

LES GRANDS CLASSIQUES GAUTHIER-VILLARS

ENCYCLOPÉDIE  
DES  
SCIENCES MATHÉMATIQUES  
PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DES ACADÉMIES DES SCIENCES  
DE GÖTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE  
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLIÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

**JULES MOLK** (†)

ET POUR CE QUI CONCERNE LA MÉCANIQUE SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE DE

**PAUL APPELL**,

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

TOME IV (DEUXIÈME VOLUME),

MÉCANIQUE GÉNÉRALE



 blong®

ÉDITIONS  
JACQUES GABAY

Molk, Jules (dir.)  
Encyclopédie Mécanique

4  
2



\* 2 9 1 0 4 \*

## Abréviations.

Dans les publications de l'académie des sciences de Paris, H. signifie Histoire  
M. signifie mémoires.

I, = renvoi au tome premier; troisième volume.

(12, 19) = renvoi au tome premier, article 2, numéro 19.

Dans les Notes, un nombre  $\alpha$  en exposant indique un renvoi à la note  $\alpha$  du même article.

(2) 8 (1812), éd. 1816, p. 57 [1810] = deuxième série, tome ou volume 8, année 1812, édité en 1816, page 57, lu ou signé en 1810.

La transcription des lettres russes a lieu conformément à l'orthographe tchèque.

En particulier  $\dot{c}$  se prononce *tch*, *c* se prononce *tz*,  $\dot{z}$  se prononce comme *ch* dans *chat*,  $\dot{z}$  se prononce comme notre *j* dans *je*, *j* se prononce comme notre *y* dans *essayer*.

|                                |                                   |                                |                              |
|--------------------------------|-----------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| Abb. = Abhandlungen.           | Commentat. = Commenta-<br>tiones. | Lehrb. = Lehrbuch.             | Proc. = Proceeding.          |
| Acad. = Academia.              | Corresp. = Correspondance.        | Leop. = Leopoldina.            | progr. = programme.          |
| Accad. = Accademia.            | C. R. = Comptes rendus.           | Lpz., Lps. = Leipzig.          | prop. = proposition.         |
| Akad. = Akademie.              | déf. = définition.                | Mag. = Magazine.               | publ. = publié.              |
| Alg. = Algèbre, Algebra.       | Denkschr. = Denkschriften.        | Mec. = Mécanique.              | Quart. = Quarterly.          |
| Allg. = Allgemeine.            | Diss. = Dissertation.             | med. = medicinisch.            | R. = reale, royal.           |
| Amer. = American.              | Ec. = Ecole.                      | Mém. = Mémoire.                | Recent. = Recentiores.       |
| Ann. = Annalen, Annales,       | éd. = édité à, édité par,         | métaph. = métaphysique.        | Rendic. = Rendiconto.        |
| Annali.                        | édition.                          | Mitt. = Mitteilung.            | réimp. = réimprimé.          |
| Anw. = Anwendung.              | Edinb. = Edinburgh.               | Monatsb. = Monatshefte.        | sc. = sciences.              |
| appl. = appliqué.              | Educ. = Educational.              | Monatsb. = Monatsberichte.     | Schr. = Schriften.           |
| arith. = aritmetica.           | elem. = elementare.               | ms., mss. = manuscrit, ma-     | scient. = scientifique.      |
| arith. = Arithmetik, arith-    | elem. = élémentaire.              | nuscrits.                      | s. d. = sans date.           |
| metrique.                      | ex. = exemple.                    | Nachr. = Nachrichten.          | sect. = section.             |
| assoc. = association.          | extr. = extrait.                  | nat. = naturelle.              | Selsk. = Selskabs.           |
| Aufs. = Aufsätze.              | fasc. = fascicule.                | naturf. = naturforschende.     | sign. = signature.           |
| Avanc. = Avancement.           | fig. = figure.                    | naturw. = naturwissenschaft-   | Sitzgeb. = Sitzungsberichte. |
| Ber. = Berichte.               | fis. = fisica.                    | norm. = normale. [lich.        | s. l. = sans lieu.           |
| Bibl. Congrès = bibliothèque   | fol. = folio.                     | nouv. = nouveau, nouvelle.     | spéc. = spéciale.            |
| du Congrès.                    | Géom. = Géométrie.                | num. = numérique.              | suiv. = suivante.            |
| Bibl. math. = Bibliotheca      | Ges. = Gesellschaft.              | numism. = numismatique.        | sup. = supérieure.           |
| mathematica.                   | Gesch. = Geschichte.              | Op. = Opera.                   | suppl. = supplément.         |
| Brit. = British.               | Giorn. = Giornale.                | Opusc. = Opuscul.              | soc. = société.              |
| Bull. = Bulletin.              | Gött. = Göttingen, Göttingue.     | Overs. = Oversight.            | theor. = theoretische.       |
| Bull. bibl. = Bulletin biblio- | Gymn. = Gymnasium.                | p. = page.                     | trad. = traduction.          |
| grafico.                       | Hist. = Histoire.                 | p. ex., par ex. = par exemple. | Trans. = Transactions.       |
| cah. = cahier.                 | id. = idem, ibidem.               | partic. = particulier.         | Unterh. = Unterhaltung.      |
| Cambr. = Cambridge.            | imp. = imprimé.                   | Petrop., Petersb. = Saint      | Ver. = Vereinigung.          |
| car. = carton.                 | inser. = inscription.             | Petersbourg.                   | Verh. = Verhandlung.         |
| cf. = comparez.                | inst. = institution.              | philol. = philologie.          | Vetensk. = Vetenskabs.       |
| chap. = chapitre.              | internéd. = intermédiaire.        | philom. = philomatique.        | Viertelj. = Vierteljahres-   |
| chim. = chimie, chimique.      | intern. = international.          | philos. = philosophique.       | schrift.                     |
| circ. = circolo.               | introd. = introduction.           | phys. = physique.              | vol. = volume.               |
| circul. = circular.            | Ist. = Istituto.                  | pl. = planche.                 | Vorles. = Vorlesung.         |
| col. = colonne.                | J. = Journal.                     | polyt. = polytechnique.        | Wiss. = Wissenschaft,        |
| Comm. = Commentarii.           | Jahresb. = Jahresbericht.         | pontif. = pontificia.          | wissenschaftlich.            |
|                                |                                   | posth. = posthume.             | Z. = Zeitschrift.            |

LES GRANDS CLASSIQUES GAUTHIER-VILLARS

---

ENCYCLOPÉDIE  
DES  
SCIENCES MATHÉMATIQUES  
PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DES ACADEMIES DES SCIENCES  
DE GÖTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE  
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

**JULES MOLK** (†)

ET POUR CE QUI CONCERNE LA MÉCANIQUE SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE DE

**PAUL APPELL**,

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

TOME IV (DEUXIÈME VOLUME),

MÉCANIQUE GÉNÉRALE



 blong®

ÉDITIONS  
JACQUES GABAY

### Avis.

Dans l'édition française, on a cherché à reproduire dans leurs traits essentiels les articles de l'édition allemande; dans le mode d'exposition adopté, on a cependant largement tenu compte des traditions et des habitudes françaises.

Cette édition française offrira un caractère tout particulier par la collaboration de mathématiciens allemands et français. L'auteur de chaque article de l'édition allemande a, en effet, indiqué les modifications qu'il jugeait convenable d'introduire dans son article et, d'autre part, la rédaction française de chaque article a donné lieu à un échange de vues auquel ont pris part tous les intéressés; les additions dues plus particulièrement aux collaborateurs français sont mises entre deux astérisques.

Réimpression autorisée de l'édition française de l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées*, publiée par fascicules entre 1904 et 1916 par Gauthier-Villars et B.G. Teubner.

La publication de l'édition française a été définitivement interrompue en 1916 en raison de la guerre.

Cette réédition a été réalisée avec des volumes obligeamment prêtés par les Bibliothèques de l'École Normale Supérieure, de l'École Polytechnique et du Conservatoire National des Arts et Métiers.

De précieuses épreuves, aimablement confiées par M. Jean-Luc Verley, Maître de conférences à l'Université de Paris VII, ont permis de compléter l'article *Fonctions analytiques* écrit par W.F. Osgood, P. Boutroux et J. Chazy, et de terminer l'article *Développements concernant l'hydrodynamique* écrit par A.E.H. Love, P. Appell, H. Beghin et H. Villat. Nous sommes particulièrement reconnaissants à la Bibliothèque de l'Institut Henri Poincaré, ainsi qu'à Mlle Karine Chemla, Chercheur au C.N.R.S., de nous avoir fourni de très utiles renseignements bibliographiques. Nous adressons à tous nos plus sincères remerciements.

© 1991, Éditions Jacques Gabay  
25, rue du D<sup>r</sup> Roux 92330 Sceaux

Tous droits réservés. Aucun extrait de ce livre ne peut-être reproduit, sous quelque forme ou quelque procédé que ce soit, sans le consentement préalable de l'Éditeur.

Tome IV, volume 2 ISBN 2-87647-115-9  
ISSN 0989-0602



ENCYCLOPÉDIE  
DES  
SCIENCES MATHÉMATIQUES  
PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DES ACADÉMIES DES SCIENCES  
DE GÖTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE  
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

**JULES MOLK** (†)

ET POUR CE QUI CONCERNE LA MÉCANIQUE SOUS LA DIRECTION SCIENTIFIQUE DE

**PAUL APPELL,**

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE PARIS.

TOME IV (DEUXIÈME VOLUME),

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

RÉDIGÉ DANS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

**F. KLEIN**

ET

**C. H. MÜLLER**

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ  
DE GÖTTINGUE

PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ TECHNIQUE  
DE HANOVRÉ



PARIS,  
GAUTHIER-VILLARS

LEIPZIG,  
B. G. TEUBNER

# ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES

## TABLE DES MATIÈRES des 7 premiers Tomes

### Tome I — ARITHMÉTIQUE ET ALGÈBRE

#### Volume 1 — Arithmétique

|                                       |      |                                                                                                                                   | Pages   |
|---------------------------------------|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <i>fasc. 1 — 10 août 1904</i>         | I-1  | Principes fondamentaux de l'Arithmétique<br><b>H. Schubert — J. Tannery — J. Molk</b>                                             | 1-62    |
|                                       | I-2  | Analyse combinatoire et théorie des déterminants<br><b>E. Netto — H. Vogt</b>                                                     | 63-132  |
|                                       | I-3  | Nombres irrationnels et notion de limite ( <i>à suivre</i> )<br><b>A. Pringsheim — J. Molk</b>                                    | 133-160 |
| <i>fasc. 2 — 30 mai 1907</i>          | I-3  | ( <i>suite et fin</i> )                                                                                                           | 161-208 |
|                                       | I-4  | Algorithmes illimités<br><b>A. Pringsheim — J. Molk</b>                                                                           | 209-328 |
| <i>fasc. 3 — 2 avril 1908</i>         | I-5  | Nombres complexes<br><b>E. Study — E. Cartan</b>                                                                                  | 329-468 |
|                                       | I-6  | Algorithmes illimités de nombres complexes<br><b>A. Pringsheim — M. Fréchet</b>                                                   | 469-488 |
| <i>fasc. 4 — 17 août 1909</i>         | I-7  | Théorie des ensembles<br><b>A. Schoenflies — R. Baire</b>                                                                         | 489-531 |
|                                       | I-8  | Sur les groupes finis discontinus*<br><b>H. Burkhardt — H. Vogt</b>                                                               | 532-616 |
| <b>Volume 2 — Algèbre</b>             |      |                                                                                                                                   |         |
| <i>fasc. 1 — 19 novembre 1907</i>     | I-9  | Fonctions rationnelles<br><b>E. Netto — R. Le Vasseur</b>                                                                         | 1-232   |
| <i>fasc. 2 — 30 août 1910</i>         | I-10 | Propriétés générales des corps et des variétés algébriques ( <i>à suivre</i> )<br><b>G. Landsberg — J. Hadamard — J. Kürschak</b> | 233-328 |
| <i>fasc. 3 — 15 février 1911</i>      | I-10 | ( <i>suite et fin</i> )                                                                                                           | 329-385 |
|                                       | I-11 | Théorie des formes et des invariants ( <i>à suivre</i> )<br><b>W.F. Meyer — J. Drach</b>                                          | 386-424 |
| <i>fasc. 4 — 2 février 1912</i>       | I-11 | ( <i>suite</i> )*                                                                                                                 | 425-520 |
| <b>Volume 3 — Théorie des nombres</b> |      |                                                                                                                                   |         |
| <i>fasc. 1 — 10 juillet 1906</i>      | I-15 | Propositions élémentaires de la théorie des nombres<br><b>P. Bachmann — E. Maillet</b>                                            | 1-75    |

|                                                                                       |      |                                                                                                                            |         |
|---------------------------------------------------------------------------------------|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
|                                                                                       | I-16 | Théorie arithmétique des formes ( <i>à suivre</i> )<br><b>K.Th. Vahlen — E. Cahen</b>                                      | 76-96   |
| <i>fasc. 2 — 15 février 1908</i>                                                      | I-16 | ( <i>suite</i> )                                                                                                           | 97-192  |
| <i>fasc. 3 — 17 juin 1910</i>                                                         | I-16 | ( <i>suite et fin</i> )                                                                                                    | 193-214 |
|                                                                                       | I-17 | Propositions transcendantes de la théorie des nombres ( <i>à suivre</i> )<br><b>P. Bachmann — J. Hadamard — E. Maillet</b> | 215-288 |
| <i>fasc. 4 — 30 octobre 1910</i>                                                      | I-17 | ( <i>suite</i> )                                                                                                           | 289-384 |
| <i>fasc. 5 — 18 juin 1915</i>                                                         | I-17 | ( <i>suite et fin</i> )                                                                                                    | 385-387 |
|                                                                                       | I-18 | Théorie des corps de nombres algébriques<br><b>D. Hilbert — H. Vogt</b>                                                    | 388-473 |
|                                                                                       | I-19 | Multiplication complexe*<br><b>H. Weber — E. Cahen</b>                                                                     | 474-480 |
| <b>Volume 4 — Calcul des probabilités. Théorie des erreurs. Applications diverses</b> |      |                                                                                                                            |         |
| <i>fasc. 1 — 20 mars 1906</i>                                                         | I-20 | Calcul des probabilités<br><b>E. Czuber — J. Le Roux</b>                                                                   | 1-46    |
|                                                                                       | I-21 | Calcul des différences et interpolation<br><b>D. Selivanov — J. Bauschinger — H. Andoyer</b>                               | 47-160  |
| <i>fasc. 2 — 5 décembre 1908</i>                                                      | I-22 | Théorie des erreurs<br><b>J. Bauschinger — H. Andoyer</b>                                                                  | 161-195 |
|                                                                                       | I-23 | Calculs numériques ( <i>à suivre</i> )<br><b>R. Mehmke — M. d'Ocagne</b>                                                   | 196-320 |
| <i>fasc. 3 — 20 octobre 1909</i>                                                      | I-23 | ( <i>suite et fin</i> )                                                                                                    | 321-452 |
|                                                                                       | I-24 | Statistique ( <i>à suivre</i> )<br><b>L. von Bortkiewicz — F. Ottramare</b>                                                | 453-480 |
| <i>fasc. 4 — 12 août 1911</i>                                                         | I-24 | ( <i>suite et fin</i> )                                                                                                    | 481-490 |
|                                                                                       | I-25 | Technique de l'assurance sur la vie<br><b>G. Bohlmann — H. Poterin du Motel</b>                                            | 491-590 |
|                                                                                       | I-26 | Économie mathématique*<br><b>V. Pareto</b>                                                                                 | 591-640 |
| <b>Tome II — ANALYSE</b>                                                              |      |                                                                                                                            |         |
| <b>Volume 1 — Fonctions de variables réelles</b>                                      |      |                                                                                                                            |         |
| <i>fasc. 1 — 21 mai 1909</i>                                                          | II-1 | Principes fondamentaux de la théorie des fonctions<br><b>A. Pringsheim — J. Molk</b>                                       | 1-112   |
| <i>fasc. 2 — 30 juin 1912</i>                                                         | II-2 | Recherches contemporaines sur la théorie des fonctions<br><b>E. Borel — L. Zoratti — P. Montel — M. Fréchet</b>            | 113-241 |
|                                                                                       | II-3 | Calcul différentiel<br><b>A. Voss — J. Molk</b>                                                                            | 242-336 |

**Volume 2 — Fonctions de variables complexes**

|                               |      |                                                                                          |        |
|-------------------------------|------|------------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| <i>fasc. 1 — 23 mai 1911</i>  | II-7 | Analyse algébrique<br><b>A. Pringsheim — G. Faber — J. Molk</b>                          | 1-93   |
|                               | II-8 | Fonctions analytiques ( <i>à suivre</i> )<br><b>W.F. Osgood — P. Boutroux — J. Chazy</b> | 94-96  |
| <i>épreuve — 10 août 1912</i> | II-8 | (suite)*                                                                                 | 97-128 |

**Volume 3 — Équations différentielles ordinaires**

|                                  |       |                                                          |        |
|----------------------------------|-------|----------------------------------------------------------|--------|
| <i>fasc. 1 — 22 février 1910</i> | II-15 | Existence de l'intégrale générale<br><b>P. Painlevé</b>  | 1-57   |
|                                  | II-16 | Méthodes d'intégration élémentaires<br><b>E. Vessiot</b> | 58-170 |

**Volume 4 — Équations aux dérivées partielles**

|                               |       |                                                                                                                                                  |         |
|-------------------------------|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <i>fasc. 1 — 30 juin 1913</i> | II-21 | Propriétés générales des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Équations linéaires du premier ordre.<br><b>E. von Weber — G. Floquet</b> | 1-55    |
|                               | II-22 | Équations non linéaires du premier ordre. Équations d'ordre plus grand que un.<br><b>E. von Weber — E. Goursat</b>                               | 56-160  |
| <i>fasc. 2 — 17 mars 1916</i> | II-23 | Groupe de transformations continues*<br><b>H. Burkhardt — L. Maurer — E. Vessiot</b>                                                             | 161-240 |

**Volume 5 — Développement en séries**

|                                  |        |                                                                                    |         |
|----------------------------------|--------|------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <i>fasc. 1 — 31 mars 1912</i>    | II-26  | Équations et opérations fonctionnelles<br><b>S. Pincherle</b>                      | 1-81    |
|                                  | II-27  | Interpolation trigonométrique<br><b>H. Burkhardt — E. Esclangon</b>                | 82-153  |
|                                  | II-28  | Fonctions sphériques ( <i>à suivre</i> )<br><b>A. Wangerin — A. Lambert</b>        | 154-160 |
| <i>fasc. 2 — 12 février 1914</i> | II-28  | (suite et fin)                                                                     | 161-230 |
|                                  | II-28a | Généralisations diverses des fonctions sphériques<br><b>P. Appell — A. Lambert</b> | 231-268 |

**Volume 6 — Calcul des variations. Compléments**

|                                    |       |                                                                                                 |         |
|------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <i>fasc. 1 — 15 septembre 1913</i> | II-31 | Calcul des variations ( <i>à suivre</i> )<br><b>A. Kneser — E. Zermelo — H. Hahn — M. Lécat</b> | 1-128   |
| <i>fasc. 2 — 16 juin 1916</i>      | II-31 | (suite et fin)                                                                                  | 129-288 |

**Tome III — GÉOMÉTRIE****Volume 1 — Fondements de la géométrie. Géométrie générale**

|                                                                      |        |                                                                                                                                                              |         |
|----------------------------------------------------------------------|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <i>fasc. 1 — 30 mars 1911</i>                                        | III-1  | Principes de la géométrie<br><b>F. Enriques</b>                                                                                                              | 1-147   |
|                                                                      | III-1a | Notes sur la géométrie non-archimédienne<br><b>A. Schoenflies</b>                                                                                            | 148-151 |
|                                                                      | III-2  | Les notions de ligne et de surface ( <i>à suivre</i> )<br><b>H. von Mangoldt — L. Zoretti</b>                                                                | 152-160 |
| <i>fasc. 2 — 8 juillet 1915</i>                                      | III-2  | (suite et fin)                                                                                                                                               | 161-184 |
|                                                                      | III-3  | Exposé parallèle du développement de la géométrie synthétique et de la géométrie analytique pendant le XIX <sup>e</sup> siècle<br><b>G. Fano — S. Carrus</b> | 185-259 |
|                                                                      | III-4  | Géométrie énumérative<br><b>H.G. Zeuthen — M. Pieri</b>                                                                                                      | 260-331 |
| Elie Cartan, <i>Œuvres complètes</i> Partie III, Vol. 2, G.-V., 1955 | III-5  | La théorie des groupes continus et la géométrie<br><b>G. Fano — E. Cartan</b>                                                                                | 1-135   |

**Volume 2 — Géométrie descriptive. Géométrie élémentaire**

|                                   |       |                                                           |         |
|-----------------------------------|-------|-----------------------------------------------------------|---------|
| <i>fasc. 1 — 23 décembre 1913</i> | III-8 | Géométrie projective<br><b>A. Schoenflies — A. Tresse</b> | 1-143   |
|                                   | III-9 | Configurations*<br><b>E. Steinitz — E. Merlin</b>         | 144-160 |

**Volume 3 — Géométrie algébrique plane**

|                               |        |                                                                         |         |
|-------------------------------|--------|-------------------------------------------------------------------------|---------|
| <i>fasc. 1 — 25 juin 1911</i> | III-17 | Coniques ( <i>à suivre</i> )<br><b>F. Dingeldey — E. Fabry</b>          | 1-160   |
| <i>fasc. 2 — 3 août 1915</i>  | III-17 | (suite et fin)                                                          | 161-162 |
|                               | III-18 | Systèmes de coniques<br><b>F. Dingeldey — E. Fabry</b>                  | 163-256 |
|                               | III-19 | Théorie générale des courbes planes algébriques*<br><b>L. Berzolari</b> | 257-304 |

**Volume 4 — Géométrie algébrique dans l'espace**

|                                |        |                                           |       |
|--------------------------------|--------|-------------------------------------------|-------|
| <i>fasc. 1 — 28 avril 1914</i> | III-22 | Quadriques<br><b>O. Staudé — A. Grévy</b> | 1-164 |
|--------------------------------|--------|-------------------------------------------|-------|

**Tome IV — MÉCANIQUE****Volume 1 — Généralités. Historique**

|                               |      |                                                                                     |         |
|-------------------------------|------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <i>fasc. 1 — 15 mars 1915</i> | IV-1 | Principes de la mécanique rationnelle<br><b>A. Voss — E. Cosserat — F. Cosserat</b> | 1-187   |
|                               | IV-2 | Mécanique statistique<br><b>P. Ehrenfest — T. Ehrenfest — E. Borel</b>              | 188-292 |

## Volume 2 — Mécanique générale

|                              |      |                                                                           |                    |
|------------------------------|------|---------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| <i>fasc. 1 — 22 mai 1912</i> | IV-4 | Fondements géométriques de la statique<br><b>H.E. Timerding — L. Lévy</b> | 1-144              |
|                              | IV-5 | Géométrie des masses<br><b>G. Jung — E. Carvallo</b>                      | 145-210            |
|                              | IV-6 | Cinématique ( <i>à suivre</i> )<br><b>A. Schoenflies — G. Koenigs</b>     | 211-224<br>225-304 |

*fasc. 2 — 11 avril 1916*

|  |      |          |  |
|--|------|----------|--|
|  | IV-6 | (suite)* |  |
|--|------|----------|--|

## Volume 5 — Systèmes déformables

|                                  |       |                                                                                                                          |                    |
|----------------------------------|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| <i>fasc. 1 — 31 juillet 1912</i> | IV-16 | Notions géométriques fondamentales<br><b>M. Abraham — P. Langevin</b>                                                    | 1-60               |
|                                  | IV-17 | Hydrodynamique ( <i>à suivre</i> )<br><b>A.E.H. Love — P. Appell — H. Beghin</b>                                         | 61-96<br>97-101    |
| <i>fasc. 2 — 4 mars 1914</i>     | IV-17 | (suite et fin)                                                                                                           |                    |
|                                  | IV-18 | Développements concernant l'hydrodynamique ( <i>à suivre</i> )<br><b>A.E.H. Love — P. Appell — H. Beghin — H. Villat</b> | 102-208<br>209-211 |

## Volume 6 — Balistique. Hydraulique

|                                   |        |                                                                                                                     |         |
|-----------------------------------|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <i>fasc. 1 — 25 novembre 1913</i> | IV-21  | Balistique extérieure<br><b>C. Cranz — E. Vallier</b>                                                               | 1-105   |
|                                   | IV-22  | Balistique intérieure<br><b>C. Cranz — C. Benoît</b>                                                                | 106-150 |
|                                   | IV-22a | Développements concernant quelques recherches de balistiques exécutées en France<br><b>F. Gossot — R. Liouville</b> | 151-191 |
|                                   | IV-23  | Hydraulique*<br><b>Ph. Forchheimer — A. Boulanger</b>                                                               | 192     |

## Tome V — PHYSIQUE

### Volume 1 — Thermodynamique

|                                  |     |                                                 |      |
|----------------------------------|-----|-------------------------------------------------|------|
| <i>fasc. 1 — 15 février 1916</i> | V-1 | La mesure<br><b>C. Runge — Ch.Ed. Guillaume</b> | 1-64 |
|----------------------------------|-----|-------------------------------------------------|------|

### Volume 2 — Physique moléculaire

|                                  |      |                                                                                                                 |       |
|----------------------------------|------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| <i>fasc. 1 — 2 novembre 1915</i> | V-6  | Histoire des conceptions fondamentales de l'atomistique en chimie<br><b>F.W. Hinrichsen — M. Joly — J. Roux</b> | 1-36  |
|                                  | V-7  | Stereochimie<br><b>L. Mamlock — J. Roux</b>                                                                     | 37-65 |
|                                  | V-7a | Considérations sur les poids atomiques<br><b>E. Study — J. Roux</b>                                             | 66-71 |

|     |                                                         |       |
|-----|---------------------------------------------------------|-------|
| V-8 | Cristallographie*<br><b>Th. Liebisch — F. Wallerant</b> | 72-96 |
|-----|---------------------------------------------------------|-------|

## Volume 3 — Principes physiques de l'Électricité

|                              |      |                                                                  |      |
|------------------------------|------|------------------------------------------------------------------|------|
| <i>fasc. 1 — 19 mai 1916</i> | V-14 | Actions à distance<br><b>R. Reiff — A. Sommerfeld — E. Rothé</b> | 1-76 |
|------------------------------|------|------------------------------------------------------------------|------|

## Volume 4 — Principes physiques de l'Optique

|                                  |      |                                                                   |       |
|----------------------------------|------|-------------------------------------------------------------------|-------|
| <i>fasc. 1 — 7 décembre 1915</i> | V-17 | Anciennes théories de l'optique<br><b>A. Wangerin — C. Raveau</b> | 1-104 |
|----------------------------------|------|-------------------------------------------------------------------|-------|

## Tome VI — GÉODÉSIE ET GÉOPHYSIQUE

### Volume 1 — Géodésie

|                                   |      |                                                              |         |
|-----------------------------------|------|--------------------------------------------------------------|---------|
| <i>fasc. 1 — 7 septembre 1915</i> | VI-1 | Triangulation géodésique<br><b>P. Pizzetti — H. Noirel</b>   | 1-101   |
|                                   | VI-2 | Bases et nivellement<br><b>P. Pizzetti — H. Noirel</b>       | 102-176 |
|                                   | VI-3 | Déviation de la verticale*<br><b>P. Pizzetti — H. Noirel</b> | 177-224 |

### Volume 2 — Géophysique

|                                  |      |                                                                                      |      |
|----------------------------------|------|--------------------------------------------------------------------------------------|------|
| <i>fasc. 1 — 25 juillet 1916</i> | VI-8 | Marées océaniques et marées internes*<br><b>G.H. Darwin — S.S. Hough — E. Fichot</b> | 1-96 |
|----------------------------------|------|--------------------------------------------------------------------------------------|------|

## Tome VII — ASTRONOMIE

### Volume 1 — Astronomie sphérique

|                                           |       |                                                                                                                                             |                    |
|-------------------------------------------|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| <i>fasc. 1 — 1<sup>er</sup> août 1913</i> | VII-1 | Système de référence et mesure du temps<br><b>E. Anding — H. Bourget</b>                                                                    | 1-13               |
|                                           | VII-2 | Réfraction et extinction<br><b>A. Bemporad — P. Puiseux</b>                                                                                 | 14-67              |
|                                           | VII-3 | Réduction des observations astronomiques<br><b>F. Cohn — E. Doublet — L. Picart</b>                                                         | 68-138             |
|                                           | VII-4 | Détermination de la longitude et de la latitude ( <i>à suivre</i> )<br><b>C.W. Wirtz — G. Fayet</b>                                         | 139-224<br>225-232 |
| <i>fasc. 2 — 4 janvier 1916</i>           | VII-4 | (suite et fin)                                                                                                                              |                    |
|                                           | VII-5 | Les horloges<br><b>C.Ed. Caspari</b>                                                                                                        | 233-271            |
|                                           | VII-6 | Théorie des instruments astronomiques de mesures angulaires, des méthodes d'observation et de leurs erreurs*<br><b>F. Cohn — J. Mascart</b> | 272-320            |

\* La fin de l'article n'a pas été publiée en raison de la guerre.

#### IV 4. FONDEMENTS GEOMÉTRIQUES DE LA STATIQUE.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE H. E. TIMERDING (BRUNSWICK),  
PAR LUCIEN LÉVY (PARIS).

##### Introduction<sup>1)</sup>.

1. **Objet de cet article.** La Mécanique et la Physique fournissent des exemples de quantités dont la détermination exige la connaissance de tout ou partie des éléments suivants: un point, une droite indéfinie passant par ce point, un sens choisi sur la droite et un nombre absolu auquel on donne, suivant les cas, le nom de longueur, d'intensité, ou d'amplitude de la quantité envisagée. Telles sont, pour ne citer que quelques exemples, les *forces*, les *vitesse*s, les *accélération*s.

On appelle ces quantités des *quantités vectorielles*; on les représente géométriquement par des portions de droites orientées ou *vecteurs* [n° 3].

Dans cet article on ne s'occupera pas des *points masses*, c'est-à-dire des points géométriques affectés d'un nombre positif ou négatif: leur étude est réservée pour l'article IV 5. Par contre, on envisagera, outre les quantités vectorielles indiquées plus haut, d'autres quantités auxquelles on peut encore conserver la dénomination de vectorielles et qui impliquent la connaissance d'un plan, ou, au moins, d'une direction de plans, et d'un sens de rotation autour d'une normale à ce plan, comme les *moments* de forces données, les *vitesse*s angulaires de rotation, les *moments magnétiques*.

Ces nouveaux éléments peuvent être représentés par des aires planes affectées d'un sens de parcours ou, comme on dit plus brièvement, par des *aires orientées*. Il y aura lieu d'examiner le lien qui

1) La rédaction de l'édition française de l'Encyclopédie a cru devoir faire précéder l'exposé de l'article sur les fondements géométriques de la Statique d'une Introduction conforme au mode d'exposition des *Éléments* de la Mécanique rationnelle généralement adopté en France. Les astérisques indiquent ce qui, dans cette introduction, est entièrement dû à Lucien Lévy et à Paul Appell.\*

existe entre ces aires planes orientées et les droites limitées orientées. Enfin on exposera les autres ressources, combinaisons de points, de droites ou de plans, qu'offre la géométrie pour représenter certains groupes de phénomènes mécaniques ou physiques.

Voici d'abord quelques théorèmes et définitions de géométrie élémentaire dont on fait constamment usage.\*

2. **Segments sur un axe orienté.** „On appelle *axe orienté* ou simplement *axe* une droite indéfinie sur laquelle on a fixé un *sens positif*,  $X'X$  par exemple; le sens opposé  $XX'$  est appelé *sens négatif* de l'axe<sup>2)</sup>.

On appelle *segment* la portion d'axe orienté (fig. 1) comprise entre deux points  $a$  et  $b$  de l'axe, pris dans un ordre déterminé  $a, b$ ; le premier point  $a$  est l'origine du segment, le deuxième  $b$  en est l'extrémité.

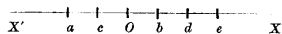


Fig. 1.

La *valeur algébrique* du segment défini par les points  $a$  (origine) et  $b$  (extrémité) est le nombre algébrique<sup>3)</sup>  $\overline{ab}$  formé en prenant la valeur absolue de la longueur du segment mesurée avec une certaine unité et en la faisant précéder du signe + ou du signe — suivant qu'un mobile décrivant l'axe de  $a$  en  $b$  marche dans le sens positif ou dans le sens négatif de l'axe.

La notation  $\overline{ab}$  désigne donc ici un nombre positif ou négatif; si  $b$  coïncide avec  $a$  le nombre est nul.

D'après ces définitions, on a

$$\overline{ab} = -\overline{ba} \quad \text{ou} \quad \overline{ab} + \overline{ba} = 0.$$

Si l'on prend plusieurs points  $a, b, c, d, e$  sur un axe, on a

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} + \overline{ea} = 0.$$

Soit  $O$  une origine choisie sur l'axe; le nombre

$$\overline{Oa} = x$$

est l'*abscisse* du point  $a$ .

2) Toute droite indéfinie peut ainsi être considérée comme la superposition de deux axes  $X'X$  et  $XX'$  de sens opposés. E. N. Laguerre [Nouv. Ann. math. (3) 1 (1882), p. 542; Œuvres 2, Paris 1906, p. 608] s'est servi de la dénomination de *semi-droites* pour les axes orientés.\*

3) Nous désignons ici un *nombre* par deux lettres surmontées d'un trait. M. Chasles [Traité de géométrie supérieure, (1<sup>re</sup> éd.) Paris 1852; (2<sup>e</sup> éd.) Paris 1880] désigne par  $\overline{ab^2}, \overline{ab^3}, \dots$  les puissances de la valeur algébrique du segment  $ab$ . Pour uniformiser cette notation, plusieurs auteurs contemporains ont désigné par  $\overline{ab}$  la valeur algébrique du segment  $ab$  lui-même [cf. E. Carvallo, Traité de mécanique, Paris 1893; P. Appel, Leçons de mécanique élémentaire, Paris 1909].\*

Soient  $x$  et  $x'$  les abscisses de deux points  $a$  et  $b$ , la relation

$$\overline{ab} + \overline{bO} + \overline{Oa} = 0$$

donne la valeur algébrique

$$\overline{ab} = x' - x$$

du segment  $ab$  en fonction des abscisses des deux points  $a$  et  $b$ .\*

3. **Le vecteur.** „On appelle *vecteur*<sup>4)</sup> l'ensemble de deux points de l'espace  $A$  et  $B$  pris dans un ordre déterminé et de la portion de droite comprise entre eux<sup>5)</sup>. Le premier point  $A$  s'appelle l'*origine* ou le *point d'application* du vecteur, le second l'*extrémité*. Dans les figures, on indique quelquefois l'extrémité d'un vecteur par une flèche.

Un vecteur est donc défini par deux points  $A$  et  $B$  pris dans un certain ordre. On peut aussi le définir par les éléments suivants: 1°) *origine*, 2°) *direction*, 3°) *sens*, 4°) *longueur*.

L'*origine* a déjà été définie; c'est le premier point  $A$ ;

La *direction* du vecteur est la direction de la droite indéfinie qui porte le vecteur et qu'on appelle le *support du vecteur*;

Le *sens* du vecteur est le sens dans lequel un mobile allant de  $A$  en  $B$  parcourt le support considéré comme un axe orienté.

La *longueur*<sup>6)</sup>  $R$  du vecteur est la distance de son origine et de son extrémité mesurée avec une certaine unité.

4) Le mot *vecteur*, du latin *vehere* „transporter“, d'où *radius vector* et plus brièvement *vector* a été proposé par W. R. Hamilton, Cambr. Dublin math. J. 1 (1846), p. 64.

5) J. R. Argand [Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques, Paris 1806 (sans nom d'auteur); (2<sup>e</sup> éd.) publ. par G. J. Hoüel, Paris 1874, p. 11] dit „ligne dirigée“.

Avant lui, C. Wessel, „Om directionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphaeriske Polygons Opløsning“ [Nye Samling af det kongelige Danske Videnskabskabernes Selskabs Skrifter (2) 5 (1799), p. 469/518 (1798); traduit en français et publié sous le titre: Essai sur la représentation analytique de la direction, par H. Valentiner, T. N. Thiele et H. G. Zeuthen, Copenhague 1897, sous les auspices de l'Académie royale de Danemark] avait dit „ligne droite“, ou simplement „ligne“.

H. Grassmann [Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, p. 18 (n° 14); (2<sup>e</sup> éd.) Leipzig 1878, p. 18; Werke 1<sup>er</sup>, publ. par F. Engel, Leipzig 1894, p. 49] employait le mot „segment“ („Strecke“). Cf. Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862, p. 142; Werke 1<sup>er</sup>, publ. par F. Engel, Leipzig 1896, p. 148. Voir aussi H. Grassmann junior, Projektive Geometrie der Ebene 1, Leipzig 1909, p. 6.

6) W. R. Hamilton écrit  $TR$  (ce qui s'annonce *tenseur* de  $R$ ), pour la longueur d'un vecteur  $R$ ; H. Grassmann, écrit  $\sqrt{R^2}$ .

G. Bellavitis<sup>7)</sup> désigne par  $AB$  le vecteur et aussi sa longueur, la distinction se trouvant faite par le signe d'égalité<sup>11)</sup>.

Les éléments 2°) et 3°), direction et sens, peuvent être réunis en un seul élément auquel on donne le nom d'*orientation du vecteur*. L'orientation d'un vecteur est, par définition, l'orientation de l'axe fixé sur le support du vecteur de façon que le vecteur y détermine un segment positif.

Quand le vecteur est situé sur un axe orienté (dont l'orientation peut d'ailleurs coïncider ou ne pas coïncider avec celle du vecteur), les deux derniers éléments, sens et grandeur, sont caractérisés par la valeur algébrique  $\overline{AB}$  du segment  $AB$  de l'axe support.

On représentera souvent un vecteur par la notation<sup>7)</sup>

$$\overrightarrow{AB},$$

en écrivant d'abord l'origine, puis l'extrémité.

Souvent aussi, on représentera un vecteur par une seule lettre surmontée d'une flèche. Ainsi  $\vec{R}$  étant la longueur d'un vecteur, on représentera souvent ce vecteur par l'un ou l'autre des symboles

$$\vec{R}, \vec{r}, \vec{r} \text{ ou } \vec{R}.$$

Deux vecteurs  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$  sont dits *équipollents*<sup>11)</sup> quand ils ont même longueur, qu'ils sont parallèles et de même sens.

Au lieu de dire que deux vecteurs sont équipollents on dit assez souvent qu'ils sont *égaux*; mais nous éviterons de le faire, cette façon de parler pouvant dans certains cas prêter à confusion.

La projection orthogonale d'un vecteur  $AB$  sur un plan est le vecteur qui a pour origine la projection de  $A$  et pour extrémité celle de  $B$  sur le plan. La longueur de cette projection est égale à

*R. Gans* [Einführung in die Vectoranalysis, Leipzig 1905, p. 5] emploie la notation  $[R]$  de *K. Weierstrass*.

*A. L. Cauchy* [C. R. Acad. sc. Paris 29 (1849), p. 250; Œuvres (1) 11, Paris 1899, p. 162] écrit *mod R* ce qui s'énonce *module de R*.

7) Nous adoptons ici, pour désigner un vecteur, la notation la plus simple à énoncer, la plus commode pour l'impression et aussi la plus répandue aussi bien en France [*P. Appell*, Traité de mécanique rationnelle (3<sup>e</sup> éd.) 1, Paris 1909, p. 216; *E. Rouché et Ch. de Comberousse*, Traité de géométrie, (7<sup>e</sup> éd.) 1, Paris 1900, p. 216; *J. Tannery*, Deux leçons de cinématique, Ann. Ec. Norm. (3) 3 (1886), p. 43/80] qu'en Italie [*G. Bellavitis*, Sposizione del metodo delle equipollenze<sup>12)</sup>, Annali delle scienze del regno Lombardo-Veneto (Padoue) 7 (1837), p. 243/61] ou en Allemagne [*A. F. Möbius*, Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827; Werke 1, Leipzig 1886].

