huitième d'un huitième, qui a une racine, et sa racine est cinq huitièmes.

Si tu veux, tu poses le nombre qui a une racine, cent soixante-neuf, et les nombres qui lui sont ajoutés, cent vingt et trois cent soixante ; car, si tu ajoutes cent vingt à cent soixante-neuf, on obtient deux cent quatre-vingt-neuf, qui a une racine, et sa racine est dix-sept ; et si tu ajoutes trois cent soixante, on a cinq cent vingt-neuf, qui a une racine, et sa racine est vingt trois. Si tu veux savoir quel est le *carré*, tu divises cent soixante-neuf par cent vingt, on a un dirham plus un cinquième plus un huitième plus un demi-sixième, qui est la racine du *carré*, et le *carré*, un dirham plus quatorze mille cent soixante et une parties de quatorze mille quatre cents parties de dirham ; tu lui ajoutes alors sa racine, c'est-à-dire un dirham plus un cinquième plus un huitième plus un demi-sixième, on aura trois dirhams plus cinq mille six cent quarante et une parties de quatorze mille quatre cents parties d'unité, qui a une racine, et sa racine est un dirham plus cent parties plus une partie de cent vingt parties de dirham. Si tu lui ajoutes trois de ses racines, c'est-à-dire quatre dirhams plus vingt-sept parties de cent vingt parties de dirham, on a six dirhams plus trois mille parties de quatorze mille quatre cents parties de dirham, qui a une racine, et sa racine est deux dirhams plus cinquante-neuf parties de cent vingt parties de dirham.

فاطْلب عدداً له <جذر>؛ إن زِدْتَ عليه عدداً آخر كان له جذر، وإن زِدْتَ عليه ثلاثة أمثال ذلك العدد كان له جذر. وإنّما ذلك لأن الثلاثة الأجذار ثلاثةُ أمثال الجذر، فالعددُ المطلوبُ الذي له جذر: واحد، والعددان المزيدان عليه: ثمانية وأربعة وعشرون. فاقْسِم الواحدَ على ثمانيةٍ يخرجْ ثُمْنُ درهمٍ وهو جذر المال، والمالُ ثُمْن ثُمْنٍ. فإن زِدْت عليه جذرَه، وهو ثُمْنٌ، كان ثُمْناً وثُمْنَ الثُمْنِ، وله جذر، وجذره ثلاثة أثمان. / وإن زدْت عليه ثلاثة أجذاره، وهو ٨٢-و ثلاثة أثمان، صار ثلاثةَ أثمانٍ وثُمْنَ الثُمْن وله جذر، وجذره خمسة أثمان.

وإن <شئت> جعلت العدد الذي له جذر مائةً وتسعة وستين، والعددين المزيدين عليه مائةً وعشرين، وثلاثمائة وستين، لأنّك إذا زِدْتَ على مائةٍ وتسعة وستّين مائةً وعشرين بلغ مائتين وتسعة وثمانين، ولها جذر، وجذرها سبعة عشر؛ وإذا زِدْتَ ثلاثمائةٍ وستين كان خمسمائة وتسعةً وعشرين، ولها جذر، وجذرها ثلاثة وعشرون. فإذا أردتَ أن تعْلَم كم المال قَسَمْتَ مائةً وتسعة وستين على مائةٍ وعشرين، يخرج درهمٌ وخُمْسٌ وثُمْنٌ ونصفُ سُدْسٍ، وهو جذر المال، والمالُ درهمٌ وأربعة عشر ألفاً ومائة وأحد وستون <جزءاً> من أربعة عشر ألفاً وأربعمائة جزءٍ من درهمٍ. فتزيد عليه جذره، وهو درهمٌ وخُمْس وثمنٌ ونصفُ سُدْسٍ، فيكون ثلاثة دراهم وخمسة آلافٍ وستمائة وأحداً وأربعين جزءاً من أربعة عشر ألفاً وأربعمائة جزءٍ من واحدٍ، ولها جذر، وجذرها درهم ومائة جزء وجزءٌ من مائة وعشرين جزءاً من درهمٍ. فإن زِدْتَ عليه ثلاثة أجذاره، وهو أربعة دراهم وسبعةٌ وعشرون جزءاً من مائة وعشرين جزءاً من درهم، كان ستة دراهم وثلاثة آلاف جزء من أربعة عشر ألفاً وأربعمائة جزءٍ من درهمٍ، ولها جذر، وجذرها درهمان وتسعة وخمسون جزءاً من مائة وعشرين جزءاً من درهم.

3 والعددان المزيدان: والعدد المزيد — 8-9 والعددين المزيدين: والعدد المزيد — 16 وأحداً: واحد — 19 وعشرون: وعشرين.

Ce problème et ses analogues ont d'innombrables solutions ; je t'expliquerai le procédé subtil pour déterminer ces nombres pour que la pratique te soit facile dans tout cet art, si Dieu le veut.

Sache que tout *carré* a une racine ; si donc tu lui ajoutes deux de ses racines plus un dirham, la somme a une racine et sa racine est égale à la racine du premier *carré* plus un dirham. Si tu veux chercher un nombre quelconque, qui a une racine, tel que, si tu lui ajoutes un autre nombre, la somme ait une racine ; et si tu lui ajoutes deux fois ce nombre ou trois fois celui-ci ou quatre fois celui-ci ou un nombre de fois à volonté, [82^{v}] la somme ait une racine, alors pose ton *carré*, un *carré* ; ajoute-lui ensuite deux fois sa racine plus un dirham, il vient un *carré* plus deux racines plus un dirham, qui a une racine, et sa racine est une chose plus un dirham ; puis tu ajoutes au *carré*, si tu veux, deux fois ce nombre, quatre fois sa racine plus deux dirhams, et, si tu le veux, trois fois ou un nombre de fois à volonté, conformément à cela. C'est comme si nous voulions deux fois, on aura un *carré* plus quatre choses plus deux dirhams. Tu poses sa racine une chose plus un dirham plus un demi et tu le multiplies par lui-même ; on aura un *carré* plus trois choses plus deux dirhams plus un quart égal à un *carré* plus quatre choses plus deux dirhams ; tu réduis par ceci, la chose sera donc égale à un quart de dirham, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est un demi-huitième de dirham, c'est-à-dire une partie de seize parties de dirham. Mais nous avons posé le nombre qui lui est ajouté deux choses plus un dirham, c'est-à-dire un dirham et demi. Puisque la chose est un quart de dirham et le dirham seize parties, le dirham plus un demi sera vingt-quatre parties, c'est-à-dire le nombre qui, ajouté à l'unité, aura une racine ; et si tu ajoutes à l'unité deux fois vingt-quatre, c'est-à-dire quarante-huit, on aura <un nombre> qui a une racine. Tu procèdes ensuite comme je te l'ai expliqué.

ولهذه المسألةِ وما أشبهها من الصوابات ما لا يُحصَى كثرةً، وسأوضِّحُ لك الحيلةَ في استخراج هذه الأعدادِ؛ ليسهل عليك العملُ في جميع هذا الفنّ إن شاء الله:

اعلم أنّ كلَّ مالٍ له جذرٌ؛ فإنك إذا زِدْت عليه جذرَيه ودرهماً كان له جذر، وجذره مثلُ جذرِ المال الأوّل ودرهم. فإذا أردت أن تطلب عدداً من الأعداد له جذر إذا زِدْت عليه عدداً آخر، كان له جذر، وإن زِدْت عليه مِثْلَيْ ذلك العدد، أو ثلاثة أمثاله، أو أربعة أمثاله، أو ما أردت من الأمثال، يكون / لِما يجتمع من ذلك جذرٌ، فاجعل مالَك مالاً، ثم زِدْ عليه جذريه ودرهماً، يكُنْ ٨٢-ظ مالاً وجذرين ودرهماً، وله جذر، وجذرُه شيءٌ ودرهمٌ، ثم زِدْت على المالِ إن أردتَ مِثْلَي العددِ: أربعةَ أجذاره ودرهمين، وإن أردت ثلاثةَ أمْثَاله، أو ما أردتَ من الأمثال على حسب ذلك. فكأنا أردنا مِثْلَيْه، فيكون مالاً وأربعة أشياء ودرهمين، فتجعل جذره شيئاً ودرهماً ونصفاً، وتضربه في مثله، فيكون مالاً وثلاثةَ أشياءَ ودرهمين وربعاً تعدل مالاً وأربعة أشياء ودرهمين. فتقابل بها، فالشيءُ يعدل ربعَ درهمٍ، وهو جذرُ المالِ، والمالُ نصفُ ثُمْنِ درهمٍ، وهو جزءٌ من ستة عشر جزءاً من درهمٍ؛ وكنّا جعلنا العددَ المزيدَ عليه شيئين ودرهماً، وهو درهمٌ ونصفٌ. فلأنّ الشيءَ ربعُ درهمٍ، والدرهم ستة عشر جزءاً، فيكون الدرهمُ والنصف أربعة وعشرين جزءاً، وهو العددُ الذي إذا زِدْتَه على الواحدِ كان له جذر، وإن زِدْت مِثْلَيْ أربعة وعشرين على الواحدِ، وهو ثمانية وأربعون، كان له جذر. ثم تعمل بعد <ذلك> كما فسَّرتُ لك.

6 زدت (الثانية): دزت — 10 أردت: أدرت — 13 فتقابل بها: في الهامش — 16 فلأن: لأنّ.

Si tu veux chercher pour ce problème une autre solution, pose la racine du *carré* plus les quatre choses plus les deux dirhams, une chose plus un dirham plus deux tiers ; multiplie cette somme par elle-même, il vient un *carré* plus deux dirhams plus sept neuvièmes de dirham plus trois choses plus un tiers de chose égal à un *carré* plus quatre choses plus deux dirhams. Réduis par ceci ; on aura la chose, un dirham plus un sixième, ce qui est la racine du *carré*, et le *carré*, quarante-neuf parties divisées par trente-six parties, qui sont le nombre des parties du dirham, ce qui est le nombre cherché ayant une racine. Si tu veux connaître le nombre tel que, si tu l'ajoutes à quarante-neuf, la somme ait une racine ; et si tu ajoutes deux fois ce nombre à quarante-neuf, la somme ait une racine ; alors tu sais que tu as posé le premier nombre ajouté au *carré*, deux racines plus un dirham, et nous avons montré que la racine est un dirham plus un sixième, le dirham étant trente-six parties. Les deux racines plus le dirham sont trois plus un tiers. Tu multiplies trois plus un tiers par trente-six, on aura cent vingt, ce qui est le nombre tel que, si tu l'ajoutes à quarante-neuf, la somme ait une racine ; et si tu ajoutes deux fois cent vingt, [83^r] c'est-à-dire deux cent quarante, à quarante-neuf, la somme ait une racine. Procède ensuite comme je te l'ai décrit.

<9> De même si on dit : un *carré* ayant une racine, si tu en retranches deux de ses racines, le reste a une racine, et si tu en soustrais trois de ses racines, le reste a une racine ; ce problème est également indéterminé[13].

La méthode en cela est de chercher un nombre ayant une racine tel que, si tu en retranches un autre nombre, le reste aura une racine ; et si tu en retranches une fois et demie ce nombre, le reste aura une racine, car les trois racines sont égales à deux racines plus la moitié de celles-ci.

Si tu trouves ce <premier> nombre, tu le divises par la moitié du nombre retranché ; ce qu'on obtient est la racine du *carré*. Tu le divises en effet par la moitié du nombre retranché car le nombre retranché tient lieu, à

13 $\begin{cases} x^2 - 2x = y^2 \\ x^2 - 3x = z^2 \end{cases}$

وإن أحببت أن تعمل لهذه المسألة صواباً آخر، فاجْعل جذرَ المالِ والأربعة الأشياء والدرهمين شيئاً ودرهماً وثُلُثَيْن. واضربه في مثله يكن: مالاً ودرهمين وسبعة أتساعِ درهمٍ وثلاثة أشياءَ وثلث شيءٍ يعدل مالاً وأربعة أشياء ودرهمين. فقابل بها، فيكونَ الشيءُ درهماً وسُدْساً، وهو جذرُ المال، والمالُ تسعة وأربعون جزءاً مقسومةً على ستة وثلاثين جزءاً التي هي عددُ أجزاءِ الدرهمِ، وهو العددُ المطلوبُ الذي له جذر. فإذا أردتَ أن تعلم العددَ الذي إذا زِدْتَه على تسعةٍ وأربعين كان له جذر، وإن زِدْتَ على تسعةٍ وأربعين مِثْلَيْ ذلك العددِ كان له جذر، فقد علمتَ أنّك جعلتَ العددَ الأوّل المزيدَ على المالِ جذرين ودرهماً، وقد بيَّنا أن الجذرَ درهمٌ وسُدْسٌ، والدرهمُ ستة وثلاثون جزءاً، والجذران والدرهم ثلاثةٌ وثلثٌ. فتضرب ثلاثةً وثلثاً في ستةٍ وثلاثين فيكون مائةً وعشرين، وهو العددُ الذي إذا زدته على تسعةٍ وأربعين كان له جذر، وإن زدتَ على تسعةٍ وأربعين مِثْلَيْ مائة وعشرين، / وهو مائتان وأربعون، كان له جذر. ثم ٨٣-و تعمل فيما بعد كما وَصفْتُ لك.

<٩> وكذلك إن قال: مالٌ له جذر، إن نقصتَ منه جذريه، كان لِما بقي جذرٌ، وإن نقصتَ منه ثلاثة أجذاره كان لما بقي جذر. هذه المسألةُ أيضاً غير محدودةٍ.

والوجهُ فيها أن تطلبَ عدداً له جذر، إذا نقصتَ منه عدداً آخر كان لِما بَقِيَ جذرٌ، وإنْ نَقَصْتَ منه مثلَ العددِ ومثلَ نصفِه كان لِما بَقِيَ جذرٌ، لأنّ الثلاثةَ الأجذار مثلُ الجذرين ومثلُ نصفِهما.

فإذا وجدتَ ذلك العددَ قسمتَه على نصفِ العددِ المنقوصِ، فَما خَرَجَ فهو جذرُ المالِ. وإنّما قسمتَه على نصفِ العددِ المنقوصِ، لأنّ العددَ المنقوصَ

1 لهذه: هذه — 4 فيكون: فيكن.

cet égard, de deux fois la racine du *carré* ; sa moitié tient donc lieu de la racine du *carré*. Le nombre cherché qui a une racine est alors vingt-cinq et le nombre qui en est retranché est seize et il tient lieu, à cet égard, de deux racines ; chaque racine est huit et l'autre nombre, qui est trois racines, est vingt-quatre ; si tu retranches seize de vingt-cinq, il reste neuf, qui a une racine qui est trois ; et si tu retranches vingt-quatre de vingt-cinq, le reste est un, qui a une racine qui est un.

Si tu veux connaître quel est le *carré*, divise alors vingt-cinq par huit ; on obtient trois plus un huitième, qui est la racine du *carré*, et le carré est neuf dirhams plus six huitièmes plus un huitième de huitième. Retranches-en le double de la racine, c'est-à-dire six plus un quart ; il reste alors trois plus un demi plus un huitième de huitième, qui a une racine qui est un dirham plus sept huitièmes ; enlève ensuite du *carré* le triple de sa racine, c'est-à-dire neuf plus un quart plus un huitième ; il reste trois huitièmes plus un huitième d'un huitième, qui a une racine qui est cinq huitièmes. La recherche de ces nombres est facile, d'après ce que je t'ai appris ; je vais t'expliquer cela pour que ce soit bien enraciné en toi.

Sache que tout *carré* a une racine ; si donc tu en retranches le double de sa racine moins un dirham, le reste a une racine et sa racine est égale à la racine du premier *carré* moins un dirham. Si tu veux chercher un nombre ayant une racine tel que, si tu en soustrais un autre nombre, le reste ait une racine et que, si tu en soustrais un nombre égal à ce nombre plus sa moitié, le reste ait également une racine, alors pose ton carré un *carré* [83ᵛ] et retranches-en ensuite le double de sa racine moins un dirham ; il restera alors un *carré* plus un dirham moins deux racines, qui a une racine qui est une chose moins un dirham. Retranche ensuite du *carré* une <somme> égale à deux racines moins un dirham plus la moitié de cette somme ; il reste un *carré* plus un dirham et demi moins trois choses. Tu poses sa racine trois dirhams moins une chose, que tu multiplies par elle-même ; on aura neuf dirhams plus un *carré* moins six choses égal à un *carré* plus un dirham et demi moins trois choses. Tu réduis par ceci, comme je te l'ai expliqué ; alors la chose sera deux dirhams plus un demi, ce qui est la racine du *carré*, et le

يقوم في الاعتبار مقامَ جَذرَي المالِ، فنصفُه يقوم مقام جذر المالِ. فالعددُ المطلوبُ الذي له جذر، خمسةٌ وعشرون، والعددُ المنقوصُ منه ستةَ عشرَ، وهو يقوم في الاعتبار به مقام جذرين، كلُّ جذرٍ ثمانية، والعدَدُ الآخرُ — الذي هو [جذرُ] ثلاثة أجذارٍ — أربعةٌ وعشرون. فإذا نَقَصْتَ من خمسة وعشرين ستةَ عشر، بقي تسعة ولها جذر وهو ثلاثة. فإن نقصتَ من خمسة وعشرين أربعةَ وعشرين، بقي واحدٌ وله جذرٌ، وهو واحدٌ.

فإن أردتَ أن تعلم كم المالُ، فاقْسِمْ خمسةً وعشرين على ثمانيةٍ؛ فيخرج ثلاثةٌ وثُمْنٌ، وهو جذرُ المالِ، والمالُ تسعةُ دراهمَ وستةُ أثمانٍ وثُمْن الثُمْنِ. فأسقط منه جذريه وهو ستة وربع، فيبقى ثلاثة ونصف وثُمْن الثُمْنِ، وله جذر وهو درهمٌ وسبعة أثمان [ثُمْنٍ]. ثم تُسقط من المال ثلاثةَ أجذاره وهو تسعة وربع وثُمْن، فيبقى ثلاثةُ أثمانٍ وثُمْن الثُمْن، وله جذرٌ وهو خمسة أثمانٍ. وطلبُ هذه الأعدادِ يَسْهُلُ على ما أعلمتُك وسأبيّنُ ذلك لك ليرسخَ في قلبك.

اعلم أن كلّ مالٍ له جذرٌ، فإنك إن نقصتَ منه جذريه إلاّ درهماً كان لِما بقي جذرٌ. وجذرُه مثلُ جذرِ المالِ الأوّل إلاّ درهماً. فإذا أردتَ أن تطلب عدداً له جذرٌ، إذا نقصتَ منه عدداً آخر كان لما بقي منه جذرٌ، وإن نقصتَ منه مثلَ العددِ ومثلَ نصفِه كان لما بقي منه أيضاً جذرٌ، فاجعل مالَك مالاً، ثم / أنقصْ منه جذريه إلاّ درهماً، فيبقى مالٌ ودرهمٌ إلاّ جذرين، وله جذرٌ وهو شيءٌ ٨٣-ظ إلاّ درهماً. ثم أنْقص من المالِ مثلَ الجذرين إلاّ درهماً ومثلَ نصفِه، فيبقى مالٌ ودرهمٌ ونصفٌ إلاّ ثلاثة أشياءَ. فتجعل جذرَه ثلاثةَ دراهمَ إلاّ شيئاً، وتضربه في مثلِه، فيكون تسعةَ دراهم ومالاً إلاّ ستة أشياءٍ تعدل مالاً ودرهماً ونصفاً إلاّ ثلاثة أشياء. فتقابل بها على ما فسَّرتُ لك، فيكونَ الشيء درهمين ونصفاً وهو جذرُ

1 المال: فوق السطر / جذر: فوق السطر — 4 فإذا نقصت: في الهامش — 10 وهو درهم: وهو جذر درهم، وقد كتبت "جذر" فوق السطر — 12 يسهل: فوق السطر — 14 الأوّل: فوق السطر.

carré est six plus un quart, c'est-à-dire vingt-cinq parties divisées par les parties de dirham qui sont quatre. Or nous avons montré que le nombre qui en est retranché est deux choses moins un dirham, c'est-à-dire quatre dirhams, chaque dirham étant quatre parties, cela sera alors seize parties ; le nombre cherché ayant une racine est donc vingt-cinq, le nombre qui est deux racines et qui en est retranché est seize et le nombre qui est trois racines et qui en est retranché est vingt-quatre. Tu procèdes ensuite pour achever le problème comme je te l'ai appris, si Dieu le veut.

Tu peux obtenir pour ce problème et ses analogues autant de solutions que tu veux, comme je te l'ai montré.

<10> Ainsi, si on te dit : un *carré* ayant une racine, si tu le soustrais de sa racine, le reste aura une racine, ce problème est également indéterminé[14].

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* un *carré*, que tu retranches de sa racine, qui est une chose ; il reste une chose moins un *carré* ; il est donc nécessaire que le reste ait une racine. Tu poses alors sa racine des choses à volonté, si tu veux une chose ou si tu veux plus ou si tu veux moins. Nous la posons une chose, que nous multiplions par elle-même ; on aura un *carré* égal à une chose moins un *carré* ; tu réduis par ceci ; la chose sera donc égale à un demi-dirham, qui est la racine du *carré*, et le *carré*, un quart de dirham. Si tu veux le vérifier, enlève le *carré*, qui est un quart de dirham, de sa racine, qui est un demi-dirham ; il reste un quart de dirham, qui a une racine qui est un demi-dirham. Si tu poses sa racine[15] deux choses, la racine du *carré* sera un cinquième de dirham et le *carré* le cinquième d'un cinquième de dirham ; si tu veux le vérifier, enlève le *carré*, c'est-à-dire le cinquième d'un cinquième de dirham, de sa racine, c'est-à-dire un cinquième de dirham ; il reste donc quatre cinquièmes du cinquième d'un dirham, qui a une racine, qui est deux cinquièmes de dirham.

[14] $x - x^2 = y^2$.

[15] Il s'agit de la racine du deuxième membre.

المالِ، والمالُ ستة وربع وهو خمسة وعشرون جزءاً مقسومةً على أجزاءِ الدرهم وهو أربعةٌ. وقد كنّا بيّنّا أن العددَ المنقوصَ منه شيئان إلاّ درهماً وهو أربعةُ دراهم، كلُّ درهمٍ أربعة أجزاء، فيكون ذلك ستة عشر جزءاً، فالعددُ المطلوبُ الذي له جذرٌ: هو خمسة وعشرون، والعددُ الذي هو جذرانِ: المنقوصُ منه ستة عشر، والعدد الذي هو ثلاثة أجذارٍ: المنقوصُ منه أربعة وعشرون. ثم تعمل في تمام المسألة كما أعلمتُكَ إن شاء الله.

وقد يمكنك أن تعمل في هذه المسألة وما أشبهها ما أحببت من الصوابات على ما بيّنْتُ لك.

<١٠> فإن قيل لك: مالٌ له جذرٌ، إن نقصته من جذره، كان لما بقي جذرٌ. هذه المسألةُ أيضاً غير محدودةٍ.

وقياسه: أن تجعل مالَك مالاً فتسقطه من جذره، وهو شيءٌ، فيبقى شيءٌ إلاّ مالاً. فتحتاج إلى أن يكون له جذر، فتجعل جذره ما شئت من الأشياء: إن شئت شيئاً، وإن شئت أكثر، وإن شئت أقلّ. فجعلناه شيئاً وضربناه في مثله فكان مالاً يعدل شيئاً إلاّ مالاً، فتقابل به، فيكون الشيءُ يعدل نصفَ درهمٍ، وهو جذرُ المالِ، والمالُ ربعُ درهمٍ. فإذا أردتَ امتحانَه، فأسقط المالَ — وهو ربعُ درهمٍ — من جذره، وهو نصف درهم، فيبقى ربعُ درهمٍ وله جذرٌ، وهو نصفُ درهمٍ. وإن جعلتَ جذرَه شيئين، خرج جذرُ المالِ خُمْسَ درهمٍ والمالُ خُمْسُ خُمْسِ درهمٍ. فإذا أردت امتحانه، فأسقط المالَ وهو خُمْسُ خُمْسِ درهمٍ من جذره وهو خُمْسُ درهمٍ، فيبقى أربعةُ أخماسِ خُمْسِ درهمٍ، وله جذرٌ وهو خُمْسا درهمٍ.

1 أجزاء: جزء — 4 الذي هو جذران: أي الذي يقوم في الاعتبار مقام جذرين — 5 هو ثلاثة أجذار: أي الذي يقوم في الاعتبار مقام ثلاثة أجذار.

<11> Si on te dit : un *carré* [84r] ayant une racine, si tu lui ajoutes sa racine, la somme a une racine et si tu retranches le *carré* de sa racine, le reste a une racine. Ce problème est également indéterminé[16].

La méthode en cela est de chercher un nombre ayant une racine ; si tu lui ajoutes un autre nombre, la somme a une racine, et si tu retranches le premier nombre qui a une racine de l'autre nombre auquel tu l'as ajouté, le reste a une racine. Si tu trouves ce nombre, tu le divises par le nombre ajouté ; ce que tu obtiens est la racine du *carré*. Le nombre qui a une racine est quatre et le nombre que tu lui as ajouté est cinq ; si donc tu ajoutes cinq à quatre, la somme aura une racine, qui est trois, et si tu retranches le quatre du cinq, il reste un, qui a une racine qui est un. Si tu veux savoir quel est le *carré*, tu divises quatre par cinq ; on obtient quatre cinquièmes, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est trois cinquièmes plus un cinquième de cinquième.

Je t'explique le procédé subtil pour déterminer ces nombres. Nous avons expliqué précédemment que tout *carré* a une racine ; si donc tu lui ajoutes le double de sa racine plus un dirham, la somme a une racine. Pose donc ton *carré*, un *carré* ; retranche-le de deux racines plus un dirham, il reste deux racines plus un dirham moins un *carré* ; pose alors sa racine une chose moins un dirham. Tu soustrais en effet le dirham de la chose pour obtenir par la multiplication un dirham ; donc, quand tu réduis par ceci, les *carrés* restent égaux à des choses. Multiplie une chose moins un dirham par elle-même, il vient un *carré* plus un dirham moins deux choses égal à deux choses plus un dirham moins un *carré*. Réduis par ceci ; il vient un *carré* égal à deux choses, la chose est donc deux et le *carré* est quatre ; c'est celui qui a une racine ; l'autre nombre, c'est-à-dire le double de la racine de quatre plus un dirham, est cinq.

Si tu poses la racine du *carré* une demi-chose plus un dirham que tu multiplies par elle-même ; si tu réduis deux choses plus un dirham moins un *carré* par le produit, tu obtiens le nombre ayant une racine égal à seize et l'autre soixante-cinq, et la racine du *carré* sera seize parties de soixante-cinq parties de dirham. Pour tout ce qui te parvient par cette voie, procède de

16 $\begin{cases} x^2 + x = y^2 \\ x - x^2 = z^2 \end{cases}$

<١١> فإن قيل لك: مالٌ / له جذرٌ إن زِدْتَ عليه جذرَه كان له ٨٤-و
جذرٌ، وإن نَقَصْتَ المالَ من جذره كان لما بقي جذرٌ. هذه المسألةُ أيضاً غير محدودةٍ.

والوجهُ فيها أن تطلبَ عدداً له جذرٌ، إذا زِدْتَ عليه عدداً آخر كان له جذرٌ، وإن نقصتَ العددَ الأوّل، الذي له جذرٌ، من العددِ الآخر الذي زِدْته عليه؛ كان لما بقي جذرٌ. فإذا وَجَدْتَ العددَ قَسَمْتَه على العددِ المزيدِ، فما خرج فهو جذرُ المالِ. والعددُ الذي له جذر أربعة والعدد المَزيد عليه خمسة. فإذا زِدْتَ على أربعة خمسةً كان له جذرٌ وهو ثلاثة، وإذا نَقَصْتَ الأربعةَ من الخمسةِ بقي واحدٌ وله جذرٌ، وهو واحدٌ. فإذا أردتَ أن تعلم كم المالُ؟ قسمتَ أربعةً على خمسةٍ فيخرج أربعةُ أخْماسٍ، وهو جذرُ المالِ، والمالُ ثلاثة أخماسٍ وخُمْسُ الخُمْسِ.

وأنا مُبَيِّنٌ الحيلةَ في استخراج هذه الأعداد: قد شرحنا فيما تقدّمَ أنّ كلّ مالٍ له جذرٌ، فإنّك إذا زِدْتَ عليه جذريه ودرهماً كان له جذرٌ، فاجعل مالَك مالاً، فانْقِصْه من جذرين ودرهمٍ، فيبقى جذران ودرهمٌ إلاّ مالاً. فاجعل جذرَه شيئاً إلاّ درهماً. وإنّما استثنيت الدرهمَ من الشيءِ، ليخرج في الضربِ درهمٌ، فإذا قابلتَ به بقيت الأموالُ تعدل أشياء. فاضرب شيئاً إلاّ درهماً في مثله يَكُنْ: مالاً ودرهماً إلاّ شيئين تعدل شيئين ودرهماً إلاّ مالاً. فقابل بها يَكُنْ: مالاً يعدل شيئين، فالشيءُ اثنان، والمالُ أربعة، <وهو> الذي له جذر، والعدد الآخر وهو جذرا أربعةٍ ودرهم، وهو خمسة.

وإن جعلتَ جذرَ المالِ نصفَ شيءٍ ودرهماً وضربتَه في مثلِه وقابلتَ بما يجتمع من الضربِ شيئين ودرهماً إلاّ مالاً؛ خرج لك العددُ الذي له جذرٌ ستةَ عشر، والآخر خمسةً وستين، ويكون جذرُ المالِ ستةَ عشر جزءاً من خمسةٍ وستين جزءاً من درهمٍ. وكلُّ ما جاءك من هذا النَحْوِ فَدَبِّره هذا التدبير، فإنه

1 جذره: فوق السطر — 23 وكلّ ما: وكلّما.

cette manière ; tu obtiendras autant que tu veux de solutions, si Dieu le veut. Je t'expliquerai plus tard [84^{v}] ce problème d'une autre manière.

<12> Sache que tout nombre partagé en deux parties telles que chacune ait une racine peut être partagé en deux autres parties telles que chacune ait une racine, et encore en deux autres parties, et ainsi indéfiniment[17]. Je vais t'expliquer cela pour que tu le comprennes, si Dieu le veut.

Si on te dit : divise cinq dirhams en deux parties dont chacune a une racine, tu sais alors que l'une des deux parties est quatre et l'autre un.

Si tu veux le diviser en deux autres parties différentes de ces deux parties et telles que chacune ait une racine, prends alors la racine de l'une des deux parties, ajoute-lui une chose et multiplie la somme par elle-même ; ce que tu obtiens est l'une de ces deux parties ; enlève-la de cinq, ce qui reste est la seconde partie. C'est comme si nous prenions l'une des parties, c'est-à-dire un ; nous prenons sa racine qui est un à laquelle nous ajoutons une chose ; il vient un plus une chose ; nous multiplions cette somme par elle-même, il résulte un *carré* plus un dirham plus deux choses, ce qui est l'une des deux parties que tu cherches. Nous la retranchons de cinq ; il reste quatre dirhams moins un *carré* moins deux choses, qui est la seconde partie ; il est nécessaire qu'elle ait une racine. Or nous savons que sa racine est plus petite que deux dirhams ; nous la posons deux dirhams moins une chose et un tiers, nous la multiplions par elle-même, on aura quatre dirhams plus un *carré* plus sept neuvièmes de *carrés* moins cinq choses et un tiers de chose égal à quatre dirhams moins un *carré* moins deux choses. Réduis par ceci, comme je te l'ai expliqué ; la chose sera un dirham plus un cinquième. Mais nous avons posé la racine de l'une des deux parties une chose et un dirham, alors la racine de l'une des deux parties sera deux dirhams plus un cinquième ; nous la multiplions par elle-même, on aura quatre dirhams plus quatre cinquièmes plus un cinquième d'un cinquième, ce qui est l'une des deux parties que tu cherches ; l'autre est ce qui reste de cinq, c'est-à-dire quatre cinquièmes de cinquième.

[17] $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

يخرج لك ما أردت من الصوابات إن شاء الله. وسأشرحُ لك هذه المسألةَ فيما
٨٤-ظ بعد بغير / هذا الشرح.

<١٢> اعلم أنّ كلَّ عددٍ يَنْقَسِمُ بقسمين حتى يكونَ لكلِّ قسمٍ جذرٌ، فإنه يمكنك أن تقسمه بقسمين آخرين حتى يكون لكلِّ قسمٍ جذرٌ، وقسمين آخرين إلى ما لا نهايةَ له. وسأبيِّنُ لك ذلك لتفهمه إن شاء الله.

فإن قيل لك: خمسةُ دراهمَ تقسمها بقسمين لكلِّ قسمٍ جذرٌ، فقد علمتَ أن أحدَ القسمين أربعةٌ والآخر واحدٌ.

فإذا أردتَ أن تقسمها بقسمين آخرين سِوَى هذين القسمين حتى يكون لكلِّ قسمٍ جذرٌ، فَخُذْ جذرَ أحدِ القسمين وزِدْ عليه شيئاً واضربه في مثلِه، فما بلغ فهو أحدُ القسمين. فأسقطه من الخمسةِ، فما بقي فهو القسمُ الآخر. فكأنّا أخذنا أحدَ القسمين وهو واحدٌ، فأخذت جذرَه وهو واحدٌ، فَزِدْنا عليه شيئاً، فصار واحداً وشيئاً، فضربناه في مثله، فاجتمع مالٌ ودرهمٌ وشيئان، وهو أحدُ القسمين الذي تطلب، فأسقطناه من الخمسة فبقي أربعةُ دراهمَ إلاّ مالاً وإلاّ شيئين، وهو القسمُ الآخر؛ فنحتاجُ إلى أن يكون له جذرٌ. وقد علمنا أن جذرَه أقلُّ من درهمين، فنجعله درهمين إلاّ شيئاً وثلثاً، ونضربه في مثله، فيكون أربعةَ دراهمَ ومالاً وسبعةَ أتساعِ مالٍ إلاّ خمسة أشياءَ وثلث شيءٍ تعدل أربعة دراهِمَ إلاّ مالاً وإلاّ شيئين، فقابل بها كما بيَّنتُ لك، يَكُنْ الشيءُ درهماً وخُمْساً. وكنا جعلنا جذرَ أحدِ القسمين شيئاً ودرهماً، فصار جذرُ أحدِ القسمين درهمين وخُمْساً، فنضربه في مثله، فيكون أربعة دراهمَ وأربعة أخماسٍ وخُمْس الخُمْسِ، وهو أحد القسمين الذي تطلب، والآخر ما بقي من الخمسةِ وهو أربعة أخماس الخُمْسِ.

11 وهو واحد: وهو احد.

Si tu veux le partager en deux autres parties différentes de ces deux parties, pose alors la racine de quatre dirhams moins un *carré* moins deux choses, deux dirhams moins une chose et demie ; multiplie <cette différence> par elle-même, réduis quatre dirhams moins un *carré* moins deux choses par le résultat de la multiplication et procède comme je te l'ai décrit ; tu obtiens la racine de l'une des deux parties, deux dirhams plus trois parties de treize, et la racine de l'autre partie deux parties de treize parties de dirham. Tu multiplies chacune par elle-même, tu obtiens l'une des deux parties quatre dirhams plus douze parties de treize parties de dirham plus neuf parties [85r] de cent soixante-neuf parties de dirham et la deuxième partie, quatre parties de cent soixante-neuf parties de dirham.

Fais de même dans tout ce qui te parvient de ce type, procède de cette manière, tu obtiens autant de parties que tu veux. Tu prends en effet la racine de l'une des deux parties, tu lui ajoutes une chose, tu multiplies la somme par elle-même ; ce que tu obtiens est l'une des deux parties que tu cherches ; tu la retranches ensuite du nombre que tu veux partager en deux parties dont chacune a une racine, ce qui reste est la deuxième partie, c'est-à-dire un nombre qui a une racine duquel on a soustrait un *carré* et des choses. Prends alors la racine de ce nombre et retranches-en des choses à volonté, à condition que la réduction ne soit pas impossible après multiplication <de cette différence> par elle-même ; tu réduis par ceci la partie qui est un nombre ayant une racine duquel on a soustrait un *carré* plus des choses, tu obtiendras alors une infinité de parties.

<13> Si on te dit : divise dix en deux parties, tu ajoutes l'une des parties à vingt, la somme a une racine, et tu retranches l'autre de cinquante, le reste a une racine ; ce problème est également indéterminé[18].

18 $\begin{cases} x + y = 10 \\ 20 + x = z_1^2 \\ 50 - y = z_2^2 \end{cases}$

فإن أردتَ أن تقسمها بقسمين آخرين سِوَى هذين القسمين، فاجعل جذرَ أربعةِ دراهمَ إلاّ مالاً وإلاّ شيئين، درهمين إلاّ شيئاً ونصفاً، واضربه في مثله، وقابل بما اجتمع من الضرب أربعة دراهمَ إلاّ مالاً وإلاّ شيئين، واعمل كما وصفتُ لك. فيخرجُ لك جذرُ أحدِ القسمين درهمين وثلاثة أجزاء من ثلاثة عشر، وجذر القسم الآخر جزأين من ثلاثة عشر جزءاً من درهمٍ. فتضرب كلّ واحدٍ منهما في مثله فيكون: أحدُ القسمين أربعة دراهمَ واثنا عشر جزءاً من ثلاثة عشر جزءاً من درهم وتسعة أجزاء / من مائة وتسعة وستين جزءاً من ٨٥-و درهمٍ، والقسمُ الآخر أربعة أجزاء من مائةٍ وتسعةٍ وستين جزءاً من درهمٍ.

وكذلك فاعمل في جميع ما جاءك من هذا النَحْو، فدَبِّره هذا التدبير، فإنّه يخرج لك من الأقسام ما أردتَ. وذلك أنّك تأخذ جذرَ أحدِ القسمين فتزيد عليه شيئاً وتضربَه في مثله، فما كان فهو أحدُ القسمين الذي تطلب، فتُسقطه من العددِ الذي تريد أن تَقْسِمه بقسمين لكلّ واحدٍ جذرٌ، فما بقي فهو القسمُ الآخر، وهو عددٌ له جذرٌ مستثنى منه مالٌ وأشياء، فَخُذْ جذرَ العددِ واستثنِ منه ما شئتَ من الأشياء بعد ألاّ يستحيل في المقابلة إذا ضربتَه في مثله، وقابلتَ به القسمَ الذي هو عددٌ له جذرٌ مستثنى منه مالٌ وأشياء. فيخرج لك من الأقسام ما لا نهاية له.

<١٣> فإن قيل لك: عشرةٌ قسمتها قسمين، فتزيد أحدَ القسمين على عشرين فيكون له جذرٌ، وتسقِطُ الآخر من [جذر] خمسين، فيكون لِما بقي جذرٌ. هذه المسألة أيضاً غيرُ محدودةٍ.

3 الضرب: ضرب — 13 مستثنى: مستثنًا — 18 الآخر من: من الآخر جذر.

On l'infère ainsi : tu poses l'une des deux parties un *carré* moins vingt, telle que, si tu l'ajoutes à vingt, tu auras un *carré* qui a une racine qui est une chose. L'autre partie est ce qui reste de dix, qui est trente moins un *carré* ; tu le retranches alors de cinquante dirhams, il reste un *carré* plus vingt dirhams ; il est nécessaire que ce reste ait une racine. Si nous voulons la connaître, de sorte que le *carré* soit plus grand que vingt et plus petit que trente, alors ceci admet beaucoup de solutions. Pour l'une, que tu poses la racine du *carré*, cinq plus un sixième, le *carré* est vingt-six plus deux tiers plus un quart de neuvième ; retranches-en vingt dirhams, il reste six dirhams plus deux tiers plus un quart de neuvième, ce qui est l'une des deux parties ; si tu l'ajoutes à vingt, la somme aura une racine qui est cinq plus un sixième, l'autre partie est ce qui reste de dix, c'est-à-dire trois dirhams plus un quart plus un demi-neuvième ; si tu le retranches de cinquante dirhams, il reste quarante-six dirhams plus deux tiers plus un quart de neuvième, qui a une racine qui est six plus un demi plus un tiers.

Si tu veux savoir comment la racine du *carré* est devenue cinq plus un sixième, pose la racine du *carré* plus vingt, un dirham plus deux tiers plus une chose ; multiplie-la par elle-même, il vient deux dirhams plus sept neuvièmes plus un *carré* plus trois choses plus un tiers d'une chose égal à un *carré* plus vingt dirhams. Réduis par ceci, la chose devient cinq plus un sixième. [85^{v}] Si tu veux une autre solution, procède comme je te l'ai décrit.

<14> Si on dit : divise dix en deux parties, tu ajoutes l'une des parties à vingt, la somme aura une racine, tu ajoutes l'autre à cinquante, la somme a une racine ; ce problème est également indéterminé[19].

On l'infère ainsi : tu poses l'une des deux parties un *carré* moins vingt dirhams afin que, si tu l'ajoutes à vingt, la somme ait une racine ; l'autre, ce qui reste de dix, est trente moins un *carré*. Ajoute-le à cinquante, soit quatre-vingts moins un *carré*. Il est nécessaire que la somme ait une racine. C'est comme si on disait : partage quatre-vingts dirhams en deux parties dont chacune a une racine. Si on te pose un problème de ce genre, tu procèdes

19 $\begin{cases} x + y = 10 \\ 20 + x = z_1^2 \\ 50 + y = z_2^2 \end{cases}$

قياسُه: أن تجعل أحدَ القسمين مالاً إلاّ عشرين، حتى إذا زِدْتَه على عشرين كان مالاً وله جذرٌ وهو شيءٌ، والقسمُ الآخر ما بقي من العشرة، وهو ثلاثون إلاّ مالاً. فتسقطه من الخمسين دِرْهَماً، فيبقى مالٌ وعشرون درهماً، وتحتاج إلى أن يكون له جذرٌ. فإذا أردنا أن نَعلمه، ويكون المالُ أكثرَ من عشرين وأقلَّ من ثلاثين، فإن هذا له صوابات كثيرة. فأحدُها: أن تجعل جذرَ المالِ خمسةً وسدساً، والمالَ ستةً وعشرين وثلثين وربعَ تُسْعٍ. فألْقِ منه عشرين درهماً، فيبقى ستة دراهم وثلثان وربعُ تُسعٍ وهو أحدُ القسمين. فإذا زِدْته على عشرين كان له جذرٌ، وهو خمسةٌ وسدسٌ، والقسمُ الآخر ما بقي من العشرة وهو ثلاثة دراهم وربعٌ ونصف تُسعٍ. فإذا أسقطته من الخمسين درهماً، بقي ستة وأربعون درهماً وثلثان وربعُ تُسْعٍ، وله جذرٌ، وهو ستة ونصفٌ وثلثٌ.

فإنْ أردت أن تعلم كيف صار جذرُ المالِ خمسةً وسدساً، فاجعل جذرَ المالِ والعشرين، درهماً وثلثين وشيئاً، واضربه في مثله يَكُنْ: درهمَيْن وسبعةُ أتساعٍ ومالاً وثلاثةَ أشياء وثلث شيءٍ يعدل مالاً وعشرين درهماً. فقابل بها يَكُن الشيءُ خمسةً وسُدْساً. / وإن أردت غير هذا الصَّوابِ فاعمل كما وصفتُ لك. ٨٥-ظ

<١٤> فإن قيل: عشرةٌ قسمتها قسمين، فتزيد أحدَ القسمين على عشرين فيكون له جذرٌ، وتزيد الآخر على خمسين فيكون له جذرٌ. هذه المسألة أيضاً غير محدودةٍ.

وقياسه: أن تجعل أحدَ القسمين مالاً إلاّ عشرين درهماً حتى إذا زدته على عشرين كان له جذرٌ، والآخر ما بقي من العشرة وهو ثلاثون إلاّ مالاً. فَزِدْه على الخمسين يكن ثمانين إلاّ مالاً. فيُحتاجُ إلى أن يكون له جذرٌ. فكأنّه قال: ثمانون درهماً تقسمها قسمين لكلِّ قسمٍ جذرٌ. فإذا أُلْقِيَتْ عليك مسألةٌ من هذا

3 درهماً: الدرهم — 6 ستة: وستة / وثلثين: وثلثان — 7 تسع: وتسع — 9 درهماً: الـدرهم — 13 ومالاً: ومال.

de cette manière pour te ramener à un nombre que tu divises en deux parties dont chacune a une racine, si le nombre est de ceux qui se divisent, sinon le problème n'a pas de solution.

Partage donc quatre-vingts en deux parties dont chacune a une racine ; pose l'une des parties plus grande que vingt et plus petite que trente et l'autre partie plus grande que cinquante et plus petite que soixante ; alors ceci a d'innombrables solutions et le procédé subtil pour déterminer autant de solutions que tu veux est selon ce que je t'ai appris précédemment. On obtient l'une des solutions en posant l'une des deux parties de quatre-vingts, vingt-six dirhams et deux cent trente parties de deux cent quatre-vingt-neuf parties de dirham ; l'autre partie est ce qui reste de quatre-vingts, c'est-à-dire cinquante-trois dirhams et cinquante-neuf parties de deux cent quatre-vingt-neuf parties de l'unité.

Si tu veux savoir quelles sont chacune des deux parties de dix, retranche de la première partie vingt dirhams, il reste six dirhams plus deux cent trente parties de deux cent quatre-vingt-neuf parties de dirham, ce qui est l'une des deux parties ; et l'autre est celle qui reste de dix, qui est trois dirhams et cinquante-neuf parties de deux cent quatre-vingt-neuf parties de dirham. Si tu ajoutes la plus grande partie des deux parties de dix à vingt, on a vingt-six dirhams plus deux cent trente parties de deux cent quatre-vingt-neuf parties de dirham, qui a une racine, qui est cinq dirhams plus trois parties de dix-sept parties de dirham. Si tu ajoutes la plus petite partie des deux parties, c'est-à-dire trois dirhams plus cinquante-neuf [86^{r}] parties de deux cent quatre-vingt-neuf parties de dirhams, à cinquante dirhams, il vient cinquante-trois dirhams plus cinquante-neuf parties de deux cent quatre-vingt-neuf parties de dirham, qui a une racine, qui est sept dirhams plus cinq parties de dix-sept parties de dirham.

الجنس دَبَّرتَها هذا التدبير حتى تصير إلى العدد الذي يقسمه بقسمين لكل قسمٍ جذرٌ إن كان العددُ ممّا يُقسم، وإلاّ فالمسألة لا تخرج.

فاقْسِم الثمانين بقسمين لكل قسمٍ جذرٌ، واجعل أحدَ القسمين أكثر من عشرين وأقَل من ثلاثين، والقسم الآخر أكثر من خمسين وأقل من ستين؛ فإنّ هذا له صواباتٌ كثيرة لا تُحْصَى. والحيلةُ في استخراج ما أردت من الصوابات على ما أعلمتك ممّا تقدّم. فأحدُ الصوابات أن تجعل أحدَ القسمين من الثمانين ستةً وعشرين درهماً ومائتين وثلاثين جزءاً من مائتين وتسعة وثمانين جزءاً من درهم، والقسم الآخر ما بقي من الثمانين، وهو ثلاثة وخمسون درهماً وتسعة وخمسون جزءاً من مائتين وتسعة وثمانين جزءاً من واحدٍ.

فإذا أردتَ أن تعلمَ كم كلّ واحدٍ من قسمي العشرة، فأسْقِطْ من القسم الأوّل عشرين درهماً، فيبقى ستةُ دراهم ومائتان وثلاثون جزءاً من مائتين وتسعة وثمانين جزءاً من درهم وهو أحد القسمين، والآخر ما بقي من العشرة، وهو ثلاثة دراهم وتسعة وخمسون جزءاً من مائتين وتسعة وثمانين جزءاً من درهمٍ.

فإذا زِدْت القسم الأكبر من قسمي العشرة على عشرين كان ستةً وعشرين درهماً ومائتين وثلاثين جزءاً من مائتين وتسعة وثمانين جزءاً من درهم، ولها جذرٌ وهو خمسة دراهم وثلاثة أجزاء من سبعة عشر جزءاً من درهم. وإذا زِدْتَ ٨٦-و / وخمسون جزءاً من القسم الأصغر من قسمي العشرة، وهو ثلاثة دراهم وتسعة مائتين وتسعة وثمانين جزءاً من درهم على خمسين درهماً، كان ثلاثة وخمسين درهماً وتسعةً وخمسين جزءاً من مائتين وتسعة وثمانين جزءاً من درهمٍ، ولها جذرٌ وهو سبعةُ دراهمَ وخمسةُ أجزاءٍ من سبعة عشر جزءاً من درهمٍ.

2 إن كان: فإن كان — 7 جزءاً (الثانية): مكرّرة — 10 فإذا: فإذْ — 11 ومائتان وثلاثون: ومـائتين وثلاثين — 17 وهو: على.

<15> Si on te dit : si tu retranches un *carré* de trois dirhams, le reste a une racine, et si tu l'ajoutes à deux dirhams, la somme a une racine, ce problème est également indéterminé[20].

On l'infère ainsi : additionne les trois <dirhams> et les deux dirhams ; il vient cinq dirhams ; divise-les en deux parties dont chacune a une racine, et pose l'une des deux parties plus grande que deux dirhams et l'autre plus petite que trois ; retranche ensuite les deux dirhams de l'une des deux parties, ce qui reste est alors le *carré*. Si tu veux, tu poses le *carré*, vingt-trois parties de cent soixante-neuf parties de dirham ; si tu veux, tu le poses cent quarante-six parties de cent soixante-neuf parties de dirham ; si tu veux, tu le poses quatre cent trente et une parties de six cent vingt-cinq parties de dirham ; et si tu veux tu le poses cent quatre-vingt-quatorze parties de six cent vingt-cinq parties de dirham. Tu peux trouver autant que tu veux de solutions pour ce problème et pour ses analogues, comme je te l'ai expliqué précédemment.

<16> Si on te dit : si tu retranches un *carré* de dix dirhams, le reste a une racine, et si tu retranches le *carré* également de vingt dirhams, le reste a une racine, alors ce problème est également indéterminé[21].

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* dix dirhams moins un *carré* ou, si tu veux, vingt dirhams moins un *carré*. Tu le poses ainsi en effet pour que, si tu le soustrais de l'un des deux, il reste un *carré* qui a une racine qui est une chose ; nous le posons alors dix dirhams moins un *carré*. Si donc nous le retranchons de dix dirhams, il reste un *carré*, et si nous le retranchons de vingt dirhams, il reste un *carré* plus dix dirhams ; il est nécessaire que ce reste ait une racine, or tu sais que sa racine est plus grande qu'une chose ; tu le poses une chose plus deux dirhams ou une chose plus trois <dirhams> ou ce que tu veux, comme nous l'avons explicité précédemment, et tel que de cette racine, une fois multipliée par elle-même et réduite par un *carré* plus dix dirhams, on obtienne le *carré* plus petit que dix dirhams. [86^{v}] Tu la

20 $\begin{cases} 3 - x^2 = y^2 \\ 2 + x^2 = z^2 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 10 - x^2 = y^2 \\ 20 - x^2 = z^2 \end{cases}$

<١٥> فإن قيل لك: مالٌ إذا أسقطته من ثلاثة دراهم كان لِما بقي جذرٌ وإن زِدْتَه على درهمين كان لما اجتمع جذرٌ. هذه المسألة أيضاً غيرُ محدودةٍ.

وقياسه: أن تجمع الثلاثةَ والدرهمين، فتكون خمسة دراهمَ فتقسمها بقسمين، لكل قسمٍ جذرٌ، واجعل أحدَ القسمين أكثرَ من درهمين و<الآخر> أقلَّ من ثلاثة، ثم أسقط الدرهمين من أحد القسمين، فما بقي فهو المال. وإن شِئْتَ جَعَلْتَ المالَ ثلاثةً وعشرين جزءاً من مائةٍ وتسعةٍ وستين جزءاً من درهمٍ، وإن شئت جعلته مائةً وستةً وأربعين جزءاً من مائةٍ وتسعة وستين جزءاً من درهم، وإن شئت جعلته أربعمائةٍ وأحداً وثلاثين جزءاً من ستمائةٍ وخمسة وعشرين جزءاً من درهمٍ، وإن <شئت> جعلته مائةً وأربعة وتسعين <جزءاً> من ستمائةٍ وخمسة وعشرين جزءاً من درهم. وقد يُمكنك أن تعمل لهذه المسألةِ وما أشبهها من الصوابات ما أردتَ، على ما شرحتُ لك فيما تقدّم.

<١٦> فإن قيل لك: مالٌ إن نقصته من عشرةِ دراهمَ كان لِما بقي جذرٌ، وإن نقصت المالَ أيضاً من عشرين درهماً كان لما بقي جذرٌ؛ فإنّ هذه المسالةَ أيضاً غير محدودةٍ.

وقياسه: أن تجعل مالَك عشرةَ دراهمَ إلاّ مالاً، وإن شئت عشرين درهماً إلاّ مالاً. وإنّما جعلته هكذا لِكَيْماَ إذا نقصتَه من أحدهما بقي مالٌ وله جذرٌ وهو شيءٌ، فجعلناه عشرةَ دراهمَ إلاّ مالاً. فإذا ألقيناه من عشرةِ دراهمَ بقي مالٌ، وإن أسقطناه من عشرين درهماً بقي مالٌ وعشرة دراهمَ؛ فيُحتاج إلى أن يكون له جذرٌ. وقد علمتَ أنّ جذره أكثر من شيء، فتجعله شيئاً ودرهمين، أو شيئاً وثلاثة، أو ما أردتَ من ذلك، على ما فسّرنا فيما تقدّم، وبعد أن يكون إذا ضربناه في مثله وقابلناه بمالٍ وعشرة دراهم خرج المالُ أقل من عشرة دراهمَ؛ /

9 وأحدًا: واحد.

poses une chose plus deux dirhams et tu la multiplies par elle-même ; on a un *carré* plus quatre dirhams plus quatre choses égal à un *carré* plus dix dirhams. Réduis par ceci, on aura la racine du *carré*, un dirham plus un demi, et le *carré*, deux dirhams plus un quart ; mais nous avions posé le *carré*, dix dirhams moins un *carré*, donc le *carré* cherché est sept plus un demi plus un quart ; si tu le retranches de dix dirhams, il reste deux <dirhams> plus un quart, dont la racine est un dirham plus un demi. Et si tu le retranches de vingt dirhams, il reste douze dirhams plus un quart qui a une racine qui est trois dirhams et un demi. Si tu poses la racine de ton *carré* plus dix dirhams égale à une chose plus trois dirhams, tu obtiens le *carré* neuf dirhams plus un demi plus un tiers plus cinq sixièmes d'un sixième. Les solutions de ce problème et de ses analogues sont trop nombreuses pour qu'on les énumère.

<17> Si on te dit : si tu ajoutes un *carré* à vingt dirhams, la somme aura une racine, et si tu l'ajoutes à trente, la somme a une racine, alors ce problème est également indéterminé[22].

On l'infère ainsi : pose ton *carré*, un *carré* moins vingt dirhams ou un *carré* moins trente dirhams ; c'est comme si nous le posions un *carré* moins vingt dirhams que nous ajoutons à vingt ; la somme sera un *carré* dont la racine est une chose ; nous l'ajoutons ensuite à trente, il vient un *carré* plus dix dirhams ; il est nécessaire que cette somme ait une racine et que le *carré* soit plus grand que vingt. Tu poses sa racine une chose plus un dirham, tu la multiplies par elle-même et tu réduis un *carré* plus dix dirhams par le produit ; on obtient le *carré*, vingt dirhams plus un quart ; tu en retranches vingt dirhams, il reste un quart de dirham, qui est le *carré* cherché. Si tu l'ajoutes à vingt dirhams, la somme a une racine, et si tu l'ajoutes à trente, la somme a une racine. Si tu veux, tu dis : le *carré*, soixante-quinze dirhams plus un demi-huitième, si tu l'ajoutes à vingt, la somme a une racine qui est neuf plus un demi plus un quart ; et si tu l'ajoutes à trente, la somme a une racine qui est dix dirhams plus un quart. Pour ce problème et ses analogues, il y a de nombreuses solutions.

22 $\begin{cases} x^2 + 20 = y^2 \\ x^2 + 30 = z^2 \end{cases}$

فتجعله شيئاً ودرهمين وتضربه في مثله فيكون مالاً وأربعةَ دراهمَ واربعةَ أشياءَ ٨٦-ظ
تعدل مالاً وعشرة دراهم. فتقابل بها، فيكون جذرُ المالِ درهماً ونصفاً، والمالُ درهمان وربع، وكنا جعلنا المالَ عشرة دراهمَ إلاّ مالاً، فيكون المالُ المطلوبُ سبعةً ونصفاً وربعاً. فإن نقصته من عشرة دراهم، بقي اثنان وربع، وجذرُه درهمٌ ونصفٌ. وإن نقصته من عشرين درهماً بقي اثنا عشر درهماً وربع، وله جذر وهو ثلاثة دراهم ونصف. وإن جعلت جذرَ مالِك وعشرة دراهم، شيئاً وثلاثة دراهم، خرج المالُ تسعة دراهم ونصفاً وثلثاً وخمسةَ أسداسِ السُدسِ. والصوابات في هذه المسألة وما أشبهها أكثر من أن تُحْصى.

<١٧> فإن قيل لك: مالٌ إن زِدْتَه على عشرين درهماً كان له جذرٌ، وإن زِدْتَه على ثلاثين كان له جذرٌ؛ فهذه <المسألةُ> أيضاً غير محدودةٍ.

قياسه: أن تجعل مالَك مالاً إلاّ عشرين درهماً، أو مالاً إلاّ ثلاثين درهماً. فكأنّا جعلناه مالاً إلاّ عشرين درهماً، فَزِدْناه على عشرين، فبلغ مالاً وجذرُه شيءٌ. ثم زِدْناه على ثلاثين فكان مالاً وعشرةَ دراهمَ؛ فيُحتاج أن يكون له جذرٌ، ويكون المالُ أكثرَ من عشرين، فتجعل جذرَه شيئاً ودرهماً وتضربه في مثله، وتقابل بما يجتمع من الضرب مالاً وعشرة دراهمَ، فيخرج المالُ عشرين درهماً وربعاً. فتنقص منه عشرين درهماً، فيبقى ربعُ درهمٍ وهو المالُ المطلوبُ. فإن زِدْتَه على عشرين درهماً كان له جذرٌ، وإن زِدْتَه على ثلاثين كان له جذرٌ. وإن شئتَ قلت: المالُ خمسةٌ وسبعون درهماً ونصفُ ثُمْنٍ، فإن زِدْتَه على عشرين كان له جذرٌ وهو تسعةٌ ونصفٌ وربعٌ، وإن زِدْته على ثلاثين كان له جذر وهو عشرة دراهم وربعٌ. وفي هذه المسألةِ وما أشبهها صوابات كثيرة.

4 عشرة: فوق السطر — 11-12 أو مالاً إلاّ ... عشرين درهماً: في الهامش — 18-19 فمن فـإن ... تسعة ونصف: في الهامش.

<18> Si on te dit : si tu ajoutes à un *carré* dix dirhams, la somme a une racine ; et si tu retranches le *carré* de dix dirhams, la différence a une racine[23].

Si les deux nombres sont égaux dans ce problème et si l'un des deux nombres se partage en deux parties dont chacune a une racine, tu peux trouver pour ce problème d'innombrables solutions. Mais s'il ne se partage pas en deux parties dont chacune a une racine, alors le problème [87r] est irrationnel et n'a pas de solutions. Divise alors le dix en deux parties dont chacune a une racine, c'est-à-dire neuf et un ; prends ensuite la racine de neuf plus la racine de un, ce qui est quatre ; multiplie-le par lui-même, on a seize ; retranches-en dix, il reste six, qui est le *carré* ; si tu l'ajoutes à dix, la somme a une racine, et si tu le retranches de dix, la différence a une racine. La cause de ce problème est établie, car si tu retranches de dix le carré qui est six, il reste quatre ; mais le quatre est le produit de l'excédent de la racine de l'une des deux parties sur la racine de l'autre par lui-même.

<19> Si on dit : si tu retranches un *carré* de huit fois sa racine plus cent dirhams plus neuf dirhams, la différence a une racine, alors, s'il te parvient des problèmes analogues à ce problème, multiplie la moitié <du nombre> des racines par elle-même et ajoute ce produit aux dirhams ; si la somme se partage en deux parties dont chacune a une racine, alors le problème est rationnel et il a des solutions innombrables ; mais si la somme ne se partage pas en deux parties dont chacune a une racine, alors le problème est irrationnel et sans solution[24].

Multiplie donc la moitié du <nombre> de racines par lui-même, soit seize ; ajoute cela à cent neuf, soit cent vingt-cinq. Partage-le en deux parties, dont chacune a une racine ; si tu veux, tu poses l'une des deux parties vingt-cinq et l'autre cent ; si tu veux, tu poses l'une d'elles quatre et l'autre cent vingt et un, et, si tu veux, tu poses deux parties à volonté, comme je te l'ai indiqué.

23 $\begin{cases} 10 + x^2 = y^2 \\ 10 - x^2 = z^2 \end{cases}$

24 $8x + 109 - x^2 = y^2$.

<١٨> فإن قيل لك: مالٌ إن زِدْته على عشرة دراهمَ كان له جذرٌ، وإن نقصته من عشرة دراهمَ كان له جذرٌ.

فإذا استوى العددان في هذه المسألة، وكان أحد العددين ينقسم بقسمين لكل قسمٍ جذرٌ، فإنّه يمكنك أن تخرج لها من الصوابات ما لا يُحْصى، فإن لم يَنْقَسِم بقسمين لكل واحدٍ جذرٌ، فإنّ المسألة / صمّاءُ لا تخرج. فاقسم العشرة ٨٧-و بقسمين، لكل واحدٍ منهما جذرٌ، وهو تسعةٌ وواحدٌ؛ ثم خُذْ جذرَ تسعةٍ، وواحداً، وهو أربعة، فاضربه في مثله، يكن ستةَ عشر. فألْقِ منها العشرةَ، فيبقى ستةٌ وهو المالُ الذي إن زدته على العشرة كان له جذرٌ، وإن نقصته من العشرة كان له جذرٌ. والعلّةُ في هذه المسألةِ قائمةٌ. لأنّك إذا أسقطت المالَ — وهو ستة — من عشرة، بقي أربعة، والأربعة هي من ضربِ فضلِ جذرِ أحدِ القسمين على جذرِ الآخر في نفسه.

<١٩> فإن قيل: مالٌ إن نقصتَه من ثمانية أجذاره ومائة درهمٍ وتسعة دراهم كان له جذر؛ فإذا وَرَدَ عليك من المسائلِ ما يشبه هذه المسألة، فاضربْ نصفَ الأجذار في مثله وزِدْه على الدراهمِ، فإن انقسم ما بلغ منه بقسمين يكون لكلّ واحدٍ منهما جذرٌ، فإنّ المسألةَ مفتوحةً، ويخرجُ لها من الصوابات ما لا يُحْصَى، وإن لم يَنقسِم ما بلغ منه بقسمين، لكلّ واحدٍ منهما جذرٌ، فإنّ المسألةَ صمّاءُ لا تخرج.

فاضرب نصفَ الأجذارِ في مثله يَكنْ ستة عشر، وزِدْها على مائةٍ وتسعة يَكُنْ مائةً وخمسةً وعشرين، فاقسمها بقسمين، لكل واحدٍ منهما جذرٌ. فإن شئتَ جعلتَ أحدَ القسمين خمسةً وعشرين والآخر مائةً، وإن شئت جعلت أحدَهما أربعةً والآخر مائةً وأحداً وعشرين، وإن شئتَ <جعلت> أيَّ قسمين أحببت على ما بيَّنْتُ لك.

7 وواحداً: وواحدٍ — 11 جذر: فوق السطر.

Tu reviens ensuite et tu prends l'une des parties que tu veux, que tu ajoutes à un *carré* ; c'est comme quand nous prenons vingt-cinq que nous ajoutons à un *carré*, on a un *carré* plus vingt-cinq ; tu dis alors : un *carré* plus vingt-cinq dirhams est égal à huit choses plus cent dirhams plus neuf dirhams ; tu retranches vingt-cinq de cent neuf dirhams, il reste un *carré* égal à huit choses plus quatre-vingt-quatre dirhams ; prends la moitié <du nombre> de choses, soit quatre ; multiplie-le par lui-même, soit seize ; ajoute-le à quatre-vingt-quatre, il vient cent, qui est la deuxième partie.

Si en effet nous avons procédé de cette manière et divisé en deux parties dont chacune a une racine, c'est pour que, si nous ajoutons l'une des deux parties au *carré* et que par cette somme nous réduisons les choses [87^{v}] plus les dirhams que nous avons mentionnés, et si nous partageons en deux moitiés <le nombre> de choses, si nous multiplions la moitié par elle-même et l'ajoutons au nombre ou en retranchons le nombre, la somme de cela ou la différence soit la deuxième partie et le reste des racines et des dirhams, lorsque le *carré* en est retranché, la partie qu'on ajoute au *carré*.

Nous revenons ensuite et nous prenons la racine de cent, qui est dix ; nous l'ajoutons à la moitié <du nombre> des racines, qui est quatre ; on a alors quatorze, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est cent quatre-vingt-seize ; retranche-le de huit fois sa racine plus cent dirhams plus neuf dirhams, ce qui est deux cent vingt et un ; il reste donc vingt-cinq, dont la racine est cinq.

Si nous prenons l'autre partie, qui est cent dirhams, que nous ajoutons au *carré* ; si nous réduisons huit racines plus cent dirhams plus neuf dirhams par la somme, on obtient le *carré*, quatre-vingt-un. Si nous prenons l'autre partie, qui est quatre, que nous ajoutons au *carré* ; si nous réduisons huit racines plus cent dirhams plus neuf dirhams par cette somme, on obtient le *carré*, deux cent vingt-cinq. Si nous prenons l'autre partie, qui est cent vingt et un, que nous ajoutons au *carré* ; si nous réduisons huit racines plus cent

ثم ترجع فتأخذ أيَّ الأقسام شِئت فتزيده على مالٍ، فكأنّا أخذنا خمسةً وعشرين فزدناها على مالٍ، فكان مالاً وخمسةً وعشرين، فتقول: مالٌ وخمسةٌ وعشرون درهماً تعدل ثمانيةَ أشياءَ ومائةَ درهمٍ وتسعةَ دراهمَ، فتُسقط خمسة وعشرين من مائةٍ وتسعة دراهم، فيبقى مالٌ يعدل ثمانية أشياءَ وأربعة وثمانين درهماً؛ فنصِّف الأشياء يَكُنْ أربعةً، فاضربها في مثلها تكن ستة عشر. فزِدْها على أربعةٍ وثمانين، يَكُنْ مائة وهو القسم الآخر.

وإنّما دبَّرنا هذا التدبير وقسمناه بقسمين، لكلِّ قسمٍ جذرٌ، لِكَيْمَا إذا زِدْنا أحدَ القسمين على المالِ، وقابلنا به الأشياء / والدراهم التي ذكرنا، ونصَّفْنا ٨٧-ظ الأشياءَ، وضربناه في مثله، وزِدْناه على العددِ أو نقصنا العددَ منه، كان ما يجتمع من ذلك أو ما يبقى هو القسم الآخر، ويكون ما يبقى من الأجذار والدراهم بعد إسقاط المالِ منها هو القسم المزيد على المالِ.

ثم نرجع فنأخذ جذرَ المائةِ — وهو عشرة — فنـــزيده على نصفِ الأجذار وهو أربعة، فيكون أربعة عشر، وهو جذرُ المالِ، والمالُ مائةٌ وستةٌ وتسعون، فأسقِطْه من ثمانية أجذاره ومائة درهمٍ وتسعة دراهمَ، وهو مائتان وأحدٌ وعشرون، فيبقى خمسةٌ وعشرون وجذرُها خمسةٌ.

وإن أخذنا القسمَ الآخر، وهو مائة درهمٍ، وزدناه على المالِ، وقابلنا به ثمانيةَ أجذارٍ ومائةَ درهمٍ وتسعةَ دراهم، خرج المالُ أحداً وثمانين. وإن أخذنا القسمَ الآخر وهو أربعة، وزدناه على المالِ، وقابلنا به ثمانية أجذارٍ ومائةَ درهمٍ وتسعةَ دراهمَ، خرج المالُ مائتين وخمسةً وعشرين. وإن أخذنا القسمَ الآخر وهو مائةٌ وأحد وعشرون، وزِدْناه على المالِ، وقابلنا به ثمانيةَ أجذارٍ ومائة

17 أحداً: أحد.

neuf par cette somme, on obtient le *carré*, si tu veux trente-six et si tu veux quatre. Les solutions de ce problème sont nombreuses.

<20> Si on dit : si tu ajoutes à un *carré* huit fois sa racine, la somme a une racine, et si tu retranches le *carré* de deux fois sa racine, le reste a une racine. Ce problème est également indéterminé[25].

On l'infère ainsi : tu poses les huit racines ajoutées au *carré*, seize choses plus soixante-quatre dirhams, pour que la somme ait une racine qui est une chose plus huit dirhams. Il est permis de poser autre chose que cela, à condition que la somme ait une racine. Si donc les huit racines sont seize choses plus soixante-quatre dirhams, alors nous savons que chaque racine est deux choses plus huit dirhams, et les deux racines, quatre choses plus seize dirhams ; c'est alors comme si on disait : si tu retranches un *carré* de quatre fois sa racine plus seize dirhams, le reste a une racine. Tu procèdes alors comme je te l'ai décrit et on obtient le *carré*, trente-six, il s'agit du *carré* auxiliaire[26]. Tu reviens ensuite pour dire : nous avons posé la racine du *carré*, deux choses plus huit dirhams, ce qui est vingt ; tu divises trente-six [88^{r}] par vingt, on obtient un dirham plus quatre cinquièmes, qui est la racine du *carré* cherché, et le *carré* trois dirhams plus un cinquième plus le cinquième d'un cinquième, ce qui est le *carré* cherché. Si tu lui ajoutes huit fois sa racine, ce qui est vingt-quatre dirhams plus deux cinquièmes, on a dix-sept plus trois cinquièmes plus un cinquième d'un cinquième, dont la racine est quatre dirhams plus un cinquième. Si tu retranches le *carré*, qui est trois dirhams plus un cinquième, plus un cinquième d'un cinquième, du double de sa racine, qui est trois dirhams plus trois cinquièmes, il reste un cinquième plus quatre cinquièmes de cinquième et sa racine est trois cinquièmes. Si tu le fais d'une autre manière, on obtient le *carré* égal à un dirham. Tu peux trouver pour ce problème d'innombrables solutions.

25 $\begin{cases} x^2 + 8x = y^2 \\ 2x - x^2 = z^2 \end{cases}$

26 Litt. : par lequel on considère.

وتسعةً، خرج المالُ إن شئت ستةً وثلاثين وإن شئت أربعةً. والصوابات في هذه المسألة كثيرة.

<٢٠> فإن قال: مالٌ إن زِدْت عليه ثمانيةَ أجذاره كان له جذرٌ، وإن نقصت المالَ من جذرَيه، كان لِما بقي جذرٌ. هذه المسألةُ أيضاً غيرُ محدودةٍ.

وقياسه: أن تجعل الثمانيةَ الأجذار المزيدةَ على المال ستةَ عشر شيئاً وأربعةً وستين درهماً لِكَيْمَا يكون لِما اجتمع جذرٌ، وهو شيءٌ وثمانية دراهمَ. وإن جعلتَ غيرَ هذا جَازَ بعد أن يكون له جذر. فإذا كانت الثمانيةُ الأجذار ستةَ عشر شيئاً وأربعةَ وستين درهماً، فقد علمنا أنَّ كلَّ جذرٍ شيئان وثمانية دراهمَ، والجذران أربعةُ أشياءَ وستة عشر درهماً. فكأنه قال: مالٌ إن نقصته من أربعة أجذاره وستة عشر درهماً كان لِما بقي جذرٌ. فتعمل كما وصفتُ لك، فيخرج المالُ ستةً وثلاثين وهو المالُ المعتبر به. ثم ترجع فتقول: قد كنا جعلنا جذرَ المالِ شيئين وثمانية دراهمَ، وهو عشرون، فتقسم ستةً / وثلاثين على عشرين، فيخرج ٨٨ - و درهم وأربعة أخماسٍ، وهو جذرُ المالِ المطلوب، والمالُ ثلاثة دراهم وخُمْسٌ وخُمْسُ الخُمْسِ، وهو المالُ المطلوب. فإن زِدْت عليه ثمانيةَ أجذاره وهو أربعةٌ وعشرون درهماً وخُمْسان، كان سبعةَ عشر وثلاثةَ أخماسٍ وخُمْسَ الخُمْسِ وجذرُها أربعةُ دراهمَ وخُمْس. وإن نقصت المالَ، وهو ثلاثة دراهم وخُمْسٌ وخُمْسُ الخُمْسِ، من جذريه — وهو ثلاثة دراهم وثلاثة أخماس — بقي خُمْسٌ وأربعة أخماسِ خُمْسٍ، وجذرُه ثلاثة أخماسٍ، وإن عملته من الناحية الأُخرى خرج المالُ درهماً. وقد يُمكنك أن تعمل لهذه المسألةِ من الصوابات ما لا يُحصَى عدداً.

13 درهم: درهماً.

<21> Si on te dit : si tu retranches un *carré* du double de sa racine plus quarante-neuf dirhams, la différence a une racine[27].

Si tu veux, procède comme je te l'ai décrit, et si tu veux, multiplie les deux racines par elles-mêmes ; ce que tu obtiens est le *carré*. Tu fais cela en effet car quarante-neuf a une racine. Si le nombre associé aux racines n'a pas de racine, reviens alors au premier procédé[28] que je t'ai explicité avant ce problème. Ce procédé en effet n'est permis que pour ce qui a une racine et ne conduit qu'à une seule solution, mais le procédé pour ce problème et ses analogues mène à de nombreuses solutions. Si en effet nous multiplions le nombre <des racines> par lui-même et nous posons ce produit égal au *carré*, c'est pour que, si nous retranchons le *carré* des racines plus les dirhams, il reste les dirhams eux-mêmes.

<22> Si on dit : un *carré* ayant une racine, si tu lui ajoutes sa racine, la somme a une racine, et si tu en retranches sa racine, le reste a une racine, alors ce problème est également indéterminé[29].

La méthode en cela est de chercher un nombre ayant une racine tel que, si tu lui ajoutes un autre nombre, la somme aura une racine ; et si tu en retranches le même nombre, la différence a une racine. Si tu trouves ce nombre, tu le divises par le nombre ajouté ; ce qu'on obtient est la racine du *carré*. Le nombre ayant une racine est vingt-cinq, le nombre ajouté est vingt-quatre et le nombre retranché est vingt-quatre. [88^{v}] Tu sais en effet que, si tu ajoutes vingt-quatre à vingt-cinq, on a quarante-neuf, dont la racine est sept ; et si tu retranches vingt-quatre de vingt-cinq, il reste un, dont la racine est un. Si tu veux savoir quelle est la racine du *carré*, tu divises vingt-cinq par vingt-quatre ; on obtient un dirham plus un tiers de huitième, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est un dirham plus un demi-sixième plus une partie de cinq cent soixante-seize parties de dirham ; si tu lui ajoutes sa racine, c'est-à-dire un plus un tiers de huitième, il vient deux

[27] $2x + 49 - x^2 = y^2$.

[28] Voir problème <19>.

[29] $\begin{cases} x^2 + x = y^2 \\ x^2 - x = z^2 \end{cases}$

<٢١> فإن قيل لك: مالٌ إن نقصته من جذريه وتسعة وأربعين درهماً كان له جذرٌ.

فإن شئتَ فاعمل كما وصفتُ لك. وإن شئت فاضربْ الجذرين في مثلِهما فما كان فهو المالُ. وإنّما فعلت ذلك لأن التسعةَ والأربعين لها جذرٌ، فإن لم يكُن للعددِ الذي مع الأجذار جذرٌ، فارجع إلى العملِ الأوّل الذي فسّرتُ لك قبل هذه المسألةِ. فإن هذا العملَ لا يجوز إلاّ فيما كان له جذرٌ ولا يعدو صواباً واحداً. والعملُ لهذه المسألة وما أشبهها يَخرج بصوابات كثيرةٍ. وإنّما ضربنا الأجذارَ في هذه المسألةِ في مثلها، وجعلنا ما يجتمع من ذلك هو المال، لِكَيْمَا إذا نقصنا المالَ من الأجذار والدراهم بقيت الدراهمُ بِعَيْنِها.

<٢٢> فإن قال "مالٌ له جذرٌ، إن زِدْتَ عليه جذرَه كان لما اجتمع جذرٌ، وإن نقصتَ منه جذرَه كان لما بقي جذرٌ". هذه المسألةُ أيضاً غيرُ محدودةٍ.

والوجهُ فيها أن تطلب عدداً له جذرٌ إذا زِدْتَ عليه عدداً آخر كان له جذر، وإن نقصت منه مثل ذلك العددِ كان له جذرٌ. فإذا وجدتَ ذلك العددَ قسمتَه على العددِ المَزيدِ، فما خرج فهو جذرُ المالِ. والعددُ الذي له جذرٌ خمسةٌ وعشرون: والعددُ المزيدُ عليه أربعةٌ وعشرون، والعددُ المنقوصُ منه أربعةٌ وعشرون. / فأنت تعلم أنّك إذا زِدْتَ أربعةً وعشرين على خمسةٍ وعشرين، ٨٨-ظ كان تسعةً وأربعين، وجذرُها سبعة، وإن نقصتَ أربعةً وعشرين من خمسةٍ وعشرين بقي واحدٌ، وجذره واحدٌ. فإن أردتَ أن تعلم كَم هو جذر المالِ، قسمتَ خمسةً وعشرين على أربعةٍ وعشرين، فيخرج درهم وثُلْثُ ثُمْنٍ وهو جذرُ المالِ، والمالُ درهمٌ ونصفُ سُدْسٍ وجزءٌ من خمسمائةٍ وستة وسبعين جزءاً من درهمٍ. فإن زِدْت عليه جذره — وهو واحدٌ وثلثُ ثُمْنٍ — صار درهمين

4 مثلهما: مثلها — 6-7 ولا يعدو: ولا يعدوا — 19 فيخرج درهم: خرج درهماً.

dirhams plus un huitième plus une partie de cinq cent soixante-seize parties de dirham, qui a une racine, qui est un plus un tiers plus un demi-sixième plus un tiers de huitième ; si tu en retranches sa racine, c'est-à-dire un plus un tiers de huitième, il reste vingt-cinq parties de cinq cent soixante-seize parties de dirham, qui a une racine qui est un huitième plus un demi-sixième.

Si tu veux, tu poses le nombre cherché, ayant une racine, cent soixante-neuf, le nombre qui lui est ajouté, cent vingt et le nombre qui lui est retranché cent vingt. Mais tu sais que, si tu ajoutes cent vingt à cent soixante-neuf, la somme a une racine, qui est dix-sept ; et si tu retranches cent vingt de cent soixante-neuf, le reste a une racine, qui est sept. Si tu veux connaître quel est le *carré*, tu divises cent soixante-neuf par cent vingt ; on obtient un dirham plus un cinquième plus un huitième plus un demi-sixième, qui est la racine du *carré*, et le *carré*, un dirham plus quatorze mille cent soixante et une parties de quatorze mille quatre cents parties de dirham. Si tu lui ajoutes sa racine, qui est un dirham plus un cinquième plus un huitième plus un demi-sixième, on a trois dirhams plus cinq mille six cent quarante et une parties de quatorze mille quatre cents parties de dirham, qui a une racine, qui est un dirham plus cent parties et une partie de cent vingt parties de dirham ; si tu en retranches sa racine, c'est-à-dire un dirham plus un cinquième plus un huitième plus un demi-sixième, il reste huit mille deux cent quatre-vingt-une parties de quatorze mille quatre cents parties de dirham, ce qui a une racine, qui est quatre-vingt-onze parties de cent vingt parties d'unité. Ce problème et ses analogues ont d'innombrables solutions [89r] ; nous t'avons indiqué le procédé subtil pour déterminer ces nombres, et ceux d'entre eux que tu veux te mènent à des solutions à volonté, si Dieu le veut.

Nous t'exposons comment déterminer également ces nombres, pour que cela soit enraciné en toi. Je t'apprends que, tout *carré* ayant une racine, si tu lui ajoutes deux de ses racines plus un dirham, la somme aura une

وثُمْناً وجزءاً من خمسمائةٍ وستةً وسبعين جزءاً من درهمٍ وله جذرٌ، وهو واحدٌ <وثلث ونصف سدسٍ> وثلثُ ثُمْنٍ، وإن نقصتَ منه جذره وهو واحدٌ وثُلْثُ ثُمْنٍ، بقي خمسةٌ وعشرون جزءاً من خمسمائةٍ وستة وسبعين جزءاً من درهمٍ، وله جذر، وهو ثُمْنٌ ونصفُ سُدْسٍ.

وإن شئتَ جعلتَ العددَ المطلوبَ الذي له جذرٌ مائةً وتسعةً وستين، والعددَ المزيدَ عليه مائةً وعشرين، والعددَ المنقوصَ منه مائةً وعشرين. وأنت تعلم أنّك إذا زِدْتَ على مائةٍ وتسعةٍ وستين مائةً وعشرين، كان لِما اجتمع جذرٌ وهو سبعةَ عشر، وإذا نقصت من مائةٍ وتسعةٍ وستين مائةً وعشرين، كان لِما بقي جذرٌ، وهو سبعة. فإذا أردتَ أن تعلم كم المالُ، قسمتَ مائةً وتسعةً وستين على مائةٍ وعشرين، فيخرج درهم وخُمْسٌ وثُمْن ونصفُ سُدْسٍ، وهو جذرُ المال، والمالُ درهمٌ وأربعة عشر ألفاً ومائةٌ وأحد وستّون جزءاً من أربعةَ عشرَ ألفاً وأربعمائةِ جزءٍ من درهمٍ. فإن زِدْتَ عليه جذره، وهو درهمٌ وخمسٌ وثُمْنٌ ونصف سدسٍ، كان ثلاثة دراهم وخمسة آلاف وستمائة وأحداً وأربعين جزءاً من أربعة عشر ألفاً وأربعمائة جزءٍ من درهمٍ، وله جذرٌ وهو درهمٌ ومائةُ جزءٍ وجزءٌ من مائةٍ وعشرين جزءاً من درهمٍ. وإن نقصتَ منه جذرَه — وهو درهمٌ وخُمْسٌ وثُمْنٌ ونصفُ سدسٍ — بقي ثمانيةُ آلاف ومائتان وأحدٌ وثمانون جزءاً من أربعة عشر ألفاً وأربعمائة جزءٍ من درهمٍ، وله جذرٌ، وهو واحدٌ وتسعون جزءاً من مائةٍ وعشرين جزءاً من واحدٍ. ولهذه المسألةِ وما أشبهها صوابات كثيرة لا تُحصى، / وقد أوضحنا لك الحيلةَ في استخراج هذه الأعدادِ، وما أردتَ منها يخرج لك من الصَّوابات ما أحببت إن شاء الله. ٨٩-و

ونحن نُخْبِرُك باستخراجِ هذه الأعدادِ أيضاً لترسخَ في قلبِك، وقد أعْلَمْتُك أنّ كلَّ مالٍ، له جذرٌ، إذا زِدْتَ عليه جذريه ودرهماً كان له جذرٌ، فتنقص من

1 وثمناً: وثمن / وجزءاً: وجزء — 10 درهم وخمس وثمن: درهماً وخمساً وثمنا — 13 وأحداً: واحد.

racine ; tu retranches du *carré* deux de ses racines et un dirham et tu dis : faisons comme si ses deux racines plus un dirham était le nombre que tu cherches ; il reste un *carré* moins deux racines moins un dirham. Nous savons que sa racine est plus petite qu'une chose ; tu la poses une chose moins deux dirhams, tu la multiplies par elle-même, on a donc un *carré* plus quatre dirhams moins quatre choses égal à un *carré* moins deux racines et un dirham ; tu réduis par ceci, la chose sera égale à deux dirhams et demi, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est six dirhams plus un quart. Mais nous avons posé le nombre qui lui est ajouté deux racines plus un dirham, c'est-à-dire six, car la racine est deux plus un demi ; le nombre cherché devient donc six plus un quart, le nombre qui lui est ajouté est six, et le nombre qui en est retranché, six ; tu les développes en quarts, le nombre cherché sera vingt-cinq, le nombre qui lui est ajouté vingt-quatre et le nombre qui en est retranché vingt-quatre. Si tu poses la racine du *carré* moins deux choses et un dirham, une chose moins un dirham et demi, que tu multiplies par elle-même, on a un *carré* plus deux dirhams plus un quart moins trois choses égal à un *carré* moins deux choses et un dirham ; tu réduis par ceci, la chose sera égale à trois dirhams plus un quart ; tu les développes en quarts, on a treize, qui est la racine du *carré* cherché ayant une racine, c'est-à-dire <la racine de> cent soixante-neuf, dont chaque seize est une unité ; le nombre qui lui est ajouté est deux racines plus un dirham, c'est-à-dire sept plus un demi, car la racine est trois dirhams et un quart dont chaque dirham était seize parties ; cela est cent vingt parties. Tu procèdes ensuite comme je te l'ai appris, si Dieu le veut.

<23> Si on te dit : un *carré* ayant une racine, si tu lui ajoutes le double de sa racine, la somme a une racine, et si tu en retranches le triple de sa racine, la différence a une racine[30], il est nécessaire de chercher un nombre ayant une racine tel que, si tu lui ajoutes un autre nombre, la somme ait une racine, et si tu en retranches une fois et demi ce nombre [89^{v}], le reste ait une racine, car le triple de la racine est égal aux deux racines et demie. Si tu trouves ce nombre, tu le divises par la moitié du nombre ajouté ou par le tiers du nombre retranché ; ce que tu obtiens est la racine du *carré*. Le nombre ayant une racine est cent vingt et un, le nombre qui lui est ajouté est quarante-huit et le nombre qui en est retranché est soixante-douze ; si tu

30 $\begin{cases} x^2 + 2x = y^2 \\ x^2 - 3x = z^2 \end{cases}$

المال جذريه ودرهماً وتقول: كأنّ جذريه ودرهماً هو العدد الذي تطلبُ، فيبقى مالٌ إلاّ جذرين وإلاّ درهماً. فقد علمنا أنّ جذرَه أقلُّ من شيءٍ. فتجعله شيئاً إلاّ درهمين، وتضربه في مثلِه، فيكون: مالاً وأربعةَ دراهم إلاّ أربعةَ أشياء تعدل مالاً إلاّ جذرين ودرهماً. فتقابل بها، فيكون الشيءُ يعدل درهمين ونصفاً، وهو جذرُ المالِ، والمالُ ستةُ دراهم وربعٌ. وكنّا جعلنا العددَ المزيدَ عليه جذرين ودرهماً، وهو ستةٌ، لأن الجذرَ اثنان ونصف؛ فصار العددُ المطلوبُ ستةً وربعاً، والعددُ المزيدُ عليه ستةً، والعددُ المنقوصُ منه ستةً، فتَبْسطُها أرباعاً، يَكُنْ العددُ المطلوب خمسةً وعشرين، والعددُ المزيد عليه أربعةً وعشرين، والعدد المنقوص منه أربعةً وعشرين. وإن جعلتَ جذرَ مالٍ إلاّ شيئين ودرهماً، شيئاً إلاّ درهماً ونصفاً، وضربتَه في مثله كان مالاً ودرهمين وربعاً إلاّ ثلاثة أشياء يعدل مالاً إلاّ شيئين ودرهماً. فتقابل بها، فيكون الشيءُ يعدل ثلاثةَ دراهمَ وربعاً. فتبسطها أرباعاً، فيكون ثلاثة عشر، وهو جذرُ المالِ المطلوب الذي له جذر، وهو مائةٌ وتسعةٌ وستون، كلُّ ستةِ عشر منه واحدٌ، والعددُ المزيد عليه هو جذران ودرهم، وهو سبعة ونصف؛ لأنّ الجذرَ ثلاثةُ دراهم وربع، كلُّ درهمٍ ستة عشر جزءاً، يكون ذلك مائةً وعشرين جزءاً. ثم تعمل فيما بعد ذلك كما أعلمتك إن شاء الله.

<٢٣> فإن قيل لك: مالٌ له جذر، إن زِدْتَ عليه جذريه كان له جذرٌ وإن نقصتَ منه ثلاثةَ أجذاره كان له جذرٌ، فتحتاج إلى أن تطلب عدداً له جذر، إن زِدْتَ عليه عدداً آخر كان له جذرٌ، وإن نقصتَ منه مثل ذلك العدد ومثل نصفه كان / لِما بقي جذرٌ، لأنّ الثلاثةَ الأجذارِ مثلُ الجذرين ومثلُ ٨٩-ظ نصفهما. فإذا وجدتَ ذلك العدد قسمتَه على نصفِ العددِ المزيد، أو على ثلثِ العددِ المنقوص، فما خرج فهو جذرُ المالِ. والعددُ الذي له جذرٌ مائةٌ وأحدٌ وعشرون، والعددُ المزيدُ عليه ثمانيةٌ وأربعون، والعددُ المنقوص منه اثنان

7 يكن: جزم الفعل على تقدير شرط محذوف، أي: إن تبسطها.

veux savoir quel est le *carré*, tu divises cent vingt et un, si tu veux par la moitié de quarante-huit et si tu veux par le tiers de soixante-douze, c'est-à-dire vingt-quatre ; ce que tu obtiens sera cinq plus un tiers d'un huitième, ce qui est la racine du *carré* et le *carré*, vingt-cinq dirhams plus un quart plus un sixième plus une partie de cinq cent soixante-seize parties de dirham. Si tu lui ajoutes le double de sa racine, c'est-à-dire dix dirhams plus un demi-sixième, il vient trente-cinq dirhams plus un demi plus une partie de cinq cent soixante-seize parties de dirham, qui a une racine qui est cinq dirhams plus un demi plus un tiers plus un huitième. Si tu retranches du *carré* le triple de sa racine, c'est-à-dire quinze dirhams et un huitième, il reste dix dirhams plus un sixième plus un huitième plus une partie de cinq cent soixante-seize parties de dirham, qui a une racine qui est trois dirhams plus un huitième plus un demi-sixième.

Si tu veux, tu poses le nombre cherché qui a une racine, quarante-neuf, le nombre qui lui est ajouté, trente-deux, et le nombre qui en est retranché quarante-huit. Tu divises ensuite quarante-neuf par seize, on obtient trois dirhams plus un demi-huitième de dirham, ce qui est la racine du *carré*, et le *carré*, neuf dirhams plus trois huitièmes plus une partie de deux cent cinquante-six parties de dirham.

Si tu veux, tu poses le nombre qui a une racine, six cent vingt-cinq, le nombre qui lui est ajouté, trois cent trente-six et le nombre qui en est retranché, cinq cent quatre. Tu divises ensuite six cent vingt-cinq par la moitié de trois cent trente-six ou par le tiers de cinq cent quatre, c'est-à-dire cent soixante-huit ; on obtient trois dirhams plus deux tiers plus un quart de septième plus un huitième de septième, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est treize dirhams plus cent quarante et une [90^r] parties de cent soixante-huit parties de dirham plus vingt-cinq parties de vingt-huit mille deux cent vingt-quatre parties de dirham. Si tu lui ajoutes le double de sa racine, c'est-à-dire sept dirhams plus soixante-quatorze parties de cent soixante-huit

وسبعون. فإذا أردت أن تعلم كم المال، قسمت مائةً وأحداً وعشرين: إن شئت على نصف الثمانيةِ وأربعين، وإن شئت على ثلثِ اثنين وسبعين وهو أربعة وعشرون، فما خرج يكون خمسةً وثلثَ ثُمْنٍ وهو جذرُ المالِ، والمالُ خمسةٌ وعشرون درهماً وربعٌ وسدسٌ وجزءٌ من خمسمائةٍ وستة وسبعين جزءاً من درهم. فإن زِدْتَ عليه جذرَيه وهو عشرة دراهم ونصفُ سدسٍ، صار خمسةً وثلاثين درهماً ونصفاً وجزءاً من خمسمائةٍ وستة وسبعين جزءاً من درهمٍ، ولها جذر وهو خمسةُ دراهم ونصفٌ وثلثٌ وثمنٌ. وإن نقصتَ من المال ثلاثةَ أجذاره – وهو خمسة عشر درهماً وثُمْنٌ – بقي عشرةُ دراهم وسدسٌ وثمنٌ وجزءٌ من خمسمائةٍ وستةٍ وسبعين جزءاً من درهمٍ، ولها جذر، وهو ثلاثةُ دراهم وثمنٌ ونصفُ سدسٍ.

وإن شئت جعلت العددَ المطلوب، الذي له جذر، تسعةً وأربعين، والعددَ المزيدَ عليه اثنين وثلاثين، والعدد المنقوصَ منه ثمانيةً وأربعين. ثم تقسم تسعةً وأربعين على ستةَ عشرَ، فيخرج ثلاثةُ دراهم ونصفُ ثمنِ درهمٍ، وهو جذرُ المالِ، والمالُ تسعة دراهم وثلاثة أثمان وجزء من مائتين وستة وخمسين جزءاً من درهم.

وإن شئت جعلت العددَ الذي له جذر ستّمائة وخمسةً وعشرين، والعددَ المزيدَ عليه ثلاثمائة وستةً وثلاثين والعدد المنقوص منه خمسمائةٍ وأربعة. ثم تقسم ستمائةٍ وخمسةً وعشرين على نصفِ ثلاثمائةٍ وستة وثلاثين، أو ثلثِ خمسمائةٍ وأربعة، وهو مائةٌ وثمانية وستون، فيخرج ثلاثة دراهم، وثلثان، وربعُ سُبْعٍ، وثُمْنُ سُبْعٍ، وهو جذر المالِ، والمالُ ثلاثةَ عشرَ درهماً ومائةٌ وأحدٌ / وأربعون ٩٠-و جزءاً من مائةٍ وثمانية وستين جزءاً من درهمٍ، وخمسة وعشرُون جزءاً من ثمانية وعشرين ألفاً ومائتين وأربعةً وعشرين جزءاً من درهمٍ. فإن زِدْتَ عليه جذريه – وهو سبعةُ دراهم وأربعةٌ وسبعون جزءاً من مائةٍ وثمانية وستين جزءاً من

1 وأحداً: واحد – 6 وجزءاً: وجزء – 20 ثلاثة: ثمانية – 21 وعشرون: وعشرين.

parties de dirham, il vient vingt et un dirhams plus quarante-sept parties de cent soixante-huit parties de dirham plus vingt-cinq parties de vingt-huit mille deux cent vingt-quatre parties de dirham, qui a une racine qui est quatre dirhams plus cent trois parties de cent soixante-huit parties de dirham ; si tu retranches du *carré* le triple de sa racine, c'est-à-dire onze dirhams plus vingt-sept parties de cent soixante-huit parties de dirham, il reste deux dirhams plus cent quatorze parties de cent soixante-huit parties de dirham, plus vingt-cinq parties de vingt-huit mille deux cent vingt-quatre parties de dirham, qui a une racine qui est un dirham plus cent sept parties de cent soixante-huit parties de dirham. La recherche de ces nombres t'est facile. Je t'ai montré cela auparavant.

Je t'ai appris que chaque *carré* a une racine, alors, si tu lui ajoutes le double de sa racine et un dirham, la somme a une racine, qui est une chose plus un dirham. Tu poses le nombre ajouté au *carré*, deux choses plus un dirham, et le nombre qui en est retranché est trois choses plus un dirham et demi. Tu ôtes du *carré* le triple de sa racine plus un dirham et demi, il reste un *carré* moins le triple de sa racine et un dirham et demi. Pose la racine du reste une chose moins deux dirhams, multiplie-la par elle-même, il vient un *carré* plus quatre dirhams moins quatre choses égal à un *carré* moins trois choses moins un dirham et demi ; tu réduis par ceci, la chose sera cinq et demi et le *carré*, trente et un quart. Mais comme nous avons posé le nombre ajouté <au *carré*> deux choses plus un dirham, c'est-à-dire douze, et posé le nombre qui en est retranché, trois choses plus un dirham et demi, c'est-à-dire dix-huit, développe-les, tous, en quarts ; il vient le nombre cherché ayant une racine, cent vingt et un, le nombre qui lui est ajouté, quarante-huit, [90^{v}] et le nombre qui en est retranché soixante-douze. Tu procèdes ensuite comme je te l'ai décrit en d'autres endroits, si Dieu le veut.

درهمٍ — صار واحداً وعشرين درهماً وسبعةً وأربعين جزءاً من مائةٍ وثمانية وستين جزءاً من درهمٍ، وخمسةً وعشرين جزءاً من ثمانية وعشرين ألفاً ومائتين وأربعة وعشرين جزءاً من درهم، ولها جذرٌ وهو أربعةُ دراهم ومائةُ جزءٍ وثلاثةُ أجزاءٍ من مائةٍ وثمانية وستين جزءاً من درهم. فإن نقصتَ من المالِ ثلاثةَ أجذارِه، وهو أحد عشر درهماً، وسبعة وعشرون جزءاً من مائة وثمانية وستين جزءاً من درهمٍ، بقي درهمان ومائةٌ وأربعة عشر جزءاً من مائةٍ وثمانية وستين جزءاً من درهمٍ، وخمسة وعشرون جزءاً من ثمانية وعشرين ألفاً ومائتين وأربعة وعشرين جزءاً من درهمٍ، وله جذرٌ وهو درهمٌ ومائةٌ وسبعة أجزاءٍ من مائةٍ وثمانية وستين جزءاً من درهم. وطَلَبُ هذه الأعدادِ يَسْهُل عليك. وقد بيّنْتُ <ذلك> لك فيما تقدّم.

قد أعلمتُك أنّ كلَّ مالٍ له جذرٌ، فإنّك إذا زِدْت عليه جذريه ودرهماً كان له جذرٌ، وهو شيءٌ ودرهمٌ. فتجعل العددَ المزيدَ على المالِ شيئين ودرهماً، والعددَ المنقوصَ منه ثلاثةَ أشياء ودرهماً ونصفاً. فتُسقط من المالِ ثلاثة أجذار ودرهماً ونصفاً، فيبقى مالٌ إلاّ ثلاثة أجذار ودرهماً ونصفاً، فاجعل جذرَه شيئاً إلاّ درهمين، واضربه في مثله يَكُنْ: مالاً وأربعةَ دراهم إلاّ أربعة أشياء يعدل مالاً إلاّ ثلاثة أشياء ودرهماً ونصفاً. فتقابل به، فيكون الشيءُ خمسةً ونصفاً والمالُ ثلاثين وربعاً. وكما جعلنا العددَ المزيد عليه شيئين ودرهماً، وهو اثنا عشر، وجعلنا <العدد> المنقوصَ منه ثلاثةَ أشياء ودرهماً ونصفاً، وهو ثمانية عشر، فأبسطها أرباعاً كُلَّها، يكن العددُ المطلوب الذي له جذرَ مائة وواحداً وعشرين، والعددُ المزيد عليه ثمانية / وأربعون، والعدد المنقوص منه اثنان وسبعون. ثم تعمل ٩٠-ظ بعد كما وصفتُ لك في غير موضعٍ إن شاء الله.

4 وثمانية: وثلاثة — 7 وعشرون: وعشرين — 13 أشياء: أجذاره.

<24> Si on dit : un *carré* ayant une racine, si tu le retranches de dix fois sa racine moins huit dirhams, la différence a une racine[31] ; si un tel problème te parvient, multiplie la moitié du nombre des racines par elle-même et retranche du produit les dirhams ; si le reste se partage en deux parties dont chacune a une racine, alors le problème a des solutions à volonté ; et si le reste ne se partage pas en deux parties dont chacune a une racine, alors le problème est irrationnel, sans solution. S'il en est ainsi, si tu multiplies la moitié du nombre des racines par elle-même et si le produit est égal au nombre de dirhams ou plus petit que lui, le problème est impossible. Multiplie la moitié du nombre des racines par elle-même, ce qui est cinq dans ce problème, soit vingt-cinq ; retranches-en les huit dirhams, il reste dix-sept. Partage-le en deux parties dont chacune a une racine, qui sont seize et un. Tu dis ensuite, si tu veux : un *carré* plus seize dirhams est égal à dix racines moins huit dirhams, ou un *carré* plus un dirham est égal à dix racines moins huit dirhams. C'est comme si tu disais : un *carré* plus seize dirhams est égal à dix racines moins huit dirhams, il en résultera le *carré*, si tu veux trente-six et si tu veux seize. Et si tu dis : un *carré* plus un dirham est égal à dix racines moins huit dirhams, il en résulte le *carré*, si tu veux quatre-vingt-un ou, si tu veux, un.

<25> Si on te dit : un *carré* ayant une racine, si tu le retranches de deux cent soixante dirhams moins six fois sa racine, le reste a une racine[32]. Si un tel problème ou l'un de ses analogues te parvient, multiplie alors la moitié du nombre des racines par elle-même et ajoute le produit aux dirhams. Si cette somme se partage en deux parties dont chacune a une racine, alors le problème a des solutions à volonté ; si elle ne se partage pas ainsi, alors le problème est irrationnel, sans solution. Multiplie la moitié du nombre des racines, qui est trois dans ce problème, par elle-même, on a neuf ; ajoute le produit à deux cent soixante, il vient deux cent soixante-neuf. Partage cette somme en deux parties dont chacune a une racine, qui sont cent soixante-neuf et cent. Tu dis ensuite, si tu veux : un *carré* plus cent soixante-neuf dirhams est égal à deux cent soixante dirhams moins six choses ; et si tu

[31] $10x - x^2 - 8 = y^2$.
[32] $260 - 6x - x^2 = y^2$.

<٢٤> فإن قيل: مالٌ له جذر إن نقصته من عشرةِ أجذاره إلاّ ثمانية دراهم كان له جذرٌ، فإذا وَرَدَتْ عليك مثلُ هذه المسألة، فاضرب نصفَ الأجذار في مثله، وألْقِ ممّا اجتمع الدراهمَ، فإن انقسم ما بقي بقسمين لكل واحدٍ جذرٌ، فإن المسألةَ يخرج لها ما أردتَ من الصوابات، وإن لم ينقسم ما بقي بقسمين، لكلّ قسمٍ جذرٌ، فإنّ المسألةَ صمّاءُ لا تخرج. وإن كان، إذا ضربت نصفَ الأجذارِ في مثلِها، المجتمعُ مثلَ الدراهمِ أو أقلّ فالمسألة محالٌ. فاضرب نصفَ الأجذارِ في مثلها، وهي في هذه المسألةِ خمسة، تكن خمسةً وعشرين، فألقِ منها الثمانيةَ الدراهم يبقَ سبعة عشر. فاقسمها بقسمين لكلّ قسمٍ جذرٌ، وهما ستةُ عشر وواحدٌ. ثمّ تقول، إن شئتَ: مالٌ وستةُ عشر درهماً يعدلُ عشرةَ أجذارٍ إلاّ ثمانية دراهم، أو مالٌ ودرهمٌ يعدلُ عشرةَ أجذارٍ إلاّ ثمانية دراهم. فكأنّك قلت: مالٌ وستّةُ عشر درهماً يعدل عشرة أجذارٍ إلاّ ثمانية دراهم، فيخرج المالُ، إن شئتَ، ستةً وثلاثين، وإن شئتَ، ستة عشر. وإن قلت: مالٌ ودرهمٌ يعدلُ عشرةَ أجذارٍ إلاّ ثمانية دراهم خرج المالُ، إن شئت، واحداً وثمانين، وإن شئتَ واحداً.

<٢٥> فإن قيل لك: مالٌ، له جذرٌ إن نقّصته من مائتين وستين درهماً إلاّ ستة أجذاره، كان لما بقي جذرٌ، فإذا ورد عليك مثلُ هذه المسألةِ وما أشبهها، فاضرب نصفَ الأجذار في مثله وزِدْه على الدراهم. فإن انقسمَ المجتَمِعُ بقسمين، لكلّ قسمٍ جذرٌ، فإنّ المسألةَ يخرج لها ما أردتَ من الصوابات. وإن لم ينقسم كذلك فالمسألةُ صمّاءُ لا تخرج. فاضرب نصفَ الأجذار، وهو في هذه المسألة ثلاثةٌ، في مثله يكنْ تسعة. فَزِدْها على مائتين وستين يكن مائتين وتسعة وستين. فاقسمها بقسمين لكلّ قسمٍ جذرٌ وهما مائةٌ وتسعةٌ وستون ومائةٌ. ثم تقول، إن شئت: مالٌ ومائةٌ وتسعةٌ وستون درهماً تعدل مائتين وستين درهماً إلاّ

2 مثل: فوق السطر — 8 يبقَ: يبقى — 11 فكأنك ... ثمانية دراهم: في الهامش.

veux, dis alors [91r] : un *carré* plus cent dirhams est égal à deux cent soixante dirhams moins six choses. C'est comme si tu disais : un *carré* plus cent soixante-neuf dirhams est égal à deux cent soixante dirhams moins six choses ; on obtient le *carré* quarante-neuf. Mais si tu dis : un *carré* plus cent dirhams égal à deux cent soixante dirhams moins six choses, il en résulte le *carré* égal à cent dirhams.

<26> Si on te dit : un *carré* ayant une racine, si tu lui ajoutes le double de sa racine, et si tu ajoutes à la somme le triple de sa racine, la somme a une racine[33].

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* un *carré*, tu lui ajoutes le double de sa racine, on a un *carré* plus deux racines et cela a une racine qui est une chose et un demi. Sa racine sera une chose et un demi, car les trois racines sont égales à une fois et demie deux racines. Multiplie une chose et un demi par elle-même, on a deux *carrés* plus un quart <de *carré*> égaux à un *carré* plus deux racines. Réduis par cette somme, on a la racine du *carré*, un dirham et trois cinquièmes ; le *carré* est deux dirhams plus deux cinquièmes plus quatre cinquièmes de cinquième. Si tu lui ajoutes le double de sa racine, qui est trois plus un cinquième, il vient cinq dirhams plus trois cinquièmes plus quatre cinquièmes de cinquième. On sait que sa racine est égale à la racine du premier *carré* plus sa moitié, ce qui est deux dirhams plus deux cinquièmes, et que les deux racines sont égales à un *carré* plus son quart. Il faut que trois racines de cinq dirhams plus trois cinquièmes plus quatre cinquièmes de cinquième soient aussi égales à elles-mêmes[34] plus leur quart, ce qui est sept plus un cinquième ; et lorsqu'on l'ajoute à cinq dirhams plus trois cinquièmes et quatre cinquièmes de cinquième, on a douze plus quatre cinquièmes plus quatre cinquièmes de cinquième. Or on sait que la racine <de cette somme> est égale à la racine, plus la moitié de la racine de cinq plus trois cinquièmes et quatre cinquièmes de cinquième, ce qui est trois dirhams plus trois cinquièmes. Il faut que quatre racines plus la moitié de la racine de douze plus quatre cinquièmes plus quatre cinquièmes de cinquième soient aussi égales à elles-mêmes plus leur quart, ce qui est seize plus un cinquième ; et lorsqu'on l'ajoute à douze plus quatre cinquièmes et quatre cinquièmes de cinquième, on a vingt-neuf plus quatre cinquièmes de cinquième. On sait que sa racine est égale à la racine, plus la moitié de la

33 $\begin{cases} x_1^2 + 2x_1 = x_2^2 \\ x_2^2 + 3x_2 = x_3^2 \end{cases}$

34 C'est-à-dire à cinq dirhams plus trois cinquièmes plus quatre cinquièmes de cinquième.

ستة أشياء، وإن شئتَ، فقلْ:/ مالٌ ومائة درهمٍ تعدل مائتين وستين درهماً إلاّ ٩١-و
ستة أشياء. فكأنّك قلتَ: مالٌ ومائةٌ وتسعةٌ وستون درهماً تعدلُ مائتين وستين درهماً إلاّ ستة أشياء، فيخرج المالُ تسعةً وأربعين. وإن قلتَ: مالٌ ومائةُ درهمٍ يعدل مائتين وستين درهماً إلاّ ستة أشياء، خرج المالُ مائةَ درهمٍ.

<٢٦> فإن قيل لك: مالٌ له جذرٌ، إن زِدْت عليه جذرَيه كان له جذرٌ، وإن زِدْت على ما اجتمع ثلاثةَ أجذاره كان له جذرٌ.

قياسه: أن تجعل مالَك مالاً فتزيد عليه جذريه فيكون مالاً وجذرين، وله جذرٌ وهو شيءٌ ونصفٌ. وإنّما صار جذرُه شيئاً ونصفاً، لأنّ الثلاثةَ الأجذار مثل الجذرين مرّةً ونصفاً. فاضربْ شيئاً ونصفاً في مثله يكُنْ: مالين وربعاً يعدلُ مالاً وجذرين. فتقابل بها، فيكون جذرُ المالِ درهماً وثلاثة أخماسٍ. والمالُ درهمان وخُمسان وأربعة أخماس الخُمْسِ. فإذا زِدت عليه جذريه — وهو ثلاثةٌ وخُمْسٌ — صار خمسةَ دراهم وثلاثةَ أخماسٍ وأربعةَ أخماسِ الخُمْسِ. فمعلومٌ أنّ جذرَه مثلُ جذرِ المالِ الأوّل ومثلُ نصفِه، وهو درهمان وخمسان، وأنّ الجذرين مثلُ المالِ ومثلُ ربعِه. وواجبٌ أن تكون ثلاثة أجذار خمسة دراهم وثلاثة أخماسٍ وأربعة أخماسِ الخمسِ أيضاً مثلَها ومثل ربعها وهو سبعة وخُمس؛ وأنّها متى زِيدَت على خمسةِ دراهم وثلاثةِ أخماسٍ وأربعةِ أخماسِ الخمسِ كان اثني عشر <وأربعة أخماس> وأربعة أخماس الخُمسِ. ومعلومٌ أن جذرَها هو مثل جذر ونصف جذر خمسةٍ وثلاثة أخماس، وأربعة أخماس الخمسِ، وهو ثلاثة دراهم وثلاثة أخماسٍ. وواجبٌ أن يكون أربعة أجذار ونصف جذرِ اثني عشر وأربعة أخماسٍ وأربعة أخماس الخمس مثلها ومثل ربعها، وهو ستة عشر وخُمس، وأنّها متى زِيدَت على اثني عشر وأربعةِ أخماسٍ وأربعةِ أخماسِ الخمسِ، كان تسعةً وعشرين وأربعةَ أخماس الخمسِ. فمعلومٌ أنّ جذرَها مثلُ جذرِ ونصف جذرِ اثني عشر وأربعة

12 أخماس (الأولى): فوق السطر — 16-17 كان اثني ... الخمس: في الهامش.

racine de douze plus quatre cinquièmes plus quatre cinquièmes de cinquième, ce qui est cinq dirhams plus deux cinquièmes. De même, [91^{v}] lorsque tu ajoutes des racines à volonté d'une manière qui convient au problème, alors chaque somme a une racine ; et que, si tu ajoutes à vingt-neuf plus quatre cinquièmes de cinquième six de ses racines plus trois quarts de sa racine, alors la somme a une racine et sa racine est égale à la racine, plus la moitié de la racine de vingt-neuf plus quatre cinquièmes de cinquième, ce qui est huit et un dixième ; et que, si tu ajoutes également à la somme dix de ses racines plus un huitième de sa racine, la somme a également une racine, qui est égale à huit plus un dixième plus sa moitié[35], qui est douze plus un dixième plus un demi d'un dixième. Il en est de même pour les ajouts qui se suivent à volonté selon cet ordre, si l'ajout convient au problème, c'est-à-dire que les trois racines sont égales à deux racines plus leur moitié, et ainsi de suite à l'infini.

<27> De même, s'il dit : un *carré* ayant une racine, si tu lui ajoutes trois de ses racines, on a une racine, et si tu ajoutes à cette somme six de ses racines, la somme a une racine[36].

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* un *carré* et tu lui ajoutes trois de ses racines ; on a un *carré* plus trois racines, et sa racine est deux choses ; en effet il vient deux choses car les six racines sont égales au double des trois racines. Multiplie deux choses par deux choses, on a quatre *carrés* égaux à un *carré* plus trois choses. Réduis par ceci ; on a une chose égale à un dirham qui est la racine du *carré*, et le *carré* est un dirham. Il en est de même lorsque tu ajoutes à volonté d'une manière qui convient au problème, c'est-à-dire si tu ajoutes également à la somme – qui est douze – sa racine, alors la somme a une racine ; et si tu ajoutes à la somme – qui est vingt-quatre – sa racine, alors la somme a une racine ; ainsi pour quarante-huit et sa racine, ainsi pour quatre-vingt-seize et sa racine, à l'infini.

[35] C'est-à-dire la moitié de huit plus un dixième.

[36] $\begin{cases} x_1^2 + 3x_1 = x_2^2 \\ x_2^2 + 6x_2 = x_3^2 \end{cases}$

أخماس وأربعة أخماس الخُمس، وهو خمسة دراهم وخمسان. وكذلك / تزيد ما ٩١-ظ
أردتَ من الأجذار على تناسبها. فإنّ لكلّ ما يجتمع من ذلك جذرٌ؛ أعني أنّك
إذا زِدْت على تسعةٍ وعشرين وأربعة أخماس الخمسِ ستةَ أجذارها وثلاثةَ أرباع
جذرِها، كان لِما يجتمع من ذلك جذرٌ، وجذرُه مثلُ جذرٍ ونصفِ جذرِ تسعةٍ
وعشرين وأربعة أخماس الخُمس، وهو ثمانيةٌ وعُشْرٌ، وأنّك إذا زِدت على ما
يجتمع أيضاً عشرة أجذاره وثُمْن جذره، كان لما اجتمع من ذلك أيضاً جذرٌ،
وهو مثلُ ثمانيةٍ وعُشْرٍ ومثل نصفها، وهو اثنا عشر وعُشْرٌ ونصفُ عُشْرٍ.
وكذلك تُجري ما أرَدْتَ من الزيادات على مثل هذا النَّسق إذا كانت الزيادةُ
على ما يُناسِبُ المسألة، أعني أن الثلاثةَ الأجذار مثلُ الجذرين ومثلُ نصفِها إلى ما
لا نهاية له.

<٢٧> وكذلك إن قال: مالٌ له جذرٌ، إن زِدْت عليه ثلاثة أجذاره كان له جذرٌ، وإن زِدْت على ما اجتمع ستةَ أجذاره كان له جذرٌ.

قياسه: أن تجعل مالَك مالاً فتزيد عليه ثلاثة أجذاره فيكون مالاً وثلاثة أجذارٍ، فجذرُه شيئان، وإنّما صار شيئين لأن الستةَ الأجذار مِثْلا الثلاثة الأجذار. فاضْرِب شيئين في شيئين يَكُنْ أربعةَ أموالٍ تعدل مالاً وثلاثةَ أشياء. فقابل بها، يكن الشيءُ يعدلُ درهماً وهو جذرُ المالِ، والمالُ درهمٌ. وكذلك تُجري ما أردتَ من الزيادة على تناسب المسألةَ، أعني أنك إذا زِدْت أيضاً على ما اجتمع معك – أعني اثني عشر – جذرَه كان لما يجتمع جذرٌ؛ وإذا زِدْت على ما بلغ أربعة وعشرين جذرَه، كان له جذر، وثمانيةً وأربعين جذره، وستةً وتسعين جذره إلى ما لا نهاية له.

Par ce procédé, tu peux résoudre tout ce qui te parvient de cette manière, si les secondes racines sont supérieures aux premières ; mais si elles sont inférieures aux premières, tu ne peux pas le résoudre par ce procédé. Il y a un procédé subtil pour résoudre les deux choses à la fois, qui est le suivant :

<28> Si on te dit : un *carré* ayant une racine, si tu lui ajoutes deux de ses racines, on a une racine, et si tu ajoutes à la somme sa racine, la somme a une racine[37].

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* un *carré*, auquel tu ajoutes deux de ses racines ; on a un *carré* plus deux racines ; puis tu ajoutes à la somme [92r] sa racine, c'est-à-dire la racine du *carré* plus deux racines, on a un *carré* plus deux racines plus la racine du *carré* plus deux racines, qui doit avoir une racine. Tu poses sa racine une chose plus un demi-dirham, tu le multiplies par lui-même, on a un *carré* plus une chose plus un quart de dirham égal à un *carré* plus deux racines plus la racine du *carré* plus deux racines ; tu ôtes un *carré* et une racine, du *carré* et des deux racines et de la racine du *carré* plus deux racines, alors il reste une racine plus la racine du *carré* plus deux racines égal à un quart de dirham. Ôte une racine du quart de dirham, il reste un quart de dirham moins une racine, égal à la racine du *carré* plus deux racines. Multiplie un quart de dirham moins une racine par lui-même ; on a la moitié du huitième de dirham plus un *carré* moins la moitié d'une chose, égal à un *carré* plus deux racines. Réduis par ceci ; on a la racine du *carré* égale à un quart d'un dixième, et le *carré* une partie de mille six cents parties de dirham. En effet, on a posé sa racine une chose plus un demi-dirham pour que les *carrés* s'annulent lors de la réduction et qu'il reste des choses égales à un nombre.

<29> De même, si on te dit : un *carré* ayant une racine, si tu lui ajoutes quatre de ses racines, la somme a une racine, et si tu ajoutes à la somme deux de ses racines, la somme a une racine[38].

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* un *carré*, tu lui ajoutes quatre de ses racines, on a un *carré* plus quatre choses ; puis tu ajoutes au *carré* plus quatre choses deux fois sa racine, qui est la racine de quatre *carrés* plus seize

37 $\begin{cases} x^2 + 2x = y^2 \\ y^2 + y = z^2 \end{cases}$

38 $\begin{cases} x^2 + 4x = y^2 \\ y^2 + 2y = z^2 \end{cases}$

وهذا العمل تُخرِجُ به كلَّ ما جاءك من هذا النَّحْوِ، إذا كانت الأجذارُ الثانية أكثرَ من الأُوَل. فأمَّا إن كانت أقلَّ من الأُوَل، فليس تخرج بهذا العمل، وفيها حيلة يخرج بها الأمرانِ جميعاً، وهي:

<٢٨> إذا قيل لك: مالٌ له جذر، إن زِدْت عليه جذرَيه كان له جذر، وإن زِدْتَ على ما اجتمع جذره كان له جذر.

قياسه: أن تجعل مالَك مالاً فتزيد عليه جذريه فيكون مالاً وجذرين، ثم تزيد على ما اجتمع، / جذرَه – وهو جذر مالٍ وجذرَيْن – فيكون مالاً ٩٢-و وجذرين وجذرَ مالٍ وجذرين، فينبغي أن يكون له جذرٌ، فتجعل جذرَه شيئاً ونصفَ درهمٍ وتضربه في مثله، فيكون: مالاً وشيئاً وربعَ درهمٍ يعدل مالاً وجذرين وجذرَ مالٍ وجذرين. فتُسْقِط مالاً وجذراً من مالٍ وجذرين وجذر مالٍ وجذرين، فيبقى جذرٌ وجذرُ مالٍ وجذران يعدل ربعَ درهمٍ. فأسْقِطْ جذراً من ربعِ درهمٍ، فيبقى <ربعُ> درهمٍ إلاّ جذراً يعدل جذر مالٍ وجذرين. فاضرب ربعَ درهمٍ إلاّ جذراً في مثله، فيكون: نصفَ ثُمنِ درهمٍ ومالاً إلاّ نصف شيءٍ يعدل مالاً وجذرين. فتقابل بها، فيكون جذرُ المالِ ربعَ عُشرٍ، والمالُ جزءاً من ألفٍ وستمائةِ جزءٍ من درهم. وإنّما جعلت جذره شيئاً ونصفَ درهم لتذهب الأموالُ عند المقابلة، وتبقى أشياءُ تعدِل عدداً.

<٢٩> وكذلك إن قيل لك: مالٌ له جذرٌ إن زِدْتَ عليه أربعةَ أجذاره كان له جذرٌ وإن زدت، على ما اجتمع، جذرَيه كان له جذر.

قياسه: أن تجعل مالَك مالاً، فتزيد عليه أربعةَ أجذاره، فيكون مالاً وأربعة أشياء، ثم تزيد على مالٍ وأربعة أشياء جذريه وهو جذرُ أربعةِ أموال وستة

1 كلّ ما: كلّما – 9 وشيئًا: وشيئين – 11 وجذران: وجذرين – 13 فيكون: فيكن.

choses, il vient un *carré* plus quatre racines plus la racine de quatre *carrés* plus seize choses. Pose sa racine une chose plus un dirham, multiplie-la par elle-même, on a un *carré* plus un dirham plus deux choses égal à un *carré* plus quatre choses plus la racine de quatre *carrés* plus seize choses. Ôte un *carré* et deux choses du *carré* et des quatre choses, il reste un dirham égal à deux choses plus la racine de quatre *carrés* plus seize choses. Ôte les deux choses du dirham, il reste un dirham moins deux choses égal à la racine des quatre *carrés* plus seize choses. Multiplie un dirham moins deux choses par lui-même, on a un dirham plus quatre *carrés* moins quatre racines égaux à quatre *carrés* plus seize choses. Réduis par ceci ; la chose est la moitié d'un dixième de dirham, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est une partie de quatre cents parties de dirham.

Quel que soit ce qui te vient selon ce mode, procède ingénieusement avec la racine de sorte que, si tu parviens à la réduction, il reste des choses égales à un nombre. Ce procédé subtil est très utile dans cela et ailleurs.

<30> S'il dit : un *carré* duquel on a retranché quatre de ses racines, le reste a une racine, et si on retranche de ce qui reste deux de ses racines, le reste a une racine[39].

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* un *carré*, duquel tu ôtes quatre de ses racines, il reste un *carré* moins quatre de ses racines ; ceci a une racine, qui est une demi-chose par une demi-chose. On a donc un quart de *carré* égal à un *carré* moins quatre racines. Réduis par ceci ; on a la racine du *carré* égale à cinq plus un tiers et le *carré* égal à vingt-huit plus quatre neuvièmes. On suit dans ce problème et ses analogues, pour la proportionnalité des racines, ce qu'on a suivi dans le problème précédent ; c'est-à-dire : si tu retranches de ce qui reste sa racine, le reste a une racine, et si tu retranches du reste également la moitié de sa racine, le reste a une racine, puis le quart de sa racine, le huitième de sa racine, la moitié du huitième de sa racine, chacun est la moitié de celui qui précède, car les deux racines sont la moitié des quatre racines. Tout ce qui te vient de cela est selon cette méthode, si les secondes racines sont plus petites que les premières.

39 $\begin{cases} x_1^2 - 4x_1 = x_2^2 \\ x_2^2 - 2x_2 = x_3^2 \end{cases}$

عشر شيئاً. فيصير مالاً وأربعة أجذارٍ وجذر أربعةِ أموالٍ وستة عشر شيئاً. فاجعل جذرَه شيئاً ودرهماً واضربه في مثله يكُنْ: مالاً ودرهماً وشيئين يعدل مالاً وأربعة أشياء وجذر أربعة أموالٍ وستة عشر شيئاً. فأسقط مالاً وشيئين من مالٍ وأربعة أشياء، فيبقى درهمٌ يعدل شيئين وجذر أربعة أموال، وستة عشر شيئاً. فألقِ الشيئين من الدرهم، فيبقى درهمٌ إلاّ شيئين يعدل جذرَ أربعةِ أموالٍ وستة عشر شيئاً. فاضرب درهماً إلاّ شيئين في مثله، يكن درهماً وأربعة أموالٍ إلاّ أربعة أجذار يعدل أربعةَ أموالٍ وستة عشر شيئاً. فقابل بها، يكن الشيءُ نصفَ عُشْرِ درهمٍ، وهو جذرُ المالِ، والمالُ جزءٌ من أربعمائةِ جزءٍ من درهمٍ.

وكلُّ ما جاءك من هذا النَّحو فاحْتَلْ في جذره، حتى إذا صِرْتَ إلى المقابلة ٩٢-ظ
بقيتْ أشياءُ تعدلُ / عدداً. وهذه الحيلةُ كثيرةُ المنفعةِ في هذا وغيرِه.

<٣٠> فإن قال: مالٌ إن نقصت منه أربعةَ أجذاره، كان له جذرٌ، وإن نقصَت ممّا بقي جذرَيه، كان لما بقي جذرٌ.

قياسه: أن تجعل مالَك مالاً فتُسقط منه أربعةَ أجذاره فيبقى مالٌ إلاّ أربعة أجذار، وله جذرٌ، وهو نصفُ شيءٍ في نصفِ شيءٍ، فيكون ربعُ مالٍ يعدل مالاً إلاّ أربعة أجذارٍ. فقابِلْ بها، يكن جذرُ المالِ خمسةً وثلثاً، والمالُ ثمانيةً وعشرين وأربعة أتساعٍ. وهذه المسألة وما أشبهها تجري في تناسب الأجذار على نحوِ ما جرت المسألة التي قبلَها، أعني أنك إذا نقصتَ ممّا بقي جذرَه كان له جذر؛ وإن نقصت ممّا بقي أيضاً نصفَ جذرِه، كان له جذر، ثم ربع جذره وثمن جذره ونصفَ ثُمْنِ جذره، كلُّ واحد نصف الذي قبله، لأن الجذرين نصف الأربعةِ الأجذار. وكلُّ ما جاءك من هذا فعلى هذا السَّبيل إذا كانت الأجذار الثانيةُ أقلّ من الأولى.

9 وكلّ ما: وكلّما / فاحتل: فاحتال — 19 قبله: يليه — 20 وكلّ ما: وكلّما.

<31> Si on te dit : un *carré* ayant une racine, si tu lui ajoutes sa racine, on a une racine, et si tu ajoutes au *carré* un dirham, on a une racine[40].

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* un *carré* et tu lui ajoutes sa racine ; on a un *carré* plus une racine, ce qui a une racine, et tu ajoutes au *carré* un dirham, on a un *carré* plus un dirham ayant une racine. Puis tu reviens et tu poses la racine du *carré* plus la racine, la racine du *carré* plus un dirham, moins un demi-dirham. Tu le multiplies par lui-même, on a un *carré* plus un dirham plus un quart <de dirham> moins la racine du *carré* plus un dirham égal à un *carré* plus une racine. Ôte du *carré* un *carré*, il reste un dirham plus un quart moins la racine du *carré* plus un dirham égal à une racine. Restaure le dirham et le quart par la racine du *carré* plus un dirham et ajoute-le à la racine, on a une racine plus la racine du *carré* plus un dirham égal à un dirham plus un quart. Retranche la racine du dirham plus un quart, il reste un dirham plus un quart moins une chose égal à la racine du *carré* plus un dirham. Multiplie un dirham plus un quart moins une chose par lui-même, on a un dirham plus un demi plus un demi d'un huitième de dirham moins deux racines et demie égaux à un *carré* plus un dirham. Réduis par ceci ; on a la chose égale à neuf parties de quarante parties de dirham, qui est la racine du *carré*. Et le *carré* est quatre-vingt-une parties de mille six cents parties de dirham. Nous avons en effet posé sa racine la racine du *carré* plus un dirham moins un demi-dirham pour que, lors de la réduction, les choses soient égales à un dirham. Ce procédé subtil [93r] peut mener à des solutions dans beaucoup de problèmes de cet art.

<32> Si on te dit : un *carré* ayant une racine, si tu en retranches cinq dirhams, le reste a une racine, et si tu ajoutes à ce qui reste sa racine, la somme a une racine[41].

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* un *carré*, duquel tu ôtes cinq dirhams ; il reste un *carré* moins cinq dirhams. Puis tu ajoutes au *carré* moins cinq dirhams sa racine, qui est la racine du *carré* moins cinq dirhams ; on a un *carré* moins cinq dirhams plus la racine du *carré* moins cinq dirhams. Pose sa racine une chose moins un demi-dirham. Multiplie-le par lui-même ; on a un *carré* plus un quart de dirham moins une racine égaux à un *carré* moins cinq dirhams plus la racine d'un *carré* moins cinq dirhams. Restaure ceux-ci par les cinq et celle-là par la racine, ajoute les cinq au *carré*

40 $\begin{cases} x^2 + x = y^2 \\ x^2 + 1 = z^2 \end{cases}$

41 $\begin{cases} x^2 - 5 = y^2 \\ y^2 + y = z^2 \end{cases}$

<٣١> فإن قيل لك: مالٌ له جذر، إن زدت عليه جذره، كان له جذرٌ وإن زدت على المال درهماً، كان له جذرٌ.

قياسه: أن تجعل مالَك مالاً فتزيدَ عليه جذره، فيكونَ مالاً وجذراً وله جذرٌ، وتزيد على المالِ درهماً فيكون مالاً ودرهماً وله جذرٌ. ثم ترجع فتجعل جذر مال و<جذر> جذرَ مالٍ ودرهمٍ إلاّ نصفَ درهم، وتضربه في مثله، فيكون مالاً ودرهماً وربعاً إلاّ جذر مالٍ ودرهمٍ يعدل مالاً وجذراً. فأسقط مالاً بمال، فيبقى درهمٌ وربعٌ إلاّ جذر مالٍ ودرهم يعدلُ جذراً. فاجبُر الدرهمَ والربعَ بجذرِ مالٍ ودرهم، وزِدْه على الجذْرِ، يكنْ جذراً وجذرَ مالٍ ودرهمٍ يعدل درهماً وربعاً. فألقِ الجذرَ من الدرهمِ والربعِ، فيبقى درهمٌ وربعٌ إلاّ شيئاً يعدل جذرَ مالٍ ودرهمٍ. فاضرب درهماً وربعاً إلاّ شيئاً في مثله، يكن درهماً ونصفاً ونصفَ ثُمْنِ درهمٍ إلاّ جذرين ونصفاً تعدل مالاً ودرهماً. فقابِلْ بها، يكن الشيءُ يعدل تسعةَ أجزاءٍ من أربعين جزءاً من درهمٍ، وهو جذرُ المالِ، والمالُ واحدٌ وثمانون جزءاً من ألفٍ وستمائة جزءٍ من درهمٍ. وإنّما جعلنا جذره جذرَ مالٍ ودرهمٍ إلاّ نصفَ درهم، ليبقى عند المقابلةِ أشياءُ تعدل درهم. وهذه الحيلةُ / تخرج في كثير من هذا الفن. ٩٣-و

<٣٢> فإن قيل لك: مالٌ له جذر، إن نقصت منه خمسةَ دراهم، كان لِما بقي جذرٌ؛ وإن زِدْت على ما بقي جذره، كان لما اجتمع جذرٌ.

قياسه: أن تجعل مالَك مالاً، فتُسقط منه خمسةَ دراهم، فيبقى مالٌ إلاّ خمسة دراهم، ثم تزيد على مالٍ إلاّ خمسةَ دراهمَ جذرَه، وهو جذرُ مالٍ إلاّ خمسةَ دراهم، فيكون مالاً إلاّ خمسةَ دراهمَ وجذرَ مالٍ إلاّ خمسةَ دراهم. فاجعل جذره شيئاً إلاّ نصفَ درهمٍ واضربه في مثله، يكن مالاً وربعَ درهمٍ إلاّ جذراً يعدل مالاً إلاّ خمسة دراهمَ وجذر مالٍ إلاّ خمسة دراهم. فاجْبُرْ هذه بالخمسةِ،

plus un quart de dirham, et la racine au *carré* ; on a un *carré* plus cinq dirhams plus un quart <de dirham> égaux à un *carré* plus une chose plus la racine d'un *carré* moins cinq dirhams. Ôte le *carré* et la chose du *carré* et des cinq dirhams plus un quart, il reste cinq dirhams plus un quart moins une chose égaux à la racine du *carré* moins cinq dirhams. Multiplie cinq dirhams plus un quart moins une chose par eux-mêmes, on a vingt-sept dirhams et demi plus la moitié d'un huitième plus un *carré* moins dix racines et une demi-racine égaux à un *carré* moins cinq dirhams. Réduis par ceci ; alors la chose est égale à trois dirhams plus dix-sept parties de cent soixante-huit parties de dirham, ce qui est la racine du *carré*, et le *carré* est neuf dirhams plus cent parties et trois parties de cent soixante-huit parties de dirham plus cent vingt et une parties de vingt-huit mille plus deux cent vingt-quatre parties de dirham. Si on en ôte cinq dirhams, il reste quatre dirhams et cent parties et trois parties de cent soixante-huit parties de dirham plus cent vingt et une parties de vingt-huit mille deux cent vingt-quatre parties de dirham ; tu lui ajoutes sa racine, qui est deux dirhams plus vingt-cinq parties de cent soixante-huit parties de dirham, on a six dirhams plus cent parties et vingt-huit parties de cent soixante-huit parties de dirham plus cent vingt et une parties de vingt-huit mille deux cent vingt-quatre parties de dirham, ce qui a une racine qui est deux dirhams plus cent parties et une partie de cent soixante-huit [93^{v}] parties de dirham.

<33> Si on te dit : un *carré* ayant une racine, si tu lui ajoutes quatre de ses racines, la somme a une racine, et si tu en retranches deux de ses racines et un dirham, le reste a une racine[42].

42 $\begin{cases} x^2 + 4x = y^2 \\ x^2 - 2x - 1 = z^2 \end{cases}$

وذاك بالجذور، وزِدْ الخمسة على مالٍ وربع <درهمٍ> والجذرَ على المال، فيكون: مالاً وخمسة دراهم وربعاً يعدل مالاً وشيئاً وجذر مالٍ إلاّ خمسة دراهم. فأسقِطْ مالاً وشيئاً من مالٍ وخمسة دراهم وربع، فيبقى خمسة دراهم وربع إلاّ شيئاً تعدل جذر مالٍ إلاّ خمسة دراهم. فاضرب خمسةَ دراهم وربعاً إلاّ شيئاً في مثله، يَكُنْ سبعةً وعشرين درهماً <ونصفاً> ونصفَ ثُمْنٍ ومالاً إلاّ عشرة أجذارٍ ونصفَ جذرٍ يعدل مالاً إلاّ خمسة دراهم. فتُقابِل بها، فيكونُ الشيءُ يعدل ثلاثةَ دراهم وسبعة عشر جزءاً من مائةٍ وثمانية وستين جزءاً من درهمٍ وهو جذرُ المالِ، والمالُ تسعةُ دراهمَ، ومائة جزءٍ، وثلاثة أجزاء من مائة وثمانيةٍ وستين جزءاً من درهمٍ، ومائة وأحدٌ وعشرون جزءاً من ثمانية وعشرين ألفاً ومائتين وأربعة وعشرين جزءاً من درهم. فإذا أسقطت منه خمسةَ دراهم بقي أربعةُ دراهم ومائةُ جزءٍ وثلاثةُ أجزاءٍ من مائةٍ وثمانية وستين جزءاً من درهمٍ، ومائةٌ وأحدٌ وعشرون جزءاً من ثمانية وعشرين ألفاً ومائتين وأربعة وعشرين جزءاً من درهم. فتزيد عليها جذرَها، وهو درهمان، وخمسة وعشرون جزءاً من مائة وثمانيةٍ وستين جزءاً من درهمٍ، فيكون ستةَ دراهمَ، ومائة جزءٍ، وثمانيةً وعشرين جزءاً من مائة وثمانيةٍ وستين جزءاً من درهمٍ ومائةً وأحداً وعشرين جزءاً من ثمانيةٍ وعشرين ألفاً ومائتين وأربعة وعشرين جزءاً من درهم، وعشرين جزءاً من ثمانيةٍ وعشرين ألفاً ومائتين وأربعة وعشرين جزءاً من درهم، وله جذرٌ، وهو درهمان ومائةُ جزءٍ وجزءٌ من مائةٍ وثمانية / وستين جزءاً من ٩٣-ظ درهم.

<٣٣> فإن قيل لك: مالٌ له جذر، إن زدت عليه أربعة أجذاره، كان له جذرٌ؛ وإن نقصت منه جذريه ودرهماً، كان لِما بقي جذرٌ.

7 عشر: عشرين — 15 وأحداً: وأحد — 17 جزءاً: جزء.

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* un *carré*, auquel tu ajoutes quatre de ses racines. On a un *carré* plus quatre racines, ce qui a une racine. Tu en retranches deux de ses racines et un dirham, il reste un *carré* moins deux racines moins un dirham, ce qui a une racine. Pose sa racine – d'après ce qu'on va te montrer lors de la réduction, à savoir qu'il ne peut pas en être autrement – la racine du *carré* plus quatre choses moins trois dirhams. Tu la multiplies par elle-même ; son *carré* sera alors un *carré* plus neuf dirhams plus quatre racines moins six racines du *carré* plus quatre choses, égal à un *carré* moins deux racines et un dirham. Réduis par ceci ; on a un *carré* plus six racines plus dix dirhams égaux à un *carré* plus six racines du *carré* plus quatre choses. Mais les six racines du *carré* plus quatre choses, c'est la racine de trente-six *carrés* plus cent quarante-quatre choses. Retranche un *carré* d'un *carré*, il reste six racines plus dix dirhams égaux à la racine de trente-six *carrés* plus cent quarante-quatre choses. Multiplie six racines plus dix dirhams par lui-même, on a trente-six *carrés* plus cent vingt choses plus cent dirhams égaux à trente-six *carrés* plus cent quarante-quatre choses. Réduis par ceci ; la chose sera égale à quatre dirhams plus un sixième de dirham, qui est la racine du *carré*. Et le *carré* est dix-sept dirhams plus un quart et un neuvième.

<34> Si on te dit : un *carré* ayant une racine, si tu en retranches deux de ses racines, le reste aura une racine, et si tu ajoutes à ce qui reste sa racine, la somme a une racine[43].

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* un *carré*, duquel tu retranches deux de ses racines ; il reste un *carré* moins deux racines, auquel tu ajoutes sa racine ; on a un *carré* moins deux racines plus la racine d'un *carré* moins deux racines et la somme a une racine. Pose sa racine une chose moins un dirham et un demi et multiplie-le par lui-même ; on a un *carré* plus deux dirhams plus un quart moins trois racines égaux à un *carré* moins deux racines plus la racine d'un *carré* moins deux racines. Réduis par ceci ; on a après la réduction une chose plus la racine d'un *carré* moins deux racines égal à deux dirhams plus un quart. Retranche une chose de deux dirhams plus un quart, il reste deux dirhams plus un quart moins une chose égal à la racine d'un *carré* moins deux racines. Multiplie deux dirhams plus un quart moins une chose par lui-même, on a cinq dirhams plus la moitié d'un huitième de dirham plus un *carré* [94^{r}] moins quatre choses plus une demi-

43 $\begin{cases} x^2 - 2x = y^2 \\ y^2 + y = z^2 \end{cases}$

قياسه: أن تجعل مالَك مالاً، فتزيد عليه أربعةَ أجذاره، فيكون مالاً وأربعة أجذارٍ وله جذر. وتنقص منه جذْرَيْه ودرهماً، فيبقى مالٌ إلاّ جذرين وإلاّ درهماً، وله جذرٌ. فتجعل جذرَه – لِما سيبين لك عند المقابلة أنّه لا يمكن غيره – جذرَ مالٍ وأربعة أشياء، إلاّ ثلاثة دراهم. فتضربه في مثله، فيكون <ماله> مالاً وتسعةَ دراهم وأربعةَ أجذارٍ إلاّ ستة أجذار مالٍ وأربعة أشياء تعدل مالاً إلاّ جذرين ودرهماً. فتقابل بها، فيكون مالاً وستة أجذارٍ وعشرة دراهم تعدل مالاً وستة أجذار مالٍ وأربعة أشياء. وستةُ أجذارِ مالٍ وأربعةُ أشياء جذرُ ستةٍ وثلاثين مالاً ومائةٍ وأربعة وأربعين شيئاً. فألْقِ مالاً بمال، فيبقى ستة أجذارٍ وعشرة دراهمَ تعدل جذر ستةٍ وثلاثين مالاً <ومائة> وأربعة وأربعين شيئاً. فاضرب ستة أجذارٍ وعشرة دراهمَ في مثله، فيكون ستةً وثلاثين مالاً ومائة وعشرين شيئاً ومائةً درهمٍ تعدل ستة وثلاثين مالاً ومائةً وأربعة وأربعين شيئاً. فقابلْ بها، يكن الشيءُ يعدلُ أربعةَ دراهمَ وسُدْسَ درهمٍ، وهو جذر المالِ، والمالُ سبعة عشر درهماً وربعٌ وتسعٌ.

<٣٤> فإن قيل لك: مالٌ له جذر، إن نقصت منه جذرَيه، كان له جذرٌ؛ وإن زدْت على ما بقي جذرَه، كان له جذر.

قياسه: أن تجعل مالَك مالاً. فتُسقط منه جذريه، فيبقى مالٌ إلاّ جذرين، فتزيد عليه جذرَه، فيكون مالاً إلاّ جذرين وجذر مالٍ إلاّ جذرين، وله جذر. فاجعل جذره شيئاً إلاّ درهماً ونصفاً واضربه في مثله، يَكُنْ مالاً ودرهمين وربعاً إلاّ ثلاثة أجذارٍ تعدل مالاً إلاّ جذرين، وجذرَ مالٍ إلاّ جذرين. فقابل بها، يَكُنْ بعد المقابلة شيئاً وجذرَ مالٍ إلاّ جذرين يعدل درهمين وربعاً. فألقِ شيئاً من درهمين وربعٍ، يبقَ درهمان وربعٌ إلاّ شيئاً؛ تعدل جذرَ مالٍ إلاّ جذرين. فاضرب درهمين وربعاً إلاّ شيئاً في مثله، يكن خمسةَ دراهم ونصفَ ثُمنَ درهمٍ ومالاً /

3 فتجعل جذره: في الهامش – 10 فيكون: فيكن– 21 يبقَ: يبقى.

chose, égaux à un *carré* moins deux racines. Réduis par ceci ; la chose sera deux dirhams plus un quart d'un dixième de dirham, qui est la racine du *carré*, et le *carré* quatre dirhams plus un dixième plus une partie de mille six cents parties de dirham. Tu en retranches ses deux racines, ce qui est quatre dirhams plus la moitié d'un dixième de dirham, il reste la moitié du dixième et une partie de mille six cents parties de dirham. Tu lui ajoutes sa racine, qui est un cinquième plus un quart d'un dixième, on aura un quart plus un quart d'un dixième plus une partie de mille six cents parties de dirham, ce qui a une racine, qui est un demi et un quart d'un dixième.