*J. R. Argand* [Essai<sup>2)</sup>, Paris 1806; (2<sup>e</sup> éd.) Paris 1874] a employé la notation  $\overline{AB}$ , qui est encore d'un usage courant [Voir par ex. *G. Koenigs*, Leçons de cinématique, Paris 1897, p. 1].

D'autres notations ont été aussi employées, telles que  $[AB]$  par *W. Schell* [Theorie der Bewegung und der Kräfte, (2<sup>e</sup> éd.) 1, Leipzig 1879], ou encore  $(AB)$ .

celle du vecteur  $AB$  multipliée par le cosinus de l'angle aigu que fait son support avec le plan.

La projection orthogonale d'un vecteur  $AB$  sur un axe  $X'X$  est la valeur algébrique  $\overline{ab}$  du segment défini par les projections  $a$  et  $b$  des points  $A$  et  $B$  sur l'axe.

Quand on a orienté le support d'un vecteur  $AB$ , la projection orthogonale de  $AB$  sur l'axe  $X'X$  s'obtient en multipliant la valeur algébrique  $\overline{AB}$  du segment  $AB$  de l'axe support, par le cosinus de l'angle de l'axe support avec l'axe  $X'X$ .

4. Diverses catégories de vecteurs. Suivant la nature des grandeurs physiques ou mécaniques représentées par des vecteurs, ceux-ci peuvent être divisés en trois catégories:

1°) Il peut se faire d'abord que deux vecteurs équipollents représentent l'un et l'autre la même grandeur physique ou mécanique. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour les vecteurs représentant des axes de couples ou des vitesses de translation (dans l'espace), comme on le verra plus loin. Quand il en est ainsi, on dit que *les vecteurs ne sont pas localisés* ou encore qu'ils sont *libres*<sup>8)</sup>.

2°) Il peut arriver, ensuite, que la même grandeur physique soit représentée par deux vecteurs équipollents  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$  à condition qu'ils soient portés par la même droite, tandis que deux vecteurs équipollents portés par deux droites différentes représentent des grandeurs physiques différentes. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour les vecteurs qui représentent des forces appliquées à un corps solide.

8) *A. E. H. Love* [Theoretical mechanics, an introductory treatise on the principles of dynamics, Cambridge 1897, p. 16; (2<sup>e</sup> éd.) Cambridge 1906, p. 18] emploie les expressions *vector unlocalized*, *vector localised in a line*, *vector localised at a point* qu'on peut traduire par *vecteur libre*, *vecteur localisé sur une droite*, *vecteur lié à un point*.

*H. Grassmann* [Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862, p. 163; Werke<sup>9)</sup> 1<sup>a</sup>, p. 165] emploie l'expression „Linientheile“ et la notation  $[AB]$  qui se rattache à sa conception des produits combinatoires de points. Il disait auparavant [Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, voir surtout p. 197/205; Werke<sup>9)</sup> 1<sup>a</sup>, p. 188/201] „Liniengrösse“.

Récemment on a proposé les expressions *linienlückiger Vektor* traduite ici par *vecteur glissant* et *Stab* traduite ici par *bâton* [*E. Buddé*, Allgemeine Mechanik der Punkte und starren Systeme 2, Berlin 1890, p. 537; *H. Grassmann junior*, Schraubenrechnung und Nullsystem, Halle 1899]. La dernière dénomination est aussi employée par *E. Study* [Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903]; *O. Mohr* [Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik, Berlin 1905, p. 1/459] dit simplement *Strecke*, c'est-à-dire *segment*.

Les dénominations employées ici ont été adoptées par *P. Appell* dans la troisième édition de son Traité de mécanique rationnelle 1, Paris 1909 et par *P. Appell* et *S. Dautheville*, Précis de mécanique, Paris 1910.\*

On dit alors que chacun des vecteurs considérés est *localisé sur une droite* ou qu'il est *glissant* sur une droite.

3°) Enfin, il peut arriver que la grandeur physique représentée soit telle que deux vecteurs distincts représentent deux grandeurs physiques distinctes, c'est-à-dire qu'un vecteur *ne puisse être séparé de son point d'application*. On dit alors que chaque vecteur est *localisé en un point ou lié à un point*. C'est ce qui a lieu par exemple pour le vecteur qui figure, à un instant donné, la vitesse d'un point mobile: on verra, en effet, que ce vecteur est *lié* au point.

Chacune de ces trois espèces de vecteurs est caractérisée par des nombres qui sont, en quelque sorte, leurs coordonnées<sup>9)</sup>.

Un vecteur peut dépendre de nombreuses variables: du temps, des coordonnées de son origine, de la vitesse de son origine, des coordonnées ou des vitesses d'autres points de l'espace et de bien d'autres quantités. Dans ce qui suit, nous considérerons les vecteurs en eux-mêmes, abstraction faite des variables dont ils dépendent.

Nous ne tiendrons pas compte des changements qu'ils peuvent subir et nous les regarderons comme des grandeurs constantes. Dès qu'on considère les vecteurs comme des grandeurs variables, généralement en fonction des coordonnées du point d'application, on entre dans une autre théorie à laquelle on a donné le nom d'*Analyse vectorielle*. [Cf. IV 9].\*

5. **Coordonnées des vecteurs.** Soient  $x, y, z$  les coordonnées de l'origine  $A$  d'un vecteur  $AB$ ;  $x', y', z'$  les coordonnées de son extrémité  $B$ ;  $X, Y, Z$  les projections du vecteur  $AB$  sur les axes de coordonnées  $OX, OY, OZ$ .

En projetant le contour  $OAB$  successivement sur les axes on a immédiatement<sup>10)</sup>

$$\begin{aligned} X &= x' - x, \\ Y &= y' - y, \\ Z &= z' - z. \end{aligned}$$

9) Il ne semble pas nécessaire de créer des symboles spéciaux pour distinguer les trois espèces de vecteurs, on du moins le besoin s'en fera si rarement sentir que dans chaque cas quelques mots suffiront pour éviter toute confusion. C'est ainsi qu'en général il suffira d'établir pour les vecteurs libres les propositions qui s'appliqueront ensuite d'elles-mêmes aux vecteurs glissants ou aux vecteurs liés.\*

10) A. L. Cauchy [C. R. Acad. sc. Paris 36 (1853), p. 75; Œuvres (1) 11, Paris 1899, p. 448] envisage simultanément un *rayon vecteur*  $\vec{r}$  et ses *projections*  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  sur les axes; il écrit que le rayon vecteur est la somme de ses projections:

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}.$$

$\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$  sont ici les segments mesurés par les expressions  $xi, yj, zk$  envisagées au n° 7.

L'expression de la longueur  $R$  du vecteur  $AB$  en résulte. Si le trièdre  $OXYZ$  est *trirectangle*, ce qui est presque toujours le cas dans les applications, on a

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Toujours dans le cas d'un trièdre trirectangle  $OXYZ$ , on a, en désignant par  $\alpha, \beta, \gamma$  les trois cosinus directeurs de l'axe orienté  $AB$  et par  $R$  la longueur du vecteur,

$$X = \alpha R, \quad Y = \beta R, \quad Z = \gamma R.$$

Le *seul invariant géométrique* d'un vecteur  $AB$  dans toute transformation de coordonnées est évidemment sa longueur; le *seul invariant analytique* de ce vecteur pour les transformations orthogonales est  $X^2 + Y^2 + Z^2$ ; il en résulte que toute fonction de  $X, Y, Z$  qui est indépendante du choix des axes rectangulaires doit s'exprimer en fonction de

$$X^2 + Y^2 + Z^2.$$

Un vecteur libre est défini analytiquement par les trois nombres *indépendants*

$$X, Y, Z;$$

on les nomme les *coordonnées* ou les *composantes* du vecteur libre.

Un vecteur glissant est défini par ses trois projections  $X, Y, Z$ , qu'on nomme encore ses *composantes*, et par un point de la droite à laquelle appartient le vecteur glissant; si  $x_0, y_0, z_0$  sont les coordonnées de ce point, la droite est donnée par ses équations

$$\frac{x - x_0}{X} = \frac{y - y_0}{Y} = \frac{z - z_0}{Z},$$

qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} yZ - zY &= L, \\ zX - xZ &= M, \\ xY - yX &= N, \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} L &= y_0 Z - z_0 Y, \\ M &= z_0 X - x_0 Z, \\ N &= x_0 Y - y_0 X. \end{aligned}$$

On voit qu'un vecteur glissant est déterminé par six nombres

$$X, Y, Z, L, M, N$$

dont les trois premiers ne sont pas tous nuls et qui satisfont à l'identité

$$(1) \quad LX + MY + NZ = 0.$$

Comme on peut choisir arbitrairement cinq de ces nombres, un vecteur glissant a cinq coordonnées indépendantes. Au lieu de fixer



ces cinq coordonnées on préfère, pour des raisons de symétrie, conserver dans les calculs les six coordonnées  $X, Y, Z, L, M, N$  liés par la relation (1).

Un vecteur lié  $AB$  est défini analytiquement par les six nombres indépendants

$$x, y, z, X, Y, Z$$

ou, si l'on veut, par les six nombres

$$x, y, z, x', y', z'.$$

**6. Vecteurs libres. Leur addition et soustraction.** Lorsque deux vecteurs libres,  $A_1B_1, A_2B_2$ , de longueurs  $P_1$  et  $P_2$ , sont équipollents<sup>11)</sup>, nous écrirons

$$A_1B_1 = A_2B_2$$

ou

$$\vec{P}_1 = \vec{P}_2.$$

Si les axes de coordonnées sont transportés parallèlement à eux-mêmes, les valeurs des projections d'un vecteur sur ces trois axes ne varient pas. Dans une rotation des axes sans changement d'origine, les projections d'un vecteur subissent les mêmes transformations que les coordonnées d'un point. Dans un renversement des axes (voir n° 9), les projections d'un vecteur sur les trois axes changent de signe comme les coordonnées d'un point<sup>12)</sup>.

Deux vecteurs libres  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$  ou  $\vec{P}_1$  et  $\vec{P}_2$  sont égaux et opposés quand ils sont égaux, parallèles et de sens contraires; on exprime ce fait en écrivant:

$$A_1B_1 = -A_2B_2 \quad \text{ou} \quad \vec{P}_1 = -\vec{P}_2.*$$

Inversement, trois quantités quelconques  $X, Y, Z$  jouissant des

11) Le signe  $\equiv$  pour l'égalité géométrique est presque universellement adopté. *G. Bellavitis*<sup>13)</sup> [Annali delle scienze del regno Lombardo-Veneto (Padoue) 7 (1837), p. 243/61; trad. française par *C. A. Laisant*, Nouv. Ann. math. (2) 12 (1873), p. 101 et suiv.; (2) 13 (1874), p. 58 et suiv.; *C. A. Laisant*, Exposé de la méthode des équipollences, Paris 1874] employait le signe  $\triangleq$ ; pour désigner l'équipollence ou égalité géométrique, il écrivait

$$AB \triangleq CD,$$

ce qu'il faut énoncer:  $AB$  équipollent à  $CD$ ; il se servait de la caractéristique „gr.“ pour désigner la longueur d'un vecteur (qu'il appelait „droite“). *A. F. Möbius* [Der baryc. Calcul<sup>14)</sup>, § 17; Werke 1, p. 39] se servait du signe  $\equiv$  pour désigner une équipollence; il a été peu suivi.\*

12) Sur cette manière de caractériser les quantités géométriques par la façon dont elles se comportent dans les changements de coordonnées, voir *F. Klein*, Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 237; Math. Ann. 62 (1906), p. 419.

trois propriétés que nous venons de citer peuvent être envisagées comme les trois projections d'un vecteur libre<sup>13)</sup>.

Somme géométrique d'un nombre quelconque de vecteurs libres. Soient

$$A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n$$

ou

$$\vec{P}_1, \vec{P}_2, \dots, \vec{P}_n$$

les vecteurs donnés.

Prenons un point quelconque  $A$  et, à partir de ce point, portons bout à bout des vecteurs équipollents aux vecteurs donnés:  $AC_1$  équipollent à  $\vec{P}_1$ , puis  $C_1C_2$  équipollent à  $\vec{P}_2$ , puis  $C_2C_3$  équipollent à  $\vec{P}_3$ , ..., enfin  $C_{n-1}C_n$  équipollent à  $\vec{P}_n$ .

Le vecteur  $AC_n$ , fermant le contour ainsi obtenu, est la somme géométrique  $\vec{R}$  des vecteurs proposés; ces vecteurs sont les composants.

La figure  $AC_1C_2 \dots C_n$  s'appelle le polygone des vecteurs ou polygone de Varignon (il est représenté fig. 2 pour  $n=4$ ).

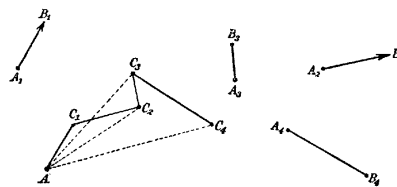


Fig. 2.

La somme géométrique d'un nombre quelconque de vecteurs libres est indépendante de l'ordre dans lequel on prend les vecteurs composants. Nous écrirons

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \dots + \vec{P}_n$$

pour exprimer que le vecteur  $\vec{R}$  est la somme géométrique des vecteurs donnés.

L'addition géométrique est, comme l'addition arithmétique ou l'addition algébrique, commutative (c'est-à-dire qu'on peut intervertir

13) Les règles concernant l'addition et la soustraction géométriques des vecteurs ont été données en premier lieu par *G. Bellavitis*<sup>13)</sup>, Annali delle scienze del regno Lombardo-Veneto (Padoue) 5 (1835), p. 244; trad. française par *C. A. Laisant*<sup>14)</sup>.

l'ordre des termes) et *associative*, ce qu'exprime l'égalité géométrique

$$\vec{P}_1 + (\vec{P}_2 + \vec{P}_3) = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3$$

(cf. fig. 3). L'analogie de l'addition géométrique avec les autres opérations déjà appe-

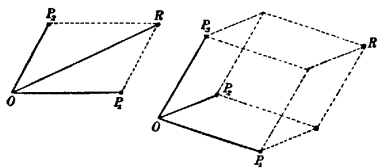


Fig. 3.

lées, «additions» est donc absolue et ainsi se justifie l'emploi des dénominations et des signes usités<sup>14)</sup>. De l'addition, on passe à la multiplication par le

$$\vec{R} = n\vec{P}.$$

On en déduit

$$\vec{P} = \frac{1}{n}\vec{R},$$

ce qui donne la division d'un vecteur par un nombre entier  $n$ . Il n'y a ensuite aucune difficulté pour s'élever à la notion du produit d'un vecteur par un nombre positif quelconque, entier, fractionnaire ou incommensurable.

On démontre aisément que la projection sur un axe quelconque de la somme géométrique d'un nombre quelconque de vecteurs est égale à la somme algébrique des projections de ces vecteurs sur le même axe. Soient alors

$$\begin{array}{l} X_1, Y_1, Z_1 \text{ les projections du vecteur } A_1B_1 \text{ ou } \vec{P}_1, \\ X_2, Y_2, Z_2 \text{ les projections du vecteur } A_2B_2 \text{ ou } \vec{P}_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \vec{P}_n. \end{array}$$

sur les axes; les projections de la somme géométrique  $\vec{R}$  auront pour expressions

$$\begin{array}{l} X = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \\ Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \\ Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n. \end{array}$$

<sup>14)</sup> Dans le cas où les vecteurs représentent des forces, A. L. Cauchy [Exercices math. 1, Paris 1826, p. 121; (Œuvres (2) 6, Paris 1887, p. 153] emploie l'expression de «force principale» pour ce que nous appelons «somme géométrique».

On appelle *différence géométrique* de deux vecteurs  $\vec{P}$  et  $\vec{P}_1$  le vecteur  $\vec{P}_2$  qui ajouté géométriquement à  $\vec{P}_1$  donne un vecteur équipollent à  $\vec{P}$ . On désigne cette opération par le signe — en sorte que l'égalité géométrique

$$\vec{P}_2 = \vec{P} - \vec{P}_1$$

revient à l'égalité géométrique

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2.$$

Il résulte des dernières formules que la différence géométrique de deux vecteurs, dont les projections sont respectivement  $X, Y, Z$  et  $X_1, Y_1, Z_1$ , a pour projections sur les axes

$$X - X_1, \quad Y - Y_1, \quad Z - Z_1.$$

On construit aisément la différence géométrique  $\vec{P} - \vec{P}_1$  en construisant la somme de  $\vec{P}$  et d'un vecteur égal et opposé à  $\vec{P}_1$ .

7. Digression sur la notation de Grassmann et sur les quaternions. Soit  $O$  un point quelconque; un vecteur  $AB$  pourra toujours être considéré comme la différence géométrique de deux vecteurs  $OB - OA$  et l'on pourra écrire

$$AB = OB - OA.$$

Le point  $O$ , pouvant être choisi arbitrairement, ne joue aucun rôle essentiel. Il est donc indiqué de supprimer la lettre  $O$  et d'écrire simplement

$$B - A$$

pour désigner le vecteur  $AB$ . Cette notation, qui coïncide avec celle dont H. Grassmann a fait usage, rend intuitives les égalités géométriques précédemment exposées. Ainsi, on voit immédiatement que l'égalité géométrique

$$AB + BA = 0$$

s'écrit

$$(B - A) + (A - B) = 0$$

et devient une identité si on la traite comme une égalité algébrique ordinaire. De même l'égalité géométrique entre trois points

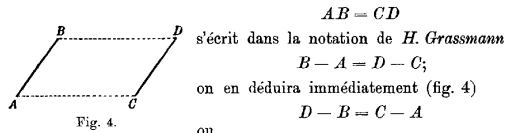
$$AB + BC + CA = 0$$

s'écrit

$$(B - A) + (C - B) + (A - C) = 0$$

qui est encore une identité algébrique. La notation de H. Grassmann fait donc rentrer le calcul des grandeurs géométriques dans le

calcul algébrique. Par exemple l'équipollence



ce que les notations employées jusqu'ici ne permettaient pas de conclure immédiatement.

On est encore conduit à la notation de *H. Grassmann* de la façon suivante: appelons *addition* d'un point  $M$  et d'un vecteur  $\vec{u}$  une translation imprimée au point, de direction et de grandeur égale à  $\vec{u}$  et qui transforme le point  $M$  en un autre point  $M'$ . Ce point  $M'$  représente le résultat de l'addition et nous écrirons

$$M' = M + \vec{u};$$

d'où

$$\vec{u} = M' - M,$$

et nous retombons sur la notation de *H. Grassmann* qui apparaît ainsi comme indiquant une *opération effectuée sur les points*.

On comprend alors comment, à l'aide de toutes les conventions précédentes, un point  $P$  qui a pour coordonnées  $x, y, z$  est défini par l'égalité géométrique suivante, dans laquelle  $e_1, e_2, e_3$  désignent des unités de longueurs portées sur les axes de coordonnées  $OX, OY, OZ$ :

$$P = O + e_1x + e_2y + e_3z.$$

Soit  $Q$  un second point ayant  $x', y', z'$  pour coordonnées; le vecteur  $PQ$  sera représenté par l'égalité géométrique

$$Q - P = e_1(x' - x) + e_2(y' - y) + e_3(z' - z).$$

*W. R. Hamilton*<sup>15)</sup> utilise la même expression symbolique pour représenter un vecteur  $\vec{V}$ ; il écrit seulement  $i, j, k$  au lieu de  $e_1, e_2, e_3$

$$\vec{V} = ix + jy + kz.$$

15) „Bien avant *H. Grassmann* et *W. R. Hamilton*, *C. Wessel* [Essai<sup>16)</sup>, p. 26] avait représenté un vecteur par

$$x + \eta y + \varepsilon z, \text{ avec les conditions } \eta^2 = -1, \varepsilon^2 = -1$$

et avait traité de la multiplication de ces vecteurs; mais les résultats qu'il a obtenus sont illusoire. Il lui a manqué de porter une unité imaginaire sur  $Ox$  pour avoir inventé le calcul des quaternions. On peut donc dire seulement qu'il reste, avant *J. R. Argand*, *W. R. Hamilton* et *H. Grassmann*, l'inventeur de la représentation des grandeurs géométriques impliquant une direction.

Pour arriver à la notion de multiplication des vecteurs, il définit d'abord la multiplication des vecteurs unités  $i, j, k$  par les relations

$$\begin{aligned} (1) \quad & ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j, \\ (2) \quad & i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ (3) \quad & ji = -ij, \quad kj = -jk, \quad ik = -ki. \end{aligned}$$

Considérons alors deux vecteurs  $OA$  ou  $\vec{V}$ ,  $OA'$  ou  $\vec{V}'$  ayant pour origine commune l'origine  $O$  des coordonnées:

$$\vec{V} = ix + jy + kz,$$

$$\vec{V}' = ix' + jy' + kz'.$$

Formons le produit des polynômes complexes situés dans les seconds membres en leur appliquant les règles de la multiplication algébrique ordinaire sous les réserves suivantes: l'ordre dans lequel les facteurs  $i, j, k$  se présentent ne devra jamais être interverti, mais les autres facteurs pourront être déplacés et de plus on appliquera les formules (1), (2) et (3). Désignons enfin par une simple juxtaposition cette opération sur les vecteurs  $\vec{V}$  et  $\vec{V}'$ ; on démontre que l'on a

$$\vec{V} \vec{V}' = -xx' - yy' - zz' + i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx').$$

Cette expression est de la forme

$$K + iL + jM + kN,$$

dans laquelle  $K, L, M, N$  désignent des nombres réels.

Une telle expression s'appelle, d'après *W. R. Hamilton*<sup>16)</sup>, un *quaternion*;  $K$  est la partie *scalaire* du quaternion;  $iL + jM + kN$  est la partie *vectorielle* du quaternion.

Un quaternion dont la partie scalaire est nulle se réduit à un vecteur; un quaternion dont la partie vectorielle est nulle est un simple nombre réel.

Le produit de deux vecteurs se compose donc d'une partie scalaire

$$-xx' - yy' - zz'$$

et d'une partie vectorielle

$$i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx')$$

Lorsqu'on intervertit l'ordre des facteurs  $\vec{V}$  et  $\vec{V}'$  la partie scalaire ne change pas; au contraire, la partie vectorielle change de signe en conservant sa valeur absolue.

16) „Proc. Irish Acad. (1) 2 (1840/4), p. 425; London Edinb. Dublin philos. mag. 25 (1844), p. 10.”

On vérifie sans peine que la partie vectorielle représente un vecteur dont la longueur est égale à l'aire du parallélogramme construit sur les deux vecteurs, dont la direction est celle de la perpendiculaire au plan du parallélogramme, et dont le sens est tel que pour un observateur dirigé dans ce sens le triangle  $OAA'$  ait une aire positive [n° 9].

Ce qui précède suffit pour faire comprendre la raison des définitions qui vont être données dans les deux numéros suivants<sup>17)</sup>.

**8. Produit intérieur ou scalaire de deux vecteurs.** On appelle *produit scalaire* ou *produit intérieur* du vecteur  $\vec{P}$  par le vecteur  $\vec{P}'$  le nombre réel défini par produit de la longueur  $P$  de  $\vec{P}$  par la longueur  $P'$  de  $\vec{P}'$  et par le cosinus de l'angle  $\alpha$  des deux vecteurs. Si l'on emploie, pour indiquer ce produit<sup>18)</sup> la notation  $\vec{P}|\vec{P}'$ , on aura

17) Pour plus de détails voir *W. R. Hamilton, Lectures on quaternions*, Dublin 1853; *P. G. Tait, An elementary treatise on quaternions*, Oxford 1867; (3<sup>e</sup> éd.) Cambridge 1890; trad. par *G. Plarr* 1, Paris 1882; 2, Paris 1884; *H. Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme*, Leipzig 1867; *G. J. Hoüel* [Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 1 (1876), p. 40/144 [1874]; *Éléments de la théorie des quaternions* [Théorie élémentaire des quantités complexes, quatrième partie], Paris 1874.\*

18) La notation du produit intérieur est loin d'être fixée.

*H. Grassmann* [Geometrische Analyse, mémoire couronné par la Société Jablonowski en 1846, 6d. Leipzig 1847; Werke 1<sup>a</sup>, Leipzig 1894, p. 345] écrit  $a \times b$ . Plus tard [Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862, p. 107; Werke 2<sup>a</sup>, p. 112] il écrit  $[a|b]$ .

*G. Peano* [Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann, Turin 1888, p. 114] écrit  $u|v$ ; c'est la notation adoptée dans le texte. Plus tard *G. Peano* [Formulaire de mathématiques 2, Turin 1899, p. 156] ainsi que *C. Burali-Forti* et *R. Marcolongo* [Elementi di calcolo vettoriale, Bologne 1909, p. 31; trad. *S. Lattès*, Éléments du calcul vectoriel, Paris 1910] ont employé simplement le signe  $\times$ ; c'est la notation de *H. Résal* [Traité de cinématique pure, Paris 1862]. *J. Somov*, *O. Heaviside*, *A. Föppl*, *G. Ferraris* écrivent simplement  $uv$ .

*J. W. Gibbs* [Vector Analysis, New York et Londres 1902, p. 55] écrit  $u \cdot v$  qu'il énonce „ $u$  dot  $v$ “; il qualifie l'opération de „direct produit“. Le nom de produit scalaire avait été proposé par *O. Heaviside* [Electromagnetic theory 1, Londres 1894, p. 149; London Edinb. Dublin philos. mag. (5) 19 (1886), p. 401].

*E. Carvallo* a proposé le mot de *produit algébrique* plus heureux que celui de produit géométrique qu'emploie à tort *B. de Saint Venant* [C. R. Acad. sc. Paris 21 (1846), p. 620]. *E. Carvallo* appelle „produit superficiel“ ou „flux“ le parallélogramme orienté ou le parallépipède orienté qui a pour côtés les deux ou les trois vecteurs donnés [Nouv. Ann. math. (4) 2 (1902), p. 433/42]; mais il n'a pas été suivi.

On trouve encore  $(u \cdot v)$  [*H. A. Lorents*, dans plusieurs articles du tome V de l'Encyclopédie], et aussi  $(u, v)$  [*O. Henri* et *G. C. Turner*, Vectors and rotors, with applications, Londres 1903].

par définition

$$(1) \quad \vec{P}|\vec{P}' = PP' \cos \alpha;$$

ce produit est un nombre.

On voit que ce produit conserve la même valeur lorsqu'on intervertit l'ordre des deux facteurs

$$\vec{P}|\vec{P}' = \vec{P}'|\vec{P};$$

les égalités suivantes, dans lesquelles  $m$  désigne un facteur numérique et  $+$  le signe de l'addition géométrique, s'établissent sans peine:

$$m(\vec{P}|\vec{P}') = (m\vec{P})|\vec{P}' = \vec{P}|(m\vec{P}'), \\ (\vec{P} + \vec{P}')|\vec{Q} = \vec{P}|\vec{Q} + \vec{P}'|\vec{Q}.$$

Les produits scalaires jouissent donc des principales propriétés des produits ordinaires; il y a cependant une différence importante: l'égalité

$$\vec{P}|\vec{P}' = 0$$

n'indique pas nécessairement que l'un des deux vecteurs soit nul; elle indique ou que l'un des vecteurs est nul ou que les deux vecteurs forment un angle droit.

Enfin la multiplication scalaire ne s'étend pas au delà de deux facteurs.

Soit  $\vec{i}$  un vecteur *unitaire* (dont la mesure est égale à  $+1$ ) porté par un axe quelconque;  $\vec{P}|\vec{i}$  sera la composante de  $\vec{P}$  suivant cet axe ou la projection du vecteur sur l'axe.

L'égalité (1) montre que le produit scalaire de deux vecteurs peut être considéré comme le produit ordinaire de la longueur d'un des vecteurs par la projection de l'autre sur le premier. Il en résulte immédiatement la formule suivante:

Soient  $\vec{S}$  la somme géométrique d'un certain nombre de vecteurs  $\vec{P}, \vec{Q}, \dots$ ; soit  $\vec{S}'$  celle des vecteurs  $\vec{P}', \vec{Q}', \dots$  en nombre égal ou non au nombre des vecteurs qui composent la première somme; le produit scalaire des deux sommes sera égal à la somme algébrique des produits scalaires de tous les termes de la première somme par les termes de

L'usage des parenthèses a le grand inconvénient de compliquer l'emploi ultérieur des parenthèses prises avec leur signification ordinaire.

*K. Heun* représente le produit intérieur de  $u$  et de  $v$  par le symbole  $\bar{u}\bar{v}$  qu'il énonce „ $u$  in  $v$ “ [Lehrbuch der Mechanik 1, Leipzig 1906, p. 14]; il désigne [id. 1, p. 18] ce produit intérieur sous le nom de „Arbeitsprodukt“, afin de mettre en évidence le rôle fondamental qu'il joue dans l'évaluation du travail des forces.

la seconde

$$\vec{S}|\vec{S} = (\vec{P} + \vec{Q} + \dots)(\vec{P} + \vec{Q} + \dots) = \vec{P}|\vec{P} + \vec{P}|\vec{Q} + \dots,$$

la multiplication scalaire s'effectuant comme la multiplication algébrique.

En particulier, soient  $X, Y, Z$  les composantes parallèles aux axes du vecteur  $\vec{V}$ ;  $X', Y', Z'$  celles de  $\vec{V}'$ . On aura, si les axes de coordonnées sont rectangulaires,

$$\vec{V}|\vec{V}' = XX' + YY' + ZZ'.$$

Cette dernière égalité est d'un emploi continu en mécanique.

Il en résulte que, toujours dans l'hypothèse d'axes de coordonnées rectangulaires, si l'on pose

$$\vec{V} = e_1 X + e_2 Y + e_3 Z,$$

$$\vec{V}' = e_1 X' + e_2 Y' + e_3 Z',$$

les règles de la multiplication intérieure ou scalaire sont données par les formules suivantes:

$$e_1|e_1 = e_2|e_2 = e_3|e_3 = 1,$$

$$e_2|e_3 = e_3|e_1 = e_1|e_2 = 0,$$

$$e_3|e_2 = e_1|e_3 = e_2|e_1 = 0.$$

On voit que le produit intérieur ou scalaire de deux vecteurs n'est pas autre chose, au signe près, que la partie scalaire du produit des deux vecteurs défini au numéro 7. C'est ainsi que l'envisage *W. R. Hamilton*.\*

**9. Sens des rotations.** Dans ce qui suivra on pourra supposer, lorsque besoin sera, les angles comptés de 0 à  $2\pi$  dans le sens *direct*, c'est-à-dire dans le sens des arcs croissants en trigonométrie fixé dans chaque plan. Un plan dans lequel un certain sens de rotation est indiqué comme sens positif sera dit un *plan orienté*. Tel est par exemple un plan dans lequel sont donnés deux axes de coordonnées pris dans un ordre déterminé.

Soient  $Ox, Oy$  deux axes de coordonnées rectangulaires situés dans le plan  $II$ ; élevons au point  $O$  une *demi-droite*  $Oz$  (fig. 5) perpendiculaire sur le plan  $II$ , située par rapport à ce plan d'un côté tel qu'un observateur placé le long de  $Ox$ , la tête en  $x$  et les pieds en  $O$ , verrait qu'il faut faire tourner  $Ox$  de droite à gauche<sup>19)</sup>, pour

19) *A. L. Cauchy* [Exercices math. 1, Paris 1826, p. 74; Œuvres (2) 6, Paris 1887, p. 99] dit qu'on appelle *sens direct* celui qui va de  $Ox$  vers  $Oy$  par un angle droit et il ajoute: le sens direct est en général de droite à gauche, suivant la définition qu'il avait donnée auparavant [Exercices math. 1, p. 67; Œuvres (2) 6, p. 91] „se mouvoir en passant devant lui, de sa droite à sa gauche“

l'amener sur  $Oy$  par une rotation d'un angle droit. Nous obtenons ainsi un trièdre trirectangle parfaitement déterminé parmi les huit trièdres que font entre elles les trois droites qui portent les axes  $Ox, Oy, Oz$ . Tout ensemble de points, borné ou non, rapporté à de pareils axes est dit *orienté*.

Si l'on remplace deux des demi-droites  $Ox, Oy, Oz$  par leurs prolongements  $Ox', Oy'$  ou  $Oz'$ , on obtient trois nouveaux trièdres qui ont la même orientation que le premier.

Au contraire, si, conservant deux des axes, on prend le symétrique du troisième par rapport à l'origine  $O$ , ou si l'on prend les symétriques des trois axes par rapport au même point, on obtient quatre trièdres dont l'orientation est *inverse* de la première, c'est-à-dire que pour le trièdre  $Ox'y'z'$ , par exemple la rotation d'un angle droit qui amènerait  $Ox'$  sur  $Oy'$  se ferait, pour un observateur placé les pieds en  $O$  et la tête en  $z'$ , de la gauche vers la droite (par devant), c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre posée à terre, le cadran en l'air, aux pieds d'un observateur.

Le sens de la rotation pour ce nouveau trièdre est dit *rétrograde* ou *inverse*. Pour abrégé, on appelle souvent les trièdres orientés comme le premier trièdre  $Oxyz$  des trièdres *directs*, et les trièdres orientés comme  $Ox'y'z'$  des trièdres *inverses*; le remplacement d'un trièdre direct par un trièdre inverse, ou vice versa, s'appellera un *renversement* des axes. Ce renversement des axes sert souvent à distinguer des grandeurs qui restent invariantes pour toutes les autres transformations orthogonales<sup>20)</sup>.

Il convient d'ajouter que de nombreux auteurs<sup>21)</sup>, en particulier

20) *F. Klein*, Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 237/65; réimpr. Math. Ann. 62 (1906), p. 419/48. Dans cet article, *F. Klein* appelle *Inversion* des coordonnées ce qu'on appelle ici „renversement des axes“.\*

21) *G. Koenigs* [Cinématique], p. 95 et les cours autographiés de mécanique professés à l'Ecole polytechnique par *E. Sarrau* et *L. Lecornu*. Voir aussi *P. Appell*, Traité de mécanique rationnelle 1, Paris 1893, p. 55; (3<sup>e</sup> éd.) 1, Paris 1909, p. 9; Cours de mécanique à l'usage des élèves de la classe de mathématiques spéciales, Paris 1905, p. 337. *P. Appell* emploie d'ailleurs l'expression *sens positif* au lieu de *sens direct*. Dans le texte les mots „sens positif“ ont une acception un peu différente de celle de sens direct.\*

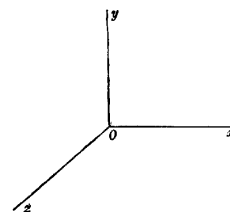


Fig. 5.

la plupart des auteurs français qui ont écrit des traités de géométrie analytique, appellent direct le sens que nous appelons ici rétrograde et inversement. Nous emploierons de préférence l'expression *sens positif* pour le sens dans lequel l'observateur placé suivant l'axe  $Ox$  voit s'effectuer la rotation d'un angle droit qui amène  $Ox$  sur  $Oy$ , *sens négatif* le sens contraire. Chacun sera libre de choisir le trièdre  $Oxyz$  de façon à faire coïncider le sens positif, soit avec le sens direct défini plus haut qui est celui des astronomes, de la trigonométrie et de la géométrie analytique à deux dimensions, soit avec le sens direct de la géométrie analytique à trois dimensions.

Nous conviendrons toutefois que, quand le contraire n'est pas spécifié explicitement, le *sens positif sera celui de l'astronomie*.

L'orientation est alors telle qu'en étendant la main droite, le trièdre orientant l'espace peut être représenté par l'index  $Ox$ , le médium  $Oy$  et le pouce  $Oz$  (quelle que soit la position que l'on donne à la paume de la main); c'est ce qu'on appelle souvent la *règle du pouce*.

Il est évident que, si le sens est positif pour l'observateur  $Ox$ , la rotation d'un angle droit qui amène  $Oy$  sur  $Oz$  pour un observateur placé les pieds en  $O$  et la tête en  $x$  et la rotation d'un angle droit qui amène  $Oz$  sur  $Ox$  pour un observateur placé les pieds en  $O$  et la tête en  $y$  sont aussi positives.

Si l'on donne un système de coordonnées rectangulaires, on donne donc en même temps la manière dont on fait correspondre le sens positif d'une rotation au sens positif d'une translation. Cette correspondance sera la même que celle qui existe entre le sens positif de l'axe  $Ox$  et celui de la rotation qui amène l'axe  $Ox$  sur l'axe  $Oy$  par un quart de tour.

Nous pouvons maintenant définir facilement le *sens d'un vecteur  $AB$  par rapport à un vecteur  $CD$* , ou le *sens d'un axe  $x'x$  par rapport à un axe  $y'y$  qui ne le rencontre pas*; ce second cas se ramène d'ailleurs au premier en portant dans le sens positif sur les deux axes des vecteurs  $AB$  et  $CD$ . Cela posé, concevons un trièdre de coordonnées ainsi placé:  $Ox'$  aura la direction et le sens de  $CD$ ,  $O'y'$  coïncidant avec  $C$ ;  $Ox'$  est dirigé de  $C$  vers  $A$  et  $O'y'$  de  $C$  vers  $B$ . Si le trièdre  $O'x'y'z'$  ainsi constitué a la même orientation<sup>22)</sup> que le trièdre de référence  $Oxyz$ ,  $AB$  sera dans le sens positif par rapport à  $CD$ ; si l'orientation du trièdre  $O'x'y'z'$  est inverse,  $AB$  sera dans

22) Le mot „orientation“ a ici une signification un peu plus étendue que dans le texte précédent, mais qui se comprend d'elle-même.\*

le sens négatif par rapport à  $CD$ . Dans le premier cas,  $AB$  est direct par rapport à  $CD$ ; dans le second, il est inverse. Il est essentiel de remarquer que si  $AB$  est direct par rapport à  $CD$ , réciproquement  $CD$  est direct par rapport à  $AB$ .\*

**10. Formules de transformation de coordonnées.** Soient  $Oxyz$  et  $O'x'y'z'$  deux trièdres trirectangles ayant la même origine  $O$ .

Supposons que les cosinus directeurs du deuxième trièdre par rapport au premier, soient donnés par le tableau suivant

|       | $Ox$       | $Oy$      | $Oz$       |
|-------|------------|-----------|------------|
| $Ox'$ | $\alpha$   | $\beta$   | $\gamma$   |
| $Oy'$ | $\alpha'$  | $\beta'$  | $\gamma'$  |
| $Oz'$ | $\alpha''$ | $\beta''$ | $\gamma''$ |

Les formules de transformation seront

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z', \\ y = \beta x' + \beta' y' + \beta'' z', \\ z = \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z', \end{cases}$$

et l'on a les relations connues

$$\begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, & \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, & \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0, \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1, & \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0, \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, & \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0, \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, & \alpha'\beta' + \beta'\gamma' + \gamma'\alpha' = 0, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, & \alpha''\beta'' + \beta''\gamma'' + \gamma''\alpha'' = 0. \end{cases}$$

Si, de plus, les deux trièdres ont la même orientation, le déterminant  $\Delta$ , défini par l'égalité

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha'' \\ \beta & \beta' & \beta'' \\ \gamma & \gamma' & \gamma'' \end{vmatrix},$$

est égal à  $+1$ ; si les trièdres de coordonnées ont des orientations contraires,  $\Delta$  est égal à  $-1$ .

Dans tous les cas, on a

$$\begin{aligned} \alpha\Delta &= \beta'\gamma'' - \gamma'\beta'', \\ \beta\Delta &= \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'', \\ \gamma\Delta &= \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'', \end{aligned}$$

**11. Triangles orientés. Cycles.** „Pour donner un signe à l'aire d'un triangle situé dans un plan orienté on commence par faire correspondre à ce plan orienté un axe orienté que l'on choisit généralement perpendiculaire au plan orienté. Ceci posé, on suppose qu'un observateur ayant les pieds sur le plan du triangle, à l'intérieur du triangle, et dirigé suivant l'axe orienté correspondant au plan orienté, voit un mobile passer successivement par les trois sommets du triangle dans l'ordre où on les nomme. Si ce mobile tourne autour de l'observateur dans le sens positif, l'aire du triangle sera envisagée comme positive; si le sens est négatif, l'aire du triangle sera négative. On peut remarquer que si l'observateur a les pieds en  $O$  sur l'un des plans coordonnés il est traversé des pieds à la tête par l'axe orienté qui est perpendiculaire à ce plan.

Avec ces conventions l'aire d'un triangle situé dans le plan  $xy$  et dont les sommets ont pour coordonnées rectangulaires

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$$

a toujours pour expression, en valeur absolue et en signe, le déterminant

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

qui est invariant dans toute transformation de coordonnées rectangulaires n'altérant pas l'orientation des axes. Ces conventions s'étendent sans peine aux aires planes<sup>23)</sup>, limitées par des courbes quelconques<sup>24)</sup>: pour une courbe plane dans le plan  $xy$  l'aire a pour expression l'intégrale

$$\frac{1}{2} \int (x dy - y dx)$$

prise sur le contour dans le sens choisi.

Si l'on considère maintenant un triangle dans l'espace dont les sommets  $P_1, P_2, P_3$  ont pour coordonnées

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3),$$

<sup>23)</sup> La première introduction de la notion d'aire positive ou négative suivant le sens du parcours sur le contour de l'aire est due à *A. F. Möbius* [Der baryc. Calcul], § 17; Werke 1, p. 39. Il a été suivi par *G. Bellavitis* [Annali delle scienze del regno Lombardo-Veneto (Padoue) 4 (1834), p. 256].

<sup>24)</sup> Voir aussi *A. L. F. Meister*, Generalia de genesi figurarum planarum et independentibus earum affectionibus [Novi Commentarii Gott. 1 (1769/70), p. 144/80] et une lettre de *C. F. Gauss* à *H. W. M. Olbers* datée du 30 octobre 1825 [Werke 8, Göttingue (Leipzig), p. 398 (1900)] (Note de *P. Stäckel*).\*

le déterminant précédent représentera l'aire de la projection du triangle  $P_1 P_2 P_3$  sur le plan des  $xy$ . Désignons-le par  $\frac{1}{2}N$ . Nous aurons deux expressions semblables  $\frac{1}{2}L$ ,  $\frac{1}{2}M$  pour les projections du triangle sur les plans  $yz$  et  $xz$ . L'aire du triangle  $P_1 P_2 P_3$  s'exprimera, en valeur absolue, par le nombre

$$\frac{1}{2}G = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

On peut alors faire correspondre au triangle orienté le vecteur libre ayant pour projections  $L, M, N$ : ce vecteur est normal au plan du triangle du côté où l'observateur défini au commencement du n° 9 voit le triangle décrit dans le sens positif; sa longueur est la valeur absolue de l'aire.

En général, imaginons un plan dans lequel se trouve une courbe fermée décrite dans un certain sens. Si on calcule les trois intégrales

$$(1) \quad L = \int (y dz - z dy), \quad M = \int (z dx - x dz), \quad N = \int (x dy - y dx)$$

le long de la courbe, dans le sens choisi, ces intégrales représentent le double des valeurs algébriques des aires des projections de la courbe sur les trois plans de coordonnées, et l'aire elle-même a pour valeur absolue

$$\frac{1}{2}G = \frac{1}{2}\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

Le vecteur libre, de projections  $\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}M, \frac{1}{2}N$ , est normal au plan du côté où devrait se trouver l'observateur pour voir le contour décrit dans le sens positif; sa longueur est  $\frac{1}{2}G$ .

Avec *E. Carvallo*<sup>25)</sup>, nous appellerons *cycle* un tel élément plan. Les quantités  $\frac{1}{2}L, \frac{1}{2}M, \frac{1}{2}N$  sont les *composantes* du cycle. Cette notion est due essentiellement à *H. Grassmann*<sup>26)</sup>.

Nous distinguerons les cycles en cycles *liés* à un point, cycles *glissants* dans un plan et cycles *libres* où le cycle peut avoir une position quelconque dans son plan ou dans un plan parallèle.

<sup>25)</sup> Nouv. Ann. math. (4) 2 (1902), p. 433; *E. N. Laquerre* désigne sous le nom de *cycle* une circonférence parcourue dans un sens déterminé [Nouv. Ann. math. (3) 1 (1882), p. 543; Œuvres 2, Paris 1905, p. 608].\* *J. Clerk Maxwell* [Treatise on electricity and magnetism (1<sup>re</sup> éd.) Londres 1873; (2<sup>e</sup> éd.) 1, Londres 1881, p. 16; trad. par *G. Seligmann-Lui*, Traité d'électricité et de magnétisme 1, Paris 1885, p. 17] emploie le même mot pour un contour fermé. Ces sens voisins ne sauraient faire confusion avec celui du texte.

<sup>26)</sup> *H. Grassmann* [Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844, p. 163; Werke<sup>2)</sup> 1<sup>1</sup>, p. 189] emploie le mot „Plangrösse“ pour les parallélogrammes liés. Pour les autres, il dit „Flächenteil“ [Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862; Werke<sup>2)</sup> 1<sup>1</sup>]. Pour les parallélogrammes liés, *H. Grassmann junior* [Punktrechnung und projektive Geometrie, Halle 1894, p. 7 et suiv.] emploie le mot „feuille“ (Blatt).

Plus généralement encore, on peut associer à un contour fermé gauche parcouru dans un sens donné, le vecteur libre  $\vec{G}$  dont les projections  $L, M, N$  sont définies par les équations (1).

**12. Produit vectoriel.** Soient deux vecteurs  $\vec{P}$  et  $\vec{P}'$ ; menons par un point  $O$  deux vecteurs équipollents  $OP$  et  $OP'$ , et construisons, sur ces deux vecteurs, le parallélogramme  $OPQP'$ ,  $Q$  étant le sommet opposé à  $O$ . On appelle *produit vectoriel* ou *produit extérieur* de  $\vec{P}$  par  $\vec{P}'$  le vecteur  $\vec{G}$  qui, d'après le numéro précédent, correspond au cycle  $OPQP'O$  parcouru dans le sens des lettres. Ce vecteur  $\vec{G}$  est normal au plan du parallélogramme, du côté où un observateur debout sur le plan voit le cycle décrit dans le sens positif; il a pour grandeur la valeur absolue de l'aire du parallélogramme. Nous désignerons<sup>27)</sup> ce vecteur par la notation

$$\vec{G} = \vec{P} \times \vec{P}'.$$

On appelle, d'après H. Grassmann<sup>28)</sup>, ce vecteur  $\vec{G}$  le *complément* (Ergänzung) du cycle défini par les deux vecteurs  $\vec{P}$  et  $\vec{P}'$ , c'est-à-dire par le parallélogramme  $OPQP'O$ .

Le produit vectoriel de  $\vec{P}$  par  $\vec{P}'$  est égal et opposé à celui de  $\vec{P}'$  par  $\vec{P}$ :

$$\vec{P} \times \vec{P}' = -\vec{P}' \times \vec{P}.$$

27) A. L. Cauchy [C. R. Acad. sc. Paris 36 (1853), p. 75; Œuvres (1) 11, Paris 1899, p. 443] emploie l'expression *produit angulaire*; B. de Saint Venant [C. R. Acad. sc. Paris 21 (1845), p. 620] désignait la même quantité sous le nom de *produit géométrique*, qui [cf. B. de Saint Venant<sup>19)</sup>] a aussi une autre acception. Pour désigner le produit extérieur, H. Grassmann écrit  $[uv]$ , W. R. Hamilton écrit  $Vuv$ , H. A. Lorents et la plupart des auteurs allemands écrivent  $[u \cdot v]$ , J. W. Gibbs [Vector Analysis<sup>18)</sup>, p. 60 (leçons professées en 1899/1900)] écrit  $u \times v$  et appelle cette expression „produit gauche“ (skew product); O. Heaviside [Electrical papers 2, Londres 1892, p. 5; Electromagnetic theory<sup>19)</sup> 1, p. 157] écrit  $Vuv$  et emploie l'expression „produit vectoriel“; C. Burali-Forti et R. Marcolongo [Rend. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 78; Calcolo vettoriale<sup>18)</sup>, p. 28; trad. S. Lattes, p. 28] ont proposé d'écrire  $u \wedge v$ .

28) Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862, p. 210; Werke<sup>9)</sup> 1<sup>a</sup>, p. 211, 212.

E. W. Hyde, dans le „Directional calculus“, éd. à Boston en 1890, dit aussi „the complement“. C. Burali-Forti [Introduction à la géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann, Paris 1897, p. 27] dit „opération index“. H. Fehr [Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la géométrie infinitésimale, Thèse, Paris 1899, p. 11] dit „index du bivecteur“; K. Heun [Mechanik<sup>18)</sup> 1, p. 16] dit „Momentenprodukt“ et écrit  $uv$  pour le produit vectoriel du vecteur  $u$  par le vecteur  $v$ .

En particulier le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est donc égal à zéro:

$$\vec{P} \times \vec{P} = 0.$$

Appelons  $X, Y, Z$  et  $X', Y', Z'$  les projections des deux vecteurs  $\vec{P}$  et  $\vec{P}'$ ; menons par l'origine  $O$  deux vecteurs équipollents  $OP$  et  $OP'$ : les points  $P$  et  $P'$  ont pour coordonnées respectives  $X, Y, Z$  et  $X', Y', Z'$ . Le vecteur

$$\vec{G} = \vec{P} \times \vec{P}'$$

est le double du vecteur représentatif du triangle orienté  $OPP'$ : les projections de  $\vec{G}$  sur les axes sont donc (d'après les formules du n° 5)

$$L = YZ' - ZY', \quad M = ZX' - XZ', \quad N = XY' - YX'.$$

H. Grassmann<sup>29)</sup> a déduit cette notion<sup>30)</sup> de celle des produits combinatoires (kombinatorisches Produkt) dont il est le créateur<sup>31)</sup>.

Considérons avec lui deux nombres complexes  $u$  et  $v$  formés à l'aide de trois unités<sup>32)</sup> indépendantes  $e_1, e_2, e_3$  et de nombres réels  $x_1, x_2, x_3, x_1', x_2', x_3'$

$$u = e_1 x_1 + e_2 x_2 + e_3 x_3, \\ v = e_1 x_1' + e_2 x_2' + e_3 x_3'.$$

Si l'on fait la multiplication ordinaire des polynômes  $u$  et  $v$  en conservant l'ordre des facteurs unitaires  $e_1, e_2, e_3$ , on obtient une expression de la forme

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 e_i e_k x_i x_k'.$$

En convenant de choisir les trois unités indépendantes de façon que

$$e_1^2 = 0, \quad e_2^2 = 0, \quad e_3^2 = 0, \quad e_2 e_3 = -e_3 e_2, \quad e_3 e_1 = -e_1 e_3, \quad e_1 e_2 = -e_2 e_1$$

29) Die Ausdehnungslehre, Berlin 1862, p. 31/56; Werke<sup>9)</sup> 1<sup>a</sup>, p. 39/61.

30) W. R. Hamilton [On quaternions or a new system of imaginaries in algebra, Proc. Irish Acad. (1) 2 (1840/4), p. 424; cf. London Edinb. Dublin philos. mag. 25 (1844), p. 10] a introduit le produit vectoriel comme partie vectorielle du produit de deux quaternions.

31) Dans le cas de deux vecteurs situés dans un même plan, il existe une autre multiplication qui est la généralisation la plus adéquate de la multiplication arithmétique, qui se traduit par une construction géométrique simple et qui représente exactement la multiplication des imaginaires de la forme  $x + iy$ . C'est la plus anciennement connue [Cf. I 5, 2; I, p. 342]; on peut voir aussi [I 6, n° 15 à 20; I, p. 378 et suiv.] un exposé, dû à E. Cartan, des idées qui ont amené H. Grassmann aux notions introduites dans le texte.

32) C'est un cas particulier des *clefs algébriques* de A. L. Cauchy [C. R. Acad. sc. Paris 36 (1853), p. 70; Œuvres (1) 11, Paris 1899, p. 439].



l'expression obtenue pour  $uv$  est le *produit combinatoire* de  $u$  par  $v$ ; nous le désignerons<sup>32a)</sup> par la notation

$$u \times v$$

en sorte que l'on a, par définition,

$$u \times v = e_2 e_3 (x_3 x_3' - x_3 x_3') + e_3 e_1 (x_3 x_1' - x_3 x_1') + e_1 e_2 (x_1 x_2' - x_1 x_2')$$

d'où résultent évidemment les égalités

$$u \times v = -v \times u$$

et

$$u \times u = 0.$$

Avec *H. Grassmann* nous représenterons  $e_1, e_2, e_3$  par trois vecteurs unitaires orthogonaux deux à deux et de même origine  $O$ ; les produits  $e_2 e_3, e_3 e_1, e_1 e_2$  seront représentés par des cycles ayant pour vecteurs associés respectifs les vecteurs unités  $e_1, e_2, e_3$ ; enfin le produit  $e_1 e_2 e_3$  sera représenté par le volume du parallélépipède construit sur  $e_1, e_2, e_3$ . Avec ces conventions  $u$  et  $v$  seront représentés par deux vecteurs  $OP, OP'$  d'origine  $O$  et le produit  $u \times v$  par un cycle  $OPQP'O$  (où  $Q$  est le quatrième sommet du parallélogramme construit sur  $OP, OP'$ ) dont le complément est le vecteur représentatif de

$$e_1 (x_2 x_3' - x_3 x_2') + e_2 (x_3 x_1' - x_1 x_3') + e_3 (x_1 x_2' - x_2 x_1');$$

ce dernier vecteur coïncide précisément avec ce que nous avons appelé le produit extérieur de  $\vec{P}$  par  $\vec{P}'$ .

Envisageons maintenant un troisième nombre complexe

$$w = e_1 x_1'' + e_2 x_2'' + e_3 x_3'',$$

représenté par le vecteur  $OP''$  et désignons par

$$u \times v \times w$$

l'expression obtenue par multiplication des polynômes  $u, v, w$  en conservant l'ordre des facteurs  $e_1, e_2, e_3$  et en convenant, d'une part de remplacer le produit de trois unités par zéro lorsque ce produit contient deux ou trois fois la même unité, d'autre part d'égaliser entre eux les six produits

$$+ e_1 e_2 e_3, \quad + e_2 e_3 e_1, \quad + e_3 e_1 e_2, \quad - e_2 e_1 e_3, \quad - e_3 e_2 e_1, \quad - e_1 e_3 e_2.$$

On peut appeler  $u \times v \times w$  le *produit combinatoire* des trois nombres

<sup>32a)</sup> En réalité *H. Grassmann* appelle *produit extérieur* de  $u$  par  $v$  ce que nous désignons ici par  $u \times v$ ; il réserve le nom de produit combinatoire au produit dont les facteurs sont formés exclusivement d'unités; comme pour nous produit extérieur et produit vectoriel sont synonymes nous avons étendu le sens de la locution produit combinatoire afin de ne pas donner à celle de produit extérieur deux sens différents.\*

complexes  $u, v, w$ . Il a pour expression

$$e_1 e_2 e_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix};$$

c'est donc en grandeur et en signe, le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs. Le développement de ce déterminant suivant l'une de ses lignes donne immédiatement la proposition suivante:

Le produit intérieur

$$\vec{P} | (\vec{P}' \times \vec{P}'')$$

du vecteur  $P$  par le produit vectoriel  $\vec{P}' \times \vec{P}''$  de deux autres vecteurs est égal aux produits intérieurs

$$\vec{P}' | (\vec{P} \times \vec{P}'') \text{ et } \vec{P}'' | (\vec{P} \times \vec{P}'),$$

la valeur commune de ces trois expressions étant égale à celle du produit combinatoire  $u \times v \times w$  des trois nombres complexes  $u, v, w$  représentés par les vecteurs  $OP, OP', OP''$  équipollents respectivement à  $\vec{P}, \vec{P}', \vec{P}''$ .

**13. Vecteurs polaires et vecteurs axiaux.** Il y a souvent lieu de distinguer nettement les uns des autres les vecteurs que nous avons introduits jusqu'ici. Tandis que certains vecteurs sont analogues à des rayons vecteurs issus d'un point, et que leurs composantes se comportent dans les transformations ou renversements des axes de coordonnées comme les coordonnées d'un point, notamment en changeant de signe si les axes sont renversés, d'autres vecteurs sont des invariants absolus dans tout le groupe de substitutions dont nous venons de parler; ils se comportent chacun comme l'axe d'une rotation de sens déterminé. Les projections de chacun de ces derniers vecteurs conservent leur signe et leur valeur absolue dans le renversement des axes.

On appelle *vecteurs polaires*<sup>33)</sup> les premiers, c'est-à-dire ceux dont

<sup>33)</sup> Les expressions de vecteurs „polaires“ et de vecteurs „axiaux“ sont dues à *W. Voigt*, *Compendium der theoretischen Physik* 2, Leipzig 1896, p. 418/801.

*J. C. Maxwell* [Treatise on electricity and magnetism<sup>34)</sup>, (1<sup>re</sup> éd.) n° 16; (2<sup>e</sup> éd.) 1, p. 13; Proc. London math. Soc. 3 (1869/71), p. 224; Papers 2, Cambridge 1890, p. 257] emploie les termes de „longitudinal“ et „rotationnel“.

*E. Wiechert* [Schriften phys.-ökon. Ges. Königsb. 37 (1896), Sitzgeb. p. 6; Ann. Phys. und Chemie, Dritte Folge 59 (1896), p. 286] dit „Vektoren“ et „Rotoren“.

*P. Langevin* [cf. IV 16, §] propose pour distinguer les deux espèces de vecteurs de noter les vecteurs polaires  $\vec{a}$  et les vecteurs axiaux  $\vec{a}^A$ . Voir en général cet article IV 16 au sujet des différentes propriétés des deux systèmes de vecteurs.\*

les projections ont leurs signes altérés par un renversement de coordonnées; les autres sont dits *vecteurs axiaux*. Nous interprétons ces derniers comme des segments ayant non seulement une direction déterminée, mais étant aussi doués d'un sens de rotation. Ils sont intimement liés aux cycles que l'on peut en déduire en traçant, dans un plan normal à la direction du segment, une surface d'aire égale à la longueur du segment (l'unité de surface étant le carré construit sur l'unité de longueur). Dans toutes les transformations, le vecteur axial se comporte comme un cycle; en sorte que, au point de vue analytique, il est absolument identique au cycle.

Il convient d'examiner en détail l'effet des diverses transformations sur ces deux espèces de vecteurs.

Si l'on effectue un changement de coordonnées rectangulaires sans changement d'origine, les composantes des vecteurs polaires subissent les mêmes transformations homogènes que les coordonnées d'un point. Il en est de même des composantes des cycles ou vecteurs axiaux  $L, M, N$  à cause des relations données plus haut entre les nouveaux axes et les anciens. Une translation des axes parallèlement à eux-mêmes n'entraîne aucune modification ni dans les composantes du vecteur polaire, ni dans celles du cycle. Un renversement des axes change les signes des composantes d'un vecteur polaire, mais ne modifie en rien les composantes du cycle. C'est là un signe distinctif des composantes d'un cycle; on a ainsi une interprétation géométrique de tout système de trois grandeurs qui subissent les mêmes transformations que les coordonnées d'un point dans tout changement de coordonnées qui conserve l'orientation des axes, mais qui demeurent invariantes si l'on se borne à changer cette orientation.

Les transformations de coordonnées qui laissent invariables les composantes d'un vecteur axial sont les rotations d'angle quelconque autour de la direction du vecteur, les inversions planes<sup>34</sup>) par rapport à un plan perpendiculaire à cette direction, et les renversements.

Le produit vectoriel de deux vecteurs axiaux ou de deux vecteurs polaires est un vecteur *axial*; le produit vectoriel d'un vecteur axial et d'un vecteur polaire est un vecteur *polaire*.

Enfin le produit vectoriel de trois vecteurs polaires est un vecteur polaire et le produit vectoriel de trois vecteurs axiaux est un vecteur axial.\*

34) On appelle ainsi les transformations par symétrie relativement à un plan [voir la note de G. Darboux dans G. Koenigs, Cinématique<sup>3</sup>], p. 346].\*

**14. Points-masses.** La considération des points-masses [cf. IV 5] introduits par A. F. Möbius<sup>35</sup>) dans la géométrie permet de résumer ce que nous avons dit jusqu'à présent. Soient  $x, y, z$  les coordonnées qui définissent la position d'un point-masse et  $\mu$  sa masse, nous dirons que les coordonnées du point-masse sont

$$\mu, \quad \xi = \mu x, \quad \eta = \mu y, \quad \zeta = \mu z,$$

dont on peut remarquer l'analogie avec ce qu'en géométrie analytique on appelle les coordonnées homogènes d'un point.

Supposons d'abord  $\mu = 0$ , et  $\xi, \eta, \zeta$  non nulles. Les coordonnées cartésiennes  $x, y, z$  sont alors infinies et l'on obtient un point-masse d'une masse infiniment petite situé à une distance infiniment grande dans une direction donnée. Ce point-masse peut être d'une infinité de manières considéré comme différence de deux points-masses ordinaires qui auraient des masses égales:

$$\begin{aligned} \mu, \quad \xi = \mu x, \quad \eta = \mu y, \quad \zeta = \mu z, \\ \mu, \quad \xi' = \mu x', \quad \eta' = \mu y', \quad \zeta' = \mu z'. \end{aligned}$$

En effet les coordonnées du point-masse différence seront

$$0, \quad X = \xi - \xi' = \mu(x - x'), \quad Y = \eta - \eta' = \mu(y - y'), \quad Z = \zeta - \zeta' = \mu(z - z').$$

Ces points-masses sont identiques aux vecteurs.

Soit maintenant  $\mu = 1$ ; on aura ce que H. Grassmann appelle un *point simple*. Les coordonnées d'un point simple sont donc

$$1, \quad x, \quad y, \quad z.$$

Or on sait que les composantes  $L, M, N$  d'un *cycle libre*, qui est le produit extérieur de deux vecteurs, sont les déterminants de la matrice

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

et que le produit extérieur de trois vecteurs a pour mesure la valeur algébrique du déterminant

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Par analogie les points simples conduiront aux résultats suivants: les déterminants de la matrice à deux lignes

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x' & y' & z' \end{vmatrix}$$

35) On pourrait faire remonter cette introduction à G. Ceva, De lineis rectis se invicem secantibus, statica constructio, Milan 1678 [voir M. Chasles, Aperçu historique, (2<sup>e</sup> éd.) Paris 1876, p. 294/6] (Note de P. Stäckel).\*

seront les coordonnées  $X, Y, Z, L, M, N$  d'un *vecteur glissant*; ceux de la matrice à trois lignes

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x' & y' & z' \\ 1 & x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}$$

nous donneront les coordonnées d'un *cycle glissant*. Enfin le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x' & y' & z' \\ 1 & x'' & y'' & z'' \\ 1 & x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}$$

représente le sextuple du volume, pris avec son signe, du tétraèdre qui a pour sommets les quatre points simples.

A chacune des six grandeurs (vecteurs ou cycles) que nous avons introduites correspond un type de sous-groupes du groupe des transformations orthogonales ou mouvements de l'espace qui ne les altèrent pas; on dit encore que ces grandeurs sont des *invariants* de ces sous-groupes. Ces sous-groupes sont les suivants:

a) *vecteurs polaires*:

1°) pour les *vecteurs libres* (polaires), le groupe des mouvements hélicoïdaux dont l'axe a la direction du vecteur, ces mouvements comprenant, comme cas particuliers, les translations parallèles à la direction du vecteur et les rotations autour d'un axe ayant la même direction;

2°) pour les *vecteurs glissants*, les mouvements hélicoïdaux dont l'axe est le support du vecteur;

3°) pour les *vecteurs liés* à un point, les rotations autour de l'axe qui porte le vecteur;

β) *vecteurs axiaux* ou *cycles*:

4°) pour les *cycles libres* (vecteurs axiaux), le groupe des transformations qui se composent d'une translation, d'une rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan du cycle et d'un retournement par symétrie relativement à un point quelconque de l'espace;

5°) pour les *cycles glissants*, toutes les translations parallèles au plan du cycle combinées avec les rotations dont l'axe est perpendiculaire au plan du cycle et avec les retournements par symétrie relatifs à un point de ce plan;

6°) pour les *cycles liés* à un point, on ne conserve que les rotations autour de la normale au plan menée par ce point et les symétries par rapport à ce point<sup>36)</sup>.

36) Voir *F. Klein*, Progr. Erlangen 1872; Math. Ann. 43 (1893), p. 63;

**15. Grandeurs scalaires de première espèce et grandeurs scalaires de deuxième espèce.** On appelle *scalaire*, en généralisant une expression déjà rencontrée et empruntée à la théorie des quaternions<sup>37)</sup>, toute grandeur dont la détermination est fixée par un nombre, et par un nombre seulement, comme par exemple la densité, ou encore la température. Mais deux cas peuvent se présenter:

a) le nombre en question est indépendant du sens des axes de coordonnées; on dit alors qu'il est *scalaire de première espèce*<sup>38)</sup>.

b) Le nombre qui définit la quantité considérée change de signe lorsque l'on renverse les axes de coordonnées: on dit alors qu'il est *scalaire de deuxième espèce*<sup>39)</sup>.

Ainsi, la projection sur un axe du produit extérieur de trois vecteurs polaires est un scalaire de deuxième espèce.

Au contraire, la projection sur un axe du produit de trois vecteurs axiaux est un scalaire de première espèce.

**16. Les moments.** On désigne par le mot *moments* des grandeurs obtenues en rattachant les vecteurs, par une figure ou un système géométrique, aux différents éléments: points, droites ou plans de l'espace.

Il convient de distinguer deux types différents de moments:

1°) les *moments scalaires* qui sont des nombres positifs, négatifs ou nuls.

2°) les *moments vectoriels* qui sont des grandeurs géométriques.

Ces derniers peuvent être soit des vecteurs polaires, soit des vecteurs axiaux ou des cycles.

Nous ne nous occuperons pas, dans cet article, de la notion de *moment par rapport à un plan*. Cette notion est usitée dans la théorie des vecteurs localisés en des points, ou vecteurs liés. Ces moments sont des vecteurs polaires (dont les longueurs sont des grandeurs scalaires) qui interviennent notamment dans la composition des forces

trad. par *H. Padé*, Ann. Ec. Norm. (3) 8 (1891), p. 87, 173 et par *G. Fano*, Ann. mat. pura appl. (2) 17 (1889/90), p. 307. Voir aussi *F. Klein*, Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 237/65; réimpr. Math. Ann. 62 (1906), p. 419/48.

37) Cette locution est due à *W. R. Hamilton*, Proc. Irish Acad. (1) 3 (1845/7), p. 9 [1844]; Lectures on quaternions<sup>1°)</sup>, p. 68; Elements of quaternions, Londres 1866, p. 10 (œuvre posthume); (2° éd.) publ. par *Ch. J. Joly* 1, Londres 1899, p. 11; trad. allemande par *P. Glan* 1, Leipzig 1882, p. 14.

38) Cf. *F. Klein*, Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 247.

39) Au lieu des expressions du texte, *P. Langevin* [cf. IV 16, 2] emploie les suivantes: „scalaire“ et „pseudo-scalaire“. Il propose de distinguer typographiquement ces deux espèces de grandeurs en désignant les premières par une seule lettre *a*, les deuxièmes par une lettre *q* pointée en dessous.\*

parallèles appliquées à un solide et dans la théorie des centres de gravité. Leur théorie sera exposée dans l'article II 5.\*

**17. Moment linéaire ou vectoriel d'un vecteur glissant par rapport à un point.** Considérons l'ensemble formé par un vecteur glissant  $AB$  et un point  $P$ ; quand le vecteur glisse sur un support, certains éléments de cet ensemble géométrique restent invariables: on les caractérise par un vecteur axial défini comme il suit. Le moment<sup>40)</sup> d'un vecteur glissant  $AB$  par rapport à un point  $P$ <sup>41)</sup> est un vecteur  $PQ$  lié au point  $P$ , sa longueur  $PQ$  est égale au produit de la longueur du vecteur  $AB$  par la distance de ce vecteur au point  $P$ , sa direction celle de la perpendiculaire au plan  $PAB$ ; enfin son sens est choisi de manière que le trièdre  $PABQ$  ait la disposition directe dans l'espace orienté<sup>42)</sup>, c'est-à-dire la même disposition que le trièdre qui oriente l'espace.\*

Pratiquement il est souvent commode de déterminer le sens de  $PQ$  en assimilant  $AB$  à une force appliquée au point  $A$  d'un solide pouvant tourner autour de la perpendiculaire menée par  $P$  au plan  $PAB$ . Le sens du moment  $PQ$  est celui de l'observateur placé les pieds en  $P$ , la tête en  $Q$ , qui voit le corps tourner dans le sens direct sous l'action de la force  $AB$ . Nous dirons souvent, pour abrégé, que le sens de  $PQ$  est le sens de la rotation produite par  $AB$ .

Nous dirons aussi que le vecteur  $AB$  est direct par rapport à  $PQ$ ; par là-même,  $PQ$  est direct par rapport à  $AB$ .

Le vecteur  $PQ$  n'est pas autre chose que le vecteur que nous avons appelé plus haut produit vectoriel de  $PA$  par  $PB$ .

40) L'habitude de considérer le moment comme une grandeur vectorielle, introduite par A. L. Cauchy qui emploie l'expression *moment linéaire* [Exercices math. 1, Paris 1826, p. 66; Œuvres (2) 6, Paris 1887, p. 89; voir aussi C. R. Acad. sc. Paris 36 (1853), p. 75; Œuvres (1) 11, Paris 1899, p. 444], adoptée dans tous les cours de mathématiques spéciales, est aujourd'hui générale en France [voir par ex. P. Appell, Traité de mécanique rationnelle (1<sup>re</sup> éd.) 1, Paris 1893, p. 5; (3<sup>e</sup> éd.) 1, Paris 1909, p. 3; G. Koenigs, Cinématique<sup>2)</sup>, p. 17; J. Tannery<sup>3)</sup>, Ann. Ec. Norm. (3) 3 (1886), p. 43/80]. Il n'en a pas toujours été ainsi: c'est ainsi qu'en 1858 encore, O. Bonnet [Leçons de mécanique élémentaire, Paris 1858, p. 205] considérait les moments, soit par rapport à un point, soit par rapport à un axe, comme des nombres réels positifs ou négatifs. Au fond, il y a des moments scalaires et des moments vectoriels; le plus souvent on ne considère actuellement que les seconds.\*

41) Le moment défini par ses composantes joue déjà un grand rôle dans G. C. F. M. Riche de Prony [Leçons de mécanique 1, Paris 1810, p. 67], qui indique [id. p. 82] P. S. Laplace comme le véritable créateur de la théorie des moments.

42) On peut encore dire qu'un observateur dirigé suivant  $PQ$  voit le vecteur  $AB$  parcourir de  $A$  vers  $B$  dans le sens positif.\*

Le moment vectoriel, par rapport à un point, d'un vecteur polaire est un vecteur axial. Le moment vectoriel, par rapport à un point, d'un vecteur axial est un vecteur polaire.

La longueur du moment s'exprime encore par le double de l'aire du triangle  $PAB$ , prise en valeur absolue<sup>43)</sup>. Le moment est nul si le vecteur  $AB$  est nul ou si sa distance au point  $P$  est nulle. On peut déplacer l'origine du vecteur  $AB$  sur sa direction ou le point  $P$  sur une parallèle à  $AB$  sans changer le moment.

Le moment de la somme géométrique de plusieurs vecteurs concourants, par rapport à un point  $P$ , est égal à la somme géométrique des moments des vecteurs composants par rapport au même point  $P$ .

Si le point  $P$  et les vecteurs envisagés sont dans un même plan, les vecteurs moments sont tous dirigés suivant la même droite et, si l'on a fixé un sens positif sur cette droite, ces moments devront être considérés comme positifs ou négatifs suivant qu'ils seront dirigés dans le sens positif ou en sens contraire; le théorème de la composition des vecteurs concourants prend alors la forme suivante dont l'énoncé équivaut à celui de P. Varignon<sup>44)</sup>: le moment de la résultante de plusieurs vecteurs concourants situés dans un même plan par rapport à un point  $P$  de leur plan est égal à la somme algébrique des moments de ces vecteurs par rapport au point  $P$ <sup>45)</sup>. D'ailleurs, dans ce cas particulier, les moments par rapport à un point se confondent avec les moments par rapport à une droite normale au plan des vecteurs, moments qui vont être définis au paragraphe suivant.

Dans le cas où les supports des vecteurs glissants ne concourent pas en un point, il n'y a plus de théorème analogue. Mais on est souvent amené à considérer la somme géométrique des moments de ces vecteurs par rapport à un point  $O$ : c'est ce qu'on appelle le *moment résultant* du système de vecteurs par rapports au point  $O$ .\*

**18. Moment par rapport à un axe**<sup>46)</sup>. Le moment d'un vecteur par rapport à un axe est la projection orthogonale, sur cet axe,

43) Cette considération rattache le moment vectoriel à la théorie des cycles.\*

44) P. Varignon, Nouvelle mécanique ou statique 1, Paris 1725, p. 386 (édition posthume dont le projet a été donné en 1687).

P. Varignon (p. 304) s'exerce d'employer le mot „moment“ pour traduire *momentum* qui est consacré, dit-il, par l'usage. Il préférerait dire *force relative*, ou *force d'impression*, ou encore *action*.\*

45) Il est à remarquer ici que les moments considérés par P. Varignon ne sont plus de véritables vecteurs, mais des nombres réels, positifs ou négatifs, ou encore des moments scalaires de deuxième espèce. Un seul observateur normal au plan sert à fixer le signe des moments.\*

du moment du vecteur pris par rapport à un point  $P$  quelconque de cet axe. Ce moment est indépendant du choix que l'on fait du point  $P$  sur l'axe. C'est aussi le moment de la projection orthogonale du vecteur sur un plan quelconque perpendiculaire à l'axe, par rapport à l'intersection de l'axe et du plan, ce dernier moment devant être considéré comme positif s'il est porté sur l'axe dans le sens positif et comme négatif dans le cas contraire.

Le moment par rapport à un axe est, comme on le voit, un *moment scalaire*.

Il est parfois commode de représenter ce moment scalaire par un segment situé sur l'axe (ou un vecteur glissant sur l'axe) par rapport auquel on prend le moment. Ce segment (vecteur), qui est mesuré sur l'axe envisagé par le moment scalaire, a un sens bien défini: en assimilant à une force le vecteur dont on prend le moment par rapport à l'axe, ce sens est donné par celui de la rotation autour de l'axe produite par la projection, sur un plan perpendiculaire à l'axe, de la force envisagée.

Soient  $x, y, z$  les coordonnées de l'origine d'un vecteur  $AB$ ,  $X, Y, Z$  les composantes de ce vecteur suivant les axes coordonnés,  $L, M, N$  ses moments par rapport aux axes. Les expressions analytiques de ces moments seront

$$(1) \quad \begin{cases} L = yZ - zY, \\ M = zX - xZ, \\ N = xY - yX. \end{cases}$$

Le moment linéaire  $\vec{G}$  du même vecteur par rapport à l'origine des coordonnées a pour composantes suivant les axes les nombres  $L, M, N$ .

Par rapport à un autre point  $O'$  de l'espace, de coordonnées  $x', y', z'$ , le moment du vecteur  $AB$  aura pour composantes

$$\begin{aligned} L' &= L - (y'Z - z'Y), \\ M' &= M - (z'X - x'Z), \\ N' &= N - (x'Y - y'X), \end{aligned}$$

On peut traduire ces formules par le théorème suivant qui fait image:

Le moment d'un vecteur  $AB$  par rapport à un point quelconque  $O'$  est la somme géométrique du moment de  $AB$  par rapport à un

46) *P. S. Laplace* [Mécanique céleste 1, Paris an VII, p. 13; Œuvres 1, Paris 1878, p. 15] définit la valeur absolue du moment d'une force par rapport à un axe. Il avait d'ailleurs été précédé par *L. Euler*, Nova Acta Acad. Petrop. 7 (1789), éd. 1793, p. 191/204 [1780].\*

autre point  $O$  et du moment par rapport à  $O'$  d'un vecteur équipollent à  $AB$  appliqué en  $O$ .\*

*Expressions diverses du moment d'un vecteur par rapport à un axe.*

Soient  $l$  la longueur d'un vecteur  $AB$ ,  $\theta$  l'angle de sa direction avec le sens positif de l'axe  $OU$  par rapport auquel on prend le moment,  $\delta$  la plus courte distance du vecteur à cet axe. Le moment du vecteur  $AB$  aura pour expression

$$\pm l\delta \sin \theta,$$

où le signe + correspond au cas où un mobile parcourant le vecteur  $AB$  de son origine  $A$  à son extrémité  $B$  tourne autour d'un observateur  $OU$  dans le sens positif. On dit alors que  $AB$  est *direct* par rapport à  $OU$ . Le signe - correspond au cas contraire où l'on dit que  $AB$  est *inverse* par rapport à  $OU$ .

Le moment est nul si le vecteur est nul ou s'il est dans un même plan avec l'axe.

Portons sur l'axe  $OU$  dans le sens positif un vecteur  $A_1B_1$  et considérons le tétraèdre qui a pour arêtes opposées  $AB$  et  $A_1B_1$ ; désignons par

$$[AB, A_1B_1]$$

le volume de ce tétraèdre affecté du signe + ou du signe - suivant que  $AB$  sera direct ou inverse par rapport à  $A_1B_1$ .

Le moment de  $AB$  par rapport à l'axe  $OU$  est alors égal en grandeur et en signe à

$$\frac{6}{l_1} [AB, A_1B_1],$$

si  $l_1$  est la longueur du vecteur  $A_1B_1$ . Il est clair que ce moment pourrait être représenté par la valeur algébrique du volume du parallélépipède qui aurait pour arêtes  $AB, AA_1$  et  $AB_1$ .\*

**19. Moment relatif de deux vecteurs.** On appelle *moment relatif* de deux vecteurs  $A_1B_1, A_2B_2$  le nombre

$$6 [A_1B_1, A_2B_2] = 6 [A_2B_2, A_1B_1]$$

qui vient d'être défini.

Soient  $x_1, y_1, z_1$  les coordonnées de  $A_1$ ;  $X_1, Y_1, Z_1$  les composantes de  $A_1B_1$ ;  $x_2, y_2, z_2$  les coordonnées de  $A_2$ ;  $X_2, Y_2, Z_2$  les composantes de  $A_2B_2$ . Le moment relatif des deux vecteurs  $A_1B_1, A_2B_2$  a pour expression

$$M = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_1 + X_1 & y_1 + Y_1 & z_1 + Z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_2 + X_2 & y_2 + Y_2 & z_2 + Z_2 \end{vmatrix}$$

ou encore, en désignant par  $L_1, M_1, N_1$  les moments de  $A_1B_1$ , et par  $L_2, M_2, N_2$  les moments de  $A_2B_2$  par rapport aux axes coordonnés,

$$M = L_1 X_2 + M_1 Y_2 + N_1 Z_2 + L_2 X_1 + M_2 Y_1 + N_2 Z_1$$

ou enfin

$$M = (L_1 + L_2)(X_1 + X_2) + (M_1 + M_2)(Y_1 + Y_2) + (N_1 + N_2)(Z_1 + Z_2).$$

Il est clair que le moment d'un vecteur par rapport à un axe n'est pas autre chose que le moment relatif de ce vecteur et d'un vecteur unitaire porté par l'axe (on appelle *vecteur unitaire* un vecteur égal à l'unité de longueur et dirigé sur l'axe dans le sens positif de cet axe). Il est évident que le moment relatif de deux vecteurs reste invariable si les vecteurs glissent sur leurs supports.