<35> Si on dit : un *carré* ayant une racine, si tu lui ajoutes trois de ses racines plus un dirham, la somme a une racine, et si tu en retranches trois de ses racines moins deux dirhams, le reste a une racine[44].

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré*, un *carré*, auquel tu ajoutes trois de ses racines et un dirham ; on a un *carré* plus trois racines plus un dirham, la somme a une racine. Tu retranches du *carré* trois de ses racines moins deux dirhams, il reste un *carré* plus deux dirhams moins trois racines, le reste a une racine. Pose sa racine, la racine du *carré* plus trois racines plus un dirham moins trois dirhams et multiplie-le par lui-même, on a un *carré* plus trois racines plus dix dirhams moins la racine de trente-six *carrés* plus trente-six dirhams plus cent choses et huit choses égaux à un *carré* plus deux dirhams moins trois racines. Réduis par ceci ; on a après la réduction six choses plus huit dirhams égaux à la racine de trente-six *carrés* plus trente-six dirhams plus cent choses plus huit choses. Multiplie six choses plus huit dirhams par elles-mêmes, on a trente-six *carrés* plus quatre-vingt-seize choses plus soixante-quatre dirhams égal à trente-six *carrés* plus trente-six dirhams plus cent choses plus huit choses. Réduis par ceci, on a la chose égale à deux dirhams plus un tiers, qui est la racine du *carré*. Le *carré* est cinq dirhams plus un tiers et un neuvième. Si tu lui ajoutes trois de ses racines plus un dirham, on a treize dirhams plus quatre neuvièmes, et sa racine est trois dirhams plus deux tiers. Si tu en retranches trois de ses racines moins deux dirhams, il reste quatre neuvièmes et sa racine est deux tiers de dirham.

44 $\begin{cases} x^2 + 3x + 1 = y^2 \\ x^2 - 3x + 2 = z^2 \end{cases}$

إلاّ أربعة أشياء ونصف شيء يعدل مالاً إلاّ جذرين. فتقابل به، فيكون الشيء ٩٤-و
درهمين وربع عُشْرِ درهمٍ، وهو جذر المال، والمالُ أربعة دراهم وعُشرٌ وجزءٌ من
ألفٍ وستمائة جزءٍ من درهمٍ. فتنقص منه جذريه، وهو أربعة دراهم ونصفُ
عُشْرِ درهمٍ، فيبقى نصف عُشرٍ وجزء من ألفٍ وستمائة جزءٍ من درهم. فتزيد
عليه جذرَه وهو خُمسٌ وربعُ عشرٍ، فيكون ربعاً وربع عشرٍ وجزءاً من ألفٍ
وستمائة جزء من درهم، وله جذرٌ، وهو نصفٌ وربعُ عُشْرٍ.

<٣٥> فإن قال: مالٌ له جذر، إن زِدتَ عليه ثلاثةَ أجذارِه ودرهماً كان
له جذرٌ، وإن نقصتَ منه ثلاثة أجذاره إلاّ درهمين كان لِما بقي جذرٌ.
قياسه: أن تجعل مالَك مالاً، فتزيد عليه ثلاثةَ أجذاره ودرهماً، فيكون مالاً
وثلاثة أجذار ودرهماً وله جذر، وتنقص من المالِ ثلاثة أجذاره إلاّ درهمين،
فيبقى مالٌ ودرهمان إلاّ ثلاثة أجذار وله جذر. فاجعل جذرَه جذر مالٍ وثلاثةِ
أجذارٍ ودرهماً إلاّ ثلاثة دراهم واضربه في مثله، يَكُنْ: مالاً وثلاثةَ أجذارٍ وعشرةَ
دراهم إلاّ جذرَ ستةٍ وثلاثين مالاً وستةٍ وثلاثين درهماً ومائة شيءٍ وثمانية أشياء
تعدل مالاً ودرهمين إلاّ ثلاثة أجذار. فتقابل بها، فيكون بعد المقابلةِ ستةُ أشياء
وثمانيةُ دراهم تعدل جذرَ ستة وثلاثين مالاً وستة وثلاثين درهماً ومائة شيء
وثمانية أشياء. فاضرب ستةَ أشياء وثمانيةَ دراهم في مثلها، تكن ستةً وثلاثين مالاً
وستةً وتسعين شيئاً وأربعةً وستين درهماً تعدل ستةً وثلاثين مالاً، وستةً وثلاثين
درهماً، ومائة شيءٍ، وثمانيةَ أشياء. فتقابل بها، فيكون الشيءُ درهمين وثلثاً، وهو
جذرُ المالِ. والمالُ خمسةُ دراهم وثلثٌ وتُسْعٌ. فإن زدت عليه ثلاثة أجذاره
ودرهماً، كان ثلاثة عشر درهماً وأربعة أتْساعٍ، وجذرُه ثلاثةُ دراهم وثلثان. وإن
نقصْتَ منه ثلاثة أجذاره إلاّ درهمين، بقي أربعةُ أتْساعٍ، وجذرُه ثُلثا درهمٍ.

5 وجزءاً: جز.

<36> S'il dit : un *carré* ayant une racine, si tu lui ajoutes un dirham moins la racine du *carré*, la somme a une racine, et si tu en retranches un dirham moins la racine du *carré*, le reste a une racine[45].

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* un *carré*, tu lui ajoutes un dirham moins la racine du *carré*, il reste un *carré* et un dirham [94^{v}] moins une racine, ce qui a une racine ; et si tu en retranches un dirham moins la racine du *carré*, il reste un *carré* plus une racine moins un dirham, ce qui a une racine. Pose la racine du *carré* plus un dirham moins une chose un dirham moins la racine du *carré* plus une racine moins un dirham. Multiplie-le par lui-même, on a un *carré* plus une racine moins deux racines du *carré* plus une racine moins un dirham, égal à un *carré* plus un dirham moins une racine. Restaure par la racine, ajoute-la au *carré* plus une racine, restaure l'autre par les deux racines du *carré* plus une racine moins un dirham et ajoute-les au *carré* plus un dirham. Ôte un *carré* du *carré*, il reste un dirham plus les deux racines du *carré* plus une racine moins un dirham égal à deux choses. Retranche un dirham des deux choses, il reste deux choses moins un dirham égal à deux racines du *carré* plus une racine moins un dirham. Sa moitié – soit une chose moins un demi-dirham – est égale à la racine du *carré* plus une racine moins un dirham. Multiplie une chose moins un demi-dirham par elle-même, on a un *carré* plus un quart de dirham moins une chose égal à un *carré* plus une racine moins un dirham. Réduis par ceci ; la chose est égale à cinq huitièmes de dirham, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est trois huitièmes plus le huitième d'un huitième.

<37> Si on dit : un *carré* ayant une racine, si tu lui ajoutes deux dirhams moins la racine du *carré*, la somme a une racine, et si tu en retranches trois dirhams moins sa racine, le reste a une racine[46].

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* un *carré*, auquel tu ajoutes deux dirhams moins la racine du *carré* ; on a un *carré* plus deux dirhams moins une racine, ce qui a une racine ; et tu en retranches trois dirhams moins une racine, il reste un *carré* plus une racine moins trois dirhams, ce qui a une racine. Pose la racine du *carré* plus deux dirhams moins une racine, un dirham plus la racine d'un *carré* plus une racine moins trois dirhams. Multiplie-le par lui-même, on a un *carré* plus une racine moins deux dirhams plus deux racines du *carré* plus une racine moins trois dirhams, égal à un *carré* plus deux dirhams moins une racine. Restaure le *carré* et les deux

45 $\begin{cases} x^2 - x + 1 = y^2 \\ x^2 + x - 1 = z^2 \end{cases}$

46 $\begin{cases} x^2 - x + 2 = y^2 \\ x^2 + x - 3 = z^2 \end{cases}$

<٣٦> فإن قال: مالٌ له جذر، إن زدت عليه درهماً إلاّ جذر المالِ، كان له جذرٌ؛ وإن نقصت منه درهماً إلاّ جذر المال، كان له جذرٌ.

قياسه: أن تجعل مالَك مالاً، فتزيد عليه درهماً إلاّ جذر المالِ، فيكون مالاً ودرهماً / إلاّ جذراً وله جذر. وإن نقصت منه درهماً إلاّ جذر المالِ، بقي مالٌ ٩٤-ظ وجذرٌ إلاّ درهماً وله جذرٌ. فاجعل جذرَ مالٍ ودرهمٍ إلاّ شيئاً، درهماً <إلاّ> جذرَ مالٍ وجذر إلاّ درهماً، واضربه في مثله، يكن: مالاً وجذراً إلاّ جذرَي مالٍ وجذرٍ إلاّ درهماً يعدل مالاً ودرهماً إلاّ جذراً. فاجبره بالجذرِ وزِدْه على مالٍ وجذرٍ، واجبُر الآخر بجذرَي مالٍ وجذرٍ إلاّ درهماً، وزِدْه على مالٍ ودرهمٍ وألْقِ مالاً بمالٍ، فيبقى درهمٌ وجذرا مالٍ وجذرٍ إلاّ درهماً يعدل شيئين. فألقِ درهماً من شيئين، فيبقى شيئان إلاّ درهماً تعدل جذري مالٍ وجذرٍ إلاّ درهماً، فنصْفُه – وهو شيءٌ إلاّ نصفَ درهمٍ – يعدل جذرَ مالٍ وجذرٍ إلاّ درهماً. فاضرب شيئاً إلاّ نصف درهمٍ في مثله، يكن: مالاً وربعَ درهمٍ إلاّ شيئاً يعدل مالاً وجذراً إلاّ درهماً. فتقابل بها، فيكون الشيءُ خمسةَ أثمانِ درهمٍ، وهو جذرُ المالِ والمالُ ثلاثة أثمان وثُمن الثمنِ.

<٣٧> فإن قيل: مالٌ له جذر، إن زدت عليه درهمين إلاّ جذرَ المالِ كان له جذر، وإن نقصت منه ثلاثة دراهم إلاّ جذره، كان لِما بقي جذرٌ.

قياسه: أن تجعل مالَك مالاً، فتزيد عليه درهمين إلاّ جذر المال، فيكون مالاً ودرهمين إلاّ جذراً، وله جذرٌ، وتنقص منه ثلاثة دراهم إلاّ جذراً، فيبقى مالٌ وجذرٌ إلاّ ثلاثة دراهم وله جذرٌ. فاجعل جذرَ مالٍ ودرهمين إلاّ جذراً، درهماً وجذرَ مالٍ وجذرٍ إلاّ ثلاثةَ دراهم، واضربه في مثله، يكن مالاً وجذراً إلاّ درهمين وجذرَي مالٍ وجذرٍ إلاّ ثلاثة دراهم يعدل مالاً ودرهمين إلاّ جذراً. فاجبُر المالَ والدرهمين بالجذرِ، وزِدْه على مالٍ وجذرٍ إلاّ درهمين، واجبُر المالَ

4 وله: فله — 5 وله: فله — 6 جذر (الأولى): وجذر.

dirhams par la racine, ajoute-les au *carré* plus une racine moins deux dirhams, restaure le *carré* et la racine par les deux dirhams et ajoute-le au *carré* plus deux dirhams, puis ôte un *carré* d'un *carré* ; il reste deux racines plus deux racines du *carré* plus une racine moins trois dirhams égal à quatre dirhams. Ôte les deux racines des quatre dirhams, il reste quatre dirhams moins deux racines égal à deux racines du *carré* plus une racine moins trois dirhams. La moitié, qui est deux dirhams moins une racine, est égale à la racine du *carré* [95r] plus une racine moins trois dirhams. Multiplie deux dirhams moins une chose par elle-même, on a quatre dirhams plus un *carré* moins quatre choses égal à un *carré* plus une racine moins trois dirhams. Réduis par ceci ; la chose sera égale à un dirham plus deux cinquièmes et le *carré* égal à un dirham plus quatre cinquièmes plus quatre cinquièmes de cinquième.

<38> Si on te dit : un *carré* ayant une racine, si tu lui ajoutes sa racine plus un dirham, la somme a une racine, et si tu lui ajoutes aussi deux de ses racines plus deux dirhams, la somme a une racine[47].

On l'infère ainsi : tu poses ton *carré* un *carré* auquel tu ajoutes sa racine plus un dirham, ce qui est un *carré* plus une racine plus un dirham, et la somme a une racine. Tu ajoutes également au *carré* deux de ses racines et deux dirhams, on a un *carré* plus deux racines plus deux dirhams, et la somme a une racine. Tu poses sa racine la moitié d'un dirham et la racine d'un *carré* plus une racine plus un dirham, et tu le multiplies par lui-même ; on a un *carré* plus une racine plus un dirham plus un quart plus la racine d'un *carré* plus une racine plus un dirham, égal à un *carré* plus deux racines plus deux dirhams. Ôte un *carré* plus une racine plus un dirham plus un quart, d'un *carré* plus deux racines plus deux dirhams ; il reste une chose plus trois quarts de dirham égal à la racine du *carré* plus une racine plus un dirham. Multiplie une chose plus trois quarts de dirham par elle-même, on a un *carré* plus une chose et demie plus un demi-dirham plus la moitié d'un huitième de dirham, égal à un *carré* plus une racine plus un dirham. Tu réduis par ceci : la chose est sept huitièmes de dirham, qui est la racine du *carré*, et le *carré* est six huitièmes plus un huitième d'un huitième. La plupart de ces problèmes sont résolus par ce procédé subtil que je t'ai décrit et qui est de grande importance et très utile.

47 $\begin{cases} x^2 + x + 1 = y^2 \\ x^2 + 2x + 2 = z^2 \end{cases}$

والجذرَ بالدرهمين، وزِدْه على مالٍ ودرهمين وألقِ مالاً بمال، فيبقى جذران وجذرا مالٍ وجذرٌ إلاّ ثلاثة دراهم يعدل أربعة دراهم. فأسقط الجذرين من الأربعة الدراهم، فيبقى أربعة دراهم إلاّ جذرين تعدل جذرَي مالٍ وجذرٍ إلاّ ثلاثة دراهم، فنصْفه — وهو درهمان إلاّ جذراً — يعدل جذر مالٍ / وجذرٍ إلاّ ٩٥-و
ثلاثة دراهم. فاضرب درهمين إلاّ شيئاً في مثله، يكن أربعة دراهم ومالاً إلاّ أربعة أشياء تعدل مالاً وجذراً إلاّ ثلاثة دراهم. فتقابل بها، فيكون الشيءُ يعدل درهماً وخُمْسَيْن. والمالُ درهم <وأربعة أخماسٍ> وأربعةُ أخماسِ الخُمسِ.

<٣٨> فإن قيل لك: مالٌ له جذرٌ إن زِدْت عليه جذرَه ودرهماً كان له جذرٌ، وإن زِدْت عليه أيضاً جذريْه ودرهمين كان له جذرٌ.

قياسُه: أن تجعلَ مالَك مالاً فتزيدَ عليه جذرَه ودرهماً، فيكون مالاً وجذراً ودرهماً، وله جذرٌ، وتزيد أيضاً على المالِ جذريْه ودرهمين، فيكون مالاً وجذرين ودرهمين وله جذرٌ. فتجعل جذره نصفَ درهمٍ وجذرَ مالٍ وجذرٍ ودرهمٍ، وتضربه في مثلِه، فيكون: مالاً وجذراً ودرهماً وربعاً وجذرَ مالٍ وجذرٍ ودرهمٍ: يعدلُ مالاً وجذرين ودرهمين، فألقِ مالاً وجذراً ودرهماً وربعاً من مالٍ وجذرين ودرهمين، فيبقى شيءٌ وثلاثةُ أرباعِ درهمٍ تعدلُ جذرَ مالٍ وجذرٍ ودرهمٍ. فاضربْ شيئاً وثلاثةَ أرباعِ درهمٍ في مثله، يكُنْ: مالاً وشيئاً ونصفاً ونصفَ درهم ونصفَ ثُمْنِ درهمٍ يعدل مالاً وجذراً ودرهماً. فتقابل بها، فيكون الشيءُ سبعةَ أثمانِ درهمٍ، وهو جذرُ المالِ. والمالُ ستةُ أثمانٍ وثُمْنِ الثُمْنِ. وهذه المسألة يخرج أكثرُها بهذه الحيلة التي وصفتُ لك، وهي عظيمةُ القدرِ كبيرةُ المنفعةِ.

14 وجذرين: وجذرا — 17 ودرهماً: ودرهمين.

<2. *Systèmes d'équations indéterminées du premier degré*>

<39> Si on te dit : quatre individus se sont réunis pour acheter une bête de trait. Le premier a dit aux trois autres : « si vous me donnez la moitié de ce que vous avez, j'aurai le prix de la bête ». Le deuxième a dit aux trois autres : « si vous me donnez le tiers de ce que vous avez, j'aurai le prix de la bête ». Le troisième a dit aux trois autres : « si vous me donnez le quart de ce que vous avez, j'aurai le prix de la bête ». Le quatrième a dit aux trois autres : « si vous me donnez le cinquième de ce que vous avez, j'aurai le prix de la bête ». Quel est le prix de la bête et combien chacun a-t-il ?

On l'infère ainsi : tu poses avec le premier une chose, avec le second un dinar, avec le troisième un dirham et avec le quatrième un fels. Le premier, ayant une chose, a dit aux trois autres : « donnez-moi la moitié de ce que vous avez, que je l'ajoute à ce que j'ai, alors j'aurai le prix de la bête » [95^{v}]. Mais la moitié de ce qu'ils ont est la moitié d'un dinar plus la moitié d'un dirham plus la moitié d'un fels. Si donc il l'ajoute à la chose qu'il a, la somme sera une chose plus la moitié d'un dinar plus la moitié d'un dirham plus la moitié d'un fels, ce qui est le prix de la bête. Le deuxième, ayant un dinar, a dit aux trois autres : « donnez-moi le tiers de ce que vous avez, que je l'ajoute à ce que j'ai, alors la somme sera le prix de la bête ». Mais le tiers de ce qu'ils ont est le tiers d'une chose et le tiers d'un dirham et le tiers d'un fels. Si donc il l'ajoute à ce qu'il a, qui est un dinar, alors la somme sera un dinar plus le tiers d'une chose plus le tiers d'un dirham plus le tiers d'un fels, ce qui est le prix de la bête. Cette somme est par conséquent égale à une chose plus la moitié d'un dinar plus la moitié d'un dirham plus la moitié d'un fels. Réduis en ôtant le tiers d'une chose d'une chose, il reste deux tiers d'une chose ; puis tu ôtes le tiers d'un dirham de la moitié d'un dirham, il reste un sixième de dirham, et tu ôtes le tiers d'un fels de la moitié d'un fels, il reste un sixième de fels, et tu ôtes la moitié d'un dinar d'un dinar, il reste la moitié d'un dinar égale aux deux tiers d'une chose plus un sixième de dirham plus un sixième de fels. Le dinar est donc égal à une chose plus un tiers plus un tiers d'un dirham plus un tiers d'un fels. Or le prix de la bête était une chose plus la moitié d'un dinar plus la moitié d'un dirham plus la moitié d'un fels. Ôte la moitié d'un dinar du prix de la bête et ajoute à sa place la moitié de ce qui est égal au dinar, c'est-à-dire les deux tiers d'une chose plus le sixième d'un dirham plus le sixième d'un fels. Le prix de la bête sera donc une chose plus les deux tiers d'une chose plus les deux tiers d'un dirham plus les deux tiers d'un fels. Ainsi le nom du dinar a été ôté, et on a à sa place une chose plus un tiers d'une chose plus un tiers de dirham plus un tiers de fels.

<٢- نظم معادلات غير محدودة من الدرجة الأولى>

<٣٩> فإن قيل لك: أربعة نفرٍ اجتمعوا على دابّةٍ يبتاعونها، فقال الأوّل للثلاثة: إنْ أعطيتموني نصفَ ما معكم كان معي ثَمَنُ الدابّة، وقال الثاني للثلاثة: إنْ أعطيتموني ثُلْثَ ما معكم كان معي ثَمَنُ الدابّة، وقال الثالث للثلاثة: إن أعطيتموني ربعَ ما معكم كان معي ثَمَنُ الدابّة، وقال الرابع للثلاثةِ: إن أعطيتموني خُمْسَ ما معكم كان معي ثَمَنُ الدابّة، كمْ ثَمَنُ الدابّة وكم مع كلّ واحدٍ منهم؟

قياسه: أن تجعل مع الأوّل شيئاً، ومع الثاني ديناراً ومع الثالث درهماً، ومع الرابع فلساً. فقال الأوّل، ومعه شيءٌ، للثلاثةِ: أعْطوني نصفَ ما معكم أُضِفْه إلى ما معي فيكون ثَمَنُ الدابّة. / ونصفُ ما معهم نصفُ دينارٍ ونصفُ درهمٍ ونصفُ فلسٍ، فإذا أضافه إلى الشيءِ الذي معه كان المجتمِعُ شيئاً ونصفَ دينارٍ ونصفَ درهمٍ ونصفَ فلسٍ، وهو ثَمَنُ الدابّة. وقال الثاني، ومعه دينار، للثلاثة: أعْطوني ثلثَ ما معكم أُضِفْهُ إلى ما معي، فيكون المجتمِع ثَمَنَ الدابّة. وثُلْثُ ما معهم: ثُلْثُ شيءٍ وثُلْثُ درهمٍ وثُلْثُ فلسٍ. فإذا أضافَه إلى ما معه – وهو دينار – صار المجتمع ديناراً وثُلْثَ شيءٍ وثُلْثَ درهمٍ وثُلْثَ فلسٍ وهو ثَمَنُ الدابّة، فهو إذاً يعدُلُ شيئاً ونصفَ دينارٍ ونصفَ درهمٍ ونصفَ فلسٍ. فتقابل بها، وهو أن تُلقيَ ثُلْثَ شيءٍ من شيءٍ، فيبقى ثُلثا شيءٍ، وتُلقي ثلثَ درهمٍ من نصفِ درهمٍ فيبقى سُدْسُ درهمٍ، وتلْقي ثلْثَ فلسٍ من نصفِ فلْسٍ، فيبقى سُدْسُ فلسٍ؛ وتُلقي نصفَ دينارٍ من دينارٍ، فيبقى نصفُ دينارٍ يعدل ثلثي شيءٍ وسُدسَ درهمٍ وسُدْسَ فلسٍ. فالدينارُ يعدُلُ شيئاً وثُلثاً وثُلْثَ درهمٍ وثُلْثَ فلسٍ. وقد كان ثَمَنُ الدابّة شيئاً ونصفَ دينارٍ ونصف درهمٍ ونصف فلسٍ، فألقِ نصف الدينار من ثَمَن الدابّة وزِدْ مكانه نصفَ ما يعدل الدينار، وهو ثلثا شيءٍ وسُدسُ درهمٍ وسُدسُ فلسٍ؛ فصار ثمنُ الدابّة شيئاً وثلثي شيءٍ وثُلثي درهمٍ وثُلثي فلسٍ، فقد سقط اسمُ الدينارِ وقام مقامه شيءٌ وثُلثُ شيءٍ وثُلثُ درهمٍ وثُلْثُ فلسٍ.

٩٥-ظ

8 أضِفْه: أضيفه – 12 أضِفْه: أضيفه.

Le troisième, ayant un dirham, a dit aux trois autres : « donnez-moi le quart de ce que vous avez, que je l'ajoute à ce que j'ai, alors j'aurai le prix de la bête ». Mais le quart de ce qu'ils ont est le tiers d'une chose plus le quart d'une chose plus la moitié d'un sixième de dirham plus un tiers de fels. Si donc il l'ajoute au dirham qu'il a, la somme sera un dirham plus la moitié d'un sixième de dirham plus le tiers d'une chose plus le quart d'une chose plus le tiers d'un fels, qui est le prix de la bête. Par conséquent, celui-ci est égal à une chose plus les deux tiers d'une chose plus les deux tiers d'un dirham plus les deux tiers d'un fels. Réduis en ôtant le tiers d'une chose plus le quart d'une chose d'une chose plus les deux tiers d'une chose ; il reste une chose plus la moitié d'un sixième d'une chose. Et tu ôtes le tiers d'un fels des deux tiers d'un fels, il reste le tiers d'un fels ; et tu ôtes les deux tiers d'un dirham d'un dirham plus la moitié du sixième, il reste un quart plus un sixième de dirham égal à une chose plus la moitié du sixième d'une chose [96r] plus le tiers d'un fels. Le dirham est donc égal à deux choses plus trois cinquièmes d'une chose plus quatre cinquièmes d'un fels. Ôte les deux tiers de dirham du prix de la bête et ajoute à sa place deux tiers de ce qui est égal au dirham, qui est une chose plus un tiers d'une chose plus deux cinquièmes d'une chose plus deux cinquièmes de fels plus deux tiers d'un cinquième de fels. La valeur de la bête sera donc trois choses plus un cinquième d'une chose plus un fels plus un cinquième d'un fels. Ainsi le nom du dirham est ôté, et on a à sa place deux choses plus trois cinquièmes d'une chose plus quatre cinquièmes d'un fels. Ôte le tiers de dirham qui fait partie de la valeur du dinar et ajoute à sa place ce qui lui est égal, c'est-à-dire le tiers de ce qui est égal aux dirhams, qui est les deux tiers d'une chose plus un cinquième d'une chose plus un cinquième d'un fels plus le tiers d'un cinquième d'un fels. Alors la valeur du dinar sera deux choses plus le cinquième d'une chose plus trois cinquièmes d'un fels. Il est devenu clair que le premier a une chose ; le second, qui est associé au dinar, deux choses plus un cinquième d'une chose plus trois cinquièmes d'un fels ; le troisième, qui est associé au dirham, deux choses plus trois cinquièmes d'une chose plus quatre cinquièmes d'un fels ; et le quatrième un fels. Et la valeur de la bête est trois choses plus deux cinquièmes d'une chose plus un fels plus un cinquième d'un fels[48].

48
$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}(y+z+t)+x \\ u = \frac{1}{3}(x+z+t)+y \\ u = \frac{1}{4}(x+y+t)+z \\ u = \frac{1}{5}(x+y+z)+t \end{cases}$$

وقال الثالث، ومعه درهمٌ، للثلاثة: أعطوني رُبعَ ما معكم أُضِفْهُ إلى ما معي فيكون ذلك ثَمنَ الدابّة. وربعُ ما معهم ثُلْثُ شيءٍ وربع شيءٍ ونصفُ سُدْسِ درهمٍ وثلث فلسٍ. فإذا أضافه إلى الدرهم الذي معه صارَ المجتمعُ درهماً ونصفَ سُدسِ درهمٍ وثُلثَ شيءٍ وربعَ شيءٍ وثُلْث فلسٍ وهو ثَمَنُ الدابّة. فهو إذنْ يعدلُ شيئاً وثُلْثي شيءٍ وثُلْثي درهمٍ وثُلْثي فلسٍ. فتقابل بها وهو أن تُلقيَ ثُلْثَ شيءٍ ورُبْع شيءٍ من شيءٍ وثُلْثي شيءٍ، فيبقى شيءٌ ونصفُ سُدْسِ شيءٍ. وتُلقي ثُلْثَ فلسٍ من ثلثَي فلسٍ فيبقى ثُلْثُ فلسٍ، وتلقي ثُلْثَي درهمٍ من درهمٍ ونصفَ سُدْسٍ، فيبقى ربعُ وسدسُ درهمٍ يعدلُ شيئاً ونصفَ سُدْسِ شيءٍ / وثلثَ فلسٍ. فالدرهمُ يعدل شيئين وثلاثةَ أخماسِ شيءٍ وأربعة أخماسِ فلسٍ. فألْقِ الثلثَي درهمٍ من ثَمنِ الدابّة، وزِدْ مكانه ثلثَي ما يعادل الدرهمَ، وهو شيءٌ، وثلثُ شيءٍ وخُمْسا شيءٍ <وخمسا فلس> وثلثا خُمْسِ فلسٍ. فصارت قيمةُ الدابةِ ثلاثةَ أشياء، وخُمسَ شيءٍ وفلساً وخُمْسَ فلسٍ. فقد سقط اسمُ الدرهم وقام مقامه شيئان وثلاثةُ أخماس شيء وأربعة أخماس فلس. فألْقِ ثلثَ الدرهمِ الذي في قيمة الدينار، وزِدْ مكانه ما يعادله وهو ثُلثُ ما يعدل الدراهمَ، وهو ثلثا شيءٍ وخُمْس شيءٍ وخُمْس فلسٍ وثلثُ خُمْسِ فلسٍ، فصار قيمةُ الدينار شيئين وخُمْس شيءٍ وثلاثة أخماس فلسٍ. فقد وَضَحَ أن مع الأوّل شيئاً ومع الثاني، وهو صاحبُ الدينار، شيئين وخُمْسَ شيءٍ وثلاثةَ أخماس فلس، ومع الثالث وهو <صاحب> الدرهم شيئين وثلاثةَ أخماس شيء وأربعة أخماس فلس، ومع الرابع فلساً. وقيمة الدابّةِ ثلاثة أشياء وخُمسا شيءٍ وفلسٌ وخمسُ فلسٍ.

٩٦-و

1 أضفْه: أضيفه — 11 وثلثا: وثلث — 13-14 ثلث الدرهم الذي: الثلاثة الدرهم التي — 14 الدينار: الدابّة — 16 شيئاً: شيء.

Le quatrième, ayant un fels, a dit aux trois autres : « donnez-moi le cinquième de ce que vous avez, je l'ajoute à ce que j'ai, j'aurai le prix de la bête ». Mais le cinquième de ce qu'ils ont est une chose plus les quatre cinquièmes du cinquième d'une chose plus le cinquième d'un fels plus les deux cinquièmes du cinquième d'un fels. Si donc il l'ajoute au fels qu'il a, il aura un fels plus un cinquième plus les deux cinquièmes d'un cinquième d'un fels plus une chose plus quatre cinquièmes de cinquième d'une chose, ce qui est par conséquent égal à la valeur de la bête, qui est trois choses plus deux cinquièmes d'une chose plus un fels plus le cinquième d'un fels. Ôte un fels et le cinquième d'un fels d'un fels et le cinquième d'un fels, et de deux cinquièmes d'un cinquième d'un fels, il reste deux cinquièmes d'un cinquième d'un fels. Ôte une chose et quatre cinquièmes de cinquième d'une chose de trois choses et de deux cinquièmes d'une chose, il reste deux choses et un cinquième d'une chose et un cinquième d'un cinquième d'une chose égal à deux cinquièmes d'un cinquième d'un fels. Le fels est donc égal à vingt-huit choses. Pose la chose ce que tu veux. C'est comme si nous la posions un, ce qui est avec le premier. Le fels est vingt-huit, ce qui est avec le quatrième. Et avec le deuxième, dix-neuf, car c'est les trois cinquièmes de ce qu'a le quatrième plus le double de ce qu'a le premier plus son cinquième. Et le troisième a vingt-cinq, car il a quatre cinquièmes de ce qu'a le quatrième et le double de ce qu'a le premier plus trois cinquièmes. Et la valeur de la bête est trente-sept car [96^{v}] elle est égale à ce qu'a le quatrième plus son cinquième plus trois fois ce qu'a le premier plus ses deux cinquièmes.

Ce procédé est ce qui est connu des arithméticiens ; c'est une méthode correcte, mais elle est difficile à appliquer, surtout si le nombre augmente. Je l'ai rendue aisée par une inférence valide et une méthode sûre et claire. Il n'y a de puissance qu'en Dieu.

Posons un dirham tout ce qu'ils ont et posons le premier une chose de ce dirham. Il reste avec les trois autres un dirham moins un chose. Si nous ajoutons sa moitié à ce qu'a le premier, qui est une chose, alors la valeur de la bête sera la moitié d'une chose plus la moitié d'un dirham. Nous posons ensuite avec le second un dinar. Il reste avec les trois autres un dirham moins un dinar. Si nous ajoutons son tiers à ce qu'a le second, qui est un dinar, alors la valeur de la bête sera deux tiers d'un dinar plus un tiers d'un dirham. Elle est par conséquent égale à la valeur de la bête de l'autre

فقال الرابع، ومعه فلسٌ، للثلاثة: أعطوني خُمْسَ ما معكم أُضِفْهُ إلى ما معي، فيكون ذلك ثَمنَ الدابّة. وخُمْسُ ما معهم شيءٌ وأربعةُ أخماس خُمْسِ شيءٍ وخُمْس فلسٍ، وخمسا خُمْسِ فلسٍ. فإذا أضافه إلى الفلس الذي معه صار فلساً وخُمساً وخُمسَي خُمْسِ فلسٍ وشيئاً وأربعةَ أخماسِ خمسِ شيءٍ، فهو إذن يعدل قيمةَ الدابّةِ وهو ثلاثة أشياء وخُمْسا شيءٍ وفلسٌ وخمسُ فلسٍ. فألْقِ فلساً وخُمْسَ فلسٍ من فلسٍ وخُمْس فلسٍ وخُمْسَيْ خُمْسِ فلسٍ، فيبقى خُمْسا خُمْسِ فلسٍ، وألْقِ شيئاً وأربعة أخماس خُمْس شيءٍ من ثلاثة أشياء وخُمْسَيْ شيءٍ، فيبقى شيئان <وخمس شيءٍ> وخُمْسُ خُمْسِ شيءٍ يعدل خُمْسَي خُمْسِ فلسٍ. فالفلسُ يعدل ثمانيةً وعشرين شيئاً. فاجعل الشيءَ ما شِئتْ، فكأنّا جعلناه واحداً، وهو ما مع الأوّل، والفلسُ ثمانيةٌ وعشرون، وهو ما مع الرابع، ومع الثاني تسعةَ عشرَ لأنّه ثلاثة أخماسِ ما مع الرابعِ، ومِثْلاَ ما مع الأوّل ومثلُ خُمْسه، ومع الثالث خمسةٌ وعشرون، لأنّه أربعة أخماسِ ما مع الرابع، ومِثْلا ما مع الأوّل و[مِثْلا] ثلاثة أخماسه، وقيمةُ الدابّة سبعةٌ وثلاثون؛ لأنّه / مثلُ ما مع ٩٦-ظ
الرابع ومثلُ خُمْسه ومثلُ ثلاثةِ أمثالِ ما مع الأوّل؛ ومثل خُمْسَيه.

وهذا العملُ هو ما يعرفه الحُسّاب فيما بينهم، وهو مذهب صحيحٌ إلاّ أنّه يَدِقُّ على من يعمله خصوصاً إن كَثُر العددُ، وقد سهّلْتُه بقياس صحيحٍ ومذهبٍ متقنٍ واضحٍ — ولا قوّة إلاّ بالله.

وهو أن نجعل جميع ما معهم درهماً، ونجعل مع الأوّل من هذا الدرهم شيئاً، فيبقى مع الثلاثة درهمٌ إلاّ شيئاً. فإذا أضفنا نصفه إلى ما مع الأوّل، وهو شيءٌ، صار قيمةُ الدابّة نصفَ شيءٍ ونصفَ درهمٍ. ثمّ نجعل مع الثاني ديناراً، <فيبقى مع الثلاثة درهمٌ إلاّ ديناراً>. فإذا أضفْنا ثلثَه إلى ما مع الثاني — وهو دينارٌ — صار قيمةُ الدابّةِ ثلثَي دينارٍ وثلثَ درهمٍ؛ فهو إذنْ يعدل قيمةَ الدابّة من

1 أضفْه: أضيفه — 4 وخمسا وخمسي: وخمس وخمسا — 7 وخمسي: وخمس — 11 ومثلا: ومثــل / ومثل: ومثلا — 14 خمسيه: خمسِه — 18 أن: فوق السطر.

membre, qui est une demi-chose plus un demi-dirham. Ôte le tiers d'un dirham de la moitié d'un dirham, il reste les deux tiers d'un dinar égal à la moitié d'une chose et le sixième d'un dirham. Ainsi le nom du dinar est ôté, et à sa place on a trois quarts d'une chose plus un quart d'un dirham. Tu poses ensuite avec le troisième un dinar, il reste donc avec les trois autres un dirham moins un dinar. Si nous ajoutons son quart à ce qu'a le troisième, qui est un dinar, alors la valeur de la bête sera trois quarts de dinar plus un quart de dirham, ce qui est égal à la valeur de la bête dans l'autre membre, qui est une demi-chose plus un demi-dirham. Ôte un quart de dirham d'un demi-dirham. Il reste une demi-chose et un quart de dirham égal à trois quarts de dinar. Le dinar est donc égal aux deux tiers d'une chose plus un tiers de dirham. Alors le nom du dinar est ôté et à sa place on a deux tiers d'une chose plus un tiers de dirham. On a ainsi montré que le premier a une chose, le second trois quarts de chose plus un quart de dirham et le troisième deux tiers d'une chose plus un tiers de dirham. Tous les trois ont donc deux choses plus un quart plus un sixième d'une chose plus un tiers et un quart de dirham. Or nous avons posé que les quatre avaient un dirham ; il reste donc avec le quatrième un quart de dirham plus un sixième de dirham moins deux choses et un quart et un sixième d'une chose. Il a dit aux trois qui ont deux choses plus un quart plus un sixième d'une chose plus un tiers plus un quart de dirham : « donnez-moi le cinquième de ce que vous avez, que je l'ajoute à ce que j'ai ». Mais le cinquième de ce qu'ils ont est sept parties de soixante parties de dirham plus vingt-neuf parties de soixante parties d'une chose ; si donc il l'ajoute à [97r] ce qu'il a, qui est un quart plus un sixième de dirham moins deux choses et un quart et un sixième d'une chose, il aura trente-deux parties de soixante parties de dirham moins une chose et cinquante-six parties de soixante parties d'une chose, ce qui est le prix de la bête. Il est par conséquent égal à son prix de l'autre membre, qui est une demi-chose plus un demi-dirham. Réduis par ceci ; on a après la réduction le tiers d'un dixième de dirham égal à deux choses plus un tiers plus un dixième d'une chose. Le dirham est donc égal à soixante-treize choses. Pose la valeur du dirham soixante-treize, ce qu'ont les quatre, et la valeur de la chose, un, ce qu'a le premier. Le deuxième a dix-neuf, car c'est le quart de la valeur du dirham plus trois quarts de la

الناحية الأخرى، وهو نصفُ شيءٍ ونصفُ درهمٍ. فألْقِ ثلثَ درهمٍ من نصفِ درهمٍ يبقَ ثلثا دينارٍ يعدل نصفَ شيءٍ وسدْسَ درهمٍ. فقد بطل اسم الدينار وقام مقامه ثلاثةُ أرباعِ شيءٍ وربعُ درهم. ثم تجعل مع الثالث ديناراً، فيبقى مع الثلاثة درهمٌ إلاّ ديناراً. فإذا أضفنا ربعَه إلى ما مع الثالث — وهو دينارٌ — صار قيمةُ الدابّة ثلاثة أرباعِ دينارٍ وربع درهم، وهو يعدل قيمةَ الدابّة من الناحية الأخرى، وهو نصفُ شيءٍ ونصف درهمٍ. فألقِ ربعَ درهمٍ من نصفِ درهمٍ، فيبقى نصفُ شيءٍ وربع درهمٍ يعدل ثلاثةَ أرباعِ دينارٍ، فالدينارُ يعدل ثلثي شيءٍ وثلثَ درهمٍ. فقد سَقَطَ اسمُ الدينار، وقام مقامه ثلثا شيءٍ وثلث درهمٍ. فقد تبيّن أن مع الأوّل شيئاً ومع الثاني ثلاثةَ أرباعِ شيءٍ وربعَ درهمٍ، ومع الثالث ثلثَي شيءٍ وثلث درهمٍ. فجميعُ ما مع الثلاثة شيئان وربعٌ وسدسُ شيءٍ وثلثٌ وربعُ درهم. وكنّا جعلنا مع الأربعة درهماً، فيبقى مع الرابعِ ربعُ درهمٍ وسدس درهمٍ إلاّ شيئين وربعَ وسُدْسَ شيءٍ. فقال للثلاثة، ومعهم شيئان وربعٌ وسدْسُ شيءٍ وثلثُ وربعُ درهمٍ: "أعطوني خُمْسَ ما معكم أُضِفْه إلى ما معي". وخُمْسُ ما معهم سبعة أجزاءٍ من ستين جزءاً من درهمٍ وتسعة وعشرون جزءاً من ستّين جزءاً من شيء. فإذا أضافه / إلى ما معه وهو ربعُ وسدسُ درهمٍ إلاّ شيئين وربعَ وسدسَ شيءٍ، صار معه اثنان وثلاثون جزءاً من ستين جزءاً من درهمٍ إلاّ شيئاً وستة وخمسون جزءاً من ستين جزءاً من شيءٍ، وهو ثمنُ الدابّة. فهو إذنْ يعدلُ ثَمَنَها من الناحية الأُخرى، وهو نصفُ شيءٍ ونصف درهم. فتقابلُ بها، فيكون بعد المقابلة ثلثُ عُشْرِ درهمٍ يعدل شيئين وثلثَ وعُشْرَ شيءٍ. فالدرهمُ يعدل ثلاثةً وسبعين شيئاً. فاجعل قيمةَ الدرهمِ ثلاثةً وسبعين، وهو جميعُ ما مع الأربعة، وقيمةَ الشيء واحداً وهو ما مع الأوّل؛ ومع الثاني تسعة

٩٧-و

2 يبقَ: يبقى — 8 وقام: الواو فوق السطر — 9 شيئاً: شيء — 10 ثلثي: ثلثا. وهو جائز أيضاً ولكنه يؤثر عادة وجه النصب — 13 أضفْه: أضيفه — 20 الدرهم: الدراهم.

valeur de la chose. Le troisième a vingt-cinq, car c'est le tiers de la valeur du dirham plus les deux tiers de la valeur de la chose. Et le quatrième a vingt-huit, car il a le quart et le sixième de la valeur du dirham moins deux fois <la somme de deux choses> plus un quart plus un sixième de la valeur de la chose.

Si tu veux, additionne ce qu'ont le premier et le second et le troisième, ce qui est quarante-cinq, et retranche-le de soixante-treize ; ce qui reste est ce qu'a le quatrième, qui est vingt-huit, et la valeur de la bête est trente-sept, car c'est la moitié de la valeur du dirham et la moitié de ce qu'a le premier.

Tu peux appliquer ce procédé à ce qui te parvient de cet art, même si le nombre augmente, car tu n'as besoin d'utiliser que trois genres. Je veux dire par « genres », le dirham, le dinar et le fels, ou autre genre qui facilite la tâche de celui qui examine cet art.

<40> Si on dit : cinq individus se sont réunis pour acheter une bête ; le premier a dit au second et au troisième : « si vous me donnez la moitié de ce que vous avez, j'aurai le prix de la bête ». Le deuxième a dit au troisième et au quatrième : « si vous me donnez le tiers de ce que vous avez, j'aurai le prix de la bête ». Le troisième a dit au quatrième et au cinquième : « si vous me donnez le quart de ce que vous avez, j'aurai le prix de la bête ». Le quatrième a dit au cinquième et au premier : « si vous me donnez le cinquième de ce que vous avez, j'aurai le prix de la bête ». Le cinquième a dit au premier et au second : « si vous me donnez le sixième de ce que vous avez, j'aurai le prix de la bête ». Quel est le prix de la bête et combien chacun d'eux avait-il ?[49]

On l'infère ainsi : tu poses avec le premier une chose, avec le second un dinar, avec le troisième un dirham ; dans ce problème et ses analogues, on n'a pas besoin de plus de ces trois espèces, même si le nombre augmente. Le premier a dit [97v] au deuxième et au troisième, lui qui a une chose alors qu'eux ont un dinar et un dirham : « si vous me donnez la moitié de ce que vous avez, que je l'ajoute à ce que j'ai, alors la somme sera le prix de la bête ». Mais la moitié de ce qu'ils ont est la moitié d'un dinar et la moitié

49
$$\begin{cases} v = x + \frac{1}{2}(y+z) \\ v = y + \frac{1}{3}(z+t) \\ v = z + \frac{1}{4}(t+u) \\ v = t + \frac{1}{5}(u+x) \\ v = u + \frac{1}{6}(x+y) \end{cases}$$

عشر، لأنّه ربع قيمةِ الدرهم وثلاثة أرباع قيمة الشيء؛ ومع الثالث خمسة وعشرون، لأنّه ثلث قيمة الدرهم وثلثا قيمة الشيء؛ ومع الرابع ثمانية وعشرون، لأنّه ربعُ وسدسُ قيمةِ الدرهم إلاّ مثليْنِ وربعَ وسدسَ قيمةِ الشيء.

وإن شئت فاجمع ما مع الأوّل والثاني والثالث، وهو خمسةٌ وأربعون، فأسقطه من ثلاثة وسبعين، فما بقي فهو ما مع الرابع، وهو ثمانية وعشرون. وقيمةُ الدابّة سبعة وثلاثون، لأنّه نصف قيمة الدرهم ونصف ما مع الأوّل.

وقد يمكنك أن تعمل بهذا العمل ما جاءك من هذا الفنّ وإنْ كَثُرَ العددُ، لأنّك لا تحتاج أن تستعمل فيه أكثر من ثلاثة أجناسٍ، أعني بالأجناسِ: الدرهمَ والدينارَ والفلسَ أو غيرَ ذلك ممّا يَخِفُّ على من نظر في هذا الفن.

<٤٠> فإن قيل: خمسة نفرٍ اجتمعوا على شراء دابّة. فقال الأوّلُ للثاني والثالث: إن أعطيتماني نصفَ ما معكما كان معي ثَمنُ الدابّة. وقال الثاني للثالث والرابع: إن أعطيتماني ثلثَ ما معكما كان معي ثَمنُ الدابّة، وقال الثالث للرابع والخامس: إن أعطيتماني رُبعَ ما معكما كان معي ثَمنُ الدابّة. <وقال الرابع للخامس والأوّل: إن أعطيتماني خُمسَ ما معكما كان معي ثمنُ الدابّة>. وقال الخامس للأوّل والثاني: إن أعطيتماني سدسَ ما معكما كان معي ثَمَنُ الدابّة، كم ثَمنُ الدابّةِ؟ وكم مع كلّ واحدٍ منهم؟

قياسُه: أن تجعل مع الأوّل شيئاً، ومع الثاني ديناراً، ومع الثالث درهماً، وليس يُحتاج في هذه المسألة وما أشبهها إلى أكثر من هذه الثلاثة الأجناسِ وإن كَثُرَ العددُ. فقال / الأوّلُ — ومعه شيء — للثاني والثالث، ومعهما دينار ودرهم: إن أعطيتماني نصف ما معكما أُضفه إلى ما معي، يكون المجتمعُ ثمنَ الدابّة. ونصف ما معهما نصف دينارٍ ونصف درهمٍ. فيجب أن يكون ثَمنُ

٩٧-ظ

9 أو: الواو فوق السطر — 10 خمسة: خمس / شراء: شرى — 12 ثلث: ربع — 13 ربع: خمس —
18 الأجناس: فوق السطر — 20 أضفه: أضيفه.

d'un dirham. Il faut donc que le prix de la bête soit une chose plus la moitié d'un dinar et la moitié d'un dirham. Le second, ayant un dinar, a dit au troisième et au quatrième : « si vous me donnez le tiers de ce que vous avez, que je l'ajoute à ce que j'ai, qui est un dinar, j'aurai le prix de la bête, qui est une chose plus la moitié d'un dinar plus la moitié d'un dirham ». Ôtes-en un dinar, il reste une chose plus un demi-dirham moins la moitié d'un dinar, ce qui est le tiers de ce qu'ont le troisième et le quatrième ; tu le multiplies par trois, on a trois choses plus un dirham et un demi, moins un dinar et un demi, ce qu'ont le troisième et le quatrième. Tu en retranches ce qu'a le troisième, qui est un dirham, il reste trois choses plus un demi-dirham moins un dinar et demi, c'est ce qu'a le quatrième. Mais le troisième a dit au quatrième et au cinquième : « si vous me donnez le quart de ce que vous avez, que je l'ajoute à ce que j'ai, j'aurai le prix de la bête », qui est une chose plus un demi-dinar plus un demi-dirham. Ôte du prix de la bête ce qu'a le troisième, qui est un dirham ; il reste une chose plus la moitié d'un dinar moins la moitié d'un dirham, ce qui est le quart de ce qu'ont le quatrième et le cinquième. Tu le multiplies par quatre, on a quatre choses plus deux dinars moins deux dirhams, ce qu'ont le quatrième et le cinquième. Tu en ôtes ce qu'a le quatrième, c'est-à-dire trois choses plus un demi-dirham moins un dinar et demi ; il reste ce qu'a le cinquième, une chose, plus trois dinars et demi, moins deux dirhams et demi. Le quatrième, qui a trois choses plus un demi-dirham moins un dinar et demi, a dit au cinquième et au premier, qui ont deux choses plus trois dinars et demi moins deux dirhams et demi : « si vous me donnez le cinquième de ce que vous avez, que je l'ajoute à ce que j'ai, j'aurai le prix de la bête ». Mais le cinquième de ce qu'ils ont est les deux cinquièmes d'une chose et sept dixièmes de dinar moins un demi-dirham. S'il l'ajoute à ce qu'il a, il vient trois choses plus deux cinquièmes d'une chose moins quatre cinquièmes de dinar, ce qui est égal au prix de la bête de l'autre membre, c'est-à-dire une chose plus la moitié d'un dinar et la moitié d'un dirham. Tu réduis par ceci, on a un dirham égal à quatre choses plus quatre cinquièmes d'une chose moins deux dinars et trois cinquièmes de dinar. Ôte le demi-dirham du prix de la bête et ajoute à sa place la moitié de ce que vaut le dirham, qui est deux choses plus deux cinquièmes d'une chose moins trois dixièmes de dinar, alors la valeur de la bête sera trois choses plus deux cinquièmes d'une chose moins quatre

الدابّة شيئاً ونصفَ دينارٍ ونصفَ درهمٍ. وقال الثاني — ومعه دينارٌ — للثالث والرابع: إن أعطيتماني ثلثَ ما معكما، أُضِفْه إلى ما معي وهو دينارٌ، فيكون ثمن الدابّة، وهو شيء ونصف دينار ونصف درهمٍ. فأَسقط منه ديناراً، فيبقى شيءٌ ونصف درهم إلاّ نصف دينارٍ، وهو ثلثُ ما مع الثالث والرابع. فتضربه في ثلاثة، فيكون ثلاثةَ أشياء ودرهماً ونصفاً إلاّ ديناراً ونصفاً، وهو ما مع الثالث والرابع. فتُسقط منه ما مع الثالث — وهو درهمٌ — فيبقى ثلاثة أشياء ونصف درهم إلاّ ديناراً ونصفاً، وهو ما مع الرابع. وقال الثالث للرابع والخامس: إن أعطيتماني رُبعَ ما معكما أُضِفه إلى ما معي، كان ثمن الدابّة، وهو شيء ونصف دينار ونصف درهم. فأسقط من ثمن الدابّة ما مع الثالث وهو درهمٌ، فيبقى شيءٌ ونصف دينارٍ إلاّ نصفَ درهمٍ، وهو ربعُ ما مع الرابع والخامس، فتضربه في أربعةٍ فيكون أربعةَ أشياء ودينارين إلاّ درهمين، وهو ما مع الرابع والخامس. فتُسقط منه ما مع الرابع، وهو ثلاثة أشياء ونصف درهم إلاّ ديناراً ونصفاً، فيبقى مع الخامس شيءٌ وثلاثة دنانير ونصف إلاّ درهمين ونصفاً. فقال الرابع، ومعه ثلاثة أشياء ونصف درهمٍ إلاّ ديناراً ونصفاً، للخامس والأوّل، ومعهما شيئان وثلاثة دنانير ونصف إلاّ درهمين ونصفاً: إن أعطيتماني خُمْسَ ما معكما، أُضِفْه إلى ما معي، كان ثمن الدابّة. وخُمْسُ ما معهما خُمْسا شيءٍ وسبعة أعشار دينارٍ إلاّ نصف درهمٍ. فإذا أضافه إلى ما معه، صار ثلاثةَ أشياء وخُمْسي شيءٍ إلاّ أربعة أخماس دينارٍ، وهو يعدل ثَمنَ الدابّةِ من الناحية الأخرى، وهو شيءٌ ونصف دينارٍ ونصف درهمٍ. فتقابل بها، فيكون الدرهمُ يعدل أربعةَ أشياء وأربعة أخماسِ شيءٍ إلاّ دينارين، وثلاثةَ أخماس دينار. فألْقِ النصفَ الدرهمِ من ثمنِ الدابّةِ، وزِدْ مكانه نصفَ ما يعدل الدرهمَ، وهو شيئان وخُمْسا شيءٍ إلاّ ثلاثة أعشار دينارٍ، فصارت قيمةُ الدابّة ثلاثة أشياء وخُمْسَي شيءٍ إلاّ أربعةَ

2 أضفه: أضيفه — 7 ونصفاً: في الهامش — 10-11 فتضربه ... والخامس: في الهامش — 16 أضفْه: أضيفه — 21-22 إلاّ ثلاثة ... إلاّ: في الهامش، وكرّر "إلاّ" في النص.

cinquièmes de dinar, et ce qu'a le premier est une chose, ce qu'a le deuxième est un dinar, ce qu'a le troisième est quatre choses [98r] et quatre cinquièmes d'une chose moins deux dinars et trois cinquièmes de dinar, et le quatrième a cinq choses et deux cinquièmes de chose moins deux dinars et quatre cinquièmes de dinar. Ceci sera avec le quatrième, car le quatrième avait trois choses et la moitié d'un dirham moins un dinar et demi. Nous avons ôté la moitié du dirham de ce qu'il a et nous avons ajouté à sa place la moitié de ce que vaut le dirham. D'après ce que nous avons montré, il faut que le cinquième ait dix dinars moins onze choses. Il a alors dit au premier et au second, qui ont une chose et un dinar : « si vous me donnez le sixième de ce que vous avez, que je l'ajoute à ce que j'ai, j'aurai le prix de la bête ». Mais le sixième de ce qu'ils ont est un sixième d'une chose et un sixième de dinar. Alors le cinquième aura dix dinars plus un sixième moins dix choses et une demi-chose et un tiers de chose, ce qui est le prix de la bête, et qui est égal à son prix de l'autre membre, c'est-à-dire trois choses et deux cinquièmes d'une chose moins quatre cinquièmes de dinar. Tu réduis par ceci ; tu auras après réduction la chose, quarante-sept, ce qu'a le premier. Le dinar est soixante et un, ce qu'a le second. Le troisième a soixante-sept, car il a quatre fois plus quatre cinquièmes de fois ce qu'a le premier moins deux fois et trois cinquièmes de fois ce qu'a le second. Et avec le quatrième, quatre-vingt-trois, car il a cinq fois plus deux cinquièmes ce qu'a le premier, moins deux fois et quatre cinquièmes de fois ce qu'a le second. Et avec le cinquième, quatre-vingt-treize, car il a dix fois ce qu'a le second moins onze fois ce qu'a le premier. Et la valeur de la bête est cent onze, car elle est trois fois et deux cinquièmes de fois ce qu'a le premier moins quatre cinquièmes de ce qu'a le second.

Et si tu veux déterminer ce qu'ont le quatrième et le cinquième par un autre procédé, sachant que le premier a quarante-sept, le second soixante et un et le troisième soixante-sept ; alors ôte ce qu'a le deuxième du prix de la bête, il reste cinquante ; multiplie-le par trois, on a cent cinquante ; ôtes-en ce qu'a le troisième, qui est soixante-sept, il reste ce qu'a le quatrième, qui est quatre-vingt-trois. Et si tu veux connaître ce qu'a le cinquième, ôte ce

أخماسِ دينارٍ، ومع الأوّل شيءٌ ومع الثاني دينارٌ، ومع الثالث أربعة أشياء / ٩٨-و
وأربعة أخماسِ شيءٍ إلاّ دينارين وثلاثة أخماسِ دينارٍ، ومع الرابع خمسةُ أشياء
وخُمْسا شيءٍ إلاّ دينارين، وأربعةُ أخماس دينار. وإنّما صار هذا مع الرابع؛ لأنّ
الرابعَ كان معه ثلاثة أشياء ونصف درهمٍ إلاّ ديناراً ونصفاً. فأسقطنا النصف
الدرهم ممّا معه، وزدْنا مكانه نصفَ ما يعدل الدرهم. ويجب أن يكون على ما
بيّنّا، مع الخامس، عشرة دنانيرَ إلاّ أحد عشر شيئاً. فقال للأوّل والثاني، ومعهما
شيءٌ ودينار: إن أعطيتماني سُدسَ ما معكما، أُضِفْه إلى ما معي كان ثمن الدابّة.
وسدسُ ما معهما سدسُ شيءٍ وسدسُ دينارٍ، فصار مع الخامس عشرةُ دنانير
وسدسٌ إلاّ عشرة أشياء ونصفَ <شيء> وثلثَ شيء وهو ثَمَنُ الدابّة، فهو
يعدل ثَمَنَها من الناحية الأخرى، وهو ثلاثة أشياء وخمسا شيءٍ إلاّ أربعة أخماس
دينارٍ. فتقابل بها، فيكون بعد المقابلة الشيءُ سبعةً وأربعين، وهو ما مع الأوّل،
والدينار واحداً وستين وهو ما مع الثاني؛ ومع الثالث سبعة وستون، لأنّه أربعةُ
أمثال و<أربعة> أخماسِ مثلِ ما مع الأوّل إلاّ مثلين وثلاثةَ أخماسِ مثل ما مع
الثاني؛ ومع الرابع ثلاثة وثمانون، لأنّه خمسة أمثالِ وخُمسا مثلِ ما مع الأوّل إلاّ
مثلي وأربعة أخماس مثلِ ما مع الثاني؛ ومع الخامس ثلاثة وتسعون، لأنّه عشرة
أمثال ما مع الثاني إلاّ أحد عشر مثل ما مع الأوّل؛ وقيمة الدابّة مائة وأحد
عشر، لأنّه ثلاثة أمثالِ وخُمْسا مثلِ ما مع الأوّل إلاّ أربعة أخماس ما مع الثاني.

وإن أحببت أن تستخرج ما مع الرابع والخامس بغير هذا العملِ. وقد
علمتَ أنّ مع الأوّل سبعةً وأربعين، ومع الثاني أحداً وستين ومع الثالث سبعةً
وستين. فأسقط ما مع الثاني من ثمن الدابّة، فيبقى خمسون، فاضربه في ثلاثة
فيكون مائةً وخمسين. فأسقط منها ما مع الثالث، وهو سبعة وستون، فيبقى ما
مع الرابع وهو ثلاثةٌ وثمانون. فإذا أردتَ أن تعلم ما مع الخامس، فأسقط ما مع

2 دينارين: ديناراً – 7 أضفْه: أضيفه – 9 وسدس: وسدساً – 13 مثلين: مثلي.

qu'a le troisième du prix de la bête ; il reste quarante-quatre ; multiplie-le par quatre, on a cent [98^{v}] soixante-seize ; ôtes-en ce qu'a le quatrième, qui est quatre-vingt-trois ; il reste quatre-vingt-treize, c'est-à-dire ce qu'a le cinquième.

Si tu veux, pose ce qu'a le premier, une chose, ce qu'a le second, un dinar, ce qu'a le troisième, un dirham, et ce qu'a le quatrième, un fels. Tu n'as pas besoin dans ce problème et ses semblables, même si le nombre augmente, de plus que ces quatre genres. Le premier a dit au deuxième et au troisième : « si vous me donnez la moitié de ce que vous avez, que je l'ajoute à ce que j'ai, alors j'aurai le prix de la bête ». Le prix de la bête est donc une chose, et la moitié d'un dinar est la moitié d'un dirham. Le deuxième a dit au troisième et au quatrième : « si vous me donnez le tiers de ce que vous avez, que je l'ajoute à ce que j'ai, j'aurai le prix de la bête ». Donc de ce membre le prix sera également un dinar plus un tiers de dirham et un tiers de fels ; il est donc égal au prix de la bête de l'autre membre, qui sera une chose plus un demi-dinar plus un demi-dirham. Réduis par ceci ; on aura le fels égal à trois choses plus un demi-dirham moins un dinar et demi, ce qu'a le quatrième. Posons un fels ce qu'a le cinquième. Le troisième ayant un dirham a dit au quatrième et au cinquième, qui ont un fels et trois choses et un demi-dirham moins un dinar et demi : « si vous me donnez le quart de ce que vous avez, que j'ajoute à ce que j'ai, on a le prix de la bête ». Mais le quart de ce qu'ils ont est trois quarts de chose plus un quart de fels plus un huitième de dirham moins trois huitièmes de dinar. Si je l'ajoute au dirham que j'ai, j'aurai le prix de la bête, qui est aussi dans ce membre, un dirham plus un huitième de dirham plus un quart de fels plus trois quarts moins trois huitièmes de dinar, qui est égal au prix de la bête à partir du premier membre, qui est une chose plus un demi-dinar plus un demi-dirham. Réduis par ceci ; on a le fels égal à une chose et trois dinars et demi moins deux dirhams et demi, ce qu'a le cinquième. Tu procèdes ensuite dans ce problème comme je te l'ai montré. Si Dieu le veut.

الثالث من ثَمن الدابّة، فيبقى أربعة وأربعون. فاضربها في أربعةٍ، فيكون مائةً / ثلاثةٌ ٩٨-ظ
وستةً وسبعين. فأسقط منها ما مع الرابع، وهو ثلاثةٌ وثمانون، فيبقى
وتسعون وهو ما مع الخامس.

فإن شئتَ فاجعل ما مع الأوّل شيئاً، ومع الثاني ديناراً، ومع الثالث
درهماً، ومع الرابع فلساً. وليس يُحتاج في هذه المسألة وما أشبهها — وإن كثُرَ
العددُ — إلى أكثر من هذه الأربعةِ الأجناسِ. فقال الأوّل للثاني والثالث: إن
أعطيتماني نصفَ ما معكما، أُضيفُه إلى ما معي، فيكون ثمن الدابّةِ، فصار ثمنُ
الدابّةِ شيئاً ونصفَ دينارٍ ونصف درهمٍ. وقال الثاني للثالث والرابع: إن
أعطيتماني ثلثَ ما معكما، أُضيفُه إلى ما معي، صار ثَمنَ الدابّة. فصار الثمنُ
أيضاً من هذه الجهة ديناراً وثلثَ درهمٍ وثلث فلسٍ. فهو يعدل ثَمنَ الدابةِ من
الناحية الأُخرى، وهو شيءٌ ونصف دينارٍ ونصف درهمٍ. فتقابل به، فيكون
الفلسُ يعدل ثلاثةَ أشياء ونصفَ درهمٍ إلّا ديناراً ونصفاً، وهو ما مع الرابع،
ونجعل <ما> مع الخامس فلساً. فقال الثالثُ — ومعه درهمٌ — للرابع والخامس
ومعهما فلسٌ وثلاثة أشياء ونصفُ درهمٍ إلّا ديناراً ونصفاً: إن أعطيتماني ربعَ ما
معكما أضيفه إلى ما معي يكون ثَمن الدابّة. ورُبعُ ما معهما ثلاثة أرباعِ شيءٍ
وربعُ فلسٍ وثُمْن درهمٍ إلّا ثلاثة أثمانِ دينارٍ، فإذا زِدْتُه على الدرهمِ الذي معي
صار ثَمنَ الدابّة، وهو من هذه الجهة أيضاً درهمٌ وثُمْن درهمٍ وربعُ فلسٍ وثلاثةُ
أرباعٍ إلّا ثلاثةَ أثمانِ دينارٍ، فهو يعدل ثَمنَ الدابة من الناحية الأولى، وهو شيءٌ
ونصف دينارٍ ونصف درهمٍ. فتقابل بها، فيكون الفلسُ يعدل شيئاً وثلاثةَ دنانير
ونصفاً إلّا درهمين ونصفاً، وهو ما مع الخامس. ثمّ تعمل في المسألة كما بيّنتُ
لك، إن شاء الله.

7 أضيفه: الفعل جواب الشرط، وجاز رفعه لأنّ فعل الشرط ماضٍ — 16 الدرهم: السدراهم — 17 أيضاً درهم: أيضاً درهماً.

<41> Si on dit : cinq individus se sont rencontrés, alors le premier dit au second : « si tu me donnes la moitié de ce que tu as, j'aurai le prix de la bête ». Le deuxième a dit au troisième : « si tu me donnes le tiers de ce que tu as, j'aurai le prix de la bête ». Le troisième a dit au quatrième : « si tu me donnes le quart de ce que tu as, j'aurai le prix de la bête ». Et le quatrième a dit [99r] au cinquième : « si tu me donnes le cinquième de ce que tu as, j'aurai le prix de la bête ». Et le cinquième a dit au premier : « si tu me donnes le sixième de ce que tu as, j'aurai le prix de la bête ». Quel est le prix de la bête et combien chacun d'eux a-t-il ?[50]

On l'infère ainsi : tu poses une chose ce qu'a le premier, un dinar ce qu'a le second, un dirham ce qu'a le troisième. Alors le premier, ayant une chose, a dit au second, qui a un dinar : « si tu me donnes la moitié de ce que tu as, j'aurai le prix de la bête », donc le prix est une chose plus un demi-dinar. Le second, ayant un dinar, a dit au troisième, qui a un dirham : « si tu me donnes le tiers de ce que tu as, j'aurai le prix de la bête », alors dans ce membre le prix sera un dinar plus un tiers de dirham, qui est égal à une chose plus un demi-dinar, qui est le prix de la bête dans l'autre membre. Réduis par ceci ; on a le dirham égal à trois choses moins un dinar et demi, ce qu'a le troisième. Puis tu poses un dirham avec le quatrième, alors le troisième, ayant trois choses moins un dinar et demi, a dit au quatrième, qui a un dirham : « si tu me donnes son quart, qui est le quart de dirham, j'aurai le prix de la bête ». Donc le prix, à partir de ce membre, est trois choses plus un quart de dirham moins un dinar et demi, qui est égal au prix de la bête de l'autre membre, qui est une chose plus un demi-dinar. Réduis par ceci ; on a un dirham égal à huit dinars moins huit choses, ce qu'a le quatrième. Puis tu poses que le cinquième a un dirham. Alors le quatrième, qui a huit dinars moins huit choses, a dit au cinquième, qui a un dirham : « si tu me donnes son cinquième, j'aurai le prix de la bête », alors le prix dans ce membre est également huit dinars plus un cinquième de dirham moins huit choses, qui est égal au prix de la bête dans l'autre membre, qui est une chose plus un demi-dinar. Réduis par ceci ; on a le dirham égal à quarante-

50
$$\begin{cases} v = x + \frac{1}{2}y \\ v = y + \frac{1}{3}z \\ v = z + \frac{1}{4}t \\ v = t + \frac{1}{5}u \\ v = u + \frac{1}{6}x \end{cases}$$

<٤١> فإن قيل: خمسةُ نفرٍ التَقوْا. فقال الأوّل للثاني: إن أعطيتني نصفَ ما معك، كان معي ثَمنُ الدابّة. وقال الثاني للثالث: إن أعطيتني ثلث ما معك، كان معي ثَمنُ الدابةِ. وقال الثالث للرابع: إن أعطيتني ربعَ ما معك، كان معي ثَمنُ الدابّة. وقال الرابع / للخامس: إن أعطيتَني خُمسَ ما معك، كان معي ٩٩-و
ثَمنُ الدابّة. وقال الخامس للأوّل: إن اعطيتني سدسَ ما معك، كان معي ثَمنُ الدابّة. كم ثَمن الدابّة؟ وكم مع كلّ واحدٍ منهم؟

قياسُه: أن تجعل <ما مع> الأوّل شيئاً، ومع الثاني ديناراً، ومع الثالث درهماً. فقال الأوّل ومعه شيء، للثاني ومعه دينار: "إن أعطيتني نصفَ ما معك، كان معي ثَمنُ الدابّةِ"، فيكون الثَمنُ شيئاً ونصف دينارٍ. وقال الثاني، ومعه دينار، للثالث ومعه درهم: "إن أعطيتني ثلثَ ما معك، كان معي ثَمنُ الدابّةِ"، فيكون الثمنُ من هذه الجهة ديناراً وثلثَ درهمٍ، وهو يعدل شيئاً ونصف دينارٍ، الذي هو ثَمن الدابّةِ من الناحية الأخرى. فقابل بها، فيكونَ الدرهمُ يعدل ثلاثةَ أشياء إلاّ ديناراً ونصفاً، وهو ما مع الثالث. ثم تجعل مع الرابع درهماً. فقال الثالث، ومعه ثلاثة أشياء إلاّ ديناراً ونصفاً، للرابع ومعه درهم: "إن أعطيتني رُبعَه، وهو ربع درهم، كان معي ثَمن الدابّةِ". فيكون الثمنُ من هذه الجهة ثلاثةَ أشياءَ وربع درهمٍ إلاّ ديناراً ونصفاً، فهو يعدل ثَمن الدابّة من الناحية الأخرى، وهو شيء ونصف دينارٍ. فقابل بها، فيكونَ الدرهمُ يعدل ثمانيةَ دنانيرَ إلاّ ثمانية أشياء، وهو ما مع الرابع. ثم تجعل مع الخامس درهماً. فقال الرابع، ومعه ثمانية دنانير إلاّ ثمانية أشياء، للخامس، ومعه درهم: "إن أعطيتني خُمسَه، يكونُ معي ثَمنُ الدابّة"، فيكون الثَمنُ من هذه الجهة أيضاً ثمانيةَ دنانيرَ وخُمسَ درهمٍ إلاّ ثمانية أشياء، وهو يعدل ثَمنَ الدابّة من الناحية الأخرى، وهو شيء ونصف دينار. فتقابل بها، فيكون الدرهمُ يعدل خمسةً وأربعين شيئاً إلاّ سبعة وثلاثين

8 ومعه شيء: في الهامش.

cinq choses moins trente-sept dinars et demi, ce qu'a le cinquième. Il a dit au premier, qui a une chose : « si tu me donnes le sixième de ce que tu as, qui est un sixième de chose, que je l'ajoute à ce que j'ai, j'aurai le prix de la bête ». Alors de ce membre le prix sera quarante-cinq choses plus un sixième de chose moins trente-sept dinars et demi, qui est égal au prix de la bête de l'autre membre, qui est [99^{v}] une chose plus un demi-dinar. Réduis par ceci ; on a après la réduction quarante-quatre choses plus un sixième de chose égal à trente-huit dinars, que tu développes en sixièmes. Alors la chose sera égale à deux cent vingt-huit, ce qu'a le premier. Et le dinar est égal à deux cent soixante-cinq, ce qu'a le deuxième. Mais le troisième a trois choses moins un dinar et demi, ce qui est deux cent quatre-vingt-six et demi. Tu le développes aussi ; alors la chose, ce qui est avec le premier, est quatre cent cinquante-six. Et le dinar qui est avec le deuxième est cinq cent trente. Et le troisième aura cinq cent soixante-treize. Et le quatrième huit dinars moins huit choses, ce qui est cinq cent quatre-vingt-douze. Et le cinquième quarante-cinq choses moins trente-sept dinars et demi, ce qui est six cent quarante-cinq. Et la valeur de la bête sept cent vingt et un.

<42> Si on dit : quatre individus se sont rencontrés, alors le premier a dit au second : « si tu me donnes un dirham, j'aurai le double de ce qui te reste ». Le deuxième a dit au troisième : « si tu me donnes deux dirhams, j'aurai le triple de ce qui te reste ». Le troisième a dit au quatrième : « si tu me donnes trois dirhams, j'aurai le quadruple de ce qui te reste ». Le quatrième a dit au premier : « si tu me donnes quatre dirhams, j'aurai le quintuple de ce qui te reste ». Combien chacun d'eux avait-il ?[51]

On l'infère ainsi : tu poses une chose avec le premier et un dinar avec le second. Si donc le premier prend du second un dirham, alors le premier aura une chose plus un dirham, égal au double de ce qu'a le second, qui est

51
$$\begin{cases} x+1=2(y-1) \\ y+2=3(z-2) \\ z+3=4(t-3) \\ t+4=5(x-4) \end{cases}$$

ديناراً ونصفاً وهو ما مع الخامس، فقال للأوّل، ومعه شيء: "<إن> أعطيتني سدسَ ما معك – وهو سدس شيءٍ – أضِيفه إلى ما معي يكون ثَمنَ الدابّة"، فيكون الثَمنُ من هذه الجهة خمسةً وأربعين شيئاً وسدسَ شيءٍ إلاّ سبعةً وثلاثين ديناراً ونصفاً، فهو يعدل ثَمنَ الدابّة من الناحية الأخرى، وهو / شيء ونصف ٩٩-ظ دينار. فتقابل به، فيكون بعد المقابلة أربعةً وأربعين شيئاً وسدس شيءٍ يعدل ثمانيةً وثلاثين ديناراً، فتبسطها أسداساً، فيكون الشيءُ يعدل مائتين وثمانيةً وعشرين، وهو ما مع الأوّل، والدينارُ مائتين وخمسة وستين وهو ما مع الثاني، ومع الثالث ثلاثة أشياء إلاّ ديناراً ونصفاً، وهو مائتان وستة وثمانون ونصف. فتبسطها أيضاً، فيكون الشيءُ – وهو ما مع الأوّل – أربعمائةٍ وستة وخمسين، ويكون الدينارُ – وهو ما مع الثاني – خمسمائة وثلاثين، ويكون ما مع الثالث خمسمائةٍ وثلاثةً وسبعين، ومع الرابع ثمانية دنانير إلاّ ثمانية أشياءَ، وذلك خمسمائةٍ واثنان وتسعون، ومع الخامس خمسة وأربعون شيئاً إلاّ سبعة وثلاثين ديناراً ونصفاً وهو ستمائة وخمسة وأربعون، وتكون قيمةُ الدابّةِ سبعمائةَ وأحداً وعشرين.

<٤٢> فإن قيل: أربعة نفرٍ التقوا، فقال الأوّل للثاني: "إن أعطيتني درهماً، كان معي مِثْلا ما يبقى معك"؛ وقال الثاني للثالث: "إن أعطيتني درهمين، كان معي ثلاثة أمثالُ ما يبقى معك"؛ وقال الثالث للرابع: "إن أعطيتني ثلاثة دراهم، كان معي أربعة أمثال ما يبقى معك"؛ وقال الرابع للأوّل: "إن أعطيتني أربعة دراهم، كان معي خمسةُ أمثالِ ما يبقى معك". كم كان مع كلّ واحدٍ منهم؟

قياسُه: أن تجعلَ مع الأوّل شيئاً ومع الثاني ديناراً. فإذا أخذَ الأوّل من الثاني درهماً، صار مع الأوّل شيءٌ ودرهمٌ، فهو يعدل مثلَي ما مع الثاني وهو

7 وخمسة: فوق السطر – 11 وسبعين: وسبعون – 13 وأحداً: وأحد.

deux dinars moins deux dirhams. Tu réduis par ceci ; alors le dinar sera égal à la moitié d'une chose et un dirham plus un demi, ce qu'a le deuxième. Puis tu poses avec le troisième un dinar. Si donc le second prend deux dirhams au troisième, alors le second aura la moitié d'une chose plus trois dirhams et demi, ce qui est égal au triple de ce qu'a le troisième, qui est trois dinars moins six dirhams. Réduis par ceci ; on a un dinar égal à un sixième de chose plus trois dirhams et un sixième, ce qu'a le troisième. Tu poses avec le quatrième un dinar ; si donc le troisième lui prend trois dirhams, [100^{r}] alors il aura un sixième de chose plus six dirhams et un sixième, ce qui est égal à quatre fois ce qui reste au quatrième, ce qui est égal à quatre dinars moins douze dirhams. Réduis par ceci ; on a le dinar égal au tiers du huitième d'une chose plus quatre dirhams plus un quart plus un sixième plus un huitième, ce qu'a le quatrième. Si donc il prend du premier quatre dirhams, il aura huit dirhams plus treize parties de vingt-quatre parties de dirham plus le tiers du huitième d'une chose, ce qui est égal au quintuple de ce qui reste au premier, c'est-à-dire cinq choses moins vingt dirhams. Réduis par ceci ; alors la chose sera égale à cinq dirhams plus quatre-vingt-dix parties de cent dix-neuf parties de dirham, ce qu'a le premier. Mais le second a la moitié de ce qu'a le premier plus un dirham et un demi, ce qui est quatre dirhams plus quarante-cinq parties de cent dix-neuf parties de dirham. Et le troisième a le sixième de ce qu'a le premier plus trois dirhams et un sixième, ce qui est quatre dirhams plus quinze parties de cent dix-neuf parties de dirham. Et le quatrième a le tiers du huitième de ce qu'a le premier plus quatre dirhams plus un quart et un sixième et un huitième, ce qui est quatre dirhams plus quatre-vingt-treize parties de cent dix-neuf parties de dirham.

<43> Si on dit : trois individus ont distribué un bien entre eux, la moitié pour l'un, le tiers pour le second, et le sixième pour le troisième. Puis celui qui a eu la moitié a rendu la moitié de ce qu'il a acquis, celui qui a acquis le tiers a rendu le tiers de ce qu'il a acquis, et celui qui a eu le sixième a rendu le sixième de ce qu'il a acquis. Puis ils ont partagé ce qu'ils ont rendu en trois parties et chacun a pris ce qui lui est dû[52].

52
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z\right)=\frac{1}{2}(x+y+z) \\ \frac{2}{3}y+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z\right)=\frac{1}{3}(x+y+z) \\ \frac{5}{6}z+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{6}z\right)=\frac{1}{6}(x+y+z) \end{cases}$$

ديناران إلاّ درهمين. فتقابل بها، فيكون الدينارُ يعدل نصفَ شيءٍ ودرهماً ونصفاً وهو ما مع الثاني. ثم تجعل مع الثالث ديناراً. فإذا أخذ منه الثاني درهمين، صار مع الثاني نصفُ شيءٍ وثلاثةُ دراهم ونصف، فهو يعدل ثلاثة أمثال ما مع الثالث، وهو ثلاثة دنانير إلاّ ستة دراهم. فتقابل بها، فيكون الدينار يعدل سُدسَ شيءٍ وثلاثةَ دراهم وسدساً، وهو ما مع الثالث، ثمّ تجعل مع الرابع ديناراً، فإذا أخذ منه الثالث ثلاثة دراهم / صار معه سدسُ شيءٍ وستة دراهم وسدس، وهو ١٠٠-و يعدل أربعةَ أمثالِ ما بقيَ مع الرابع، وهو أربعة دنانير إلاّ اثني عشر درهماً. فتقابل بها، فيكون الدينار يعدل ثلثَ ثُمنِ شيءٍ وأربعةَ دراهم وربعاً وسدساً وثُمناً، وهو ما مع الرابع. فإذا أخذ من الأوّل أربعةَ دراهم، صار معه ثمانية دراهم وثلاثة عشر جزءاً من أربعة وعشرين جزءاً من درهم وثُلثَ ثُمنِ شيءٍ، فهو يعدل خمسةَ أمثالِ ما بقي مع الأوّل، وهو خمسةُ أشياء إلاّ عشرين درهماً. فتقابل به، فيكون الشيءُ يعدلُ خمسةَ دراهمَ وتسعينَ جزءاً من مائةٍ وتسعة عشر جزءاً من درهمٍ، وهو ما مع الأوّل. ومع الثاني نصف ما مع الأوّل، وزيادةُ درهمٍ ونصف، وهو أربعة دراهم وخمسة وأربعون جزءاً من مائةٍ وتسعة عشر جزءاً من درهمٍ. ومع الثالث سدسُ ما مع الأوّل، وزيادةُ ثلاثة دراهم وسدس، وهو أربعة <دراهم> وخمسةَ عشرَ جزءاً من مائة وتسعة عشر جزءاً من درهم. ومع الرابع ثلث ثُمنِ ما مع الأوّل، وزيادة أربعةِ دراهم وربعٍ وسدسٍ وثُمنٍ، وهو أربعةُ دراهم وثلاثةٌ وتسعون جزءاً من مائة وتسعة عشر جزءاً من درهم.

<٤٣> فإن قيل: مالٌ بين ثلاثة نفرٍ، لأحدهم النصفُ منه، وللثاني الثُلث وللثالث السدسُ، انتهبوا المال بينهم. ثم ردَّ صاحب النِّصف نصفَ ما انتهب، وردَّ صاحب الثلث ثلثَ ما انتهب، وردَّ صاحب السدسِ سدسَ ما انتهب. ثمّ اقتسموا ما ردُّوا بينهم أثلاثاً، فأصاب كلَّ واحدٍ حقّه.

3 ونصف: ونصفاً — 4 يعدل: فوق السطر.

On l'infère ainsi : tu poses le bien une chose plus un dinar plus un dirham. Alors celui qui a eu la moitié a acquis une chose, celui qui a eu le tiers, un dinar, et celui qui a eu le sixième, un dirham. Celui qui a acquis la moitié a donc restitué la moitié d'une chose, celui qui a acquis le tiers a restitué le tiers d'un dinar et celui qui a acquis un sixième, le sixième de dirham. Ainsi, la somme de ce qu'ils ont rendu est la moitié d'une chose plus le tiers d'un dinar plus le sixième d'un dirham, qu'ils ont partagé en trois. Chacun d'eux a donc acquis le sixième d'une chose plus le neuvième d'un dinar plus la moitié du neuvième d'un dirham, qu'il a ajouté à ce qui lui restait. Alors celui qui avait la moitié a deux tiers d'une chose plus un neuvième de dinar plus la moitié d'un neuvième de dirham, ce qui est égal à la moitié du bien, qui est [100^{v}] la moitié d'une chose plus la moitié du dinar plus la moitié du dirham. Tu réduis par ceci ; on a la chose égale à deux dinars plus un tiers de dinar et deux dirhams plus deux tiers. Il faut donc que le bien soit trois dinars plus un tiers plus trois dirhams et deux tiers. Ainsi, celui qui a acquis la moitié a acquis deux dinars plus un tiers et deux dirhams plus deux tiers ; il a rendu la moitié, qui est un dinar plus un sixième et un dirham plus un tiers ; tout ce qu'ils ont rendu est donc un dinar et demi et un dirham et demi, qu'ils ont partagé en trois : un demi-dinar et un demi-dirham pour chacun. Ainsi, celui qui a le dinar et qui a le tiers du bien a un dinar et un sixième plus la moitié d'un dirham ; ce qui est égal au tiers du bien, c'est-à-dire un dinar et un neuvième de dinar plus un dirham et deux neuvièmes de dirham. Tu réduis par ceci ; on a le dinar égal à treize dirhams, ce qu'a acquis celui qui a le tiers. Mais la chose est deux dinars et un tiers plus deux dirhams et deux tiers, ce qui est trente-trois, et c'est ce qu'a acquis celui qui a la moitié. Et celui qui a le sixième a acquis un dirham, ce qui est un. Pour le rendre entier sans fractions lorsque tu vérifies, multiplie par six ; celui qui a eu la moitié a donc cent quatre-vingt-dix-huit, celui qui a obtenu le tiers a soixante-dix-huit et celui qui a eu le sixième a six. Et le bien entier est deux cent quatre-vingt-deux.

C'est ce procédé qu'appliquent les arithméticiens. C'est une méthode correcte mais elle est pénible à appliquer, surtout quand le nombre augmente. Je l'ai rendue aisée par une inférence valide et une méthode sûre et claire. Il n'y a de puissance qu'en Dieu.

قياسُه: أن تجعل المالَ شيئاً وديناراً ودرهماً. فانتهب صاحب النصف شيئاً، وصاحب الثلث ديناراً، وصاحب السدْسِ درهماً. فردَّ صاحبُ النصفِ نصفَ شيءٍ، وصاحب الثلث ثلثَ دينارٍ، وصاحب السدسِ سدسَ درهمٍ. فاجتمع ممّا ردّوا نصفُ شيءٍ وثلثُ دينارٍ وسدسُ درهمٍ، فاقتسموا أثلاثاً، فأصاب كلّ واحدٍ منهم سدس شيءٍ، وتُسع دينار ونصف تسع درهم، فأضافه كلّ واحدٍ إلى ما بقي معه، فصار مع صاحب النصف ثلثا شيء وتُسعُ دينار ونصفُ تسعِ درهمٍ، فهو يعدل نصفَ المالِ، وهو / نصف شيء ونصف دينار ونصف درهم. ١٠٠-ظ
فتقابل به، فيكون الشيءُ يعدل دينارين وثلث دينار ودرهمين وثلثين. فيجب أن يكون المالُ ثلاثةَ دنانيرَ وثلثاً وثلاثة دراهم وثلثين. والذي انتهب صاحبُ النصف، <هو> ديناران وثلثٌ ودرهمانِ وثلثان. فردَّ نصفَه وهو دينار وسدسٌ ودرهم وثلث، فجميعُ ما ردُّوا دينارٌ ونصفٌ ودرهمٌ ونصف. فاقتسموا أثلاثاً، لكلّ واحدٍ نصفُ دينارٍ ونصف درهمٍ، فصار مع صاحب الدينار — الذي له ثلث المالِ — دينارٌ وسدس ونصف درهمٍ يعدل ثلثَ المالِ وهو دينارٌ وتسع دينار ودرهم وتُسعا درهمٍ. فتقابل بها، فيكون الدينارُ يعدل ثلاثةَ عشر درهماً، وهو الذي انتهب صاحبُ الثلث. والشيءُ ديناران وثلثٌ ودرهمان وثلثان، وهو ثلاثةٌ وثلاثون، وهو الذي انتهب صاحب النصف. وانتهب صاحب السدس درهماً وهو واحدٌ. وتصحيحها من غيرِ كسرٍ عند امتحانك إيّاها أن تضربها في ستةٍ، فيكون الذي انتهب صاحبُ النصف مائة وثمانيةً وتسعين، وصاحب الثلث ثمانيةً وسبعين، وصاحب السُدْس ستة، والمالُ كلُّه مائتان واثنان وثمانون.

وهذا العمل هو الذي تعمله الحُسَّابُ فيما بينهم، وهو مذهبٌ صحيحٌ إلاّ أنّه يَدِقُّ على من يعمله، خصوصاً إن كثروا. وقد سهَّلته بقياس صحيحٍ ومذهب متقنٍ واضحٍ، ولا قوّة إلاّ بالله:

4 شيء: فوق السطر / فأصاب: فأصاحب — 13 دينارٌ وسدس: ديناراً وسدساً.

Posons le bien une chose, dont chacun a acquis une partie, et telle que ce qu'ils ont rendu remplisse la condition de rendre trois dirhams, qu'ils ont partagé en trois ; et donc que chacun ait gagné un dirham, qu'il ajoute à ce qui lui reste, et ainsi chacun a eu son dû. Il est nécessaire que tu saches que ce qui reste à celui qui a la moitié, une fois rendue la moitié de ce qu'il a acquis, est la moitié d'une chose moins un dirham. Ce qui reste à celui qui a le tiers est le tiers d'une chose moins un dirham, et ce qu'il a rendu est un sixième de chose moins un demi-dirham. Et ce qui reste à celui qui a le sixième est un sixième de chose moins un dirham, et il a rendu le tiers d'un dixième de chose moins un cinquième de dirham. La somme de ce qu'ils ont rendu est donc la moitié et un cinquième de chose moins un dirham et sept dixièmes de dirham, [101r] ce qui est égal à trois dirhams. Alors réduis par ceci ; la chose est égale à six dirhams plus cinq septièmes de dirham, ce qui est le bien tout entier. Si tu veux savoir combien chacun d'eux a acquis, alors tu sauras que celui qui a pris la moitié a acquis une chose moins deux dirhams, ce qui est quatre dirhams plus cinq septièmes de dirham. Et celui qui a pris le tiers a acquis la moitié d'une chose moins un dirham et demi, ce qui est un dirham et six septièmes de dirham. Et celui qui a pris le sixième a acquis un cinquième de chose moins un dirham et un cinquième, ce qui est sept dirhams. Nous posons chaque dirham quarante-deux parties, alors le bien sera deux cent quatre-vingt-deux ; celui qui a pris la moitié a acquis cent quatre-vingt-dix-huit, celui qui a pris le tiers soixante-dix-huit et celui qui a pris le sixième six.

وهو أنّا نجعل المالَ شيئاً. وانتهب كلّ واحدٍ منهم بعضَه، وكان الذي ردّوا – على ما شرَطْنا من ردهم – ثلاثةَ دراهم، فاقتسموها أثلاثاً، فأصاب كلَّ واحد منهم درهمٌ، فأضاف كلُّ واحدٍ منهم الدرهمَ إلى ما بقي معه، فصار مع كلّ واحد حقُّه. فبالضرورة تعلمُ أنّ الذي بقي مع صاحب النصف بعد ما رَدَّ نصف ما انتهب: نصف شيءٍ إلاّ درهماً، والذي بقي مع صاحب الثلث ثلث شيء إلاّ درهماً، والذي رُدَّ سدسُ شيءٍ إلاّ نصفَ درهمٍ، والذي بقي مع صاحب السدسِ سدسُ شيءٍ إلاّ درهماً، والذي رُدَّ ثلثُ عُشرِ شيءٍ إلاّ خُمسِ درهمٍ. فجميعُ ما ردُّوا نصفٌ وخُمس شيءٍ إلاّ درهماً وسبعة أعشار درهم / فهو يعدل ثلاثةَ دراهمَ. فتقابل بها، فيكون الشيءُ يعدل ستةَ دراهمَ وخمسة ١٠١-و أسباعِ درهمٍ، وهو جميعُ المالِ. فإذا أردتَ أن تعلم كم انتهب كلّ واحدٍ منهم، فقد علمتَ أنّ الذي انتهب صاحبُ النصفِ شيئًا إلاّ درهمين، وهو أربعة دراهم وخمسة أسباعِ درهمٍ، وانتهب صاحب الثلث نصفَ شيءٍ إلاّ درهماً ونصفاً، وهو درهمٌ وستة أسباع درهمٍ. والذي انتهب صاحب السدسِ خُمْسَ شيءٍ إلاّ درهماً وخُمساً وهو سبعة دراهم. فنجعل كلَّ درهمٍ اثنين وأربعين جزءاً، فيكون المالُ مائتين واثنين وثمانين، والذي انتهب صاحبُ النصفِ مائةً وثمانيةً وتسعين، وصاحب الثلث ثمانيةً وسبعين، وصاحب السدسِ ستةً.

11 شيئًا: شيء.

<Problèmes numériques et progressions arithmétiques>

<Problèmes numériques divers>

<44> Si on dit : dix robes. La valeur de la première est un dirham, et la valeur de chacune excède celle de l'autre d'un dirham en un dirham. Combien est la totalité de leurs valeurs ?

Tu sais que la valeur de la première robe est un dirham et la dixième est dix dirhams. La valeur de la deuxième est deux, la neuvième neuf, la troisième trois, et la huitième huit ; la valeur de chaque paire de robes selon cet ordre est donc onze. Multiplie onze par cinq, on a cinquante-cinq, ce qui est la valeur de dix robes.

Si on dit : la valeur de la première est un dirham, et la valeur de chacune excède celle de l'autre de deux dirhams, quelle est la valeur totale ?

Il faut que la valeur de la dixième robe soit dix-neuf. La valeur de la première est en effet un dirham et, pour les neuf qui restent, la seconde robe excède la première de deux dirhams, la troisième excède la seconde de deux dirhams, donc elle excède la première de quatre, la quatrième excède la première de six, et la dixième excède la première de dix-huit ; or la valeur de la première est un dirham, donc la valeur de la dixième est dix-neuf, et la valeur de la dixième et de la première est vingt, et la valeur de la neuvième et de la deuxième est vingt, et la valeur de la huitième et de la troisième est vingt. On a ainsi montré que la valeur de chaque paire de robes est vingt dirhams, selon cet ordre. Multiplie vingt par cinq, on a cent, qui est la valeur des dix robes. Et la cause de ce procédé est claire, d'après ce que nous avons expliqué.

Si on dit : dix robes. La première est trois, et <la valeur> de chacune excède celle de l'autre de quatre en quatre. Quelle est leur valeur totale ?

Le procédé ici est selon ce que nous avons expliqué et commenté : tu multiplies toujours l'excédent, qui est quatre, par le nombre de robes moins un. On a trente-six [101^{v}] ; tu lui ajoutes la valeur de la première robe, qui

<مسائل عددية مختلفة>

<٤٤> فإن قيل: عشرةُ أثوابٍ، قيمةُ الأوّل درهمٌ، وتتفاضل في القيمة درهماً درهماً. كم جميع قيمتها؟

فقد علمت أن قيمةَ الثوبِ الأوّل درهمٌ والعاشرِ عشرةُ دراهم، وقيمةُ الثاني اثنان، والتاسعِ تسعةٌ، والثالثِ ثلاثةٌ، والثامن ثمانية، فقيمةُ كلّ ثوبين على هذا الترتيب أحدَ عشر. فاضرب أحدَ عشر في خمسةٍ، يكُن خمسةً وخمسين، وهو قيمةُ العشرةِ الأثوابِ.

فإن قيل: قيمةُ الأوّل درهمٌ، وتتفاضلُ بدرهمين. كم جميعُ قيمتها؟ فيجب أن يكون قيمةُ الثوبِ العاشر تسعةَ عشر لأنّ قيمةَ الأوّل درهم، والتسعةُ الباقيةُ: الثوبُ الثاني يفضل على الأوّل بدرهمين والثالثُ على الثاني بدرهمين فهو يَفْضُلُ على الأوّل أربعةً، والرابع يفضلُ على الأوّل ستةً والعاشرُ يفضل على الأوّل ثمانيةَ عشرَ. وقيمةُ الأوّل درهمٌ، فقيمةُ العاشرِ تسعةَ عشرَ، وقيمة العاشر والأوّلِ: عشرون، وقيمة التاسع والثاني: عشرون، وقيمة الثامن والثالث: عشرون. فقد تبيَّن أن قيمة كلّ ثوبين عشرون درهماً على هذا الترتيب. فاضربْ عشرين في خمسةٍ، يَكُنْ مائةً وهو قيمةُ الأثوابِ العشرةِ؛ وعِلّةُ هذا البابِ واضحة على ما فسَّرنا.

فإن قيل: عشرةُ أثواب، أوّلها ثلاثةٌ، وتتفاضل بأربعة أربعةٍ. كم جميعُ قيمتِها؟

فالبابُ فيه على ما فسّرنا وشرحنا: أن تضرب التفاضل — وهو أربعة — في أقلّ من عدد الأثواب بواحدٍ أبداً، فيكون ستةً / وثلاثين وتزيدَ عليه قيمةَ ١٠١-ظ

4 وقيمة: قيمة — 6 يكن: تكن — 15 عشرين: عشرون درهمًا / يكن: تكن.

est trois, on a trente-neuf, ce qui est la valeur de la dixième robe. Mais la valeur de la première est trois, donc la valeur de la première et de la dixième est quarante-deux, la valeur de la neuvième et de la deuxième est quarante-deux, et il en est ainsi de la valeur de chaque paire de robes, selon cet ordre. Multiplie donc quarante-deux par cinq ; on a deux cent dix, qui est la valeur totale des robes.

<44.1> Si on dit : une troupe de soldats est partie en expédition, le premier a gagné un dirham, et le gain de chacun a excédé celui de l'autre d'un dirham, de telle sorte que la somme de ce qu'ils ont gagné soit trois cents dirhams. Quel est le nombre d'hommes de cette troupe ?

On l'infère ainsi : tu poses le nombre de la troupe une chose. Il faut donc que tout couple d'hommes de la troupe, selon les procédés que nous avons ordonnés, gagne une chose et un dirham. Tu multiplies une chose et un dirham par la moitié d'une chose. On a la moitié d'un *carré* plus la moitié d'une chose, ce qui est la somme de ce qu'ils ont gagné, qui est égale à trois cents dirhams. Tu réduis par ceci ; on a la chose, vingt-quatre, ce qui est le nombre de la troupe.

<44.2> Si on dit : une troupe de soldats est partie en expédition, le premier a gagné deux dirhams, puis le gain de chacun a excédé celui de l'autre de trois dirhams, de telle sorte que la somme de tout ce qu'ils ont gagné soit cent vingt-six dirhams. Quel est le nombre d'hommes de la troupe ?

On l'infère selon les procédés que nous avons expliqués : tu multiplies l'excédent par le nombre de la troupe moins un ; on a trois choses moins trois dirhams ; ajoute à cela ce qu'a gagné le premier, c'est-à-dire deux ; on a trois choses moins un dirham, ce qu'a gagné le dernier. Tu lui ajoutes ce qu'a gagné le premier, c'est-à-dire deux ; on a trois choses et un dirham, ce que gagne chaque couple d'hommes selon notre ordre. Multiplie-le par la moitié du nombre de la troupe, on a un *carré* et un demi plus une demi-chose, ce qui est la totalité des gains de la troupe. C'est donc égal à cent vingt-six dirhams. Réduis par ceci ; la chose sera neuf, ce qui est le nombre de la troupe.

الثوب الأوّل وهو ثلاثةٌ فيكون تسعةً وثلاثين، وهو قيمةُ الثوبِ العاشرِ. وقيمةُ الأوّلِ ثلاثة، فقيمةُ الأوّل والعاشرِ اثنان وأربعون، وقيمةُ التاسعِ والثاني اثنان وأربعون، وكذلك قيمة كلِّ ثوبين على هذا الترتيب. فاضربْ اثنين وأربعين في خمسةٍ يَكُنْ مائتين وعشرة، وهو قيمةُ جميعِ الأثواب.

<١.٤٤> فإن قيل: جيشٌ غزَوْا، فغنم أوّلُهم درهماً، وتفاضلوا بدرهمٍ درهمٍ، فكان جميع ما غنموا ثلاثمائة درهم. كم كان عددُ الجيش؟

قياسُه: أن تجعل عددَ الجيشِ شيئاً، فيجب أن يكون كلُّ رجلين من الجيشِ – على ما رتّبنا في الأبوابِ – يغنمان شيئاً ودرهماً، فتضرب شيئاً ودرهماً في نصف شيء، فيكون نصف مالٍ ونصف شيءٍ، وهو جميع ما غنموا، وهو يعدل ثلاثمائة درهم، فتقابل بها فيكونُ الشيءُ أربعةً وعشرين، وهو عدد الجيش.

<٢.٤٤> فإن قيل: جيش غزا، فغنم أوّلُهم درهمين، وتفاضلوا ثلاثةَ دراهم ثلاثة دراهم، فكان جميعُ ما غنموا مائةً وستة وعشرين درهماً. كم عدد الجيش؟

قياسه، على ما شرحنا في الأبواب: أن تَضْرِبَ التفاضلَ في أقلَّ من عدد الجيش بواحدٍ فيكون ثلاثة أشياء إلاّ ثلاثة دراهم. فَزِدْ عليها ما غنم الأوّل وهو اثنان، فيكون ثلاثة أشياء إلاّ درهماً وهو ما غنم آخرهم. فزِدْ عليه ما غَنِمَ الأوّل وهو اثنان فيكون ثلاثة أشياء ودرهماً، وهو ما يغنم كلُّ رجلين <على ما رتّبنا>. فاضربه في نصفِ عددِ الجيش، يكن مالاً ونصفاً ونصف شيء وهو جميع ما غنم الجيشُ، فهو يعدل مائةً وستةً وعشرين درهماً. فقابل به، يكن الشيءُ تسعةً، وهو عددُ الجيش.

5 غزوا: الواو ترجع إلى الجيش، وقد روعي فيه المعنى – 11 غزا: ضمير الجيش روعي فيه اللفظ.

<44.3> Si on dit : une troupe de soldats est partie en expédition, alors le premier a gagné un dirham et le gain de chacun a excédé celui de l'autre d'un dirham. Quand ils sont rentrés, ils ont partagé également et chacun a acquis dix dirhams. Nous avons montré que tout ce qu'ils ont gagné est un demi-*carré* plus une demi-chose. Tu le divises par le nombre de la troupe, qui est une chose ; tu obtiens dix dirhams. Tu le multiplies par une chose, on a dix choses égales à la moitié d'un *carré* plus une demi-chose. Tu réduis par ceci ; on a la chose, [102^{r}] dix-neuf, ce qui est le nombre de la troupe.

<44.4> Si on dit : les deux tiers d'une troupe de soldats sont partis en expédition. Le premier a gagné un dirham, puis le gain de chacun a excédé celui de l'autre de deux dirhams. Quand ils sont revenus, ils ont partagé également ce qu'ils ont gagné, entre eux et entre ceux qui sont restés au camp. Chacun d'eux a acquis quatre dirhams. Quel est le nombre de la troupe ?

On l'infère ainsi : tu poses le nombre de la troupe, une chose ; deux tiers sont partis en expédition, soit deux tiers d'une chose. Le premier a gagné un dirham. Puis le gain de chacun excède celui de l'autre de deux dirhams ; il faut donc, d'après ce que nous avons montré, que la somme de ce qu'ils ont gagné soit quatre neuvièmes de *carré* ; nous la divisons par le nombre de la troupe, qui est une chose, on obtient quatre dirhams ; multiplions quatre dirhams par une chose, on a quatre choses égales à quatre neuvièmes de *carré* ; le *carré* est donc égal à neuf choses et la chose est égale à neuf, ce qui est le nombre de la troupe.

<44.5> Si on dit : les trois quarts d'une troupe de soldats sont partis en expédition, le premier a gagné deux dirhams, puis le gain de chacun excède celui de l'autre de trois dirhams. Quand ils sont rentrés, ils ont divisé également, entre eux et entre ceux qui sont restés au camp. Chacun a acquis vingt-quatre dirhams. Quel est le nombre de la troupe ?

On l'infère ainsi : tu poses le nombre de la troupe, une chose, trois quarts sont partis en expédition, ce qui est trois quarts d'une chose. Le premier a gagné deux dirhams, puis le gain de chacun a excédé celui de l'autre de trois dirhams. Il faut, d'après ce que nous avons expliqué, que la somme de ce qui a été gagné par les trois quarts de la chose soit six huitièmes de *carré* plus trois quarts de huitième de *carré* plus trois huitièmes d'une chose. Tu le divises par le nombre de la troupe, qui est une chose ; on

<٣.٤٤> فإن قيل: جيشٌ غزوْا، فغنم أوّلُهم درهماً، وتفاضلوا بدرهمٍ درهمٍ، فلمّا رجعوا اقتسموا بالسَّوِيَّة، فأصاب كلَّ واحدٍ منهم عشرةُ دراهم. فقد بيّنّا أن جميع ما يغنمون نصفُ مالٍ ونصفُ شيءٍ. فتقسمه على عددِ الجيش — وهو شيءٌ — فيخرج عشرةُ دراهم. فتضربها في شيء، فيكون عشرة أشياء تعدل نصفَ مالٍ ونصفَ شيءٍ. فتقابل بها، فيكون الشيءُ / تسعة عشر وهو عددُ الجيش. ١٠٢-و

<٤.٤٤> فإن قيل: جيشٌ غزَا ثُلثاهم، فغنم أوّلُهم درهماً، ثمّ تفاضلوا بدرهمين درهمين. فلمّا رجعوا قُسّم ما غنموا بينهم وبين من تخلّف منهم بالسويّةِ، فأصابَ كلَّ رجلٍ منهم أربعةُ دراهمَ. كم عددُ الجيشِ؟

قياسُه: أن تجعلَ عددَ الجيش شيئاً. فغزا ثلثاهم، وهو ثلثا شيءٍ، فغنم أوّلُهم درهماً وتفاضلوا درهمين درهمين. فيجب على ما بيّنا أن يكون جميع ما غنموا أربعة أتساعِ مالٍ. فقسمناه على عدد الجيش — وهو شيءٌ — فخرج أربعةُ دراهم. فنضرب أربعةَ دراهم في شيءٍ، فيكون: أربعةُ أشياء تعدل أربعةَ أتساعِ مالٍ. فالمالُ يعدل تسعةَ أشياء، والشيءُ يعدل تسعةً، وهو عددُ الجيش.

<٥.٤٤> فإن قيل: جيش غزا ثلاثةُ أرباعهم، فغنم أوّلهم درهمين وتفاضلوا ثلاثةَ دراهم. فلمّا رَجعوا قسّموا ما غنموا بينهم وبين من تخلّف بالسَّوِيَّة، فأصاب كلَّ رجل منهم أربعةٌ وعشرون درهماً. كم عددُ الجيش؟

قياسُه: أن تجعل عددَ الجيشِ شيئاً. فغزا ثلاثة أرباعِهم، وهو ثلاثة أرباعِ شيءٍ. فغنم أوّلهم درهمين وتفاضلوا بثلاثةٍ ثلاثةٍ. فيجب — على ما فسّرنا — أن يكونَ جميع ما غنم الثلاثةُ الأرباعِ الشيءِ ستةَ أثمانِ مالٍ وثلاثةَ أرباعِ ثُمْنِ مالٍ وثلاثةَ أثمانِ شيءٍ. فتقسمه على عددِ الجيش، وهو شيءٌ، فيخرج أربعةٌ

8 مَن: ما.

obtient vingt-quatre choses égales à trois quarts de *carré* plus trois quarts d'un huitième de *carré* plus trois huitièmes de chose ; tu réduis par ceci ; on aura la chose vingt-huit, ce qui est le nombre de la troupe.

<44.6> Si on dit : deux tiers d'une troupe de soldats sont partis en expédition ; le premier a gagné un dirham, puis le gain de chacun a excédé celui de l'autre de deux dirhams. Ensuite le tiers de ceux qui restent est parti en expédition, le premier a gagné deux dirhams, puis le gain de chacun a excédé celui de l'autre de quatre dirhams, puis ils ont additionné ce qu'ils ont gagné, qu'ils ont partagé à parts égales. Alors chacun d'eux a acquis vingt dirhams. Quel est le nombre de la troupe ?

On l'infère ainsi : tu poses le nombre de la troupe de soldats, une chose ; les deux tiers sont partis en expédition, c'est-à-dire les deux tiers d'une chose ; le premier a gagné un dirham, puis le gain de chacun a excédé celui de l'autre de deux dirhams. Il faut, d'après ce que nous avons montré, que ce qu'ont gagné les deux tiers soit quatre neuvièmes de *carré* ; puis le tiers qui reste est parti en expédition, le premier d'entre eux a gagné deux dirhams, puis le gain de chacun a excédé celui de l'autre [102^{v}] de quatre dirhams. Il faut donc, d'après ce que nous avons montré, que ce que le tiers a gagné soit deux neuvièmes de *carré*. Tu l'additionnes à ce qu'ont gagné les deux tiers, c'est-à-dire quatre neuvièmes de *carré*. Alors la somme de tout ce que la troupe a gagné est deux tiers de *carré*. Tu le divises par le nombre de la troupe, qui est une chose ; alors ce qu'ils obtiennent est vingt. Tu multiplies vingt par une chose, on a vingt choses égales aux deux tiers de *carré*. Le *carré* est donc égal à trente choses, et la chose est trente, ce qui est le nombre de la troupe.

<44.7> Si on dit : une troupe de soldats est partie en expédition, le premier a gagné un dirham, puis le gain de chacun a excédé celui de l'autre d'un dirham. Quand ils sont rentrés, ils ont partagé entre eux, à parts égales, ce qu'ils ont gagné. Chaque homme a obtenu une somme égale aux deux tiers du nombre de la troupe. Quel est le nombre de la troupe ?

Il faut que la somme de tout ce qu'ils ont gagné – si nous posons le nombre de la troupe, une chose, d'après ce que nous avons montré – soit la moitié d'un *carré* plus la moitié d'une chose. Nous le divisons par le nombre de la troupe, qui est une chose ; on a deux tiers d'une chose. Nous multiplions deux tiers d'une chose par une chose, on a deux tiers de *carré* égal à la moitié d'un *carré* plus une demi-chose. La chose est égale à trois, c'est le nombre de la troupe.

وعشرون شيئاً تعدل ثلاثةَ أرباعِ مالٍ وثلاثة أرباع ثُمنِ مالٍ وثلاثة أثمان شيءٍ. فتقابلُ بها، فيكون الشيءُ ثمانيةً وعشرين، وهو عددُ الجيش.

<٦.٤٤> فإن قيل: جيش غزا ثلثاهم، فغنم أوّلهم درهماً، وتفاضلوا بدرهمين درهمين. ثم غزا الثُلث الباقي، فغنمَ أوّلُهم درهمين وتفاضلوا بأربعة أربعة. ثم جمعوا جميعَ ما غنموا، فقسّموه بينهم بالسويّة، فأصاب كلُّ رجلٍ عشرين درهماً. كم عددُ الجيش؟

قياسُه: أن تجعل عددَ الجيشِ شيئاً. فغزا ثلثاهم، وهو ثلثا شيءٍ. فغنم أوّلهم درهماً، ثم تفاضلوا بدرهمين درهمين، فيجب على ما بيّنّا أن يكون ما غنم الثلثان أربعة أتساع مالٍ. ثم غزا الثلث الباقي، فغنم أوّلهم درهمين وتفاضلوا / بأربعة أربعة. فيجب على ما بيّنا أن يكون ما غنم الثلث تُسْعَي مالٍ، فتجمعه ١٠٢-ظ إلى ما غنم الثلثان، وهو أربعة أتساعِ مالٍ. فيكون جميع ما غنم الجيش ثلثي مالٍ. فتقسمه على عددِ الجيش – وهو شيءٌ – فيكون ما يصيبُهم عشرين. فتضرب عشرين في شيء، فيكون عشرين شيئاً تعدل ثلثي مالٍ. فالمالُ يعدل ثلاثين شيئاً والشيء ثلاثون، وهو عدد الجيش.

<٧.٤٤> فإن قيل: جيش غزا، فغنم أوّلهم درهماً، وتفاضلوا بدرهمٍ درهمٍ. فلمّا رجعوا قسموا ما غنموا بينهم بالسويّة، فأصاب كلّ رجل مثل ثلثي عدّة الجيش. كم الجيش؟

فيجب أن يكون جميع ما غنموا، إذا نحن جعلنا عددَ الجيش شيئاً، على ما بيّنّا، نصفَ مالٍ ونصفَ شيءٍ. فنقسمه على عدد الجيش، وهو شيءٌ، فيخرج ثلثا شيءٍ. فنضرب ثلثي شيءٍ في شيء، فيكون: ثُلثي مالٍ يعدل نصفَ مالٍ ونصفَ شيءٍ. فالشيءُ يعدل ثلاثةً، وهو عدد الجيش.

1 وعشرون: وعشرين – 7 فغزا: مطموسة – 10 الثلث: الثالث.

<44.8> Si on dit : quatre racines plus une demi-racine d'une troupe de soldats est partie en expédition. Le premier a gagné un dirham, puis le gain de chacun a excédé celui de l'autre d'un dirham. Quand ils sont rentrés, ils ont partagé entre eux ce qu'ils ont gagné, à parts égales. Chaque homme a obtenu dix dirhams plus un demi. Quel est le nombre de la troupe ?

On l'infère ainsi : tu poses le nombre de la troupe de soldats un *carré*. Quatre de ses racines et la moitié de sa racine, ce qui est quatre choses et une demi-chose, sont partis en expédition. Le premier a gagné un dirham, puis le gain de chacun a excédé celui de l'autre d'un dirham. Il faut que, d'après ce que nous avons montré, ce qu'ils ont gagné soit dix *carrés* plus un huitième de *carré* plus deux choses plus un quart d'une chose. Nous le divisons par le nombre de la troupe, qui est un *carré*. On a dix dirhams plus un demi. Multiplie dix et demi par un *carré*, on a dix *carrés* plus un demi-*carré* égaux à dix *carrés* plus un huitième de *carré* plus deux choses plus un quart d'une chose. Réduis par ceci ; on a la chose, six, et le *carré* trente-six, qui est le nombre de la troupe.

<44.9> Si on dit : trente hommes sont partis en expédition, le premier a gagné un dirham, puis le gain de chacun a excédé celui de l'autre d'une chose. Ce qu'ils ont gagné est mille trois cent trente-cinq dirhams. Alors, de combien chacun excède-t-il l'autre ?

On l'infère ainsi : tu poses que le second surpasse le premier d'une chose, que le troisième surpasse le second d'une chose, que le quatrième surpasse le troisième d'une chose, et ainsi de suite jusqu'au dernier. Chacun surpasse son voisin d'une chose. Tu procèdes comme nous avons montré : tu multiplies l'excédent qui est une chose par [103^{r}] le nombre du groupe toujours moins un. On aura vingt-neuf choses. Tu lui ajoutes le double de ce qu'a gagné le premier, qui est un dirham. On a vingt-neuf choses plus deux dirhams. C'est ce que gagne chaque couple parmi eux, selon l'ordre que nous t'avons indiqué. Tu le multiplies par quinze, qui est la moitié du nombre de la troupe. On a trente plus quatre cents plus trente-cinq choses. C'est tout ce qu'ils ont gagné. C'est donc mille trois cent trente-cinq dirhams. Tu réduis par ceci ; la chose est alors trois, c'est de cela que chacun dépasse son voisin.

<٨.٤٤> فإن <قيل>: جيشٌ غزا، أربعةُ أجذارِه ونصفُ جذرِه، فغنم أوّلُهم درهماً وتفاضلوا بدرهمٍ درهمٍ. فلما رجعوا قسموا ما غَنموا بينهم بالسويّة، فأصاب كلَّ رجلٍ منهم عشرةُ دراهمَ ونصف. كم عددُ الجيش؟

قياسه: أن تجعل عددَ الجيشِ مالاً. فغزا أربعةُ أجذارِه ونصفُ جذره، وهو أربعةُ أشياءَ ونصفُ شيء. فغنم أوّلُهم درهماً وتفاضلوا بدرهمٍ درهمٍ. فيجب أن يكون الذي غنموا — على ما بيّنا — عشرةَ أموالٍ وثُمنَ مالٍ وشيئين وربع شيء. فقسمناه على عددِ الجيش، وهو مالٌ، فخرج عشرةُ دراهم ونصف. فاضرب عشرةً ونصفاً في مالٍ يكُنْ: عشرةُ أموالٍ ونصفُ مالٍ يعدل عشرةَ أموالٍ وثُمنَ مالٍ وشيئين وربعَ شيء. فتقابل بها، فيكون الشيءُ ستةً والمالُ ستةً وثلاثين، وهو عددُ الجيش.

<٩.٤٤> فإن قيل: ثلاثون رجلاً غزوا، فغنم أوّلهم درهماً وتفاضلوا بشيءٍ شيءٍ، فكان جميع ما غنموا ألفاً وثلاثمائة وخمسة وثلاثين درهماً. بكم يفضلُ كلُّ واحدٍ منهم الآخر؟

قياسه: أن تجعل الثاني يفضل على الأوّلِ بشيء، والثالث على الثاني بشيءٍ، والرابع على الثالث بشيءٍ، وكذلك إلى آخرِهم يفْضُل كلّ واحدٍ على الذي يليه بشيء. فتعمل فيها كما بيَّنا: وهو أن تضرب التفاضل — وهو شيء — في / أقلّ من عددِ القوم بواحدٍ أبداً، فيكون تسعةً وعشرين شيئاً. فتزيد عليه ١٠٣-و
<ضِعف> ما غنم أوّلُهم — وهو درهم — فيكون تسعةً وعشرين شيئاً <ودرهمين>، وهو ما يغنم كلُّ اثنين منهم على الترتيب الذي رتَّبناه لك. فتضربه في خمسة عشر وهو نصفُ عددِ الجيش، فيكون ثلاثين وأربعمائةٍ وخمسةَ وثلاثين شيئاً، وهو جميع ما غَنموا، فهو ألفٌ وثلاثمائة وخمسة وثلاثون درهماً. فتقابل بها، فيكون الشيءُ ثلاثةً، وهو ما يفضل كلّ واحدٍ على الآخر الذي يليه.

6 وشيئين: وشيئاً — 8 ونصف: ونصفاً — 12 ألفاً: ألف.

<45.1> Si on dit : le postier est parti d'un lieu et tu lui as ordonné de parcourir chaque jour vingt farsakhs. Il a marché cinq jours. Puis tu as envoyé à sa suite un autre postier, tu lui a ordonné de parcourir chaque jour trente farsakhs. Dans combien de jours le rejoint-il ?

On l'infère ainsi : tu poses le nombre de jours au bout duquel le deuxième postier l'a rejoint, une chose. Donc le nombre de farsakhs qu'il a parcourus est trente choses. Car tu multiplies le nombre de jours de marche par le nombre de farsakhs qu'il parcourt chaque jour ; ce qu'on a est le nombre de farsakhs qu'il a parcourus. Le nombre de jours de marche du premier postier est une chose et cinq jours ; tu le multiplies par ce qu'il parcourt chaque jour, c'est-à-dire vingt farsakhs. On a vingt choses plus cent farsakhs égal à trente choses. Tu réduis par ceci ; on a la chose, dix jours, au bout desquels il est rejoint par le deuxième postier, et le premier postier aura marché quinze jours.

<45.2> Si on dit : tu as envoyé deux postiers d'un même lieu le même jour au même moment. Tu as ordonné à l'un de parcourir vingt farsakhs par jour, puis tu as ordonné à l'autre de parcourir le premier jour un farsakh puis d'augmenter chaque jour d'un farsakh. Dans combien de jours le rejoint-il ?

On l'infère ainsi : tu poses les jours de marche du premier et du second postiers une chose. Tu la multiplies par ce que parcourt le premier postier chaque jour, c'est-à-dire vingt farsakhs. On a vingt choses, ce qui est le nombre de farsakhs que parcourt chacun d'eux. Or tu sais que le nombre de jours de marche du deuxième postier est une chose. Or il parcourt un farsakh le premier jour, puis augmente d'un farsakh chaque jour. Il faut, d'après ce que nous avons expliqué pour la troupe, que le nombre de farsakhs parcourus soit un demi-*carré* plus une demi-chose, ce qui est égal à celui parcouru par le premier postier, c'est-à-dire vingt choses. Tu réduis par ceci ; alors la chose est trente-neuf jours, c'est ce que parcourt chacun [103ᵛ] d'eux.

<١.٤٥> فإن قيل: بريدٌ خرج من بلْدةٍ، أمَرْته أن يسير كلَّ يومٍ عشرين فرسخاً. فسار خمسة أيامٍ. ثم أرسلْتَ بعده بريداً آخر وأمرْته أن يسير في كل يومٍ ثلاثين فرسخاً. في كم يومٍ يلحقه؟

قياسُه: أن تجعل ما يلحقه فيه البريد الثاني من الأيّام شيئاً، ويكون عدد الفراسخ التي سارها ثلاثين شيئاً؛ لأنّك تضرب الأيام التي سارها في عددِ ما يسير كلَّ يومٍ من الفراسخ، فَما كان فهو عددُ ما سار من الفراسخ. ويكون الذي سار البريد الأوّلُ من الأيام شيئاً وخمسة أيام. فتضربه فيما يسير كلّ يومٍ، وهو عشرون فرسخاً، فيكون عشرين شيئاً ومائةُ فرسخٍ تعدل ثلاثين شيئاً. فتقابل بها، فيكون الشيءُ عشرةَ أيامٍ، وهو ما يلحقه فيه البريد الثاني، ويكون ما سار البريد الأوّل خمسةَ عشر يوماً.

<٢.٤٥> فإن قيل: بريدان أرسلتهما من بلدٍ واحدٍ في يوم واحدٍ في وقت واحدٍ، أمرتَ أحدهما أن يسير في يومه عشرين فرسخاً، ثم أمرت الآخر أن يسير في أوّل يوم فرسخاً، ثم يزيد في كل يومٍ فرسخاً. في كم يوم يَلْحَقُه؟

قياسُه: أن تجعلَ ما سار فيه البريد الأوّل والثاني من الأيّام شيئاً. فتضربه فيما يسير البريد الأوّل في كل يوم وهو عشرون فرسخاً، فيكون عشرين شيئاً، وهو عددُ الفراسخِ التي يسيرها كلّ واحدٍ منهما. وقد علمتَ أن الذي يسير البريد الثاني من عدد الأيام شيءٌ، وهو يسير في أوّل يوم فرسخاً، ثم يزيد في كلّ يوم فرسخاً. فيجب – على ما فسّرنا في الجيش – أن يكون الذي ساره من عددِ الفراسخ نصفَ مالٍ ونصف شيءٍ، فهو يعدل ما سار الأوّل، وهو عشرون شيئاً. فتقابل بها، فيكونَ الشيء تسعةً وثلاثين يوماً، وهو ما يسير كلّ واحدٍ / منهما.

١٠٣-ظ

<45.3> Si on dit : un postier est parti d'un lieu, tu lui as ordonné de parcourir le premier jour un farsakh, puis d'augmenter chaque jour d'un farsakh. Il a marché quatre-vingt-quatre jours. Tu as envoyé un autre postier à sa suite, et tu lui as ordonné de parcourir le premier jour un farsakh, puis d'augmenter chaque jour de deux farsakhs. Dans combien de jours le rejoint-il ?

On l'infère ainsi : tu poses le nombre de jours de marche du premier postier une chose. Il faut, d'après ce que nous avons expliqué pour la troupe, que le nombre de farsakhs qu'il a parcourus soit un demi-*carré* plus une demi-chose. Le nombre de jours de marche du deuxième postier sera une chose moins quatre-vingt-quatre. Il faut donc que le nombre de farsakhs, d'après ce que nous avons expliqué pour la troupe, soit un *carré* plus sept mille cinquante-six moins cent soixante-huit choses. Il est par conséquent égal à la moitié du *carré* plus une demi-chose. Réduis par ceci ; la chose sera deux cent quatre-vingt-huit ; ce qu'a parcouru le premier postier. Et le second postier marche deux cent quatre jours.

<45.4> Si tu lui ordonnes de parcourir le premier jour un farsakh, puis d'augmenter d'un farsakh par jour, et qu'il a marché huit jours ; puis tu ordonnes au second postier de parcourir le premier jour un farsakh, puis d'augmenter chaque jour de trois farsakhs, dans combien de jours le rejoint-il ?

On l'infère ainsi : tu poses le nombre de jours de marche du premier postier, une chose. Il faut, d'après ce que nous avons expliqué pour la troupe, que le nombre de farsakhs soit un demi-*carré* plus une demi-chose. Le nombre de jours de marche du deuxième postier est une chose moins huit. Il faut donc que le nombre de farsakhs soit un *carré* plus un demi-*carré* plus cent dirhams moins vingt-quatre choses et demie. Il est par conséquent égal à un demi-*carré* plus une demi-chose. Réduis par ceci ; la chose sera vingt jours, ce que parcourt le premier postier, et le second marche douze jours.

<٣.٤٥> فإن قيل: بريدٌ خَرجَ من بلدةٍ، فأمرتَه أن يسيرَ أوّل يومٍ فرسخاً، ثم يزيدَ كلَّ يومٍ فرسخاً. فسار أربعةً وثمانين يوماً. ثم أرسلت بريداً آخر وأمرتَه أن يسيرَ أوّلَ يومٍ فرسخاً، ثم يزيدَ كلّ يومٍ فرسخين. في كم يومٍ يلحقُه؟

قياسُه: أن تجعل عددَ الأيامِ التي سارها البريدُ الأوّل شيئاً. فيجب — على ما فسَّرنا في الجيش — أن يكون عددُ فراسِخه التي سارها نصفَ مالٍ ونصف شيء. ويكون الذي سار البريد الثاني من عدد الأيامِ شيئاً إلاّ أربعةً وثمانين. فيجب أن يكون عددُ فراسِخه، على ما فسَّرنا في الجيش، مالاً وسبعة آلاف وستةً وخمسين إلاّ مائةً وثمانيةً وستين شيئاً. فهو إذن يعدل نصفَ مالٍ ونصفَ شيءٍ. فتقابل به، فيكون الشيءُ مائتين وثمانية وثمانين يوماً، وهو ما سار البريدُ الأوّل. ويسير البريدُ الثاني مائتين وأربعةَ أيامٍ.

<٤.٤٥> فإنْ أمرتَه أن يسيرَ في أولِ يومٍ فرسخاً، ثم يزيد كلَّ يومٍ فرسخاً، فسار ثمانيةَ أيامٍ. ثمّ أمرتَ البريدَ الثاني أن يسيرَ في أولِ يومٍ فرسخاً ثم يزيد في كلّ يومٍ ثلاثةَ فراسخ، في كم يومٍ يلحقه؟

قياسُه: أن تجعل عددَ الأيامِ التي سارها الأوّلُ شيئاً. فيجب — على ما فسَّرنا في الجيشِ — أن يكون عددُ فراسخِه نصفَ مالٍ ونصفَ شيءٍ، ويكون الذي سار البريدُ الثاني من عددِ الأيامِ شيئاً إلاّ ثمانية. فيجب أن يكون عددُ فراسخِه مالاً ونصفَ مالٍ ومائةَ درهمٍ إلاّ أربعة وعشرين شيئاً ونصفاً. فهو إذن يعدل نصفَ مالٍ ونصفَ شيءٍ. فقابِل بها فيكون الشيءُ عشرين يوماً وهو ما يسير البريدُ الأوّل، ويسير البريدُ الثاني اثني عشر يوماً.

1 بلدة: بعدها مكان كلمةٍ محاها الناسخ — 14 يزيد: زيد.

<45.5> Si on dit : tu as ordonné à un postier parti d'un lieu de parcourir chaque jour vingt farsakhs ; il a marché quinze jours. Puis tu as envoyé à sa suite un autre postier et tu lui as ordonné de parcourir chaque jour la racine du nombre de farsakhs au bout duquel il le rejoint.

On l'infère ainsi : tu poses le nombre de farsakhs parcourus par le premier postier un *carré*. Il faut que le nombre de ses jours de marche soit un demi-dixième de *carré*. Mais le deuxième postier marche quinze jours de moins. Par conséquent, le nombre de ses jours de marche est la moitié d'un dixième de *carré* moins [104r] quinze jours. Tu le multiplies par ce qu'il parcourt pendant un jour, c'est-à-dire une chose, car il est dit qu'il parcourt chaque jour la racine du nombre de farsakhs au bout duquel il le rejoint, et ce nombre est un *carré*, donc sa racine est une chose. On a donc la moitié d'un dixième de cube moins quinze choses égal à un *carré*. Tu réduis par ceci ; on a un *carré* égal à trois cents dirhams plus vingt choses. La chose est donc égale à trente, qui est la racine du nombre de farsakhs que le premier postier a parcourus. Tu le multiplies par lui-même, on a neuf cents farsakhs, ce que le premier postier a parcouru. Tu le divises par ce qu'il parcourt chaque jour, soit vingt farsakhs ; le résultat est quarante-cinq jours, ce sont les jours de marche du premier postier ; tu en ôtes quinze jours, il reste trente jours, ce sont les jours de marche du deuxième postier.

<45.6> Si on dit : un postier est parti d'un lieu, tu lui as ordonné de parcourir chaque jour vingt farsakhs, et il a marché quarante-quatre jours. Puis tu as envoyé à sa suite un autre postier, et tu lui as ordonné de parcourir chaque jour la racine du nombre de jours pendant lesquels le premier a marché pour le rejoindre.

On l'infère ainsi : tu poses le nombre de jours de marche du premier postier un *carré*. Donc le nombre de farsakhs parcourus est vingt *carrés*. Le nombre de jours du second postier sera donc un *carré* moins quarante-quatre jours ; tu le multiplies par ce qu'il parcourt chaque jour, c'est-à-dire une chose ; on a donc un cube moins quarante-quatre choses égal à vingt *carrés*. Tu réduis par ceci ; la chose est donc vingt-deux, ce qui est la racine

<٥.٤٥> فإن قيل: بريدٌ خرجَ من بلدةٍ، أمرتَه أن يسيرَ في كل يومٍ عشرين فرسخاً، فسارَ خمسةَ عشرَ يوماً. ثم أرسلت بعدَه بريداً آخر وأمرتَه أن يسيرَ في كل يومٍ جذرَ عددِ الفراسخِ التي يلحقُه فيها.

قياسُه: أن تجعلَ ما سارَه البريدُ الأوّل من عددِ الفراسخِ مالاً، فيجب أن يكون عددُ الأيامِ التي سارها نصفَ عُشْرِ <مالٍ>. والبريدُ الثاني يسير أقلّ منه بخمسة عشر يوماً. فيكون عدد أيامه إذنْ نصفَ عُشرِ مالٍ إلاّ خمسة / عشر ١٠٤-و يوماً. فتضربه فيما يسيره في اليومِ وهو شيءٌ لأنه قال يسير في كل يومٍ جذر عددِ الفراسخِ التي يلحقه فيها، وعددُ ذلك مالٌ، فجذرُه شيءٌ. فيكون نصفَ عُشْرِ كعبٍ إلاّ خمسةَ عشر شيئاً يعدل مالاً. فتقابل بها، فيكون مالاً يعدل ثلاثمائةِ درهمٍ وعشرين شيئاً، فالشيءُ يعدل ثلاثين، وهو جذرُ عددِ الفراسخِ التي سارها البريدُ الأوّل. فتضربها في مثلها فيكون تسعمائةِ فرسخٍ، فهو ما سار البريدُ الأوّل. فتقسمه على ما يسير كلّ يومٍ وهو عشرون فرسخاً، فيخرج خمسةً وأربعون يوماً، وهي أيّام البريد الأوّل، فتلقي منها خمسةَ عشر يوماً، فيبقى ثلاثون يوماً وهي أيامُ البريد الثاني.

<٦.٤٥> فإن قيل: بريدٌ خرجَ من بلدةٍ، أمرتَه أن يسيرَ في كل يومٍ عشرين فرسخاً، فسار أربعةً وأربعين يوماً، ثم أرسلتَ بعدَه بريداً آخر وأمرتَه أن يسيرَ في كل يومٍ جذْرَ ما سار الأولُ من الأيامِ التي [ان] يلحقه فيها.

قياسُه: أن تجعلَ ما سار البريدُ الأوّل من الأيامِ مالاً، فيكون عددُ فراسِخه التي سارها عشرين مالاً. فيكون عددُ أيامِ البريدِ الثاني مالاً إلاّ أربعةً وأربعينَ يوماً. فتضربه فيما يسير كل يومٍ، وهو شيءٌ، فيكون كعباً إلاّ أربعةً وأربعين شيئاً تعدل عشرين مالاً. فتقابل بها، فيكون الشيءُ اثنين وعشرين، وهو جذرُ

20 أربعة: فوق السطر.

du nombre de jours pendant lesquels le premier postier a marché. Multiplie-le par lui-même ; on a quatre cent quatre-vingt-quatre jours, c'est le nombre de jours de marche du premier postier. Tu le multiplies par vingt jours, on a neuf mille six cent quatre-vingts, c'est le nombre de farsakhs parcourus par le premier postier. Et le nombre de jours du second postier est quatre cent quarante-quatre jours, que tu multiplies par ce qu'il parcourt chaque jour, c'est-à-dire vingt-deux farsakhs ; on a neuf mille six cent quatre-vingts farsakhs.

<46> Si on dit : un poids[53] pour vingt dirhams et un poids pour quinze dirhams et un poids pour dix dirhams ; on te dit alors : prends de tous un poids pour dix-huit dirhams : ce problème est indéterminé.

On l'infère ainsi : tu poses une chose du poids qui est au prix de dix dirhams, pour dix choses des dirhams, et une chose du poids qui est au prix de quinze dirhams, pour quinze choses des dirhams ; il reste du poids un poids moins deux choses, et des dirhams dix-huit [104^{v}] dirhams moins vingt-cinq choses. Tu prends du poids qui est au prix de vingt un poids moins deux choses pour vingt moins quarante choses ; il vient dix-huit dirhams moins vingt-cinq choses égal à vingt dirhams moins quarante choses. Réduis par ceci ; on a la chose égale à deux tiers de cinquième. Tu achètes des poids qui sont au prix de dix et au prix de quinze, de chacun d'eux, deux tiers de cinquième d'un poids, et tu achètes du poids qui est au prix de vingt, trois cinquièmes plus deux tiers d'un cinquième.

Si tu veux, prends une chose du poids qui est au prix de dix, pour dix choses des dirhams, et prends deux choses du poids qui est au prix de quinze, pour trente choses des dirhams, il reste du prix du poids dix-huit dirhams moins quarante choses, et il reste du poids un poids moins trois

[53] Un *mithqāl* est une unité de poids qui vaut un dirham et trois septièmes.

الأيام التي سارها البريدُ الأوّل. فاضربها في مثلِها تَكُن أربعمائة وأربعةً وثمانين يوماً، وهو ما سار البريدُ الأوّل من الأيّام. فتضربها في عشرين، فيكون تسعة آلاف وستمائة وثمانين، وهو عددُ فراسخِ البريدِ الأوّل. وعدد أيام البريد الثاني أربعمائة وأربعة وأربعون يوماً. فتضربها فيما يسيره كلّ يومٍ وهو اثنان وعشرون فرسخاً، فتكون تسعة آلاف وستمائة وثمانين فرسخاً.

<٤٦> فإن قيل: مِثقالٌ بعشرين درهماً، ومثقال بخمسة عشر درهماً، ومثقال بعشرة دراهم، فقيل لك: خُذْ من جميعِها مِثقالاً بثمانية عشر درهماً. هذه المسألةُ غيرُ محدودةٍ.

وقياسُها أن تأخذَ شيئاً من المِثقالِ الذي بعشرةٍ، بعشرة أشياء من الدراهم، وشيئاً من المِثقال الذي بخمسةَ عشر، بخمسة عشر شيئاً من الدراهم. ويبقى من المِثقال مثقالٌ إلاّ شيئين، ومن الدراهم ثمانية عشر / درهماً إلاّ خمسةً وعشرين ١٠٤ - ظ شيئاً. وتأخذ من المِثقالِ الذي بعشرين، مثقالاً إلاّ شيئين، بعشرين إلاّ أربعين شيئاً. فصار ثمانيةَ عشرَ درهماً إلاّ خمسة وعشرين شيئاً تعدل عشرين درهماً إلاّ أربعين شيئاً. فقابلْ بها فيكون الشيءُ يعدل ثلثَي خُمسٍ. فتشتري من المثاقيل: الذي بعشرة والذي بخمسة <عشر> من كل واحدٍ ثلثَي خُمسِ مثقال وتشتري من المثقالِ الذي بعشرين ثلاثة أخماسٍ وثلثَي خمسٍ. وإن أحببتَ فَخُذْ شيئاً من المثقالِ الذي بعشرة، بعشرة أشياء من الدراهم وخُذْ شيئين من المثقالِ الذي بخمسةَ عشرَ، بثلاثين شيئاً من الدراهم، فيبقى من ثمن المثقالِ ثمانية عشر درهماً إلاّ أربعين شيئاً، ومن المثقالِ مثقالٌ إلاّ ثلاثةَ أشياء، فتشتريه من المثقالِ

9 الدراهم: الدرهام — 10 وشيئاً: الواو فوق السطر/ الدراهم: الدرهام — 11 الدراهم: الدرهام — 12 إلاّ شيئين: فوق السطر.

choses, que tu achètes du poids qui est au prix de vingt dirhams pour vingt moins deux choses. Il est par conséquent égal à dix-huit dirhams moins quarante choses. Tu réduis par ceci ; on a la chose, un dixième. Tu prends du poids qui est au prix de dix un dixième de poids, du poids qui est au prix de quinze dirhams, un cinquième de poids, et du poids qui est au prix de vingt, sept dixièmes de poids, ce qui est un demi plus un cinquième de poids.

<47> Si on dit : une livre pour cinq dirhams et une livre pour quatre dirhams et dix livres pour un dirham ; prends de tous une livre pour deux dirhams. Ce problème est indéterminé.

On l'infère ainsi : tu prends une chose de la livre au prix de cinq, pour cinq choses de deux dirhams, et une chose de la livre au prix de quatre dirhams, pour quatre choses de deux dirhams ; il reste de deux dirhams deux dirhams moins neuf choses, et de la livre une livre moins deux choses. Tu prends de celui qui est d'un dirham les dix livres pour un dixième de dirham moins un cinquième de chose ; on a dès lors deux dirhams moins neuf choses égaux à un dixième de dirham moins un cinquième de chose. Réduis par ceci ; la chose est donc dix-neuf parties de quatre-vingt-huit parties. Tu achètes de chacune des livres au prix de cinq et au prix de quatre dix-neuf parties de quatre-vingt-huit parties de livre, et des dix livres dont le prix est un dirham cinquante parties de quatre-vingt-huit parties de livre. Et, si tu veux, prends de la livre au prix de cinq une chose pour cinq choses de deux dirhams, et de la livre au prix de quatre cinq choses pour vingt choses de deux dirhams. Il reste de deux dirhams deux dirhams moins vingt-cinq choses et de la livre une livre moins six choses. [105r] Tu prends de ce que dix livres valent un dirham pour un dixième <de dirham> moins trois cinquièmes de chose. On a donc deux dirhams moins vingt-cinq choses égaux à un dixième de dirham moins trois cinquièmes de chose. Réduis par ceci ; on a la chose, dix-neuf parties de deux cent quarante-quatre, ce que tu achètes de la livre qui est au prix de cinq. Et tu achètes de la livre au prix de quatre quatre-vingt-quinze parties de deux cent quarante-quatre parties de

الذي بعشرين درهماً، بعشرين إلاّ شيئين. فهو إذاً يعدل ثمانيةَ عشر درهماً إلاّ أربعين شيئاً. فتقابل بها، فيخرج الشيءُ عُشراً. فتأخذ من المثقالِ الذي بعشرةِ عُشْرَ مثقالٍ، ومن الذي بخمسةَ عشرَ درهماً خُمسَ مثقالٍ ومن الذي بعشرين سبعةَ أعشارِ مثقالٍ، وهو نصفٌ وخمسُ مثقالٍ.

<٤٧> فإن قيل: رطلٌ بخمسةِ دراهمَ ورطلٌ بأربعة دراهمَ وعشرةُ أرطالٍ بدرهمٍ، خُذْ من جميعها رطلاً بدرهين. هذه المسألةُ غيرُ محدودةٍ.

وقياسُه: أن تأخذَ شيئاً من الرطلِ الذي بخمسةٍ، بخمسةِ أشياء من الدرهمين، وشيئاً ومن الرطلِ الذي بأربعة دراهم، بأربعة أشياء من الدرهمين، فيبقى من الدرهمين درهمان إلاّ تسعةَ أشياء، ومن الرطلِ رطلٌ إلاّ شيئين. فتأخذ من الذي عشرةُ أرطال بدرهم، بعُشر درهم إلاّ خُمْس شيءٍ، فيكون حينئذٍ: درهمين إلاّ تسعةَ أشياء تعدل عُشرَ درهمٍ إلاّ خُمس شيءٍ. فقابل بها فيكون الشيءُ تسعة عشر جزءاً من ثمانية وثمانين جزءاً. فتشتري من كلّ واحدٍ من الرطلِ الذي بخمسة والرطل الذي بأربعة، تسعةَ عشر جزءاً من ثمانية وثمانين جزءاً من رطلٍ، ومن الذي عشرةُ أرطالٍ بدرهمٍ خمسين جزءاً من ثمانية وثمانين جزءاً من رطل. وإن شئتَ، فخُذْ من الذي هو رطلٌ بخمسةٍ، شيئاً بخمسةِ أشياء من الدرهمين، ومن الذي هو رطلٌ بأربعةٍ، خمسةَ أشياء بعشرين شيئاً من الدرهمين. فيبقى من الدرهمين درهمان إلاّ خمسةً وعشرين شيئاً، ومن الرطلِ رطلٌ إلاّ ستةَ أشياء، / فتأخذ من الذي عشرةُ أرطالٍ بدرهمٍ، بعُشر درهمٍ إلاّ ثلاثة ١٠٥-و أخماس شيء، فيكون: درهمَيْن إلاّ خمسةً وعشرين شيئاً تعدل عُشْرَ درهمٍ إلاّ ثلاثةَ أخماسِ شيءٍ. فقابل بها، فيكون الشيءُ تسعة عشر جزءاً من مائتين وأربعة وأربعين، وهو الذي تشتري من الرطل الذي بخمسة. وتشتري من الرطلِ الذي بأربعة خمسةً وتسعين جزءاً من مائتين وأربعة وأربعين جزءاً من رطلٍ، ويُشترَى

3 ومن (الثانية): من — 9 فيبقى: فبقي — 15 فخذ: خذ — 22 وتسعين: وتسعون.

livre. Et tu achètes de ce que dix livres valent un dirham cent trente<-trois> parties de deux cent quarante-quatre parties de livre. Et, si tu veux, prends de la livre qui est au prix de cinq trois dixièmes de livre et deux cinquièmes d'un dixième de livre pour un dirham et un demi et un cinquième. Et la livre au prix de quatre, prends-en trois cinquièmes d'un dixième de livre pour deux cinquièmes de dirham plus deux cinquièmes d'un dixième de dirham. Et de ce que dix livres valent un dirham, trois cinquièmes de livre pour le tiers d'un dixième de dirham.

<48> Si on dit : tu as acheté pour dix dirhams de la farine au prix d'un dirham les trois mesures[54], tu as acheté pour trois dirhams du sésame à un prix inconnu, tu as vendu chacun d'eux au prix de l'autre et tu as gagné quatre dirhams. Quel est le prix du sésame ?

On l'infère ainsi : tu as acheté trente mesures de farine à dix dirhams au prix de trois mesures pour un dirham, et tu as acheté pour trois dirhams de sésame au prix d'une chose pour un dirham. On a donc trois choses. Tu as vendu les trois choses au prix de trois pour un dirham. Leur prix sera une chose et il reste du capital plus le profit dix-sept dirhams moins une chose, ce qui est le prix de la farine, si tu la vends au prix du sésame. Tu la vends, ce qui est trente mesures, au prix d'une chose pour un dirham ; on a dix-sept dirhams moins une chose. Multiplie une chose par dix-sept dirhams moins une chose, on a dix-sept choses moins un *carré* égal à trente. Réduis par ceci ; la chose si tu veux est quinze, ou si tu veux est deux ; tu dis que le sésame est, si tu veux, quinze mesures et, si tu veux, deux mesures.

Si on te pose un problème comme celui-ci ou ses semblables, alors, si le capital et le profit, ou le capital et la perte – si on te dit que tu as perdu – se partagent en deux parties telles que le produit de l'une par l'autre soit égal au produit du prix de l'une des deux denrées [105v] par le prix de l'autre denrée, le problème est rationnel ; et s'ils ne se partagent pas, alors le problème est irrationnel.

[54] Un *qafīz* est une mesure de grain.

من الذي عشرة أرطال بدرهمٍ مائةٌ وثلاثون جزءاً من مائتين وأربعة وأربعين جزءاً من رطل. وإن شئت، فَخُذْ من الذي رطلٌ بخمسةٍ ثلاثةَ أعشار رطلٍ وخُمسي عُشْرِ رطل بدرهم ونصفٍ وخُمسٍ، ومن الذي رطلٌ بأربعةٍ، ثلاثة أخماسِ عُشْرِ رطلٍ، بخمسَي درهم وخمسي عُشْرِ درهمٍ، ومن الذي عشرةُ أرطال بدرهمٍ ثلاثةَ أخماس رطلٍ، بثلث عُشرِ درهمٍ.