On a quelquefois à considérer le *moment relatif de deux axes*: ce n'est autre chose que le moment relatif des deux vecteurs unitaires portés par ces axes. Si  $\alpha, \beta, \gamma$  sont les cosinus directeurs du premier axe,  $\lambda, \mu, \nu$  les moments par rapport aux axes coordonnés du vecteur unitaire porté par cet axe,  $\alpha', \beta', \gamma', \lambda', \mu', \nu'$ , les quantités analogues relatives au second axe, le moment relatif des deux axes aura pour expression

$$\lambda\alpha' + \mu\beta' + \nu\gamma' + \lambda'\alpha + \mu'\beta + \nu'\gamma.$$

Nous terminerons ce qui concerne les moments par une remarque essentielle: les n<sup>os</sup> 16 à 19 concernent des vecteurs glissants aussi bien que des vecteurs liés à leur point d'application.

**20. Coordonnées d'un vecteur glissant.** Coordonnées de la droite. Tandis qu'un vecteur libre est déterminé par trois nombres qui sont les projections du vecteur sur les trois axes, un vecteur glissant  $A_1A_2$  est, comme on l'a déjà vu (n<sup>o</sup> 6), défini par les six nombres

$$\begin{aligned} X &= x_2 - x_1, & L &= y_2z_1 - z_2y_1, \\ Y &= y_2 - y_1, & M &= z_2x_1 - x_2z_1, \\ Z &= z_2 - z_1, & N &= x_2y_1 - y_2x_1, \end{aligned}$$

où  $x_1, y_1, z_1$  sont les coordonnées cartésiennes rectangulaires de l'origine  $A_1$  et  $x_2, y_2, z_2$  celles de l'extrémité  $A_2$  du vecteur. On appelle ces six nombres les *coordonnées* du vecteur glissant; il existe entre elles la relation identique

$$LX + MY + NZ = 0,$$

qui montre qu'un vecteur glissant n'a que cinq coordonnées indépendantes. Ces six coordonnées<sup>47)</sup> d'un vecteur glissant sont formées d'une part par

47) Voir J. Plücker, Fundamental views regarding mechanics [Philos. Trans. London 166 (1866), p. 361; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 546].

les trois composantes  $X, Y, Z$  d'un vecteur polaire libre et d'autre part par les trois composantes  $L, M, N$  d'un vecteur axial lié à l'origine des coordonnées. Les trois premières ne sont pas altérées par une translation des axes; quant aux trois dernières, si l'on désigne leurs nouvelles valeurs par  $L', M', N'$  et par  $x_0, y_0, z_0$  les coordonnées de la nouvelle origine, on aura les relations

$$\begin{aligned} L &= L' - y_0Z + z_0Y, \\ M &= M' - z_0X + x_0Z, \\ N &= N' - x_0Y + y_0X. \end{aligned}$$

Une rotation des axes autour de l'origine des coordonnées fait subir aux six coordonnées les mêmes transformations qu'aux coordonnées d'un point. Le renversement des axes change le signe de  $X, Y, Z$ , mais ne modifie pas  $L, M, N$ . Le seul invariant est

$$X^2 + Y^2 + Z^2;$$

l'invariant  $XL + YM + ZN$  est ici nul. Ces propriétés sont *caractéristiques* des vecteurs glissants.

Les rapports des six coordonnées d'un vecteur glissant déterminent la droite qui porte le vecteur; à ce point de vue ces six nombres, ou des nombres proportionnels, ont été désignés depuis J. Plücker<sup>48)</sup> et A. Cayley<sup>49)</sup> sous le nom de *coordonnées de la droite*.

Six nombres  $X, Y, Z, L, M, N$  tels que

$$XL + YM + ZN = 0$$

peuvent toujours être considérés comme les coordonnées d'une droite; les trois premiers sont proportionnels aux cosinus directeurs de la droite, les trois derniers aux cosinus directeurs du moment d'un vecteur quelconque porté par la droite par rapport à l'origine des coordonnées.

**21. Addition des vecteurs glissants, concourants ou parallèles. Couples de Poinot.** Si les droites  $l$  et  $l'$  qui portent deux vecteurs glissants se coupent à distance finie ou infinie, les coordonnées  $X, Y, Z, L, M, N$  et  $X', Y', Z', L', M', N'$  de ces deux vecteurs satisfont à la relation suivante, qui exprime que le moment relatif des deux vecteurs est nul,

$$XL' + YM' + ZN' + X'L + Y'M + Z'N = 0.$$

48) Proc. R. Soc. London 14 (1865), p. 53; Philos. Trans. London 155 (1865), p. 725; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, en partie, p. 525/41. Voir surtout J. Plücker, Neue Geometrie des Raumes, Leipzig 1869, p. 1 [1868]. L'idée des coordonnées de la droite se trouve, dès 1846, dans son System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf 1846.

49) Quart. J. pure appl. math. 3 (1860), p. 225; 5 (1862), p. 81; Papers 4, Cambridge 1891, p. 446, 490.

On peut alors considérer les sommes des coordonnées correspondantes  $X + X'$ ,  $Y + Y'$ , ... comme les six coordonnées d'un vecteur glissant et ce segment peut être considéré comme la *somme géométrique* des deux premiers. La droite qui porte ce nouveau segment passe par le point de concours  $P$  des droites  $l$  et  $l'$  et est située dans leur plan. Comme on peut donner aux deux segments la même origine  $P$ , on pourra les désigner par la notation  $PQ$ ,  $PQ'$ ; leur somme sera désignée par  $PQ''$ ;  $P$ ,  $Q$ ,  $Q'$ ,  $Q''$  seront les sommets d'un parallélogramme. Le vecteur glissant ainsi construit s'appelle la *résultante* des deux vecteurs donnés. On remarque immédiatement l'analogie avec la composition des vecteurs libres. Des vecteurs glissants concourants en nombre quelconque se composent en un vecteur glissant unique appelé *résultante* de ces vecteurs.

Lorsque les droites  $l_1$  et  $l_2$  qui portent deux vecteurs glissants  $P_1Q_1$  et  $P_2Q_2$  sont *parallèles*, on peut assimiler ces vecteurs à des segments affectés de signes: leur *somme* est un vecteur glissant  $PQ$  porté par une droite parallèle à  $l_1$  et  $l_2$ , située dans leur plan et qui partage leur distance en raison inverse des segments  $P_1Q_1$  et  $P_2Q_2$  pris avec leurs signes. Le sens du vecteur  $PQ$  est celui du plus long des vecteurs donnés. Il y a un cas d'exception: c'est celui où les vecteurs glissants donnés sont égaux en longueur et de sens contraires. Le vecteur résultant est alors rejeté à l'infini tandis que sa longueur est nulle. Il cesse donc d'être susceptible d'une représentation visible et l'on doit conserver la figure composée des deux vecteurs.

Nous appellerons l'ensemble de ces deux vecteurs, en considération de son rôle en statique, un *couple de Poinso*<sup>50</sup>) ou simplement un *couple*. Nous l'étudierons plus loin [n° 22 et 23].

En résumé, la somme d'un nombre quelconque de vecteurs glissants concourant en un point  $O$  est toujours un vecteur glissant qui concourt au même point  $O$ ; la longueur de ce vecteur peut d'ailleurs être nulle.

La somme d'un nombre quelconque de vecteurs parallèles est un vecteur parallèle aux premiers à moins qu'on ne se trouve dans le cas du couple: dans ce cas, soient  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  les sommes des projections sur les axes coordonnés des vecteurs dirigés dans un certain sens,  $X'$ ,  $Y'$ ,  $Z'$  celles qui correspondent aux vecteurs dirigés en sens contraire; on aura les conditions

$$X' = -X, \quad Y' = -Y, \quad Z' = -Z.$$

50) L. Poinso, *Éléments de statique*, (1<sup>re</sup> éd.) Paris an XII, p. 43.  
E. Study [Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 25] dit *Stäbepaar* pour *couple de Poinso*.

22. Systèmes de vecteurs<sup>51</sup>). **Résultante de translation et moment résultant.** Considérons maintenant un nombre quelconque de vecteurs  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  appliqués aux points  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , et soit  $O$  un point quelconque de l'espace.

On appelle *résultante générale* du système de vecteurs envisagés, ou *résultante de translation* de ce système de vecteurs, la somme géométrique des vecteurs  $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$  équipollents à  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , menés par  $O$ . La résultante de translation est donc un vecteur libre.

On appelle *moment résultant* du système, *par rapport au point O*, la somme géométrique des moments des divers vecteurs  $\vec{F}_k$  par rapport au point  $O$ .

Soient  $X_k, Y_k, Z_k$  les projections de  $\vec{F}_k$  sur les axes coordonnés, dont nous supposons l'origine au point  $O$ , et soient  $L_k, M_k, N_k$  les moments de  $\vec{F}_k$  par rapport à ces trois axes.

Les projections de la résultante de translation  $\vec{R}$  auront pour expressions

$$X = \sum X_k, \quad Y = \sum Y_k, \quad Z = \sum Z_k;$$

celles du moment résultant relatif au point  $O$  seront

$$L = \sum L_k, \quad M = \sum M_k, \quad N = \sum N_k.$$

On appelle

$$X, Y, Z, L, M, N$$

les *coordonnées* du système de vecteurs.

La longueur  $R$  de la résultante générale est donnée par la formule

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2};$$

51) Dans son article allemand sur les fondements de la géométrie [Encyklopädie der math. Wiss. IV 2, p. 135] H. E. Timerding emploie le mot *Liniensummen* (somme de droites). Dans l'article français il a semblé préférable de ne pas donner au mot „somme“ cette extension et de s'en tenir au langage courant en France [Voir par ex. P. Appell, *Traité de mécanique rationnelle*, (3<sup>e</sup> éd.) 1, Paris 1909, p. 17].

D'ailleurs, même en Allemagne, l'accord est loin d'être fait sur la nécessité de cette extension. Conformément au point de vue du texte français, W. Schell [Theorie der Bewegung und der Kräfte, Leipzig 1879/80] et Otto Mohr, dans de nombreux mémoires [parus pour la plupart dans le „Civilingenieur“ et réunis ensuite dans un volume intitulé: Abh. techn. Mechanik<sup>52</sup>)] disent *Streckensystem*; E. Budde [Mechanik 2, Berlin 1891, p. 611] dit *Vektorensystem*, et ces deux mots se traduisent exactement par „système de vecteurs“. Au contraire, et dans l'ordre d'idées adopté dans le texte allemand par H. E. Timerding, le même auteur E. Budde [Mechanik 2, p. 568] dit aussi *heteraptische Summe* (somme hétérogène), et E. Study [Geometrie der Dynamen 1, Leipzig 1903, p. 25] dit *Stäbesumme* (somme de bâtons).

celle du moment résultant  $\vec{G}$  par

$$G = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

Par rapport à un autre point  $O'$  de l'espace, dont les coordonnées sont  $x', y', z'$ , le moment du vecteur  $\vec{F}_k$  a pour composantes

$$L'_k = L_k - (y'Z_k - z'Y_k), \quad M'_k = M_k - (z'X_k - x'Z_k), \\ N'_k = N_k - (x'Y_k - y'X_k),$$

et le moment résultant du système

$$L' = L - (y'Z - z'Y), \quad M' = M - (z'X - x'Z), \quad N' = N - (x'Y - y'X).$$

Ces formules montrent que le moment résultant  $\vec{G}$  du système, par rapport à un point  $O$ , est équipollent à la somme géométrique du moment résultant  $\vec{G}$ , par rapport à  $O$ , et du moment, par rapport à  $O$ , de la résultante de translation  $\vec{R}$  du système appliquée au point  $O$ .

Elles montrent encore que l'expression

$$LX + MY + NZ = RG \cos(R, G)$$

est indépendante du point  $O$ : c'est un invariant orthogonal du système de vecteurs.

Appliquons enfin ces formules à un couple. La résultante de translation d'un tel système étant nulle, un couple a même moment résultant par rapport à tout point  $O$  de l'espace. Ce moment résultant est, par suite, un vecteur libre: on l'appelle aussi le moment vectoriel ou plus simplement, le moment du couple. Pour le construire, on peut supposer que le point  $O$  appartient à l'un des vecteurs du couple; on voit alors immédiatement que le moment d'un couple est un vecteur dont la longueur est égale à la valeur absolue de l'aire du parallélogramme  $ABA'B'$  formé par les deux vecteurs  $AB, A'B'$  du couple et qui est dirigé perpendiculairement au plan du couple dans un sens tel que le moment pris pour un point intérieur à  $ABA'B'$  soit direct par rapport à chacun des vecteurs du couple. Plus brièvement, le moment d'un couple est le vecteur qui correspond par la construction du n° 11 au couple envisagé comme cycle (le sens de parcours du parallélogramme  $ABA'B'$  étant celui des vecteurs du couple).

On appelle composantes d'un couple les composantes  $L, M, N$  de son moment. D'après ce qui précède elles se comportent dans les transformations de coordonnées comme les composantes d'un vecteur axial.

On appelle bras de levier d'un couple la distance de ses deux vecteurs. Le moment d'un couple a donc pour valeur absolue le produit d'un des vecteurs du couple par son bras de levier.

On appelle quelquefois axe d'un couple ce que nous avons désigné sous le nom de moment de ce couple. Il semble préférable de réserver ce nom au véritable axe formé par une demi-droite quelconque normale au plan du couple dans le sens du moment du couple.

Revenant au cas général d'un système quelconque de vecteurs, on appelle moment résultant<sup>53)</sup> d'un système de vecteurs par rapport à un axe la projection sur cet axe du moment résultant du système par rapport à un point quelconque  $P$  pris sur cet axe. Ce moment est indépendant du choix du point  $P$  sur la droite envisagée. C'est aussi la somme algébrique des moments des vecteurs du système par rapport à cet axe.

C'est ce qu'expriment, pour les trois axes coordonnés, les égalités

$$L = \Sigma L_x, \quad M = \Sigma M_x, \quad N = \Sigma N_x$$

citées plus haut.

Les points pour lesquels le moment résultant a la même direction que la résultante de translation sont sur une ligne droite qu'on appelle axe central<sup>54)</sup> du système. Le moment résultant  $\vec{G}$  est minimisé pour les points de cet axe.

Si l'on prend les moments d'un système par rapport à tous les axes qui concourent en un point  $M$ , ceux de ces axes qui donnent un même moment forment un cône de révolution autour de l'axe  $MU$  sur lequel est situé le moment relatif au point  $M$ . Par rapport à l'axe  $MU$  le moment est maximisé.

Les axes de l'espace pour lesquels le moment a la même valeur forment un complexe du second ordre.

**23. Systèmes équivalents. Réduction d'un système à une force et à un couple.** On dit que deux systèmes de vecteurs ( $S$ ) et ( $S'$ ) sont équivalents s'ils ont par rapport à un point  $O$  donné de l'espace même résultante de translation et même moment résultant. Il résulte des formules relatives au changement d'origine données au n° 19 que les moments résultants des deux systèmes équivalents sont alors les mêmes par rapport à un point  $O$  quelconque de l'espace. Il suffit donc d'exprimer les conditions d'équivalence par rapport à l'origine des coordonnées.

Soient  $X, Y, Z, L, M, N$  les coordonnées du système ( $S$ ) et  $X', Y', Z', L', M', N'$  celles du second système ( $S'$ ); l'équivalence des deux

53) C'est ce que *A. L. Cauchy* [Exercices math. 1, Paris 1826, p. 121; Œuvres (2) 6, Paris 1887, p. 163] appelle le moment linéaire principal.

54) *L. Poincaré*, J. Ec. polyt. (1) cah. 13 (1806), p. 182.



systèmes se traduira par les six conditions nécessaires et suffisantes

$$\begin{aligned} X &= X', & Y &= Y', & Z &= Z', \\ L &= L', & M &= M', & N &= N'. \end{aligned}$$

Par exemple, deux couples de même moment sont équivalents. En d'autres termes, tous les couples situés dans des plans parallèles, tels que le produit d'un vecteur par le bras de levier ait la même valeur et pour lesquels le sens de parcours du parallélogramme construit sur les deux vecteurs est le même sont équivalents.

On voit donc que, au point de vue de l'équivalence, on peut remplacer un couple quelconque  $A$  par un autre  $A'$  ayant un bras de levier donné dans un plan  $\Pi$  parallèle au plan du premier couple. Le support de l'un des vecteurs de  $A'$  peut être pris arbitrairement dans le plan  $\Pi$ ; les vecteurs glissants qui forment  $A'$  sont alors complètement déterminés.

La théorie de l'équivalence et de la composition des couples a été établie directement et pour la première fois par L. Poinsot à l'aide d'une méthode purement géométrique; il en a déduit la réduction d'un système quelconque à un vecteur et à un couple. Cette réduction est une conséquence immédiate de la notion d'équivalence telle que nous l'avons donnée plus haut.

Considérons, en effet, un couple  $A$  dont le moment  $\vec{G}$  ait pour projections sur les axes les coordonnées  $L, M, N$  du système  $(S)$ ; le système formé par ce couple et par la résultante de translation  $\vec{R}$  du système  $(S)$  appliquée en  $O$  est évidemment équivalent au système  $(S)$ . Le couple  $A$  a pour moment le moment résultant du système  $(S)$  par rapport à l'origine; on l'appelle pour cette raison le *couple résultant du système relatif au point  $O$* .

Lorsqu'un système  $(S)$  est remplacé par un système équivalent formé d'un vecteur et d'un couple, on dit que le système est *réduit* à ce vecteur et à ce couple.

En ce qui concerne le couple, la réduction dépend du point  $O$  par rapport auquel on fait la réduction; si en effet ce point  $O$  change, le couple change, tandis que le vecteur unique, c'est-à-dire la résultante générale, n'est pas changée. Toutefois la projection du moment du couple sur la direction de la résultante générale reste invariante. C'est ce que nous avons dit en d'autres termes à la fin du n° 22. On peut aussi dire que le produit scalaire du moment résultant en un point et de la résultante générale est constant.

Trois cas particuliers intéressants sont à signaler:

1°) La résultante générale est nulle. Dans ce cas le système  $(S)$

est équivalent à un couple; le couple résultant a le même moment pour tous les points de l'espace. Conditions:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0 \quad \text{avec} \quad L^2 + M^2 + N^2 > 0.$$

2°) Le moment résultant minimisé est nul sans que la résultante générale le soit, ou, ce qui revient au même, le moment du couple en un point est perpendiculaire à la résultante générale. Dans ce cas, le système de vecteurs  $(S)$  est équivalent à un vecteur unique. Conditions:

$$LX + MY + NZ = 0 \quad \text{avec} \quad X^2 + Y^2 + Z^2 > 0.$$

3°) La résultante générale et le moment résultant par rapport à l'origine des coordonnées sont nuls l'un et l'autre. Le système  $(S)$  est équivalent à zéro, le zéro exprimant l'absence de tout vecteur. Conditions:  $X = 0, Y = 0, Z = 0, L = 0, M = 0, N = 0$ , ou, en remplaçant ces coordonnées par leurs valeurs [n° 22],

$$\begin{aligned} \sum X_k &= 0, & \sum Y_k &= 0, & \sum Z_k &= 0, \\ \sum L_k &= 0, & \sum M_k &= 0, & \sum N_k &= 0. \end{aligned}$$

24. Composition des couples. Soient  $A$  et  $A'$  deux couples donnés,  $\vec{G}$  et  $\vec{G}'$  leurs moments; on commence par leur donner un même bras de levier [n° 20] situé sur l'intersection de leurs plans. Il est alors facile de voir que leur ensemble est équivalent à un couple unique dont l'axe  $\vec{G}''$  est la diagonale du parallélogramme qui a pour côtés  $\vec{G}$  et  $\vec{G}'$  (55). La composition des couples est ainsi ramenée à celle des vecteurs libres: un système de couples en nombre quelconque est toujours équivalent à un couple unique dont le moment est la somme géométrique des moments des couples donnés.

25. Système de deux vecteurs équivalent à un système de vecteurs donné. Soit  $A$  le couple résultant relatif au point  $O$  d'un système de vecteurs donnés  $(S)$ ; envisageons deux vecteurs  $\vec{V}$  et  $\vec{V}'$ , dont le premier  $\vec{V}$  soit appliqué en  $O$ , et qui forment ce couple  $A$ . Soit enfin  $\vec{R}$  la résultante de translation de  $(S)$  dont nous supposons l'origine au point  $O$ .

Les deux vecteurs  $\vec{R}$  et  $OV'$  se composent en un vecteur  $OU$ , et le système des deux vecteurs  $OU$  et  $OV$ , ou plus brièvement le système  $(\vec{U}, \vec{V})$ , est équivalent au système donné  $(S)$ . Le couple n'étant défini que par son moment peut être représenté

55) L. Poinsot, *Éléments de statique*, Paris an XII, p. 60.

par une infinité de systèmes de vecteurs tels que  $\vec{V}, \vec{V}$ . De plus l'origine  $O$  des moments dans l'espace est arbitraire. Il y a donc une grande indétermination dans le nombre des systèmes de deux vecteurs  $\vec{U}, \vec{V}$  équivalents à un système  $(S)$  donné: comme il faut, pour déterminer un vecteur  $\vec{U}$ , six coordonnées  $X, Y, Z, L, M, N$  liées par une relation  $LX + MY + NZ = 0$ , nous aurons, entre les douze coordonnées des deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$ , outre la relation précédente et celle, analogue, qui concerne le second vecteur  $\vec{V}$ , les six équations qui expriment que le système  $(\vec{U}, \vec{V})$  est équivalent au système  $(S)$ , soit en tout huit équations entre douze inconnues: il reste quatre arbitraires.

C'est ainsi [cf. n° 24] que l'on peut fixer arbitrairement l'axe de l'un des deux vecteurs; le sens et la longueur de ce vecteur ainsi que l'autre vecteur seront alors entièrement déterminés.

Ces systèmes de deux vecteurs jouissent de nombreuses propriétés sur lesquelles nous reviendrons plus loin.

Bornons-nous ici à observer que le système de deux vecteurs est équivalent à un vecteur unique si le moment relatif des deux vecteurs qui le composent est nul sans que leur résultante de translation le soit, et qu'il est équivalent à un couple si la résultante de translation de ces deux vecteurs est nulle, c'est-à-dire si ces deux vecteurs sont égaux, parallèles et de sens contraires.

**26. Visseurs.** On a vu, par ce qui précède, que tous les systèmes de deux vecteurs glissants qui ont par rapport à un point de l'espace même moment résultant et même résultante générale sont équivalents. Si l'on porte son attention spécialement sur le moment résultant  $\vec{G}$  et sur la résultante générale  $\vec{R}$ , on aperçoit une autre manière de caractériser tous les systèmes de vecteurs équivalents à un système donné. Bornons-nous ici au cas où les vecteurs du système sont polaires. On peut alors caractériser ce système en se donnant un vecteur polaire libre  $\vec{R}$  qui sera la résultante générale et un vecteur axial  $\vec{G}$  lié à un point  $O$ , qui sera le moment résultant par rapport à ce point  $O$ . On désignera l'ensemble de ces deux données sous le nom de *bivecteur* et on le représentera par le symbole [cf. n° 36]

$$\vec{R} + \vec{G},$$

que l'on énonce le *bivecteur*  $R, G$ .

Les six coordonnées d'un bivecteur sont celles  $X, Y, Z$  de la

résultante générale et celles  $L, M, N$  du moment résultant par rapport à trois axes coordonnés ayant pour origine le point  $O$ .

Parmi tous ces bivecteurs équivalents à un système de vecteurs donné, il en est un et un seul dont les deux éléments, qui sont des vecteurs glissants, sont portés par la même droite; ce bivecteur est appelé *visseur*. Son support est l'axe central<sup>56)</sup> [n° 22].

On est ainsi arrivé à un procédé bien simple pour représenter un ensemble de systèmes de vecteurs polaires glissants équivalents. Le visseur en est l'expression la plus réduite.

Lorsque le système de vecteurs envisagé est un système de vecteurs axiaux on voit de même que ce système est équivalent à un bivecteur

$$\vec{R} + \vec{G}.$$

Ce cas sera étudié de plus près au n° 50 dans la théorie des *vis de Ball*.

Pour un système de vecteurs polaires, soit  $G_1$  la valeur algébrique du moment résultant par rapport à un point de l'axe central estimée positivement dans le sens du vecteur  $\vec{R}$ ; posons  $k = \frac{G_1}{R}$ . Il est évident que, si  $X, Y, Z$  sont les projections de  $\vec{R}$  sur les axes de coordonnées, celles de  $\vec{G}_1$  seront  $kX, kY, kZ$ . En remplaçant  $R$  et  $G_1$  par leurs valeurs, on a l'égalité

$$(1) \quad k = \frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Les équations de l'axe central par rapport à des axes de coordonnées quelconques se trouvent sans peine; il suffit d'écrire que le moment résultant  $\vec{G}$  en un point  $(x, y, z)$  a la même direction que la résultante générale, ce qui donne

$$(2) \quad \frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z}.$$

La valeur commune de ces rapports est  $k$ . Les équations (1) et (2) déterminent le visseur correspondant au système donné de vecteurs. Géométriquement, on obtient aisément la construction de l'axe central lorsqu'on connaît la résultante générale  $\vec{R}$  et le moment résultant  $\vec{G}$  par rapport à un point  $O$  donné. Soient  $OR$  et  $OG$  les vecteurs représentatifs de ces deux grandeurs: abaissons (fig. 6) du point  $G$  la perpendiculaire  $GH$  sur  $OR$ . Sur la perpendiculaire au plan  $OGH$  menée par le point  $O$ , prenons un point  $O'$  tel que le moment de la résultante  $R$  par rapport à ce point  $O'$  soit représenté en gran-

56) Cf. L. Poinsot, J. Ec. polyt. (1) cah. 13 (1806), p. 182.

deur, direction et sens par  $GH$ . Le point  $O'$  sera un point de l'axe central  $O'U$ .

La composition des visseurs n'est pas autre chose que la composition des systèmes de vecteurs; nous n'insisterons pas, pour le moment, sur ce sujet.

Lorsque le système de vecteurs donné est équivalent à un vecteur unique, la droite qui porte ce vecteur unique jouit de toutes les propriétés de l'axe central et on lui donne encore ce nom. On a alors  $k = 0$ .

Lorsque le système de vecteurs se réduit à un couple, ou à zéro, il n'y a plus d'axe central déterminé;  $k$  est alors infini ou indéterminé. Quand le système se réduit à un couple, on peut dire que la direction de l'axe central est encore déterminée par celle de l'axe du couple, tandis que si le système se réduit à zéro, l'axe central est complètement indéterminé.

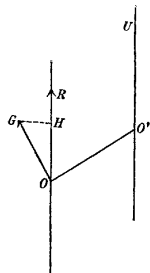


Fig. 6.

**27. Distribution dans l'espace des systèmes de deux vecteurs équivalents à un système donné. Droites de moment nul.** Nous supposons essentiellement que le système  $(S)$  de vecteurs donnés n'est réductible ni à une force unique, ni à un couple unique. Nous désignerons par  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  deux quelconques des vecteurs glissants dont le système peut remplacer le système  $(S)$ .

Cela posé, il est facile de démontrer qu'une droite quelconque  $(D)$  de l'espace peut toujours être prise pour support d'un des deux vecteurs  $\vec{U}$ , pourvu que le moment résultant du système  $(S)$  par rapport à  $(D)$  ne soit pas nul. Le problème est déterminé et admet toujours une solution et une seule, c'est-à-dire qu'étant donné le support de  $\vec{U}$  on peut trouver la longueur et le sens de  $\vec{U}$  ainsi que la position et la longueur de  $\vec{V}$ . On appelle *droites de moment nul* les droites par rapport auxquelles le moment résultant de  $(S)$  est nul: toutes les droites qui rencontrent les deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  sont évidemment des droites de moment nul. Réciproquement toutes les droites  $(D)$  de moment nul rencontrent une infinité de systèmes de deux droites  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$ : en effet, une telle droite  $(D)$  est, en chacun de ses points  $O$ , perpendiculaire au moment résultant du système  $(S)$  relatif à ce point  $O$ , c'est-à-dire que  $(D)$  se trouve dans le plan du couple résultant relatif au point  $O$ . Soient  $\vec{U}$  un des vecteurs de ce couple

ayant son origine en  $O$ ,  $\vec{V}$  l'autre vecteur du couple; en composant  $\vec{U}$  avec la résultante de translation  $\vec{R}$  qui a son origine en  $O$ , on obtient un vecteur  $\vec{U}$  qui, avec  $\vec{V}$ , forme un système de deux vecteurs équivalent à  $(S)$ , et les supports de ces deux vecteurs sont rencontrés par  $(D)$ .

Toutes les droites de moment nul qui passent en un point  $O$  sont dans un même plan, celui du couple résultant relatif au point  $O$ . Le complexe des droites de moment nul est donc un complexe linéaire [cf. n° 26]; on appelle souvent ce complexe le *complexe de Chasles*. Il a cependant été signalé avant *M. Chasles* par *G. Giorgini*<sup>57)</sup>; *A. F. Möbius* l'appelle *Nullsystem*.

Soient  $X, Y, Z, L, M, N$  les coordonnées du système donné;  $x, y, z, l, m, n$  celles d'une droite  $(D)$ . La condition pour que  $(D)$  soit de moment nul s'écrit

$$lX + mY + nZ + Lx + My + Nz = 0.$$

Revenons aux systèmes  $(\vec{U}, \vec{V})$ . *M. Chasles* a démontré à leur sujet deux théorèmes:

**Théorème 1.** Le volume du tétraèdre construit sur les deux vecteurs est constant quels que soient les deux vecteurs dont le système est équivalent au système donné<sup>58)</sup>.

**Théorème 2.** Soit  $(d)$  la perpendiculaire commune aux supports  $(U)$  et  $(V)$  de deux vecteurs correspondants  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$ ; cette perpendiculaire commune rencontre l'axe central et le rencontre à angle droit. Fixons l'axe des  $x$  sur cette perpendiculaire commune et fixons l'axe des  $z$  sur l'axe central compté positivement dans le sens de  $\vec{R}$ : l'axe  $Oy$  sera perpendiculaire aux deux premiers de manière à former un trièdre direct. Soient  $A$  et  $B$  les pieds de  $(d)$  sur  $(U)$  et sur  $(V)$ . Appelons  $\delta_1$  et  $\delta_2$  les abscisses des points  $A$  et  $B$ ,  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  les angles que font avec l'axe central  $Oz$  les demi-droites parallèles aux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  dans le plan orienté  $Oyz$ .

En exprimant que la résultante générale du système  $(\vec{U}, \vec{V})$  est parallèle à  $Oz$ , c'est-à-dire que la somme des projections des deux

57) „Sopra alcune proprietà de' piani de' momenti principali e delle coppie di forze equivalenti [Mem. mat. fis. Soc. ital. delle scienze (1) 20 (1828), math. p. 243/54 [décembre 1827]] (Texte et note de *G. Loria*)”.

58) Ce théorème a été publié par *J. D. Gergonne*, Ann. math. pures appl. 18 (1827/8), p. 372.

Voir aussi à ce sujet *A. F. Möbius* [J. reine angew. Math. 4 (1829), p. 179; Werke 3, Leipzig 1886, p. 499].

vecteurs sur  $Oy$  est nul, on a une première relation

$$(1) \quad U \sin \varphi_1 + V \sin \varphi_2 = 0.$$

Le moment résultant par rapport à  $O$  doit être dirigé suivant  $Oz$ ; or il est la somme géométrique des moments de  $\vec{U}$  et de  $\vec{V}$  qui font respectivement avec  $Oz$  les angles  $\frac{\pi}{2} - \varphi_1$  et  $\frac{\pi}{2} - \varphi_2$ ; d'où la deuxième relation<sup>59)</sup>

$$(2) \quad U \delta_1 \cos \varphi_1 + V \delta_2 \cos \varphi_2 = 0.$$

En éliminant  $U$  et  $V$  entre ces deux équations, on obtient un théorème dû à *M. Chasles* et qui s'exprime par la relation

$$(3) \quad \delta_1 \tan \varphi_2 = \delta_2 \tan \varphi_1 = -k.$$

La valeur commune de ces deux expressions est égale au paramètre  $k$  changé de signe, comme on le verrait aisément en exprimant que la résultante générale et le moment résultant par rapport à l'origine, dirigés l'un et l'autre suivant  $Oz$  et estimés positivement suivant  $Oz$ , ont pour valeurs respectives les quantités données  $R$  et  $G_1$ . Les équations (1), (2) et (3) jointes à  $U \cos \varphi_2 = R$  permettent, lorsqu'on connaît le support de  $\vec{U}$ , c'est-à-dire  $\delta_1$  et  $\varphi_1$ , de trouver  $\delta_2$ ,  $\varphi_2$ ,  $U$  et  $V$ . C'est la solution du problème énoncé au commencement du numéro.

**28. Moment relatif de deux systèmes de vecteurs.** Soient  $(S)$  et  $(S')$  deux systèmes de vecteurs glissants et

$$X, Y, Z, L, M, N; \quad X', Y', Z', L', M', N'$$

leurs coordonnées. L'expression

$$XL + YM + ZN + X'L + Y'M + Z'N$$

est un invariant simultané des deux systèmes. On l'appelle le *moment relatif* des deux systèmes. Si  $(P_1 Q_1, P_2 Q_2)$  est un quelconque des systèmes de deux vecteurs équivalents au système  $(S)$  et  $(P_1' Q_1', P_2' Q_2')$  un quelconque des systèmes de deux vecteurs équivalents au système  $(S')$ , le moment relatif des deux systèmes  $(S)$  et  $(S')$  est égal<sup>60)</sup> au sextuple de la somme des volumes des quatre tétraèdres (chaque volume étant pris avec son signe)

$$[P_1 Q_1, P_1' Q_1'] + [P_1 Q_1, P_2' Q_2'] + [P_2 Q_2, P_1' Q_1'] + [P_2 Q_2, P_2' Q_2'].$$

<sup>59)</sup> Il est bien clair qu'il faudrait augmenter ces angles de  $\pi$  si  $\delta_1$  et  $\delta_2$  étaient négatifs.

<sup>60)</sup> Cf. *G. Battaglini*, Rendic. Accad. Napoli (1) 8 (1869), p. 87/97.

Le théorème d'après lequel la valeur de cette somme est toujours la même, quels que soient le système  $(P_1 Q_1, P_2 Q_2)$  de deux vecteurs équivalents au système  $(S)$ , et le système  $(P_1' Q_1', P_2' Q_2')$  de deux vecteurs équivalents au système  $(S')$  que l'on choisisse, résulte de ce que l'invariant en question peut s'écrire

$$(X + X')(L + L') + (Y + Y')(M + M') + (Z + Z')(N + N') \\ - (XL + YM + ZN) - (X'L + Y'M + Z'N');$$

or la première ligne de cette expression est un invariant du système de vecteurs formés par l'ensemble des deux systèmes donnés  $(S)$  et  $(S')$  tandis que le premier terme de la seconde ligne est un invariant de  $(S)$  et le second, un invariant de  $(S')$ .

On peut encore donner une autre expression du moment relatif des deux systèmes, qui mettra mieux en lumière son caractère d'invariance. Soient  $\vec{R}$  et  $\vec{R}'$  les résultantes générales des deux systèmes,  $\delta$  et  $\alpha$  la plus courte distance et l'angle des axes centraux, enfin  $k$  et  $k'$  les paramètres; le moment relatif a pour expression

$$RR'[(k + k') \cos \alpha \pm \delta \sin \alpha];$$

on prendra le signe + ou le signe -, suivant que le tétraèdre construit sur  $\vec{R}$  et  $\vec{R}'$  sera positif ou négatif.

Soient enfin  $A_i B_i$  un vecteur quelconque du système  $(S)$  et  $A_j' B_j'$  un vecteur quelconque du système  $(S')$ ; le moment relatif des deux systèmes est encore le sextuple de la somme des volumes, pris avec leurs signes, des tétraèdres qui ont pour arêtes opposées un quelconque des vecteurs  $A_i B_i$  et un quelconque des vecteurs  $A_j' B_j'$ .

Si le moment relatif des deux systèmes est nul, on dit<sup>61)</sup> que ces systèmes sont en *involution*<sup>62)</sup>; la condition pour qu'il en soit ainsi est

$$(1) \quad (k + k') \cos \alpha \pm \delta \sin \alpha = 0.$$

On peut encore supposer les deux systèmes confondus; le moment relatif du système par rapport à lui-même, ce qu'on peut appeler *l'automoment* du système, a pour expression

$$2(LX + MY + NZ).$$

Si l'un des systèmes de vecteurs glissants est équivalent à un vecteur unique  $P_1 Q_1$ , les quatre tétraèdres du cas général se réduisent

<sup>61)</sup> D'après *F. Klein*, Math. Ann. 2 (1870), p. 201.

<sup>62)</sup> Voir aussi *R. S. Ball*, The theory of screws, (1<sup>re</sup> éd.) Dublin 1876; (2<sup>e</sup> éd.) A treatise on the theory of screws, Cambridge 1900, p. 26; *R. S. Ball* appelle *reciprocal* (réciproques) deux visseurs entre lesquels existe la relation (1).

à deux. Si la longueur de ce vecteur unique  $P_1 Q_1$  est égale à 1, l'invariant envisagé, représenté par la somme

$$[P_1 Q_1, P_1' Q_1'] + [P_1 Q_1, P_3' Q_3']$$

des volumes des deux tétraèdres ayant pour arêtes opposées l'un  $P_1 Q_1$  et  $P_1' Q_1'$ , l'autre  $P_1 Q_1$  et  $P_3' Q_3'$ , se réduit au *moment du système de vecteurs glissants* ( $S'$ ) par rapport à l'axe ( $d$ ) qui porte le vecteur unitaire  $P_1 Q_1$ . Ce moment a aussi pour expression

$$\sum_{(i)} R_i \delta_i \sin \varphi_i,$$

où  $R_i$  est la longueur d'un quelconque des vecteurs du système ( $S'$ ),  $\varphi_i$  l'angle que fait sa direction avec ( $d$ ) et  $\delta_i$  sa plus courte distance à ( $d$ ); la somme est étendue à tous les vecteurs du système ( $S'$ ).

**29. Des complexes linéaires.** Soient  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$  les coordonnées plückériennes d'une droite  $AB$  ( $\alpha, \beta, \gamma$  étant proportionnelles aux cosinus directeurs de la droite). Nous avons vu qu'il existe entre ces coordonnées l'identité

$$(1) \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

S'il existe en outre entre ces coordonnées une relation linéaire et homogène telle que

$$(2) \quad a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + \alpha\alpha + \beta\beta + \gamma\gamma = 0,$$

on dit que la droite fait partie d'un *complexe linéaire*. Les équations d'une droite du complexe

$$(3) \quad \begin{aligned} \beta z - \gamma y &= \alpha', \\ \gamma x - \alpha z &= \beta', \end{aligned}$$

d'où résulte immédiatement

$$\alpha y - \beta x = \gamma',$$

ne contiennent que trois paramètres. On peut, en effet, à l'aide des relations (1) et (2) exprimer  $\beta'$  par exemple au moyen de  $\alpha', \alpha, \beta, \gamma$ ; les équations de la droite ne dépendent alors que de

$$\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\alpha'}, \frac{\gamma}{\alpha'}.$$

Si l'on assujettit la droite  $AB$  à passer par un point  $P(x_0, y_0, z_0)$ , elle décrira un cône qu'on appelle en général le cône du complexe et qui, dans le cas du complexe linéaire, dégénère en un plan qu'on appelle le *plan du complexe*. Son équation, qu'on obtient aisément, s'écrit

$$\begin{aligned} (\alpha' + cy_0 - bz_0)(x - x_0) + (\beta' + az_0 - cx_0)(y - y_0) \\ + (c' + bx_0 - ay_0)(z - z_0) = 0. \end{aligned}$$

Si ce plan passe par une droite fixe quel que soit le point  $P$ , le complexe est dit *spécial*; la condition pour qu'il en soit ainsi est

$$(4) \quad aa' + bb' + cc' = 0;$$

le complexe est alors formé par l'ensemble des droites qui rencontrent la droite fixe.

Les considérations développées dans les numéros précédents fournissent une interprétation très simple de ces résultats ainsi que de ceux qui suivront.

Considérons  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$  comme les coordonnées d'un vecteur glissant, que nous désignerons encore par  $AB$ , et  $a, b, c, a', b', c'$  comme les coordonnées d'un système quelconque ( $S$ ) de vecteurs glissants. L'équation (2) exprime que la droite  $AB$  est de moment nul par rapport au système ( $S$ ). La relation (4) est la condition nécessaire et suffisante pour que le système ( $S$ ) se réduise à un vecteur unique; dans ce cas, l'équation (2) exprime que le support de ce vecteur unique rencontre  $AB$ .

Le fait que le plan du complexe peut être considéré comme un lieu de droites de moment nul a amené *A. F. Möbius* à l'appeler le *plan nul du point P*. Réciproquement, *A. F. Möbius* dit que  $P$  est le *point nul du plan*: ce point jouit de la propriété d'être situé sur toutes les droites de moment nul qui sont contenues dans le plan. Ainsi, à tout point  $P$  correspond un plan nul; à tout plan  $\Pi$  correspond un point nul.

Au lieu de „plan nul“ et de „point nul“, *M. Chasles* et, après lui, *A. Mannheim* ainsi que la plupart des auteurs français ont adopté les locutions de *plan focal du point P* et de *foyer P du plan \Pi*. On emploie aussi quelquefois les expressions *pôle* et *plan polaire*<sup>63</sup>).

Si un point  $P$  parcourt une droite ( $d$ ), son plan focal tourne autour d'une autre droite ( $d'$ ); si  $P$  parcourt la droite ( $d'$ ), son plan

63) Dans la réduction d'un système de forces à deux forces dont les directions soient perpendiculaires entre elles, *G. Monge* [Traité élémentaire de statique, (1<sup>re</sup> éd.) Paris 1786; (8<sup>e</sup> éd.) Paris 1846, p. 43] donne pour la construction du foyer d'un plan le procédé suivant: qu'on prenne les points d'application de toutes les forces dans un même plan  $\Pi$  et qu'on décompose ces forces en deux, l'une normale au plan, l'autre située dans le plan; les composantes normales au plan ont une résultante dont le pied  $P$  est parfaitement déterminé quand le plan  $\Pi$  l'est. Ce point  $P$  est le foyer du plan. *E. Carvallo* [Nouv. Ann. math. (3) 12 (1893), p. 454] a retrouvé cette construction: son énoncé ne diffère pas au fond du précédent.

focal tourne autour de  $(d)$ ; c'est pourquoi on dit que  $(d)$  et  $(d')$  sont deux droites conjuguées dans le complexe de Chasles. Sur deux droites conjuguées on peut toujours déterminer deux vecteurs formant un système équivalent au système donné, et inversement si le système  $(PQ, P'Q')$  est équivalent à un système de vecteurs donnés, les supports de  $PQ$  et de  $P'Q'$  sont deux droites conjuguées du complexe de Chasles du système de vecteurs donnés.

De même, si un plan tourne autour d'une de ses droites  $(d)$ , son foyer décrit la droite conjuguée  $(d')$ .

En particulier, si la droite  $(d)$  est rejetée à l'infini c'est-à-dire si le plan  $\Pi$  se déplace parallèlement à lui-même, le lieu des foyers de ce plan est une droite  $(d')$  dont la direction reste la même, quelle que soit la direction du plan  $\Pi$ . Corrélativement, la droite conjuguée de toute droite parallèle à  $(d')$  est à l'infini.

Parmi toutes ces parallèles, il en est une remarquable: c'est le lieu des foyers des plans qui leur sont perpendiculaires: on l'appelle l'axe central du complexe. C'est aussi l'axe central du système de vecteurs auquel correspond le complexe envisagé; les droites parallèles dont il vient d'être question sont les droites qui portent les vecteurs qu'on a appelés „résultantes générales“. Ainsi la conjuguée  $(d)$  d'une résultante générale est à l'infini; elle supporte un vecteur infiniment petit. On comprend ainsi à nouveau comment un couple a pu quelquefois être considéré comme un vecteur infiniment petit rejeté à l'infini<sup>64</sup>.

**30. Distribution hélicoïdale des plans du complexe et des moments résultants.** A chaque plan du complexe correspond un moment résultant qui lui est perpendiculaire et dont l'origine est au foyer du plan. Étudier la distribution des plans focaux revient donc à étudier celle des moments résultants. Or le torseur est absolument symétrique par rapport à l'axe central, et le système de plans focaux n'est aucunement modifié lorsqu'on le déplace soit autour de l'axe central, soit parallèlement à l'axe central. Ces deux mouvements de rotation et de translation fournissent le groupe de mouvements pour lequel le complexe linéaire est invariant. On voit donc qu'il suffit d'étudier la distribution des moments résultants sur une demi-droite perpendiculaire à l'axe central et limitée à cet axe central.

Choisissons le trièdre  $Oxyz$  qui oriente l'espace de façon que

64) Cette façon de parler a été employé notamment par K. (Ch.) Culmann.

+  $Ox$  coïncide avec cette perpendiculaire à l'axe central et que +  $Oz$  coïncide avec la direction de la résultante générale appliquée au point  $O$  de l'axe central; soient alors  $x$  l'abscisse d'un point quelconque  $P$  de +  $Ox$  et  $\varphi$  la mesure, dans le plan orienté  $Oyz$ , de l'angle [cf. III 17, n° 3]

$$\angle (AM_A, OM_O),$$

où  $AM_A$  est le moment résultant relatif au point  $A$  et  $OM_O$  le moment résultant relatif au point  $O$ ; les nombres  $x$  et  $\varphi$  sont liés par la relation, due à A. F. Möbius<sup>65</sup>,

$$x = k \tan \varphi,$$

dans laquelle  $k$  représente le paramètre du système de vecteurs. Cette relation se déduit immédiatement de la construction de l'axe central donnée au n° 26.

Supposons maintenant qu'un point  $P$  quelconque de l'axe  $Ox$  décrive sur un cylindre de révolution ayant pour axe  $Oz$  une hélice dont le pas réduit soit égal à  $k$ . A chaque point  $P$  de  $Ox$  correspondra une hélice dont le pas sera  $k$ . Toutes ces hélices sont tangentes aux moments résultants relatifs à tous les points de  $Ox$ ; ou encore, si l'on préfère, on concevra l'espace rempli de toutes les hélices de pas réduit  $k$  qui ont pour axe l'axe central: chaque plan du complexe de Chasles sera normal à l'hélice qui passe en son foyer. Soient  $F$  le foyer du plan  $\Pi$ ,  $F'$  le point infiniment voisin de  $F$  sur l'hélice qui passe en  $F$ ,  $d\alpha$  l'angle des normales menées par  $F$  et  $F'$  au cylindre de révolution qui contient l'hélice; on sait que

$$FF'^2 = (x^2 + k^2)d\alpha^2,$$

$x$  étant la distance de  $F$  à l'axe central. D'autre part le moment résultant  $\vec{G}$  relatif au point  $F$  a pour longueur

$$G = R\sqrt{x^2 + k^2},$$

$\vec{R}$  étant la résultante générale. Du rapprochement des deux dernières égalités, il résulte que  $G$  est proportionnel à l'arc d'hélice infiniment petit  $FF'$ . Cet arc pourrait donc être pris aussi comme représentation du moment résultant en  $F$ .

Nous n'insisterons pas ici davantage sur l'analogie qui existe entre

65) Lehrbuch der Statik, Leipzig 1837 (n° 84); Werke 3, Leipzig 1886, p. 118. Cette formule se trouve aussi dans L. Poincaré [J. Ec. polyt. (1) cah. 13 (1906), p. 194] sur la composition des moments et des aires reproduit dans la 8<sup>e</sup> édition de ses *Éléments de Statique*, Paris 1842, p. 362.

les moments résultants d'un système de vecteurs relatifs aux différents points de l'espace et les déplacements infiniment petits des points d'un solide invariable. Ce sera l'objet d'un autre chapitre.

**31. Des droites de moment donné.** Au lieu de chercher les droites de moment nul, on peut chercher les droites par rapport auxquelles le moment d'un système ( $S$ ) de vecteurs donnés a une valeur constante  $g$ . On obtient ainsi un nouveau complexe déjà signalé au n° 22.

Considérons un point  $P$  quelconque de l'espace et soit  $Pz$  une droite quelconque passant par  $P$ . Le moment du système ( $S$ ) par rapport à  $Pz$  sera la projection sur  $Pz$  du moment résultant  $G$  relatif au point  $P$ , c'est-à-dire qu'en désignant par  $\alpha$  l'angle du vecteur  $G$  avec  $Pz$  on aura la relation

$$G \cos \alpha = g.$$

L'angle  $\alpha$  est donc constant et les droites de moment  $g$  qui passent en  $P$  décrivent un cône de révolution dont l'axe est le support de  $G$ . Le complexe de ces droites est donc un complexe quadratique dont le cône est de révolution. La conique du complexe située dans un plan donné est une circonférence.

Le maximé de  $g$  est  $G$  au point  $P$ ; ainsi c'est par rapport au support du moment résultant relatif au point  $P$  que le système de vecteurs ( $S$ ) a son moment maximé. Les droites qui portent les moments maximisés par rapport aux différents points de l'espace forment un complexe quadratique.

#### Autres figures géométriques utiles en mécanique.

**32. Objet de ce chapitre<sup>66)</sup>.** Il est clair que le mode de représentation des grandeurs vectorielles auquel nous nous sommes exclusivement tenu jusqu'à présent n'est pas le seul mode possible; il peut aussi y avoir intérêt à faire correspondre d'autres éléments géométriques à d'autres grandeurs mécaniques. C'est ainsi par exemple qu'à tous les systèmes équivalents de forces appliquées à un corps solide donné on fait correspondre les visseurs de *R. S. Ball*.\*

Le vecteur glissant envisagé comme un ensemble de deux points pris dans un ordre déterminé peut être conçu comme le premier chaînon d'une suite de grandeurs formées par juxtaposition, dans un ordre déterminé, non seulement des points, mais de tous les éléments primitifs de l'espace.

66) Ce chapitre a été rédigé par L. Lévy et revu par E. Study.\*

E. Study<sup>67)</sup> a procédé à une recherche méthodique de ces grandeurs géométriques: le résultat de ses études est résumé dans le présent chapitre.\*

Présentées *a priori* comme elles vont l'être, les nouvelles figures paraissent peut-être d'abord un peu étranges et les opérations que l'on est amené à définir semblent très artificielles. Mais à celui qui commence la Mécanique la géométrie des vecteurs paraît tout aussi dénuée de caractère pratique et c'est seulement en avançant dans l'étude de cette science qu'il en voit tout l'intérêt dans les applications aux forces, aux vitesses, aux accélérations, aux rotations. Il en est de même ici où les figures envisagées dérivent immédiatement de l'examen des diverses substitutions qui équivalent à un déplacement hélicoïdal. Ce point de vue sera précisé dans le n° 49.\*

Les deux principes suivants permettent de rapprocher quelque peu des grandeurs géométriques classiques les nouvelles grandeurs que nous allons introduire:

1°) En même temps que chaque figure on envisage toujours la figure corrélatrice. Ainsi en même temps que le vecteur glissant, c'est-à-dire le „bipoint“, on envisage aussi le „biplan“.

2°) On peut essayer de former toutes les combinaisons possibles des éléments de l'espace dont certaines combinaisons ont formé des figures utiles: on est ainsi amené, par exemple, à considérer le *moulinet*, comme ensemble d'un point et d'un plan.

Il convient d'observer qu'une des plus grandes sources de difficultés dans la construction d'une théorie qui s'appuie sur ces deux principes, ou sur des principes équivalents, provient de ce que le principe de dualité n'est pas applicable sans restriction dans l'espace euclidien. Il en résulte que certaines distinctions s'imposent qui entraînent une étude minutieuse des divers cas d'exception possibles. On est, par exemple, amené à distinguer les biplans en „biplans effectifs“ et en „pseudo biplans“.

C'est dans l'espace elliptique [cf. III 1] que le principe de dualité s'applique d'une façon parfaite. Aussi arrive-t-on très naturellement à envisager des grandeurs telles que le *vecteur glissant sphérique*, par exemple.

Quoique E. Study<sup>68)</sup> insiste lui-même sur le caractère essentiellement géométrique de ses généralisations, on est frappé de la grande

67) „Geometrie der Dynamen, Leipzig 1908 (le premier fascicule a paru en 1901).“

68) „Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 2.\*

simplicité qu'introduisent plusieurs de ses constructions dans l'exposé des propositions de la mécanique. Ainsi il semble difficile de qualifier d'artificielle même en mécanique l'addition géométrique des moteurs, construction bien plus simple que toutes celles qui l'ont précédée en vue de la composition de rotations infinitésimales [cf. n° 39].

**33. Définitions préliminaires.** On appelle *croix*<sup>69)</sup> *effective*, ou plus simplement *croix*, l'ensemble de deux droites l'une située à distance finie, l'autre rejetée à l'infini et qui est l'intersection des plans perpendiculaires à la première. Cette première droite est l'*axe principal* de la croix; la droite rejetée à l'infini en est l'*axe secondaire*. Si l'on se donne l'axe principal, la croix est entièrement déterminée. Il n'en est pas de même si l'on se donne seulement l'axe secondaire; dans ce cas on peut prendre l'axe principal arbitrairement parmi les perpendiculaires aux plans qui contiennent la droite donnée à l'infini. Nous dirons alors qu'on a une *pseudo-croix*. Le mot *croix* désignera par la suite tantôt une quelconque des deux espèces de croix (pseudo ou effective) tantôt une croix effective. Le lecteur ne s'y trompera pas. D'ailleurs nous ajouterons le mot effective toutes les fois que ce sera nécessaire.

On appelle *transversale* d'une croix toute droite qui rencontre ses deux axes; il est clair que si l'on envisage une pseudo-croix les transversales sont toutes les droites des plans qui contiennent l'axe donné à l'infini. Une croix effective a  $\infty^2$  transversales, une pseudo-croix en a  $\infty^3$ . Deux croix quelconques (au sens large du mot) ont toujours au moins une transversale commune: si ce sont des croix effectives, cette transversale est perpendiculaire à leurs axes principaux.

Deux droites distinctes déterminent toujours une croix dont elles sont des transversales.

La droite qui porte un vecteur glissant donné pourra toujours être considérée comme l'axe principal d'une croix effective. Cette croix sera dite le *support* du vecteur.

Le *support d'un couple*, au sens étroit du mot, sera la pseudo-croix dont l'axe secondaire est à l'infini dans le plan du couple; au sens large, ce sera toute croix effective dont l'axe principal porte le moment du couple.

Le *support d'un système de vecteurs* sera la croix dont l'axe prin-

69) Voir n° 49 la correspondance du vocabulaire de E. Study avec le vocabulaire adopté ici.\*

ticuliers, soit avec la droite qui porte la résultante unique si elle existe, soit avec l'axe de tout couple équivalent au système de vecteurs donné.

Considérons deux visseurs [n° 26]  $b, b'$ ; toute transversale commune à leurs supports sera aussi transversale du support de tout bivecteur de la forme

$$mb + m'b'.$$

**34. Biplan. Règle du trapèze.** Le premier des nouveaux éléments que E. Study introduit pour représenter une quantité vectorielle est le *biplan*<sup>70)</sup>, système de deux plans pris dans un ordre déterminé et assujettis à ne pas être perpendiculaires l'un à l'autre. Le premier nommé,  $\varphi$ , s'appelle le *plan initial*, le second,  $\chi$ , le *plan final* du biplan; ils constituent les deux *faces* du biplan. Nous emploierons la notation  $B_{\varphi}^{\chi}$ . L'intersection des deux plans s'appellera l'*arête* du biplan; si elle est à distance finie (infinie) elle sera l'axe principal (secondaire) d'une croix qui sera, par définition, le *support du biplan*. Par extension, dans le cas de deux plans parallèles, toute croix effective dont l'axe principal est perpendiculaire à ces plans pourra encore être considérée comme support de ce biplan.

L'égalité de deux biplans

$$B_{\varphi}^{\chi} = B_{\varphi'}^{\chi'}$$

est caractérisée par ce fait qu'ils ont même support et que l'un d'eux peut se déduire de l'autre par une rotation autour de l'arête du biplan. Cette rotation devient naturellement une translation perpendiculaire aux faces du biplan si l'arête est à l'infini.

On appelle *ouverture du biplan* la tangente trigonométrique  $\operatorname{tg}(\varphi, \chi)$  de l'angle des deux plans; cette ouverture n'est jamais infinie. Si elle est différente de zéro, nous aurons un *biplan effectif*; si elle est nulle, un *pseudo-biplan*.

Occupons-nous des biplans effectifs. A tout biplan on peut associer un vecteur glissant ayant le même support et déterminé en outre par la condition que sa longueur soit égale à l'ouverture du biplan. L'addition des biplans est donc immédiatement rattachée à l'addition des vecteurs glissants. Mais elle peut aussi s'effectuer par la construction suivante:

Soient  $B_{\varphi}^{\chi}$  et  $B_{\varphi'}^{\chi'}$  deux biplans effectifs dont les arêtes se coupent et qui par conséquent peuvent être amenés à avoir une face  $\omega$  commune; cipal coïncide avec le torseur correspondant, ou, dans les cas par-

70) „Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 20.\*



soient  $o\xi$ ,  $o\eta$  leurs arêtes (fig. 7). Menons par  $o\xi$  et  $o\eta$  deux plans  $\varphi'$  et  $\psi'$  respectivement perpendiculaires au plan initial  $\omega$ . Le plan  $\varphi'$  coupe  $\psi$  suivant une droite  $o\xi_1$ , le plan  $\psi'$  coupe  $\varphi$  suivant  $o\eta_1$ ; le plan  $\xi_1 o\eta_1$ , ou  $\chi$ , forme avec  $\omega$  le biplan cherché, ce que nous indiquerons ainsi

$$B_\omega^\chi = B_\omega^\varphi + B_\omega^\psi.$$

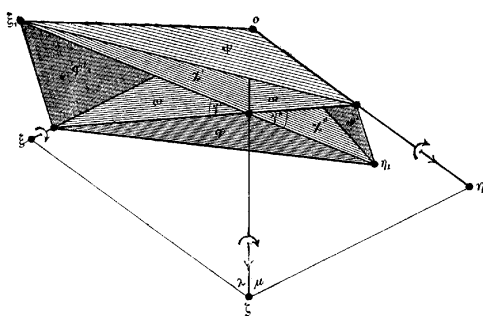


Fig. 7.

Le biplan  $B_\omega^\chi$  est la *somme géométrique* des deux biplans donnés. On démontre en effet que les ouvertures de ces trois biplans sont proportionnelles aux longueurs de  $o\xi$ ,  $o\xi_1$ ,  $o\eta_1$ , si l'on désigne par  $o\xi$ ,  $o\eta$  les vecteurs correspondants aux biplans donnés et par  $o\xi_1$  la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.

*Remarque.* Si on limite la figure par un plan perpendiculaire à  $o\xi$  les trois biplans sont limités à un trapèze et à ses diagonales, d'où le nom de *trapèze des biplans* donné à cette figure.

*Cas particuliers.* 1. On a évidemment,  $B_\omega^\omega$  désignant un biplan véritable ou un pseudo-biplan,

$$B_\omega^\varphi + B_\omega^\omega = B_\omega^\varphi,$$

ce qui nous conduit à poser

$$B_\omega^\omega = 0.$$

Si les arêtes des deux biplans sont parallèles, la somme est un biplan dont l'ouverture est égale à la somme des ouvertures des biplans composants. Ce théorème s'étend, par définition, au cas in-

déterminé où les arêtes des biplans coïncident. On en conclut

$$B_\omega^\varphi + B_\omega^\omega = 0,$$

$$B_\omega^\omega = m B_\omega^\varphi \text{ si } \operatorname{tg}(\omega, \psi) = m \operatorname{tg}(\omega, \varphi),$$

$m$  étant un nombre positif ou négatif.\*

**35. Les vecteurs glissants sphériques.** Considérons une sphère de rayon un. On appelle *vecteur glissant sphérique* un arc de grand cercle,  $s_\xi^\eta$ , qui a une origine  $\xi$  et une extrémité  $\eta$ , cet arc pouvant être arbitrairement déplacé sur son grand cercle. Deux arcs d'un même grand cercle qui ont même origine  $\xi$  et même extrémité  $\eta$  sont envisagés comme égaux; il en est de même de deux arcs qui ont même origine  $\xi$  et dont les extrémités  $\eta$  et  $\eta'$  sont diamétralement opposées sur la sphère. La *longueur* d'un pareil vecteur est donc seulement déterminée à un multiple de  $\pi$  près: nous supposons qu'elle n'est jamais un multiple impair de  $\frac{\pi}{2}$ . Dans ces conditions, l'ouverture du vecteur,  $\operatorname{tg}(\xi, \eta)$  n'est jamais infinie.

L'addition des vecteurs sphériques se rattache à celle des vecteurs rectilignes d'une manière très simple.

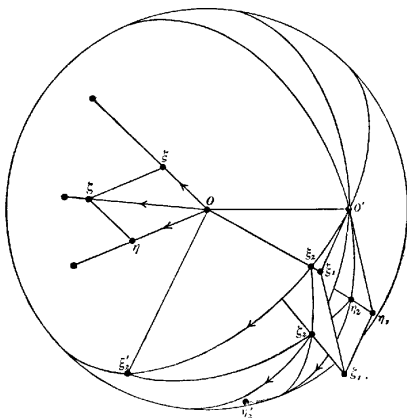
Considérons (fig. 8) un parallélogramme de vecteurs  $o'\xi_1\eta_1\xi_1$  tangent à la sphère en  $o'$  et projetons le obliquement sur la sphère à partir du centre  $o$ . Nous obtenons ainsi un quadrilatère sphérique  $o'\xi_2\eta_2\xi_2$  dont la diagonale  $o'\xi_2$  est la *somme géométrique* des vecteurs sphériques  $o'\xi_1$ ,  $o'\eta_1$ . Le lecteur verra sans peine que cette addition sphérique peut s'effectuer sans sortir de la sphère; il lui suffira de remarquer que le plan du grand cercle  $o\eta_2\xi_2$  passe par les extrémités du diamètre  $\xi_2'\xi_2''$  qui est perpendiculaire à  $oo'$  dans le plan  $oo'\xi_1$ .

Il est facile, d'autre part, de rattacher l'addition des vecteurs sphériques à celle des biplans. Prenons, à cet effet, la figure polaire de la précédente<sup>71</sup>). Aux points  $o'$ ,  $\xi_2$ ,  $\xi_2'$ ,  $\eta_2$ ,  $\xi_2''$  correspondent les grands cercles, ou mieux les plans des grands cercles,  $\omega$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi'$ ,  $\psi$ ,  $\psi'$ ,  $\chi$ . L'arête du biplan  $B_\omega^\varphi$ , par exemple, sera la perpendiculaire au plan  $oo'\xi_2$  et son ouverture sera égale à  $o'\xi_1$ ; de même pour les biplans  $B_\omega^\psi$  et  $B_\omega^\chi$ . Si l'on porte sur ces arêtes à partir de  $o$ , et dans des sens convenablement choisis, des longueurs  $o\xi$ ,  $o\eta$ ,  $o\xi_1$ , respectivement égales à  $o'\xi_1$ ,  $o'\eta_1$ ,  $o'\xi_1$ , on aura construit, dans le plan perpendiculaire à  $oo'$ , un parallélogramme de vecteurs qui est égal au parallélogramme  $o'\xi_1\eta_1\xi_1$ : c'est, au fond, le même parallélogramme tourné

71) Pour la définition des figures polaires, voir, par exemple, E. Rouché et Ch. de Comberousse, *Traité de Géométrie*, (7<sup>e</sup> éd.) 2, Paris 1900, p. 176.\*

d'un angle droit dans son plan et transporté ensuite parallèlement à lui-même d'une quantité  $oo'$ .

On aperçoit maintenant d'une manière nette le lien entre la théorie des vecteurs sphériques et celle des biplans. Elles sont corrélées.



**Fig. 8.**

latives l'une de l'autre: au vecteur, système de deux points, correspond le biplan, système de deux plans.\*

**36. Biplans à faces parallèles. Systèmes de biplans.** L'addition de deux pseudo-biplans exige de nouvelles définitions. Nous associerons à un pareil bipplan  $B_p^\psi$  le vecteur libre  $V_p^\psi$  qui a même support et dont la longueur est la distance des deux faces du pseudo-bipplan. Cette longueur s'appellera l'écartement du pseudo-bipplan. Pour additionner géométriquement deux pseudo-biplans  $B_p^\psi, B_{p'}^{\psi'}$ , on ajoutera, par définition, les vecteurs  $V_p^\psi, V_{p'}^{\psi'}$  correspondants, ce qui donnera un vecteur  $V^\chi$  auquel correspondra le pseudo-bipplan  $B^\chi$  cherché.

Le vecteur attaché à un pseudo-biplan peut être considéré aussi comme le moment d'un couple situé dans une des faces du biplan, et si l'on considère un couple comme un vecteur infiniment petit rejeté à l'infini le pseudo-biplan se présente bien comme cas limite du biplan effectif.

L'addition des biplans est maintenant complètement rattachée à celle des vecteurs ou des couples, et réciproquement.

Les systèmes de biplans se composeront et se réduiront alors comme les systèmes de vecteurs. Voici les théorèmes rapprochés l'un de l'autre.

Tout vecteur glissant est *équivalent* au système formé par un vecteur glissant dont l'origine est un point arbitrairement donné et par un couple. Les supports du vecteur et du couple ont leurs axes principaux perpendiculaires.

|                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Un système de vecteurs glissants peut être réduit, et d'une seule manière, à un vecteur et à un couple dont les supports ont leurs axes principaux coïncidents [Voir n° 26].</p> | <p>Un système de biplans peut être réduit, et d'une seule manière, à un biplan et à un pseudo-biplan dont les supports, au sens large du mot, ont leurs axes principaux coïncidents.</p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Il pourra arriver, dans des cas particuliers, que le système de vecteurs soit équivalent à un vecteur glissant unique, ou à un couple, ou à zéro.

Revenant au cas général, où le système donné est réductible à un système de deux biplans  $B'$  et  $B''$  dont l'un seulement est effectif tandis que l'autre est un pseudo-biplan, nous appellerons *support du système de biplans* donné le support commun de  $B'$  et de  $B''$ , et nous dirons que le système est réduit à sa forme normale, que nous écrirons symboliquement

$$B' + B'' = B.$$

Nous énoncerons encore un théorème analogue à celui qui termine le n° 33: Si  $\Delta$  est une transversale du support de deux systèmes de biplans  $B$  et  $B_1$ , elle est encore transversale du support de tout biplan compris dans la formule

$$mB + m_1 B_1,$$

où  $m$  et  $m_1$  sont des nombres donnés, positifs ou négatifs.\*

37. Les Moteurs<sup>72)</sup>. *E. Study*<sup>73)</sup> appelle ainsi un système de deux droites  $D$  et  $\Delta$ , prises dans un ordre déterminé et assujetties à

72) La décomposition d'un mouvement en deux *renversements* et le mode de composition des mouvements que l'on obtient en utilisant cette décomposition

la seule condition que leur angle ne soit pas droit. Le moteur s'indique par le symbole  $M_D^\Delta$ . L'angle que fait la droite initiale  $D$  avec la droite finale  $\Delta$  sera désigné par  $\text{ang}(D, \Delta)$ ; il est déterminé en grandeur et en signe à un multiple de  $\pi$  pris. Nous appellerons *ouverture* du moteur la tangente de cet angle,  $\text{tg ang}(D, \Delta)$ ; la *longueur* du moteur,  $\text{dist}(D, \Delta)$  est la plus courte distance des deux droites, comptée positivement de  $D$  vers  $\Delta$ . Ce dernier sens entraîne, suivant nos conventions, le sens positif de rotation autour de la perpendiculaire commune et par suite le sens dans lequel doit être compté positivement  $\text{ang}(D, \Delta)$ .

On appelle *rotateurs* les moteurs de longueur nulle, *translateurs* les moteurs d'ouverture nulle, c'est-à-dire ceux dont les deux droites sont parallèles. Le translateur peut encore être considéré comme cas limite d'un rotateur lorsque le point de concours des deux droites du rotateur s'éloigne à l'infini; seulement, dans le passage à la limite, la longueur qui était nulle devient brusquement finie.

L'égalité de deux moteurs

$$M_{D_1}^{\Delta_1} = M_{D_2}^{\Delta_2}$$

est défini par ce fait que deux renversements successifs d'un corps solide autour des droites  $D_1$  et  $\Delta_1$ , l'amènent à la même position que deux renversements successifs autour de  $D_2$  et  $\Delta_2$ . En particulier

en renversements exposés par G. H. Halphen [Nouv. Ann. math. (3) 1 (1882), p. 296/9] est souvent utile; la théorie en sera développée au n° 45.

Le signe { } adopté dans le texte est dû à H. Wiener [Ber. Ges. Lpz 42 (1890), math. p. 13/23, 71/87].

La composition de rotations autour d'un point fixe, à l'aide de renversements convenablement choisis, se trouve déjà quant au fond dans W. K. Hamilton, comme on le verra dans l'article où sera exposée la théorie des quaternions.

Le caractère presque immédiat de ces constructions explique qu'elles ont été données, indépendamment de G. H. Halphen, par plusieurs géomètres, parmi lesquels on peut citer W. Burnside, H. Wiener et G. Darboux [Théorie des surfaces 4, Paris 1896, note V, p. 438/41]. G. Darboux [dans G. Koenigs, Cinématique, Paris 1897, p. 346 et suiv. (note II)] indique que la même méthode était déjà suivie, à son insu, par P. Morin [dans son Cours (non publié) professé à la Faculté des sciences de Rennes vers 1880]. A signaler aussi W. Burnside [Messenger math. (2) 19 (1889/90), p. 104/8; (2) 23 (1893/4), p. 19/22] et E. Study [Math. Ann. 39 (1891), p. 441/556] qui a généralisé cette théorie.

Sur l'usage des mots „moteur“ et „rotateur“, E. Study fait observer qu'il s'en sert quoiqu'ils aient déjà un autre sens, d'ailleurs mal défini, mais qu'il ne fait que suivre l'exemple de W. K. Clifford lui-même, le premier inventeur de ces mots.

73) Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 51.

on doit considérer comme égaux tous les moteurs dont les deux droites initiale et finale sont identiques; il est naturel de considérer ces moteurs comme égaux à zéro et de poser

$$M_D^D = 0.$$

Le *support* d'un moteur est la croix qui a pour axe principal la perpendiculaire commune aux deux droites du moteur; dans le cas du translateur, c'est la pseudo-croix qui a pour axe principal une quelconque des perpendiculaires communes aux deux droites; ou, par extension, le support d'un translateur est une quelconque des croix effectives qui ont leur axe principal parallèle aux perpendiculaires communes précédentes. Un moteur nul a pour support une croix quelconque. Pour abréger, nous appellerons les axes de ces supports *l'axe principal* et *l'axe secondaire* du moteur correspondant.

Tous les moteurs qui ont la même ouverture, différente de zéro, et qui peuvent être déduits les uns des autres par un déplacement hélicoïdal quelconque autour de leur axe principal, sont égaux entre eux.\*

**38. Correspondance entre les moteurs et les biplans ou les vecteurs glissants.** A tout système de biplans (ou de vecteurs glissants), ramené à la forme normale

$$B = B' + B'', \quad \vec{R} + \vec{G},$$

on peut associer un moteur parfaitement déterminé. Ce moteur *associé au système de biplans* aura le même support que  $B$ , pour ouverture celle du biplan effectif  $B'$  (la longueur de  $R$ ) et pour longueur l'écartement du pseudo-biplan  $B''$  (le moment du couple  $G$ ). La droite initiale  $D$  du moteur  $M_B^\Delta$  est située dans les plans initiaux des biplans  $B', B''$ . La droite terminale  $\Delta$  du même moteur est située dans les plans terminaux de ces mêmes biplans  $B', B''$ . On voit sans peine comment il faut modifier ces énoncés dans le cas du rotateur ou du translateur.\*

**39. Addition géométrique des moteurs.** Considérons deux systèmes  $B$  et  $B_1$  de biplans et les moteurs associés que nous pourrions amener à avoir la même droite initiale  $D$ , perpendiculaire commune des axes principaux des biplans donnés; soient  $M_B^\Delta, M_{B_1}^\Delta$  ces deux moteurs. Composons les deux systèmes  $B$  et  $B_1$  en un seul  $B_2$ , et soit  $M_{B_2}^\Delta$  le moteur associé à  $B_2$ . Ce moteur sera appelé la *somme géométrique* des moteurs  $M_B^\Delta, M_{B_1}^\Delta$  et l'on écrira

$$M_{B_2}^\Delta = M_B^\Delta + M_{B_1}^\Delta.$$

Voici deux constructions corrélatives pour obtenir  $\Delta_2$ : soient (fig. 9) trois droites  $D, \Delta_1, \Delta_2$  dont la première ne soit perpendiculaire à aucune des deux autres, c'est à dire soient deux moteurs  $M_D^\Delta, M_{\Delta_1}^\Delta$ .

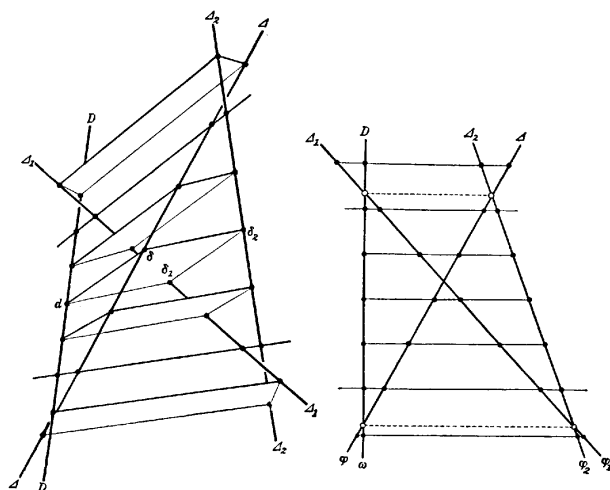


Fig. 9.

Coupons ces trois droites par un plan  $P$  perpendiculaire à  $D$ , et soient  $d, \delta, \delta_1$  les points d'intersection de  $P$  avec les trois droites  $D, \Delta_1, \Delta_2$ . Le quatrième sommet  $\delta_2$  du parallélogramme construit sur les vecteurs  $\vec{d}, \vec{d}_1$  décrit une droite  $\Delta_2$  lorsque  $P$  se déplace parallèlement à lui-même.

Le moteur  $M_D^\Delta$  est la somme géométrique cherchée.

On appelle *produit* d'un moteur par un nombre  $c$  le moteur qui

Menons par ces trois droites des plans  $\omega, \varphi, \varphi_1$  parallèles à une même perpendiculaire  $D'$  à  $D$ . Construisons le plan  $\varphi_2$  qui forme avec  $\omega$  un biplan égal à la somme des biplans  $B_\omega^\varphi, B_\omega^{\varphi_1}$ . Ce plan  $\varphi_2$  pivote autour d'une droite fixe  $\Delta_2$ .

a pour longueur et pour ouverture la longueur et l'ouverture du premier moteur multipliées par ce nombre  $c$ .

Considérons tous les moteurs compris dans la formule  $c \cdot M_D^\Delta$  qui ont même support et même droite initiale; le lieu de leurs droites finales lorsque  $c$  varie est un paraboloïde hyperbolique équilatère.

Nous pouvons évidemment énoncer le théorème suivant qui exprime en d'autres termes celui que nous avons énoncé plus haut:

*L'addition géométrique des biplans s'effectue en ajoutant géométriquement les moteurs associés, et vice versa. Il en est de même de la multiplication d'un biplan par  $c$ .*

La méthode d'addition donnée ci-dessus s'applique dans tous les cas. On en déduit, par exemple, toutes les décompositions d'un moteur  $M_D^\Delta$  en deux rotateurs.

Supposons maintenant que les moteurs  $M_D^\Delta$  et  $M_{\Delta_1}^\Delta$  soient désignés plus simplement par les lettres  $M_1$  et  $M_2$ ; supposons de plus que ce ne soient pas des translateurs et que leurs axes principaux ne soient pas dans un même plan: le lieu géométrique des axes principaux du faisceau des moteurs compris dans la formule

$$c_1 M_1 + c_2 M_2,$$

où  $c_1$  et  $c_2$  sont deux paramètres variables, est la surface à laquelle A. Cayley a donné le nom de *cylindroïde*<sup>74</sup>) parce que les pieds des normales abaissées d'un point quelconque sur les génératrices se trouvent

74) G. Battaglini [Rendic. Accad. Napoli (1) 8 (1869), p. 132] a trouvé le même résultat en cherchant le lieu des axes centraux de tous les dynamiques qui se composent de deux forces agissant suivant deux droites données. Cette génération du cylindroïde est évidemment un cas particulier de celle donnée dans le texte. Du reste le dernier procédé se rencontre, dans son essence, avec les considérations que J. Plücker [Neue Geometrie des Raumes, Leipzig 1869, p. 97 (1868)] a développées sur le cylindroïde, bien avant G. Battaglini. Seulement J. Plücker remplace les dynamiques par les complexes linéaires correspondants: il caractérise le cylindroïde comme conoïde, et en a construit un modèle; cette surface est souvent désignée sous le nom de *conoïde de Plücker* [cf. A. Mannheim, Principes et développements de géométrie cinématique, Paris 1894, p. 260 et suiv.].

Dans une étude sur cette surface, P. Appell [Bull. Soc. math. France 28 (1900), p. 261] a démontré que le cylindroïde est la seule surface réglée réelle, en dehors du cylindre, pour laquelle le lieu des projections d'un point quelconque de l'espace sur les génératrices est une courbe plane. Voir aussi R. Bricard [Bull. Soc. math. France 29 (1901), p. 18] et A. Demoulin [id. p. 39].\*

E. Study [Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 320] désigne sous le nom de *chaîne* (Kette) à la fois le cylindroïde et le faisceau de plans et montre qu'une chaîne ainsi définie peut être envisagée comme une des figures fondamentales de la géométrie réglée (Liniengeometrie).

vent sur une courbe plane comme dans les cylindres; cette courbe plane est d'ailleurs une conique.

Pour écrire l'équation du cylindroïde, nous prendrons comme axe des  $z$  la droite  $D$  qui est transversale commune aux supports des moteurs  $M_1$  et  $M_2$ ; en choisissant ensuite convenablement l'orientation des axes  $ox$  et  $oy$  ainsi que l'origine des coordonnées<sup>75)</sup>, on pourra mettre cette équation sous la forme<sup>76)</sup>

$$z = \frac{2mxy}{x^2 + y^2}.$$

Tous les cylindroïdes sont semblables. Considérons une des génératrices du cylindroïde; c'est l'axe principal d'une famille de moteurs de la forme  $\lambda \cdot M$ ,  $M$  étant un des moteurs du faisceau considéré. Les droites finales de ces moteurs sont tangentes à des hélices de même pas tracées sur des cylindres de révolution qui ont  $oz$  pour axe. Comme on peut imprimer à un moteur une rotation autour de son axe principal sans qu'il cesse d'être égal à lui-même, le pas de ces hélices est indéterminé; il est seulement le même pour tous les moteurs correspondants à un même axe principal. Nous allons retrouver les mêmes résultats par d'autres considérations. Décomposons le moteur  $M_i$  en un rotateur et en un translateur qui aient même support  $M_i = M'_i + M''_i$ ; soit  $M'''_i$  un translateur de même support et qui ait pour écartement l'ouverture du rotateur  $M'_i$ , il est évident que, quelle que soit la valeur de  $\lambda$ , le moteur

$$c_1(M_1 + \lambda M'''_1) + c_2(M_2 + \lambda M'''_2)$$

aura même axe principal que le moteur

$$c_1 M_1 + c_2 M_2,$$

et nous avons maintenant une indéterminée nouvelle  $\lambda$  dans la génération du cylindroïde.