<٤٨> فإن قيل: اشتريت بعشرة دراهمَ حنطةً من حساب ثلاثة أقفزة بدرهم، واشتريت بثلاثةِ دراهم سمسماً على حساب سعرٍ مجهولٍ، فبعتَ كلَّ واحدٍ منهما بسعر الآخر فربحت أربعةَ دراهم. كم سعرُ السمسمِ؟

قياسُه: أن تشتري ثلاثين قفيزاً حنطةً بعشرة دراهمَ من حسابِ ثلاثةِ أقفزةٍ بدرهمٍ، وتشتري بثلاثة دراهمَ سمسماً من حسابِ شيءٍ بدرهمٍ، فيكون ثلاثة أشياء. فتبيع الثلاثة الأشياءِ على حساب ثلاثةٍ بدرهم فيخرج ثمنُها شيئاً، ويبقى من رأسِ المالِ والربح سبعة عشر درهماً إلاّ شيئاً، وهو ثَمنُ الحنطةِ إذا بِيعَتْ بسعرِ السمسمِ فتبيعها – وهي ثلاثون قفيزاً – على حساب شيءٍ بدرهم، فتكون سبعة عشر درهماً إلاّ شيئاً. فاضرب شيئاً في سبعة عشر درهماً إلاّ شيئاً، فيكون سبعة عشر شيئاً إلاّ مالاً يعدل ثلاثين. فتقابل بها، فيكون الشيءُ إن شئتَ خمسةَ عشر وإن شئت اثنين. فتقول [سعر] السمسم إن شئت خمسة عشر قفيزاً وإن شئت قفيزان.

وإذا أُلقي عليك مثلُ هذهِ المسألةِ وما أشبهها، فإن انقسم رأسُ المالِ والربحُ أو رأسُ المال والخسرانُ – إن قال خسرت – بقسمين، يكون ضربُ أحدِهما في الآخر مثلَ ضربِ ثَمنِ أحدِ الصّنفين / في ثَمنِ الصنفِ الآخر. ١٠٥-ظ فالمسألةُ مفتوحةٌ. وإن لم ينقسم فالمسألة صمّاءُ.

15 فيكون: فيكن.

<49> Si on dit : des mesures de grain inconnues dont le prix est quatre-vingt-treize dirhams, néanmoins le nombre de mesures plus le prix de l'une d'elles est trente-quatre. Quel est le nombre de mesures et quel est le prix de la mesure ?

On l'infère ainsi : tu poses le prix de la mesure, une chose. Il reste le nombre de mesures trente-quatre moins une chose. Tu multiplies une chose par trente-quatre moins une chose. On a trente-quatre choses moins un *carré* égal à quatre-vingt-treize dirhams. Tu réduis par ceci ; la chose est donc trois, c'est le prix de la mesure, et les mesures sont trente et un. Si tu veux, pose la mesure trois et le prix des mesures trente et un.

<50> Si on dit : des mesures de grain inconnues, tu as vendu la première pour un dirham, et chacune a excédé l'autre d'un dirham. Tu as pris alors la racine de la totalité de leur prix, qui est ajoutée à leur nombre, on aura quatorze.

On l'infère ainsi : tu poses le nombre de mesures une chose. Il faut que leur prix, d'après ce que nous avons expliqué pour les troupes, soit un demi-*carré* plus une demi-chose. Sa racine, si tu lui ajoutes une chose, est quatorze. Tu ôtes une chose de quatorze choses, il reste quatorze moins une chose égal à la racine de la moitié du *carré* plus une demi-chose. Multiplie quatorze moins une chose par lui-même, on a cent quatre-vingt-seize dirhams plus un *carré* moins vingt-huit choses égal à un demi-*carré* plus une demi-chose. Tu réduis par ceci ; la chose sera huit, c'est le nombre de mesures.

<51> Si on dit : un bassin dans lequel coulent trois cours d'eau. L'un le remplit en deux jours, le second en trois jours et l'autre en quatre jours. Tu as ouvert tous les cours d'eau. En combien de jours le bassin se remplit-il ?

On l'infère ainsi : tu poses que celui qui le remplit en deux jours remplit en un seul jour la moitié du bassin, que celui qui le remplit en trois jours remplit en un seul jour le tiers du bassin, et que celui qui le remplit en quatre

<٤٩> فإن قيل: أقفزةٌ مجهولةٌ، ثَمنُها ثلاثةٌ وتسعون درهماً، إلاّ أنَّ عِدّةَ الأقفزة مع ثَمنِ قفيز منها أربعةٌ وثلاثون. كم عددُ الأقفزة وكم ثمنُ القفيز؟

قياسُه: أن تجعل ثَمنَ القفيز شيئاً، فيبقى عدَّة الأقفزة أربعةً وثلاثين إلاّ شيئاً. فتضرب شيئاً في أربعة وثلاثين إلاّ شيئاً، فيكون أربعةً وثلاثين شيئاً إلاّ مالاً تعدل ثلاثةً وتسعين درهماً. فتقابل بها فيكون الشيءُ ثلاثةً، وهو ثَمنُ القفيز، والأقفزة واحداً وثلاثين قفيزاً. وإن شئت فاجعل الأقفزة ثلاثةً، وثمنَ القفيز واحداً وثلاثين.

<٥٠> فإن قيل: أقفزةٌ مجهولةٌ، بِعتَ أوّلها بدرهمٍ، وتفاضلتْ بدرهمٍ درهمٍ، فأخذت جذرَ جميعِ ثَمَنِها فزِدْتَه على عدَّتِها فكان أربعةَ عشرَ.

قياسُه: أن تجعل عدّةَ الأقفزةِ شيئاً، فيجب أن يكون ثَمنُها — على ما فسَّرنا في الجيش — نصفَ مالٍ ونصفَ شيءٍ. فجذرُه إذا زِيدَ على شيءٍ كان أربعة عشر. فتُلقي شيئاً من أربعةَ عشر فيبقى أربعة عشر إلاّ شيئاً تعدل جذرَ نصفِ مالٍ ونصفِ شيءٍ. فاضرِبْ أربعةَ عشر إلاّ شيئاً في مثلِها يَكُنْ مائةً وستةً وتسعين درهماً ومالاً إلاّ ثمانية وعشرين شيئاً تعدل نصفَ مالٍ ونصفَ شيءٍ. فتقابل بها، فيكون الشيءُ ثمانيةً وهي الأقفزةُ.

<٥١> فإن قيل: حَوضٌ يَصُبُّ فيه ثلاثة أنهار؛ أحدها يملؤه في يومين، والآخر في ثلاثة أيام، والآخر في أربعة أيام، ففتحت الأنهار كلَّها، في كم <يوم> يمتلىء الحوضُ؟

قياسُه: أن تجعل الذي يمتلىء منه في يومين، يملأ في يومٍ واحدٍ نصفَ الحوضِ، والذي يملؤه في ثلاثة أيام يملأ في يوم واحدٍ ثلثَ الحوض، والذي يملؤه

13 إلاّ شيئاً: "إلاّ" فوق السطر — 15 فيكون: فتكون — 16 يملؤه: يملاه، كذا ترسم عنده دائماً ولن نكرّر الإشارة إليها — 19 يملأ: يملى، كذا يرسمها دائماً، ولن نشير إليها ثانية.

jours remplit en un seul jour le quart du bassin. Alors tous remplissent en un seul jour un bassin et un demi-sixième d'un bassin. Donc le bassin se remplit en douze parties de treize parties d'un jour.

<52> Si on dit : l'un le remplit en une demi-journée, l'autre en un cinquième de jour, le dernier en deux jours. Tu les as tous ouverts, en combien de jours sera-t-il rempli ? Tu sais que celui qui le remplit en une demi-journée remplit en un seul jour deux bassins. Et celui qui le remplit en un cinquième de jour remplit en une journée [106r] cinq bassins. Et celui qui le remplit en deux jours remplit en une journée la moitié d'un bassin. Alors tous remplissent en un jour sept bassins et demi, donc un seul bassin se remplit en deux parties de quinze parties d'un jour, c'est-à-dire un dixième et un tiers d'un dixième.

<53> Si on dit : l'un remplit en un sixième de jour, l'autre en un quart de jour, et le dernier en un septième de jour ; et le bassin a une évacuation qui le vide, s'il se remplit, en un neuvième de jour. Tu as ouvert tous les cours d'eau, ainsi que l'évacuation. En combien de jours le bassin se remplit-il ?

On l'infère ainsi : celui qui le remplit en un sixième de jour remplit en un jour six bassins, celui qui le remplit en un quart de jour remplit en un jour quatre bassins, et celui qui le remplit en un septième de jour remplit en un jour sept bassins ; alors tous remplissent en un jour dix-sept bassins. Et celui qui évacue ce qui est dans le bassin en un neuvième de jour évacue en un jour neuf bassins. Il reste provenant des cours d'eau, en un jour, huit bassins. Un seul bassin se remplit d'eau en un huitième de jour.

<54> Si on dit : si on recrute un employé de sorte que, s'il travaille un mois entier, on lui donne six dirhams, et s'il chôme le mois entier, il paye quatre dirhams. Il a travaillé et il a chômé et il n'a rien obtenu ni n'a eu de dette. Combien de jours a-t-il travaillé ? Combien de jours a-t-il chômé ?

في أربعة أيام يملأ في يوم واحدٍ ربعَ الحوضِ. فكلُّها تملأ في يومٍ حوضاً ونصف سدسِ حوضٍ. فالحوضُ الواحدُ يمتلئ في اثني عشر جزءاً من ثلاثةَ عشرَ جزءاً من يومٍ.

<٥٢> فإن قيل: يملأ أحدها في نصف يومٍ، والآخر في خمس يوم، والآخر في يومين. ففُتحت كلّها. في كم <يوم> يمتلئ؟ فقد علمت أنّ الذي يملؤه في نصف يوم يملأ في يومٍ حوضين، والذي يملؤه في خُمسِ يومٍ يملأ في يومٍ خمسةَ أحواضٍ، والذي يملؤه في يومين يملأ في يومٍ نصف حوضٍ. فكلُّها تملأ في يومٍ سبعةَ أحواضٍ ونصفاً. فالحوضُ الواحد يمتلئ في جزأين من خمسة عشر جزءاً من اليومِ، وهو عُشرٌ وثلث عشرٍ. ١٠٦-و

<٥٣> فإن قيل: يَملأ أحدُها في سدسِ يومٍ، والآخر في ربعِ يومٍ، والآخر في سُبعِ يومٍ. وللحوض مثْعَبٌ يفرغه إذا امتلأ في تُسعِ يومٍ، ففتحت الأنهار كلها والمثْعَب معها. في كم يمتلئ الحوض؟

قياسه: أن الذي يملؤه في سدسِ يومٍ يملأ في يومٍ ستةَ أحواض، والذي يملؤه في ربعِ يومٍ يملأ في يومٍ أربعةَ أحواضٍ، والذي يملؤه في سُبع يومٍ يملأ في يومٍ سبعة أحواضٍ. فكلّها تملأ في اليوم سبعة عشر حوضاً. والذي يُفرغ ما في الحوض في تُسعِ يومٍ يُفرغ في يومٍ واحدٍ تسعةَ أحواض. فيبقى <من> الأنهار في يومٍ واحدٍ ثمانيةُ أحواض. فالحوض الواحد يمتلئ في ثُمنِ يوم.

<٥٤> فإن قيل: أجيرٌ استأجرته على أنّه إن عمل الشهرَ كلّه فله ستةُ دراهم، وإن بَطَلَ الشهرَ كلّه فعليه أربعةُ دراهم. فعملَ وبَطَلَ فخرجَ لا له ولا عليه، كم عمل يوماً؟ وكم بطل يوماً؟

4 أحدها: أحدهما — 10 أحدها: أحدهما.

On l'infère ainsi : tu poses ce qu'il a travaillé au cours du mois, une chose. Alors le salaire qu'on lui doit est un cinquième de chose, car six est le cinquième du mois. Et tu poses ce qu'il a chômé au cours du mois trente moins une chose. Alors ce qu'il doit est un dixième et le tiers d'un dixième de ce qu'il a chômé, c'est-à-dire quatre dirhams moins un dixième de chose et le tiers d'un dixième de chose. Alors, tu réduis par ceci un cinquième de chose, on a la chose, douze ; ce qu'il a travaillé pendant le mois. Et il a chômé dix-huit <jours>.

Et si tu veux, dis : il chôme pendant le mois une fois plus un demi car six est égal à quatre fois un plus un demi. Alors tu poses ce qu'il travaille une chose, et ce qu'il chôme une chose plus un demi ; tu les additionnes, on aura deux choses plus un demi égales à trente jours. La chose est donc douze jours, c'est ce qu'il a travaillé et il a chômé dix-huit jours.

<55> Si on dit : il a travaillé et il a chômé, et il a gagné un dirham, combien a-t-il travaillé et combien a-t-il chômé ?

On l'infère ainsi : tu procèdes comme je te l'avais décrit, puis tu dis : un cinquième de chose est égal à cinq dirhams moins un dixième de chose et le tiers d'un dixième de chose. Et cela est égal à cinq dirhams car il doit avoir pour salaire pour ce qu'il travaille au cours du mois plus que ce qu'il doit en chômant le reste du mois, d'un dirham. Tu le réduis par ceci, on a la chose quinze, c'est [106v] ce qu'il travaillé, et il a chômé quinze.

<56> Si on dit : il a travaillé et il a chômé et il devait un dirham à la fin, tu procèdes comme je te l'ai décrit ; on a un cinquième de chose égal à trois dirhams moins un dixième de chose et le tiers d'un dixième de chose. Tu réduis par ceci, on a la chose, neuf, c'est ce qu'il a travaillé, et il a chômé vingt et un.

قياسُه: أن تجعل الذي عمل من الشهر شيئاً — فالذي يجبُ له من الكِراء خُمْسُ شيءٍ لأنّ الستةَ خُمْسُ الشهرِ — والذي يَبطُلُ من الشهر: ثلاثين يوماً إلاّ شيئاً، والذي يجبُ عليه عُشرُ وثلثُ عشرِ ما بَطَلَ وهو أربعةُ دراهم إلاّ عُشر شيءٍ وثلثَ عشرِ شيءٍ. فتقابل بها خُمسَ شيءٍ فيكون الشيءُ اثنَي عشر، وهو الذي عمل في الشهر، والذي بَطَلَ ثمانية عشر.

وإن أحببت فَقُلْ: الذي يَبطُل من الشهر مرةٌ ونصفٌ؛ لأن الستةَ مثلُ الأربعةِ مرةً ونصفاً. فتجعل الذي يعمل شيئاً، والذي يبطُل شيئاً ونصفاً، فتجمعهما فيكونان شيئين ونصفاً تعدل ثلاثين يوماً. فالشيءُ اثنا عشر يوماً وهو الذي عمِلَ، والذي بَطَلَ ثمانية عشر يوماً.

<٥٥> فإن قيل: عَمِل وبطَلَ، فخرج وله ربح درهمٍ، كم عمِل وكم بَطَلَ؟

قياسُه: أن تعمل كما وصفتُ لك، ثم تقول: خُمْسُ شيءٍ يعدل خمسةَ دراهم إلاّ عُشرِ شيءٍ وثلثَ عُشرِ شيءٍ. وإنّما صار يعدل خمسة دراهم لأنّه يجب له من الأجر فيما يعمل من الشهر أكثرُ من الذي يجب عليه في بطلان باقي الشهر بدرهمٍ. فتقابل بها، فيكون الشيءُ خمسة عشر وهو / الذي يعمَل، والذي ١٠٦-ظ يبطُلُ خمسةَ عشرَ.

<٥٦> فإن قيل: عَمِل وبَطَل فخرجَ عليه الفضل درهماً. فتعمل كما وصفتُ لك، فيكون خُمسُ شيءٍ يعدل ثلاثةَ دراهم إلاّ عُشر شيءٍ وثلثَ عشرِ شيءٍ. فقابل بها، فيكون الشيءُ تسعةً، وهو الذي عملَ، والذي بطَل واحدٌ وعشرون.

1 الكِراء: الكرى — 6 مرةٌ ونصفٌ: مرةً ونصفًا — 8 فيكونان: فيكونا — 13 لأنه: لأنّ.

<57> Si on dit : un bien dont tu isoles trois des racines, puis tu prends quatre racines de ce qui reste, alors ce sera égal aux trois racines que tu as isolées. Alors il faut que les racines du reste du bien, une fois ôtées trois de ses racines, soient égales à trois quarts de la racine du bien. C'est comme s'il disait : un bien dont tu isoles trois des racines puis tu prends la racine du reste, on a trois quarts de la racine du bien.

On l'infère ainsi : tu poses ton bien un *carré*, dont tu isoles trois des racines ; il reste un *carré* moins trois choses, donc la racine est égale à trois quarts de racine. Tu le multiplies par lui-même, on a la moitié du *carré* plus la moitié d'un huitième de *carré*, égaux à un *carré* moins trois racines. Réduis par ceci, la chose sera égale à six plus six septièmes, ce qui est la racine du *carré*, et le *carré* est quarante-sept plus un septième de septième.

<58> Si on dit : des animaux en nombre inconnu, dont la nourriture au cours d'un mois est dix fois leur nombre. On a nourri cinq animaux parmi eux pendant six jours, il leur est revenu le tiers de leur nombre.

On l'infère ainsi : tu sais que cinq animaux mangent cinquante pendant un mois, alors il faut qu'ils mangent pendant six jours le cinquième de cinquante, car six est le cinquième du mois, c'est-à-dire dix. Dix est donc le tiers du nombre des animaux, et le nombre des animaux est trente.

<59> Si on dit : cinq animaux parmi eux ont mangé pendant six jours et il leur est revenu la racine de leur nombre. Or nous avons montré que cinq animaux parmi eux mangent pendant six jours dix ; dix est donc la racine de leur nombre, leur nombre est donc cent.

<60> Si on dit : dix qui sont des hommes et un dirham. Tu as partagé le dirham entre les hommes ; il revenait à chacun un neuvième du nombre des hommes.

<٥٧> فإن قيل: مالٌ عزلتَ ثلاثةَ أجذاره، ثم أخذتَ أربعةَ أجذارِ ما بقي، فكان مثل الثلاثةِ الأجذار التي عَزَلْتَ. فيجب أن يكون جذرُ ما بقي من المال بعد إلقاء ثلاثةِ أجذاره مثلَ ثلاثةِ أرباعِ جذرِ المال. فكأنّه قال: مالٌ تعزل منه ثلاثةَ أجذاره، ثم تأخذ جذرَ ما بقي، فيكون مثلَ ثلاثةِ أرباعِ جذرِ المال.

قياسُه: أن تجعل مالَك مالاً، فتعزل منه ثلاثةَ أجذاره، فيبقى مالٌ إلاّ ثلاثة أشياء فجذرُه ثلاثة أرباعِ جذرٍ، فاضربه في مثلِه فيكونَ نصفَ مالٍ ونصفَ ثُمنِ مالٍ يعدل مالاً إلاّ ثلاثة أجذار. فقابل بها، فيكون الشيءُ يعدل ستةً وستةَ أسباع، وهو جذرُ المالِ، والمالُ سبعةٌ وأربعون وسُبعُ السُّبعِ.

<٥٨> فإن قيل: دوابٌّ مجهولة عَلَفُها في الشهر عشرة أمثالِ عدّها؛ اعتَلَفَتْ خمسُ دوابَّ منها ستةَ أيامٍ، فأصابها مثلُ ثلثِ عِدّها.

قياسُه: أنّك قد علمتَ أن خمسَ دوابَّ تعتلف في الشهرِ خمسين. فيجب ان تعتلفَ في ستةِ أيامٍ خُمس الخمسين؛ لأن الستةَ خمسُ الشهرِ وهي عشرة، فالعشرةُ ثلث عدة الدّواب، فالدّواب ثلاثون دابّة.

<٥٩> فإن قيل: اعتلفت خمسة دوابَّ منها في ستة أيام، فأصابها مثلُ جذرِ عدّها. وقد بيّنا أن الذي تعتلف خمسُ دواب منها في ستة أيامٍ عشرة. فالعشرةُ جذرُ عدّتِها، فعِدّةُ الدوابّ مائةٌ.

<٦٠> فإن قيل: عشرةٌ هي رجالٌ ودرهمٌ. قسمتَ الدرهمَ على الرجالِ، فأصاب كلَّ رجل منهم مثلُ تُسعِ عِدّة الرجال.

12 ستة أيام: في الهامش — 14 خمسة دوابّ: أنّث العدد هنا بعد أن ذكّره من قبل، والوجهان جائزان — 16 عدّها: "عد" فوق السطر.

On l'infère ainsi : tu poses le nombre d'hommes une chose, et le dirham dix moins une chose, sur une chose. Tu divises dix moins une chose, on obtient un neuvième de chose ; tu multiplies un neuvième de chose par une chose, on a un neuvième de *carré* égal à dix moins une chose. Réduis par ceci, on a la chose, six, c'est le nombre des hommes et le dirham est quatre.

<61> Si on dit : un *carré* dont tu isoles trois des racines puis tu prends quatre racines de ce qui reste, et tu en ajoutes une [107r] aux trois, et une racine des trois aux quatre, ils seront égaux.

On l'infère ainsi : tu dis trois grandes racines et quatre petites racines, tu ajoutes une grande racine aux petites racines, et une petite racine aux grandes racines ; on a alors trois petites racines plus une grande racine égales à deux grandes racines plus une petite racine. Ôte donc une grande racine par une grande racine et une petite racine par une petite racine, il reste une grande racine égale à deux petites racines. Et la petite racine est la moitié de la grande racine. C'est comme s'il disait : un *carré* dont tu retranches trois de ses racines, puis tu prends la racine de ce qui reste, ce sera égal à la moitié de la racine du *carré* ; tu poses ton *carré*, un *carré*, tu en ôtes trois de ses racines, il reste un *carré* moins trois racines, sa racine est égale à la moitié des racines. Multiplie la moitié des racines par elle-même, on a un quart de *carré* égal à un *carré* moins trois racines ; tu réduis par ceci, on a la racine du *carré* égale à quatre et le *carré* égal à seize.

<62> Si on dit : tu prends une racine des trois, tu l'ajoutes aux quatre, et une racine des quatre, tu l'ajoutes aux trois ; alors tu substitues quatre à la place de trois, ou trois à la place de quatre ; tu dis alors : deux grandes racines et une petite racine sont égales à quatre petites racines ; tu réduis par ceci, il reste deux grandes racines égales à trois petites racines et la petite racine est les deux tiers de la grande racine.

قياسُه: أن تجعلَ الرجالَ شيئاً والدرهم عشرةً إلاّ شيئاً على شيءٍ. فتقسم عشرة إلاّ شيئاً فيخرج تسعُ شيءٍ، فتضرب تُسعَ شيءٍ في شيءٍ، فيكون تسعُ مالٍ يعدل عشرة إلاّ شيئاً. فقابلْ بها، فيكون الشيءُ ستةً، وهو الرجال، والدرهم أربعة.

<٦١> فإن قيل: مالٌ تعزل منه ثلاثةَ أجذاره، ثم تأخذ أربعةَ أجذارِ ما بقي، فتزيد منها جذراً / على الثلاثة، وجذراً من الثلاثة على الأربعة فيستويان. ١٠٧-و

قياسه: أنّك تقول: ثلاثة أجذار كبارٍ، وأربعة أجذار صغارٍ، فتزيد جذراً كبيراً على الأجذار الصغار وجذراً صغيراً على الأجذار الكبار، فيكون ثلاثةُ أجذارِ صغارٍ وجذرٌ كبيرٌ يعدل جذرين كبيرين وجذراً صغيراً. فألْقِ جذراً كبيراً بجذرٍ كبيرٍ، وجذراً صغيراً بجذرٍ صغيرٍ، فيبقى جذرٌ كبيرٌ يعدل جذرين صغيرين. فالجذرُ الصغيرُ نصفُ الجذرِ الكبير، فكأنّه قال: مالٌ يُنْقص منه ثلاثةُ أجذارِه ثم تأخذ منه جذرَ ما بقي، فيكون مثل نصفِ جذرِ المال. فتجعل مالَك مالاً فتلقي منه ثلاثةَ أجذاره، فيبقى مالٌ إلاّ ثلاثة أجذارٍ. فجذرُه يعدل نصفَ جذرٍ. فاضربْ نصفَ جذرٍ في مثلِه يَكُنْ: ربعُ مالٍ يعدل مالاً إلاّ ثلاثة أجذارٍ. فتقابل بها، فيكون جذرُ المالِ أربعةً والمالُ ستة عشر.

<٦٢> فإن قيل: تأخذ جذراً من الثلاثة فتزيده على الأربعة، وجذراً من الأربعة فتزيده على الثلاثة. فتحول الأربعةَ مكان الثلاثةِ، أو الثلاثة مكان الأربعة، فتقول: جذران كبيران وجذرٌ صغيرٌ تعدل أربعةَ أجذارٍ صغار. فتُقابل بها، فيبقى جذران كبيران يعدلان ثلاثةَ أجذارٍ صغار، فالجذرُ الصغير ثلثا الجذرِ الكبير.

<63> Et, si tu veux, dis alors : trois petites racines plus une grande racine sont égales à trois grandes racines. Ôte alors une grande racine d'une grande racine, il reste deux grandes racines égales à trois petites racines. La petite racine est donc les deux tiers d'une grande racine. C'est comme si on disait : un *carré* dont tu enlèves trois des racines, puis tu prends la racine de ce qui reste, il vient les deux tiers de la racine du *carré*. Tu poses ton *carré*, un *carré*, tu en enlèves trois de ses racines, il reste un *carré* moins trois racines, sa racine est les deux tiers d'une racine. Multiplie deux tiers de racine par eux-mêmes, on a quatre neuvièmes de *carré* égaux à un *carré* moins trois choses. Réduis par ceci, on a la chose cinq plus deux cinquièmes de dirham, ce qui est la racine du *carré*, et le *carré* est vingt-neuf dirhams plus quatre cinquièmes de cinquième.

<64> Si on dit : trois employés, le salaire mensuel de l'un est trois dirhams, du deuxième six, du troisième quatre. Ils ont travaillé pendant le mois, et ils ont obtenu [107^{v}] le même salaire. Combien de jours chacun d'eux a-t-il travaillé ?

On l'infère ainsi : tu poses que celui dont le salaire est trois dirhams travaille une chose, que celui dont le salaire est six travaille une demi-chose, car trois est la moitié de six, et que celui dont le salaire est quatre travaille trois quarts de chose ; tu additionnes ; on a deux choses plus un quart égal à trente. La chose est donc treize plus un tiers, c'est ce qu'a travaillé celui dont le salaire mensuel est trois dirhams ; celui dont le salaire est six a travaillé la moitié, c'est-à-dire six plus deux tiers, et celui dont le salaire est quatre a travaillé trois quarts, c'est-à-dire dix, et il revient à chacun d'eux un dirham plus un tiers.

<65> Si on dit : le salaire du premier est plus grand que le salaire du second d'un dirham, et le salaire du second est plus grand que le salaire du troisième d'un dirham, pose alors que le premier a travaillé une chose et que le deuxième a travaillé une demi-chose moins cinq, car le salaire du second pour cinq jours est un dirham, et que le troisième a travaillé trois quarts d'une chose moins quinze, car son salaire pour quinze jours est deux

<٦٣> وإن شئت قُلْ: ثلاثةُ أجذارٍ صغار وجذرٌ كبير تعدل ثلاثةَ أجذارٍ كبار. فألقِ جذراً كبيراً بجذرٍ كبيرٍ، فيبقى جذران كبيران يعدلان ثلاثةَ أجذارٍ صغار. فالجذرُ الصغير ثلثا الجذرِ الكبير. فكأنه قال: مالٌ تُسقط منه ثلاثةَ أجذارِه، ثم تأخذ جذرَ ما بقي، فيكون مثل ثلثي جذرِ المالِ. فتجعل مالَك مالاً، وتسقط منه ثلاثةَ أجذاره، فيبقى مالٌ إلاّ ثلاثة أجذارٍ، فجذرُه ثلثا جذرٍ. فاضرب ثلثي جذرٍ في نفسه يَكُن: أربعةُ أتساعِ مالٍ يعدلُ مالاً إلاّ ثلاثة أشياء. فقابل بها، فيكون الشيءُ خمسةً وخُمسي درهمٍ، وهو جذرُ المالِ، والمالُ تسعةٌ وعشرون درهماً وأربعة أخماسِ الخُمسِ.

<٦٤> فإن قيل: ثلاثة أُجَراء، أَجرُ أحدهم في الشهر ثلاثةُ دراهم، والثاني ستةٌ، والثالث أربعة. عملوا الشهرَ بينهم، فخرجوا / بأجرٍ سواءٍ. كم ١٠٧-ظ عمِلَ كلُّ واحدٍ منهم؟

قياسُه: أن تجعلَ الذي أجرتُه ثلاثةُ دراهمَ يعمَلُ شيئاً، والذي أجرتُه ستةٌ يعمل نصفَ شيءٍ؛ لأنّ الثلاثةَ من الستة نصفُها، والذي أجرته أربعةٌ يعملُ ثلاثةَ أرباعِ شيءٍ. فتجمعه فيكون شيئَيْن وربعاً يعدل ثلاثين، فالشيءُ ثلاثة عشر وثلث، وهو ما يعمل الذي أجرتُه في الشهر ثلاثةُ دراهم، والذي أجرتُه ستةٌ يعمل نصفَه وهو ستة وثلثان، والذي أجرته أربعة يعمل ثلاثةَ أرباعِه وهو عشرة، والذي يصيبُ كلَّ واحدٍ منهم من الكراء درهم وثلث.

<٦٥> فإن قيل: خرج أَجْرُ الأوّل أكثر من أَجر الثاني بدرهمٍ، وأجرُ الثاني أكثرَ من أجرِ الثالث بدرهم. فاجعل الذي عمل الأوّلُ شيئاً، والذي عمل الثاني نصفَ شيءٍ إلاّ خمسةً، لأنّ أجر الثاني في خمسة أيامٍ درهمٌ، والذي عملَ الثالثُ ثلاثةُ أرباعِ شيءٍ إلاّ خمسة عشر، لأن أجرَه في خمسةَ عشر يوماً درهمان.

7 فيكون: فيكن– 17 الكراء: الكرى.

dirhams ; tu additionnes, on a deux choses et un quart moins vingt égal à trente ; réduis par ceci, on a la chose vingt-deux plus deux neuvièmes, c'est ce qu'a travaillé celui dont le salaire est trois. Le deuxième travaille la moitié moins cinq, ce qui est six plus un neuvième, et le troisième travaille trois quarts moins quinze, ce qui est un plus deux tiers. Le salaire qui revient au premier est deux dirhams plus deux neuvièmes, au second un dirham plus deux neuvièmes, et au troisième deux neuvièmes.

<66> S'il dit : un employé dont le salaire mensuel est dix dirhams plus un vêtement, il a travaillé cinq jours, et il a pris le vêtement, quelle est la valeur du vêtement ? Tu sais que, s'il a pris un vêtement pour cinq jours, alors il prend pour le mois six vêtements, donc six vêtements sont égaux à dix dirhams plus un vêtement. Donc le vêtement vaut deux dirhams.

Si tu veux, dis : celui qui a travaillé un sixième du mois, il lui revient un sixième de salaire mensuel, qui est un dirham plus deux tiers plus un sixième de vêtement, ce qui est égal à un vêtement, donc le vêtement vaut deux dirhams.

Si tu veux, dis : il a pris le vêtement pour cinq jours, il reste vingt-cinq jours pour dix dirhams, pour cinq jours deux dirhams.

<67> Si on dit : un employé dont le salaire mensuel est dix dirhams plus trois vêtements, chaque vêtement est supérieur à l'autre de trois dirhams, il a travaillé cinq jours, il a pris la moitié du plus bas et le tiers du moyen et le quart du plus élevé, et il a remboursé vingt dirhams. Quelle est la valeur du plus bas ? Tu sais qu'il prend [108r] pour cinq jours la moitié du plus bas, qui est la moitié d'un vêtement, le tiers du moyen, qui est le tiers d'un vêtement plus un dirham, et le quart du plus élevé, qui est le quart d'un vêtement plus un dirham plus un demi, et qu'il rembourse vingt dirhams ; il reste un vêtement plus la moitié d'un sixième d'un vêtement moins dix-sept dirhams et un demi pour le travail de cinq jours. S'il travaille le mois tout entier, il prend six vêtements plus la moitié d'un vêtement moins cent

فتجمعه فيكون شيئين وربعاً إلاّ عشرين تعدل ثلاثين. فتقابلُ بها، فيخرج الشيءُ اثنين وعشرين وتُسعين، وهو الذي يعملُ الذي أَجْرُه ثلاثةٌ، ويعمل الثاني نصفَه إلاّ خمسةً، وهو ستةٌ وتُسعٌ، ويعمل الثالث ثلاثةَ أرباعِه إلاّ خمسةَ عشرَ وهو واحدٌ وثلثان؛ ويصيب الأولَ من الأجر درهمان وتسعان، والثانيَ درهمٌ وتُسعان؛ والثالثَ تُسعان.

<٦٦> فإن قال: أجيرٌ أجرُه في الشهر عشرةُ دراهمَ وثوبٌ. عمل خمسةَ أيامٍ فأخذ الثوب. كم قيمةُ الثوب؟ فأنت تعلم أنّه، إذا أخذ في خمسة أيام ثوباً، أنّه يأخذ في الشهر ستةَ أثوابٍ. فستةُ أثوابٍ تعدل عشرةَ دراهم وثوباً. فالثوبُ يعدل درهمين.

وإن شئتَ فَقُلْ: الذي عمل سُدسُ الشهرِ، والذي يصيبه من الأجر سدسُه، وهو درهم وثلثان وسدسُ ثوبٍ، فهو يعدل ثوباً. فالثوبُ يعدل درهمين.

وإن شئتَ فَقُلْ: أخذ الثوب بخمسة أيامٍ، فيبقى خمسةٌ وعشرون يوماً بعشرة دراهم، لكل خمسةِ أيامٍ درهمان.

<٦٧> فإن قيل: أجيرٌ أَجْرُه في الشهر عشرةُ دراهم وثلاثة أثوابٍ، كلُّ ثوب أرفعُ من الآخر بثلاثة دراهم. عمل خمسةَ أيامٍ فأخذ نصفَ الخسيسِ وثلثَ الأوسطِ وربعَ المرتفع وردَّ عشرين درهماً. كم قيمةُ الخسيس؟ فقد علمتَ أنّه يأخذ / بخمسةِ أيامٍ نصفَ الخسيس وهو نصفُ ثوبٍ، وثلثَ الأوسط وهو ثلثُ ثوبٍ ودرهمٌ، وربعَ المرتفعِ وهو ربعُ ثوبٍ ودرهمٌ ونصفٌ، ويردُّ عشرين درهماً، فيفضل منه ثوبٌ ونصف سدسِ ثوبٍ إلاّ سبعة عشر درهماً ونصفاً بعملِ خمسةِ أيامٍ. فإذا عمل الشهرَ كلَّه أخذ ستةَ أثوابٍ ونصفَ ثوبٍ إلاّ مائة درهمٍ وخمسة

١٠٨-و

18 الخسيس: الخيس — 19 ودرهم (في الموضعين): ودرهماً / ونصفٌ: ونصفاً.

dirhams et cinq dirhams égaux au salaire, qui est trois vêtements plus dix-neuf dirhams ; tu réduis par ceci, on a la valeur du vêtement le plus bas trente-cinq dirhams plus trois septièmes de dirham.

<68> Si on dit : son salaire mensuel est vingt dirhams plus une chose, il a travaillé douze jours et il a pris la chose et la racine de son salaire, quelle est la valeur d'une chose ?

On l'infère ainsi : tu sais que douze jours sont les deux cinquièmes du mois, et ce qui lui revient de salaire, c'est deux cinquièmes, ce qui est huit dirhams plus deux cinquièmes d'une chose, ce qui est égal à une chose plus la racine de vingt dirhams, plus une chose. Ôte une chose de huit dirhams plus les deux cinquièmes d'une chose ; il reste donc huit moins trois cinquièmes d'une chose égaux à la racine de vingt dirhams et une chose. Multiplie huit dirhams moins trois cinquièmes d'une chose par lui-même, il vient soixante-quatre dirhams, plus le cinquième d'un *carré*, plus quatre cinquièmes de cinquième de *carré*, moins neuf choses et trois cinquièmes de chose, égaux à vingt dirhams plus une chose. Tu réduis par ceci, on a la chose cinq dirhams.

<69> Si on dit : un homme qui avait un bien, il en a fait commerce et il a gagné l'égal de ce bien. Il a fait aumône de dix dirhams, puis il a fait commerce et il a gagné l'égal de ce qu'il avait. Il a alors fait aumône de dix dirhams, puis il a fait commerce une troisième fois de ce qu'il avait, il a gagné l'égal de ce qu'il avait. Il a alors fait aumône de dix dirhams, et il ne lui reste plus rien. Quel est son capital ?

On l'infère ainsi : tu poses son capital, une chose ; il a fait commerce avec, il a gagné l'égal, ce qui est une chose, il vient deux choses. Il a fait l'aumône de dix dirhams, il reste deux choses moins dix dirhams, puis il en a fait commerce, il a gagné l'égal, il vient quatre choses moins vingt dirhams. Puis il fait l'aumône de dix dirhams, il reste quatre choses moins trente dirhams ; il en a fait commerce, il a gagné l'égal, il vient huit choses moins soixante dirhams égal à dix dirhams, car il a dit : il a fait l'aumône de dix

دراهم تعدل أجرَه، وهو ثلاثةُ أثواب وتسعةَ عشرَ درهماً. فتقابل بها، فيكون قيمةُ الثوبِ الخسيس خمسةً وثلاثين درهماً وثلاثةَ أسباع درهمٍ.

<٦٨> فإن قيل: أجرُه في الشهر عشرون درهماً وشيء، عملَ اثني عشر يوماً فأخذ ذلك الشيءَ وجذر كرائه. كم قيمة الشيء؟

قياسه: أنك قد عَلِمتَ أنّ الاثني عشر يوماً خمسا الشهر، وأن الذي يصيبه من كِرائه خمساه وهو ثمانية دراهم وخمسا شيءٍ. فهو يعدل شيئاً وجذر عشرين درهماً وشيءٍ. فألْقِ شيئاً من ثمانية دراهمَ وخمسي شيء، فيبقى ثمانية إلاّ ثلاثةَ أخماسِ شيءٍ تعدل جذرَ عشرين درهماً وشيءٍ. فاضربْ ثمانيةَ دراهم إلاّ ثلاثة أخماسِ شيءٍ في مثله، يَكُنْ أربعة وستين درهماً وخُمسَ مالٍ وأربعة أخماسِ خُمسِ مالٍ إلاّ تسعةَ أشياء وثلاثة أخماسِ شيءٍ يعدل عشرين درهماً وشيئاً. فتقابل بها، فيكون الشيءُ خمسةَ دراهم.

<٦٩> فإن قيل: رجلٌ كان معه مالٌ فاتَّجر به فربحَ مثلَه، فتصدَّق بعشرة دراهم، ثم اتَّجر به فربحَ مثلَ ما بقي معه فتصدَّقَ بعشرةِ دراهمٍ، ثمّ اتَّجر به أيضاً ثالثةً بما بقي معه، فربح مثلَه، فتصدَّق بعشرة دراهم فلم يبقَ معه شيءٌ. كم رأسُ مالِه؟

قياسُه: أن تجعل رأسَ مالِه شيئاً فاتَّجر به، فربحَ مثله — وهو شيءٌ — فصار شيئين، فتصدَّقَ بعشرةِ دراهم، فبقي شيئان إلاّ عشرة دراهم. ثم اتَّجر به فربح مثلَه فصار أربعة أشياء إلاّ عشرين درهماً، فتصدَّق بعشرةِ دراهم، فبقي أربعةُ أشياء إلاّ ثلاثين درهماً، فاتّجر به فربح مثلَه، فصار ثمانية أشياء إلاّ ستين درهماً تعدل عشرةَ دراهم، لأنّه قال: تصدَّقَ بعشرةِ دراهم فلم يبقَ معه شيءٌ.

4 كرائه: كراه — 6 كرائه: كراه.

dirhams et il ne lui reste plus rien. Par nécessité, ce qui reste est dix dirhams. Tu réduis par ceci, alors la chose sera huit dirhams plus un demi plus un quart, ce qui est son capital. [108v]

<70> Si on dit : il a obtenu à la fin son capital plus dix dirhams, quel était son capital ? Pose son capital, une chose, il a gagné l'égal de son capital, on a deux choses. Il a fait l'aumône de dix dirhams, il reste deux choses moins dix dirhams. Il a gagné l'égal, on a quatre choses moins vingt dirhams. Il a fait l'aumône de dix dirhams, il reste quatre choses moins trente dirhams. Il a gagné l'égal, il vient huit choses moins soixante dirhams ; il a fait l'aumône de dix dirhams, il reste huit choses moins soixante-dix dirhams égal à une chose plus dix dirhams ; tu réduis par ceci, on a une chose égale à onze dirhams plus trois septièmes, ce qui est son capital.

<4. *Sur des progressions arithmétiques et géométriques*>

J'ai trouvé un des procédés des arithméticiens, retranscrit dans les livres de leurs prédécesseurs, qui n'est attribué à personne, dont on ne connaît pas l'auteur et dont on ne sait identifier l'inventeur. Tous ceux qui s'adonnent à l'arithmétique, parmi les contemporains que nous avons vus, le redisent et imitent celui qui l'a composé, sans en identifier le fondement ni en connaître une cause à laquelle se référer. J'ai beaucoup interrogé ceux qui sont instruits dans l'arithmétique et la géométrie sur sa cause et sur le fondement à partir duquel il a été inventé, mais je n'en ai trouvé aucun qui l'identifie ni le reconnaisse. Je suis resté un bon moment à m'interroger sur la cause qui a amené les arithméticiens à retranscrire ce procédé dans leurs livres. Dieu, Puissant et Majestueux, a rendu aisé par Sa grâce, Ses faveurs et Sa puissance, la cause à partir de laquelle il a été inventé. Je l'ai donc retranscrit dans mon livre. Voici son énoncé : additionne un par un jusqu'à dix par dix, ou jusqu'à cent par cent, ou jusqu'à autant que tu voudras selon la succession des nombres, comme un par un, deux par deux, trois par trois,

فبالضرورة أنّ الذي بقي معه عشرةُ دراهم. فتقابلُ بها فيكون الشيءُ ثمانيةَ دراهمَ ونصفاً وربعاً، وهو رأسُ / مالِه. ١٠٨-ظ

<٧٠> فإن قيل: خرج ومعه رأسُ ماله وعشرةُ دراهم، كم رأسُ مالِه؟ فاجعل رأسَ ماله شيئاً. فربح مثلَه فصار شيئين. فتصدَّق بعشرةِ دراهم فبقي شيئان إلاّ عشرة دراهم، فربح مثلَه فصار أربعة أشياء إلاّ عشرين درهماً. فتصدَّق بعشرةِ دراهم، فبقي أربعة أشياء إلاّ ثلاثين درهماً، فربح مثله فصار ثمانية أشياء إلاّ ستين درهماً. فتصدَّق بعشرة دراهم، فبقي ثمانية أشياء إلاّ سبعين درهماً يعدل شيئاً وعشرة دراهم. فتقابل بها، فيكون الشيءُ أحد عشر درهماً وثلاثة أسباعٍ وهو رأسُ مالِه.

<في متواليات عددية وهندسية>

ووجدت باباً من أبواب الحُسَّابِ مرسوماً في كتبِ من تقدَّمَ منهم، لا يُضاف إلى أحدٍ ولا يعرفُ صاحبُه ولا يوقفُ على مستخرجِهِ. فإن جميعَ من نظر في الحِساب ممَّن شاهدنا من أهلِ زماننا يروونه روايةً ويقلِّدون من وضَعَهُ، ولا يقفون له على أصلٍ ولا يعرفون له علّةً، يرجعون إليها، وكنت كثير السؤالِ للعلماء بالحساب والهندسة عن علّتِه والأصلِ الذي استُخْرِجَ منه، فما رأيتُ منهم أحداً وقف عليه ولا عرِفه. فمكثتُ برهةً من الزمانِ أجيلُ نظري في العلّة التي قادتهم إلى ما رَسَموا في كتبهم منه، فسهَّل الله لي عزَّ وجلَّ بلطفِه ومنِّهِ وقُدْرَتِهِ، الوصولَ إلى العلّةِ التي منها استُخرِجَ، فرسمته في كتابي هذا، وهو قولُه: اجمعْ لي من واحدٍ في واحدٍ إلى عشرةٍ في عشرة، أو إلى مائةٍ في مائة، أو إلى ما أردتَ، على توالي الأعداد مثلَ واحدٍ في واحدٍ، واثنين في اثنين، وثلاثة في ثلاثة،

3 فإن قيل: خرج ومعه رأس ماله: في الهامش — 19 واحدٍ في: واحد وفي.

quatre par quatre et ainsi de suite jusqu'où tu veux selon cet ordre. Comme si tu voulais jusqu'à dix par dix. Le procédé que j'ai trouvé, comme je te l'ai dit, inscrit dans les livres des anciens : tu ajoutes à dix auquel ton calcul aboutit un, absolument ; on a onze, que tu multiplies par dix, on a cent dix ; retiens-le, puis prends le tiers de dix que j'ai mentionné absolument, on a trois plus un tiers, auquel tu ajoutes un sixième absolument ; on a trois plus un demi, que tu multiplies par cent dix que tu as retenu ; on a trois cent quatre-vingt-cinq, ce que tu obtiens de la somme de la multiplication de un par un jusqu'à dix par dix selon la succession des nombres [109r] et leur ordre.

En voici la cause : si tu commences par multiplier un par un, deux par deux, trois par trois selon la succession des nombres, que tu les additionnes, et que tu divises la somme par ce que tu obtiens de la somme de un plus deux plus trois successivement sans multiplication jusqu'à l'endroit où tu as abouti lors de la multiplication, alors ce que tu obtiens comme quotient est égal aux deux tiers des parties du nombre auquel tu as abouti lors de l'addition avec les multiplications, plus un tiers de un absolument.

Exemple[55] : nous multiplions un par un, on obtient un. Si nous divisons un par un, on obtient un. C'est donc deux tiers de un plus un tiers de un. Si nous multiplions deux par deux, on a quatre ; si nous lui ajoutons le premier un, on a cinq ; si nous divisons cinq par un plus deux, ce qui est trois, on a un plus deux tiers, ce qui est les deux tiers de deux plus le tiers de un. Si nous multiplions trois par trois, on a neuf ; si nous lui ajoutons cinq, on a quatorze ; si nous le divisons par un plus deux plus trois, c'est-à-dire six, on a deux plus un tiers, ce qui est les deux tiers de trois plus le tiers de un. Si nous multiplions quatre par quatre, on a seize ; si nous lui ajoutons quatorze, on a trente ; si nous le divisons par un plus deux plus trois plus quatre, c'est-à-dire dix, on a trois, c'est-à-dire les deux tiers de quatre plus le tiers de un.

55 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

وأربعة في أربعة، ثمّ هلمَّ جراً إلى ما أردتَ على هذا النسَقِ، فكأنّك أردتَ إلى عشرةٍ في عشرة، فالبابُ الذي أعلمتُك أنّي وجدتُه في كتبِهم مرسوماً: أن تزيدَ على العشرةِ التي انتهى إليها حسابُك واحداً أبداً فيكون أحدَ عشر، فتضربها في العشرةِ فيكون مائةً وعشرةً. فاحفظْها. ثمّ خُذْ ثلثَ العشرةِ التي ذكرت أبداً فيكون ثلاثة وثُلثاً، فتزيد عليه سُدْساً أبداً فيكون ثلاثة ونصفاً. فتضربه في المائة والعشرة التي حفظت، فتكون ثلاثمائةٍ وخمسةً وثمانين، وهو ما اجتمع من ضربِ واحدٍ في واحدٍ إلى عشرةٍ في عشرة، على توالي الأعدادِ / ونسَقِها. ١٠٩-و

والعِلّةُ فيه: أنّك إذا ابتدأت في الضربِ من واحدٍ في واحدٍ، واثنين في اثنين، وثلاثةٍ في ثلاثةٍ، على توالي الأعداد، وجمعتَهُ، وقسمت ما اجتمع من ذلك على ما يجتمع من واحدٍ واثنين وثلاثة على توالي الأعدادِ من غيرِ ضرب، إلى الموضعِ الذي انتهيت إليه في الضربِ، فإن الذي يخرجُ من القَسْمِ مثلُ ثلثي أجزاء العددِ الذي انتهيتَ إليه في الجمعِ والضربِ وزيادة: ثُلث واحدٍ أبداً.

ومثال ذلك: أنّا ضربنا واحداً في واحدٍ فخرج واحدٌ. فإذا قسمنا واحداً على واحدٍ خرج واحدٌ، فهو ثلثا واحدٍ، وزيادة ثلثِ واحدٍ. وإذا ضربنا اثنين في اثنين كان أربعةً، فإذا زِدْنا عليه الواحدَ الأوّل كان خمسةً. فإذا قسمنا خمسةً على واحدٍ واثنين — وهو ثلاثة — خرج واحدٌ وثلثان، وهو ثلثا اثنين وزيادة: ثُلثِ واحدٍ. وإذا ضربنا ثلاثة في ثلاثة كان تسعة، فإذا زِدْنا عليه الخمسةَ كان أربعةَ عشر، فإذا قسمناها على واحدٍ واثنين وثلاثة — وهو ستة — خرج اثنان وثُلْث، وهو ثلثا الثلاثةِ وزيادة: ثُلثِ واحدٍ. وإن ضربنا أربعة في أربعة كان ستة عشر، فإذا زِدْنا عليها الأربعة عشر كان ثلاثين. فإذا قسمناها على واحدٍ واثنين وثلاثة وأربعة — وهو عشرة — خرج ثلاثة، وهو ثُلثا الأربعة، وزيادة ثُلثٍ

4 ذكرت: ذكر — 5 في المائة: مكررة — 9-10 وجمعته ... على توالي الأعداد: في الهامش — 11 الذي (الأولى): الى — 13 فخرج واحد: فخرج واحداً — 14 خرج واحد: خرج واحداً — 15 فإذا: "ذا" فوق السطر — 16 واحد وثلثان: واحداً وثلثين — 18-19 اثنان وثلث: اثنين وثلثا.

Et, selon cet exemple, on a la division de la somme des produits de un par un jusqu'à dix par dix, selon la succession des nombres et leur ordre, par la somme de un plus deux plus trois jusqu'à dix successivement, les deux tiers de dix plus le tiers de un absolument ; ce qui est ici sept. La cause de cela est établie correctement par la voie de la géométrie.

Et on montre ce que nous avons décrit pour la troupe de soldats : si tu veux additionner à partir de un jusqu'au nombre que tu veux, comme un, deux, trois, quatre, selon la succession des nombres, que tu ajoutes au nombre que tu veux un absolument, ce que tu obtiens, tu le multiplies par la moitié du nombre que tu veux. Ce que tu obtiens est la somme de tous. Comme si nous voulions additionner de un à dix : nous ajoutons à dix un absolument, on a onze, que nous multiplions par la moitié de dix, on a cinquante-cinq[56].

Nous le montrons également [109v] de cette manière : tu sais que un plus dix est onze, et deux plus neuf est onze, et trois plus huit est onze, et quatre plus sept est onze, et cinq plus six est onze, donc chaque couple selon cet ordre est onze, et les dix sont cinq couples ; alors multiplie onze par cinq, on a cinquante-cinq. Il est donc clair que les produits de un par un jusqu'à dix par dix, si on les divise par cinquante-cinq, on a deux tiers de dix plus un tiers de un, qui est sept. Tu multiplies sept par cinquante-cinq, on a trois cent quatre-vingt-cinq, ce que l'on obtient des produits de un par un jusqu'à dix par dix est établi exactement d'après ce que nous avons expliqué.

Le procédé auquel la cause nous a amenés est d'additionner de un à dix, on a cinquante-cinq ; puis nous prenons les deux tiers de dix absolument, on a six et deux tiers auquel nous ajoutons le tiers de un absolument ; on a sept, que nous multiplions par cinquante-cinq, on a trois cent cinquante-huit.

56 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

واحدٍ. وعلى هذا المثال يخرج لك قِسمةُ ما اجتمع من ضربِ واحدٍ في واحدٍ إلى عشرة في عشرة، على توالي الأعدادِ ونسقها على ما يجتمع من جمع واحدٍ واثنين وثلاثة إلى عشرة على التوالي، ثُلثي العشرة وزيادة: ثُلثِ واحدٍ أبداً، وهو في هذا الموضعِ سبعةٌ. وعلّة هذا قائمةٌ صحيحةٌ من طريق الهندسة.

ويبيّن ما وصفنا في الجيش، أنّك إذا أردتَ أن تجمعَ من واحدٍ إلى ما أردت من العددِ مثلَ واحدٍ واثنين وثلاثة وأربعة على توالي الأعدادِ، أن تزيدَ على العددِ الذي تريد واحداً أبداً، فما كان ضربتَه في نصفِ العددِ الذي تريد، فما بلغ فهو ما يجتمع من جميعِه، كأنّا إذا أردنا أن نجمعَ من واحدٍ إلى عشرةٍ، فنـــزيد على العشرةِ واحداً أبداً، فيكون أحد عشر، فنضربه في نصف العشرة، فيكون خمسةً وخمسين.

ونبيّنه أيضاً / في هذا الوجه وهو أنّك تعلم أنّ الواحدَ والعشرة أحدَ ١٠٩-ظ
عشرَ، والاثنين والتسعة أحدَ عشرَ، والثلاثة والثمانية أحدَ عشرَ، والأربعة والسبعة أحدَ عشرَ، والخمسة والستة أحدَ عشرَ. فكلُّ اثنين منها على هذا الترتيب أحدَ عشرَ. والعشرةُ خمسُ مرّات اثنين اثنين. فاضربْ أحدَ عشر في خمسةٍ، يَكُن خمسةً وخمسين. فقد وَضَحَ أنّ الذي يجتمعُ من ضرب واحدٍ في واحدٍ إلى عشرةٍ في عشرةٍ: إذا قُسِمَ على خمسةٍ وخمسين خرج ثُلثا العشرةِ وزيادةُ ثُلْثِ واحدٍ وهو سبعة. فتضرب سبعةً في خمسةٍ وخمسين، فيكون ثلاثمائةٍ وخمسة وثمانين، وهو ما يجتمعُ من ضربِ واحدٍ في واحدٍ إلى عشرةٍ في عشرة، صحيح قائم على ما شرحنا.

فالبابُ الذي أخرجتنا إليه العِلّةُ هو أن نجمعَ من واحدٍ إلى عشرةٍ، فيكون خمسةً وخمسين، ثمّ نأخذ ثُلثي العشرة أبداً، فيكون ستةً وثُلثَيْن، فنـــزيد عليها ثُلثَ واحدٍ أبداً، فيكون سبعةً، فنضربها في خمسةٍ وخمسين، فيكون ثلاثمائة وخمسةً وثمانين.

16 ثلثا: ثلثي.

Le procédé que nous avons trouvé inscrit dans leurs livres est : nous ajoutons à dix un absolument, on a onze que nous multiplions par dix, on a cent dix ; ce cent dix est le double de la somme de un à dix, qui est cinquante-cinq.

Puis il a dit : prends le tiers de dix absolument, on lui ajoute un sixième absolument, on a trois plus un demi ; on le multiplie par cent dix, on a trois cent quatre-vingt-cinq ; mais le tiers de dix plus un sixième de un est la moitié de deux tiers de dix plus un tiers de un. Double l'un et prends la moitié de l'autre, on a le même résultat par la multiplication. Et il a fait cela comme je l'imagine pour cacher la cause.

Chapitre pour doubler les nombres et les additionner successivement et dans l'ordre, comme doubler les cases de l'échiquier et autres choses, comme un, deux, quatre, huit, seize et ainsi de suite.

C'est comme l'a dit Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, que Dieu soit miséricordieux avec lui : si la deuxième case est plus grande de un que la première, la troisième plus grande que la première et la seconde de un, la quatrième plus grande que la première et la seconde et la troisième de un, et ainsi de suite, chacune est plus grande que la somme de celles qui la précèdent de un absolument.

Puisque tu sais que la deuxième est deux et la première un, [110r] donc la deuxième est plus grande que la première de un ; la quatrième est huit, ce qui est plus grand que la première et la seconde et la troisième de un ; et ainsi de suite jusqu'à ce que tu veux de doublement ; et le double de chacune est plus grand que le double de ce qui le précède, de un absolument ; s'il en est ainsi, et que nous voulons ensuite doubler entre un et vingt, ou jusqu'au nombre que nous voulons, selon l'ordre, la succession et la somme, comme, si nous voulons, jusqu'à vingt, alors nous doublons de un jusqu'à vingt et un ; et nous faisons de même, si on dit « jusqu'à soixante-quatre »,

والبابُ الذي وجدْناه مرسوماً في كتبهم: هو أن نزيدَ على العشرة واحداً أبداً، فيكون أحدَ عشرَ فنضربه في العشرة فيكون مائةً وعشرة. فهذه المائةُ والعشرة هي ضُعفُ ما مِنْ واحدٍ إلى عشرةٍ الذي هو خمسةٌ وخمسون.

ثمّ قال: خذْ ثُلثَ العشرةِ أبداً، وزِدْ عليه سُدساً أبداً، فيكون ثلاثةً ونصفاً، فاضربه في المائة والعشرة يكنْ ثلاثمائةٍ وخمسةً وثمانين، وثُلث العشرة وزيادة سُدْسِ واحدٍ، هو نصفُ ثُلثي العشرة وزيادة ثُلثِ واحدٍ. فأضْعِفْ واحداً، ونصِّف الآخر فخرجا في الضربِ سواء. وإنّما فعلَ هذا — فيما أتوهّم — ليُعَمِّي عن العلّة فيه.

وأمّا بابُ إضعافِ الأعدادِ وجمْعِها على تواليها ونسَقِها كإضعافِ بيوتِ الشطرنجِ وغيرها، مثلَ واحدٍ واثنين وأربعة وثمانية وستة عشر وكذلك على الوِلاء.

فمثلُ ما قال محمّد بن موسى الخوارزمي، رحْمَةُ الله عليه، وهو أنّ الثانيَ أكثر من الأوّل بواحدٍ والثالث أكثرُ من الأوّل والثاني بواحدٍ، والرابع أكثرُ من الأوّل والثاني والثالث بواحدٍ، وكذلك على هذا المِثال كلُّ واحدٍ أكثرُ من جميعِ ما قبله بواحدٍ أبداً.

لأنّك تعلم أنّ الثاني اثنان والأوّل واحدٌ، / فالثاني أكثرُ من الأوّل بواحدٍ، ١١٠-و
والرابع ثمانيةٌ وهو أكثرُ من الأوّل والثاني والثالث بواحدٍ، ثمّ كذلك إلى ما أردتَ من الإضعافِ، وإضعافُ كل واحدٍ أكثرَ من إضعافِ ما قبلَه بواحدٍ أبداً. فإذا كان ذلك كذلك، ثمّ أردنا إضعافَ ما بين واحدٍ إلى عشرين، أو إلى ما أردنا من الأعداد، على نظامِها وتواليها وجمعِها، فكأنّا أردنا إلى عشرين، فنضعف من واحدٍ إلى واحدٍ وعشرين. وكذلك نفعل: لو قال "إلى أربع

12 نقل أبو كامل هذا النص دون شك من أحد كتب الخوارزمي الحسابية التي فقدت.

qui est le nombre de cases de l'échiquier ; alors nous doublons de un jusqu'à soixante-cinq en ajoutant un absolument à ce que nous voulons doubler. Nous disons : un plus deux plus quatre plus huit plus seize, jusqu'à ce que nous aboutissions à vingt et une fois. Ce que tu obtiens de vingt et une fois, retranches-en un absolument ; ce qui reste ce sont les doubles, et la somme de un, deux, quatre, huit, seize... jusqu'à vingt fois[57].

Muḥammad ibn Mūsā – que Dieu soit satisfait de lui – a rendu cela aisé et accessible en disant : tu poses le premier, deux, il a posé le premier deux pour se dispenser d'ajouter un ; s'il le multiplie par lui-même, on a quatre, qui est le deuxième. Et si on multiplie quatre par lui-même, on a seize, qui est le quatrième. Et si on multiplie seize par lui-même, on a deux cent cinquante-six, qui est le huitième. Et si on multiplie deux cent cinquante-six par quatre, qui est le second, on a mille vingt-quatre, qui est le dixième. Tu fais de même selon cet exemple avec tout ce qu'il te vient. Si tu multiplies le quatrième par le cinquième, on a le neuvième, car quatre plus cinq est neuf. Et si tu multiplies le huitième par le septième, on a le quinzième, et si tu multiplies le premier par le neuvième, on a le dixième, car nous avons posé le premier deux et le neuvième cinq cent douze. Si nous multiplions le dixième, qui est mille vingt-quatre, par lui-même, on a mille mille quarante-huit mille cinq cent soixante-seize, dont tu soustrais un ; il reste mille mille quarante-huit mille cinq cent soixante-quinze, ce qui est la somme des doubles de un à vingt.

Si tu veux doubler et additionner [110^{v}] les cases de l'échiquier, multiplie la huitième, qui est deux cent cinquante-six, par elle-même ; ce que tu obtiens est la seizième ; multiplie la seizième case par elle-même, ce que tu obtiens est la trente-deuxième case ; multiplie la trente-deuxième case par elle-même, ce que tu obtiens est la soixante-quatrième case. Soustrais-en un

57 $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.

وستين" التي هي بيوت الشطرنج، لأضعفْنا من واحدٍ إلى خمسةٍ وستين بزيادة واحدٍ أبداً على ما نريد من الأضعاف. فنقول: واحد واثنان وأربعة وثمانية وستة عشر إلى أن ننتهي إلى واحدٍ وعشرين مرّةً، فما خرج لك من الواحدِ والعشرين مرّةً، فأسقِطْ منه واحداً أبداً، فما بقي فهو أضعافُ وجمعُ واحدٍ واثنين وأربعة وثمانية وستة عشر إلى عشرين مرّة.

وقد كان محمّد بن موسى رضي الله عنه سهّلَ ذلك وقرّبه، وهو أنْ قال: تجعل الأوّل اثنين، وإنّما جَعل الأوّلَ اثنين ليَستَغْنِيَ عن زيادةِ الواحدِ. فإذا ضربه في مثلِه كان أربعة وهو الثاني، وإذا ضرب الأربعة في مثلها كانت ستة عشر وهو الرابع، وإذا ضرب الستةَ عشر في مثلِها كان مائتين وستةً وخمسين وهو الثامن، وإذا ضرب المائتين والستةَ والخمسين في أربعةٍ، الذي هو الثاني، كان ألفاً وأربعةً وعشرين وهو العاشر، وكذلك تفعل بكلّ ما جاءك من هذا على هذا المثال: إذا ضربتَ الرابع في الخامس كان التاسع لأنّ أربعةً وخمسةً تسعةٌ، وإذا ضربت الثامن في السابع كان الخامس عشر، وإذا ضربت الأوّلَ في التاسعِ كان العاشر؛ لأنّ الأوّلَ جعلناه اثنين والتاسعَ خمسمائة واثني عشر. فإذا ضربنا العاشر، وهو ألف وأربعة وعشرون في مثلها، كان ألفَ ألفٍ وثمانيةً وأربعين ألفاً وخمسمائةٍ وستة وسبعين، فتُنقص منه واحداً فيبقى ألفُ ألفٍ وثمانيةٌ وأربعون ألفاً وخمسمائة وخمسة وسبعون وهو أضعاف وجمع ما من واحد إلى عشرين.

فإن أردتَ إضعاف وجمْعَ ما في / بيوتِ الشطرنج فاضرب الثامن – وهو ١١٠-ظ مائتان وستةٌ وخمسون – في مثله، فما بلغ فهو السادسَ عشرَ، فاضرب البيت السادسَ عشر في مثلِه، فما اجتمع فهو للبيتِ الاثنينِ والثلاثين. فاضرب ما للبيتِ الثاني والثلاثين في مثلِه فما اجتمعَ فهو ما للبيتِ الرابع والستين، فتُنقص

2 واثنان: واثنين – 4 مرّة: المرّة / واثنين: واثنان – 16 وسبعين: وسبعون / وأربعون: وأربعين.

absolument, ce qui reste est la somme des doubles de un jusqu'à soixante-quatre, qui sont les cases de l'échiquier. Et selon cela double ce que tu veux, si Dieu le veut.

Abū Kāmil Shujāʿ ibn Aslam al-Ḥāsib a dit : j'ai montré, expliqué et éclairé ce que j'ai inscrit dans mon livre de ces problèmes, d'une explication claire, et j'ai commenté ce dont al-Khwārizmī a laissé l'explication et l'éclaircissement, par des figures géométriques, une démonstration claire et un discours convaincant. J'ai obtenu pour les problèmes que j'ai inscrits des principes utiles et rigoureux par lesquels vous résolvez bien des problèmes qui étaient inaccessibles aux savants en arithmétique – il était ardu de les résoudre et d'y parvenir ; et j'ai dérivé de ces fondements de nombreux problèmes pour vous trouver la voie, pour vous faciliter la méthode et établir pour vous un argument clair, en tenant à vous apprendre et en cherchant ce qui peut vous aider à atteindre ce que vous n'osiez désirer atteindre et dont vous n'espériez acquérir la connaissance, dans le but de recevoir la récompense de Dieu et l'autre Monde. Bénédiction de Dieu soit à Muḥammad, son Prophète, et les siens, et que la paix soit sur eux.

منه واحداً أبداً، فما بقي فهو إضعافُ وجمعُ ما من واحدٍ إلى أربع وستين، الذي هو بيوت الشطرنج. وعلى هذا فأضعِف ما أردت إن شاء الله.

قال أبو كاملٍ شجاعُ بن أسلَمَ الحاسِبُ: قد بيّنتُ وشرحتُ وأوضحتُ ما رسمتُ في كتابي هذا من المسائل شرحاً بيّناً، وفسَّرتُ ما تَرَكَ الخوارزميُّ شرحَهُ وإيضاحَهُ بأشكالٍ هندسيّةٍ وبرهانٍ واضحٍ وقولٍ مقنعٍ، ووصلتُ إلى ما رسَمتُ من المسائل أصولاً نافعةً محكمةً تحلّون بها كثيراً من المسائل التي كانت تنغلقُ على العلماء بالحِساب، ويعتاصُ عليهم إخراجُها والتخلّصُ إليها، وفرّعتُ من هذه الأصولِ مسائلَ كثيرةً لأوجدَكُم السبيلَ، وأسهّلَ لكم الطريقَ وأُقيمكم على المحجّة الواضِحة، حرصاً منّي على تعليمكم، وطلبِ ما يُؤدّي إلى معونتكم على ما لم تطمعوا في الوصول إليه، والتخلّصِ إلى معرفته، ابتغاءَ ثوابِ الله والدارِ الآخرةِ، وصلّى اللهُ على محمّد النبيّ، وعلى آله الطيّبين الطاهرين وسلّم كثيرًا.

11 كثيرًا: كتب بعدها "والحمدُ لله الأوّل قبلَ كلّ شيءٍ، والآخرِ بعد كلّ شيءٍ، الذي ليس كمثلِهِ شيءٌ، وهو السميع العليم، على ما علّم وفهّم وسهّل من ذلك، إنّه عليمٌ بذات الصدور. وأنا أشهدُ أنْ لا إله إلاّ الله وحده لا شريك له، وأنّ محمّداً عبدُه ورسولُه، أرسلَه بالهدى ودين الحقّ ليُظهره على الدين كلّه ولو كرِهَ المشركون. وأنا اشهدُ أنّ الجنّةَ حقٌّ، والنارَ حقّ، والبعثَ حقّ، والساعة آتيةٌ لا ريب فيها، وأنّ الله يبعث / من في القبور، على ذلك أحيا، وعليه أموت، وعليه أُبعثُ إن شاء الله. تمّ الكتاب وكمُلَ بحمدِ الله وقوّته، ووافق الفراغ من تعليقه لاثنين وعشرين يوماً انتهَيْن [تقرأ بوضوح "إن يقين"] من الشهر المعظّم بركتُه رجب سنة إحدى وخمسين وستمائة هجرية."

TEXTE ET TRADUCTION

Livre sur les volatiles

Kitāb al-Ṭayr

Au nom de Dieu, Clément et Miséricordieux

LIVRE SUR LES VOLATILES

<Analyse indéterminée entière du premier degré>

Shujāʿ ibn Aslam, connu sous le nom d'Abū Kāmil, a dit : J'ai vu l'une des sortes d'arithmétique, qui circule entre les hommes de science et les hommes du commun, entre le savant et l'ignorant, avec laquelle ils se divertissent et qu'ils apprécient, qu'ils trouvent ingénieuse et à propos de laquelle les uns interrogent les autres. Celui qui, parmi eux, répond, le fait par conjecture et par intuition, sans revenir en cela à un principe ou à une inférence. Nombreux parmi les hommes de science et les hommes du commun m'ont interrogé à propos des problèmes de cette sorte d'arithmétique, et je leur répondais pour un seul problème par une seule solution, étant donné qu'il n'y en avait pas d'autre ; peut-être y avait-il dans d'autres problèmes deux solutions, ou trois, ou quatre, ou plus que cela ; et peut-être la solution de l'un d'entre eux était-elle impossible. Jusqu'à ce que me fût parvenu un problème de cette sorte, que j'ai calculé et dont j'ai trouvé de nombreuses solutions ; j'ai examiné exhaustivement tout ce qu'il comporte de solutions, et j'ai obtenu deux mille six cent soixante-seize réponses correctes. Grande fut ma surprise, et j'ai remarqué que, lorsque j'ai diffusé cela, on l'a trouvé excessif et choquant, et on m'a accusé sans me connaître. J'ai donc décidé de composer un livre sur cette sorte, dans lequel je rends facile le procédé qui s'y trouve et le rends accessible ; j'indique comment déterminer la solution correcte [A-4ʳ] du problème là où c'est possible, je montre celui où il n'y a qu'une seule solution et j'explique celui où il n'y a absolument aucune solution par un vrai procédé et un discours démonstratif, jusqu'à ce que je parvienne au problème dont je t'ai indiqué qu'il a deux mille six cent soixante-seize solutions correctes. Alors, l'accusation tombe, [B-51ʳ] le soupçon est dissipé, l'affirmation s'avère et la vérité se dévoile. Et si nous ajoutons dans ce problème et dans les problèmes analogues l'une de ses notions, alors les solutions que nous avons exposées se multiplient, augmentent et deviennent nombreuses. Cette sorte, que Dieu te chérisse, est lorsqu'on dit :

ا-٣-ظ
ب-٥٠-ظ

بِسْمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحيم

<كتاب الطير لأبي كامل>

قال شجاع بن أسلم المعروف بأبي كامل: إني رأيت صنفًا واحدًا من أصناف الحساب يدور بين الخاص والعام، والعالم والجاهل، ويتلاهون به ويستحسنونه ويستظرفونه، ويسأل بعضهم بعضًا، فيجيب من أجاب منهم بالظن والحدس، ولا يرجعون فيه إلى أصل ولا قياس. كان كثير من الخاصة والعامة يسألني عن مسائل منه، فأجبتُهم في المسألة الواحدة بالجواب الواحد، إذ كان لا جواب فيها غيره. وربما كان في غيرها من المسائل جوابان وثلاثة وأربعة وأكثر من ذلك، وربما امتنع الجواب فيها، حتى وردت علي منه مسألة فحسبتها فوجدتُ فيها جوابات كثيرة، واستقصيتُ ما فيها من الجوابات، فخرج لي ألفان وستمائة وستة وسبعون جوابًا صوابًا. فكثر تعجبي من ذلك، وعلمتُ أني متى أخبرتُ به استعظم واستفظع وأتهمني من لا يعرفني، فرأيتُ أن أؤلف كتابًا في هذا الصنف، وأسهّل العمل فيه، وأقرب مأخذه، وأدل على استخراج الصواب / في المسألة التي يمكن فيها ذلك، وأبين ما كان لا يمكن فيه إلا جواب ا-٤-و
واحد، وأشرح ما لا يمكن فيه جواب البتة بعمل صحيح وقول برهاني، حتى آتي على المسألة التي أعلمتك أن فيها ألفين وستمائة وستة وسبعين جوابًا صوابًا، فتسقط التهمة / وتذهب الظنة، ويصح القول، وينكشف الصواب. ولو زدنا في ب-٥١-و
هذه المسألة وما أشبهها من المسائل معنى آخر من معانيها، لتضاعف <عدد> الجوابات التي أخبرنا بها وطالت وكثرت. وهذا الصنف، أعزك الله، هو قول القائل:

2 <كتاب الطير لأبي كامل>: كتاب طرائف الحساب لأبي كامل المصري [ب] — 11 وسبعون: وتسعين [ب] — 16 وسبعين: وتسعين [ب] / جوابًا: ناقصة [ا] — 19 أخبرنا بها: اخترناها [ا] / الله: الله تعالى [ا].