Nous reviendrons plus tard sur cette intéressante surface. Bornons-nous à en indiquer encore une propriété et un mode de génération particulièrement simple. La propriété dont nous voulons parler consiste en ce que le cylindroïde est aussi le lieu des supports des visseurs équivalents aux systèmes de deux vecteurs glissants dont l'un est donné tandis que l'autre a seulement un support donné.

Voici maintenant comment la surface peut être engendrée: posons

$$M_D^{\Delta} = c_1 M_D^{\Delta} + c_2 M_D^{\Delta};$$

75) Cf. D. Padelletti, Rendic. Accad. Napoli (1) 21 (1882), p. 39.\*

76) Voir aussi E. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 456, 466.

si  $c_1$  et  $c_2$  varient, les droites  $\Delta_i$  forment une congruence linéaire, c'est-à-dire qu'elles rencontrent deux droites fixes  $A$  et  $B$ , réelles ou imaginaires. Ces deux droites appartiennent au cylindroïde et leur perpendiculaire commune est l'axe de la surface. On peut se donner ces deux droites  $A$  et  $B$ , ce qui détermine leur normale commune  $D$ ; le cylindroïde sera le lieu des perpendiculaires communes à  $D$  et à l'une quelconque des droites de la congruence linéaire déterminée par  $A$  et  $B$ . Pour ce mode de génération, on peut partir d'une génératrice quelconque  $A'$  du cylindroïde et lui associer une autre génératrice  $B'$ ; les droites  $A', B'$  vont ainsi par paires, elles sont deux à deux conjuguées. On peut encore simplifier en considérant toutes les droites d'un faisceau plan, dont le sommet est au point de contact d'un plan tangent; les perpendiculaires communes à ces droites et à l'axe décrivent le cylindroïde; leurs pieds sur les droites du faisceau décrivent une ellipse qui, avec la génératrice rectiligne contenue dans le plan tangent, constitue la section de la surface par ce plan<sup>77)</sup>.

**40. Les moulinets.** À côté du vecteur glissant (bipoint) et du biplan, il y a lieu de considérer une nouvelle figure qui contient le même nombre de constantes arbitraires, celle qui se compose d'un point et d'un plan. Concevons la perpendiculaire abaissée du point sur le plan et imaginons le plan comme engendré par la rotation d'une perpendiculaire à cette droite menée par son pied, la figure nous apparaîtra comme une espèce de *moulinet* et c'est le nom que nous donnerons à l'ensemble d'un plan et d'un point, en ajoutant la condition que le plan ne contienne pas le point. Le moulinet sera *effectif* si le point et le plan sont à distance finie; ce sera un *pseudo-moulinet* dans le cas contraire.

Il s'agit maintenant d'établir un lien entre les moulinets et les vecteurs. L'idée la plus naturelle serait d'associer au moulinet un vecteur qui soit dirigé suivant la perpendiculaire au plan et qui ait pour longueur  $l'$  la longueur  $l$  de cette perpendiculaire comptée à partir du point. Mais cela ne servirait à rien. Nous établirons entre ces deux longueurs la relation

$$l' = \frac{1}{l}$$

qui définira la longueur du vecteur associé au moulinet.

77) Voir pour le cylindroïde et son utilité pour la composition des dynames R. S. Ball, Theory of screws, Dublin 1876; A treatise on the theory of screws, Cambridge 1900, p. 19; E. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 320, 345, 348, 366.\*

Soit  $\xi$  ou  $\eta$  le point,  $\varphi$  ou  $\psi$  le plan; nous désignerons le moulinet par la notation  $Q_{\xi}^{\varphi}$  ou  $Q_{\psi}^{\eta}$  suivant que l'élément initial est le point ou le plan. Deux moulinets sont égaux lorsque les symétries par rapport à leurs éléments initiaux combinées avec les symétries par rapport à leurs éléments finaux équivalent au même demi-tour de vis, ce que, avec H. Wiener<sup>19)</sup>, nous indiquerons ainsi:

$$Q_{\xi_1}^{\varphi_1} = Q_{\xi_2}^{\varphi_2} \text{ si } \{\xi_1, \varphi_1\} = \{\xi_2, \varphi_2\},$$

$$Q_{\psi_1}^{\eta_1} = Q_{\psi_2}^{\eta_2} \text{ si } \{\psi_1, \eta_1\} = \{\psi_2, \eta_2\},$$

$$Q_{\xi}^{\varphi} = Q_{\psi}^{\eta} \text{ si } \{\xi, \varphi\} = \{\eta, \psi\}.$$

Par suite un moulinet n'est pas altéré par une translation le long de sa droite qui est l'axe du déplacement hélicoïdal équivalent. Mais il n'est pas non plus altéré si l'on remplace l'un de ses éléments par son symétrique pris par rapport à l'autre élément et si en même temps on renverse l'ordre des deux éléments. Désignons par exemple (fig. 10) par  $\xi'$  le point symétrique de  $\xi$  par rapport au plan  $\psi$  et par  $\psi'$  le plan symétrique de  $\psi$  par rapport au point  $\xi$ ; on aura

$$Q_{\psi'}^{\xi'} = Q_{\psi}^{\xi} = Q_{\psi}^{\eta}.$$

On appelle *support du moulinet* la croix effective dont l'axe principal coïncide avec la droite du moulinet, *longueur du moulinet* la distance du point au plan ou du plan au point. Ainsi deux moulinets sont égaux lorsqu'ils ont même support et même longueur. Le moulinet nul est celui dont la longueur devient infinie, soit parce que, le plan restant fixe, le point s'est éloigné à l'infini dans une direction normale au plan, soit parce que le point restant fixe, le plan s'est éloigné à l'infini.\*

**41. Addition des moulinets.** Prenons la figure transformée par polaires réciproques du parallélogramme des vecteurs relativement à une sphère de rayon  $un$  ayant pour centre l'origine commune  $O$  des vecteurs glissants à additionner. A chacun de ces deux vecteurs correspondra un moulinet ( $Q_{\xi}^{\varphi}$  et  $Q_{\eta}^{\psi}$ ) ayant  $O$  pour point initial, et au vecteur résultant un moulinet  $Q_{\zeta}^{\chi}$  qui par définition sera la somme des deux moulinets composants, ce que nous indiquerons par l'égalité symbolique

$$Q_{\xi}^{\varphi} + Q_{\eta}^{\psi} = Q_{\zeta}^{\chi}.$$

La construction directe se lit sur la figure 11.

Cette figure concerne deux moulinets qui ont un point initial  $O$  commun. On peut ramener à ce cas celui de deux moulinets dont les droites se rencontrent.

Dans le cas de deux moulinets à droites parallèles, on peut imprimer à l'un d'eux une translation qui amène les plans initiaux à coïncider. Soit  $\omega$  le plan commun  $\xi$  et  $\eta$  les points finaux; la figure 12 montre comment s'effectue l'addition;  $Q_{\omega}^{\xi}$  est la somme géométrique cherchée, ce qu'on exprime par l'égalité symbolique

$$Q_{\omega}^{\xi} + Q_{\omega}^{\eta} = Q_{\omega}^{\zeta}.$$

Soient  $l, l', l''$  les longueurs de ces moulinets, on vérifie sans peine que

$$\frac{1}{l''} = \frac{1}{l} + \frac{1}{l'}.$$

La construction précédente tombe en défaut si les deux moulinets ont le même support, ou si, ayant des supports différents, leurs longueurs sont égales et de

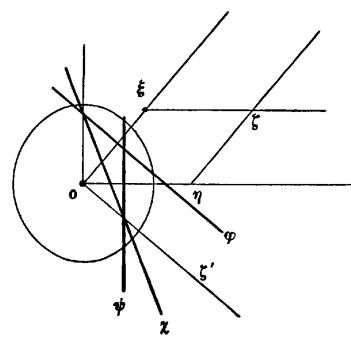


Fig. 11.

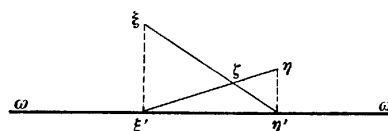


Fig. 12.

sens contraire; dans ce dernier cas, la somme géométrique est une quantité d'espèce nouvelle sur laquelle nous allons revenir. Dans le premier cas, la somme géométrique est un moulinet qui a le même support que les moulinets composants et dont la longueur a pour inverse la somme des inverses des longueurs des moulinets composants; c'est un cas limite du précédent.

Comme cas particulier, on a

$$Q_{\xi}^{\varphi} + Q_{\varphi}^{\xi} = 0;$$

enfin l'addition d'un moulinet nul à un autre moulinet n'altère pas ce moulinet.\*

**42. Les pseudo-moulinets.** Supposons maintenant que le point  $\xi$  du moulinet s'éloigne à l'infini dans une direction oblique au plan, le moulinet  $Q_{\eta}^{\xi} = Q_{\eta}^{\xi'}$ , dégénérera en un *pseudo-moulinet* qu'on peut représenter par la notation  $q_{\eta}^{\xi} = q_{\eta}^{\xi'}$ ; seulement cette fois le point  $\xi$  est supposé à l'infini dans une direction donnée  $\xi$ , et  $\xi'$  représente la direction symétrique par rapport au plan  $\omega$ . Si ces directions sont normales au plan, on retombe sur le moulinet nul déjà considéré.

Si l'on exclut le cas du moulinet nul, les droites parallèles aux directions  $\xi$  et  $\xi'$  peuvent être groupées dans les plans qui les projettent sur le plan  $\omega$ ; ces plans projetants s'appelleront les *plans du pseudo-moulinet*. Une rotation ou une translation qui conserve ces plans n'altère pas, par définition, le pseudo-moulinet. Il en résulte la définition de l'égalité des pseudo-moulinets. Les normales aux plans du pseudo-moulinet sont les axes principaux d'une pseudo-croix que nous appellerons le *support du pseudo-moulinet*; dans un sens plus large, on pourra encore donner ce nom à toute croix effective dont l'axe principal sera un des axes précédents.

On appelle *ouverture d'un pseudo-moulinet* la tangente trigonométrique de l'angle  $\lambda$  dont il faut faire tourner le plan initial  $\omega$  pour que, les „plans du pseudo-moulinet“ restant fixes, il vienne passer par le point final à l'infini  $\xi$ . Le sens positif de la rotation sera déterminé lorsqu'on aura orienté les normales au „plan du pseudo-moulinet“. Portons sur cette normale orientée et dans le sens positif un vecteur dont la longueur soit égale à  $\cotg \lambda$ , ce vecteur sera dit *appartenir* au pseudo-moulinet. L'égalité de deux pseudo-moulinets est alors définie par ce fait que le même vecteur libre leur appartient.

Le pseudo-moulinet se présente comme cas limite du moulinet véritable; le vecteur attaché à ce dernier devient infini, son inverse tend vers zéro et on peut le considérer comme correspondant à un couple dont le plan est le „plan du moulinet“. L'axe du couple situé dans le plan initial du moulinet a pour longueur l'inverse de l'ouverture du pseudo-moulinet. Un pseudo-moulinet et un couple associés ont même support et le même vecteur leur appartient.

Un pseudo-moulinet peut d'une infinité de manières être considéré comme somme géométrique de deux moulinets effectifs. Il suffit, pour s'en rendre compte, de supposer que dans la figure (12) les longueurs  $\eta\eta'$ ,  $\xi\xi'$  sont égales et portées de part et d'autre du plan  $\omega$ . On

obtient ainsi la figure 13 et on peut écrire

$$q_{\omega}^{\xi} = Q_{\omega}^{\xi} + Q_{\omega}^{\eta}.$$

L'addition d'un pseudo-moulinet et d'un moulinet effectif ou de deux moulinets de sens contraires ayant des longueurs égales avec plan initial commun, n'offre plus de difficultés.

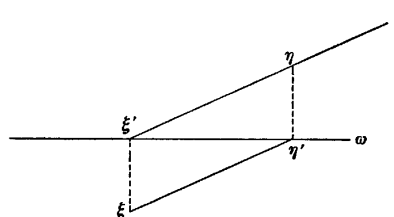


Fig. 13.

Il reste à examiner l'addition de deux pseudo-moulinets; E. Study y parvient en considérant un pseudo-moulinet comme défini par une droite et un point situés l'un et l'autre dans le plan de l'infini, ce qu'on peut appeler un *moulinet dans le plan de l'infini*. On ramène alors les deux moulinets à avoir soit la droite initiale commune, soit le point initial commun, et l'on n'a plus qu'à opérer dans le plan de l'infini comme s'il était à distance finie.

La multiplication géométrique par un nombre  $c$  d'un moulinet quelconque de support donné s'effectue en *divisant sa longueur ou son ouverture* par ce nombre.\*

**43. Systèmes de moulinets.** La réduction de ces systèmes s'opère en effectuant celle des systèmes de vecteurs glissants ou de biplans associés et réciproquement. En particulier tout système de moulinets est réductible d'une seule manière à un système de moulinets  $Q' + Q''$ , de même support; l'un  $Q'$  est un moulinet effectif, l'autre  $Q''$  est un pseudo-moulinet. Le support commun à  $Q'$  et  $Q''$  s'appelle le *support du système de moulinets*.\*

**44. Les impulseurs.** Nous avons associé à tout biplan un système de deux droites (moteur); les liens intimes qui existent entre les diverses figures étudiées jusqu'à présent montrent qu'on peut associer aussi bien à tout moulinet un système de deux droites. Seulement la définition des moteurs ne permet pas de passer à tous les cas limites. Pour ne pas exclure ces cas, E. Study définit un autre système

de deux droites qu'il nomme un *impulseur*: ce sont encore deux droites quelconques prises dans un ordre déterminé et soumises à la seule condition de n'être jamais situées dans un même plan. L'impulseur se confond donc en général avec un moteur; mais il demeure défini lorsque l'angle des deux droites est droit (*impulseur rectangle*) ou lorsque l'une des droites est rejetée à l'infini (*pseudo-impulseur*)<sup>78</sup>. Nous grouperons ces deux cas particuliers sous le vocable *impulseurs spéciaux*. L'impulseur ne peut jamais être un rotateur, ni un translateur.

Si  $D$  est la droite initiale,  $\Delta$  la droite finale, nous désignerons l'impulseur par la notation  $I_D^\Delta$ .

Nous conserverons naturellement pour les impulseurs les expressions de support, de longueur, d'ouverture déjà employées pour les moteurs; l'égalité se définira comme pour les moteurs. La longueur et l'ouverture d'un impulseur ne sont jamais nulles, tandis que la longueur et l'ouverture d'un moteur ne sont jamais infinies.

Pour passer aux cas limites, on associe à l'impulseur un système de moulinets qui a le même support; si le système des moulinets (ou des vecteurs glissants associés) est mis sous la forme normale

$$Q' + Q'', \quad \vec{R} + \vec{G},$$

la longueur de l'impulseur associé est celle du moulinet effectif  $Q'$  (inverse de celle du vecteur  $R$ ); son ouverture est celle du pseudo-moulinet  $Q''$  (inverse de la valeur du moment du couple  $G$ ).

Si dans les systèmes réduits ci-dessus le premier terme est nul, l'impulseur associé est un pseudo-impulseur. Si c'est le second terme qui s'annule, l'impulseur associé est un impulseur rectangle. Si les deux termes sont nuls, l'impulseur associé est nul par définition: on verrait aisément que dans ce cas les deux droites de l'impulseur ou mieux du pseudo-impulseur forment une croix proprement dite.\*

**45. Addition des impulseurs.** Soient deux impulseurs  $I_D^\Delta$  et  $I_D^{\Delta_1}$  ayant une droite commune (fig. 14)  $D$ , c'est-à-dire soient trois droites  $D$ ,  $\Delta$ ,  $\Delta_1$  dont la première ne coupe les deux autres ni à distance finie, ni à l'infini. Menons par  $D$  un plan variable  $\varphi$  qui coupe  $\Delta$  en  $\xi$ ,  $\Delta_1$  en  $\eta$  et soit  $\omega$  le plan mené par  $D$  perpendiculairement à  $\varphi$ ; nous obtenons ainsi deux moulinets  $Q_\omega^\xi$ ,  $Q_\omega^\eta$ . Soit  $Q_\omega^\omega$  leur somme

$$Q_\omega^\omega = Q_\omega^\xi + Q_\omega^\eta.$$

<sup>78</sup> E. Study [Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 80] emploie les dénominations de *torsor* pour impulseur rectangle et de *ejector* pour pseudo-impulseur. Dans la mécanique des corps déformables on emploie souvent le mot „torseur“ dans un autre sens beaucoup plus rapproché de sa signification vulgaire; quant au mot „pseudo-impulseur“, il s'impose par l'analogie avec les définitions antérieures.

Le point final  $\xi$  ainsi construit décrit une droite  $\Delta_2$  lorsque le plan  $\varphi$  pivote autour de  $D$ . Cette droite  $\Delta_2$  n'est pas dans un même plan avec  $D$ ; les deux droites  $D$  et  $\Delta_2$  forment donc un impulseur qui est par définition la somme des impulseurs donnés, ce qu'on écrit

$$I_D^{\Delta_2} = I_D^\Delta + I_D^{\Delta_1}.$$

Il en résulte, parce que deux impulseurs ont toujours au moins une transversale commune, l'addition d'un nombre quelconque d'impulseurs.

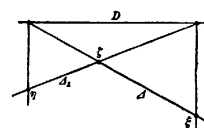


Fig. 14.

**Définition:** On multiplie un impulseur

par un nombre  $m$  en divisant sa longueur et son ouverture par le nombre  $m$ . Il en résulte qu'en général l'impulseur  $m \cdot I_D^\Delta$  est identique au moteur  $\frac{1}{m} M_D^\Delta$ .

**46. Addition stéréométrique des moteurs.** Pour achever l'énumération des nouveaux éléments géométriques introduit par E. Study et des opérations qu'on peut effectuer sur ces éléments il faut encore définir une nouvelle opération que E. Study appelle *addition stéréométrique des moteurs* et qu'il indique par le signe plus surmonté d'un point  $+$ ; la soustraction stéréométrique sera indiquée par le signe  $-$ .

Pour éviter toute confusion, E. Study désigne ici les moteurs par le symbole  $N_D^\Delta$  au lieu de  $M_D^\Delta$ .

On appelle *écartement* d'un moteur  $N_D^\Delta$  le produit de sa longueur par le carré de son ouverture augmenté de l'unité, c'est-à-dire la quantité

$$\frac{\text{dist}(D, \Delta)}{\cos^2 \text{ang}(D, \Delta)}.$$

L'écartement diffère de la longueur toutes les fois que le moteur n'est ni un rotateur, ni un translateur.

Désignons encore par

$$\hat{D}\hat{\Delta}$$

la perpendiculaire commune aux deux droites  $D$  et  $\Delta$ . Elle est uniquement déterminée si  $D$  et  $\Delta$  ne sont pas parallèles (ou si  $N_D^\Delta$  n'est pas un translateur). Nous pouvons définir simplement l'addition stéréométrique de deux moteurs  $N_D^\Delta$ ,  $N_D^{\Delta_1}$ , ramenés à avoir la même droite initiale  $D$ . La somme stéréométrique sera un nouveau moteur ayant la même droite initiale et que nous désignerons par le symbole  $N_D^{\Delta_2}$  de sorte qu'on aura

$$N_D^{\Delta_2} = N_D^\Delta + N_D^{\Delta_1}.$$

a) Nous supposons d'abord que les moteurs ne sont pas des translateurs et n'ont pas leurs supports parallèles. Le schéma suivant



explique en quoi consiste l'addition stéréométrique: soit posé

$$\begin{aligned}\Delta' &= \widehat{D}\Delta, & \Delta_1' &= \widehat{D}\Delta_1, \\ \Delta'' &= \widehat{D}\Delta', & \Delta_1'' &= \widehat{D}\Delta_1', \\ \Delta''' &= \Delta''\Delta_1, & \Delta_1''' &= \Delta_1''\Delta_1;\end{aligned}$$

on aura

$$\Delta_2 = \Delta''\Delta_1$$

L'addition stéréométrique est évidemment comme l'addition ordinaire commutative, c'est-à-dire qu'on a

$$N_D^\Delta + N_D^{\Delta_1} = N_D^{\Delta_1} + N_D^\Delta.$$

b) Si les deux moteurs sont des rotateurs, la droite est encore déterminée par la même construction, à condition d'ajouter que la

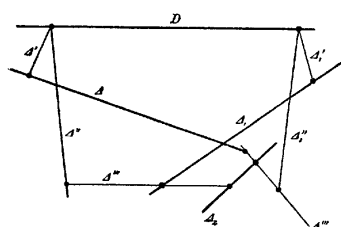


Fig. 15.

somme doit être aussi un rotateur ou un translateur quand les rotateurs ont leurs supports parallèles. Les constructions se font alors dans un même plan et l'on voit aisément que l'addition stéréométrique se réduit alors à l'addition géométrique.

c) Si un et un seul des moteurs donnés,  $N_D^{\Delta_1}$  par exemple, est un translateur, la construction semble indéterminée; la droite  $\Delta_2$  est cependant bien déterminée.

d) Le résultat de la construction ne devient indéterminé que si  $\Delta'''$  est parallèle à  $\Delta_1'''$ . Dans ce cas, on peut déduire la détermination de  $\Delta_2$  d'une construction assez générale relative au cas où un et un seul des moteurs  $N_D^{\Delta_1}$  est un translateur et où les supports ne sont pas parallèles. Il suffit en effet d'imprimer à la droite  $D$  une translation égale au vecteur du translateur. Cette construction subsiste si le vecteur du translateur est perpendiculaire au support du moteur  $N_D^{\Delta_1}$ .

e) Cas de deux translateurs dont les supports ne sont pas parallèles. La construction du cas a) subsiste et se réduit à ceci: l'addition stéréométrique de deux translateurs s'effectue par l'addition géométrique de leurs vecteurs; elle se confond avec l'addition géométrique de ces translateurs.

f) Revenons au cas exclu dans le paragraphe d), celui où les supports du translateur et du moteur sont parallèles. Il faut alors entrer dans des explications un peu plus détaillées, avant de passer à la limite: nous nous bornerons à énoncer la conclusion à laquelle aboutit E. Study: si le moteur  $N_D^{\Delta_1}$  est un translateur dont le vecteur  $V_D^{\Delta_1}$  est porté par l'axe principal du moteur  $M_D^{\Delta_1}$ , la somme stéréométrique des deux moteurs s'obtient en imprimant à la droite  $D$  une translation représentée par le vecteur  $V_D^{\Delta_1} \cos^2 \text{ang}(D, \Delta_1)$ .

g) La somme stéréométrique de deux moteurs qui ont le même support s'obtient en ajoutant leurs ouvertures et leurs écartements. Le support de la somme est le même que le support commun des deux moteurs composants.

La multiplication stéréométrique d'un moteur par un nombre  $m$  consiste à multiplier son ouverture et son écartement par  $m$ . Nous indiquerons cette multiplication par le signe  $\times$ ; le résultat sera donc

$$m \times N_D^\Delta.$$

Il résulte des explications précédentes que l'addition stéréométrique de deux moteurs pourra toujours s'effectuer sans décomposer ces moteurs, excepté si ces moteurs ont leurs supports parallèles. Dans ce cas, on les mettra sous la forme normale

$$N' + N'',$$

où  $N'$  est un rotateur et  $N''$  un translateur dont le support (au sens large du mot) coïncide avec celui de  $N'$ . Cette décomposition est toujours possible et d'une seule manière.\*

47. Nouveaux liens entre les moteurs et les systèmes de vecteurs ou de biplans. Pour distinguer ces nouveaux liens de ceux établis au n° 35, nous emploierons le mot *affilier* au lieu d'associer et nous énoncerons deux propositions:

a) A tout système de vecteurs, ou de biplans, ou de moulinets on peut *affilier* un moteur de même support parfaitement déterminé que nous appellerons le *moteur affilié au système*. Si le système est mis sous la forme normale

$$B' + B'', \quad \vec{R} + \vec{G},$$

l'ouverture du moteur *affilié* est égale à celle du biplan véritable  $B'$  ou à la longueur de la résultante générale  $R$ ; l'écartement de ce moteur est égal à celui du pseudo-biplan  $B''$  ou au moment du couple  $G$ .

L'addition géométrique des systèmes de vecteurs glissants, ou de biplans, ou de moulinets, s'effectue par l'addition stéréométrique

des moteurs *affiliés*; le même lien entre la multiplication géométrique de ces systèmes par un nombre  $m$  et la multiplication stéréométrique des moteurs *affiliés* par ce même nombre.

La démonstration dans quelques-uns des cas particuliers qui peuvent se présenter est aisée. Il suffit pour y parvenir de décomposer stéréométriquement les moteurs donnés chacun en un rotateur et en un translateur de même support, et l'addition stéréométrique se réduit alors à l'addition géométrique.

Quant au cas général, la démonstration, se trouve dans l'ouvrage de E. Study<sup>79</sup>.\*

**48. Aperçu sur quelques applications du présent article. Rappel de quelques notions relatives au déplacement d'un corps solide.** La géométrie des vecteurs trouve son application la plus adéquate dans la Statique: les théorèmes relatifs aux vecteurs glissants, par exemple, s'appliquent textuellement aux forces extérieures que s'exercent sur un solide invariable. Ces applications trouveront leur développement dans l'article consacré à la Statique.

Mais les nouvelles figures dont nous venons de parler peuvent trouver leur emploi en Cinématique.

On sait<sup>80</sup>) que tout déplacement d'une figure invariable est tangent à un déplacement hélicoïdal. L'étude des déplacements hélicoïdaux est donc la base de toutes les études relatives aux mouvements des solides invariables<sup>81</sup>).

Le déplacement hélicoïdal d'un solide invariable est celui dans lequel tous les points du solide décrivent des hélices tracées sur des cylindres de révolution concentriques. Nous appellerons un pareil déplacement une *vissage* [cf. n° 50]; il peut être obtenu par une trans-

lation parallèle à l'axe précédée ou suivie d'une rotation. Le sens positif sur l'axe est arbitraire; mais celui des rotations en résulte, comme on l'a expliqué.

On appelle *glissement* ou amplitude de la translation la longueur, prise avec son signe, du chemin parcouru par un point du solide pendant la translation: nous la désignerons par la notation  $2\eta$ ; l'*angle de rotation* sera représenté par  $2\theta$ , il n'est défini qu'à un multiple de  $2\pi$  près;  $\theta$  est donc défini à un multiple de  $\pi$  près.

Il faut six paramètres pour déterminer un vissage, savoir  $\eta$ ,  $\theta$  et les quatre paramètres qui définissent la position de l'axe.

Il est utile de distinguer plusieurs cas particuliers:

1°) Les *rotations*, déterminées par cinq paramètres (quatre pour l'axe, un pour l'angle de rotation): elles sont caractérisées par la condition

$$\eta = 0.$$

Une rotation équivaut et d'une  $\infty^1$  de manières à la succession de deux *inversions planes*<sup>82</sup>); les plans de symétrie font entre eux l'angle  $\theta$ .

Soient  $\varphi$  un plan,  $\varphi'$  la position qu'il occupe après la rotation,  $\omega$  un des deux plans bissecteurs de  $\varphi$  et  $\varphi'$ : on pourra représenter la substitution  $S$  produite par la rotation de la manière suivante:

$$S = \{\varphi\} \{\omega\} = \{\varphi, \omega\}$$

ou encore

$$S = \{\omega\} \{\varphi'\} = \{\omega, \varphi'\},$$

le symbole  $\{\varphi\}$  indiquant une inversion plane relativement au plan  $\varphi$ .

2°) Les *demi-tours de vis* (en nombre  $\infty^0$ ). Ici

$$\theta \equiv \frac{\pi}{2} \text{ mod. } \pi.$$

Elles transforment involutivement les points à l'infini; les plans passant par l'axe ne changent pas de position, mais les figures qui y sont contenues sont déplacées.

Un demi-tour de vis équivaut d'une infinité de manières à la succession d'une inversion plane  $\{\omega\}$  et d'une symétrie centrale  $\{\xi\}$ , ou d'une symétrie centrale  $\{\xi\}$  et d'une inversion plane  $\{\omega\}$ . Les deux centres de symétrie  $\xi$  et  $\xi'$  sont situés sur l'axe et symétriques par rapport au plan  $\omega$ ; le segment  $\xi\xi'$  est égal au glissement  $2\eta$ . Nous représenterons cette substitution par la notation

$$S = \{\xi, \omega\} = \{\omega, \xi'\}.$$

<sup>82</sup>) On appelle ainsi les transformations par symétrie relatives à des plans [G. Darboux, *Théorie des surfaces* 4, Paris 1896, p. 438]. En allemand „Spiegelungen an Ebenen“.

79) „Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 94/8.“

80) Ce théorème a été donné en premier lieu par G. Mozzani dans un petit écrit, cité par M. Chasles, *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi*, Naples 1763. Mais la démonstration de G. Mozzani n'est pas exacte. A. L. Cauchy [Exercices math. 2, Paris 1827, p. 87; Œuvres (2) 7, Paris 1889, p. 94] publia le même théorème avec une démonstration correcte, sans connaître le travail de G. Mozzani. La démonstration la plus simple de ce théorème que l'on connaisse est celle qui a été donnée par H. Wiener [Ber. Ges. Lpz 42 (1890), math. p. 22].

\* Voir à ce sujet, R. Marcolongo, *Bollettino bibl. storia mat.* 8 (1905), p. 1/8 (Note de G. Loria).\*

81) Afin d'éviter la monotonie, on emploiera ici le mot „mouvement“ dans le sens de „déplacement“; mais il est bien entendu que l'on ne fait pas intervenir le temps comme variable.

3°) Les renversements (en nombre  $\infty^4$ ):

$$\eta = 0, \quad \theta \equiv \frac{\pi}{2} \text{ mod } \pi.$$

Ils équivalent à deux inversions planes successives par rapport à deux plans rectangulaires, ou à la succession d'une inversion plane et d'une symétrie par rapport à un centre situé dans le plan de symétrie.

Un renversement peut être aussi considéré comme une transformation par symétrie relativement à l'axe du retournement. Il est déterminé par cet axe.

4°) Les translations ( $\infty^3$ ):

$$\theta \equiv 0 \text{ mod } \pi.$$

Elles laissent immobiles tous les points de l'infini; elles équivalent à une succession de deux symétries centrales: la distance des centres de symétrie est la moitié de l'amplitude  $2\eta$  de la translation.

Les translations peuvent être considérées comme des rotations autour d'un axe situé à l'infini dans un plan perpendiculaire à l'axe.

Une translation définie peut être considérée comme une torsion autour d'une quelconque des droites parallèles à la direction de la translation.

5°) La transformation identique qui laisse les figures géométriques en repos.

Si le déplacement est quelconque, et s'il n'est pas une translation, il est hélicoïdal autour d'un axe déterminé. Il peut toujours être remplacé par deux ( $\infty^2$ ) retournements autour de deux droites perpendiculaires à l'axe. Ces deux droites font entre elles un angle égal à la moitié de l'angle de rotation du premier mouvement et leur plus courte distance est égale à la moitié du glissement.

Dans le cas où le déplacement résultant est un demi-tour de vis, l'angle des axes des deux renversements composants est droit.

Si le déplacement est une translation, on peut le remplacer par deux renversements autour d'axes parallèles entre eux et perpendiculaires à la direction de la translation.

Le grand intérêt des remarques précédentes consiste, ainsi que l'a observé G. H. Halphen<sup>83</sup>), en ce qu'on peut utiliser les renversements pour composer (superposer) deux déplacements quelconques. Soient  $D, D'$  les axes des vissages équivalents aux déplacements donnés,  $\Delta$  leur perpendiculaire commune. On prendra  $\Delta$  comme un des axes des renversements composants pour chacun des vissages donnés; soient alors  $\Delta_1$  l'axe associé à  $\Delta$  dans le premier vissage,  $\Delta_2$  celui qui

83) Voir n° 37. Cf. G. Darboux, Théorie des surfaces<sup>82</sup>) 4, p. 441.

est associé à  $\Delta$  dans le second. La superposition de tous ces déplacements se réduit à deux renversements autour de  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  et par suite à une torsion autour de la perpendiculaire commune à  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ .

49. Lien entre les déplacements et les figures de Study. Voici maintenant les théorèmes que démontre E. Study.

A tout système de biplans est associé un vissage  $S$  qui n'est pas un demi-tour de vis. L'axe du vissage coïncide avec le support du système de biplans: si l'on décompose ce vissage en une rotation  $S'$  et une translation  $S''$  parallèles à l'axe, et si l'on met en même temps le système de biplans sous la forme normale  $B + B'$ , le biplan véritable  $B$  a pour ouverture la tangente trigonométrique du demi-angle de rotation de  $S$  ou de  $S'$ , le pseudo-biplan  $B'$  a pour écartement la moitié du glissement  $\eta$  de  $S$  ou de  $S''$ . En particulier à tout biplan véritable correspond une rotation, à tout pseudo-biplan une translation, au biplan nul la transformation identique.

Si maintenant on doit additionner des systèmes de biplans, à leur somme sera associée un vissage résultant des vissages associés aux systèmes de biplans composants. Nous désignerons cette opération sous le nom de *superposition linéaire* de déplacements. Voici comment on effectuera cette superposition dans le cas de deux mouvements.

Soit  $o$  le milieu de deux cordes  $\xi\xi', \eta\eta'$  par rapport à deux déplacements qui ne sont pas des demi-tours de vis. Composons les vecteurs  $o\xi', o\eta'$  par la règle du parallélogramme et soit  $o\xi''$  le vecteur résultant;  $o$  est le milieu d'une corde  $\xi\xi'$  dans un mouvement parfaitement déterminé<sup>84</sup>).

Ce mouvement déterminé n'est pas un demi-tour de vis; il est le résultat de la superposition linéaire des deux premiers mouvements.

Décomposons<sup>85</sup>) chacun de ces trois mouvements en deux renversements. On obtient ainsi trois moteurs

$$M_{\Delta_1}^{\Delta}, M_{\Delta_2}^{\Delta} \text{ et } M_{\Delta_3}^{\Delta};$$

84) Geometrie der Dynamen, Leipzig 1893, p. 43 et suiv.

85) On verra plus loin pourquoi il convient de choisir pour effectuer les constructions indiquées plutôt  $\xi', \eta', \xi'', \eta'', \xi''', \eta'''$  que  $\xi, \eta, \xi', \eta', \xi'', \eta''$ .

86) Le texte et les notes de cette dernière partie du n° 49 sont entièrement dus à E. Study, sauf le vocabulaire final qui a été établi par L. Lévy.\*

les deux axes de renversement ne sont en aucun cas perpendiculaires l'un à l'autre (pour chacun des trois mouvements). Ces trois moteurs sont liés par la relation

$$M_{\Delta}^{\lambda_1} + M_{\Delta}^{\lambda_2} = M_{\Delta}^{\lambda_3},$$

en sorte que les mouvements qui ne sont pas des demi-tours de vis se superposent d'une façon linéaire, c'est-à-dire telle que les moteurs qui leur correspondent s'ajoutent<sup>87)</sup>.

On peut appliquer les résultats obtenus à la composition des mouvements infiniment petits des solides rigides. On obtient ainsi les propositions suivantes:

Dans tout mouvement infiniment petit d'un solide rigide, chacun des points  $O$  du solide qui ne reste pas immobile se déplace dans une direction déterminée par une droite passant par  $O$ .

Si l'on mène dans cette direction un vecteur  $O\xi'$  de longueur égale à celle de la vitesse actuelle du point  $O$ , et si l'on construit l'image  $\xi$  relativement à  $O$  de l'extrémité  $\xi'$  de ce vecteur, les points  $\xi$  et  $\xi'$  se correspondent dans un certain mouvement fini déterminé du solide rigide envisagé, qui n'est pas un demi-tour de vis.

Pour composer des mouvements infiniment petits d'un solide rigide il suffit de composer les mouvements finis correspondants comme on l'a vu plus haut suivant la règle du parallélogramme ou encore d'ajouter géométriquement les moteurs correspondants.

Dans tout mouvement infiniment petit d'un solide rigide, chacun des plans  $\omega$  du solide qui ne reste pas immobile se déplace dans une rotation déterminée autour d'une droite située dans  $\omega$ .

Si l'on mène par cette droite un second plan  $\varphi'$  tel que  $\text{tg}(\omega, \varphi')$  soit, en grandeur et signe, égale à la vitesse angulaire de rotation actuelle des plans  $\omega$ <sup>88)</sup>, et si l'on construit l'image  $\varphi$  de  $\varphi'$  relativement à  $\omega$ , les plans  $\varphi$  et  $\varphi'$  se correspondent dans un certain mouvement fini déterminé du solide rigide envisagé, qui n'est pas un demi-tour de vis.

Pour composer des mouvements infiniment petits d'un solide rigide il suffit de composer les mouvements finis correspondants comme on l'a vu plus haut suivant la règle du trapèze ou encore d'ajouter géométriquement les moteurs correspondants<sup>89)</sup>.

87) „Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 43 et suiv. Au sujet des vecteurs  $O\xi'$  et des biplans  $\omega\varphi'$  voir Math. Ann. 39 (1891), p. 464 où l'on trouvera des renseignements bibliographiques.”

88) „Dans le cas particulier où le plan  $\varphi'$  est parallèle au plan  $\omega$ , cette règle doit être quelque peu modifiée.”

89) „Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 116 et suiv.”

Le système de constructions dont on vient d'exposer le principe n'est pas un système complet. A l'addition géométrique des impulsions il faut encore faire correspondre une *superposition corrélatrice des mouvements*, et à l'addition stéréométrique des moteurs il faut de même faire correspondre une *superposition stéréométrique des mouvements*.

Cette superposition stéréométrique  $S'$  des mouvements, mais non la *superposition corrélatrice des mouvements*, peut, elle aussi, être appliquée à la composition<sup>90)</sup> des mouvements infiniment petits<sup>91)</sup> d'un solide rigide<sup>92)</sup>.

Nous terminons ce chapitre en proposant pour les locutions allemandes introduites par E. Study les locutions françaises correspondantes que voici:

#### Vocabulaire de E. Study.

|                     |                                   |
|---------------------|-----------------------------------|
| Stab                | Vecteur glissant                  |
| Vector              | Vecteur libre                     |
| Keil (coin)         | Biplan                            |
| Quirl               | Moulinet                          |
| Umwendung           | Renversement                      |
| Umschraubung        | Demi-tour de vis                  |
| Schraubung          | Déplacement hélicoïdal, torsion   |
| Drehung             | Rotation                          |
| Schiebung           | Translation                       |
| Sperrung            | Ecartement                        |
| Speer               | Droite orientée, axe, semi-droite |
| Speere syntaktisch  | Semi-droites de même sens         |
| Speere antitaktisch | Semi-droites de sens contraires   |
| Motor               | Moteur                            |
| Rotor               | Rotateur                          |
| Translator          | Translateur                       |
| Torsor              | Impulseur rectangle               |
| Ejector             | Pseudo-impulseur                  |

90) „Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 85, 116 et suiv.”

91) „La connexion entre les systèmes de forces distribuées sur un solide rigide et les mouvements infiniment petits de ces solides, connexion sur laquelle repose une partie des recherches de E. Study dont on vient d'exposer le contenu est particulière à l'espace à trois dimensions [cf. Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 119]. Elle n'est d'ailleurs pas spéciale à l'espace ordinaire euclidien. Dans un espace non-euclidien à trois dimensions on peut développer une théorie toute semblable qui, pour une courbure de l'espace positive (espace riemannien) est même plus simple que dans l'espace euclidien [Geometrie der Dynamen, p. 113 et suiv.]. On consultera aussi à ce sujet S. Edwin Davis, Die geometrische Addition der Stäbe in der hyperbolischen Geometrie, Diss. Greifswald 1904.”

92) „Un exposé analytique des résultats obtenus par E. Study est contenu dans la seconde partie de son Traité [Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 122/226] dont la première partie (p. 1/121) a un caractère purement géométrique.”

## Vis, vissages et visseurs de Ball.

50. Définitions. Notations<sup>93</sup>). Le point de départ de la théorie de R. S. Ball<sup>94</sup>) est dans les deux faits suivants:

1°) Un système de forces appliquées à un corps solide (pour lequel la somme géométrique des forces n'est pas nulle) peut être réduit d'une seule façon à une force et à un couple dont l'axe est parallèle à la direction de la force<sup>95</sup>). Cet ensemble est appelé par R. S. Ball un visseur<sup>96</sup>) [n° 26]. Un système de visseurs, appliqué à un solide, peut être réduit d'une seule façon à un visseur unique puisque ce système de visseurs est, en dernière analyse, un système de forces.

2°) On peut toujours, d'une seule façon, amener un corps solide d'une position à une autre (n'ayant pas la même orientation dans l'espace) par une rotation autour d'un axe déterminé et par une translation (ou un glissement) parallèle à cet axe. Cet ensemble est appelé par R. S. Ball<sup>97</sup>) un *vissage*<sup>98</sup>).

En particulier, dans le mouvement continu d'un solide l'état des vitesses à l'instant  $t$  est le même que si, pendant le temps infiniment petit  $dt$ , le corps tournait d'un angle  $d\theta$  autour d'une droite et

93) Les numéros 50 à 54 ont été rédigés par P. Appell.\*

94) Les premières communications se trouvent: Quart. J. pure appl. math. 10 (1870), p. 220; Trans. Irish Acad. (Dublin) 25 (1875), p. 137 [1871]; Philos. Trans. London 164 (1874), p. 15. Pour tout ce qui a suivi voir R. S. Ball, A treatise on the theory of screws, (2<sup>e</sup> éd.) Cambridge 1900, où l'on trouvera de nombreux renseignements bibliographiques.

95) L. Poinsot, Éléments de statique, (3<sup>e</sup> éd.) Paris 1842, p. 79.

96) En anglais *wrench* (clef anglaise). Cf. Theory of screws<sup>99</sup>), (1<sup>re</sup> éd.) p. 4 (§ 4); (2<sup>e</sup> éd.), p. 10 (§ 7). En allemand *Winder* [cf. W. Fiedler, Viertelj. Naturf. Ges. Zurich 21 (1876), p. 199]. P. Appell dit *torseur* au lieu de *visseur* [Traité de mécanique rationnelle (3<sup>e</sup> éd.) 1, Paris 1909, p. 32]; H. E. Timerding<sup>99</sup>) propose de dire „grandeur hélicoïdale de seconde espèce“ (Schraubengröße zweiter Art). Au sujet de l'emploi du mot *dynam*e par J. Plücker dans le sens de *visseur* voir plus loin n° 55.

97) R. S. Ball, Theory of screws<sup>99</sup>), (2<sup>e</sup> éd.) p. 7 (§ 3).

98) R. S. Ball dit *twist* pour *vissage*. En Allemagne, W. Fiedler [Viertelj. Naturf. Ges. Zurich 21 (1876), p. 199] dit *Windung*, mais F. Klein [Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 243; Math. Ann. 62 (1906), p. 426] dit *Schraubung*. Cf. H. E. Timerding, Geometrie der Kräfte, Leipzig 1909, p. 81, 137. H. E. Timerding [Encyklopädie der math. Wiss. IV 2, 13] propose de dire „grandeur hélicoïdale de première espèce“ (Schraubengröße erster Art).

L'expression *twist* était déjà en usage avant que R. S. Ball ne l'ait employée [cf. par ex. W. Thomson et P. G. Tait, Treatise on natural philosophy, (1<sup>re</sup> éd.) 1, Oxford 1867; P. Appell [Traité de mécanique rationnelle (1<sup>re</sup> éd.) 1, Paris 1893, p. 27] traduit *twist* par *torsion* et emploie le mot *fleche* au lieu du mot paramètre.

glissait d'une longueur  $dl$  le long de cette droite, c'est-à-dire subissait un *vissage élémentaire*<sup>99</sup>).

La *vitesse instantanée de vissage*, ou *vissage instantané*, est l'ensemble formé par les deux vecteurs  $\rho$  et  $\vec{g}$  représentant l'un la vitesse angulaire instantanée de rotation  $\frac{d\theta}{dt}$ , l'autre la vitesse instantanée de glissement  $\frac{dl}{dt}$ .

Un système de vissages finis ou de vissages instantanés peut être remplacé, d'une seule façon, par un *vissage fini* ou *instantané*.

Le tableau suivant montre l'analogie et la différence entre le *visseur* et le *vissage*.

| Visseur.                                                                                       | Vissage.                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Vecteur <i>polaire</i> glissant associé à un vecteur <i>axial</i> libre qui lui est parallèle. | Vecteur <i>axial</i> glissant associé à un vecteur <i>polaire</i> libre qui lui est parallèle.* |

51. Vis. De même qu'un vecteur glissant a pour support une droite déterminée, un visseur ou un *vissage* ont, d'après R. S. Ball, comme support commun une *droite déterminée affectée d'un coefficient linéaire positif ou négatif* que R. S. Ball nomme une *vis*<sup>100</sup>).

Pour comprendre la définition abstraite de la vis de Ball, imaginons une vis matérielle qui se meut dans un écrou<sup>101</sup>) fixe dans l'espace; tous les points de la vis décrivent des hélices circulaires dont l'axe commun est appelé *axe de la vis*.

Le *pas absolu*<sup>102</sup>) de la vis est la longueur dont glisse un point de la vis situé sur l'axe quand celle-ci tourne d'un angle égal à l'unité d'angle (radian).\*

99) Ces théorèmes sont dus en grande partie à M. Chasles [C. R. Acad. sc. Paris 16 (1843), p. 1420]. Sur les propriétés relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre cf. A. Mannheim, Géom. cinématique<sup>101</sup>); A. Schoenflies, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung, Leipzig 1886; trad. par Ch. Speckel, Géométrie du mouvement, Paris 1893; G. Koenigs, Cinématique<sup>102</sup>); E. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903. Cf. IV 6.

100) En anglais *screw*. En allemand *Schraube*.

101) En anglais *nut*. En allemand *Schraubenmutter*.

102) En italien *passo*, en anglais *pitch*, en allemand *Parameter* d'après F. Klein [Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 244; Math. Ann. 62 (1906), p. 426] ou Pfeil d'après W. Fiedler [Viertelj. Naturf. Ges. Zurich 21 (1876), p. 199] et W. Schell [Theorie der Bewegung und der Kräfte (2<sup>e</sup> éd.) 2, Leipzig 1880, p. 212]; W. Schell dit *Axenparameter* pour vis; H. E. Timerding remarque que „Parameteraxe“ serait plutôt indiqué qu'*Axenparameter*. P. Appell [Mécanique rationnelle (3<sup>e</sup> éd.) 1, Paris 1909, p. 32] dit *fleche* au lieu de paramètre.

Il peut exister, comme on sait, deux espèces de vis matérielles suivant le sens d'enroulement des spires. Pour les distinguer imaginons qu'on oriente l'axe de la vis et appelons  $\alpha$  l'axe ainsi orienté: la vis sera dite *positive* ou *négative* suivant qu'en la faisant tourner autour de l'axe  $\alpha$  dans le sens direct du n° 9 elle glisse dans le sens *positif* ou le sens *négatif* de l'axe  $\alpha$ . Ce signe attribué à une vis est indépendant du sens choisi comme positif sur l'axe de la vis, car si la vis tourne dans des sens contraires dans l'écrou, elle glisse aussi dans des sens contraires<sup>103</sup>.

Les vis positives sont aussi appelées *dextrorsum* et les négatives *sinistrorsum*<sup>104</sup>.

Les vis usuelles sont positives ou dextrorsum; en faisant tourner une vis usuelle dans le sens direct du n° 9 elle glisse dans le sens *positif* de l'axe.

Une vis peut être représentée par les deux éléments abstraits suivants qui constituent la *vis de Ball*:

1°) une droite indéfinie  $D$ , non orientée, qui coïncide avec l'axe de la vis;

2°) un coefficient  $k$  (dont la dimension est celle d'une longueur) égal au pas absolu de la vis précédé du signe + ou du signe - suivant que la vis est positive ou négative. Ce coefficient s'appelle le *pas*<sup>104</sup> ou le *paramètre* de la vis.

Si l'on oriente la droite  $D$  en la transformant en un axe orienté  $\alpha$  quand la vis tourne d'un angle (positif ou négatif)  $\Delta\theta$ , son glissement le long de cet axe est mesuré par un segment  $g_\alpha$  (positif ou négatif) donné par

$$g_\alpha = k \cdot \Delta\theta.$$

**52. Forme canonique d'un visseur.** Soit un visseur constitué par une force  $\vec{F}$  (vecteur polaire glissant sur une droite  $D$ ) et par un couple dont le moment  $\vec{G}$  (vecteur axial libre) est parallèle à la force et peut être placé sur la même droite  $D$ . Orientons cette droite de

103) Le mot rotation a deux sens suivant qu'on se borne à considérer les positions initiale et finale ou qu'on envisage le temps que le corps a mis à passer de la première à la seconde. Le mot vissage comporte la même ambiguïté. Mais les coordonnées du vissage doivent, lorsqu'elles se rencontrent dans le texte, être considérées une fois pour toutes comme des composantes de vitesse; et si le vissage signifie occasionnellement un déplacement infiniment petit, il convient par suite de diviser encore ses composantes par un temps  $dt$  très petit, qui d'ailleurs peut être pris pour unité.

104) Les conventions faites à ce sujet varient avec les auteurs. Voir à ce sujet R. Alesais, Nouv. Ann. math. (4) 10 (1910), p. 289/302.\*

façon à la transformer en un axe orienté  $\alpha$ ; appelons  $F_\alpha$  et  $G_\alpha$  les valeurs algébriques des deux segments déterminés sur cet axe par les vecteurs  $\vec{F}$  et  $\vec{G}$  et considérons le rapport

$$k = \frac{G_\alpha}{F_\alpha}$$

qui est une longueur précédée du signe + ou du signe -. La vis d'axe  $D$  et de pas  $k$  est la vis qui porte le visseur; cette vis est positive ou négative suivant que  $\vec{F}$  et  $\vec{G}$  sont de même sens ou de sens contraires.

Le visseur est alors défini par les éléments suivants:

1°) le vecteur polaire glissant  $\vec{F}$  dont la direction et le sens sont appelés direction et sens du visseur et dont la longueur  $F$  est appelée *amplitude* du visseur;

2°) le pas ou paramètre  $k$  de la vis ayant pour axe la droite portant le vecteur  $\vec{F}$ .

On peut dire aussi que le visseur est défini par un *vecteur polaire glissant* auquel on adjoint un nombre  $k$  positif ou négatif, appelé *pas* ou *paramètre* du visseur; la valeur absolue de ce nombre dépend du choix de l'unité de longueur. Ces deux éléments étant donnés, le moment  $\vec{G}$  du couple est défini en grandeur, direction et sens par la relation écrite plus haut

$$G_\alpha = k F_\alpha.$$

Si l'on imagine un système de vecteurs polaires glissants (forces) équivalent à la force  $\vec{F}$  jointe au couple de moment parallèle  $\vec{G}$ , c'est-à-dire équivalent au visseur, le moment résultant de ce système par rapport à un point quelconque  $P$  de l'espace est la somme d'un vecteur équipollent à  $\vec{G}$  et du moment de  $\vec{F}$  par rapport à  $P$ . La somme des moments des vecteurs par rapport à un axe est la projection sur cet axe du moment résultant par rapport à un point quelconque  $P$  de l'axe. Les droites de moment nul forment un complexe linéaire dont l'équation contient uniquement le paramètre  $k$  du visseur: ce complexe est dit le *complexe linéaire attaché à la vis qui porte le visseur*<sup>105</sup>.

**53. Forme canonique d'un vissage.** Bornons-nous à un vissage instantané comme celui qui représente à un instant  $t$  les éléments du

105) Cette dépendance fait le principal objet d'un ouvrage de J. Zančevskij, Teorija vinta i primenenie ego v mehanike (Théorie des vis et son emploi en mécanique), Odessa 1889. Voir aussi une petite note de K. Küpper, Monatsh. Math. Phys. 1 (1890), p. 95.

mouvement hélicoïdal tangent au mouvement d'un solide. Ce vissage instantané est formé<sup>106)</sup> par l'ensemble d'une vitesse angulaire représentée par un vecteur axial glissant  $\vec{g}$  porté par l'axe instantané  $D$  et d'une vitesse de glissement parallèle  $\vec{g}$ , vecteur polaire libre, qu'on peut toujours supposer porté par la même droite. Si l'on choisit sur  $D$  un sens positif de façon à obtenir un axe orienté  $\alpha$ , les deux vecteurs  $\vec{g}$  et  $\vec{g}$  déterminent sur cet axe des segments  $g_\alpha$  et  $g_\alpha$ . Le rapport

$$k = \frac{g_\alpha}{g_\alpha}$$

est un nombre positif ou négatif dont la valeur absolue dépend de l'unité de longueur choisie.

La vis d'axe  $D$  et de pas  $k$  est la vis qui porte le vissage; le pas  $k$  est positif ou négatif suivant que  $\vec{g}$  et  $\vec{g}$  sont de même sens ou de sens opposés.

Le vissage lui-même est défini par les éléments suivants:

1°) le vecteur axial glissant  $\vec{g}$ , donnant la direction, le sens et l'amplitude du vissage;

2°) le pas ou paramètre  $k$  de la vis, ayant pour axe la droite indéfinie qui porte ce vecteur axial.

On dit aussi parfois que  $k$  est le pas ou le paramètre du vissage.

Ces deux éléments, vecteur axial glissant et pas  $k$ , étant donnés, le glissement  $\vec{g}$  est défini par la relation

$$g_\alpha = k g_\alpha.$$

Soit un système de vecteurs axiaux glissants (rotations) équivalent au vecteur  $\vec{g}$  joint au couple de rotations de moment  $\vec{g}$  parallèle (translation); le moment résultant de ce système par rapport à un point  $P$  est la somme géométrique d'un vecteur équipollent à  $\vec{g}$  et du moment linéaire de  $\vec{g}$  par rapport à  $P$ . Ce moment résultant est la vitesse<sup>107)</sup> que posséderait le point  $P$  s'il était lié invariablement au corps solide animé du vissage instantané considéré. La somme des moments des vecteurs par rapport à un axe  $\Delta$  est la projection sur cet axe de la vitesse d'un point quelconque de l'axe  $\Delta$ . Les

106) Cf. E. Study, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 118 et F. Klein [Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 244; Math. Ann. 62 (1906), p. 426] qui emploie les mots *Drehgeschwindigkeit* et *Translationsgeschwindigkeit*.

107) C'est A. F. Möbius [J. reine angew. Math. 18 (1838), p. 189; Werke 1, Leipzig 1885, p. 545] qui a donné le premier exposé méthodique de l'analogie que présentent les compositions des systèmes de vecteurs et celles des mouvements infiniment petits.

droites de moment nul forment un complexe linéaire dépendant uniquement de la vis de pas  $k$  et identique à celui que nous avons trouvé pour la même vis considérée comme support d'un visseur.

Nous pouvons comparer encore une fois le visseur et le vissage dans le tableau suivant:

| Visseur.                                                                                                              | Vissage.                                                        |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| Vecteur polaire glissant $\vec{F}$ porté par une vis de pas $k$ .                                                     | Vecteur axial glissant $\vec{g}$ porté par une vis de pas $k$ . |
| C'est en raison de ce rôle commun de la vis qu'on a introduit les locutions de <i>visseur</i> et de <i>vissage</i> .* |                                                                 |

#### 54. Expressions analytiques du visseur et du vissage.

1°) *Visseur*. Soient un système d'axes rectangulaires et un système de vecteurs polaires glissants (forces)

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_v, \dots, \vec{F}_n.$$

Désignons par

$$X, Y, Z$$

les sommes des projections de ces vecteurs sur chacun des trois axes et par

$$L, M, N$$

les sommes de leurs moments par rapport à chacun des axes. Ces six quantités définissent un visseur porté par l'axe central du système de vecteurs, ayant pour sens et pour amplitude le sens et la longueur du vecteur  $\vec{F}$  de projections  $X, Y, Z$  et pour pas ou paramètre la quantité

$$k = \frac{LX + MY + NZ}{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

2°) *Vissage*. Soit un déplacement hélicoïdal instantané d'un solide, défini par les coefficients

$$p, q, r$$

de la rotation instantanée  $\vec{g}$  et les projections

$$u, v, w$$

de la vitesse  $\vec{V}$  du point du solide situé à l'origine  $O$ . L'axe du vissage instantané se confond avec l'axe central du système de vecteurs glissants qui aurait pour somme géométrique  $\vec{g}$  et pour moment résultant par rapport à  $O$  le vecteur  $\vec{V}$ . Son sens et son amplitude sont le sens et la longueur de  $\vec{g}$ ; son paramètre  $k'$  est

$$k' = \frac{pu + qv + rw}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

3°) *Invariant simultané d'un visseur et d'un vissage.* Imaginons que le corps solide soumis aux forces

$$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_r, \dots, \vec{F}_n$$

considérées ci-dessus, soit animé du vissage considéré. La somme

$$\mathfrak{E}_e$$

des travaux élémentaires des forces  $\vec{F}_i$  pendant l'intervalle de temps  $dt$  a pour expression

$$\mathfrak{E}_e = (uX + vY + wZ + pL + qM + rN)dt.$$

La quantité entre parenthèses est un invariant simultané du visseur et du vissage.\*

**55. Différences analytiques du visseur et du vissage.** Les expressions analytiques précédentes font ressortir au point de vue analytique les analogies et la différence signalées antérieurement [n° 50 et 53] entre le visseur et le vissage.

F. Klein propose de faire ressortir les analogies en convenant d'appeler les visseurs aussi bien que les vissages des *grandeurs hélicoïdales* et de faire ressortir les différences en distinguant les grandeurs hélicoïdales en deux espèces: les déplacements ou *vissages* seront des *grandeurs hélicoïdales de première espèce*, les systèmes de forces ou *visseurs* des *grandeurs hélicoïdales de deuxième espèce*.

Au point de vue analytique, l'analogie aussi bien que la différence proviennent de l'effet que produit sur ces grandeurs un changement de coordonnées. D'une part

$$p, q, r; u, v, w$$

subissent, ainsi que

$$X, Y, Z; L, M, N,$$

dans les rotations du trièdre des coordonnées les mêmes changements que des coordonnées ordinaires  $x, y, z$ .

D'autre part, dans une translation des axes parallèlement à eux-mêmes, les quantités

$$p, q, r \text{ et } X, Y, Z$$

ne changent pas; au contraire, si  $a, b, c$  désignent les coordonnées de la nouvelle origine,

$$u, v, w$$

se changent en

$$u - cq + br, \quad v - ar + cp, \quad w - bp + aq,$$

et les quantités

$$L, M, N$$

se changent en

$$L - cY + bZ, \quad M - aZ + cX, \quad N - bX + aY.$$

L'analogie s'est maintenue jusqu'ici; mais si nous changeons le sens des axes, les quantités

$$p, q, r, u, v, w$$

se changent en

$$p, q, r, -u, -v, -w$$

tandis que les quantités

$$X, Y, Z, L, M, N$$

se changent en<sup>108)</sup>

$$-X, -Y, -Z, L, M, N.$$

L'invariant simultané

$$uX + vY + wZ + pL + qM + rN$$

est donc une grandeur scalaire de première espèce.

Les grandeurs hélicoïdales de première espèce ont leur application immédiate en cinématique<sup>109)</sup>; celles de deuxième espèce ne jouent pas un rôle moins important en statique dans la théorie des systèmes de forces agissant sur un corps solide. C'est ce qui a fait donner à ces dernières par J. Plücker<sup>110)</sup> le nom de *dynames*: une dyname est donc représentée par le visseur résultant d'un système de forces données agissant sur un corps solide. Le système de forces peut être remplacé, sans changer la dyname, par un système équivalent. En particulier un couple est une dyname dont le paramètre est infini, une force est une dyname dont le paramètre est nul.

**56. Comparaison des théories de Ball et de Study.** Si l'on compare la théorie de R. S. Ball à celle de E. Study on observe tout d'abord que R. S. Ball laisse toujours systématiquement de côté tous les cas particuliers qui peuvent se présenter, tandis que E. Study s'y attache tout spécialement. Comme ce sont précisément ces cas particuliers dont l'étude présente les plus grandes difficultés, la théorie de R. S. Ball se présente sous une forme bien plus abordable pour le plus grand nombre des lecteurs. R. S. Ball est essentiellement préoccupé du désir de faire ressortir les idées générales qui se trouvent au fond

108) F. Klein [Z. Math. Phys. 47 (1902), p. 243; Math. Ann. 62 (1906), p. 425; voir aussi plus loin n° 74] fait de plus observer qu'un changement dans l'unité de temps produit un changement inversement proportionnel sur  $p, q, r, u, v, w$  sans altérer  $X, Y, Z, L, M, N$ , et que si, comme c'est le cas le plus fréquent, le système de vecteurs donné est un système de forces, un changement dans l'unité de force produit un changement proportionnel sur  $X, Y, Z, L, M, N$ , sans altérer  $p, q, r, u, v, w$ .

109) Voir ce qui a été dit à ce sujet au n° 50. Voir surtout l'article IV 6.

110) Fundamental views regarding mechanics, Philos. Trans. London 156 (1866), p. 361; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 548.



de la mécanique ordinaire; il est parvenu à projeter une nouvelle lumière sur une théorie, celle de la mécanique ordinaire, déjà développée par le travail de plusieurs siècles. La théorie de *R. S. Ball* pourrait être exposée sous une forme purement géométrique; les énoncés qu'on obtiendrait ainsi seraient susceptibles d'une double interprétation, l'une cinématique, l'autre statique. Dans la suite de cet article nous emploierons de préférence le langage de la cinématique. *E. Study* fonde une théorie nouvelle qui, malgré les faits communs qu'elle présente avec celle de *R. S. Ball*, a un tout autre but et un caractère spécial. Les éléments géométriques que *E. Study* envisage sont des créations de son esprit; il en développe la théorie avec toutes ses conséquences en envisageant tous les cas spéciaux. Les éléments envisagés par *R. S. Ball* sont tous réels; *E. Study* tient compte des éléments imaginaires.

Enfin au point de vue cinématique, *R. S. Ball* n'envisage que des mouvements infiniment petits; au contraire *E. Study* développe la théorie des déplacements finis.

Au fond la théorie de *R. S. Ball* est une théorie abstraite de la mécanique physique, celle de *E. Study* est un nouveau chapitre de la mécanique rationnelle ou même plutôt de la géométrie.\*

**57. Les vis réciproques.** Soient  $k$  et  $k'$  les *pas* ou *paramètres* de deux vis,  $\varphi$  l'angle de leurs deux axes supposés orientés comme au n° 51,  $d$  leur plus courte distance; soient enfin  $\rho$  et  $\rho'$  les *amplitudes* de deux vissages instantanés appartenant à ces vis, c'est-à-dire les nombres qui mesurent  $\tilde{\rho}$  et  $\tilde{\rho}'$  sur les axes fixés sur leurs supports. Les deux vissages sont définis par leurs coordonnées  $u, v, \dots, u', v', \dots$ ; l'invariant simultané de ces deux vissages satisfait à la relation

$$\rho u' + q'v' + \rho'v + uq' + vq' + wv' = \rho \rho' [(k + k') \cos \varphi - d \sin \varphi].$$

*R. S. Ball* appelle *coefficient virtuel* des deux vis le facteur entre crochets, qui est indépendant des amplitudes<sup>111</sup>. C'est le moment relatif de deux vecteurs d'intensités 1 portés par les deux vis.

Lorsque ce coefficient s'annule, les deux vis sont dites *réciproques*; une vis est déterminée lorsqu'elle est réciproque de cinq vis données.

111) *F. Klein* [Math. Ann. 2 (1870), p. 201, 368] a présenté d'abord la formule du texte comme moment relatif de deux complexes linéaires de droites. Si ce moment s'évanouit, *F. Klein* dit que les complexes sont en involution. Ainsi des complexes linéaires en involution correspondent à des vis réciproques. En particulier *F. Klein* étudie les systèmes de six complexes deux à deux en involution: ceci correspond au système coréciproque de six vis introduit plus tard par *R. S. Ball*.

Quand les deux vis coïncident le coefficient virtuel se trouve être le double du paramètre de la vis unique.

**58. Coordonnées-vis et leurs transformations linéaires les plus générales.** Une vis est déterminée par les rapports de cinq des quantités  $p, q, r, u, v, w$  à la sixième. Au lieu de se donner ces rapports, on peut se donner cinq relations linéaires et homogènes entre les mêmes quantités.

*F. Klein*<sup>112</sup>) avait développé ce sujet en se plaçant au point de vue de la théorie des complexes.

*R. S. Ball*<sup>113</sup>) de son côté était arrivé aux mêmes résultats de la manière suivante qui est plus directe.

Un déplacement hélicoïdal ou *vissage*<sup>114</sup>) arbitraire  $\Omega$  peut être d'une façon unique remplacé par six vissages qui appartiennent à six vis données

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6.$$

*R. S. Ball* appelle les amplitudes de ces vissages,

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6,$$

les *composantes* du vissage  $\Omega$  par rapport aux six vis données. Introduisons en outre les six vis

$$\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6,$$

définies comme réciproques des six groupes obtenus en associant les six vis données cinq à cinq, où  $\eta_i$  désigne la réciproque commune des cinq vis autres que  $\omega_i$ , et représentons par

$$[\omega_i \eta_i]$$

le coefficient virtuel des vis  $\omega_i$  et  $\eta_i$ . Soit enfin  $\rho$  l'amplitude du vissage  $\Omega$  qui a pour vis  $\omega$ ; on trouve pour expression de ses six composantes

$$\xi_i = \rho \frac{[\omega \eta_i]}{[\omega_i \eta_i]} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Les rapports de ces composantes doivent être considérés comme les coordonnées générales de la vis  $\omega$  qui appartient au vissage  $\Omega$ ; les valeurs absolues des  $\xi$  déterminent le vissage lui-même<sup>115</sup>). On désigne

112) Math. Ann. 2 (1870), p. 198.

113) Il faut remarquer que *R. S. Ball* pour se donner une vis ne se sert pas des rapports des coordonnées mais la considère comme un vissage d'intensité = 1 (le signe restant, bien entendu, à déterminer).

114) Il en est évidemment de même du visseur.

115) *R. S. Ball*, Trans. Irish Acad. Dublin 26 (1874), p. 259; Theory of screws, (1<sup>re</sup> éd.) 1876, p. 34; (2<sup>e</sup> éd.) 1900, p. 36 (chap. IV).

ce vissage par le symbole

$$\varrho \omega,$$

considérant par là-même la vis  $\omega$  comme un vissage d'amplitude 1.

Considérons un second vissage  $\varrho' \omega'$  d'amplitude  $\varrho'$ ; nous entendons par

$$\varrho \omega + \varrho' \omega'$$

le vissage (instantané) déterminé d'une façon unique qui remplace [n° 50] l'ensemble des vissages  $\varrho \omega$  et  $\varrho' \omega'$ ; ses coordonnées sont les sommes

$$\xi_\mu + \xi'_\mu.$$

Le carré de l'amplitude  $\varrho$  est une forme quadratique des six coordonnées

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6.$$

Le coefficient virtuel de deux vis  $\omega$  et  $\omega'$  se présente sous la forme

$$[\omega \omega'] = \frac{1}{\varrho \varrho'} \sum_{\mu, \nu} [\omega_\mu \omega_\nu] \xi_\mu \xi'_\nu.$$

Le paramètre  $k$  de la vis  $\omega$  sera

$$k = \frac{1}{2 \varrho^2} \sum_{(\mu, \nu)} [\omega_\mu \omega_\nu] \xi_\mu \xi_\nu.$$

Un cas particulièrement intéressant est celui où les six vis  $\omega_\mu$  coïncident avec les six vis  $\eta_\mu$ . Dans ce cas la vis  $\omega_\mu$  sera réciproque à chacune des cinq vis

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$$

distinctes de  $\omega_\mu$ , et l'on aura donc

$$[\omega_\mu \omega_\nu] = 0$$

pour  $\mu$  différent de  $\nu$ .

Un pareil système de six vis est appelé par R. S. Ball un système coréciproque.

Le coefficient virtuel  $[\omega_\mu \eta_\mu]$  a alors pour valeur le double du paramètre  $k_\mu$  de la vis  $\omega_\mu$ , et l'on trouve pour coordonnées de la vis  $\omega$

$$\xi_\mu = \varrho \frac{[\omega \omega_\mu]}{2 k_\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Désignons par

$$\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4, \xi'_5, \xi'_6$$

les coordonnées d'un second vissage  $\varrho' \omega'$ ; le coefficient virtuel des deux vis  $\omega$  et  $\omega'$  sera

$$[\omega \omega'] = \frac{2}{\varrho \varrho'} \sum_{\mu=1}^6 k_\mu \xi_\mu \xi'_\mu,$$

et le paramètre  $k_\omega$  d'une vis  $\omega$

$$k_\omega = \frac{1}{\varrho^2} \sum_{\mu=1}^6 k_\mu \xi_\mu^2.$$

Une vis se réduit à une ligne droite (axe de la rotation à laquelle se réduit le vissage correspondant) lorsque la forme quadratique

$$\sum_{\mu=1}^6 k_\mu \xi_\mu^2$$

de ses coordonnées s'évanouit; elle est dextrorsum ou sinistrorsum suivant le signe de cette forme<sup>(16)</sup>.

**59. Systèmes linéaires de vissages et leur interprétation dans le cas des corps gènes.** Dans la théorie de R. S. Ball, la considération des systèmes linéaires de vissages joue un rôle important. Voici la définition de ces systèmes:

Soient

$$w_1, w_2, \dots, w_n \quad (n < 6),$$

$n$  vissages d'amplitude 1; par définition les vissages compris dans la formule

$$w = \varrho_1 w_1 + \varrho_2 w_2 + \dots + \varrho_n w_n$$

forment un système linéaire du  $n^{\text{ième}}$  degré, ou de dimension  $n - 1$ ;  $w_1, w_2, \dots, w_n$  constituent une base du système, et les mêmes locutions s'appliquent aux vis servant de support aux vissages précédents.

Ce système peut aussi être déterminé par  $6 - n$  équations linéaires entre les coordonnées des vissages; on peut d'ailleurs substituer à  $w_1, w_2, \dots, w_n$  toute autre base formée par  $n$  vissages du système assujettis à la seule condition d'être linéairement indépendants, c'est-à-dire non contenus dans un même système linéaire de degré  $n - 1$ . Si  $n$  vis appartiennent au même système linéaire de degré  $n - 1$ , elles peuvent être prises comme supports de  $n$  vissages instantanés dont la succession ramène le corps à sa position initiale.

A tout système linéaire de vissages R. S. Ball associe le système de droites (de dimension  $n - 1$ ) formé par les axes des vis du système.

Considérons maintenant un solide assujetti à des liaisons bilatérales et soit  $V_1$  une vis quelconque.

Deux cas peuvent se présenter suivant qu'en l'instant  $t$  les liaisons imposées au solide permettent, ou non, un vissage instantané  $w_1$  ayant  $V_1$  comme support; d'ailleurs il est clair que si  $w_1$  est compatible avec les liaisons il en sera de même de  $\varrho_1 w_1$ .

Il existe au moins une vis  $V_1$  jouissant de cette propriété; s'il

116) Cf. F. Klein, Math. Ann. 2 (1870), p. 198.

n'en existe qu'une on dit que le solide possède un *degré de liberté* ou est à *liaisons complètes*. Si non, soit  $V_2$  une autre vis servant de support à un vissage permis par les liaisons; on pourra communiquer au solide tout vissage de la forme  $\varrho_1 w_1 + \varrho_2 w_2$ . En procédant ainsi de proche en proche on voit qu'à tout système de liaisons imposées à un solide correspond à chaque instant un système linéaire  $S$  de vissages instantanés

$$\varrho_1 w_1 + \varrho_2 w_2 + \dots + \varrho_n w_n$$

de degré  $n < 6$  et tel qu'en cet instant tout vissage de ce système soit compatible avec les liaisons, à l'exclusion de tout autre vissage. On dit alors que le système possède  $n$  *degrés de liberté*, ou que le déplacement du corps est à  $n$  *paramètres*.

Les vissages réciproques de l'ensemble des vissages de  $S$  forment un système linéaire de degré  $6 - n$  qu'on appelle *système réciproque* du premier. La considération de ce système permet à R. S. Ball d'énoncer d'une façon très simple les conditions d'équilibre d'un solide assujéti à des liaisons quelconques et soumis à l'action d'un visseur [cf. n° 73].

Pour terminer ce chapitre, nous étudierons les systèmes de vis de différents degrés. Rappelons encore une fois qu'avec R. S. Ball nous considérons seulement des déplacements infiniment petits.

**60. Systèmes de vis du deuxième degré. Le cylindroïde**<sup>117)</sup>. Si un corps a deux degrés de liberté, chacun de ses points peut se déplacer dans un plan. Dans le cas général où les axes des vis du système n'appartiennent pas tous à un même plan, il y a exception pour les points de deux droites réelles et distinctes  $D$  et  $\Delta$ . Les points de chacune de ces droites ne peuvent que tourner autour de l'autre. Tout déplacement possible du corps peut être envisagé comme réduit à deux rotations effectuées successivement autour des axes de rotation  $D$  et  $\Delta$ .

Le plan dans lequel un point peut se mouvoir est normal à la droite qui, menée par le point, rencontre les deux droites  $D$  et  $\Delta$ <sup>118)</sup>.

Si l'on se donne la direction du mouvement pour un seul des points du corps non situé sur les axes de rotation, le mouvement est entièrement déterminé.

Les droites invariablement liées au solide et qui peuvent être

117) H. E. Timerding, Geometrie der Kräfte, Leipzig 1908, p. 164/203.

118) J. Steiner, Ber. Akad. Berlin 1855, p. 256; C. F. Geiser, J. reine angew. Math. 90 (1880), p. 43. Voir aussi A. Mannheim, Bull. Soc. philomatique Paris (6) fasc. 3 (1866), p. 80.

associées à une droite  $g$  du solide pour former avec  $g$  un système d'axes instantanés de rotation dans un des mouvements possibles sont les génératrices d'un hyperboloïde réglé faisant partie du même système de génératrices que  $g$ . Cet hyperboloïde contient les droites  $D$  et  $\Delta$  dans le même système de génératrices. La droite  $g$  est donc sa propre conjuguée dans un des mouvements<sup>119)</sup>.

Si nous considérons le système linéaire de vis du second degré correspondant, système que nous appellerons un *faisceau* de vis (*Schraubenreihe*), les axes de ces vis sont les génératrices d'une surface réglée du troisième degré que nous avons étudiée au n° 39 sous le nom de *cylindroïde*.

Voici comment, au point de vue actuel, s'obtiendra l'équation réduite de cette surface:

Prenons comme axe des  $z$  la normale commune aux axes de deux des vis qui définissent le faisceau. Sauf dans certains cas particuliers, il est possible et d'une seule manière de choisir l'origine des coordonnées et les directions des axes  $Ox$  et  $Oy$  de manière que les coordonnées de tous les vissages appartenant au faisceau satisfassent aux équations

$$u = \alpha p, \quad v = \beta q, \quad w = 0, \quad r = 0.$$

où les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  ont les dimensions d'une longueur. C'est là la forme canonique des équations du faisceau.

Les coordonnées  $p, q$  du vissage peuvent être choisies arbitrairement; les quatre autres coordonnées en résultent d'après les équations ci-dessus. Les coordonnées  $p, q$  peuvent donc être regardées comme les paramètres qui définissent le mouvement instantané du corps en tenant compte des liaisons. L'énergie cinétique est une fonction homogène et quadratique de ces paramètres.

Les axes de toutes les vis du faisceau coupent l'axe  $Oz$  à angle droit; leur position est donnée par les équations

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{q}, \quad z = \frac{2mpq}{p^2 + q^2},$$

en posant  $m = -\frac{\alpha - \beta}{2}$ , et le paramètre de la vis correspondante, par

$$k = \frac{\alpha p^2 + \beta q^2}{p^2 + q^2}.$$

Si l'on pose

$$\frac{p}{q} = \cot \omega,$$

on a aussi

$$\frac{x}{y} = \cot \omega,$$

119) A. Thévenet, Thèse, Paris 1886, p. 86. Voir l'article IV 6.

en sorte que  $\omega$  mesure l'angle que fait l'axe de la vis avec le plan  $Oxz$ . On a alors, pour l'élévation  $z$  de l'axe de la vis au dessus du plan  $Oxy$ ,

$$z = m \sin 2\omega$$

et pour paramètre correspondant

$$k = k_0 - m \cos 2\omega,$$

en écrivant, pour abréger,

$$k_0 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta).$$

Enfin, l'équation du cylindroïde sera

$$z(x^2 + y^2) = 2mxy.$$

On voit que la surface est du troisième ordre et que tous les cylindroïdes sont semblables. Les dimensions du cylindroïde ne dépendent que de la longueur  $m$ .

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont de signes contraires, il existe deux valeurs de  $\omega$  pour lesquelles  $k$  s'annule. Chacun des axes correspondants tourne sans glissement autour de l'autre dans tous les vissages faisant partie du faisceau; on trouve donc ainsi les axes fixes des deux couples de rotations auxquelles les vissages du faisceau peuvent se réduire dans ce cas-là. On peut d'ailleurs le caractériser en disant que le faisceau contient alors des vissages de deux espèces (positifs et négatifs), tandis que dans tout autre cas il ne contient que des vissages d'une seule espèce.

Le maximé et le minimé de  $k$  correspondent à

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad \omega = \frac{\pi}{2};$$

ces valeurs donnent des vis dont les axes sont  $Ox$  et  $Oy$ . Nous appellerons ces axes les *axes principaux* du cylindroïde.

A chaque vis du faisceau en correspond une seconde qui a le même paramètre  $k$ . Nous appellerons *généatrices conjuguées* les axes de ces deux vis. Elles font avec les axes principaux des angles égaux et de sens contraires et leurs pieds sur l'axe des  $z$  sont symétriques par rapport à l'origine des coordonnées.

Comme  $k_0$  reste arbitraire pour un cylindroïde donné, on voit qu'à chaque cylindroïde appartient une infinité simple de faisceaux de vis. Les paramètres des vis de l'un quelconque de ces faisceaux se déduisent de ceux des vis de tout autre d'entre eux par l'addition d'une même constante.

La configuration du cylindroïde (fig. 16) se déduit clairement des équations données. Tout le cylindroïde est compris entre les deux plans parallèles à  $Oxy$  dont la distance à  $O$  est égale à  $m$ . L'axe des  $z$  est une ligne double; par chaque point de cette ligne double contenu entre

les deux plans limites passent deux autres *généatrices* de la surface. Le plan de ces deux *généatrices* est parallèle aux axes principaux.