Un canard de cinq dirhams et vingt oiseaux d'un dirham et un poulet d'un dirham et choses semblables. On t'a payé cent dirhams, ou plus, ou moins, et on t'a dit : « achète avec cela cent volatiles de ces espèces, ou plus, ou moins ».

La solution de ce problème et de ses semblables est de dire : « Tant de canards et tant d'oiseaux et tant de poulets, <nombre> entier et sans fractions – c'est-à-dire qu'il n'y a pas un demi-volatile, ni un tiers, ni un quart, ni aucune de ses parties, étant donné que les parties de chaque espèce de volatile ne se combinent pas avec les parties d'une autre espèce ». Si celui qui demande [A-4^{v}] s'en contente, il sera possible, dans chaque problème qui vient de cet art, d'obtenir <un nombre> de solutions, sans fin, et qui n'est épuisable que par la disparition de ceux qui y répondent.

Il est possible que celui qui demande abandonne cette voie pour une autre voie, et dise : Si on te paie cent dirhams, ou plus, ou moins, et qu'on te dit : « distribue-les à cent personnes, ou plus, ou moins, hommes, femmes et jeunes gens, ou davantage d'espèces encore, et paie à chaque homme tant, à chaque femme tant et à chaque jeune homme tant ; alors, combien d'hommes, combien de femmes et combien de jeunes gens ?» ; et si on te dit : « achète avec cela des sabres, des lances et toute autre de ces espèces que l'on veut, qu'on ne peut pas diviser, une fois que ces espèces sont en nombre connu, et dont [B-51^{v}] un sabre est tant, une lance est tant, un arc est tant, combien advient-il de chacune de ces sortes ? »

Celui qui demande peut dire à celui qui est interrogé : Que le nombre des hommes soit plus grand que celui des femmes et que le nombre des jeunes gens, ou plus petit que celui-ci – entre autres questions que celui qui demande peut poser. Si cela est possible, alors celui qui est interrogé a besoin de déterminer les réponses qui conviennent à ce problème ; puis il les examine successivement ; si, parmi elles, il y en a une qui convient à ce qui est demandé, il répond à celui qui demande ; et s'il n'y en a pas, il dit : cela n'est pas possible. [A-5^{r}]

بطة بخمسة دراهم وعشرين عصفورًا بدرهم ودجاجة بدرهم وما أشبه ذلك، فدفع إليك مائة درهم أو أكثر أو أقل، فقيل لك: اشتر بها مائة طائر من هذه الأصناف أو أكثر أو أقل.

فالجواب من هذه المسألة وما أشبهها أن يقال: من البط كذا ومن العصافير كذا ومن الدجاج كذا، صحيح لا كسر فيه، أعني لا يكون فيه نصف طائر ولا ثلثه ولا ربعه ولا جزء من أجزائه، إذ كانت أجزاء كل صنف من الطير لا تأتلف مع أجزاء صنف آخر. فإن قنع السائل / بذلك، أمكن في كل ا-٤-ظ مسألة ترد من هذا الفن من الجوابات ما لا غاية له ولا انقضاء إلا بفناء المجيبين فيها.

وقد يجوز أن ينصرف السائل عن هذا الوجه إلى وجه آخر، وهو أن يقول: فإن دفع إليك مائة درهم أو أكثر أو أقل، فقيل لك: فرقها على مائة إنسان أو أكثر أو أقل، رجالاً ونساءً وصبيانًا، أو أكثر من هذه الأصناف، وادفع إلى كل رجل كذا وإلى كل إمرأة كذا وإلى كل صبيٍ كذا، كم من الرجال وكم من النساء وكم من الصبيان؟ أو قيل: اشتر بها سيوفًا أو رماحًا وما أريد من ذلك مختلفة الأصناف مما لا يمكن قسمته، بعد أن تكون الأصناف معلومة العدد، منها / سيف بكذا ومنها رمح بكذا ومنها قوس بكذا، كم يقع ب-٥١-ظ من كل صنف منها؟

وقد يتهيأ للسائل أن يقول للمسئول: ويكون عدد الرجال أكثر من عدد النساء ومن عدد الصبيان أو أقل من ذلك – مما يسأل السائل عنه. فإذا كان هذا هكذا ممكنًا، احتاج المسئول إلى استخراج ما يتهيأ له من جوابات المسألة، ثم يتصفحها، فإن كان منها شيء مما يسأل عنه أجاب السائل، وإن لم يكن، قال: ذلك غير يمكن. /

2 اشتر: اشترى [ا] – 5 فيه: ناقصة [ا] – 10 ينصرف: يصرف [ا، ب] – 14كم: ناقصة [ا] – 20 جوابات: حيوانات [ا] – 21 منها: فيها [ا، ب] / يكن: يمكن [ا، ب].

<1> En premier, qu'il dise : si on te paie cent dirhams et qu'on te dit : achète avec cela cent volatiles de trois espèces, canards, poulets et oiseaux. Chacun des canards est cinq <dirhams>, vingt oiseaux est un dirham et les poulets, chacun un dirham.

On l'infère ainsi : On prend les canards une chose pour cinq choses de dirham ; les oiseaux un dinar pour la moitié d'un dixième de dinar de dirham. Il reste des dirhams, cent dirhams moins cinq choses moins la moitié d'un dixième de dinar, et on obtient du nombre des volatiles une chose et un dinar – ainsi il reste de ce qu'on a obtenu du cent, le nombre des volatiles, cent moins une chose moins un dinar, que tu achètes en comptant les poulets pour un dirham. Alors on obtient de cela ce qui est égal à leur nombre, qui est : cent volatiles moins une chose moins un dinar, ce qui est égal à ce qui reste des dirhams, qui est cent dirhams moins cinq choses moins la moitié d'un dixième de dinar. Tu restaures et tu réduis. Il reste quatre choses égales à neuf dixièmes de dinar, plus un demi-dixième de dinar. Alors un seul dinar est égal à quatre choses plus quatre parties de dix-neuf [B-52r] parties d'une chose.

Or, nous avons posé les canards une chose, les oiseaux un dinar. [A-5v] On a donc montré que les oiseaux sont le quadruple des canards et quatre parties de dix-neuf parties de ceux-ci. Si donc nous posons les canards dix-neuf, il faut que les oiseaux soient quatre-vingts et les poulets un seul. Car les poulets sont cent moins les canards et les oiseaux. Ce problème n'admet que cette seule solution, car on a montré que les oiseaux sont le quadruple des canards plus quatre parties de dix-neuf parties de ceux-ci. Or le plus petit nombre des canards tel qu'il y ait en lui une partie de dix-neuf sans fraction est dix-neuf. Si donc nous posons les canards trente-huit, il s'ensuit nécessairement que le nombre des oiseaux est cent soixante. Et le problème devient impossible, car on aura une seule espèce plus grande que la somme des autres espèces cherchées.

<2> Si on te paie cent dirhams et qu'on te dit : achète avec cela cent volatiles de trois espèces – pigeons, canards et poulets. Chacun des canards est deux dirhams, trois pigeons un dirham et deux poulets un dirham.

<١> فأول ذلك أن يقول: فإن دفع إليك مائة درهم، فقيل لك: ابتع ا-٥-و
بهذا مائة طائر من ثلاثة أصناف، بط ودجاج وعصافير، البط بخمسة خمسة والعصافير كل عشرين بدرهم والدجاج كل واحد بدرهم.

فقياسه: أن تأخذ شيئًا من البط بخمسة أشياء من الدراهم، ودينارًا من العصافير بنصف عُشر دينار من الدرهم، فيبقى من الدراهم مائة درهم إلا خمسة أشياء وإلا نصف عُشر دينار. وحصل من عدد الطير: شيء ودينار. فقد بقي عليه في الحاصل مائة عدد من الطير: مائة إلا شيئًا وإلا دينارًا، فتبتاعها من حساب الدجاجة بدرهم. فيخرج منها مثل عددها، وهو مائة طير إلا شيئًا وإلا دينارًا، وهو يعدل ما بقي من الدراهم، وهو مائة درهم إلا خمسة أشياء وإلا نصف عُشر دينار. فتجبر وتقابل، فيبقى أربعة أشياء تعدل تسعة أعشار دينار ونصف عُشر دينار. فالدينار الواحد يعدل أربعة أشياء وأربعة أجزاء من تسعة ب-٥٢-و
عشر / جزءًا من شيء.

وكنا جعلنا البط شيئًا والعصافير دينارًا، / فيتبين أن العصافير أربعة أمثال ا-٥-ظ
البط وأربعة أجزاء من تسعة عشر جزءًا منها. فإذا جعلنا البط تسعة عشر، وجب أن يكون العصافير ثمانين والدجاج واحدة، لأن الدجاج مائة إلا البط والعصافير. وهذه المسألة لا يتهيأ أن يكون منها إلا هذا الجواب الواحد، لأنه قد تبين أن العصافير أربعة أمثال البط وأربعة أجزاء من تسعة عشر جزءًا منها، وأقل ما يكون عدد البط، حتى يكون فيه جزء من تسعة عشر بلا كسر، تسعة عشر. فإن جعلنا البط ثمانية وثلاثين، وجب أن يكون عدد العصافير مائة وستين واستحالت المسألة، لأنه قد صار صنف واحد أكثر من جميع الأصناف التي طلبت.

<٢> فإن دفع إليك مائة درهم، فقيل لك: ابتع بهذه مائة طائر من ثلاثة أصناف: حمام وبط ودجاج؛ البط بدرهمين درهمين، والحمام كل ثلاثة بدرهم، والدجاج كل دجاجتين بدرهم.

1 لك: له [ب] – 4 تأخذ: نأخذ [ا] – 7 فتبتاعها: فيبتاعها [ا] – 9 الدراهم: الدرهم [ب] – 10 فتجبر وتقابل: فيجبر ويقابل [ا].

On l'infère ainsi : Tu achètes des pigeons une chose, pour un tiers d'une chose de dirham, et des poulets un dinar, pour la moitié [A-6ʳ] d'un dinar de dirham. Il reste cent moins un tiers d'une chose moins un demi-dinar, et des canards cent moins une chose moins un dinar, que tu achètes en comptant chaque canard pour deux dirhams. On obtient leur prix, le double de leur nombre ; c'est deux cents dirhams moins deux choses moins deux dinars, égal à ce qui reste des dirhams, c'est-à-dire cent dirhams moins le tiers d'une chose moins la moitié d'un dinar ; tu réduis par cela. Alors il reste cent dirhams moins un dinar et un demi égal à une chose plus deux tiers de chose ; la chose est donc égale à soixante en [B-52ᵛ] nombre moins neuf dixièmes de dinar. Mais nous avons posé les pigeons une chose, et les poulets un dinar ; donc les pigeons sont soixante moins neuf dixièmes, le nombre des poulets. Donc le plus petit nombre possible des poulets doit avoir un dixième ; c'est dix. Si donc nous posons le nombre des poulets dix, les pigeons seront soixante moins neuf dixièmes de dix. Il faut donc que le nombre des pigeons soit cinquante et un et les canards, ce qui manque pour compléter le cent, trente-neuf. Il est donc établi que les pigeons sont cinquante et un, les poulets dix et les canards trente-neuf.

Il est possible d'avoir dans ce problème d'autres solutions, d'après ce que j'ai décrit. On a montré que les pigeons sont soixante moins neuf dixièmes des poulets. [A-6ᵛ] On peut donc continuer à ajouter au nombre des poulets, dix, puis dix, ... Nous retranchons alors de soixante neuf dixièmes de ce qu'on obtient de chaque dix, à partir de dix. Ce qui reste de soixante, pour chaque dix ajouté, est le nombre des canards ; et ce qui manque pour compléter le cent, avec chaque dix ajouté, est le nombre des pigeons. Nous continuons à procéder ainsi, jusqu'à ce que les neuf dixièmes de ce qu'on obtient du nombre des poulets soit plus petit que soixante. S'il dépasse soixante, cela cesse d'être correct et il n'y a plus de solution.

Exemple : si nous ajoutons au nombre des poulets, qui est dix, un autre dix, leur nombre sera vingt. Si de soixante nous ôtons neuf dixièmes de vingt, il reste quarante-deux, ce qui est le nombre des pigeons. Et ce qui manque pour compléter le cent, ce sont les canards, qui sont trente-huit. Et

فقياسه: أن تشتري شيئًا من الحمام بثلث شيء من الدرهم، ودينارًا من
الدجاج بنصف / دينار من الدرهم، فبقي مائة إلا ثلث شيء وإلا نصف دينار، ا-٦-و
ومن البط مائة إلا شيئًا وإلا دينارًا، فتبتاعها من حساب كل بطة بدرهمين،
فيخرج ثمنها ضعف عددها، فهو مائتا درهم إلا شيئين وإلا دينارين تعدل ما
بقي من الدراهم، وهو مائة درهم إلا ثلث شيء وإلا نصف دينار، فتقابل بها،
فيبقى مائة درهم إلا دينارًا ونصفًا تعدل شيئًا <وثلثي شيء>، فالشيء يعدل
ستين من / العدد إلا تسعة أعشار دينار. وكنا جعلنا الحمام شيئًا والدجاج ب-٥٢-ظ
دينارًا، فصار الحمام ستين إلا تسعة أعشار عدد الدجاج، فأقل ما يمكن أن
يكون عدد الدجاج ما له عُشر، وهو عشرة. فإذا جعلنا الدجاج عشرة، كان
الحمام ستين إلا تسعة أعشار عشرة. فيجب أن يكون الحمام أحدًا وخمسين،
والبط ما بقي إلى تمام المائة، وهو تسعة وثلاثون. فقد صح أن الحمام أحد
وخمسون والدجاج عشرة والبط تسعة وثلاثون.

وقد يتهيأ في هذه المسألة جوابات أخر على ما أصف: وهو أنه قد تبين
أن الحمام ستون إلا تسعة أعشار الدجاج؛ / فلا نزال نزيد على عدد الدجاج ا-٦-ظ
عشرة عشرة، ونلقي تسعة أعشار ما يجتمع مع كل عشرة من عشرة من ستين؛
فما بقي من الستين عند كل عشرة نزيد فهو عدد البط، وما يبقى إلى تمام المائة
مع كل عشرة نزيد فهو الحمام. فلا نزال نفعل ذلك إلى أن يكون تسعة أعشار
ما يجتمع من عدد الدجاج أقل من ستين. فإذا جاوز الستين، انتهى الصواب
وبطل الجواب.

مثال ذلك: أنا إذا زدنا على عدد الدجاج، وهو عشرة، عشرة أخرى،
صار عددها عشرين؛ فإذا ألقينا تسعة أعشار عشرين من ستين، يبقى اثنان
وأربعون وهو عدد الحمام، وما بقي إلى تمام المائة هي البط وهي ثمانية وثلاثون.

3 فتبتاعها: فيبتاعها [ا] — 4 تعدل: يعدل [ا] — 5 الدراهم: الدرهم [ب] — 6 تعدل: يعدل [ا] / العدد: ناقصة [ب] — 10 أحدًا: أحد [ا، ب] — 14 فلا نزال نزيد: فلا يزال يزيد [ا] — 15 ونلقي: ويبقى [ا، ب] — 16 نزيد: يزيد [ا] — 17 نزيد: يزيد [ا] / نزال نفعل: يزال يفعل [ا] — 22 وهو: وهي [ب].

si nous ajoutons au nombre des poulets un autre dix, leur nombre sera trente. Si [B-53r] nous ôtons de soixante neuf dixièmes de trente, il reste le nombre des poulets, trente-trois, et le nombre des canards, trente-sept. Si nous ajoutons au nombre des poulets un autre dix, leur nombre sera quarante. Si nous ôtons de soixante neuf dixièmes de quarante, [A-7r] il reste le nombre des pigeons, vingt-quatre, et le nombre des canards sera trente-six. Si nous ajoutons au nombre des poulets un autre dix, leur nombre sera cinquante. Si nous ôtons de soixante neuf dixièmes de cinquante, il reste le nombre des pigeons, quinze, et le nombre des canards sera trente-cinq. Si nous ajoutons au nombre des poulets un autre dix, leur nombre sera soixante. Si nous ôtons de soixante neuf dixièmes de soixante, il reste le nombre des pigeons, six, et le nombre des canards, trente-quatre. Là s'achève le nombre des solutions correctes, et il ne reste aucune autre solution correcte, car, si nous ajoutons au nombre des poulets un autre dix, leur nombre sera soixante-dix et les neuf dixièmes de soixante-dix sont plus grands que soixante. Et ainsi, on enlève le plus grand du plus petit, ce qui est absurde et ne se peut pas. Ce problème a donc six solutions correctes.

Si tu veux, tu dis : les poulets, dix, les pigeons, cinquante et un, et les canards, trente-neuf. Et si tu veux, tu dis : les poulets, vingt, les pigeons, quarante-deux et les canards, trente-huit. Et si tu veux, tu dis : les poulets, trente, les pigeons, trente-trois et les canards, trente-sept. Et si tu veux, [A-7v] tu dis : les poulets, quarante, les pigeons vingt-quatre et les canards, trente-six. Et si tu veux, tu dis : les poulets, cinquante, les pigeons, quinze [B-53v] et les canards, trente-cinq. Et si tu veux, tu dis : les poulets, soixante, les pigeons, six et les canards, trente-quatre[1].

<3> Si on te paie cent dirhams et qu'on te dit : achète avec cela cent volatiles de quatre espèces – canards, poulets, pigeons et oiseaux. Un canard, quatre dirhams ; les oiseaux, chacun pour un dixième de dirham ; deux pigeons, un dirham, et un poulet, un dirham.

[1] Voir Appendice.

وإن زدنا على عدد الدجاج عشرة أخرى، صار عددها ثلاثين. فإذا / ألقينا ب-٥٣-و
تسعة أعشار ثلاثين من ستين، بقي عدد الدجاج ثلاثة وثلاثين، ويكون عدد
البط سبعة وثلاثين. وإن زدنا على عدد الدجاج عشرة أخرى، صار عددها
أربعين. فإذا ألقينا تسعة أعشار أربعين من ستين، / بقي عدد الحمام أربعة ا-٧-و
وعشرين ويكون عدد البط ستة وثلاثين. وإن زدنا على عدد الدجاج عشرة
أخرى، صار عددها خمسين. فإذا ألقينا تسعة أعشار خمسين من ستين، بقي عدد
الحمام خمسة عشر <و>يكون عدد البط خمسة وثلاثين. وإن زدنا على عدد
الدجاج عشرة أخرى، صار عددها من ستين، فإذا ألقينا تسعة أعشار ستين من
ستين، بقي عدد الحمام ستة، ويكون عدد البط أربعة وثلاثين. وانتهت
الصوابات و لم يبق صواب آخر، لأنا إذا زدنا على عدد الدجاج عشرة أخرى،
يكون عددها سبعين، وتسعة أعشار سبعين أكثر من ستين، فيكون الأكثر
يسقط من الأقل؛ هذا خلف لا يمكن. فقد خرج لهذه المسألة ستة صوابات.

وإن شئت قلت: الدجاج عشرة والحمام واحد وخمسون والبط تسعة
وثلاثون؛ وإن شئت قلت: الدجاج عشرون والحمام اثنان وأربعون والبط ثمانية
وثلاثون. وإن شئت قلت: الدجاج ثلاثون والحمام ثلاثة وثلاثون والبط سبعة
وثلاثون. وإن شئت / قلت: الدجاج أربعون والحمام أربعة وعشرون والبط ا-٧-ظ
ستة وثلاثون. وإن شئت قلت: الدجاح خمسون والحمام خمسة عشر / والبط ب-٥٣-ظ
خمسة وثلاثون. وإن شئت قلت: الدجاج ستون والحمام ستة والبط أربعة
وثلاثون.

<٣> فإن دفع إليك مائة درهم، فقيل لك: ابتع بها مائة طائر من أربعة
أصناف، بط ودجاج وحمام وعصافير. البط بأربعة دراهم والعصافير بعشر درهم
والحمام كل اثنين بدرهم والدجاج بدرهم.

6 من ستين: خمسين من ستين، ثم ضرب على خمسين بالقلم [ب]– 8 عددها: عدد [ب] – 10
على: فوق السطر [ب] – 12 هذا خلف: هف [ا] – 14 عشرون: عشرة [ا، ب] – 21 دراهم:
درهم [ب] / بعشر: عشرة [ا].

On l'infère ainsi : Tu achètes des canards une chose, pour quatre choses d'un dirham ; des oiseaux, un dinar pour dix dinars d'un dirham ; et des pigeons, un fels pour la moitié d'un fels d'un dirham. Il reste des dirhams cent dirhams moins quatre choses moins un dixième de dinar moins la moitié d'un fels ; et des poulets cent moins une chose moins un dinar moins un fels, que tu achètes en comptant un poulet pour un dirham. Alors tu en obtiens un nombre égal à leur nombre, c'est-à-dire cent dirhams moins une chose moins un dinar moins un fels, ce qui est égal à ce qui reste des dirhams, c'est-à-dire cent dirhams moins quatre choses moins un dixième de fels moins un demi-dinar. [A-8^{r}] Tu réduis par cela. On a, après la réduction, une chose égale à trois dixièmes de dinar plus un sixième de fels. Pose le dinar une chose qui a un dixième, ce qui est dix – c'est-à-dire les oiseaux ; et le fels une chose qui a un sixième, ce qui est six – c'est-à-dire les pigeons ; et la chose quatre, c'est-à-dire les canards – car c'est trois dixièmes des oiseaux et un sixième des pigeons. Les poulets, c'est ce qui manque pour compléter le cent, c'est-à-dire quatre-vingts poulets. C'est une solution correcte.

Si tu veux une autre solution, alors, ajoute au nombre des oiseaux dix, puis dix..., et laisse le nombre des pigeons tel qu'il est, six ; [B-54^{r}] chaque fois que tu ajoutes dix au nombre des oiseaux, fais-le le nombre des oiseaux. Les canards seront trois dixièmes des oiseaux et un sixième des pigeons. Mais, chaque fois que tu ajoutes dix, il te parvient une solution autre que la première solution. Tu continues à procéder ainsi jusqu'à ce que le nombre des oiseaux aboutisse à soixante-dix. Dès lors tu ne peux plus rien ajouter, car, si tu ajoutes dix à soixante-dix, le nombre des oiseaux sera quatre-vingts, les pigeons six et les canards trois dixièmes de quatre-vingts et un sixième de six, et cela est vingt-cinq. Donc, <le nombre> des canards, des pigeons et des oiseaux, sans les poulets, sera plus grand que cent. Or ce qu'on a demandé, y compris les poulets, est cent. [A-8^{v}]

Si tu aboutis à soixante-dix, reviens au commencement en ajoutant six au nombre des pigeons. Leur nombre sera donc douze. Et tu laisses le nombre des oiseaux tel quel, dix. Dès lors, le nombre des canards sera cinq, car il est égal au sixième de douze plus trois dixièmes de dix. Et ce qui manque pour compléter le cent est le nombre des poulets, qui est soixante-treize.

فقياسه: أن تشتري شيئًا من البط بأربعة أشياء من الدرهم، ودينارًا من العصافير بعشرة دنانير من الدرهم، وفلسًا من الحمام بنصف فلس من الدرهم، فيبقى من الدراهم مائة درهم إلا أربعة أشياء وإلا عُشر دينار وإلا نصف فلس، ومن الدجاج مائة إلا شيئًا وإلا دينارًا وإلا فلسًا، فتبتاعها من حساب دجاجة بدرهم، فيخرج منها مثل عددها، وهو مائة درهم إلا شيئًا وإلا دينارًا وإلا فلسًا، فهو يعدل ما بقي من الدراهم، وهو مائة درهم إلا أربعة أشياء وإلا عُشر فلس وإلا نصف دينار؛ / فتقابل بها، فيكون الشيء بعد المقابلة يعدل ثلاثة ا-٨-و أعشار دينار وسدس فلس. واجعل الدينار شيئًا له عُشر، وهو عشرة وهي العصافير، والفلس شيئًا له سدس، وهو ستة وهو الحمام، والشيء أربعة وهي البط، لأنها ثلاثة أعشار العصافير وسدس الحمام؛ والدجاج ما بقي إلى تمام المائة، وهو ثمانون دجاجة؛ فهو صواب واحد.

فإذا أردت جوابًا آخر، فزد على عدد العصافير عشرة عشرة، واترك عدد الحمام ستة / بحالها؛ فمع كل مرة تزيد عشرة على عدد العصافير، فصيره عدد ب-٥٤-و العصافير، ويكون البط ثلاثة أعشار العصافير وسدس الحمام. ومع كل عشرة تزيد، يتولد لك جواب غير الجواب الأول. فلا تزال تفعل ذلك حتى ينتهي عدد العصافير إلى سبعين. فحينئذ لا يمكنك الزيادة، لأنه إن زيدت عشرة على سبعين، صار عدد العصافير ثمانين والحمام ستة ويكون البط ثلاثة أعشار ثمانين وسدس ستة، وذلك خمسة وعشرون؛ فيصير البط والحمام والعصافير سوى الدجاج أكثر من مائة، والذي طلب مع الدجاج مائة./

فإذا انتهيت إلى سبعين، فارجع إلى أول ابتدائك، وهو أن تزيد على عدد ا-٨-ظ الحمام ستة، فتكون عدتها اثني عشر، وتترك عدد العصافير عشرة بحالها، فيصير حينئذ عدد البط خمسة لأنه سدس اثني عشر و ثلاثة أعشار عشرة، وما تبقي إلى تمام مائة فهو الدجاج، وهو ثلاثة وسبعون.

3 الدراهم: الدرهم [ب] – 4 فتبتاعها: فيبتاعها [ب] – 6 الدراهم: الدرهم [ب] – 7 فتقابل: فيعادل [ا] – 13 بحالها: على حالها [ا] / فمع: مع [ا، ب] – 16 فحينئذ: فحـ [ا]، وكذلك فيما بعد / إن: إذ [ا] – 20 انتهيت: انتهت [ا، ب].

Tu laisses ensuite le nombre des pigeons, douze, tel quel ; et tu ajoutes au nombre des oiseaux dix, puis dix... Chaque fois que tu ajoutes dix au nombre des oiseaux, fais-le le nombre des oiseaux ; le nombre des canards est trois dixièmes du nombre des oiseaux et un sixième du nombre des pigeons, qui est douze ; jusqu'à ce que le nombre des oiseaux atteigne soixante. Dès lors, tu ne peux plus rien ajouter, d'après ce que nous avons dit précédemment.

Tu reviens ensuite encore une fois au commencement et tu ajoutes au nombre des pigeons, qui est douze, six. Leur nombre sera dix-huit. Et tu laisses le nombre [B-54^{v}] des oiseaux, dix. Dès lors, le nombre des canards sera six, car c'est la moitié d'un tiers de dix-huit plus trois dixièmes de dix. Ce qui manque pour compléter le cent est le nombre des poulets, qui est soixante-six.

Puis, tu laisses tel quel le nombre des pigeons, dix-huit, et tu ajoutes au nombre [A-9^{r}] des oiseaux dix, puis dix... Chaque fois, avec chaque dix, que tu ajoutes dix au nombre des oiseaux, fais-le le nombre des oiseaux. Et le nombre des canards sera trois dixièmes du nombre des oiseaux et un sixième de dix-huit ; jusqu'à ce que le nombre des oiseaux aboutisse à soixante. Dès lors tu ne peux plus rien ajouter, d'après ce qu'on a montré précédemment.

Tu ajoutes également six au nombre des pigeons ; leur nombre sera vingt-quatre ; tu laisses le nombre des oiseaux tel quel, dix ; on a alors le nombre des canards, sept, car c'est le sixième de vingt-quatre plus trois dixièmes de dix ; et ce qui manque pour compléter le cent est le nombre des poulets, qui est cinquante-neuf. Tu continues à ajouter au nombre des oiseaux, dix, puis dix..., et tu laisses le nombre des pigeons tel quel, vingt-quatre ; jusqu'à ce que le nombre des oiseaux aboutisse à cinquante. Dès lors tu ne peux plus rien ajouter au nombre des oiseaux.

Ensuite, tu reviens encore une fois et tu ajoutes au nombre des pigeons, six ; leur nombre sera trente ; tu laisses le nombre des oiseaux tel quel, dix, et tu procèdes comme je te l'ai prescrit. Tu ajoutes au nombre des oiseaux dix, puis dix..., et tu procèdes comme je t'ai expliqué, jusqu'à ce que leur nombre aboutisse à quarante. Dès lors tu ne peux plus rien ajouter. Tu continues à procéder ainsi. Tu ajoutes six, puis six ..., au nombre des pigeons, et tu procèdes pour les oiseaux comme je t'ai montré, jusqu'à ce que le nombre des pigeons aboutisse à soixante-six, les oiseaux à dix ; [A-

ثم تترك عدد الحمام اثني عشر بحالها، وتزيد على عدد العصافير عشرة عشرة؛ فمع كل مرة تزيد عشرة على عدد العصافير فصيرها عدد العصافير، ويكون البط ثلاثة أعشار العصافير وسدس الحمام — وهو اثنا عشر، حتى ينتهي عدد العصافير إلى ستين. فحينئذ لا يمكنك الزيادة لِما تقدم من قولنا.

ثم ترجع أيضًا إلى ابتدائك، وهو أن تزيد على عدد الحمام وهو اثنا عشر ستة، فيكون عدها ثمانية عشر، وتترك عدد / العصافير عشرة، فيكون حينئذ عدد البط ستة، لأنها <نصف> ثلث ثمانية عشر وثلاثة أعشار عشرة، وما بقي إلى تمام المائة فهو الدجاج، وهي ستة وستون. ب-٥٤-ظ

ثم تترك عدد الحمام ثمانية عشر بحالها وتزيد على عدد / العصافير عشرة عشرة؛ فمع كل عشرة تزيد عشرة على عدد العصافير، فصيرها عدد العصافير، ويكون البط ثلاثة أعشار العصافير وسدس ثمانية عشر حتى ينتهي عدد العصافير إلى ستين. فحينئذ لا يمكنك الزيادة لِما قد تقدم من البيان. ا-٩-و

ثم تزيد أيضًا على عدد الحمام ستة، فيكون عددها أربعة وعشرين، وتترك عدد العصافير عشرة بحالها. <فيكون حينئذ عدد البط سبعة، لأنها سدس أربعة وعشرين وثلاثة أعشار عشرة، وما بقي إلى تمام المائة فهو الدجاج، وهي تسعة وخمسون>. ولا تزال تزيد على عدد العصافير عشرة عشرة، وتترك عدد الحمام أربعة وعشرين بحالها حتى ينتهي عدد العصافير إلى خمسين. فحينئذ لا يمكنك الزيادة على عدد العصافير.

ثم ترجع أيضًا وتزيد على عدد الحمام ستة، فيكون عددها ثلاثين، وتترك عدد العصافير عشرة بحالها، وتفعل كما أمرتك. ثم تزيد على عدد العصافير عشرة عشرة، وتفعل كما شرحت لك حتى ينتهي بك العدد إلى أربعين، فحينئذ لا يمكنك الزيادة. فلا تزال تفعل كذلك: تزيد ستة ستة على الحمام، وتفعل في العصافير كما بينت لك حتى ينتهي عدد الحمام إلى ستة وستين والعصافير إلى

3 اثنا: اثني [ا، ب] — 5 اثنا: اثني [ا، ب] — 23 ستة وستون: هناك تعليق على هامش المخطوطة [ب] وهو التالي: "قال أفضل الدين عمر بن عيلان لو جاوز عدد الحمام ستة وستين حتى صار اثنين وسبعين لصح، لأنه حينئذ تكون العصافير عشرة والبط خمسة عشر ويبقى الدجاج إلى تمام المائة ثلاثة".

9v] et les canards seront alors quatorze, car c'est le sixième de soixante-six plus trois dixièmes [B-55r] de dix. Ce qui manque pour compléter le cent est le nombre des poulets, qui est dix.

poulets	canards	pigeons	oiseaux
80	4	6	10
67	7	6	20
54	10	6	30
41	13	6	40
28	16	6	50
15	19	6	60
2	22	6	70
73	5	12	10
60	8	12	20
47	11	12	30
34	14	12	40
21	17	12	50
8	20	12	60
66	6	18	10
53	9	18	20
40	12	18	30
27	15	18	40
14	18	18	50
1	21	18	60
59	7	24	10

Tableau 1

Si tu poses également le nombre des oiseaux, cinq, et les pigeons, trois, alors les canards sont deux, car c'est le sixième de trois plus trois dixièmes de cinq. Puis tu produis les solutions de cette manière également, comme je te l'ai prescrit dans la démarche précédente, cela en laissant le nombre des pigeons, qui est trois, tel quel ; et tu ajoutes au nombre des oiseaux dix, puis dix… ; et chaque fois que tu ajoutes dix au nombre des oiseaux, fais-le

عشرة، / ويكون البط حينئذ أربعة عشر لأنها سدس ستة وستين وثلاثة أعشار / عشرة وما بقي إلى تمام المائة فهو الدجاج، وهو عشرة. ا-٩-ظ ب-٥٥-ر

الدجاج	البط	الحمام	العصافير
٨٠	٤	٦	١٠
٦٧	٧	٦	٢٠
٥٤	١٠	٦	٣٠
٤١	١٣	٦	٤٠
٢٨	١٦	٦	٥٠
١٥	١٩	٦	٦٠
٢	٢٢	٦	٧٠
٧٣	٥	١٢	١٠
٦٠	٨	١٢	٢٠
٤٧	١١	١٢	٣٠
٣٤	١٤	١٢	٤٠
٢١	١٧	١٢	٥٠
٨	٢٠	١٢	٦٠
٦٦	٦	١٨	١٠
٥٣	٩	١٨	٢٠
٤٠	١٢	١٨	٣٠
٢٧	١٥	١٨	٤٠
١٤	١٨	١٨	٥٠
١	٢١	١٨	٦٠
٥٩	٧	٢٤	١٠

وإن جعلت أيضًا العصافير خمسة والحمام ثلاثة، كان البط اثنين، لأنها سدس ثلاثة وثلاثة أعشار خمسة، ثم تولد الجوابات أيضًا من هذا الوجه، كما أمرتك في الوجه الذي قبله، وهو أن تترك الحمام وهو ثلاثة بحالها، وتزيد على عدد العصافير عشرة عشرة، فمع كل مرة تزيد عشرة على العصافير، فصيرها

1 أربعة: أحد [ا، ب] — 5 تترك: كتب مرة أخرى "كما أمرتك"، ثم ضرب عليها بالقلم [ا] — 6 مرة: كتب بعدها "يصير"، ثم ضرب عليها بالقلم [ا].

le nombre des oiseaux ; le nombre des canards est les trois dixièmes de celui-ci, plus le sixième de trois ; et ce qui manque pour compléter le cent, ce sont les poulets ; jusqu'à ce que tu aboutisses au nombre des oiseaux, soixante-cinq. Dès lors tu ne peux plus rien ajouter, d'après ce que je t'ai expliqué.

Puis tu ajoutes au nombre des pigeons, six. Leur nombre sera donc neuf ; tu laisses le nombre des oiseaux, cinq, puis tu lui ajoutes dix, puis dix..., comme je t'ai expliqué. Et tu continues à procéder ainsi jusqu'à ce que le nombre des pigeons aboutisse à soixante-neuf, et les oiseaux à cinq. Tu obtiens de ce problème quatre-vingt-seize solutions. Or j'en ai inscrit [A-10^{r}] certaines dans un tableau [B-55^{v}] afin qu'il soit entre tes mains ; si tu veux en trouver, il sera facile pour toi de le rechercher. Si Dieu le veut.

<4> Si on te paie cent dirhams et qu'on te dit : achète avec cela cent volatiles de quatre espèces, canards, pigeons, alouettes et poulets ; chaque canard pour deux dirhams, deux pigeons un dirham, trois alouettes un dirham et les poulets chacun un dirham.

On l'infère ainsi : Tu achètes une chose des canards pour deux choses de dirham, un dinar des pigeons pour un demi-dinar de dirham et un fels des alouettes [A-10^{v}] pour un tiers de fels de dirham. Des dirhams il reste cent dirhams moins deux choses moins un demi-dinar et moins un tiers de fels ; et des poulets cent moins une chose moins un dinar moins un fels, que tu achètes en comptant un poulet pour un dirham ; il en résulte alors ce qui est égal à leur nombre, soit cent dirhams moins une chose moins un dinar moins un fels, ce qui est égal à ce qui reste des dirhams, soit cent moins deux choses moins un demi-dinar moins un tiers de fels. La chose sera donc égale à un demi-dinar et deux tiers de fels. Pose les dinars – ce qui est les pigeons – deux, les fels – ce qui est les alouettes – trois, et la chose – qui est les canards – trois, car c'est un demi-dinar et deux tiers de fels ; et des poulets ce qui reste <pour compléter le cent>, c'est-à-dire quatre-vingt-douze. Détermine ensuite ce que cela contient de solutions correctes, d'après ce que je t'ai montré précédemment, et tu obtiendras comme

عدد العصافير، ويكون البط ثلاثة أعشارها وسدس ثلاثة، وما بقي إلى تمام المائة فهو الدجاج حتى ينتهي عدد العصافير إلى خمسة وستين. فحينئذ لا يمكنك الزيادة لِما قد فسرت لك.

ثم تزيد على عدد الحمام ستة، فيكون عددها حينئذ تسعة، وتدع عدد العصافير خمسة، ثم تزيد عليها عشرة عشرة – كما شرحت لك. ولا تزال تفعل ذلك حتى ينتهي بك عدد الحمام إلى تسعة وستين والعصافير إلى خمسة؛ فيخرج لك في هذه المسألة ستة وتسعون جوابًا؛ وقد رسمت / لك بعضها في جدول / ليكون بين يديك، متى أردت منها شيئًا سهُل عليك الطلب، إن شاء الله. ا-١٠-و ب-٥٥-ظ

<٤> فإن دُفِعَ إليك مائة درهم، فقيل لك: ابتع بها مائة طائر من أربعة أصناف، بط وحمام وقنابر ودجاج. كل بطة بدرهمين، والحمام اثنان بدرهم، والقنابر ثلاثة بدرهم، والدجاج كل واحدة بدرهم.

فقياسه: أن تشتري شيئًا من البط بشيئين من الدرهم، ودينارًا من الحمام بنصف دينار من الدرهم، وفلسًا من القنابر / بثلث فلس من الدرهم، فيبقى من الدراهم مائة درهم إلا شيئين وإلا نصف دينار وإلا ثلث فلس، ومن الدجاج: مائة إلا شيئًا وإلا دينارًا وإلا فلسًا، فتبتاعها من حساب دجاجة بدرهم، فيخرج منها مثل عددها، وهو مائة درهم إلا شيئًا وإلا دينارًا وإلا فلسًا، فهو يعدل ما بقي من الدراهم، وهو مائة إلا شيئين وإلا نصف دينار وإلا ثلث فلس، فيكون الشيء يعدل نصف دينار وثلثي فلس. فتجعل الدينار – وهو الحمام – اثنين، والفلس – وهو القنابر – ثلاثة، والشيء – وهو البط – ثلاثة، لأنه نصف دينار وثلثا فلس، ومن الدجاج ما بقي، وهو اثنان وتسعون؛ ثم تستخرج ما فيها من الصوابات على ما بينت لك فيما تقدم، فيخرج لك من الصوابات ثلاثمائة ا-١٠-ظ

2 خمسة وستين: ستة وخمسين [ب] – 3 قد: ناقصة [ا] – 6 وستين: نجد على هامش المخطوطة [ب] "قال أفضل الدين عمر بن عيلان ههنا أيضًا لو جاوز عدد الحمام تسعة وستين إلى خمسة وسبعين لصح، لأنه تكون العصافير خمسة والبط أربعة عشر والدجاج ستة" [ب] – 7 وتسعين: وسبعون [ا، ب] – 11 واحدة: واحد [ب] – 13 الدرهم: الدراهم [ب] – 14 الدراهم: الدرهم [ب] – 15 فتبتاعها: فيبتاعها [ا] – 20 وتسعون: وسبعون [ب].

solutions correctes trois cent quatre. J'en ai inscrit pour toi certaines dans un tableau afin qu'il soit entre tes mains ; si tu veux en trouver, il sera facile pour toi de le rechercher. [B-56r] Voici la figure du tableau.

poulets	canards	alouettes	pigeons
92	3	3	2
89	4	3	4
86	5	3	6
83	6	3	8
80	7	3	10
77	8	3	12
74	9	3	14
71	10	3	16
68	11	3	18
65	12	3	20
62	13	3	22
59	14	3	24
56	15	3	26
53	16	3	28
50	17	3	30
47	18	3	32
44	19	3	34
41	20	3	36
38	21	3	38
35	22	3	40

Tableau 2

<5> Si on te paie cent dirhams et qu'on te dit : achète avec cela cent volatiles de trois espèces : canards, poulets, [A-11r] oiseaux. Les canards, chacun trois dirhams ; les poulets, trois pour un dirham ; et les oiseaux, vingt pour un dirham. Alors le problème est impossible et on n'obtient absolument pas de solution entière.

Exemple : si tu achètes des canards une chose, pour trois choses de dirham ; des oiseaux un dinar, pour la moitié d'un dixième de dinar de

وأربعة. وقد رسمت لك بعضها في جدول ليكون بين يديك متى أردت منه شيئًا يسهل عليك الطلب / وهذه صورة الجدول. ب-٥٦-و

الدجاج	البط	القنابر	الحمام
٩٢	٣	٣	٢
٨٩	٤	٣	٤
٨٦	٥	٣	٦
٨٣	٦	٣	٨
٨٠	٧	٣	١٠
٧٧	٨	٣	١٢
٧٤	٩	٣	١٤
٧١	١٠	٣	١٦
٦٨	١١	٣	١٨
٦٥	١٢	٣	٢٠
٦٢	١٣	٣	٢٢
٥٩	١٤	٣	٢٤
٥٦	١٥	٣	٢٦
٥٣	١٦	٣	٢٨
٥٠	١٧	٣	٣٠
٤٧	١٨	٣	٣٢
٤٤	١٩	٣	٣٤
٤١	٢٠	٣	٣٦
٣٨	٢١	٣	٣٨
٣٥	٢٢	٣	٤٠

<٥> فإن دُفِعَ إليك مائة درهم، فقيل لك: ابتع بها مائة طائر من ثلاثة أصناف: بط ودجاج / وعصافير. البط بثلاثة ثلاثة، والدجاج ثلاثة بدرهم، والعصافير كل عشرين بدرهم؛ فالمسألة مستحيلة. ولا تخرج صحيحة أبدًا. ا-١١-و

مثال ذلك: أنك إذا اشتريت شيئًا من البط بثلاثة أشياء من الدراهم، ودينارًا من العصافير بنصف عُشر دينار من الدراهم، يبقى من الدجاج مائة إلا

dirham. Il reste des poulets cent moins une chose moins un dinar ; et des dirhams cent moins trois choses moins un demi-dixième de dinar, par quoi tu achètes des poulets au prix de trois pour un dirham. Tu obtiens alors des poulets trois cents moins neuf [A-11^{v}] choses moins un dixième et un demi-dixième de dinar. Tu réduis par cela les poulets, c'est-à-dire cent moins une chose moins un dinar. Après la réduction, on a deux cents en nombre plus huit dixièmes de dinar plus un demi-dixième de dinar égaux à huit choses. Une seule chose est donc égale à vingt-cinq en nombre plus un dixième de dinar plus le huitième [B-56^{v}] de la moitié du dixième de dinar. Or nous avons posé le canard la chose et les oiseaux le dinar. Le plus petit <nombre> d'oiseaux est donc cent soixante, car tu as besoin que la moitié du huitième de son dixième soit entier, sans fraction. Les oiseaux par conséquent sont à eux seuls plus nombreux qu'autant qu'on veut de volatiles. Ce qui est absurde et ne se peut pas.

<6> Nous aboutissons donc au problème dont je t'ai appris au début de mon livre qu'il a deux mille six cent soixante-seize solutions. C'est-à-dire, quand on dit : si on te paie cent dirhams et qu'on te dit : achète avec cela cent volatiles de cinq espèces, canards, pigeons, tourterelles, alouettes et poulets ; chaque canard pour deux dirhams, les pigeons, chaque paire un dirham, les tourterelles trois pour un dirham, les alouettes quatre pour un dirham et les poulets chacun un dirham.

On l'infère ainsi : [A-12^{r}] Tu achètes des canards une chose pour deux choses de dirham ; des pigeons un dinar pour la moitié d'un dinar de dirham ; des tourterelles un fels pour un tiers de fels de dirham ; et des alouettes un khatem pour un quart de khatem de dirham. Il reste donc des dirhams cent dirhams moins deux choses moins un demi-dinar moins un tiers de fels moins un quart de khatem ; et des poulets cent moins une chose moins un dinar moins un fels moins un khatem. Tu achètes avec cela au prix d'un poulet pour un dirham ; tu obtiens leur prix égal à leur nombre, c'est-à-dire cent dirhams moins une chose moins un dinar moins un fels moins un khatem. Tu réduis par cela ce qui reste des dirhams, c'est-à-dire cent dirhams moins deux choses moins la moitié d'un dinar moins le tiers d'un fels moins le quart d'un khatem. Après réduction, la chose sera égale à

شيئًا وإلا دينارًا، ومن الدراهم مائة إلا ثلاثة أشياء وإلا نصف عشر دينار، فتشتري بها دجاجًا على حساب ثلاثة بدرهم، فيخرج من الدجاج ثلاثمائة إلا تسعة / أشياء وإلا عُشر ونصف عشر دينار، فتقابل بها الدجاج — وهو مائة إلا شيئًا وإلا دينارًا — فيكون بعد المقابلة: مائتان من العدد وثمانية عُشر دينارًا ونصف عُشر دينار يعدل ثمانية أشياء، فالشيء الواحد يعدل خمسة وعشرين من العدد وعُشر دينار وثُمْن / نصف عشر دينار. وكنا جعلنا الشيء البط، والدينار العصافير. فأقل ما يكون العصافير مائة وستين لأنك تحتاج إلى أن يكون نصف ثمن عشرها صحيحًا بلا كسر. فالعصافير إذن وحدها أكثر من جميع ما أريد من الطير؛ هذا خلف لا يمكن.

١-١١-ظ ب-٥٦-ظ

<٦> وقد انتهينا إلى المسألة التي أعلمتك في أول كتابي أن فيها ألفين وستمائة وستة وسبعين جوابًا، وهي كقول القائل: فإن دفع إليك مائة درهم، فقيل لك: ابتع بها مائة طائر من خمسة أصناف، بط وحمام وفواخت وقنابر ودجاج؛ كل بطة بدرهمين، والحمام كل اثنتين بدرهم، والفواخت بثلاثة دراهم، والقنابر بأربعة دراهم والدجاج كل واحدة بدرهم.

فقياسه: أن / تشتري شيئًا من البط بشيئين من الدرهم، ودينارًا من الحمام بنصف دينار من الدرهم، وفلسًا من الفواخت بثلث فلس من الدرهم، وخاتمًا من القنابر بربع خاتم من الدرهم، فيبقى من الدراهم: مائة درهم إلا شيئين وإلا نصف دينار وإلا ثلث فلس وإلا ربع خاتم، ومن الدجاج مائة إلا شيئًا وإلا دينارًا وإلا فلسًا وإلا خاتمًا؛ فتشتري بها على حساب دجاجة بدرهم، فيخرج ثَمَنها مثل عددها، وهو مائة درهم إلا شيئًا وإلا دينارًا وإلا فلسًا وإلا خاتمًا. فقابل بها ما بقي من الدراهم، وهو مائة درهم إلا شيئين وإلا نصف دينار وإلا ثلث فلس وإلا ربع خاتم. فيكون الشيء يعدل بعد المقابلة نصف دينار

١-١٢-و

1 الدراهم: الدرهم [ب] — 2 من: ناقصة [ا] — 3 فتقابل: فيقابل [ب] — 6 وعشر دينار وثمن نصف عشر دينار: وعشرين دينارًا ونصف عشر دينار [ب] — 8 بلا كسر: ما بكسر [ا] — 9 هذا خلف: هف [ب] — 11 وهي: وهو [ب] — 12 فقيل: وقيل [ا] — 13 اثنتين: اثنين [ا] — 14 واحدة: واحد — 15 شيئًا: شيء [ب] — 17 الدراهم: الدرهم [ب].

un demi-dinar et deux tiers [B-57r] de fels et trois quarts de khatem. Or nous avons posé les dinars les pigeons, les fels les tourterelles, les khatems les alouettes et la chose les canards. Et ce qui reste <pour compléter> le cent, ce sont les poulets. Pose les dinars un, les fels trois et les khatems deux. Or il fallait apparemment poser pour le dinar son plus petit nombre un demi, c'est-à-dire deux, et pour le khatem son plus petit nombre un quart, [A-12v] c'est-à-dire quatre, car nous avons montré que la chose est un demi-dinar plus deux-tiers de fels plus trois quarts de khatem. Notre but était d'abord de poser le dinar un et le khatem deux, car si nous prenons la moitié de un et les trois quarts de deux, on a deux, qui est un nombre entier. Nous lui ajoutons les deux tiers du fels que nous avons posé trois, c'est-à-dire deux. La chose sera alors quatre. Procède de même pour tout ce qui te parvient de cela, et suis cette voie dans chaque problème qui se pose à toi. Si tu fais cela, et choses semblables, tu obtiens toutes les solutions de ce problème, si Dieu le veut.

À présent que nous avons achevé ce mode et que nous l'avons examiné exhaustivement selon ce que je décris, nous abordons l'autre mode et nous posons les dinars deux, les fels trois et les khatems quatre. La chose, c'est-à-dire les canards, sera, selon ce mode, six.

Nous commençons par le premier mode en posant les dirhams un, c'est-à-dire les pigeons ; les fels trois, c'est-à-dire les tourterelles ; les khatems deux, c'est-à-dire les alouettes ; et la chose quatre, c'est-à-dire les canards ; selon ce que tu vois dans le tableau. Ce qui reste pour compléter le cent, ce sont les poulets, qui sont quatre-vingt-dix. Tu inscris ensuite les tourterelles trois par trois, [A-13r] selon ce que tu vois, l'une au-dessous de l'autre. De même, les alouettes deux par deux, chacune [B-57v] au-dessous de l'autre ; et tu ajoutes aux pigeons deux. On a donc au-dessous des tourterelles, trois, et les canards seront dès lors cinq, car ils sont la moitié du trois que sont les pigeons, les deux tiers du trois que sont les tourterelles et les trois quarts du deux que sont les alouettes. Ce qui reste pour compléter le cent, ce sont les poulets, c'est-à-dire quatre-vingt-sept.

Tu ajoutes ensuite au trois que sont les pigeons, deux également. On a cinq. Tu laisses les tourterelles trois, et les alouettes deux, vis-à-vis du cinq ; et les canards six, et les poulets quatre-vingt-quatre, comme tu vois

وثلثي / فلس وثلاثة أرباع خاتم. وكنا جعلنا الدينار الحمام والفلس الفواخت ب-٥٧-و
والخاتم القنابر والشيء البط، والباقي من المائة وهو الدجاج. فاجعل الدنانير
واحدًا والفلس ثلاثة والخاتم اثنين. والذي كان يجب في الظاهر أن تجعل الدينار
أقل عدد له نصف وهو اثنان، والخاتم أقل عدد له ربع / وهو أربعة، لأنا قد بينا ا-١٢-ظ
أن الشيء نصف دينار وثلثي فلس وثلاثة أرباع خاتم؛ فقصدنا أولاً إلى أن جعلنا
الدينار واحدًا والخاتم اثنين، لأنا إذا أخذنا نصف الواحد وثلاثة أرباع اثنين،
كان اثنان، وهو عدد صحيح. ونزيد عليه ثلثي الفلس الذي جعلناه ثلاثة، وهو
اثنان، فيكون الشيء أربعة. وكذلك فاعمل في كل ما جاءك من هذا، واسلك
في كل مسألة ترد عليك هذا المسلك. فإنك إذا فعلت هذا ونحوه، خرج لك
جميع جوابات المسألة، إن شاء الله.

وإذا فرغنا من هذا الوجه واستقصيناه على ما أنا واصفه لك، ملنا إلى
الناحية الأخرى، وجعلنا الدينار اثنين والفلس ثلاثة والخاتم أربعة. فيكون
الشيء، وهو البط، من هذه الناحية ستة.

فنبدأ بالوجه الأول، وهو أن نجعل الدينار واحدًا وهو الحمام، والفلس
ثلاثة وهو الفواخت، والخاتم اثنين وهو القنابر، والشيء أربعة وهو البط، على ما
ترى في الجدول، وما بقي إلى تمام المائة فهو الدجاج وهو تسعون. ثم ترسم
الفواخت ثلاثة ثلاثة، / على ما ترى واحدًا تحت الآخر. وكذلك القنابر اثنين ا-١٣-و
اثنين، كل واحد / تحت الآخر. وتزيد على الحمام اثنين، فيكون تحت الفواخت ب-٥٧-ظ
ثلاثة، ويكون البط حينئذ خمسة، لأنها نصف الثلاثة التي هي الحمام وثلثي الثلاثة
التي هي الفواخت، وثلاثة أرباع الاثنين التي هي القنابر، وما بقي إلى تمام المائة
فهي الدجاج، وهي سبعة وثمانون.

ثم تزيد على الثلاثة التي هي الحمام اثنين أيضًا، فيكون خمسة، وتترك
الفواخت ثلاثة والقنابر اثنين بإزاء الخمسة، والبط ستة، والدجاج أربعة وثمانين،

7 اثنان: اثنين [ا، ب] — 10 الله: الله تعالى [ا] — 11 أنا: أنه [ا] — 20 وما: ما [ا، ب] — 21 وهي: وهو [ا، ب] — 22 وتترك: وترى [ا، ب].

dans le tableau. Tu continues à inscrire selon cet exemple, jusqu'à ce que les pigeons aboutissent à cinquante-neuf, les canards à trente-trois et les poulets à trois.

Dès lors, tu ajoutes aux alouettes quatre – les alouettes seront donc six – et tu laisses les tourterelles telles qu'elles sont, trois. Tu inscris les pigeons, un ; les canards seront sept et les poulets, ce qui reste pour compléter les cent dirhams, c'est-à-dire quatre-vingt-trois, comme tu vois dans le tableau. Ensuite, tu ajoutes aux pigeons deux, puis deux, et tu procèdes chaque fois comme tu l'as fait la première fois, jusqu'à ce que les pigeons aboutissent à cinquante-cinq, les canards à trente-quatre et les poulets à deux.

Dès lors, tu ajoutes aux alouettes, quatre – les alouettes seront dix – et tu laisses les tourterelles telles qu'elles sont, trois. Tu inscris les pigeons, un ; alors les canards seront dix et les poulets, ce qui reste pour compléter les cents dirhams, c'est-à-dire soixante-seize, comme tu le vois dans le tableau. Tu ajoutes ensuite aux pigeons deux, puis deux..., et tu procèdes comme tu as procédé la première fois, jusqu'à ce que les pigeons aboutissent à cinquante et un, [A-13^{v}] les canards à trente-cinq et les poulets à un seul.

Dès lors, tu ajoutes aux alouettes quatre ; les alouettes seront quatorze ; et tu laisses les tourterelles telles qu'elles sont, trois. Tu inscris les pigeons, un ; alors les canards seront treize et les poulets, ce qui reste pour compléter le cent, c'est-à-dire soixante-neuf, comme tu vois dans le tableau.

Tu continues ensuite à inscrire dans le tableau selon cet exemple, c'est-à-dire que tu laisses les tourterelles trois, tu ajoutes quatre aux alouettes et tu écris les tourterelles vis-à-vis des alouettes. Tu inscris [B-58^{r}] chacun au-dessous de son associé, tu fais les pigeons d'abord un et tu ajoutes aux pigeons deux, puis deux... À mesure que tu ajoutes deux, tu prends la moitié des pigeons, les deux tiers des tourterelles et les trois quarts des alouettes, et tu les additionnes. On aura alors les canards. Tu les inscris sur une même ligne, comme tu le vois dans le tableau, jusqu'à ce que tu aies fini. Et pour savoir que c'est la fin : si tu prends la moitié des pigeons, les deux tiers des tourterelles et les trois quarts des alouettes, que tu ajoutes aux pigeons, aux tourterelles, aux alouettes, de telle sorte que la somme obtenue soit cent ou plus, alors reprends jusqu'à ce qu'elle soit toujours moins de cent, afin que ce qui reste pour compléter le cent soit les poulets. Tu

على ما ترى في الجدول. ولا تزال ترسم على هذا المثال حتى ينتهي الحمام إلى تسعة وخمسين، والبط إلى ثلاثة وثلاثين، والدجاج إلى ثلاثة.

فحينئذ تزيد على القنابر أربعة، فتكون القنابر ستة، وتترك الفواخت ثلاثة بحالها، وترسم الحمام واحدًا، فيكون البط سبعة، والدجاج ما بقي إلى تمام المائة درهم، وهي ثلاثة وثمانون، على ما ترى في الجدول. ثم تزيد على الحمام اثنين اثنين، وتفعل في كل مرة كما فعلت في المرة الأولى <حتى ينتهي الحمام إلى خمسة وخمسين، والبط إلى أربعة وثلاثين والدجاج إلى اثنتين.

فحينئذ تزيد على القنابر أربعة، فتكون القنابر عشرة، وتترك الفواخت ثلاثة بحالها، وترسم الحمام واحدًا، فيكون البط عشرة، والدجاج ما بقي إلى تمام المائة درهم، وهي ستة وسبعون، على ما ترى في الجدول؛ ثم تزيد على الحمام اثنتين اثنتين، وتفعل كما فعلت في المرة الأولى> حتى ينتهي الحمام إلى واحد ا-١٣-ظ وخمسين، / والبط إلى خمسة وثلاثين، والدجاج إلى واحدة.

فحينئذ تزيد على القنابر أربعة، فتكون القنابر أربعة عشر، وتترك الفواخت ثلاثة بحالها، وترسم الحمام واحدًا، فيكون البط ثلاثة عشر، والدجاج ما بقي إلى تمام المائة، وهو تسعة وستون، على ما ترى في الجدول.

ثم لا تزال ترسم في الجدول على هذا المثال، وهو أن تترك الفواخت ثلاثة، وتزيد أربعة على القنابر، وتكتب الفواخت بإزاء القنابر، وترسم / كل ب-٥٨-و واحد تحت صاحبه، وتصير الحمام أولاً واحدًا، وتزيد على الحمام اثنين اثنين، فكلما زدت اثنين، أخذت نصف الحمام وثلثي الفواخت وثلاثة أرباع القنابر فتجمعه، فيكون البط. فترسمه معه في سطر واحد، على ما ترى في الجدول إلى أن تنتهي. ومعرفة انتهائه هو أنك إذا أخذت نصف الحمام وثلثي الفواخت وثلاثة أرباع القنابر فزدته على الحمام والفواخت والقنابر، فكان ما يجتمع من ذلك مائة أو أكثر، فارجع حتى يكون أبدًا أقل من مائة، ليكون ما بقي إلى تمام

4 واحدًا: واحد [ا، ب] — 12 واحدة: واحد [ا، ب] — 13 فتكون: فيكون [ا] — 14 واحدًا: واحد [ا].

continues à faire ainsi jusqu'à ce que [A-14r] les pigeons aboutissent à trois, les tourterelles à trois – car après celui-ci il y a un autre trois –, les alouettes à cinquante, les canards à quarante et un et les poulets à trois, comme tu le vois dans le tableau. Dès lors, les trois, qui sont les tourterelles, sont terminés. Ce que tu obtiens jusque-là est deux cent douze solutions correctes.

Tu ajoutes au trois un autre trois ; tu inscris les tourterelles, six, les pigeons, un, et, pour les alouettes, tu reviens à la première figure et tu les inscris, deux. On a les canards, six, et ce qui reste pour compléter le cent, c'est-à-dire les poulets, quatre-vingt-cinq, comme tu le vois dans le tableau. Tu procèdes ensuite par le six qui est les tourterelles, le deux qui est les alouettes, et le un qui est les pigeons, comme tu as fait lorsque tu commençais, jusqu'à ce que les pigeons aboutissent à un, les tourterelles à six – car après celui-ci, il y a un autre six – et les alouettes à cinquante, les canards à quarante-deux et les poulets à un, comme tu le vois dans le tableau.

C'est alors que finissent les six qui sont les tourterelles, [B-58v] d'après ce que je t'ai montré ; et il te vient jusque-là quatre cent trois solutions correctes.

Tu ajoutes au six trois autres, [A-14v] et tu inscris les tourterelles, neuf, puis neuf..., les pigeons, un ; et pour les alouettes, tu reviens à la première figure et tu les inscris, deux. Les canards sont huit, et ce qui reste pour compléter le cent, c'est-à-dire les poulets, est quatre-vingts, comme tu le vois dans le tableau. Tu continues à faire ainsi et à ajouter aux tourterelles trois, puis trois..., et tu fais pour les alouettes et les pigeons comme je te l'avais décrit, jusqu'à ce que les tourterelles aboutissent à cinquante et un, les alouettes à six, les canards à trente-neuf, les poulets à trois et les pigeons à un, comme tu le vois dans le tableau. Et ce que tu obtiens comme solutions correctes selon ce mode, c'est 1442.

Tu reviens ensuite au premier mode [A-15r] en posant les pigeons, deux, les tourterelles, trois, les alouettes, quatre ; les canards seront six et les poulets quatre-vingt-cinq, comme tu le vois dans le tableau. Puis tu procèdes dans ce mode comme tu as procédé dans le premier mode, jusqu'à ce que les tourterelles aboutissent à cinquante et un, les alouettes à

المائة الدجاج. فلا تزال تفعل كذلك حتى / ينتهي الحمام إلى ثلاثة، والفواخت ا-١٤-و
إلى ثلاثة، لأن بعدها ثلاثة أخرى، والقنابر إلى خمسين، والبط إلى واحد وأربعين، والدجاج إلى ثلاثة، على ما ترى في الجدول. فحينئذ قد انتهت الثلاثة التي هي الفواخت، فيكون قد خرج لك إلى هذا المكان مائتان واثنا عشر صوابًا.

فتزيد على الثلاثة ثلاثة أخرى، وترسم الفواخت ستة والحمام واحدًا، وترجع إلى القنابر – إلى الرسم الأول – وترسمها اثنين، يكون البط ستة، وما بقي إلى تمام المائة هو الدجاج وهو خمسة وثمانون، على ما ترى في الجدول. ثم تفعل في الستة – التي هي الفواخت – والاثنين – الذي هو القنابر – والواحد – الذي هو الحمام – كما فعلت في أول ابتدائك إلى أن ينتهي الحمام إلى واحد والفواخت إلى ستة، لأن بعدها ستة أخرى، والقنابر إلى خمسين، والبط إلى اثنين وأربعين والدجاج إلى واحد، كما ترى في الجدول.

فحينئذ قد انتهت الستة التي هي الفواخت، وتكون / على قدر ما بينت ب-٥٨-ظ
لك، ويكون قد خرج لك إلى هذا المكان أربعمائة وثلاثة صوابات.

وتزيد على الستة ثلاثة أخرى / وترسم الفواخت تسعة تسعة والحمام ا-١٤-ظ
واحدًا، وترجع في القنابر إلى الرسم الأول، وترسمها اثنين، ويكون البط ثمانية، وما بقي إلى تمام المائة، وهو الدجاج، وهو ثمانون، على ما ترى في الجدول. ثم لا تزال كذلك تزيد على الفواخت ثلاثة ثلاثة، وتعمل في القنابر والحمام، كما وصفت لك، إلى أن تنتهي الفواخت إلى أحد وخمسين، والقنابر إلى ستة، والبط إلى تسعة وثلاثين، والدجاج إلى ثلاثة، والحمام إلى واحد، على ما ترى في الجدول. ويكون قد خرج لك من الصوابات من هذا الوجه ١٤٤٢ صوابًا.

ثم ترجع إلى الوجه الآخر، / وهو أن تجعل الحمام اثنين، والفواخت ثلاثة ا-١٥-و
والقنابر أربعة، ويكون البط ستة والدجاج خمسة وثمانين، على ما ترى في الجدول. ثم تفعل في هذا الوجه كما فعلت في الوجه الأول إلى أن تنتهي

2 والقنابر: والقياس [ا، ب] – 3 ترى: يرى [ا] – 4 واثنا: واثني [ا، ب] – 6 واحدًا: واحد [ا، ب] – 11 أخرى: ناقصة [ب] / إلى (الثانية): ناقصة [ا] – 14 ثلاثة: ثلاث [ا، ب] – 15 أخرى: اخرا [ب] / تسعة: ناقصة [ب] – 19 تنتهي: ينتهي.

quatre, les canards à trente-neuf, les poulets à deux et les pigeons à quatre, comme tu le vois dans le tableau. Ainsi, il te vient comme solutions de ce problème, par les deux modes à la fois, 2676 solutions correctes.

Grâces soient rendues à Dieu pour les bienfaits qu'il a dispensés, éternelles et infinies.

Si tu veux, procède pour les alouettes comme tu as procédé pour les tourterelles, et pour les tourterelles comme tu as procédé pour les alouettes, et pour les pigeons comme cela également, si Dieu le veut.

poulets	canards	alouettes	tourterelles	pigeons
90	4	2	3	1
87	5	2	3	3
84	6	2	3	5
81	7	2	3	7
78	8	2	3	9
75	9	2	3	11
72	10	2	3	13
69	11	2	3	15
66	12	2	3	17
63	13	2	3	19
60	14	2	3	21
57	15	2	3	23
54	16	2	3	25
51	17	2	3	27
48	18	2	3	29
45	19	2	3	31
42	20	2	3	33
39	21	2	3	35
36	22	2	3	37
33	23	2	3	39

Tableau 3

الفواخت إلى أحد وخمسين، والقنابر إلى أربعة، والبط إلى تسعة وثلاثين، والدجاج إلى اثنين، والحمام إلى أربعة، على ما ترى في الجدول. ويكون قد خرج لك من الصوابات في هذه المسألة من الوجهين جميعًا ٢٦٧٦ صوابًا.

ولله الحمد على ما نعم من ذلك دائمًا كثيرًا.

وإن شئت فاعمل بالقنابر كما فعلت بالفواخت، وبالفواخت كما عملت بالقنابر والحمام أيضًا مثل ذلك، إن شاء الله.

الحمام	الفواخت	القنابر	البط	الدجاج
١	٣	٢	٤	٩٠
٣	٣	٢	٥	٨٧
٥	٣	٢	٦	٨٤
٧	٣	٢	٧	٨١
٩	٣	٢	٨	٧٨
١١	٣	٢	٩	٧٥
١٣	٣	٢	١٠	٧٢
١٥	٣	٢	١١	٦٩
١٧	٣	٢	١٢	٦٦
١٩	٣	٢	١٣	٦٣
٢١	٣	٢	١٤	٦٠
٢٣	٣	٢	١٥	٥٧
٢٥	٣	٢	١٦	٥٤
٢٧	٣	٢	١٧	٥١
٢٩	٣	٢	١٨	٤٨
٣١	٣	٢	١٩	٤٥
٣٣	٣	٢	٢٠	٤٢
٣٥	٣	٢	٢١	٣٩
٣٧	٣	٢	٢٢	٣٦
٣٩	٣	٢	٢٣	٣٣

3 ٢٦٧٦: ٢٦٩٦ [ا، ب] – 4 نعم: فهم [ا]– 6 إن شاء الله: إن شاء الله تعالى. تم والحمد لله وحده وصلى الله على من لا نبي بعده وآله وصحبه وسلم [ا] تم بحمد الله ومنّه [ب].

APPENDICE

Extrait d'*al-Bāhir en algèbre* d'al-Samaw'al [1]

Exemple de ce qui a de nombreuses solutions en nombre fini : Nous voulons acheter pour cent dirhams cent volatiles de trois espèces – canards, pigeons et poulets. Chaque canard pour deux dirhams, trois pigeons pour un dirham et deux poulets pour un dirham.

Ce qu'on recherche dans ce problème est diviser cent en trois parties deux fois, de telle sorte que le rapport de la première partie de la première division à la première partie de la seconde division soit égal au rapport de deux à un ; que le rapport de la deuxième partie de la première division à la deuxième partie de la seconde division soit égal au rapport de un à trois ; que le rapport de la troisième partie de la première division à la troisième partie de la seconde division soit égal au rapport de un à deux ; et que les parties de la seconde division soient entières, sans fraction.

Que ce qu'il a acheté de pigeons soit une chose, pour un tiers d'une chose de dirham ; et un nombre de poulets pour la moitié d'un nombre de dirhams. Il reste donc des dirhams cent moins un tiers d'une chose moins la moitié d'un nombre de dirhams ; et, des volatiles, cent canards moins une chose moins un nombre. Nous achetons en comptant un canard pour deux dirhams ; nous trouvons alors leur prix égal au double de leur nombre, c'est-à-dire deux cents dirhams moins deux choses moins deux nombres, égal à ce qui reste des dirhams ; c'est-à-dire cent dirhams moins un tiers de chose moins la moitié d'un nombre de dirhams. Tu restaures par cela ; il reste cent dirhams moins un nombre moins la moitié d'un nombre, égal à une chose plus les deux tiers d'une chose. La chose est donc égale à soixante en nombre moins neuf dixièmes du nombre des poulets. Le premier nombre possible pour les poulets est dix, afin que ses neuf dixièmes soient un entier. Les pigeons, soixante moins neuf dixièmes de dix ; il faut donc que les pigeons soient 51 ; et la somme du nombre des pigeons et de celui des poulets est 61, et les canards, ce qui reste pour achever le cent, c'est-à-dire 39. On vérifie donc que le nombre des pigeons

[1] *Al-Bāhir en algèbre d'As-Samaw'al*, édition, notes et introduction par Salah Ahmad et Roshdi Rashed, Damas, 1972, p. 229-230.

فقرة من كتاب *الباهر في الجبر* للسموءل

ومثال ما له أجوبة كثيرة متناهية: نريد أن نشتري بمائة درهمًا مائة طائرًا من ثلاثة أصناف: بط وحمام ودجاج، وكل بطة بدرهمين، وكل ثلاث حمامات بدرهم، وكل دجاجتين بدرهم.

والمطلوب في هذه المسألة أن تقسم مائة بثلاثة أقسام مرتين، تكون نسبة القسم الأول من القسمة الأولى إلى القسم الأول من القسمة الثانية كنسبة اثنين إلى واحد، ونسبة القسم الثاني من القسمة الأولى إلى القسم الثاني من القسمة الثانية كنسبة واحد إلى ثلاثة، ونسبة القسم الثالث من القسمة الأولى إلى القسم الثالث من القسمة الثانية كنسبة الواحد إلى الاثنين، وأن تكون أقسام القسمة الثانية صحاحًا لا كسر فيها.

فليكن ما اشترى من الحمام شيئًا بثلث شيء من الدراهم، وعددًا من الدجاج نصف عدد من الدراهم. فيبقى من الدراهم مائة إلا ثلث شيء وإلا نصف عدد <من الدراهم>؛ ومن الطائر مائة بطة إلا شيئًا وإلا عددًا. ونبتاع بها من حساب بطة بدرهمين، فنجد ثمنها مثلي عدتها، وهو مائتا درهم إلا شيئين وإلا عددين يعدل ما بقي من الدراهم، وهو مائة درهم إلا ثلث شيء وإلا نصف عدد <من الدراهم>. فنقابل بها، فيبقى مائة درهم إلا عدد وإلا نصف عدد يعدل شيئًا وثلثي شيء. فالشيء يعدل ستين من العدد إلا تسعة أعشار عدد الدجاج. وأول ما يمكن أن يكون عدد الدجاج عشرة، ليكون تسعة أعشاره عددًا صحيحًا. والحمام ستون إلا تسعة أعشار العشرة. فيجب أن يكون الحمام ٥١، ومجموع عدد الحمام والدجاج ٦١ والبط ما بقي إلى تمام المائة وهو ٣٩ بطة. فقد صح أن

est 51, celui des poulets dix et celui des canards 39. Nous continuons à ajouter au nombre des poulets dix, puis dix, et de soixante nous retranchons neuf dixièmes de ce qu'on obtient. C'est le nombre des pigeons. Le nombre dont nous avons retranché les neuf dixièmes est le nombre des poulets, et le reste pour arriver à cent est le nombre des canards. Nous continuons à procéder ainsi jusqu'à ce que neuf dixièmes de ce qu'on obtient du nombre des poulets excède soixante. S'il excède soixante, alors il n'y a plus de solution et il n'en reste aucune. Le nombre des solutions de ce problème est six, à quoi on ne peut rien ajouter[2].

Ce problème est le second du livre *Sur les volatiles* d'Abū Kāmil.

[2] Voici le tableau des solutions que propose Abū Kāmil :

pigeons	poulets	canards
51	10	39
42	20	38
33	30	37
24	40	36
15	50	35
6	60	34

الحمام ٥١ والدجاج عشرة والبط ٣٩. ولا نزال نزيد على عدد الدجاج عشرة عشرة، ونلقي تسعة أعشار ما تجمع من الستين، فهو عدد الحمام. والعدد الذي ألقينا تسعة أعشاره هو عدد الدجاج، والباقي إلى المائة عدد البط. ولا نزال نفعل حتى يكون تسعة أعشار ما يجتمع من عدد الدجاج أكثر من ستين. فإذا جاوز الستين، فقد تناهت الجوابات ولم يبق جواب. وعدة الأجوبة في هذه المسألة ستة ولا يمكن الزيادة عليها.

وهذه المسألة هي الثانية من كتاب الطير لأبي كامل.

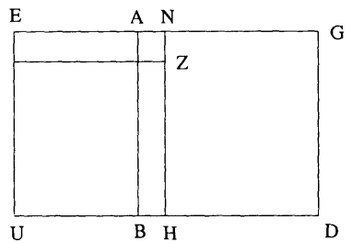
NOTES COMPLÉMENTAIRES

[**1**, p. 262 ; ar. p. 263, 8]

Ce paragraphe pose un problème relatif à l'histoire du texte d'Abū Kāmil, qui nous ramène à ses copies antérieures au XII[e] siècle.

1° Il manque une phrase, nécessaire à la restitution de la démonstration.

2° La traduction latine ne correspond pas au texte arabe : la figure est modifiée, elle comporte des ajouts explicatifs et n'est pas exempte d'erreurs. On lit en effet :



« Si autem volueris quod tibi exponamus quod diximus expositione que sit oculis manifesta : Faciemus super lineam *UH* quadratum, super quod sint *U,Z*. Et producamus *HZ* usque ad *N*. Erit ergo superficies *BZ* sicut superficies *ZE* : propterea quia linea *HZ* est equalis linee *EN*, cum utraque sit medietas totius linee *UD* ; et linea *BH* est equalis linee *ZN*, propterea quod tota *BD* est equalis toti *HN*, quia ipsa est equalis *BA*, et *BA* est sicut *HN*, et *ZH* equalis *HD*, quia utraque est medietas linee *BD*, remanet igitur *BH* equalis *NZ* ; ergo superficies *BZ*, *ZE* sunt equales, quia equis continentur lineis. Igitur 2 superficies *ZA* et *BE* sunt 25, cum ipse sint sicut quadratum *UZ*. Superficies autem *BE* iam fuit 21. Igitur superficies *ZA* residua est 4, et est quadrata, sicut ostensum est. » (éd. J. Sesiano, p. 333, l. 310-322.)

Le texte de ce paragraphe latin, ainsi que la figure géométrique qui l'accompagne, diffèrent donc de ceux du manuscrit arabe existant.

En revanche, la traduction hébraïque et la figure qui lui est associée collent parfaitement à l'arabe, même si le texte hébraïque est plus bref (cf. éd. M. Levey, p. 42-43). Elle a été effectuée en Espagne musulmane, avant le XII[e] siècle. Comme cette traduction et la traduction latine sont témoins de deux manuscrits différents, et différents du manuscrit arabe existant, on a des raisons de penser que la difficulté rencontrée dans ce paragraphe remonte à la tradition manuscrite antérieure au XII[e] siècle et que, confronté à cette difficulté, le traducteur latin a préféré gloser.

Traduisons ce texte dans l'arabe d'Abū Kāmil :

فإن أحببت أن نبين ما قلناه عياناً، فإنا نجعل على خط و ح مربعاً عليه و ز. ونخرج ح ز إلى ن. فسطح ب ز مثل سطح ز ه، لأن خط ح ز مثل خط ه ن لأن كل منهما نصف خط و د كله؛ وخط ب ح (ب د في المخطوط) مثل خط ز ن، لأن ب د كله مثل ح ن كله. لأنه مثل ب آ، وب آ مثل ح ن، وز ح مثل ح د، لأن كل منهما نصف خط ب د، فيبقى ب ح مثل ن ز، فسطحا ب ز ز ه متساويان، لأنهما محاطان بخطوط متساوية، فسطحا ز آ ب ه: ٢٥، لأنهما مثل مربع و ز. ولكن سطح ب ه: ٢١، فيبقى سطح ز آ أربعة، وهو مربع كما تبين.

[2, p. 292 ; ar. p. 293, 7]. Al-Samaw'al, *al-Bāhir*, p. 40-41 :

قال أبو كامل شجاع بن أسلم:

فإن قال: كم عشرة إلا شيئًا (في المخطوطة: شيء) في عشرة إلا شيئًا (في المخطوطة: شيء). فقل مائة ومالاً إلا عشرين شيئاً.

وبابه أن تضرب عشرة دراهم في عشرة دراهم، فيكون مائة درهم. ثم تضرب شيئًا ناقصًا في عشرة دراهم، فيكون عشرة أشياء ناقصة. ثم تضرب عشرة دراهم (في المخطوطة: أشياء) في شيء ناقص، يكون عشرة أشياء ناقصة. ثم تضرب شيئًا ناقصًا في شيء ناقص، فيكون مالاً زائداً، وتجمع ذلك كله، فيكون مائة ومالاً إلا ٢٠ شيئًا.

ولنبين ذلك في هذه الصورة: وهو أن يجعل خط آ ب عشرة دراهم إلا شيئًا وآ ج عشرة، فيكون ب ج شيئًا، ويجعل خط د ه عشرة إلا شيئًا (في المخطوطة: شيء) وجد د عشرة وخط ج ه شيئًا، فيضرب خط آ ب الذي هو عشرة دراهم إلا شيئًا (في المخطوطة: شيء) في خط ه د الذي هو عشرة دراهم إلا شيئًا (في المخطوطة: شيء)، فيكون مربع ز ح، فأقول: إن سطح ز ح مائة ومال إلا ٢٠ شيئًا.

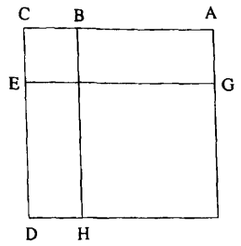
وبرهانه: أن نتمم سطح آ د، ونخرج من نقطة ب خطًا موازيًا لـ ج د وهو ب ح، ونخرج من نقطة ه خطًا موازيًا لخط آ ج، وهو خط ه ز. فسطح آ د مائة، لأن خط آ ج

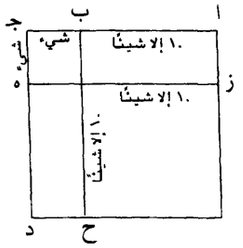
عشرة وخط ج د عشرة؛ وسطح ز ج عشرة أشياء، لأن خط آ ج ١٠ وخط ج ه شيء؛ وسطح ب د أيضاً عشرة أشياء، لأن خط د ج عشرة وخط ج ب شيء؛ وسطح ب ه مال، لأنه من ضرب ب ج – الذي هو شيء – في خط ج ه الذي هو أيضاً شيء. ‹فبقي سطح ه ح عشرة أشياء إلا مالاً، وسطح آ ه عشرة أشياء، فسطح ز ج وسطح ه ح عشرون شيئاً إلا مالاً. وسطح آ د مائة›، فيبقى سطح ز ح (في المخطوطة: ه ح) مائة ومالاً إلا ٢٠ شيئاً؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

Abū Kāmil Shujā' ibn Aslam a dit[1] :

Si on dit : combien sont dix dirhams moins une chose par dix dirhams moins une chose, alors tu dis : cent dirhams plus un *carré* moins vingt choses.

En voici le procédé : tu multiplies dix dirhams par dix dirhams, on a cent dirhams. Tu multiplies ensuite une chose soustractive par dix dirhams, on a dix choses soustractives. Tu multiplies ensuite dix dirhams [ms. choses] par une chose soustractive, on a dix choses soustractives. Puis tu multiplies une chose soustractive par une chose soustractive, on a un *carré* additif. Tu additionnes tout cela, on a cent dirhams plus un *carré* moins 20 choses.





Je montre cela dans cette figure. Tu poses la droite *AB* dix dirhams moins une chose : *AC* dix et *BC* une chose. Tu poses la droite *DE* dix dirhams moins une chose : *CD* dix et la droite *CE* une chose. Tu multiplies la droite *AB*, qui est dix dirhams moins une chose, par la droite *ED*, qui est dix dirhams moins une chose. On a le carré *GH*. Je dis que le surface *GH* est cent dirhams plus un carré moins 20 choses.

[1] Le soulignement met en évidence les divergences par rapport à l'*Algèbre* d'Abū Kāmil.

Démonstration : complétons la surface *AD* et menons du point *B* une droite parallèle à la droite *CD*, soit la droite *BH*. Menons du point *E* une droite parallèle à la droite *AC*, soit la droite *EG*. La surface *AD* est cent, car la droite *AC* est dix et la droite *CD* est dix. La surface *GC* est dix choses, car la droite *AC* est 10 et la droite *CE* une chose. La surface *BD* est aussi dix choses, car la droite *DC* est dix et la droite *CB* une chose. La surface du carré *BE* est un *carré*, car elle est le produit de la droite *BC*, qui est une chose, par la droite *CE*, qui est aussi une chose. Il reste la surface *EH* dix choses moins un *carré*, et la surface *AE* dix choses. Donc la surface *GC* plus la surface *EH* est vingt choses moins un *carré*. Mais la surface *AD* est cent. Il reste la surface *GH* cent dirhams plus un *carré* moins 20 choses. Ce qu'il fallait démontrer.

[**3**, p. 344 ; ar. p. 345, 1] Al-Samaw'al, *al-Bāhir*, p. 57 :

قال أبو كامل: كل عددين يقسم كل واحد منهما على الآخر. فإن ضرب أحد العددين في الآخر درهم أبداً.

مثاله: أنا نقسم عدد آ على عدد بَ، فيخرج جَ ونقسم عدد بَ على آ، فيخرج دَ، فأقول: إن ضرب جَ في دَ درهم أبداً.

برهانه: أن آ قسم على بَ يخرج جَ، فـ بَ يعد آ بقدر ما في جَ من الآحاد، والواحد يعد جَ بقدر ما في جَ من الآحاد. فنسبة الواحد إلى جَ كنسبة بَ إلى آ. وإذا خالفنا، فنسبة آ إلى بَ كنسبة جَ إلى آ الواحد. وأيضًا، فإن بَ قسم على آ، فخرج دَ، وآ يعد بَ بآحاد دَ، <والواحد يعدّ دَ بقدر ما في دَ من الآحاد>، فنسبة الواحد إلى دَ كنسبة آ إلى بَ. وقد كانت نسبة آ إلى بَ كنسبة جَ إلى الواحد، فنسبة جَ إلى الواحد كنسبة الواحد إلى دَ. فضرب جَ في دَ مثل مربع الواحد. لكن مربع الواحد واحد، فضرب جَ في دَ واحد؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

3 مثاله: مثال ذلك – 5 برهانه: برهان ذلك / يخرج: فخرج – 6 فنسبة الواحد إلى جَ كنسبة بَ إلى آ: فقدر الواحد من جَ كقدر بَ من آ – 7 فنسبة آ إلى بَ كنسبة جَ إلى آ الواحد: كان قدر آ من بَ كقدر جَ من الواحد / فإن بَ: بَ – 10 مربع الواحد: ضرب الواحد في مثله / لكن مربع الواحد: وضرب الواحد في مثله.

Abū Kāmil a dit : deux nombres dont chacun est divisé par l'autre : alors le produit de l'une des deux parties par l'autre est toujours égal à un dirham.

Exemple : divisons le nombre *A* par le nombre *B*, on obtient *C*. Divisons le nombre *B* par le nombre *A*, on obtient *D*. Je dis que le produit de *C* par *D* est toujours un dirham.



Démonstration : on a divisé *A* par *B*, on obtient *C*. Donc *B* mesure *A* par autant d'unités que dans *C* ; et l'unité mesure *C* par autant d'unités que dans *C*. Alors la grandeur de l'unité par rapport à *C* est égale à la grandeur de *B* par rapport à *A*. Donc, par inversion, la grandeur de *A* par rapport à *B* est égale à la grandeur de *C* par rapport à l'unité. De même, *B* a été divisé par *A*, on obtient *D*, *A* mesure *B* par autant d'unités que dans *D* et l'unité mesure *D* par autant d'unités que dans *D*. Donc le rapport de l'unité à *D* est égal au rapport de *A* à *B* ; mais le rapport de *A* à *B* est égal au rapport de *C* à l'unité. Donc le rapport de *C* à l'unité est égal au rapport de l'unité à *D*. Donc le produit de *C* par *D* est égal au produit de l'unité par elle-même. Mais le produit de l'unité par elle-même est un. Donc le produit de *C* par *D* est un. Ce qu'il fallait démontrer.

[**4**, p. 508 ; ar. p. 509, 6-21]. Al-Samaw'al, *al-Bāhir*, p. 116 :

قال شجاع: إذا قسم عدد بقسمين وقسم على كل واحد منهما، فإنه سيخرج بالقسمة عددان مسطحهما مساوٍ لمجموعهما.

مثاله: أن عدد آ بَ قسم بعددي آ جَ جَ بَ، ولنقسم آ بَ على آ جَ وليخرج د هَ ولنقسم آ بَ على بَ جَ وليخرج هَ زَ، فأقول: إن مجموع عددي د هَ هَ زَ، أعني د زَ مساوٍ لمضروب د هَ في هَ زَ.

برهانه: أن ضرب د هَ في آ جَ مساوٍ لضرب هَ زَ في جَ بَ، لأن كل واحد منهما مساوٍ لعدد آ بَ، فنسبة د هَ إلى هَ زَ كنسبة بَ جَ إلى جَ آ، ونسبة هَ زَ إلى هَ د كنسبة

ا ج إلى ج ب. فإذا ركبنا، فنسبة ز د إلى د ه كنسبة ه ز إلى الواحد، فـ د ه يعد د ز بآحاد ه ز، فـ د ه بضرب ه ز يخرج د ز؛ وذلك ما أردنا أن نبين.

Shujāʿ <Abū Kāmil> a dit : Si l'on divise un nombre en deux parties et si on le divise par chacune d'elles, alors on obtient par la division deux nombres dont le produit est égal à leur somme.

Exemple : on a divisé le nombre *AB* en deux nombres *AC* et *CB*. Divisons *AB* par *AC* pour obtenir *DE* ; divisons *AB* par *BC* pour obtenir *EG*. Je dis que la somme des deux nombres *DE* et *EG*, c'est-à-dire *DG*, est égale au produit de *DE* par *EG*.

Démonstration : le produit de *DE* par *AC* est égal au produit de *EG* par *CB*, car chacun des deux est égal au nombre *AB*. Le rapport de *DE* à *EG* est donc égal au rapport de *BC* à *CA* ; et le rapport de *EG* à *ED* est égal au rapport de *AC* à *CB*. Si nous composons, le rapport de *GD* à *DE* est donc égal au rapport de *EG* à l'unité. *DE* mesure donc *DG* par les unités de *EG* ; donc, *DE* multiplié par *EG* donne *DG*. Ce qu'il fallait démontrer.

GLOSSAIRE ARABE-FRANÇAIS

Lorsque le mot se répète un grand nombre de fois en conservant le même sens, nous n'avons cité qu'une dizaine d'occurrences. Chacune de ces occurrences est indiquée par le numéro du texte en chiffre romain [(I) *Livre d'algèbre* ; (II) *Livre sur les volatiles*], les numéros de page et de ligne en chiffre arabe.

أبد

أبداً — toujours (I) 247, 10 ; 345, 2, 4 ; 409, 12 ; 433, 20 ; 503, 16 ; 505, 6 ; 517, 18 ; 681, 20 ; 689, 17 ; (II) 757, 23 ; absolument (I) 721, 3-5 ; 723, 7, 9, 21, 22 ; 725, 2, 4, 15, 18 ; ... ; (II) 751, 5

أتى

أتى — présenter, donner, venir (I) 249, 22 ; 261, 9 ; 273, 20 ; parvenir (II) 733, 15

أجر

أجْر — salaire (I) 707, 14 ; 713, 9, 10, 12, 15, 18, 21 ; 715, 2, 4, 6...

أحد

آحاد — unités (I) 247, 3, 6 ; 257, 13, 16 ; 271, 6 ; 305, 19 ; 307, 1, 2 ; 309, 15 ; ...

أخذ

أخذ (الجذر) — prendre (I) 251, 4, 10 ; 253, 1, 7, 18, 23-24 ; 259, 17 ; 261, 4 ; 273, 12 ; 275, 3 ; 299, 20 ; ... ; (II) 737, 4 ; 755, 6 ; 757, 19, 21

مأخوذ — pris, dont on prend (I) 319, 10, 12, 16, 18 ; 421, 16 ; 481, 14, 16 ; 527, 10 ; 549, 4 ; 559, 10

أدب

أولي الأدب — les premiers maîtres des lettres (I) 243, 15

أدى

أدّى — mener (I) 277, 12 ; 487, 14 ; 729, 9

إزاء — vis-à-vis (II) 755, 23 ; 757, 17

أصل

أصل ج أصول — fondement (I) 245, 1, 3, 10, 19 ; 719, 14, 15 ; 729, 6, 8 ; origine (I) 385, 11 ; principe (I) 579, 16 ; (II) 733, 6

ألف

ألّف — composer (I) 243, 3 ; 245, 16 ; (II) 733, 12

إئتلف — se combine (II) 735, 7

إلا — moins (I) 289, 10, 12, 15 ; 291, 5 ; 293, 7, 8, 12, 14-18 ; ... ; (II) 735, 5-9, 15 ; 737, 5-9 ;...

أمر

أمر — prescrire (II) 745, 20 ; 747, 5

أمْر — chose (I) 639, 3

أمل

تأمّل — méditer (I) 243, 16

أهل

أهل زماننا، عصرنا — nos contemporains, de notre temps (I) 523, 15 ; 579, 5 ; 719, 13

أول

أوّل م أولى — premier (I) 275, 13 ; 281, 20 ; 305, 18 ; 321, 4, 16 ; 353, 4, 5, 8-11 ; ... ; (II) 755, 14 ; 757, 6 ; 759, 7, 16 ;

début (I) 349, 12 ; 371, 9 ; 437, 3 ; (II) 743, 20 ; 753, 10 ; 759, 10

أولاً — d'abord (I) 261, 16 ; 269, 6 ; 281, 10 ; 313, 12 ; 499, 9 ; (II) 755, 5 ; 757, 18

أون

الآن — maintenant (I) 347, 18 ; 579, 13

بحث

بَحْث — le fait de chercher (I) 243, 20

بت

البتة — absolument (II) 733, 15

بد

لا بُدّ — nécessairement, devoir (I) 281, 8, 11, 19

بدأ

بدأ — commencer (I) 281, 10 ; 283, 9 ; 313, 12 ; 523, 19 ; 721, 8 ; (II) 755, 14

ابتدأ (ابتداء) — commencer (II) 743, 20 ; 745, 5 ; 759, 10

مبتدئ — celui qui a commencé (I) 245, 3

برهن

بُرهان — démonstration (I) 285, 14 ; 287, 6 ; 289, 4 ; 291, 1, 15 ; 293, 20 ; 295, 21 ; 301, 18 ; 303, 14 ; 307, 17 ; ...

قول برهاني (انظر أيضًا قياس) — discours démonstratif (II) 733, 15

بسط

أبسط أرباعًا، أسداسًا — développer (en quarts)(I) 627, 7, 11 ; 631, 19 ; 673, 6, 9

بطل

بطل اسم الدينار — le nom du dinar est ôté (I) 661, 2

بطل الجواب — il n'y a plus de solution (II) 739, 19

بطل (بطلان) — chômer (I) 705, 19, 20 ; 707, 2, 3, 5-7, 9-11...

بعد

متباعد — éloigné (I) 245, 4

بعض

بَعْض — partie (I) 245, 16 ; 679, 1

بعض — certains (I) 579, 13 ; (II) 749, 7 ; 751, 1 ; quelques 373, 20 ; 415, 8

بعضها في بعض، — les uns par les autres (I) 281, 10, 14, 16, 18 ; 283, 2, 3 ; 285, 8 ; 299, 16 ; (II) 733, 5

بغي

ينبغي أن — falloir, devoir (I) 251, 16 ; 319, 14 ; 639, 8

بقي

بقي — rester (I) 251, 5, 12 ; 253, 2, 9, 19, 25 ; 257, 3 ; 259, 8, 17, 18 ; 261, 4 ... ; (II) 737, 5, 6, 9, 10 ; 739, 6, 11, 16, 21, 22 ; ...

باقٍ — reste, qui reste (I) 247, 7 ; 255, 19 ; 257, 8 ; 275, 18 ; 321, 15 ; 367, 20 ; 389, 5 ; 439, 1 ; 503, 8 ; ... ; (II) 755, 2

بلغ

بلغ — parvenir, obtenir (I) 249, 22 ; 251, 16, 19 ; 253, 12, 13 ; 359, 22 ; 361, 3 ; 451, 6 ; 495, 12 ; 561, 5...

مبلغ — somme, produit (I) 259, 21 ; 267, 16

بوب

باب ج أبواب — chapitre (I) 245, 19 ; procédé (I) 249, 22 ; 251, 1, 6, 21 ; 253, 3, 16, 20 ; 255, 3 ; 257, 9 ; 259, 13, 15, 21 ; ... ; type (I) 579, 15, 18

بيت

بيوت الشطرنج — cases de l'échiquier (I) 725, 9-10 ; 727, 1, 18-21 ; 729, 2

باع

باع — vendre (I) 465, 11 ; 701, 7, 11, 13 ; 703, 8

ابتاع — acheter (I) 655, 2 ; (II) 737, 1, 7, 22 ; 739, 3 ; 741, 20 ; 743, 4 ; 749, 9, 15 ; 751, 3 ; 753, 12

بين

بان — être montré, devenir clair (I) 355, 13 ; 393, 1 ; 563, 9

بيان — le fait de montrer (I) 247, 12 ; 331, 21 ; 505, 15 ; 517, 16

بيّن — clair (I) 255, 5 ; 267, 18 ; 273, 11 ; 275, 17 ; 277, 2, 7, 16 ; 279, 7 ; ...

بيّن (تبيين) — montrer (I) 245, 9, 12, 17, 18, 21 ; 247, 12 ; 249, 23 ; 257, 1 ; 259, 23 ; 261, 10, 15 ; 263, 6 ; ... ; (II) 733, 14 ; 745, 23 ; 749, 21 ; 755, 4 ; 759, 13

وذلك ما أردنا أن نبيّن — Ce qu'il fallait démontrer (I) 247, 22 ; 257, 8 ; 259, 9 ; 263, 12-13 ; 267, 10-11 ; 271, 2 ; 273, 2, 10 ; 279, 2 ; 281, 3 ; ...

مُبيّن — qui montre, explique (I) 281, 14 ; 311, 7 ; 369, 15 ; 415, 8 ; 603, 12

تبيّن — montrer (I) 265, 1 ; 267, 9, 14 ; 269, 16 ; 301, 22 ; 467, 5, 18 ; 501, 10 ; 507, 7 ; 511, 21 ; ... ; (II) 737, 13, 17 ; 739, 13

استبان — être clair (I) 397, 8

تحت — au-dessous (II) 755, 17, 18 ; 757, 18

ترك

ترك — laisser (I) 245, 7, 18 ; 481, 5 ; 729, 4 ; (II) 743, 12, 21 ; 745, 1, 6, 9, 13, 16, 19 ; 747, 5 ; 755, 22...

تسع

تُسع ج أتساع — neuvième (I) 303, 7, 13, 21 ; 311, 6 ; 317, 10 ; 379, 7, 8, 14, 16-18 ; ...

تقن

أتقن علمه — parfaire la connaissance (I) 243, 17

متقن — sûr (I) 659, 17 ; 677, 22

تم

تمّ (تمام) — achever (I) 257, 17 ; 271, 9 ; 291, 1 ; 601, 6 ; compléter (I) 293, 20 ; 295, 21 ; 297, 21 ; 499, 11 ; (II) 739, 11, 16, 22 ; 743, 10, 23 ; 745, 8, 15 ; 747, 2 ; 749, 1 ; 755, 16 ; 757, 4, 9, 15, 23 ; ...

تمام — complément (I) 549, 3, 5

تامّ (انظر مال) — entier

ثبت

ثبت (العلة) — être établie (la cause) (I) 355, 13

ثقل

مثقال ج مثاقيل — poids (I) 697, 6, 7, 9-12, 14-19 ; ...

ثلث

ثُلْث ج أثلاث — tiers (I) 249, 8 ; 299, 7, 10, 13 ; 303, 6, 7, 10, 11 ; 311, 6 ; 375, 14 ; ... ; (II) 735, 6 ; 739, 2 ; 745, 7 ; 749, 13, 14, 17, 18 ; ...

ثلاثة أمثال (انظر أمثال) — triple

ثالثة — tierce (I) 551, 1, 3-6, 8, 9

مُثلّث — triangle (I) 523, 13 ; 547, 7, 8 ; 551, 12, 15 ; 555, 10-16 ; ...

– متساوي الأضلاع والزوايا — équilatéral (I) 545, 19 ; 551, 11 ; 553, 6

ثمن

ثَمَن — prix (I) 655, 3-6, 9, 11, 12, 14, 19, 21 ;... ; (II) 739, 4 ; 753, 20

ثُمْن أثمان — huitième (I) 347, 17, 19, 20 ; 349, 1 ; 381, 15, 16 ; 387, 4, 8 ; 405, 3, 4... ; (II) 753, 6, 8

ثنى

ثانية — seconde (I) 551, 1, 2, 4-6, 8, 9

استثنى — retrancher (I) 587, 13 ; 603, 15 ; 607, 13

الاستثناء — le soustrait (I) 283, 11

مستثنى — retranché (I) 583, 15-17 ; 585, 14 ; 587, 19 ; 589, 1 ; 607, 13, 15

جاء

جاء — venir, parvenir (I) 255, 1 ; 299, 17 ; 305, 1 ; 311, 7 ; 581, 20 ; 603, 23 ; 607, 9 ; 639, 1 ; 641, 9, 20 ; ... ; (II) 755, 8

جبر

جبر — restaurer (I) 321, 12 ; 325, 10 ; 327, 6 ; 329, 16 ; 337, 1, 7 ; 339, 7, 10 ; 341, 2 ; 351, 7, 10 ; 367, 5 ; 371, 14 ; 379, 5, 16 ; 381, 13 ; ... ; (II) 737, 10

الجبر — algèbre (I) 321, 3 ; 415, 7, 9 ; 501, 15 ; 579, 18

الجبْر والمقابلة — *al-jabr* et *al-muqābala* (I) 245, 1, 3, 16, 20 ; 281, 7, 9 ; 523, 5

جدل

جدول — tableau (II) 749, 7 ; 751, 2 ; 755, 16 ; 757, 1, 5, 15, 16, 20 ; 759, 3, 8...

جذر

جذْر ج جذور، أجذار — racine (I) 247, 2, 4, 6, 8-12, 16, 18, 21 ; ...

– صغير ج صغار — petite racine (I) 711, 7-11, 18, 19 ; 713, 1, 3...

– كبير ج كبار — grande racine (I) 711, 7-11, 18-20 ; 713, 1-3...

جزأ

جزء ج أجزاء — partie (I) 523, 11 ; 525, 16, 17 ; 527, 1-3 ; 531, 12, 13, 15 ; 535, 9 ; 537, 15, 16 ; ... ; (II) 735, 6, 7 ; 737, 11, 12, 14, 17, 18

جعل

جعلَ — poser, faire (I) 247, 14 ; 255, 4 ; 257, 9, 15 ; 261, 16, 17, 19 ; 263, 6 ; 265, 3, 4... ; (II) 737, 13, 14, 19 ; 743, 8 ; 747, 3 ; 749, 18 ; 753, 6 ; 755, 1-3...

جمع

جمع — additionner (I) 251, 16 ; 259, 5 ; 281, 1, 16 ; 287, 19 ; 293, 4, 12 ; 297, 2 ; 297, 2 ; 313, 10, 13 ; 315, 10 ; ... ; (II) 757, 20

جامع (شكل) — générale (proposition) (I) 307, 11 ; 309, 8 ; 311, 8

مجموع — additionné (I) 313, 17 ; 319, 3 ; 339, 5 ; 343, 18 ; 351, 20 ; 569, 1

جميع — tout, tout entier (I) 249, 9, 14, 23 ; 255, 1 ; 259, 23 ; 261, 15 ; 269, 3 ; 271, 14 ; 273, 17 ; 277, 6... ; (II) 755, 10 ; somme (II) 737, 20

جميعًا — à la fois (I) 267, 14, 17 ; 273, 20 ; 281, 17 ; 283, 1, 4 ; 639, 3 ; (II) 761, 3

اجتمع — se réunir (I) 663, 10 ; s'additionner (I) 317, 8, 13

ما اجتمع résultat, somme, produit, ce qu'on obtient (I) 247, 4 ; 259, 12 ; 265, 1 ; 267, 9-10, 18 ; 273, 13, 15, 16 ; 283, 21, 24 ; 285, 8… ; (II) 739, 15, 18 ; 757, 22

مجتمع somme (I) 655, 10 ; 657, 3

جمل

جملة الأمر en général (I) 283, 10-11

جنب

جانب ج جوانب côté (I) 529, 12 ; 533, 3 ; 535, 17 ; 539, 2 ; 541, 2, 8, 16, 19-21 ; 543, 8…

جنس

جِنْس ج أجناس genre (I) 283, 22, 24 ; 319, 14 ; 611, 1 ; 663, 8, 18 ; 669, 6

جهل

جاهل ignorant (II) 733, 4

مجهول inconnu (I) 299, 19 ; 301, 1-5, 7, 8 ; 541, 8 ; 543, 2 ; 703, 1, 8 ; 709, 9

جوب

جواب réponse (I) 319, 13, 14 ; solution (II) 733, 7-11, 14, 16, 19 ; 735, 4, 8, 20 ; 737, 16 ; 739, 13…

أجاب répondre (II) 733, 5, 7 ; 735, 21

مجيب celui qui répond (II) 735, 8

جوز

جاز être possible ; être permis (I) 283, 10 ; 587, 4 ; 623, 6 ; (II) 735, 10

جاوز dépasser (II) 739, 18

حب

أحبّ vouloir (I) 257, 1 ; 263, 6 ; 265, 19 ; 383, 5, 14 ; 435, 11 ; 451, 9 ; 601, 7 ; 617, 22 ; 625, 20 ; …

حج

محجّة chemin (I) 729, 9

حد

حدود termes (I) 243, 17

غير محدودة (انظر مسألة) indéterminé (problème)

حدث

حَدَثَ se produire (I) 285, 17 ; 287, 11 ; 301, 20 ; 303, 18

حدس

حدس intuition (II) 733, 6

حسب

حَسَبَ calculer (I) 345, 13 ; 377, 14 ; 429, 10 ; 439, 3 ; 451, 10 ; (II) 733, 9

على حسب ذلك conformément à cela (I) 595, 11

حساب calcul (I) 245, 20 ; 281, 7, 9 ; 321, 3 ; 415, 7, 9 ; 461, 21 ; 523, 5 ; 721, 3 arithmétique (I) 243, 20 ; 245, 9, 20 ; 523, 16 ; 719, 15 ; 729, 7 ; (II) 733, 4

على حساب سعر مجهول à un prix inconnu (I) 701, 7

من حساب، على حساب au prix de (I) 701, 6, 9, 10, 11, 13 ; (II) 753, 2, 19 ; en comptant (II) 737, 7-8 ; 739, 3 ; 743, 4 ; 749, 15

الحُسّاب les arithméticiens (I) 245, 2 ; 283, 9 ; 337, 10 ; 339, 19 ; 523, 15 ; 579, 5, 14, 15, 18 ; 659, 15 ; 677, 20 ; 719, 11 ; 729, 3

حسن

أحسن mieux (I) 319, 13, 15

استحسن apprécier (II) 733, 5

حصل

حصل obtenir (II) 737, 6

حاصل celui qui obtient (II) 737, 7

حصى

لا يحصى كثرة (صوابات) innombrables (solutions) (I) 581, 2-3 ; 595, 1 ; 611, 5 ; 617, 4, 15-16 ; 621, 19-20 ; 625, 19

حفظ

حفظَ retenir (I) 313, 14, 15 ; 315, 11, 12 ; 317, 17 ; 319, 2, 5 ; 337, 22 ; 339, 22 ; 351, 4 ; 427, 16 ; 561, 3…

حق

حقّ dû (I) 675, 22 ; 679, 4

حكم

حُكم règle (I) 317, 12

حكمة sagesse (I) 243, 15

إحكام الصنعة la maîtrise de l'art (I) 243, 18

محكم maîtrisé (I) 729, 6

حل

حلّ résoudre (I) 521, 13 ; 729, 6

حوج

احتاج إلى avoir besoin, être nécessaire (I) 247, 1 ; 351, 19, 22 ; 523, 4 ; 581, 7 ; 601, 12 ; 605, 14 ; 609, 20 ; 613, 19 ; 615, 13… ; (II) 735, 20 ; 753, 7

حوط

أحاط — être circonscrit (I) 523, 8, 9 ; 529, 13 ; 533, 5 ; 535, 1, 13, 15 ; 541, 1, 8, 9 ; 543, 10… ; être inscrit (I) 523, 8, 10 ; 525, 2 ; 539, 1 ; 541, 20 ; 545, 2, 14, 16, 17 ; 547, 14 ; … ; entourer (I) 533, 6 ; 535, 17

محيط — circonférence (I) 523, 11 ; 531, 4 ; 533, 8 ; 547, 3 ; 579, 8 ; circonscrit (I) 531, 3 ; 533, 1 ; 561, 1 ; 563, 6, 10 ; 573, 18 ; 577, 4 ; 579, 7

حول

بحاله — tel quel (II) 743, 13, 21 ; 745, 1, 9, 14, 17, 20 ; 757, 4, 9

حول — substituer (I) 711, 17

محال — impossible (I) 633, 6

استحال (مسألة) — être impossible (problème) (I) 259, 22 ; 267, 16 ; 273, 17 ; 607, 14 ; (II) 737, 20

مستحيل — impossible (II) 751, 5

حيلة — procédure, procédé subtil (I) 579, 16 ; 595, 2 ; 603, 12 ; 611, 5 ; 625, 19 ; 639, 3 ; 641, 10 ; 643, 14 ; 653, 19

احتال — procéder ingénieusement (I) 641, 9

حين

حينئذٍ — dès lors (I) 281, 18 ; 583, 16 ; (II) 743, 16, 22 ; 745, 4, 6, 12, 21 ; 747, 1 ; 749, 2, 4…

خبر

انتهى إليه ... خَبَره — avoir ouï-dire, avoir connaissance (I) 523, 16 ; 579, 5

أخبر — annoncer (I) 281, 4 ; exposer (I) 283, 9, 10 ; 625, 21 ; (II) 733, 19 ; rapporter (I) 581, 3 ; diffuser (II) 733, 12

ختم

خاتم — khatem (II) 753, 17-19, 21, 22 ; 755, 1-6

خرج

خرجت مسألة — être résolu (problème) (I) 265, 18 ; 267, 12, 13 ; 611, 2 ; obtenir (II) 733, 10 ; 737, 8 ; 739, 4 ; 741, 12 ; 749, 6, 15, 21 ; 751, 5 ; 753, 2…

خرج، أخرج — mener (I) 245, 11 ; 249, 22, 23 ; 251, 1, 6, 21 ; 253, 3, 16, 20 ; 255, 4 ; … ; prolonger (I) 257, 2 ; 265, 20 ; 301, 14, 18-19 ; 303, 14, 15 ; 315, 2-3 ; 317, 1

أخرج على استقامة — au-dessus (I) 269, 5, 13

خارج (انظر أيضًا وقع) — résolution (I) 729, 7

إخراج — déterminer (I) 353, 4 ; (II) 749, 20 ; résoudre (I) 579, 16 ; inventer (I) 719, 15, 18

استخرج — détermination (I) 523, 14, 19 ; 549, 20 ; 579, 7-9 ; 581, 5 ; 595, 2 ; 603, 12 ; 611, 5 ; … ; (II) 733, 13 ; 735, 20 ; résolution (I) 579, 4

استخراج — inventeur (I) 719, 12

مستخرج

خرع

مخترع — celui qui a inventé (I) 245, 3

خس

خسيس — bas (I) 715, 16-18 ; 717, 2

خسر

خسر — perdre (I) 701, 19

خسران — perte (I) 701, 19

خص

الخاص، الخاصة — les hommes de science (II) 733, 4, 6

خط

خطٌّ ج خطوط — droite (I) 247, 17, 20, 21 ; 255, 5, 6, 8, 10-19 ; …

– على زاوية قائمة — perpendiculaire (I) 547, 2

خف

خفّ — faciliter la tâche (I) 663, 9

خل

خلّة ج خلال — propriété (I) 317, 13, 14

خلص

تخلّص إلى — le fait d'acquérir, d'atteindre (I) 245, 10, 22 ; 523, 17 ; 729, 7, 10

خلف

خُلف — absurde (I) 269, 12, 16 ; 499, 16 ; (II) 741, 12 ; 753, 9

خالف (نسبة) — inverser (rapport) (I) 345, 7 ; 369, 6

مختلف — différent, inégal (I) 261, 23 ; 265, 9 ; 269, 7, 14 ; 271, 18 ; 367, 21 ; 479, 1 ; 483, 20 ; 489, 2, 8 ; tout autre (II) 735, 15

خمس

خُمْس ج أخماس — cinquième (I) 249, 8 ; 319, 8, 9 ; 323, 11, 12 ; 325, 17 ; 349, 2 ; 371, 13 ; 375, 10-12 ; …

مخمّس (متساوي الأضلاع والزوايا) — pentagone (régulier) (I) 523, 7, 9, 12, 13 ; 525, 2, 3, 4 ; 527, 10 ; 529, 12-14 ; 531, 3 ; 533, 1 ; 535, 15-16 ; 539, 1-2, 4, 7-12 ; …

دبر

دبّر (تدبير) — considérer (I) 353, 4 ; procéder (I) 603, 23 ; 607, 9 ; 611, 1 ; 619, 7

دخل

داخل (انظر أيضًا وقع) — au-dessous (I) 269, 5, 6 ; à l'intérieur (I) 273, 4

درهم

درهم ج دراهم — dirham (I) 249, 7, 21, 22 ; 251, 19 ; 253, 11 ; 259, 11, 12, 21, 22 ; 261, 11-14 ; … ; (II) 735, 1, 2 ; 737, 1, 3-5, 8, 9, 23, 24 ; …

دفع

دفع — payer (II) 735, 2, 11, 13 ; 737, 1, 22 ; 741, 20 ; 749, 9 ; 751, 3 ; 753, 11

دق

دقّ على من يعمله — pénible, difficile à appliquer (I) 659, 16 ; 677, 21

دقيقة ج دقائق — minute (I) 549, 21 ; 551, 2, 3, 5, 6, 8, 9

دل

أدلّ على — indiquer (II) 733, 13

استدلّ — déduire (I) 369, 15 ; indiquer (I) 415, 8

دنر

دينار ج دنانير — dinar (I) 347, 11, 13, 14, 16 ; 371, 2, 4-6, 8 ; 397, 2, 3, 6… ; (II) 737, 4-7, 10, 11 ; 739, 1-8…

دور

دار — circuler (I) 579, 15 ; (II) 733, 4

دائرة — cercle (I) 523, 8, 9, 11, 19 ; 525, 1, 2, 4 ; 527, 12, 13, 17 ; 531, 3…

أدار (دائرة) — tracer (un cercle) (I) 527, 13 ; 529, 13 ; 533, 5

دون

دون — au-dessous (I) 247, 3

دوّن — consigner (I) 243, 18

ذرع

ذراع ج أذرُع — coudée (I) 559, 14

ذكر

ذكر — mentionner, exposer (I) 245, 11, 16 ; 247, 1 ; 251, 1 ; 269, 8 ; 415, 8 ; 489, 8 ; 501, 17 ; 563, 12 ; 565, 1, 12 ; 721, 4

ذهب

ذهب — s'annuler (I) 295, 13 ; 297, 13 ; 639, 16 ; être dissipé (II) 733, 17

مذهب — méthode (I) 579, 14 ; 659, 15, 16 ; 677, 20, 21

رأى

رأى — voir, trouver, constater (I) 243, 21 ; 245, 6 ; 283, 9 ; 287, 12 ; (II) 733, 3, 12 ; 755, 16, 17 ; 757, 1, 5, 15, 20 ; 759, 3, 8…

اجتهاد الرأي — l'application de la pensée (I) 243, 17

أرى — montrer (I) 307, 7

ربح

ربح — gagner (I) 701, 8 ; 707, 10 ; 717, 12-14 ; 719, 4-6 ;

ربح — profit (I) 701, 12, 19

ربع

ربع ج أرباع — quart (I) 251, 22 ; 253, 1, 6, 7 ; 275, 3, 8, 22 ; 277, 9, 10 ; … ; (II) 735, 6 ; 753, 17, 18

أربعة أمثال (انظر أمثال) — quadruple, quatre fois

مربع — carré (I) 267, 1, 3, 6 ; 263, 10 ; 271, 5, 8 ; 285, 17-19 ; 289, 7 ; 291, 3, 17 ; 293, 3, 17 ; … 435, 19 ; …

– قائم الزوايا متساوي الأضلاع — carré (I) 555, 8-10, 12 ; 557, 16, 18 ; 559, 1, 2

– مستطيل قائم الزوايا — rectangle (I) 553, 7-9 ; 555, 6

ربما — peut-être (II) 733, 9

رتب

رتّب — suivre un ordre (I) 683, 8 ; 689, 19

ترتيب — ordre (I) 681, 6, 14 ; 683, 3 ; 689, 19 ; 723, 14

رجع

رجع — reprendre, revenir (I) 349, 12 ; 371, 9 ; 391, 10 ; 393, 14 ; 395, 15 ; 397, 10 ; 429, 20 ; 431, 19 ; 437, 2 ; 439, 11 ; … ; (II) 733, 6 ; 743, 20 ; 745, 5, 19 ; 757, 23 ; 759, 7, 16, 22

رد

ردّ — ramener (I) 249, 4, 9, 14 ; 251, 13, 14, 17 ; 261, 9 ; 275, 12 ; 321, 13 ; 323, 10 ; … ; rendre, restituer (I) 675, 20-22 ; 677, 2, 4 ; 679, 2… ; venir (II) 735, 8 ; se poser (II) 755, 9

رسخ

رسخ — être enraciné (I) 599, 12 ; 625, 21

رسم

رسم — inscrire, consigner, retranscrire (I) 243, 21 ; 245, 16 ; 719, 17, 18 ; 729, 6 ; tracer (I) 527, 14 ; 533, 6 ; 535, 16 ; 549, 4 ; (II) 749, 7 ; 751, 1 ; 755, 16 ; 757, 1, 4, 9, 14, 16, 17 ; définir (I) 541, 7 ; 579, 18

رسْم — figure (II) 759, 7, 16

مرسوم — inscrit, retranscrit (I) 719, 11 ; 721, 2 ; 725, 1

رطل

رطل ج أرطال — livre (I) 699, 5-10, 13-18…

رفع

رفع — enlever (I) 387, 14, 15

أرْفع supérieur (I) 715, 16
مرتفِع supérieur (I) 715, 17, 19

ركب
ركّب (نسبة) composer (rapport) (I) 509, 19

ركز
مركز centre (I) 539, 3 ; 547, 2 ; 559, 15 ; 563, 3

رود
أراد (انظر أيضًا بيّن) vouloir (I) 253, 13 ; 257, 11 ; 259, 18 ; 281, 11 ; 299, 20 ; 301, 3, 5, 9, 13, 15 ; ... ; (II) 743, 12 ; 749, 8 ; 751, 1

روي
روي (رواية) réciter, redire (I) 579, 19 ; 719, 13

زوي
زاوية ج زوايا (انظر أيضًا مخمّس، شكل، معشر) angle (I) 523, 8, 10, 12, 14 ; 547, 8, 14
– قائمة (انظر أيضًا خط) – droit (I) 547, 11

زيد
زاد ajouter (I) 249, 21 ; 251, 3, 9, 16, 19, 22 ; 253, 6, 12, 17 ; 255, 14 ; ... ; (II) 733, 17 ; 739, 14, 16, 17, 20 ; 741, 1, 3, 5, 7...
ما زاد أو نقص pour plus ... ou moins (I) 285, 7 ; 301, 8
زيادة addition (I) 497, 8 ; 499, 3 ; 501, 14 ; 503, 6 ; ajout (I) 259, 23 ; (II) 743, 16 ; 745, 12, 15, 17 ; 749, 3 ; l'additif (I) 295, 13 ; excédent (I) 359, 21 ; 363, 2 ; plus (I) 675, 13, 15 ; 721, 12, 14, 16, 21 ; 723, 3, 17 ; somme (I) 259, 13 ; 265, 18 ; 267, 13, 15 ; 273, 3 ; 331, 13 ;
زائد qui excède (I) 249, 9, 14 ; additionné, ajouté (I) 281, 17 ; 283, 5, 6 ; additif (I) 283, 1, 2, 4, 8, 11, 12 ; 291, 8-10 ; 293, 12 ; ...
مُزاد auquel on ajoute (I) 425, 1, 13, 14 ; 429, 9 ; 441, 4 ; 491, 10 ; 493, 8 ; 521, 1 ; 549, 12 ; ...
مزيد ajouté (I) 589, 11, 12 ; 591, 5 ; 593, 3, 9 ; 595, 15 ; 597, 8 ; 603, 6 ; 619, 11 ; ...

زول
لا زال continuer (II) 739, 14, 17 ; 743, 15 ; 745, 16, 22 ; 749, 5 ; 759, 1

سأل
سأل interroger (II) 733, 5, 7 ; 735, 19, 21
سائل celui qui demande (II) 735, 7, 10, 18, 19, 21
سؤال question (I) 319, 13 ; 407, 8 ; 719, 14
مسألة ج مسائل problème (I) 245, 7, 11 ; 247, 11, 13 ; 249, 22 ; 251, 2, 18 ; 259, 12, 22, 23 ; ... ; (II) 733, 7-9, 14, 16, 18 ; 735, 4, 8 ; 737, 16, 20 ; ...

– غير محدودة – indéterminé (I) 579, 13 ; 581, 2 ; 583, 2 ; 585, 2, 10, 19 ; 587, 15 ; 589, 8 ; 597, 15-16 ; 601, 10 ; ...
– الست – les six problèmes (I) 321, 1-4
– سيّالة – fluide (indéterminé) (I) 579, 14
– صمّاء لا تخرج – irrationnel et sans solution (I) 617, 5, 17 ; 633, 5, 19 ; 701, 21
– عددية (أثواب، جيش، بريد، حوض) – numérique (I) 681, 1
– مفتوحة – rationnel (I) 617, 15 ; 701, 21
مسؤول recherché (I) 383, 20 ; celui qui est interrogé (II) 735, 18, 20

سبع
سُبع ج أسباع septième (I) 381, 18-20 ; 383, 1-3

سبل
سبيل voie (I) 729, 8
على سبيل d'après (I) 283, 9 ; selon la méthode (I) 641, 20

سدس
سُدس ج أسداس sixième (I) 349, 20 ; 351, 6-11 ; 401, 2 ; 411, 19, 20 ; ... ; (II) 743, 14, 18, 22 ; 745, 3, 11, 14 ; 747, 1, 4 ; ...
مسدّس hexagone (I) 565, 4, 6, 7

سطر
سطر ligne (II) 757, 20

سطح
سطح ج سطوح surface (I) 247, 15-20, 22 ; 255, 5-9 ; 257, 2, 4-7... ; rectangle (I) 499, 10-12, 15, 16, 18 ; 501, 4, 7, 9
– مربع – carrée (I) 247, 14 ; 255, 4 ; 257, 1, 11 ; 261, 17 ; 263, 6 ; 265, 4, 20 ; 269, 2 ; 271, 5 ; ...

سعر
سِعْر prix (I) 701, 7, 8, 13

سقط
سقط اسم الدينار/الدرهم le nom du dinar/du dirham a été ôté (I) 655, 23 ; 657, 12 ; 661, 8
تسقُط عن ... المؤونة s'épargner la difficulté (I) 337, 12 ; 339, 19-20
أسقط enlever, ôter (I) 251, 10 ; 253, 7, 24 ; 259, 7 ; 261, 4-7 ; 289, 12 ; 295, 15 ; 297, 15 ; ... ; (II) 741, 12

سلك
سلك ... هذا المسلك suivre cette voie (II) 755, 8-9

سمي

سمّى appeler, nommer (I) 387, 15 ; 483, 21 ; 579, 13

اسم nom (I) 247, 6 ; 283, 14 (انظر أيضًا بطل، سقط)

مسمّى nommé (I) 283, 14

سهل

سهُل être facile (I) 337, 11 ; 339, 19 ; 521, 13 ; 595, 2 ; 599, 12 ; 631, 9 ; (II) 749, 8 ; 751, 2

سهّل rendre aisé, faciliter (I) 245, 4 ; 523, 16 ; 579, 16 ; 581, 3 ; 659, 16 ; 677, 21 ; 727, 6 ; 729, 8 ; (II) 733, 13

سوي

سوى autre, différent de (I) 605, 8 ; 607, 1 ; sans (II) 743, 18

بالسوية également, à parts égales (I) 685, 2, 9, 17 ; 687, 5, 16 ; 689, 3

سَواء exactement (I) 321, 13 ; équivalent (I) 319, 15 ; même (I) 713, 10 ; 725, 7

مساوٍ égal (I) 247, 10, 11 ; 287, 12 ; 291, 4 ; 499, 16 ; 501, 5 ; 547, 4 ; 569, 6

متساوٍ égal (I) 247, 20, 21 ; 285, 18 ; 287, 11 ; 301, 20 ; 303, 10, 19 ; 325, 1 ; 447, 12 ; 499, 12 ; 527, 14…

متساوي الأضلاع والزوايا régulier (انظر مثلث، مخمس، معشر)

استوى être égal (I) 327, 3 ; 423, 5 ; 491, 13 ; 497, 6-8, 22 ; 499, 1, 3, 7 ; …

شبه

شبيه semblable (I) 353, 4 ; 369, 13

ما أشبهها analogues (I) 369, 13 ; 375, 18 ; 595, 1 ; 601, 7 ; 613, 12 ; 615, 8, 20 ; 617, 13 ; 623, 7 ; 625, 18 ; 633, 17 ; … ; (II) 733, 18 ; 735, 1, 4

شرح

شرح expliquer (I) 261, 15 ; 273, 17 ; 299, 16 ; 435, 3 ; 517, 16 ; 519, 7 ; 521, 13 ; 523, 6, 14 ; 603, 12 ; … ; (II) 733, 15 ; 745, 21 ; 749, 5

شرْح explication (I) 245, 7, 17, 18 ; 729, 4, 5

شرط

شرط remplir une condition (I) 679, 2

شرك

مشترك commun (I) 271, 13, 14 ; 277, 6 ; 335, 4 ; 355, 8 ; 359, 2 ; 365, 13 ; 369, 8 ; 511, 11

شري

اشترى acheter (I) 465, 11 ; 663, 10 ; 697, 14, 16, 19 ; 699, 12, 21, 22 ; (II) 735, 2, 14 ; 739, 1 ; 743, 1 ; 749, 12 ; 751, 6 ; 753, 2, 15, 19

شكل

شكل figure (I) 267, 14, 17 ; 285, 1 ; proposition (I) 307, 11 ; 309, 8 ; 311, 8 ; 343, 12 ; 571, 8

- متساوي الأضلاع polygone régulier (I) 539, 11-12 ; 545, 16-18 ; 547, 14-15
- عددي forme numérique (I) 367, 19
- هندسي figure géométrique (I) 249, 24 ; 259, 23-24 ; 273, 20-21 ; 729, 5

شي

شاء vouloir (I) 259, 19 ; 261, 7 ; 331, 5 ; 339, 18 ; 345, 13 ; 349, 11, 12 ; 363, 12 ; 371, 17 ; 373, 6 ; … ; (II) 737, 4, 6-13 ; 741, 13-18 ; 761, 5

شيء ج أشياء chose (I) 247, 2 ; 257, 14, 15 ; 271, 7, 8 ; 281, 10, 11, 14, 17, 18 ; 283, 1, 2… ; (II) 737, 4, 6-13 ; 739, 1-7…

شور

إشارة indication (I) 503, 19 ; 507, 13 (انظر أيضًا طريق)

صح

صح être vrai (I) 513, 1 ; être établi (II) 739, 11 ; être avéré (II) 733, 17

صحيح ج صحاح vrai, valide, correct (I) 501, 15 ; 503, 19 ; 507, 13 ; 579, 16 ; 659, 15 ; 677, 20, 21 ; 723, 4, 19 ; (II) 733, 15 ; entier (II) 735, 5 ; 751, 5 ; 753, 8 ; 755, 7

صحيحًا véritablement (I) 579, 19

أصح le plus valide (I) 245, 1

صحب

صاحب associé (I) 341, 8 ; 393, 2 ; 657, 17 ; (II) 757, 18 ; celui qui a (I) 675, 20, 21 ; 677, 1-3, 6, 9, 12, 15… ; auteur (I) 719, 12

صدق

أصدق le plus vrai (I) 245, 1

تصدّق faire l'aumône (I) 717, 12-14 ; 719, 4, 5, 7

صرف

انصرف abandonner (II) 735, 10

صغر

صغير ج صغار (شيء) petite (chose) (I) 411, 11, 13-15, 18 ; 413, 7, 10

أصغر plus petit (I) 321, 19 ; 325, 5, 7, 15 ; 327, 2, 4 ; 329, 2, 10 ; 335, 14 ; 337, 4, 5…

صفح

تصفّح examiner successivement (II) 735, 21

صم

أصمّ (انظر مسألة) irrationnel

صنف

صنف ج أصناف — sorte (II) 733, 3, 4, 13, 19 ; espèce (II) 735, 3, 6, 7, 12, 15, 17 ; 737, 2, 20, 23 ; 741, 21 ; …

صوب

صواب ج ات — solutions vraies, correctes (I) 579, 14 ; 581, 2-5 ; 595, 1 ; 597, 1 ; 601, 7 ; 605, 1 ; 609, 5, 14 ; 611, 5… ; (II) 733, 11, 14, 17 ; 739, 18 ; 741, 10, 12 ; 743, 11 ; 749, 21 ; 759, 5, 14…

أصاب — obtenir, de la part de (I) 353, 6-10, 14, 17, 20, 21 ; 355, 3, 10 ; …

صور

صورة ج صور — figure (I) 285, 10 ; 287, 12 ; 289, 1, 14 ; 291, 11 ; 293, 14 ; 295, 16 ; 297, 16 ; 301, 12 ; 303, 8 ; 305, 4 ; … ; (II) 751, 2 ; forme (I) 277, 12

صيّر — faire (I) 269, 6 ; 313, 10, 13 ; (II) 743, 13 ; 745, 2, 10 ; 747, 6 ; 757, 18

ضر

بالضرورة — par nécessité, nécessaire (I) 679, 4 ; 719, 1

ضرب

ضَرَبَ في — multiplier (I) 251, 7 ; 253, 4, 21 ; 273, 11 ; 281, 14, 19 ; 283, 17, 19, 21, 24 ; …

ضرب ... في مثله، في نفسه — multiplier par lui-même (I) 247, 3 ; 251, 3, 6-7, 9, 22 ; 253, 3, 5, 17, 20, 22 ;…

ضَرْب ج ضروب — produit, multiplication (I) 247, 4 ; 255, 10, 11, 15, 16 ; 257, 20 ; 259, 2, 3 ; 261, 13, 20-22 ; … ; mode (I) 245, 11 ; 247, 1, 6, 7 ; 249, 16, 17 ; 267, 15, 16 ; 273, 12 ; 281, 4, 8 ; …

- رابع — la quatrième multiplication (I) 281, 17 ; 283, 1-7, 9, 10

- في مثله — produit par lui-même (I) 255, 15-18 ; 259, 2-6 ; 261, 1, 2 ; …

مضروب — multiplié (I) 247, 15, 16 ; 255, 6, 7 ; 257, 12, 14, 16 ; 271, 6, 7, 9 ; …

ضعف

ضُعف ج أضعاف — double (I) 301, 11 ; 513, 10 ; 515, 2 ; 725, 3 ; (II) 739, 4

ضعّف، أضعف (إضعاف) — doubler (I) 253, 13, 14 ; 299, 19, 20 ; 301, 9, 13 ; 447, 10 ; 465, 8 ; 493, 8 ; 561, 3…

إضعاف — doublement (I) 725, 9, 18, 19

تضاعف — se multiplier (II) 733, 18

ضلع

ضلع ج أضلاع (انظر أيضًا مخمس، شكل، معشر) — côté (I) 247, 14-16 ; 255, 6 ; 499, 7 ; 523, 7, 8, 10-14 ; … …

ضم

ضم — réunir (I) 313, 6 ; 379, 1

ضيف

أضاف — ajouter (I) 255, 4 ; 257, 10 ; 265, 4 ; 269, 2 ; 271, 4 ; 503, 10 ; 655, 8, 10, 12 ; 657, 1, 3 ; …

طرف

طَرَف ج أطراف — extrémité (I) 547, 3, 9

طرق

طريق — méthode, voie (I) 505, 4 ; 521, 12 ; 729, 8

- الجبر — de l'algèbre (I) 501, 15

- إشارة — de l'indication (I) 503, 19 ; 507, 13

- الهندسة — de la géométrie (I) 505, 7 ; 509, 6 ; 723, 4

طلب

طلبَ — chercher (I) 589, 9 ; 593, 1 ; 595, 5 ; 597, 17 ; 599, 14 ; 603, 4 ; 605, 13, 20 ; 607, 11 ; … ; (II) 737, 21 ; 743, 19 ; 749, 8 ; 751, 2

طلبٌ — recherche (I) 581, 3 ; 599, 11

مطلوب — cherché (I) 323, 13, 16, 18 ; 325, 3 ; 333, 18 ; 381, 5 ; 385, 7 ; 387, 18 ; 429, 17 ; 459, 9 ; …

طير

طير ج طائر — volatiles (II) 735, 2, 6, 7 ; 737, 2, 6-8, 22 ; …

طال

طال — augmenter (II) 733, 19

طول — longueur (I) 247, 15 ; 553, 7, 9 ; 555, 6

زيد في طول — augmenter la longueur (I) 255, 14 ; 259, 1 ; 275, 19 ; 279, 14 ; 329, 7 ;

أطول — allonger, prolonger (I) 563, 13 ; 571, 11
plus long, plus grand (I) 261, 19 ; 265, 6 ; 499, 7, 13-15 ; 501, 1, 3 ; 569, 3, 4

ظرف

استظرف — trouver ingénieux (II) 733, 5

ظن

ظنّ — conjecture (II) 733, 6

ظنة — soupçon (II) 733, 17

عدّ

عدّ — mesurer (I) 309, 14, 15 ; 311, 14, 15, 17 ; 341, 14, 15, 18 ; 345, 5, 6, 8 ; 507, 1-4…

عدد ج أعداد — nombre (I) 247, 2, 5, 8, 10, 15 ; 249, 10, 11, 16, 18, 20 ; … ; (II) 735, 16, 18, 19 ; 737, 6-8, 18, 19 ; …

عدد مربع — nombre carré (I) 313, 7, 12

عددي (انظر شكل) — numérique

عدّة — nombre (I) 285, 15 ; 287, 7 ; 703, 1, 3, 9, 10 ; 709, 9, 10, 13, 15, 16 ; (II) 743, 21 ; 745, 6…

عدل

عدل — être égal (I) 247, 7-9 ; 249, 1-3, 6-8, 11-13, 18… ; (II) 737, 9-11 ; 739, 4 ; 749, 16, 18 ; 753, 5, 22

عادل — être égal (I) 249, 4, 10, 15, 17 ; 253, 14 ; 255, 1 ; 657, 14 ;

اعتدل — être égal (I) 497, 20

عذر

تعذّر — être difficile (I) 579, 4 ; être hors de portée (I) 523, 15

عرف

عَرَفَ — connaître (I) 527, 12 ; 719, 12, 14 ; (II) 733, 12 ; distinguer (I) 337, 11

معرفة — le fait de connaître, connaissance (I) 243, 19 ; 245, 6, 9, 19, 22 ; 281, 11 ; 523, 5 ; 535, 17 ; 543, 2 ; 559, 3 ; … science (I) 245, 2

أهل المعرفة — les savants (I) 243, 15

معروف — connu (I) 243, 3 ; 245, 1 ; (II) 733, 3

عزل

عزل (الأجذار) — isoler (les racines) (I) 709, 1-3, 5

عسر

عسرٌ — être difficile (I) 523, 17

معسّر — difficile (I) 245, 4

عشر

عُشر ج أعشار — dixième (I) 375, 10-13 ; 377, 5, 6 ; 391, 9, 11 ; 399, 18-20 ; 437, 19, 21 ; … ; (II) 737, 10-12 ; 743, 3, 6, 8, 10, 14, 17, 22 ; …

معشر متساوي الأضلاع والزوايا — décagone régulier (I) 523, 7, 9, 12, 13 ; 533, 4-7, 14 ; 543, 9-11, 20 ; …

عطى

أعطى (إعطاء) — donner (I) 655, 3-5, 8, 12 ; 657, 1 ; 659, 1 ; 661, 13 ; 663, 11-15…

عظم

أعظم — plus grand (I) 265, 5 ; 321, 8, 18 ; 325, 5, 7, 15 ; 329, 2, 10 ; 337, 4, 5…

استعظم واستفظع — trouver excessif et choquant (II) 733, 12

عقب

تعاقب — se rapporter (I) 283, 14

عل

عِلّة ج عِلَل — cause (I) 249, 23 ; 255, 3 ; 257, 9 ; 261, 11 ; 271, 3 ; 273, 3, 5, 20 ; 275, 14 ; 279, 3 ; 281, 4 ; 339, 6 ; 351, 18, 19, 22 ; …

علم

عَلِمَ — savoir, connaître (I) 243, 17 ; 245, 20 ; 251, 17 ; 257, 11 ; 259, 20 ; 283, 13 ;

301, 15 ; 303, 11 ; 309, 6 ; 313, 6, 19 ; 315, 16 ; … ; remarquer (II) 733, 11

علْم ج علوم — science (I) 243, 16 ; 523, 16

عالِم ج عُلماء — savant (I) 243, 20 ; 245, 20 ; 523, 6 ; 729, 7 ; (II) 733, 4 ; ceux qui sont instruits (I) 719, 15

معلوم أن — on sait que (I) 383, 15 ; 439, 3 ; 497, 8, 13 ; 499, 7 ; 525, 5, 7 ; 635, 17, 22 ; …

معلوم — connu (I) 299, 19 ; 301, 1-7 ; 523, 8-13, 19 ; … ; (II) 735, 16

أعلم (تعليم) — apprendre (I) 325, 8 ; 339, 18 ; 599, 12 ; 601, 6 ; 611, 6 ; 625, 21 ; 627, 15 ; 631, 11 ; 729, 9 ; indiquer (II) 733, 16 ; 753, 10

عمّ

العام، العامة — les hommes du commun (II) 733, 4, 7

عمد

عمود — hauteur (I) 551, 12, 13, 16 ; 553, 5 ; 561, 9 ; 565, 15 ; 569, 11 ; 573, 5 ; 575, 7 ; perpendiculaire (I) 573, 1

عمل

عملَ — procéder, construire, faire (I) 255, 1 ; 257, 1, 11 ; 271, 5 ; 275, 12 ; 277, 1 ; 279, 5 ; 299, 17 ; 301, 15 ; 303, 12 ; 305, 1 ; … ; (II) 755, 8 ; 761, 5

عمل ج أعمال — pratique (I) 595, 2 ; procédé (I) 337, 11 ; 339, 19 ; 353, 4 ; 369, 15 ; 435, 10, 11 ; 521, 11, 13 ; 623, 6, 7 ; 639, 1, 2 ; … ; (II) 733, 13, 15

استعمل — utiliser (I) 663, 8

عمي

عمّى عن العلّة — cacher la cause (I) 725, 7-8

عني

أعني — c'est-à-dire (I) 267, 14 ; 579, 14 ; 637, 9, 18 ; 641, 17 ; 663, 8 ; (II) 735, 5

معنى ج معانٍ — notion (I) 243, 17 ; (II) 733, 18

معناه، معنى ذلك — cela signifie (I) 247, 10 ; 249, 21 ; 251, 15, 19 ; 253, 12 ; 259, 11 ; 287, 15 ; 299, 20

عود

عاد — retrouver (I) 309, 6 ; 347, 5 ; 385, 9 ; 387, 2 ; 389, 8 ; 395, 17 ; 397, 12 ; 403, 19 ; 413, 17 ; 419, 9 ; 481, 20 ; ramener (I) 385, 11

من عادة، من عادات — en usage (I) 337, 10 ; avoir l'habitude (I) 339, 19

عوص

اعتاص — être ardu (I) 729, 7

عين

بعينه — exactement (I) 259, 22 ; même (I) 267, 19 ; 623, 9

عيانًا — d'une manière évidente (I) 257, 1 ; 263, 6 ; 265, 19 ; 285, 1

غلق

انغلق — être d'accès difficile, inaccessible (I) 523, 4 ; 729, 7

منغلق — voilé (I) 245, 4 ; clos (I) 245, 10, 19

غير — moins (I) 347, 12, 13 ; 395, 8 ; 405, 13 ; 517, 20

غوي

ما لا غاية — sans fin (II) 735, 8

فتش

تفتيش — le fait d'inspecter (I) 243, 21

فرد

مُفرَد — binôme (I) 281, 5 ; seul (I) 281, 15

فرسخ

فَرْسَخ ج فراسخ — farsakh (I) 691, 2, 3, 5, 6, 8, 12, 13, 15-19 ; ...

فرع

فرّع — dériver (I) 245, 10 ; 521, 12 ; 729, 7

فرغ

فَرَغ (فراغ) — achever (I) 339, 6-7 ; (II) 755, 11

فرق

فرق — distribuer (II) 735, 11

فَرْق — différence (I) 351, 18

فسر

فسّر — expliquer (I) 285, 5 ; 309, 4 ; 311, 4 ; 375, 18 ; 503, 11 ; 521, 11 ; 595, 19 ; 599, 21 ; 613, 21 ; 623, 6 ; ... ; (II) 749, 3

تفسير — explication (I) 245, 18

فصل

فصلَ (نسبة) — séparer (rapport) (I) 369, 6

فضل

فضلَ على — excéder, surpasser (I) 681, 10, 11 ; 689, 13-15, 22

فَضْل — excédent, différence (I) 353, 3, 10, 21 ; 355, 3, 9, 15 ; 357, 6, 14, 19, 22 ; ... ; éminence (I) 245, 2

تفاضل — être supérieur, excéder (I) 373, 18 ; 681, 2, 8, 17 ; 683, 5, 11 ; 685, 1, 7, 16, 19 ; 687, 3...

تفاضُل — excédent (I) 681, 19 ; 683, 14 ; 689, 16

فعل

فعلَ — faire, procéder (I) 249, 4, 10, 15 ; 515, 18 ; 575, 4 ; 623, 4 ; 725, 7, 21 ; 727, 11 ; (II) 739, 17 ; 743, 15 ; 745, 20-22 ; 749, 5 ; 755, 9 ; 757, 6, 11 ; 759, 1, 9...

فلس

فلْس — fels (I) 397, 3, 4 ; 407, 7, 9, 10 ; 409, 18, 19 ; 411, 1...

فن

فنّ — art (I) 415, 8 ; 595, 2 ; 643, 15 ; 663, 7, 9 ; (II) 735, 8

فنى

فناء — disparition (II) 735, 8

فهم

فهم — comprendre (I) 249, 24 ; 285, 10 ; 371, 19 ; 523, 17 ; 539, 12 ; 549, 20 ; 579, 19 ; 587, 11 ; 605, 5

فوق

فَوْق — au-dessus (I) 247, 3

قبل

قَبْل — avant (I) 623, 6

الذي قبله — qui précède, précédent (I) 343, 12 ; 351, 18 ; 393, 3 ; 571, 8 ; 725, 8 ; (II) 747, 5

قابل — réduire (I) 347, 7, 15, 21 ; 349, 11, 14 ; 379, 5, 9 ; 381, 3 ; 387, 8 ; 389, 9, 17 ; 395, 19 ; 397, 4, 14 ; 399, 4, 21 ; 405, 1 ; ... ; (II) 737, 10 ; 739, 5 ; 743, 7 ; 753, 3, 21

مقابلة (انظر أيضًا جبر) — réduction (I) 477, 3 ; 529, 8 ; 607, 14 ; 639, 16 ; 641, 9 ; 643, 14 ; 647, 3 ; 649, 14 ; 661, 19 ; (II) 743, 7 ; 753, 4, 22

قدر

قدر — grandeur (I) 307, 18, 20, 21 ; 309, 15 ; 311, 15, 17, 18 ; 313, 2, 3 ; 341, 15... ; 523, 7, 9, 10, 13, 19 ; ... ; rapport (I) 373, 10, 11, 13 ; quantité (I) 311, 14, 15, 17

مقدار — grandeur (I) 525, 3

قدم

تقدمة — priorité (I) 245, 2

قدّم — introduire (I) 513, 1

تقدّم — précéder (I) 513, 4 ; 517, 16 ; 521, 13

فيما تقدّم — précédemment (I) 377, 6, 11 ; 407, 3-4 ; 435, 10 ; 541, 3 ; 559, 19-20 ; 563, 5 ; 603, 12 ; 611, 6 ; 613, 12, 21 ; ... ; (II) 745, 4, 12 ; 749, 21

المتقدّمون — les Anciens (I) 579, 5 ; ceux qui sont avancés (I) 523, 5, 16

قرب

قرّب — approcher (I) 245, 4 ; rendre accessible (I) 727, 6 ;

donner une approximation (I) 549, 20
تقريب approximation (I) 549, 21 ; 551, 3, 5, 7, 10
أقرب مأخذه rendre accessible (II) 733, 13

قرن

مقرون combiné (I) 429, 18 ; trinôme (I) 281, 6
اقترن se combiner (I) 249, 17

قسم

قَسَمَ، قسّم partager, diviser (I) 247, 19 ; 285, 14, 15 ; 287, 6, 7 ; 309, 7, 10, 12, 18 ; …
– بنصفين – en deux moitiés (I) 255, 13-14 ; 257, 21 ; 259, 1 ; 261, 22, 23 ; 265, 8 ; 269, 4, 7, 14 ; 271, 16-17 ; …
ما يخرج من القَسْم quotient (I) 309, 6, 10 ; 311, 9, 16 ; 313, 9 ; 325, 5, 8-9 ; 339, 1 ; 341, 9 ; 343, 20 ; … ; division (I) 269, 5
قِسْمٌ ج أقسام partie (I) 247, 20 ; 261, 23 ; 265, 9 ; 269, 7, 14 ; 271, 18 ; 285, 14, 15 ; 287, 7, 8 ; 303, 10 ; …
قسمة division (I) 273, 4 ; 311, 10 ; 337, 10 ; 339, 18 ; 343, 4 ; 391, 7… ; (II) 735, 15
مقسوم divisé (I) 309, 7, 8, 11, 12, 19 ; 311, 10 ; 353, 12, 13 ; 357, 6, 8, 9 ; …
المقسوم dividende (I) 341, 9, 10 ; 347, 5 ; 359, 12 ; 391, 2, 18 ; 393, 2 ; 439, 7 ; 467, 9, 11, 15 ; …
المقسوم عليه diviseur (I) 309, 6, 11, 12 ; 311, 10 ; 325, 9 ; 341, 10 ; 347, 5 ; 367, 22 ; 369, 1, 2 ; …
انقسم se partager ; être divisé (I) 559, 17 ; 617, 5, 14, 16 ; 633, 3, 4, 17, 19 ; 701, 18, 21 ; …
اقتسم أثلاثًا partager en trois (I) 675, 22 ; 677, 4, 11 ; 679, 2
اقتسم بالسوية partager également (I) 685, 2

قصد

قصد but (II) 755, 5

قصى

استقصى examiner exhaustivement (II) 733, 10 ; 755, 11

قضى

انقضاء être épuisable (II) 735, 8

قطر

قُطْر ج أقطار diamètre (I) 523, 9, 19 ; 525, 1 ; 527, 13 ; 529, 2, 14 ; 533, 2, 5 ; 535, 13, 15, 17, 18 ; …
نصف قطر demi-diamètre (I) 529, 22 ; 539, 3, 5 ; 561, 8 ; 563, 11 ; 575, 2

قطع

قَطَعَ couper (I) 275, 16 ; 277, 13 ; 279, 8 ; 297, 4 ; 303, 16

قعد

قاعدة base (I) 547, 6, 7 ; 567, 12

قفز

قفيز ج أقفزة (حنطة) mesure (de farine) (I) 701, 6, 9, 10, 13, 17 ; 703, 1-3, 5, 6…

قلد

قلّد imiter (I) 579, 19 ; 719, 13

قل

قلّ diminuer (I) 249, 4 ; être plus petit (I) 499, 2
قليل (شيء) petit (I) 407, 14-16 ; 411, 5, 6, 9, 10 ; 413, 2, 5 ; 425, 4…
أقلّ plus petit, moins (I) 251, 13 ; 259, 21 ; 261, 9, 12 ; 265, 3, 17 ; 267, 12, 16 ; 275, 12 ;… ; (II) 735, 2, 3, 11, 12, 19 ; 737, 17 ; 739, 8, 18 ; 741, 12 ; 753, 7 ; 755, 4…

قنع

قنع se contenter (II) 735, 7
مقنع convaincant (I) 579, 14 ; 729, 5

قول

قال dire (I) 251, 13, 18 ; 253, 11 ; 255, 16 ; 257, 1 ; 259, 3, 23 ; 263, 1, 6 ; 265, 10… ; (II) 733, 3 ; 735, 2, 4, 11, 14, 22 ; 737, 1, 22 ; …
قَوْل ج أقاويل discours (I) 729, 5 ; le fait de dire (I) 247, 7, 9 ; 249, 1, 6, 7, 11, 13, 17, 20 ; 251, 15 ; … ; (II) 733, 19 ; 745, 4 ; 753, 11 ; énoncé (I) 377, 9, 11 ; affirmation (II) 733, 17
مقالة livre (I) 255, 16 ; 259, 3 ; 263, 2 ; 265, 10 ; 269, 8 ; 275, 20 ; 305, 16

قوم

قيمة valeur (I) 373, 18, 20 ; 375, 1, 2, 4-7 ; 377, 1, 3, 5 ; 657, 11, 14, 15, 19 ; …
قام مقام … avoir à la place (I) 655, 23 ; 657, 13 ; 661, 3, 8
قام بالاعتبار مقام … tenir lieu à cet égard (I) 599, 1, 3
قائمة (العلة) établie (la cause) (I) 507, 13 ; 579, 15 ; 617, 9 ; 723, 4, 19
قائم الزوايا à angles droits (I) 291, 2
القائم بنفسه ce qui existe en lui-même (I) 247, 5

قوى

قوي pouvoir (I) 575, 5
تقوى donner plus de force (I) 367, 19

قيس

قياس inférence (I) 245, 1, 10, 19 ; 281, 4 ; 579, 14, 19 ; 659, 16 ; 677, 21 ; (II) 733, 6
قياسه on l'infère ainsi (I) 321, 8 ; 323, 8 ; 325, 7 ; 327, 4 ; 329, 14 ; 333, 4 ; 335, 14 ; 337, 19 ; 351, 1 ; 353, 9 ; 357, 4 ; 359, 21 ; … ; (II) 737, 4 ; 739, 1 ; 743, 1 ; 749, 12 ; 753, 15

مقايسة raisonnement (I) 523, 5

كبر

كبير (شيء) grand (I) 411, 9-15 ; 413, 6, 8-10 ; …

أكبر plus grand (I) 321, 15 ; 335, 14 ; 337, 11, 15 ; 357, 21 ; 359, 1, 2, 12 ; 361, 1, 14 ; 365, 1…

كتب

كَتَبَ écrire (II) 757, 17

كتاب ج كُتُب livre (I) 243, 3, 12, 20, 21 ; 245, 3, 12-14, 16, 17 ; … ; (II) 733, 12 ; 753, 10

كثر

كثرَ augmenter (I) 249, 4 ; 659, 16 ; 663, 7, 19 ; 669, 5 ; 677, 21 ; (II) 733, 19 ; être plus grand (I) 499, 2

كثير grand (I) 407, 14, 15 ; 411, 5, 6, 11 ; 413, 1, 2, 5, 7 ; 425, 3… ; nombreux (I) 245, 11 ; (II) 733, 6, 10

كثيرًا beaucoup (I) 281, 7 ; 337, 12

أكثر plus, plus grand (I) 251, 13 ; 261, 9, 12, 16, 18 ; 265, 2, 18 ; 267, 10, 13 ; 273, 5, 16 ; … ; (II) 733, 9 ; 735, 2, 3, 11, 12, 18 ; 737, 20 ; 741, 11 ; 753, 8 ; …

كرو

كراء salaire (I) 707, 1 ; 713, 17 ; 717, 4, 6

كسر

كسر ج كسور fraction (I) 247, 3-5 ; 285, 7, 8 ; 583, 5 ; (II) 735, 5 ; 737, 18 ; 753, 8

كشف

كشفَ dévoiler (I) 245, 9, 21

انكشف الصواب la vérité se dévoile (II) 733, 17

كعب ج كعاب، أكعُب cube (I) 387, 7, 8 ; 445, 2-7, 9, 10, 22 ; 447, 1…

كعب كعب cubo-cube (I) 445, 4 ; 455, 10, 14-18, 20 ; 457, 20, 21 ; 459, 1-3… ; 525, 17 ; 527, 2

كل

كلّ tout entier, ensemble (I) 249, 1 ; 257, 7 ; 279, 1 ; 287, 15 ; 291, 10 ; 323, 1 ; 377, 3…

كم

كَم combien (I) 283, 16 ; 285, 2, 3 ; 287, 1, 17 ; 289, 10 ; 291, 6 ; 293, 7 ; 297, 9 ; 299, 7 ; … ; (II) 735, 13, 14, 16

كميّة (قدر) grandeur (I) 527, 12 ; 529, 12 ; 533, 4 ; 535, 15 ; 541, 1

كمل

أكملَ / إكمال (مالاً) compléter (le *carré*) (I) 253, 13 ; 349, 1 ; 351, 11, 12 ; 363, 9 ; 375, 13 ; 379, 17 ; 381, 17 ; 399, 21 ; 405, 2 ; 433, 6… ; rendre entier (I) 527, 3 ; 551, 17, 18 ; 557, 1, 2 ; 561, 15 ; 571, 1 ; 573, 10…

كامل (مال) entier *(carré)* (I) 349, 1

كون

كائن obtenu (I) 571, 12

مكان place (I) 657, 14 ; 665, 21 ; 667, 5 ; (II) 759, 4

كيف

كَيْف comment (I) 281, 14, 16 ; 549, 20 ; 581, 3 ; 609, 11

لحم

ملتحم qui se rattache (I) 245, 19

لقي

ألقى ôter, retrancher (I) 271, 12 ; 335, 13 ; 341, 3 ; 355, 7 ; 359, 2, 13 ; 365, 12 ; 371, 7 ; 381, 9, 15 ; 383, 8… ; (II) 739, 15, 21 ; 741, 1, 4, 6, 8

ألقي على poser (I) 319, 14, 15 ; 609, 21

التقى se rencontrer (I) 671, 1 ; 673, 15

مثل

مثل égal (I) 247, 10, 12 ; 255, 11 ; 257, 3, 4, 12, 15, 16, 19, 20 ; 259, 2… ; (II) 737, 8 ;

مثل ج أمثال exemple (I) 247, 9 ; 249, 2 ; 251, 15 ; fois (I) 247, 18, 19 ; 449, 6, 9 ; 451, 18, 19 ; 475, 1 ;…

مثلان double (I) 405, 17 ; 407, 3 ; 425, 16, 18 ; 453, 10 ; 457, 8 ; 589, 10 ; 591, 7 ; 595, 6……

ثلاثة أمثال triple (I) 449, 6, 8 ; 451, 17 ; 453, 9, 11 ; 457, 7 ; 473, 14 ; 593, 2, 3 ; 595, 7 ; …

أربعة أمثال quadruple (I) 301, 17, 22 ; 325, 16 ; 443, 18 ; 445, 16-17 ; 453, 10, 13 ; 457, 9-10 ; … ; (II) 737, 13, 17

خمسة أمثال quintuple (I) 325, 16 ; 443, 7 ; 475, 16, 18 ; 571, 12 ; 673, 19

مثال ج أمثلة exemple (I) 301, 8, 9 ; 305, 1 ; 307, 15 ; 309, 12 ; 311, 7, 11 ; 341, 11 ; 343, 6 ; 345, 3 ; 497, 11 ; 499, 4 ; … ; (II) 739, 20 ; 751, 6 ; 757, 1, 16

مثّل représenter (I) 269, 1

محن

امتحان le fait de vérifier (I) 601, 15, 18

مر

مر passer (I) 547, 2

مرة ج مرات fois (I) 257, 12, 15, 17 ; 271, 6, 8, 9 ; 281, 19, 20 ; 321, 7, 10… ; (II) 743, 13 ; 745, 2 ; 747, 6 ; 757, 6

خمس مرات اثنين — cinq couples (I) 723, 14

مسح

مِساحة — aire (I) 523, 12, 13 ; 551, 11, 15 ; 555, 8, 10, 11, 13, 14 ; 557, 16-18, 21 ; ...

مكن

أمكن — pouvoir, être possible (I) 269, 12, 13, 16 ; 299, 17 ; 313, 7, 10 ; 499, 16, 17 ; 601, 7 ; 605, 4 ; 613, 11 ; 617, 4 ; 621, 19 ; ... ; (II) 733, 14, 15 ; 735, 7, 15, 22 ; 739, 8 ; 741, 12 ; 743, 16 ; 745, 4, 12, 22 ; 749, 2...

ممكن — possible (II) 735, 20

منع

امتنع — être interdit (I) 523, 17 ; être impossible (II) 733, 9

مس

ماس — toucher (I) 547, 2

مول

مالَ إلى — aborder (II) 755, 11

مال ج أموال — *carré* (I) 247, 2, 4, 6, 8-12 ; 249, 1-4... ; 445, 3 ; ... bien (I) 395, 17 ; 397, 12 ; 403, 19 ; 413, 17 ; 419, 9 ; 677, 1, 7, 9 ; 679, 1, 10...

– تامّ — – entier (I) 253, 13 ; 375, 13 ; 379, 18 ; 381, 18 ; parfait (I) 433, 6 ; 577, 1

مال مال — *carré-carré* (I) 425, 19, 20 ; 427, 1-4, 18, 19, 22 ; 433, 2 ; 445, 4 ; ...

مال مال مال مال — *carré-carré-carré-carré* (I) 479, 15, 16, 19-21 ; 561, 14, 17 ; 571, 1, 3-4 ; 573, 10, 12 ; ...

رأس المال — capital (I) 465, 12 ; 701, 12, 18, 19 ; 717, 15, 16 ; 719, 2-4, 9

مربع المال — le carré du *carré* (I) 479, 16-19

المال المعتبر به — *carré* auxiliaire (I) 621, 11

نحو

نحو — voie (I) 603, 23 ; type (I) 607, 9 ; manière (I) 639, 1 ; mode (I) 641, 9

كنحو — de la manière, comme, d'après (I) 275, 12 ; 377, 11 ; 379, 9 ; 397, 14 ; 501, 17 ; 503, 11 ; 521, 13 ; 559, 8

نحوه — choses semblables (II) 755, 9

ناحية — côté (I) 505, 1 ; manière (I) 621, 18 ; mode (II) 755, 12, 13

من الناحية الأخرى — de l'autre membre (I) 661, 1, 5 ; 665, 18 ; 667, 10 ; 669, 11, 18 ; 671, 21

نزل

بمنزله — à la place de (I) 283, 17, 19, 20 ; 285, 2, 4, 7, 8 ; 287, 1 ; 301, 1 ; 377, 9, 11 ; ...

نسب

نسبة — rapport (I) 305, 11-14 ; 345, 9, 10 ; 369, 5-7 ; 509, 13, 15 ; ... ; raison (I) 569, 1

– ذات وسط وطرفين — en moyenne et extrême raison (I) 563, 13, 14 ; 565, 1, 2, 5, 7-9 ; 567, 15, 16 ; 569, 2, 5 ; 571, 11

منسوب إلى — rapporté à (I) 247, 6

ناسبٌ — convenir (I) 637, 9

تناسبٌ — proportionnalité (I) 641, 16

على تناسب — d'une manière qui convient (I) 637, 2, 17

متناسب — proportionnel (I) 305, 17

نسق

نَسق — ordre (I) 637, 8 ; 721, 1, 7 ; 723, 2 ; 725, 9

نصف

نِصْفٌ (انظر أيضًا قطر) — moitié, demi (I) 249, 1, 13 ; 251, 4, 11, 17, 18, 22 ; 253, 1, 2, 5... ; (II) 735, 5 ; 737, 10, 11 ; 739, 2, 5, 6 ; 743, 2, 3, 7...

نصّف — partager en deux moitiés (I) 251, 2, 8, 21 ; 253, 5, 16, 22 ; 259, 15, 20 ; 261, 3 ; 275, 1 ...

تنصيف — division en deux moitiés (I) 337, 12 ; 339, 20

نظر

نَظَرَ في — examiner (I) 249, 24 ; 281, 11 ; 307, 7, 8 ; 311, 3, 4 ; 579, 19 ; 663, 9 ; 719, 13

أنعم النظر في — examiner en profondeur (I) 243, 16

ناظر — celui qui examine (I) 247, 1

نظم

نظام — ordre (I) 725, 20

نفر

نفر — individus (I) 655, 2 ; 663, 10 ; 671, 1 ; 673, 15 ; 675, 19

نفع

كثير المنفعة — très utile (I) 641, 10; 653, 19-20

نقص

نقص — soustraire, retrancher (I) 251, 4 ; 253, 1, 18 ; 259, 16, 17 ; 281, 16 ; 285, 7 ; 315, 9, 15 ; 319, 3, 10 ; ...

نُقْصان — diminution (I) 259, 23 ; différence (I) 259, 13 ; 265, 18 ; 267, 13, 14 ; 353, 9 ; 355, 14 ; 357, 4 ; 359, 8 ; ... ; le soustractif (I) 295, 13 ; soustraction (I) 273, 3 ; 313, 11 ; 319, 16 ; 497, 8 ; 499, 3 ; 501, 14 ; 503, 6

ناقص — soustrait (I) 281, 15, 16 ; 283, 1, 3, 5, 7 ; soustractif (I) 283, 2, 3, 6-8, 11 ; 293, 10-12 ; 295, 13, 14 ;... ; moindre (I) 249, 9, 14

منقوص — soustrait (I) 419, 17 ; 421, 14, 16 ; 423, 2, 12, 14 ; 427, 11 ; 429, 8 ; 433, 11 ; 437, 1, 4...

نقط

نقطة — point (I) 255, 13, 14 ; 257, 2 ; 259, 1 ; 261, 23 ; 265, 20 ; 269, 5-7, 12, 14, 17 ; ...

نهب

انتهب — acquérir (I) 675, 20-22 ; 677, 1, 9 ; 679, 1, 10-13, 15 ; ...

نهي

ما لا نهاية له — indéfiniment (I) 605, 5 ; infinité (I) 607, 16 ; à l'infini (I) 637, 9-10, 20

انتهى — aboutir (I) 497, 13 ; 547, 3 ; 721, 3, 11, 12 ; 727, 3 ; devenir (I) 501, 21 ; achever (I) 579, 4 ; (II) 739, 18 ; 741, 9 ; 743, 15, 20 ; 745, 3, 11, 17, 21, 23...

انتهاء — fin (II) 757, 21

نوع

نوع — espèce (I) 299, 17 ; 305, 1 ; 309, 4 ; 311, 7 ; 581, 20

هندس

هندسة — géométrie (I) 505, 7 ; 509, 6 ; 523, 16 ; 719, 15 ; 723, 4

المهندسون — les géomètres (I) 249, 24 ; 523, 6, 15

هيأ

تهيأ — pouvoir (II) 735, 18, 20 ; convenir, admettre (solution) (II) 737, 16 ; 739, 13

وتر

وتّر — intercepter (I) 533, 8 ; 541, 4 ; 549, 1, 5

وتر ج أوتار — corde (I) 523, 10, 19 ; 525, 4 ; 527, 12-14, 16 ; 529, 1, 11, 12, 16 ; ...

وجب

وجب (وجوب) — être du devoir de (I) 245, 1, 21 ; s'ensuivre (I) 513, 4, 10, 15, 20 ; 521, 7 ; 563, 10 ; 667, 5 ; 677, 8 ; 681, 8 ; ... ; falloir (II) 737, 15, 19 ; 739, 10 ; 755, 3

واجب — nécessaire (I) 383, 16 ; 635, 14, 19

وجد

وجد — trouver (I) 243, 15 ; 249, 16 ; 307, 7, 8 ; 311, 4, 5 ; 317, 14 ; 415, 7 ; 549, 21 ; 551, 3... ; (II) 733, 10

موجود — qui se trouve (I) 317, 15

وجه

وجه ج وجوه — modes (I) 243, 17 ; (II) 755, 11 ; 759, 21, 22, 24 ; 761, 3 ; manière, méthode (I) 347, 10 ; 349, 7 ; 369, 13, 14 ; 373, 10 ; 375, 18 ; 377, 15 ; 381, 1 ; 429, 10 ; 431, 9 ; ... ; (II) 747, 4 ; voie (II) 735, 10 ; démarche (II) 747, 5

جهة — manière (I) 345, 13 ; 387, 5 ; 439, 3 ; 451, 10 ; 493, 19 ; 497, 5, 19 ; membre (I) 669, 10 ; 671, 15 ; 673, 3

وحد

واحد — unité, un (I) 247, 15, 16, 21 ; 255, 7 ; 271, 6, 9 ; 275, 2... ; seul (I) 249, 4, 7 ; (II) 733, 7, 15 ; 737, 15, 16

ودع

ودع — laisser (I) 243, 16 ; (II) 749, 4

ورد

ورد — parvenir (I) 617, 13 ; 633, 2, 16 ; (II) 733, 9

وزي

وازى — être parallèle (I) 279, 9 ; 299, 1 ; 303, 15, 17 ; 499, 10 ; 501, 7

موازٍ — parallèle (I) 277, 2, 15 ; 285, 16, 17 ; 287, 9, 10 ; 291, 15, 16 ; 293, 21 ; 295, 1 ; 305, 6, 8 ; ...

وسط

أوسط (انظر أيضًا نسبة) — moyen (I) 479, 2-6, 8, 14 ; 481, 4-6, 8-11, 13 ; ...

وصف

وصَفَ — décrire (I) 267, 14 ; 273, 11 ; 275, 17 ; 317, 14, 16 ; 319, 10, 12 ; 347, 9, 15 ; 375, 15 ; ... ; (II) 739, 13 ; 759, 19

واصف — qui décrit (II) 755, 11

صِفة — propriété (I) 369, 13 ; 501, 11 ; 507, 5

وصل

وصل (وصول) إلى — parvenir à (I) 245, 10, 21 ; 719, 18 ; 729, 5 ; saisir (I) 523, 17

وصل بـ — joindre (I) 535, 18 ; 547, 4, 9 ; poursuivre (I) 245, 18

وصل على استقامة — prolonger (I) 565, 4-5

متّصل — qui dépend de (I) 245, 19

وضح

وضح — être clair (I) 657, 16 ; 723, 15

واضح — clair (I) 373, 9 ; 501, 15 ; 579, 15 ; 659, 17 ; 677, 22 ; 681, 15 ; 729, 5, 9

وضّح — expliquer (I) 595, 1

أوضح — éclairer (I) 245, 17 ; 523, 6 ; 729, 3 ; indiquer (I) 625, 19

إيضاح — élucidation (I) 245, 7, 18 ; 729, 5

وضع

وضع — composer (I) 579, 20 ; 719, 13

واضع — qui pose, compose, propose (I) 281, 8 ; 285, 1, 10 ; 307, 11 ; 309, 8 ; 321, 2 ; 353, 13 ; qui établit (la cause du procédé) 357, 9 ; 361, 4 ; 365, 1 ; 367, 19 ; 545, 14

موضع — position, endroit (I) 547, 1 ; 565, 4 ; 631, 21 ; 721, 11

وقف

وقف على — identifier (I) 719, 12, 14, 16

وقت

pour le moment (I) 481, 5 — في هذا الوقت

وقع

découvrir (I) 243, 17 ; échoir (I) 247, 5 ; avoir lieu (I) 269, 5 ; 281, 20 ; advenir (II) 735, 16 ; tomber, se trouver (I) 269, 12, 13, 17 ; 561, 9 ; 565, 16 — وقع

être circonscrit (I) 539, 10 ; 545, 3 11, 20 — وقع على خارج...

être inscrit (I) 539, 7, 8, 11 ; 543, 7 ; 545, 9 — وقع في داخل...

ولد

parvenir (II) 743, 15 ; produire (II) 747, 4 — تولّد

ولي

ainsi de suite (I) 725, 10-11 — على الولاء

succession (I) 725, 20 — توالٍ

succession des nombres (I) 719, 20 ; 721 7, 9, 10 ; 723, 2, 6 — توالي الأعداد

successivement (I) 723, 3 ; 725, 9 — على التوالي

وهم

imaginer (I) 725, 7 — توهم

INDEX DES NOMS PROPRES

Abū Ḥanīfa al-Daynūrī : 146
Abū Kāmil, Shujā' ibn Aslam : V *et passim*
Abū Sidīra, al-Sayyid: 3 n. 9
Abū al-Wafā' al-Būzjānī : 114, 114 n. 2
Abū Yūsuf : 10, 70, 384 n. 41, 385 ap.
Aertsen, J. A. : 15 n. 37
'Afīfī, A. : 237 n. 16
Allard, A. : 15, 16 n. 40
Ahmad, S. : 8 n. 24, 203 n. 6, 229 n. 9, 764 n. 1
Amin, A. : 4 n. 14
Ammonius : 236
Anbouba, A. : 2, 2 n. 7
Apollonius : 37, 231, 233
Archimède : 226
Aristote : 221, 236-238
Avicenne : 231, 237, 238

al-Balawī, Abū Muḥammad : 2, 2 n. 8
Banū Mūsā : 4
Bellosta, H. : 222 n. 2
Bombelli, Rafael : 234
Boncompagni, B. : 18
Buchwald, J. Z. : V n. 3

Chalhoub, S. : 30
Chasles, M. : 14

Dardi de Pise, Maître : 231
Descartes, René : 233, 234
Diophante : VII, IX, 5, 5 n. 15, 6, 11, 53, 55, 58, 58 n. 7, 105, 145, 146, 151, 152, 159, 219, 222, 223, 226, 227, 229

Endress, G. : 15 n. 37
Euclide : VI-VIII, 5, 31, 37, 38, 52, 53, 85, 113, 114, 125, 131, 143, 146, 221-224, 227, 239, 248, 250, 254, 258, 262, 264, 268, 274, 278, 290, 304, 335 ap., 432, 522, 540, 562, 564, 566, 570, 574
Eudoxe : 54

al-Fārisi, Abū Zayd : 29
al-Fārisi, Kamāl al-Dīn : 114, 114 n. 3, 234
Faulhaber, Johann : 234
Fermat, Pierre de : 235
Fibonacci : VIII, 15, 17-27, 114, 227
Finzi, Mordekhay : 26, 30
Folkerts, M. : 15 n. 36, 114 n. 5

Gérard de Crémone : 15, 16, 18
al-Ghazālī : 238, 239
Girard, Albert : 234
Golius : 29
Graf, G. : 6 n. 18
Guillaume de Luna : 15
Guest, R. : 3 n. 12

al-Ḥajjāj ibn Maṭar : 255 ap., 263 ap., 291 ap.
Ḥājjī Khalīfa: VI n. 4, 7-9
Hayashi, T. : 198 n. 2
Heiberg, J. L. : 304 n. 33, 562 n. 9, 566 n.16
Héron d'Alexandrie : 113
Hissette, R. : 15, 15 n. 37, 16
Hogendijk, J. P. : 15 n. 36, 114 n. 5
Houzel, Ch. : 233
Hudde, Jan : 234

Ibn Abī Barza : 146
Ibn al-Akfānī : 9
Ibn 'Alī, Mas'ūd ibn Muḥammad : 28
Ibn Aslam, Aḥmad : 3, 3 n. 13
Ibn al-Athīr : 3 n. 12
Ibn al-Bannā' : 231
Ibn Budayr, Mikhā'il : 6 n. 18
Ibn Duqmāq : 3 n. 11
Ibn Ḥasan al-Anṣārī, Muḥammad : 11
Ibn al-Haytham, al-Ḥasan : 222, 228
Ibn Kathīr : 3 n. 12
Ibn Khaldūn : 1, 1 n. 3, 2
Ibn al-Khalīl, Abū Yūsuf : 29
Ibn al-Muqaffa', Servus : 6 n. 18
Ibn Qurra : *voir* Thābit
Ibn Sinān, Ibrāhīm : 222
Ibn Taghrībardī, Abū al-Maḥāsin : 3 n. 11
Ibn Ṭūlūn, 'Abbās : 3, 3 n. 13
Ibn Ṭūlūn, Aḥmad: 2-4
Ibn Turk : 37, 37 n. 2, 145, 146
Ibn Yūsuf al-Baghdādī, Abū Ja'far Aḥmad : 4, 4 n. 14
al-'Imrānī, 'Alī ibn Aḥmad : 1 n. 2, 8

Isḥāq ibn Ḥunayn : 304 n. 32, 567 ap., 569 ap.
al-Iṣtakhrī : 8
Jabr, F. : 238 n. 20
Jamblique : 222
al-Jārim, 'A. : 4 n. 14
al-Jawharī, al-'Abbās : 4

al-Karajī : VII-IX, 11-13, 27, 53, 58, 114, 150, 193-195, 226-228, 239, 345 ap., 385 ap., 387 ap., 389 ap.
Karpinski, L. C. : 2, 14, 14 n. 34, 18 n. 43
al-Kāshī : 114, 114 n. 4
al-Khayyām : 29, 226, 228, 231
Kessler, E. : 236 n. 13
al-Khāzin : 231, 234
al-Khujandī : 231
al-Khwārizmī, Abū Ja'far Muḥammad ibn Mūsā : V-IX, 1 n. 3, 2, 4, 5, 8, 9, 17-22, 24, 30, 35-38, 53, 55, 113, 145, 146, 146 n. 3, 183, 195, 222-227, 231, 234, 235, 239, 244, 246, 249 ap., 250, 251 ap., 320 n. 33, 324 n. 34, 724, 726
al-Kindī, Abū 'Umar : 3, 3 n. 12-13
al-Kindī, Ya'qūb ibn Isḥāq : 4
Kurd 'Alī, M. : 2 n. 8

Lam Lay Yong : 198 n. 2
Levey, M. : 2, 18, 18 n. 43, 27, 27 n. 47, 114 n. 5, 385 ap., 769
Lévy, T. : 27 n. 45, 30, 30 n. 52
Libbrecht, U. : 198 n. 2
Libri, G. : 18
Lippert, J. : 1 n. 2
Lorch, R. : 15, 15 n. 36, 114 n. 5, 526 n. 2, 528 n. 3, 532 n. 4, 534 n. 5
Loria, G. : 18

Madkūr, I. : 237 n. 16
al-Māhānī : 226
al-Ma'mūn : 4
al-Maqrīzī : 3 n. 11
al-Māradīnī, Muḥammad Sibṭ : 11
Martzloff, J. C. : 198 n. 2
Mawaldi, M. : 114 n. 3
al-Miqātī, Muḥammad : 29
Montgomery, J. E. : 0
Morrison, D. : 236 n. 13, 237, 237 n. 14
Muḥaqqiq, M. : 7
Muṣṭafā Paşa : 10, 11
al-Mutawakkil : 4

al-Nabulsī, N. : 114 n. 4
al-Nadīm : 1, 1 n. 1, 2, 6, 8, 8 n. 20-22, 27, 30
Na'īm ibn Mūsā : 225
Newton, Isaac : 233
Nicomaque de Gérase : 222

Philopon, Jean : 236, 237
Ptolémée : 113, 115, 116, 146
Pythagore : 193 n. 2
al-Qalqashandī : 1 n. 4
al-Qiftī : 1, 1 n. 2, 8, 8 n. 23
al-Qūhī : 115
al-Qurashī : 8
Qusṭā ibn Lūqā : 5, 5 n. 15, 147

Rashed, M. : 236 n. 13, 239 n. 22
Rashed, R. : V n. 1, n. 3, VIII n. 6, X n. 7, 5 n. 15, 8 n. 24, 16 n. 40, 18 n. 44, 29 n. 51, 37 n. 3-4, 55 n. 5, 113 n. 1, 115 n. 6, 145 n. 2, 193 n. 1, 195 n. 4, 203 n. 6, 221 n. 1, 222 n. 2, 223 n. 3, 226 n. 4, 229 n. 9, 239 n. 22, 250 n. 7, 764 n. 1
Robert de Chester : 15
Rothe, Peter : 234

Sacerdote, G. : 27 n. 48, 114 n. 5
Saidan, A. S. : 30, 30 n. 54, 114 n. 2
al-Samaw'al : VII, VIII, 8, 8 n. 24, 14, 27, 28, 193, 193 n. 2, 195, 200, 200 n. 3, 202, 203 n. 6, 226-231, 234, 239, 293 ap., 345 ap., 763, 770-774
Sanad (Sind) ibn 'Alī : 4, 5, 145, 146
al-Sarakhsī, Abū al-'Abbās : 146
al-Ṣaydanānī : 145
Sayili, A. : 37 n. 2, 145 n. 1
Sayyid, A. F. : 3 n. 11
Schub, P. : 27 n. 47
Sesiano, J. : 15, 15 n. 36, 16 n. 41, 769
Shams al-Dīn, A. : 238 n. 21
Shukla, K. S. : 198 n. 2
al-Sijzī : 222
Simplicius : 236
al-Sulamī : 231
Suter, H. : 2, 27 n. 48, 30, 30 n. 53, 114 n. 5

Tajaddud, R. : 1 n. 1
Tannery, P. : 219
Thābit ibn Qurra : VIII, 37, 38, 145, 224, 225, 234, 239, 304 n. 32
Théétète : 227
Théon de Smyrne : 222
Tricot, J. : 236 n. 12

al-Ṭūsī, Sharaf al-Dīn : 231-234

Vahabzadeh, B. : 29 n. 51
Ver Eecke, P. : 58 n. 7
Viète, François : 234
Villemin, G. : 202 n. 5

al-Wāthiq : 20 n. 32
Weinberg, J. : 2, 27, 27 n. 46
Witkam, J. J. : 9 n. 28
Woepcke, F. : 58 n. 6, 194 n. 3

Yadegari, M. : 114 n. 5
Yaltkaya, M. Ş. : VI n. 4, 7 n. 19, 8 n. 25
Youschkevitch, A. : 54, 54 n. 2, 198 n. 2
Zeuthen, H.-G. : 37
Zhang Qiujian : 198 n. 2

INDEX DES CONCEPTS

addition : 72-76, 223, 225
aire
– carrée : 38, 39, 41-51, 132 n. 9, 133, 134, 232
– du cercle : 113
– du cône : 113
– du décagone : 137
– du pentagone : 136
– plane : 37
– des polygones : 114
– de la pyramide : 113
– des quadrilatères : 113
– du rectangle : 41-51, 132, 133
– du triangle : 113, 115, 131, 133-135, 138, 140-143
algèbre : V-VII, X, 5, 7, 10, 11, 35, 52, 54, 113, 114, 128, 145, 147, 183, 193, 195, 198 n. 2, 222, 224-228, 232, 236
– géométrique : VIII, 37, 38, 114, 231, 232
algébrisation : 28, 114, 147, 197
algorithme : VII, VIII, X, 35-38, 40, 42, 48, 50-52, 58, 59, 68, 114, 145, 146 n. 3, 222-227, 232-234
– dit de Ruffini-Horner : 232
analyse
– combinatoire : 228
– déterminée : VII
– indéterminée (diophantienne) : IX, 11, 26, 27, 145, 150, 159, 226, 228 ; entière du premier degré : IX, 7, 28, 197-219 ; rationnelle : VII, VIII, X, 5, 7, 145, 151
– infinitésimale : 235
antiphairesis : 221
apodictique : 6, 35, 147, 223, 236, 237
application
– des aires : 37, 38, 45, 49, 224, 225
– de l'algèbre à la géométrie : VI, 7, 113, 114
– de l'algèbre à l'arithmétique : VI, 7, 113
– rationnelle surjective : 157
arithméticiens (*ḥussāb*) : VI-VIII, 5, 28, 146, 147, 172, 193, 197, 198, 282, 336, 338
arithmétique : V-VII, 7, 53, 222, 225, 227, 234
arithmétisation de l'algèbre : VII, VIII, 11, 54
ars analytica : 222
associativité : 54, 72, 225, 282 n. 29
augmentation et diminution : 7
axe de symétrie : 116
axiomatique : 221, 222, 228

bāb : 146, 146 n. 3, 147
binômes : 53, 224, 228

calcul (*ḥisāb*) :
– algébrique : VI, VII, 1, 18, 35, 38, 53-55, 62, 145, 148, 224-226, 234 ; abstrait : 55, 145, 225
– arithmétique : 197-199
– juridique : V, VI, 7
– des legs et testaments : V, VI, 7, 183
– des obligations (*ḥisāb al-farā'iḍ*) : V, VI
– sur les polynômes : 53
– sur les segments et les aires : 37, 44, 62
carré (*māl*) : 35, 53, 99, 100, 246 n. 1
carré de l'inconnue : 37, 42, 46, 48, 52, 223, 232, 246 n. 1
carré parfait : 151
cause (*'illa*) : 36, 42, 60, 62, 146, 223, 235, 239 ; (*limā*) : 237-238
cercle(s) : VIII, 113-128, 139, 152

chose (*shay'*) : 35, 53, 65, 86, 97, 99, 108, 172, 174, 176, 178-181, 199, 224, 227
classification des équations : 35, 36, 148, 149, 228-230
clôture projective : 151, 159, 165, 166
coefficient(s) : VII, 53, 55, 122, 123, 125-127, 149, 197, 203, 207, 213, 223, 226, 233, 234
– binomiaux : 228
– indéterminés : 234
– irrationnels : 80-82, 96
combinatoire des termes primitifs : 36, 223
commutativité : 54, 225
complétion du carré : 39, 43, 44, 156
cône quadratique : 158
congruence : 208
conique : 151, 152
connu (*ma'lūm*) : 3, 223
construction
– de figures géométriques : 224, 225
– à la règle et au compas : 113, 115
– par sections coniques : 115
corde (détermination) : 115, 130, 142 ; *voir aussi* méthode
corps commutatif ordonné : 54, 225
côté
– du carré : 133-135
– du polygone (pentagone / décagone) : 113-129, 135-138, 140, 141
– du rectangle : 132
– du triangle : 130, 132, 133, 208
courbe(s) algébrique(s) : 147 n. 6, 234
– biquadratique : 157, 170
– de genre 0 : 147, 149, 151, 157, 159
– de genre 1 : 147, 149, 159, 165, 170
– lisse de degré 4 : 159, 162, 165, 166
– plane : 147 n. 6
– de second degré : 150
– unicursales : 147 n. 6
cube : 232
cylindre quadratique : 157

décagone : VIII, 5, 15, 27, 113-115, 118, 128, 129, 138
– régulier convexe : 113, 117, 120, 121, 126, 127, 137, 142
démonstration : VI, VII, 10, 37, 54, 193, 194, 221-239
– algébrico-analytique : 234
– algébrique par « l'expression » (*lafẓ*) : VII, 17, 54, 60, 64, 65, 106, 107, 145, 224-230, 234, 239
– algébrique par « l'indication » : 108, 226, 235-239
– des algorithmes de solution : 35, 38, 40, 46, 48, 50-52, 222-227, 232-234
– apagogique : 226
– arithmétique : 107, 109
– euclidienne : 62
– de l'existence de racines positives 231 ; de l'existence de solutions : 228-230
– géometrico-algébrique : 231, 233, 234
– géométrique par « la cause » (*'illa – demonstratio potissima*) : 17, 36-38, 42, 52, 54, 55, 62, 64, 106-108, 128, 194, 223-226, 235, 239
– par récurrence archaïque : 193, 195
– par régression : 227
– par « le signe » : 237-239
dérivation (procédé de) : 36, 232
diamètre du cercle inscrit/circonscrit : 113-129, 136, 138
différence (demi-) : 55
distributivité : 1, 54, 225, 282 n. 29
diviseurs : 234
division : 55
– des puissances : 91
– des racines : 58
– d'un segment de droite : 37, 225 ; en moyenne et extrême raison : 115, 138-140
divisibilité des expressions polynomiales : 227
droite projective : 147 n. 6

égalité : 223
– des aires : 37, 225
élimination (*voir aussi* méthode)
– des radicaux : 74, 80, 83, 87, 94, 95, 97, 101, 103
entiers : *voir* nombres, solutions, somme
équation(s)
– binôme : 38, 58, 59, 81, 94, 95
– biquadratique : VII, 231, 234
– à coefficients irrationnels : 80-82, 96
– cubique : 10, 160, 186, 226, 231, 234
– de degré quelconque : 234
– de la droite : 152, 158
– indéterminées (diophantiennes) : 147, 202, 229, 230 ; du second degré : 147, 149, 150
– linéaire : 67, 69, 75, 78, 85, 162, 165, 172, 199 ; à 6 inconnues : 227, 230
– d'un plan : 160, 162, 165, 170
– du premier degré : 28, 35, 55, 154, 223-225, 227, 233

– quadratique : VII, VIII, 35-38, 41, 55, 58, 62, 64, 66-69, 71, 74-76, 78, 80, 82, 85, 87, 88, 90, 91, 96-99, 101, 103, 114, 122, 145, 154, 171, 186, 189, 223-225, 227, 231, 233
– les six types canoniques : 35, 53, 55
– trinôme : 58, 81, 95, 96
– à trois inconnues : 99, 100
espace de dimension 3 : 170, 215
expression (*lafẓ*) : *voir* démonstration
extraction de la racine : 231, 234

génératrice : 158
géométrie : V, VI, 7, 37, 54, 55, 113, 222, 225
– algébrique : X, 231
– euclidienne : VIII, 5, 54, 225, 226
– plane : 35, 37, 54, 194
– pratique : 3
gnomon : 52, 232

hexagone : 129

inconnue : VII, 35, 36, 48, 53, 61, 79, 83, 99, 100, 155, 161, 172-181, 183, 185, 193, 199, 203, 204, 213, 215, 223, 226, 227, 232, 233
inéquations : 89
indication (*ishāra*) : *voir* démonstration
induction complète finie : 226, 228, 234, 235 (*voir aussi* récurrence)
inégalités linéaires : 215
inférence (*qiyās*) : 146, 197, 235-238
infinité de solutions : 149, 150, 151, 153, 154, 159, 161, 228-230, 232
interpolation quadratique : 234
intersection
– des coniques : 10, 226, 231
– de deux cylindres : 157
– des plans tangents : 163

irrationnel (*aṣamm*) quadratique : VII, 53, 224, 226
irrationnel trinôme : 99
invariant : 147 n. 6

al-jabr (restauration) : v

maximum (des expressions polynomiales) : 231, 232
mensuration des terrains : 7, 30
méthode(s) :
– algébrique (*ṭarīq al-jabr*) : 226-227
– combinatoires : 234
– « de la corde » : 151, 152, 156, 159, 227
– « de Diophante » : 58
– de la double équation : 229
– d'élimination : 145, 162-181, 199-201, 226, 227, 234, 235
– géométrique (*ṭarīq al-handasa*) : 227, 236
– de la tangente (à l'infini) : 163, 166, 167
– de Théétète : 227
modalité / *modulo* : 203, 213, 216-218, 228, 230
monômes : 53
multiplication : 54, 55, 72, 223, 225, 282 n. 29
– d'une aire par une autre : 114
– des puissances : 91
al-muqābala (réduction) : V, 227

neusis : 221
nombre(s) (*'adad*) : 35, 53, 97, 223
– amiables : 234
– entier : 1, 28, 180, 192, 199, 203-206, 210, 214, 228 (*voir aussi* solutions)
– imaginaires : 234
– irrationnel : 55, 85
– rationnel : 28, 55, 149-153, 203, 224

opérations algébriques : 53, 175

paramètre : 158, 204-216, 223
paramétrage rationnel : 150, 158
pentadécagone : 115
pentagone(s) : VIII, 5, 15, 27, 113-116, 128, 135
– étoilé : 117
– équilatéral inscrit dans un carré : 114
– réguliers convexes : 5, 113, 117, 118, 122, 124-126, 136, 140, 141
plan tangent à l'infini : 171
point(s)
– à coordonnées entières : 203, 208, 215, 216
– à l'infini : 147 n. 6, 151, 159, 162, 163, 165, 166, 169, 170, 171
– d'intersection : 160, 231
– rationnel : 150-154, 160, 162, 165, 171
polygone
– de Newton : 233
– régulier convexe : 113-115, 124, 128
– à 15 côtés : 131
polynôme : 53, 147 n. 6, 223, 233

problème(s)
– arithmétiques : 148, 183
– des cent volatiles : 27, 189, 198, 223
– concrets (des postes...) : 146, 172, 183-186
– déterminés : 145
– « de la droite d'Archimède » : 226
– indéterminés (*sayyāla*) : VII, 5 ; du second degré : 145, 146, 148, 161 ; du premier degré : 27, 28, 172
– « nécessaires » : 229, 230
– possibles/impossibles : 145, 153, 228- 231
– rationnel/irrationnel : 149
– solides : 114, 226
progressions arithmétiques : VII, 146, 148, 192, 193
puissances de l'inconnue : 35, 53, 91, 193, 233

quadrilatère(s) : VIII, 116, 122, 129
– convexe : 118, 122, 130
quadriques : 163

racine (*jidhr*) : 35, 52
– carrée : 55, 227-228
– cubique : 231
– irrationnelle : 228
– positive : 38, 41, 63, 65, 68, 69, 74, 85, 89, 90, 98, 105, 122, 132, 133, 136, 184, 186 ; existence de : 231, 234
rectangle : 41, 114, 129, 132, 232, 552 n. 7, 554 n. 8
récurrence (*voir aussi* induction, démonstration) : 203, 214, 215, 228
régression : 195, 227
règle des deux erreurs : 6, 7
règle des signes : 54, 282 n. 29
résolution
– approchée des équations : 233
– par radicaux : 35, 223, 233

segment de droite : 37, 44, 52, 132, 224, 232
séries de puissances : 227
signe (*dalīl*) : 236-239
solides : 232
solutions (*voir aussi* infinité)
– en nombres entiers : 147, 178, 181, 199-206, 210, 214, 216
– rationnelles (infinité) : 147, 149-151, 153, 154, 159, 161
somme
– d'une aire et d'un segment : 114, 131, 132
– des carrés des entiers : 192-193, 193 n. 2
– demi- : 55
– des diviseurs d'un entier : 234
– des entiers naturels : 192
– des puissances : 193, 228
– des termes d'une suite : 185
suite
– arithmétique : 148, 183, 185, 186
– géométrique (infinie) : 160-162
surface carrée : *voir* aire
système(s)
– déductif : 221
– d'équations linéaires indéterminées : 147-149, 172, 199, 227, 229
– infini d'équations : 160-162, 164

tangente : 163
tétraèdre : 215, 216
théorème
– de la géométrie du triangle : 115
– de Ptolémée : 115, 116
théorie
– de la découverte : 222
– des équations : VI, VII, 15, 17, 35, 38, 223-225, 230, 233, 234 ; des deux premiers degrés : 11, 18, 35, 53, 223
– des nombres : 234
– des « polynômes dominants » : 233
– des proportions : VIII, 38, 54, 55, 62, 65, 108, 224, 225, 231, 232, 236
transformations : 53, 227
– birationnelles : 147 n. 6
triangle(s) : VIII, 115, 131, 135, 140, 208-215 (*voir aussi* aire)
– équilatéral : 114, 128, 130-134
– rectangle : 124, 129
– semblables : 140, 141
trigonométriques (relations) : 234
trinôme : 53, 99, 151, 153, 224
– du second degré : 153

unité(s) de longueur : 38

variables : 80, 81, 105, 150, 199, 231
variété linéaire affine : 203
volatiles (*voir aussi* problème) : 27, 28, 147, 197
volume du paraboloïde : 228

INDEX DES TRAITÉS CITÉS

Abū Kāmil
Kitāb al-'Aṣīr: 1 n. 1, 6, 7
Kitāb al-Falāḥ/Miftāḥ al-Falāḥ: 1 n. 1, 6, 7
Kitāb ḥisāb al-dawr wa-al-wiṣāyā: 7
Kitāb fī al-Jabr wa-al-muqābala (*Algèbre*) : V-IX, 1, 1 n. 1-2, 2, 4-27, 113, 145-147
Traduction latine : 39, 146 n. 3, 227 n. 7-8, 247 ap., 251 ap., 256 n. 15, 257 ap., 261 ap., 267 ap., 299 ap., 329 ap., 335 ap., 385 ap., 387 ap., 409 ap., 411 ap., 417 ap., 451 ap., 507 ap., 509 ap., 526 n. 2-533 ap., 534 n. 5, 539 ap., 543 ap., 549 ap., 551 ap.-555 ap., 559 ap.-563 ap., 569 ap., 575 ap., 769
Taduction hébraïque : 299 ap., 385 ap., 387 ap., 569 ap., 769
Kitāb al-Jam' wa-al-tafrīq : 1 n. 1, 6, 7
Kitāb al-Khaṭa'ayn : 1 n. 1, 6, 7
Kitāb al-Kifāya : 1 n. 1, 7
Kitāb al-Misāḥa wa-al-handasa : 1 n. 1, 6, 7, 30, 31
Kitāb al-Ṭayr (*Sur les volatiles*) : IX, 1 n. 1, 6, 7, 27-30, 147, 197
Kitāb al-wiṣāyā bi-al-judhūr: 7

Anonyme
« Mahamelet » : 14, 15

Apollonius
Coniques : 233

Aristote
Les Premiers Analytiques : 236 n. 12
Les Seconds Analytiques : 221, 236, 238

Avicenne
al-Najāt : 238, 238 n. 19
al-Shifā' : 237, 237 n. 16

al-Balawī
Sīrat Aḥmad ibn Ṭūlūn : 2, 2 n. 8

Diophante
Les Arithmétiques : VII, IX, 5, 5 n. 15, 6, 11, 58, 145-147, 152, 159, 222, 227, 229

Euclide
Les Éléments : VI, VII, 5, 31, 38, 53, 221, 239, 250
II : 37, 225
II.2 : 247 ap.
II.4 : 290 n. 29, 432 n. 45, 433 ap.
II.5 : VIII, 37, 42, 44, 46, 47, 52, 224, 262-265 ap., 268, 269 ap.
II.6 : VIII, 37, 39, 41, 48, 51, 52, 224, 254, 255 ap., 258, 274, 275 ap., 278, 279 ap., 335 ap.
VI : 37, 38, 225, 233
VI.17 (= VI.16 trad. arabe) : 304 n. 32, 305 ap.
VI.19 (trad. arabe) : 305 ap.
IX : 113
X : 85, 226
XII : 113
XII.1 : 125, 540 n. 6, 541 ap.
XIII : 113, 115
XIII.1 : 564 n. 13, 565 ap., 570 n. 18, 571 ap.
XIII.4 (trad. arabe) : 568 n. 17, 569 ap.
XIII.5 (= XIII.6 trad. arabe): 139, 562 n. 9, 563 ap., 569 ap.
XIII.8 (= XIII.13 trad. arabe) : 566 n. 16, 567 ap.
XIII.9 : 139
XIII.10 : 143
XIII.12 : 564 n. 11, 565 ap.
XIII.12 (trad. arabe) : 574 n. 20, 575 ap.

al-Fārisī, Abū Zayd
al-Masā'il al-ḥisābiyya (*Problèmes arithmétiques*) : 29

Fibonacci
Liber Abaci : 17, 18
Practica geometriae : 114

al-Ghazālī
Mi'yār al-'ilm : 238, 238 n. 21

Ḥājjī Khalīfa
Kashf al-ẓunūn : VI n. 4, 7-9

Ibn al-Akfānī
Irshād al-Qāṣid : 9

Ibn Khaldūn
al-Muqaddima : 1 n. 3

Ibn Turk
al-Ḍarūrāt fī al-muqtarināt : 37 n. 2, 145, 145 n. 1

Ibn Yūsuf al-Baghdādī, Abū Ja'far
al-Mukāfa'a : 4, 4 n. 14

al-Karajī
al-Badī' : IX
al-Fakhrī : IX, 11-13, 58, 194 n. 3, 345 ap., 385 ap., 387 ap., 389 ap.

al-Khayyām
Sharḥ mā ushkila min muṣādarāt Uqlīdis (*Commentaire des difficultés de certains postulats d'Euclide*) : 29

Khwārizmī, Muḥammad ibn Mūsā
Kitāb al-Jabr wa-al-muqābala (*Algèbre*) : VI, 1 n. 3, 18, 30, 35-38, 55, 145, 146, 146 n. 3, 183, 239, 244, 246, 249 ap., 250, 251 ap., 320 n. 33, 324 n. 34

al-Nadīm
al-Fihrist : 1 n. 1, 6

al-Qalqashandī
Subḥ al-A'shā : 1 n. 4

al-Qiftī
Ta'rīkh al-ḥukamā' : 1 n. 2

al-Samaw'al
al-Bāhir : 8 n. 24, 14, 14 n. 31-33, 27, 28, 193 n. 2, 200, 200 n. 3, 203 n. 6, 227-229, 293 ap., 345 ap., 763-767, 770-774

Thābit ibn Qurra
Fī Taṣḥīḥ masā'il al-jabr bi-al-barāhīn al-handasiyya (*Rétablir les problèmes de l'algèbre par les démonstrations géométriques*) : 145
Min al-masā'il allatī sa'ala 'anhā Ibn Usayyid (*Réponses aux questions posées par Ibn Usayyid*) : 239, 239 n. 22

INDEX DES MANUSCRITS

Escorial 907 : 305 ap., 541 ap., 567 ap.

Istanbul, Beyazit, Kara Muṣṭafā Paşa 379 : 10

Leiden, Or. 199 : 28, 29

Mantova, Biblioteca Communale, Ebr. 17 : 26
Meshed, Astān Quds, Riyāḍiyāt 98 : 10

Munich, Hebr. 225 : 27

Paris, BNF, Ar. 4946 : 29-30
Paris, BNF, Lat. 7377 A : 14-16
Paris, BNF, Lat. 15461 : 14, 15

Rabat 1101 : 563 ap., 565 ap., 567 ap., 569 ap. 575 ap.

Téhéran, Majlis Sanā 2672 : 31 n. 55

OUVRAGES CITÉS

I. MANUSCRITS

Anonyme
Meshed, Astān Quds, Riyāḍiyāt n° 98.

Abū Kāmil
Bāb Misāḥat al-araḍīn
Téhéran, Majlis Sanā, n° 2672, fol. 189-217.

Kitāb al-jabr wa-al-muqābala
Istanbul, Beyazit, Kara Muṣṭafa Paşa, n° 370 (nouveau numéro : 19046).

Paris, BNF, fonds latin n° 7377 A.
Paris BNF, fonds latin 15461.
München 225 (version hébraïque).

Kitāb al-Ṭayr
Leiden, Or. 199 (6), fol. 50^{v} à 58^{v} (noté A – ا).
Paris, BNF, fonds arabe n° 4946, fol. 3^{v}-16^{r} (noté B – ب).

Euclide, *Kitāb al-Uṣūl*
Escorial 907 ; Rabat 1101.

II. LIVRES ET ARTICLES

A. Allard
Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī. Le Calcul indien (Algorismus), Paris, Librairie Blanchard, 1992.

« L'influence des mathématiques arabes dans l'Occident médiéval », dans R. Rashed (éd.), *Histoire des sciences arabes*, t. II : *Mathématiques et physique*, Paris, Le Seuil, 1997, p. 199-229.

A. Anbouba
« L'algèbre arabe aux IX^{e} et X^{e} siècles », *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 2, n° 1, 1978, p. 66–100.

« Un algébriste arabe : Abū Kāmil Šuǧā' ibn Aslam », *Horizons techniques du Moyen-Orient*, 1re année, n° 2, 1963, p. 6-15.

Apollonius : *Les Coniques*, tome 1.1 : *Livre I*, commentaire historique et mathématique, édition et traduction du texte arabe par R. Rashed, Berlin / New York, Walter de Gruyter, 2008.

Aristote
Al-Naṣṣ al-Kāmil li-Manṭiq Arisṭū, éd. F. Jabr, Beyrouth, 1999.
Les Premiers Analytiques, trad. J. Tricot, Paris, Vrin, 1962.
Les Seconds Analytiques, trad. J. Tricot, Paris, Vrin, 1987.

Avicenne, *Al-Shifā'*, *al-Manṭiq*, 5 : *al-Burhān*, éd. A. 'Afīfī, introduit et révisé par I. Madkūr, Le Caire, 1956.

Al-Balawī (Abū Muḥammad 'Abd Allāh ibn Muḥammad al-Madīnī), *Sīrat Aḥmad ibn Ṭūlūn*, éd. Muḥammad Kurd 'Alī, Le Caire, al-Maktaba al-Thaqāfiya al-Dīniyya, s.d.

Al-Būzjānī, *al-Manāzil al-Sab'*, éd. A. S. Saidan, dans *'Ilm al-Ḥisāb al-'Arabī*, Amman, 1971.

S. Chalhoub, « Ṭarā'if al-ḥisāb li-Abī Kāmil Shujā' ibn Aslam al-Ḥāsib al-Miṣrī » (en arabe), *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 12, n° 1-2, p. 237-264.

Diophante
Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones, Œuvres traduites pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke, Nouveau tirage, Paris, A. Blanchard, 1959.
Les Arithmétiques, texte établi et traduit par R. Rashed, t. 3 et 4, Collection des Universités de France, Paris, Les Belles Lettres, 1984.

Euclide, *Codex Leidensis 399,1. Euclidis Elementa ... cum commentariis al-Narizii*, éd. R. O. Besthorn et J. L. Heiberg, Copenhagen, 1897.

Al-Fārisī, *Asās al-Qawā'id*, éd. M. Mawaldi, Le Caire, 1994.

Al-Ghazālī, *Mi'yār al-'ilm*, commenté par A. Shams al-Dīn, Beyrouth, 1989.

G. Graf, *Geschichte der christlichen arabischen Literatur*, Studi e testi 133, Cité du Vatican, 1947, vol. 2.

Ḥājjī Khalīfa, *Kashf al-ẓunūn*, éd. M. Ş. Yaltkaya, Istanbul, 1943.

T. Hayashi, *The Bakhshālī Manuscript : An Ancient Indian Mathematical Treatise*, Groningen, 1995.

R. Hissette, « Guillaume de Luna a-t-il traduit Abū Kāmil ? », dans Gerhard Endress et Jan A. Aertsen, with the assistance of Klaus Braun (éd.), *Averroes and the Aristotelian Tradition*. Sources, Constitution and Reception of the Philosophy of Ibn Rushd (1126-1198). Proceedings of the Fourth Symposium Averroicum (Cologne, 1996), Leiden, Boston/Köln/Brill, 1999, p. 300-315.

Ch. Houzel, « Sharaf al-Dīn al-Ṭūsī et le polygone de Newton », *Arabic Sciences and Philosophy*, 5, 2, 1995, p. 239-262 ; repris dans *La géométrie algébrique : recherches historiques*, Paris, A. Blanchard, 2002.

Ibn al-Akfānī, *Irshād al-Qāṣid ilā asnā al-maqāṣid*, dans J.J. Witkam, *De Egyptische Arts Ibn al-Akfānī (gest. 749/1348) en Zijn Indeling van de Wetenschappen*, Leiden, 1989.

Ibn al-Athīr, *al-Kāmil fī al-tārīkh*, éd. C.J. Tornberg sous le titre *Ibn-El-Athiri Chronicon quod perfectissimum inscribitur*, 12 vols, Leiden, 1851–71 ; repr. 13 vol., Beyrouth, 1965–67.

Ibn Duqmāq, *Kitāb al-intiṣār li-wāsiṭat 'aqd al-amṣār fī tārīkh Miṣr wa-jughrāfiyyatihā*, éd. Būlāq, Le Caire, s.d. ; repr. Lajnat Iḥyā' al-turāth al-'arabiyya, Beyrouth, s.d.

Ibn Kathīr, *al-Bidāya wa-al-Nihāya*, Le Caire, s.d., vol. 11.

Ibn Khaldūn, *Muqaddima*, Le Caire, Maktabat Muṣṭafā Muḥammad, s.d.

Ibn Sīnā
Al-Najāt, Le Caire, 1938.
Al-Shifā', *al-Manṭiq*, vol. V : *al-Burhān*, éd. Abū al-'Alā 'Afīfī, introduit et révisé par Ibrāhīm Madkūr, Le Caire, Imprimerie nationale, 1956.

Ibn Taghrībardī, Abū al-Maḥāsin, *al-Nujūm al-zāhira fī mulūk Miṣr wa-al-Qāhira*, 4 vol., Le Caire, 1933.

Ibn Yūsuf al-Baghdādī al-Miṣrī, Abū Ja'far Aḥmad, *al-Mukāfa'a*, éd. Aḥmad Amīn et 'Alī al-Jārim, Le Caire, 1941.

L. C. Karpinski
« The Algebra of Abu Kamil Shoja' ben Aslam », *Bibliotheca Mathematica*, Série III, 12, 1912, p. 40-55.
« The Algebra of Abu Kamil », *American Mathematical Monthly*, XXI, 2, 1914, p. 37-48.

Al-Kāshī, *Miftāḥ al-Ḥisāb*, éd. N. al-Nabulsī, Damas, 1977.

Al-Kindī (Abū 'Umar Muḥammad ibn Yūsūf), *Kitāb al-Wulāh wa-Kitāb al-Quḍāh* (The Governors and Judges of Egypt), éd. Rhuvon Guest, repr. Le Caire, Dār al-Kitāb al-islāmī, s. d.

Lam Lay Yong, « Zhang Qiujian Suanjing (The Mathematical Classic of Zhang Qiujian : an Overview », *Archive for History of Exact Sciences*, vol. 50, n° 3-4, 1997, p. 201-240.

M. Levey, *The* Algebra *of Abū Kāmil, in a Commentary by Mordecai Finzi*, Hebrew Text, Translation, and Commentary with Special Reference to the Arabic Text, Madison/Milwaukee/London, The University of Wisconsin Press, 1966.

T. Lévy, « L'algèbre arabe dans les textes hébraïques (II). Dans l'Italie des XV^e^ et XVI^e^ siècles, sources arabes et sources vernaculaires », *Arabic Sciences and Philosophy*, 17.1, 2007, p. 81-107.

U. Libbrecht, *Chinese Mathematics in the Thirteenth Century*, Cambridge, Mass., 1973.

R. Lorch, « Abū Kāmil on the Pentagon and Decagon », dans M. Folkerts et J. P. Hogendijk (éd.), *Vestigia mathematica, Studies in Medieval and Early Modern Mathematics in Honour of H.L.L. Busard*, Amsterdam, 1993, p. 215-252.

Al-Maqrīzī (Taqiyy al-Dīn Aḥmad b. ʿAlī b. ʿAbd al-Qādir), *Al-Mawāʿiẓ wa-al-Iʿtibār fī dhikr al-khiṭaṭ wa-al-āthār*, édité et présenté par Ayman Fu'ād Sayyid, London, al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 2002, vol. III.

J. C. Martzloff, *Histoire des mathématiques chinoises*, Paris/Milan/Barcelone, Masson, 1987.

D. Morrison, « Philoponus and Simplicius on Tekmeriodic Proof », dans E. Kessler (éd.), *Method and Order in Renaissance Philosophy of Nature. The Aristotle Commentary Tradition*, Ashgate, 1998, p. 1-22.

Al-Nadīm, *Kitāb al-Fihrist*, éd. R. Tajaddud, Téhéran, 1971.

Al-Qalqashandī, *Subḥ al-Aʿshā*, éd. Būlāq, Le Caire, 1963, vol. 3.

Al-Qifṭī, *Taʾrīkh al-ḥukamāʾ*, éd. J. Lippert, Leipzig, 1903.

M. Rashed
« Thābit ibn Qurra sur l'existence et l'infini : Les *Réponses aux questions posées par Ibn Usayyid* », dans R. Rashed (éd.), *Thābit ibn Qurra. Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad*, Scientia Graeco-Arabica, vol. 4, Berlin/New York, Walter de Gruyter, 2009.
Alexandre d'Aphrodise, Commentaire perdu de la Physique *d'Aristote (Livres IV-VIII)*, Berlin/New York, Walter de Gruyter, 2011.

R. Rashed
« L'induction mathématique : Al-Karajī, As-Samaw'al », *Archive for History of Exact Sciences*, 9, 1972, p. 1-21 ; repr. dans *Entre arithmétique et algèbre.*
« Al-Karajī », *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 7, New York, Scribner, 1973, p. 240-246.

« L'arithmétisation de l'algèbre au XII^e^ siècle », dans *Actes du XIII^e^ Congrès international d'histoire des sciences*, Moscou, 1974, p. 3-30.
Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes, Collection « Sciences et philosophie arabes - Études et reprises », Paris, Les Belles Lettres, 1984.
« Al-Kindī's commentary on Archimedes' "The Measurement of the Circle" », *Arabic Sciences and Philosophy*, vol. 3, 1993, p. 7-53.
« Archimedean Learning in the Middle Ages : The Banū Mūsā », *Historia Scientiarum*, 6-1, 1996, p. 1-16.
Les Mathématiques infinitésimales du IX^e^ au XI^e^ siècle, vol. III : *Ibn al-Haytham. Théorie des coniques, constructions géométriques et géométrie pratique*, London, al-Furqān, 2000.
Les Mathématiques infinitésimales du IX^e^ au XI^e^ siècle, vol. IV : *Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques*, London, al-Furqān, 2002.
« Fibonacci et le prolongement latin des mathématiques arabes », *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, Anno XXIII, Numero 2, Dicembre 2003, Pisa-Roma, Istituti Editoriali e Poligrafici Internaziolali, MMV, p. 55-73.
Geometry and Dioptrics in Classical Islam, London, al-Furqān, 2005.
« Lire les anciens textes mathématiques : le cinquième livre des *Coniques* d'Apollonius », *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, vol. XXVII, fasc. 2, 2007, p. 265-288.
Al-Khwārizmī : Le commencement de l'algèbre, Paris, Librairie A. Blanchard, 2007 ; trad. anglaise : *Al-Khwārizmī: The Beginnings of Algebra*, « History of Science and Philosophy in Classical Islam », London, Saqi Books, 2009.
« Résolution géométrique des équations du second degré », dans R. Rashed (éd.), *Thābit ibn Qurra. Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad*, Scientia Graeco-Arabica, vol. 4, Berlin/New York, Walter de Gruyter, 2009, p. 153-169.
D'al-Khwārizmī à Descartes. Études sur l'histoire des mathématiques classiques, Paris, Hermann, 2011.
« Founding Acts and Major Turning-Points in Arab Mathematics », dans J. Z. Buchwald (éd.), *A Master of Science History : Essays in Honor of Charles Coulston Gillispie*, Archimedes 30. New Studies in the History and Philosophy of Sciences and Technology, Dordrecht / Heidelberg / London / New York Springer, 2012, p. 253-271.

R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au X^e^ siècle*, Leiden, E.J. Brill, 2000.

R. Rashed et B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, Paris, Librairie Blanchard, 1999.

G. Sacerdote, « Il trattato del pentagono e del decagono di Abu Kámil Shogia' ben Aslam ben Muhammed », dans *Festschrift zum Achtzigsten Geburtstage Moritz Steinschneider's*, Leipzig, Otto Harrassowitz, 1896, p. 169-194.

Al-Samaw'al, *Al-Bāhir en Algèbre d'As-Samaw'al*, édition, notes et introduction par Salah Ahmad et Roshdi Rashed, Damas, Presses de l'Université de Damas, 1972.

Ṣā'id al-Andalusī, *Al-Ta'rīf bi-ṭabaqāt al-umam*, edited and introduced by Ġolāmrezā Jamšīdnezād-e Avval, Iran, Hejrat, 1997; R. Blachère, *Livre des Catégories des Nations*, Paris, 1935.

A. S. Saidan, « *Ṭarā'if al-ḥisāb* li-Abī Kāmil Shujā' ibn Aslam al-Miṣrī », *Majallat Ma'had al-Makhṭūṭāt*, 9, 1923, p. 291-320.

A. Sayili, *Logical Necessities in Mixed Equations by 'Abd al-Ḥamīd ibn Turk and the Algebra of his Time*, Ankara, 1962.

P. Schub et M. Levey, « Indeterminate Problems of Abū Kāmil (850-930) », *Atti della Accademia Nazionale dei Lincei*, Memorie, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, serie VIII, volume X, Fascicolo 2, Rome, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970, p. 23-96.

J. Sesiano
« La version latine médiévale de l'Algèbre d'Abū Kāmil », dans M. Folkerts et J.P. Hogendijk (éd.), *Vestigia mathematica, Studies in Medieval and Early Modern Mathematics in Honour of H.L.L. Busard*, Amsterdam, 1993, p. 315-452.
« Le Kitāb al-Misāḥa d'Abū Kāmil », *Centaurus*, 38, 1996, p. 1-21.
« Les méthodes d'analyse indéterminée chez Abū Kāmil », *Centaurus*, 21, 2, 1977, p. 89-105.

Kripa Shankar Shukhla, *The Patiganita of Sridharacarya with an Ancient Sanskrit Commentary*, Lucknow, 1959.

H. Suter
« Die Abhandlung des Abū Kāmil Shoǧā' b. Aslam 'über das Fünfeck und Zehneck' », *Bibliotheca mathematica*, 3e série, 9, 1908-9, p. 196-199.
« Das Buch der Seltenheiten der Rechenkunst von Abū Kāmil el-Miṣrī », *Bibliotheca mathematica*, 3e série, 11, 1910/11, p. 100-120.

J. Weinberg, *Die Algebra des Abū Kāmil Šoǧā' ben Aslam*, Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der philosophischen Fakultät II. Sektion der Ludwig-Maximilians-Universität München (7 September 1934), Munich, 1935.

F. Woepcke, *Extrait du Fakhrî*, Traité d'algèbre par Aboù Bekr Mohammed ben Alhaçan alkarkhî, précédé d'un mémoire sur l'algèbre indéterminée chez les Arabes, Paris, 1853; repr. Hildesheim/Zürich/New York, Georg Olms, 1982.

M. Yadegari et M. Levey, *Abū Kāmil's On the Pentagon and Decagon*, Tokyo, The History of Science Society of Japan, 1971.

M. Yadegari, *The Use of Mathematical Induction by Abū Kāmil Shujā' ibn Aslam (850-930)*, *Isis*, 69, n° 247, 1978, p. 259-262.

A. P. Youschkevitch
Les mathématiques arabes (VIIIe-XVe siècles), Paris, Vrin, 1976.

Geschichte der Mathematik in Mittelalter, Leipzig, 1964.