Les deux plans limites contiennent deux *généatrices* confondues. Tout plan  $\Pi$  mené par la ligne double et qui fait avec le plan  $Oxz$  l'angle  $\omega$  contient une *généatrice* rectiligne qui est parallèle au plan  $Oxy$  et dont la cote par rapport à ce plan est

$$z = m \sin 2\omega.$$

On peut facilement se rendre compte de la distribution des paramètres sur les diverses *généatrices*. Rapportons le plan  $\Pi$  à deux axes rectangulaires  $Ok, Oz$  et considérons le point  $P$  de ce plan dont les coordonnées sont:

$$k = k_0 - m \cos 2\omega$$

et

$$z = m \sin 2\omega.$$

Ce point  $P$  est situé sur la *généatrice* du cylindroïde contenue dans  $\Pi$ , à une distance de l'axe égale au paramètre de la *généatrice*. D'autre part il appartient à la circonférence

$$(k - k_0)^2 + z^2 = m^2.$$

Concevons maintenant que le point  $P$  décrive la circonférence avec une vitesse angulaire  $\omega$  tandis que le plan  $\Pi$  tourne autour de la droite double avec une vitesse angulaire  $\frac{\omega}{2}$ , de manière que le point  $P$  arrive sur les axes principaux au moment où le plan contient ces axes, la perpendiculaire  $PM$  abaissée de  $P$  sur la droite double décrira le cylindroïde. Cette élégante construction est due à C. T. Lewis<sup>120</sup>.

La longueur  $PM$  représente le paramètre de la vis qui a pour axe la *généatrice*  $PM$ , d'où le nom d'*axe des paramètres* donné à la droite double du cylindroïde. Toute *généatrice* du cylindroïde a pour image un point du cercle appelé pour cette raison *cercle-image*<sup>121</sup>). Soient  $P$  et  $P_1$  les images de deux *généatrices*  $\gamma$  et  $\gamma_1$ .

<sup>120</sup>) Messenger math. 9 (1879), p. 7.

H. E. Timerding [Geometrie der Kräfte, Leipzig 1908, p. 170] emploie les mots *Parameterachse* et *Bildkreis*. Voir au sujet de cette représentation du cylindroïde, R. S. Ball, Theory of screws, (2<sup>e</sup> éd.) Cambridge 1900, p. 46/61.

<sup>121</sup>) R. S. Ball, Proc. Irish Acad. Dublin (2) 4 (1889), p. 29; Royal Irish Academy, Cunningham Memoirs n° 4 (1887), p. 1/44; Theory of screws, (2<sup>e</sup> éd.) 1900, p. 46 (chapitre V).

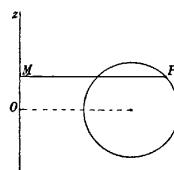


Fig. 16.

La plus courte distance de  $\gamma$  et  $\gamma_1$  est mesurée par la longueur de la projection de  $PP_1$  sur l'axe des paramètres tandis que l'angle de  $\gamma$  et  $\gamma_1$  est égal à l'angle inscrit dans l'un des arcs  $PP_1$ . La distance des deux perpendiculaires abaissées de deux points  $P$  et  $P_1$  sur l'axe des paramètres mesure la plus courte distance des deux génératrices correspondantes du cylindroïde, tandis que l'angle de ces deux dernières est égal à l'angle que l'on obtient en joignant un point de la circonférence du cercle-image aux deux extrémités de l'arc  $PP_1$ .

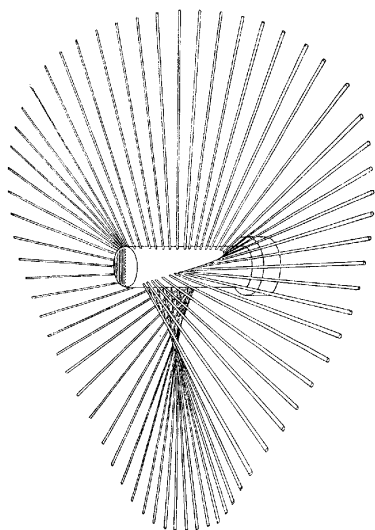


Fig. 17. Le cylindroïde.

La succession dans un ordre quelconque de trois vissages  $w_1, w_2, w_3$  appartenant au faisceau de vis défini plus haut ramène le corps à sa première position quand l'amplitude de chacun de ces vissages est proportionnelle au sinus de l'angle des axes des deux autres vissages, ou, ce qui revient au même, si ces amplitudes sont proportionnelles

aux côtés du triangle qui a pour sommets, sur le cercle-image, les points représentatifs des axes des vissages.

Soit  $\rho_i$  l'amplitude du vissage  $w_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), c'est-à-dire [n° 57] le nombre qui mesure  $\vec{\rho}_i$  sur le support de  $w_i$  (considéré comme un axe dirigé); on a  $\rho_i = \rho_i \cos \omega_i$ ,  $q_i = \rho_i \sin \omega_i$ ,  $\omega_i$  étant toujours l'angle de la direction positive du support de  $w_i$  avec  $Ox$ ; on a de plus [n° 60]  $z_i = m \sin 2\omega_i$ . Posons

$$d_1 = z_2 - z_3, \quad d_2 = z_3 - z_1, \quad d_3 = z_1 - z_2$$

de sorte que  $|d_i|$  mesure la distance des axes des vis autres que  $w_i$ ; posons aussi  $\varphi_1 = \omega_2 - \omega_3$ ,  $\varphi_2 = \omega_3 - \omega_1$ ,  $\varphi_3 = \omega_1 - \omega_2$  et désignons par  $k_i$  le paramètre de la vis qui supporte le vissage  $w_i$  et par  $2k_{12}$  le coefficient virtuel des vis qui supportent  $w_1$  et  $w_2$ .\*

On aura

$$\frac{\sin \varphi_1}{e_1} = \frac{\sin \varphi_2}{e_2} = \frac{\sin \varphi_3}{e_3}, \quad k_{33} = \frac{k_{11} e_1^2 + 2k_{12} e_1 e_2 + k_{22} e_2^2}{e_3^2},$$

et

$$-d_1 = \frac{e_1^2}{e_3^2} d_3 + \frac{e_1 e_2}{e_3^2} [d_3 \cos \varphi_3 + (k_{11} - k_{22}) \sin \varphi_3]$$

$$-d_2 = \frac{e_2^2}{e_3^2} d_3 + \frac{e_1 e_2}{e_3^2} [d_3 \cos \varphi_3 + (k_{22} - k_{11}) \sin \varphi_3]$$

équations compatibles avec la relation  $d_1 + d_2 + d_3 = 0$ . On peut d'ailleurs remplacer les deux dernières formules par d'autres plus simples

$$d_1 = \frac{e_1}{e_3} [d_3 \cos \varphi_2 - (k_{11} - k_{22}) \sin \varphi_2],$$

$$d_2 = \frac{e_2}{e_3} [d_3 \cos \varphi_1 - (k_{22} - k_{11}) \sin \varphi_1].*$$

Ces théorèmes sont la généralisation due à R. S. Ball des propositions classiques de la théorie des vecteurs liés. Ils permettent, comme on voit, de décomposer un vissage arbitraire d'amplitude  $\rho$  appartenant à un faisceau de vissages en deux vissages quelconques du faisceau, par exemple en deux vissages d'amplitudes  $\rho \cos \omega$  et  $\rho \sin \omega$  supportés par deux vis dont les axes respectifs sont les axes principaux et qui ont été désignées par R. S. Ball sous le nom de *vis principales*<sup>122)</sup>. Cette décomposition n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de celle du n° 58<sup>123)</sup>.\*

61. Systèmes de vis du troisième degré<sup>124)</sup>. Si un corps possède trois degrés de liberté, les coordonnées de ses points dépendent de

122) En anglais *principal screws* [R. S. Ball, *Theory of screws*<sup>82)</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) p. 21].

123) E. Wölffing et E. Lampe [Archiv Math. Phys. (3) 2 (1902), p. 228/9] ont réuni un grand nombre de renseignements bibliographiques concernant le cylindroïde.

124) R. S. Ball, *Trans. Irish Acad. (Dublin)* 26 (1875), p. 191 [1871]; 29 (1887/92), p. 247 [1888]; *Theory of screws*<sup>82)</sup>, (1<sup>re</sup> éd.) p. 116/45; (2<sup>e</sup> éd.) p. 170/217.

trois paramètres et un point quelconque du solide peut occuper une position arbitraire; en particulier ce point peut passer de sa position actuelle à une position quelconque infiniment voisine. Mais ce passage à la position voisine ne peut être obtenu que par un seul des déplacements possibles: si l'on fixe la direction dans laquelle un seul point se meut, le mouvement du corps est entièrement déterminé.

Les axes de coordonnées rectangulaires auxquels nous rapporterons le système peuvent être choisis, dans le cas général (c'est-à-dire exception faite de quelques dispositions particulières), de manière à être les axes de trois des vissages du système. Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  les paramètres des vis correspondantes; les coordonnées d'un vissage quelconque du système satisfont aux équations

$$u = \alpha p, \quad v = \beta q, \quad w = \gamma r.$$

Les coordonnées d'un vissage du système réciproque de vis, qui est également du troisième degré, vérifient les trois équations

$$u = -\alpha p, \quad v = -\beta q, \quad w = -\gamma r.$$

Les axes de toutes les vis du premier système auxquelles appartient un paramètre déterminé  $k$  sont sur une surface réglée du second ordre et constituent le premier système de génératrices de cette surface, tandis que les axes des vis du système réciproque ayant pour paramètre  $-k$  constituent le second système de génératrices.

Cette surface réglée a pour équation

$$(k - \alpha)x^2 + (k - \beta)y^2 + (k - \gamma)z^2 + (k - \alpha)(k - \beta)(k - \gamma) = 0.$$

Faisons varier  $k$ ; l'équation précédente représentera un faisceau de surfaces coaxiales, concentriques et admettant les mêmes plans de sections circulaires. Il résulte immédiatement des équations ponctuelle et tangentielle de chacune de ces surfaces que, par un point arbitraire, passent trois axes de vis du système et qu'un plan arbitraire contient deux axes de vis.\*

R. S. Ball distingue en particulier celle de ces surfaces qui correspond au paramètre  $k=0$  et qu'il appelle *pitch quadric*<sup>126)</sup> [surface-paramètre]; nous dirons plutôt: *surface fondamentale*. Cette surface détermine complètement le système de vis; elle a pour équation:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 + \alpha\beta\gamma = 0.$$

126) Theory of screws<sup>67)</sup>, (1<sup>re</sup> éd.) p. 119; (2<sup>e</sup> éd.) p. 172. La surface n'est pas autre chose que le lieu des droites communes aux complexes linéaires qui correspondent aux vis du système. L'étude de ce lieu avait été faite antérieurement par J. Plücker, Neue Geometrie des Raumes, Leipzig 1869, p. 130 [1868].

Chaque point de cette surface ne peut se déplacer que dans un plan.

On en déduit une représentation géométrique des liaisons imposées au solide en cet instant: soient en effet  $A, B, C$  trois points quelconques de la surface fondamentale  $Q$  n'appartenant pas tous trois à un même plan tangent de  $Q$  et soient  $(a), (b), (c)$  les trois génératrices de  $Q$  passant respectivement par  $A, B, C$  et appartenant au système réciproque de vis. Pour définir les liaisons du solide il suffira d'assujettir  $A, B, C$  à ne pas quitter trois plans normaux respectivement à  $(a), (b), (c)$ . Réciproquement, si trois points d'un solide sont assujettis à rester dans trois plans, on connaît par cela même trois génératrices de la surface fondamentale  $Q$  et par suite la surface  $Q$  et le système de vis<sup>126)</sup>.

D'après les équations données précédemment pour les coordonnées des vis du système, le paramètre de l'une quelconque de ces vis a pour expression

$$k = \frac{\alpha p^2 + \beta q^2 + \gamma r^2}{p^2 + q^2 + r^2}.$$

Le paramètre  $k$  d'une vis du système dont l'axe a une direction donnée est donc lié au demi-diamètre  $d$  parallèle de la surface fondamentale par la relation

$$k = -\frac{\alpha\beta\gamma}{d^2},$$

tandis que, pour le système réciproque, le paramètre  $k'$  appartenant à l'axe parallèle sera

$$k' = \frac{\alpha\beta\gamma}{d^2},$$

c'est-à-dire égal et de signe contraire au premier, comme on devait s'y attendre [n° 57].

Les axes de deux vis réciproques du système sont parallèles à deux diamètres conjugués de la surface fondamentale.

Les axes de trois vis du système deux à deux réciproques seront parallèles à trois diamètres conjugués de la surface fondamentale; d'où cette conséquence: la somme des inverses des paramètres de trois vis du système deux à deux réciproques est constante. En particulier les axes principaux de la surface sont les axes de trois vis du système deux à deux réciproques, et de paramètres  $\alpha, \beta, \gamma$ : R. S. Ball les nomme les *vis principales* du système.

On désigne le centre de la surface fondamentale sous le nom de

126) A. Mannheim, J. Éc. polyt. (1) cah. 43 (1870), p. 93.

centre du système de vis et l'on dit aussi que le système est centré. On peut déterminer le centre d'un système centré, sans connaître la surface fondamentale par le procédé suivant: Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux vis quelconques du système; leur perpendiculaire commune  $(p)$  appartient comme axe de vis au système réciproque et coupe à angle droit une infinité d'axes de vis du premier système. Ces axes sont les génératrices d'un cylindroïde dont  $(p)$  est la droite double. Parmi ces génératrices il y en a deux qui forment avec  $(p)$  un trièdre trirectangle; le plan de ces deux génératrices passe par un point indépendant de  $V_1$  et  $V_2$ ; ce point est précisément le centre du système.

Réciproquement les deux axes de vis du système de vis contenus dans un plan  $P$  mené par le centre du système sont rectangulaires.

Lorsque  $P$  tourne autour du centre, le point d'intersection des deux axes décrit une surface de Steiner. On sait que cette surface est du quatrième ordre et possède trois droites doubles concourantes; ici les trois droites doubles sont les trois axes principaux du système. Quant à la surface précédente elle a reçu le nom de *surface nodale* du système de vis.

De même, les pieds des perpendiculaires abaissées du centre du système de vis sur les axes des vis du système sont sur une surface de Steiner admettant les mêmes droites doubles que la précédente. On l'appelle la *surface podaire* du système.

L'équation de la surface nodale est

$$(\beta - \gamma)^2 y^2 z^2 + (\gamma - \alpha)^2 z^2 x^2 + (\alpha - \beta)^2 x^2 y^2 - (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)xyz = 0;$$

l'équation de la surface podaire est

$$(\beta - \gamma)^2 y^2 z^2 + (\gamma - \alpha)^2 z^2 x^2 + (\alpha - \beta)^2 x^2 y^2 + (\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)xyz = 0.$$

On voit que la surface podaire du système réciproque d'un système  $(S)$  est la surface nodale de ce système  $(S)$ ; et qu'inversement la surface nodale d'un système réciproque d'un système  $(S)$  est la surface podaire du système  $(S)$ <sup>127</sup>.

Les axes de vis du système  $(S)$  forment une congruence du troisième ordre et de la seconde classe: Chacun des axes touche la

127) Dans une lettre à R. S. Ball, Ch. J. Joly a généralisé ainsi ces propositions: le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque  $M$  sur les axes des vis d'un système est une *surface de Steiner* admettant pour droites doubles les axes des vis du système passant par  $M$ ; cette surface est également le lieu des intersections des axes du système réciproque contenu dans un plan variable passant par  $M$  [cf. R. S. Ball, *Theory of screws*<sup>128</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) p. 182, en note].

*surface focale* de la congruence en deux points et la coupe encore en deux points.

La surface focale est donc du sixième ordre; son équation est

$$(x^2 + y^2 + z^2 + \beta' \gamma' + \gamma' \alpha' + \alpha' \beta')^3 - 27(\alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' z^2 + \alpha' \beta' \gamma')^2 = 0,$$

où l'on a posé

$$\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = \gamma - \gamma' = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}.$$

La surface est de la quatrième classe et possède six points-coniques distribués deux à deux sur les axes principaux, mais dont deux seulement sont réels et ont pour coordonnées (dans l'hypothèse  $\alpha > \beta > \gamma > 0$ )

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= \pm \sqrt{-(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Elle possède, en outre, pour courbe triple l'ombilicale et pour ligne double la conique sphérique  $(\Sigma)$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + \beta' \gamma' + \gamma' \alpha' + \alpha' \beta' = 0 \\ \alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' z^2 + \alpha' \beta' \gamma' = 0; \end{cases}$$

de plus les deux plans tangents en un point quelconque  $M$  de  $(\Sigma)$  aux deux nappes de la surface passant par  $(\Sigma)$  sont confondus et les trois axes de vis qui passent par  $M$  sont confondus.

La surface focale du système réciproque de  $(S)$  est la même que celle de  $(S)$ . Les droites des deux congruences précédentes peuvent être représentées très simplement à l'aide des points d'un plan. R. S. Ball<sup>128</sup> s'est servi de cette méthode pour étudier les systèmes de vis du troisième degré.

**62. Systèmes de vis du quatrième degré.** Un système linéaire de vis du quatrième degré<sup>129</sup> est toujours réciproque d'un faisceau de vis. La droite double du cylindroïde qui appartient à ce dernier faisceau jouit de la propriété que le corps, en vertu de ses quatre degrés de liberté, peut tourner autour de cette droite et se déplacer parallèlement à elle d'une manière quelconque; c'est la seule droite jouissant de cette propriété. On peut l'appeler *l'axe fondamental du système du quatrième degré*.

128) Au sujet de la congruence des axes, voir E. Walsch [Sitzgsb. Akad. Wien 95 II (1887), p. 781], Ch. J. Joly [Trans. Irish Acad. (Dublin) 30 (1892/6), p. 597/9 (1894)], E. Study [Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 460/512], H. E. Timerding [Geometrie der Kräfte, Leipzig 1908, p. 208 et suiv.].

129) R. S. Ball, *Theory of screws*<sup>130</sup>, (1<sup>re</sup> éd.) p. 146; (2<sup>e</sup> éd.) p. 219.

Les axes de tous les vissages qu'on peut imprimer au corps forment un complexe quadratique spécial de droites, qui a été étudié par R. d'Emilio<sup>130</sup>). On trouve le même complexe en considérant toutes les droites qui rencontrent deux génératrices conjuguées [n° 60] du cylindroïde correspondant au faisceau de vis réciproque. Ce complexe quadratique se compose donc d'une infinité de congruences linéaires. Les vis qui appartiennent à l'une de ces congruences ont toutes le même paramètre et ce paramètre est égal et de signe contraire à celui des deux vis du faisceau réciproque qui ont pour axes les deux directrices de la congruence<sup>131</sup>). L'axe fondamental du système est rencontré par une double infinité de droites du complexe quadratique; par chacun de ses points passent des droites, en nombre simplement infini, situées dans deux plans menés par l'axe.

Choisissons comme axes des  $x$  et des  $y$  les axes des vis principales du faisceau réciproque, et soient  $\alpha, \beta$  les paramètres de ces vis. Le système linéaire de vis du quatrième degré sera représenté par les deux équations

$$u = -\alpha p, \quad v = -\beta q;$$

l'équation du complexe quadratique sera

$$(\alpha - \beta)XY + LY - MX = 0,$$

où  $X, Y, Z, L, M, N$  désignent les coordonnées plückériennes de la droite. La conique du complexe située dans un plan est une parabole; en d'autres termes, les droites infiniment éloignées font partie du complexe.

Pour étudier de plus près le système de vis, on peut représenter les différentes vis du système par les points de l'espace. C'est ce qu'on fait de la manière la plus simple en posant

$$x = \frac{p}{w}, \quad y = \frac{q}{w}, \quad z = \frac{r}{w}.$$

Alors les points  $(x, y, z)$  qui correspondent aux vis du système pour lesquelles le paramètre a la valeur  $k$  seront situés sur le paraboloidé

$$(k + \alpha)x^2 + (k + \beta)y^2 + kz^2 = z.$$

En particulier les points qui correspondent aux vis de paramètre nul

130) Atti Ist. Veneto (6) 3 (1884/5), p. 1135.

131) Tandis qu'en général les droites du complexe quadratique qui passent en un point  $P$  se trouvent sur un véritable cône du second degré, ce cône se décompose en deux plans pour les points  $P$  d'une certaine surface du quatrième ordre que F. Klein appelle la *surface des singularités du complexe*. Pour le complexe spécial étudié par R. d'Emilio, cette surface se décompose dans le cylindroïde et dans le plan de l'infini.

se trouveront sur la surface

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = z$$

que nous appellerons encore *surface fondamentale*.

Pour les points  $(x, y, z)$  et  $(x', y', z')$  qui correspondent à deux vis *réciproques* du système on a la relation simple que voici:

$$\alpha x x' + \beta y y' = \frac{1}{2}(z + z'),$$

qui met en évidence que ces points sont conjugués par rapport à la surface fondamentale<sup>132</sup>).

**63. Systèmes de vis du cinquième degré.** Les vis d'un système linéaire quelconque du cinquième degré<sup>133</sup>) sont toutes réciproques d'une vis déterminée  $\eta$ . Chaque droite de l'espace peut être prise comme axe d'une vis  $\theta$  du système.

Soient  $k_0$  le paramètre de la vis  $\eta$ ,  $d$  la plus courte distance des axes de  $\theta$  et  $\eta$ ,  $\varphi$  leur angle,  $k$  le paramètre de la vis  $\theta$ : on a, en annulant le coefficient virtuel des deux vis<sup>134</sup>),

$$k = d \tan \varphi - k_0.$$

A un paramètre  $k$  correspond un complexe linéaire de vis du système; le plan du complexe qui a pour foyer un point donné  $P$  contient la perpendiculaire abaissée du point  $P$  sur l'axe de la vis  $\eta$ . Soit  $\varphi$  son angle avec l'axe,  $d$  la distance de  $P$  à cet axe; on a

$$\tan \varphi = \frac{k + k_0}{d}.$$

W. Thomson et P. G. Tait<sup>135</sup>) ont imaginé un mécanisme à l'aide

132) Cf. H. E. Timerding, Geometrie der Kräfte, Leipzig 1908, p. 226 et suiv.

133) R. S. Ball, Theory of screws<sup>65</sup>), (1<sup>re</sup> éd.) p. 161; (2<sup>e</sup> éd.) p. 246.

134) Si l'on considère toutes les droites qui passent par un point fixe  $P$  situé à une distance  $h$  de  $\eta$  et si l'on porte sur ces droites à partir de  $P$  un segment égal à  $k_0 + k$ , le lieu de l'extrémité de ce segment est une surface du quatrième ordre. L'équation de cette surface s'obtient de la manière la plus simple si l'on prend comme origine des coordonnées le point  $P$ , pour axe des  $x$  une parallèle à l'axe de la vis  $\eta$ , et pour axe des  $y$  la perpendiculaire abaissée de  $P$  sur  $\eta$ . On a alors

$$d \tan \varphi = \frac{h x}{s},$$

et l'équation de la surface est

$$(x^2 + y^2 + z^2) s^2 = h^2 x^2.$$

R. S. Ball [Trans. Irish Acad. (Dublin) 25 (1875), p. 157 [1871]] appelle cette surface *pecténoïde* [id. p. 168] à cause de sa ressemblance avec les coquilles appelées „peigne“. L'axe des  $y$  est une ligne double de la surface, et les deux coquilles se coupent suivant cette droite.

135) Treatise on natural philosophy, (2<sup>e</sup> éd.) 1<sup>re</sup>, Cambridge 1879, p. 155.



duquel on peut, de la manière la plus générale, communiquer à un corps cinq degrés de liberté. Ce mécanisme se compose simplement de deux joints de Cardan (dés de Hooke) reliés à une vis autour de laquelle le corps peut prendre un mouvement hélicoïdal.

**64. Homographie dans les systèmes de vis.** Les besoins de la mécanique des corps solides ont amené *R. S. Ball*<sup>136)</sup> à étudier encore d'une manière plus approfondie la géométrie des vis, considérées comme éléments d'un espace supérieur et, en particulier, à envisager la *géométrie projective de cet espace*. On peut s'en rendre compte de la manière suivante:

Considérons deux vis  $\omega, \omega'$ ; soient  $k$  et  $k'$  leurs paramètres,  $[\omega, \omega']$  leur coefficient virtuel,  $(\omega, \omega')$  un angle défini par la formule<sup>137)</sup>

$$\cos(\omega, \omega') = \frac{[\omega, \omega']}{2\sqrt{k k'}}.$$

Appelons *rappart anharmonique* de quatre vis 1, 2, 3, 4 d'un faisceau prises dans cet ordre l'expression

$$\frac{\sin(1, 2) \cdot \sin(3, 4)}{\sin(1, 3) \cdot \sin(2, 4)}.$$

Nous dirons que deux faisceaux de vis sont *projectifs* lorsque le rapport anharmonique de quatre vis de l'un sera égal au rapport anharmonique des quatre vis correspondantes de l'autre. Deux systèmes quelconques de vis, d'égales dimensions, sont *reliés homographiquement* si les vis des deux systèmes se correspondent univoquement de manière que chaque faisceau de vis d'un système soit relié projectivement à un faisceau du second système. Il s'ensuit que les coordonnées des vis d'un système sont des fonctions linéaires et homogènes des coordonnées des vis de l'autre système: on en déduit l'expression analytique de la correspondance homographique.

Si l'on transforme homographiquement en lui-même l'ensemble de toutes les vis, il existe en général six vis que cette transformation n'altère pas et la transformation est complètement définie lorsque à sept vis non liées linéairement on fait correspondre sept vis données.

Considérons maintenant un *système quadratique de vis du cinquième degré* défini par une équation homogène du second degré

$$T = 0$$

entre les six coordonnées-vis  $\xi_\mu$ . *R. S. Ball* appelle *vis polaires* par

136) Proc. Irish Acad. [Dublin] (2) 3 [science] (1877/83), p. 435 [1881]; Theory of screws<sup>62)</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) p. 262.

137) Cf. *F. Klein*, Math. Ann. 5 (1872), p. 271.

rappart à ce système quadratique deux vis dont les coordonnées  $\theta_\mu$  et  $\xi_\mu$  sont reliées par l'équation bilinéaire

$$\sum_{\mu=1}^6 \xi_\mu \frac{\partial T}{\partial \theta_\mu} = 0.$$

A toutes les vis  $\xi$  ainsi définies correspond une seule vis réciproque  $\eta$ . Si les vis fondamentales qui servent de support aux coordonnées  $\xi$  et  $\theta$  forment un système coréciproque et si  $k_1, k_2, \dots$  sont leurs paramètres, les coordonnées  $\eta_\mu$  de la vis  $\eta$  sont données par l'équation

$$H\eta_\mu = \frac{1}{k_\mu} \frac{\partial T}{\partial \theta_\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6),$$

où  $H$  désigne un facteur commun réel. Ce facteur est choisi de telle sorte que la vis  $\eta$  puisse être considérée comme un vissage d'amplitude égale à 1 [n° 58].

On obtient de cette manière une correspondance homographique particulière que *R. S. Ball* appelle *homographie chiasique*. Son caractère distinctif consiste en ce que, si deux vis  $\eta$  et  $\eta'$  correspondent à deux vis  $\theta$  et  $\theta'$  et si  $\eta$  et  $\theta'$  sont réciproques,  $\eta'$  et  $\theta$  le sont aussi. Soit  $\eta'', \theta''$  un troisième couple de vis correspondantes, on démontre aisément la formule

$$[\eta\theta'][\eta'\theta''][\eta''\theta] = [\eta'\theta][\eta''\theta'][\eta\theta''],$$

les crochets désignant toujours des coefficients virtuels<sup>138)</sup>. D'après cette équation, le crochet  $[\eta'\theta]$  s'annule quand le crochet  $[\eta\theta'] = 0$ .

On peut, en général, sans que les vis fondamentales cessent d'être réciproques deux à deux, mettre l'expression fondamentale  $T$  sous la forme

$$T = \sum_{\mu=1}^6 \alpha_\mu \eta_\mu^2.$$

138) C'est ce qu'on démontre par exemple de la façon suivante: partons de la forme canonique des équations données dans le texte pour cette homographie, et écrivons la même formule pour une nouvelle paire de vis correspondantes  $\eta'$  et  $\theta'$

$$H\eta'_\mu = \frac{\alpha_\mu \theta'_\mu}{2k'_\mu},$$

on tire de ces deux formules l'identité [cf. n° 58]

$$H[\eta\theta'] = \frac{2H}{\theta'\theta} \sum_{\mu=1}^6 k_\mu \eta_\mu \theta'_\mu = \frac{2H'}{\theta'\theta} \sum_{\mu=1}^6 k'_\mu \eta'_\mu \theta_\mu = H'[\eta'\theta].*$$

Adjoignons-y deux équations analogues fournies par l'introduction d'une troisième paire de vis  $\eta'', \theta''$ , et multiplions membre à membre les trois équations; nous obtenons alors la formule du texte.

On a alors

$$H\eta_\mu = \frac{\alpha_\mu \theta_\mu}{2k_\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

et l'on voit ainsi que les vis qui se correspondent à elles-mêmes forment, dans le cas de l'homographie chiasique, un système coréiproque. Si la forme quadratique  $T$  est une forme définie, les vis qui se correspondent à elles-mêmes sont réelles<sup>139</sup>).

#### Caractères fondamentaux de la statique élémentaire.

**65. L'idée de force en statique.** L'origine de l'idée de force est étudiée dans l'article IV 1; nous rappellerons ici comment elle s'introduit en statique.

Lorsqu'on cherche à transporter un fardeau, à tendre un ressort, à maintenir un poids à la même hauteur ou un arc tendu, on constate que chaque fois il faut dépenser un certain effort musculaire. L'expérience nous apprend à distinguer ces efforts par leurs intensités, les directions dans lesquelles ils s'exercent et les points matériels sur lesquels ils sont appliqués. On va voir comment de cette notion d'effort, trop vague pour être utilisée dans les raisonnements, dérive la notion précise de force.

Considérons un corps solide  $(C)$  qui, sous l'influence d'une cause quelconque tend à quitter sa position d'équilibre: tel est le cas d'un pendule électrique dans le voisinage duquel on approche un conducteur chargé. En un point  $A$  du solide  $(C)$  fixons l'une des extrémités d'un fil inextensible  $AD$  et tirons sur l'autre extrémité  $D$  du fil de façon à maintenir le solide  $(C)$  en équilibre; ce résultat exige la dépense d'un certain effort dont nous allons préciser la direction, le point d'application et l'intensité.

Tout d'abord, l'habitude nous apprend à localiser notre effort dans une direction plus ou moins bien définie mais en tous cas très voisine de celle du fil; il est donc naturel de prendre la direction  $AD$  du fil tendu, susceptible d'être repérée avec précision, comme direction de notre effort. Pour une raison analogue nous prendrons le point  $A$  comme point d'application de l'effort exercé sur le corps par l'intermédiaire du fil. Quant à l'intensité de cet effort il sera commode de l'évaluer de la façon suivante:

Plaçons en un point  $B$  du fil  $AD$  [fig. 18] une poulie très petite sur laquelle pourra passer le fil; elle le divisera en deux brins  $AB$ ,  $BD$  dont le second pourra tourner autour de la poulie. Or, autant

<sup>139</sup>) Cette théorie trouve son emploi dans la cinématique des solides [IV 6].

qu'on peut en juger approximativement, l'expérience montre que, quelle que soit la position du brin  $BD$ , il faut toujours dépenser un effort de la même intensité pour maintenir le corps  $(C)$  en équilibre: il est donc loisible de supposer le second brin  $BD$  dirigé suivant le nadir, et alors on peut maintenir le corps  $(C)$  en équilibre sans aucun effort, à condition de fixer à l'extrémité  $D$  du fil un corps pesant de poids  $P$  convenablement choisi. L'expérience montre d'ailleurs que le poids  $P$  est d'autant plus grand que l'effort exercé précédemment est plus considérable: il est donc naturel de prendre le poids  $P$  comme mesure précise de l'intensité de l'effort.

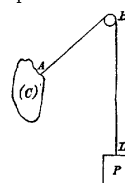


Fig. 18.

On peut encore maintenir l'équilibre du solide  $(C)$  en faisant agir d'autres causes qu'un effort musculaire: par exemple la tension d'un ressort ou d'un fil élastique, la compression d'un gaz, etc. Pour chacune de ces causes nous pourrions effectuer des mesures analogues à celles qui ont été faites pour l'effort musculaire.

Il se pourrait d'ailleurs que ces expériences soient quelquefois difficiles à réaliser; pourtant il nous suffit d'un concevoir la possibilité pour avoir le droit d'associer à tout effort musculaire, ou plus généralement, à toute cause susceptible du même effet, un point de l'espace, une direction et un nombre positif, autrement dit un *vecteur lié*.

Par définition, nous appellerons *force* le vecteur lié  $\vec{F}$ , d'origine  $A$ , dirigé suivant  $AB$  et de longueur  $P$ , et nous dirons qu'on a appliqué la force  $\vec{F}$  au point  $A$ .

D'après cette définition une force est une grandeur de même dimension qu'un poids (en particulier l'unité de force est l'unité de poids). Nous allons préciser les conséquences qui en résultent pour les coordonnées du vecteur  $\vec{F}$ .

**66. Coordonnées de la force.** Soient  $x, y, z$  les coordonnées du point  $A$ ;  $x', y', z'$  celles du point  $B$  et  $l$  la longueur du vecteur  $AB$ ; les coordonnées de la force seront

$$X = \frac{P}{l}(x' - x), \quad Y = \frac{P}{l}(y' - y), \quad Z = \frac{P}{l}(z' - z),$$

$$L = \frac{P}{l}(yz' - zy'), \quad M = \frac{P}{l}(zx' - xz'), \quad N = \frac{P}{l}(xy' - yx').$$

Si l'on remplace les unités de longueur et de poids par des unités respectivement  $\lambda$  fois et  $\mu$  fois plus petites, les coordonnées  $X, Y, Z$  seront multipliées par  $\mu$  et les coordonnées  $L, M, N$  par  $\lambda\mu$  tandis

que les coordonnées correspondantes du vecteur  $AB$  seront multipliées par  $\lambda$  et  $\lambda^2$ .\*

**67. Le principe fondamental de la statique. Le parallélogramme des forces.** On vient de voir que la force  $\vec{F}$  fournit une représentation claire et précise de l'effort. Montrons maintenant le rôle que joue en statique la théorie des vecteurs appliquée aux forces.

Tout d'abord le principe fondamental de la statique s'énonce très simplement dans le langage de la géométrie des vecteurs.

Considérons un ensemble quelconque de points matériels sollicités à quitter leurs positions d'équilibre et supposons qu'il soit possible de maintenir l'équilibre de l'un de ces points  $A$  en appliquant en  $A$  deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ . On peut se demander (ce qui n'est pas évident a priori) s'il existe une force  $\vec{F}$  unique appliquée en  $A$  qui soit équivalente à l'ensemble des deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ , c'est-à-dire telle qu'on puisse supprimer  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  en adjoignant  $\vec{F}$ , sans détruire l'équilibre.

La réponse à cette question est donnée par le principe fondamental de la statique qui permet en outre de construire le vecteur  $\vec{F}$ .

Nous énoncerons ce principe, appelé aussi *régle du parallélogramme des forces*, de la façon suivante:

*Pour qu'une force soit équivalente à un système formé par deux forces  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  appliquées en un même point d'un système matériel, il faut et il suffit qu'elle coïncide avec la somme géométrique de ces deux forces.\**

Plusieurs auteurs ont considéré ce principe comme une vérité expérimentale dont la vérification est aisée<sup>140)</sup>. C'est en se plaçant à ce point de vue que *P. Varignon*<sup>141)</sup> mettait la règle du parallélogramme à la base de la statique. Avant lui, *S. Stevin*<sup>142)</sup> avait déjà remarqué

140) *Ch. N. Peaucellier* a construit pour cela un appareil qui se trouve au Conservatoire national des Arts et Métiers, à Paris.

141) Nouvelle mécanique <sup>(4)</sup> 1, Paris 1725. A la même époque plusieurs géomètres se sont occupés de cette même question. Ainsi *J. Newton* [Philos. naturalis principia math., Londres 1687, Axiomes, Corollaire 1, p. 13; (2<sup>e</sup> éd.) Cambridge 1713, p. 13; éd. *S. Horsley* 2, Londres 1779, p. 15; éd. avec commentaires par *T. Le Seur* et *F. Jacquier* 1, Genève 1739, p. 24; trad. par *G. E. de Bréteuil*, marquise du Châtelet 1, Paris 1759, p. 19] a donné l'origine cinétique de la loi du parallélogramme déduit du parallélogramme des mouvements et *B. Lamy* fit paraître un mémoire [Nouvelle manière de démontrer les principaux théorèmes des éléments des mécaniques, Paris 1687] où la même loi était établie. Voir *J. L. Lagrange*, Mécanique analytique (1<sup>re</sup> éd.) 1, Paris 1788 (introduction); (2<sup>e</sup> éd.) 1, Paris 1811; (3<sup>e</sup> éd.) 1, Paris 1853, p. 107; Œuvres 11, Paris 1888, p. 11/9.

142) *De Beghinselen der Weegheconst*, Leyde 1586; Œuvres math., éd. *A. Girard*, Leyde 1634, p. 448/9.

qu'un point soumis à l'action de trois forces reste en équilibre, si ces trois forces sont dans un même plan et si, de plus, avec trois vecteurs équipollents à ces forces on peut former un triangle.

Mais ce fait expérimental est au fond très complexe et les efforts des géomètres modernes ont eu pour objet de l'analyser et de réduire autant que possible l'emprunt fait à l'expérience. Les uns ont admis en s'appuyant sur des raisons de symétrie, que la résultante de deux forces d'intensités égales appliquées en un même point est située dans le plan de leurs supports et dirigée suivant la bissectrice de leur angle; ils ont ensuite essayé de démontrer sans nouvel appel à l'expérience la règle du parallélogramme<sup>143)</sup>.

D'autres ont postulé que deux forces appliquées en un même point peuvent être remplacées d'une seule manière par une seule force et ont alors établi, par des considérations de symétrie et en s'appuyant, à l'exemple de *Daviet de Foncenex*<sup>144)</sup>, sur les propriétés des équations fonctionnelles, la règle du parallélogramme.

Des démonstrations de ce genre ont été données par *A. F. Möbius*<sup>145)</sup>, *L. Poincaré*<sup>146)</sup> et, après eux, par de nombreux géomètres.

*G. Darboux*<sup>147)</sup> a, en quelque sorte, mis fin à ces recherches en analysant d'une manière précise et complète le caractère logique et mécanique que doit avoir chaque démonstration et les hypothèses sur lesquelles elle repose nécessairement. Il est également impossible de démontrer le principe par le raisonnement et par l'expérience. Comme les autres principes de la Mécanique et de la Physique, on l'admet parce que toutes les conséquences vérifiables qu'on peut en déduire ont été confirmées par l'expérience.\*

**68. Le corps solide.** Il résulte du principe fondamental que toute proposition obtenue dans la théorie des vecteurs possède une signification statique. Ainsi, pour qu'un système de forces appliquées en un point  $A$  d'un corps ( $C$ ) soit en équilibre, il faut et il suffit que la somme géométrique des forces soit nulle.

Par définition, le corps solide de la statique élémentaire est un

143) La règle du parallélogramme des forces a été donnée au moyen-âge par *Léonard de Vinci*, comme l'a rappelé *P. Duhem* [Les origines de la statique, Paris 1905, p. 170/81; cf. Bibl. math. (3) 4 (1903), p. 338/43].\*

144) *Misc. Taurinensia* (Mélanges de philos. et de math. Soc. Turin) 2 (1760/1), éd. 1762, math. p. 299/322.\*

145) *Lehrbuch der Statik* 1, Leipzig 1837; Werke 3, Leipzig 1886, p. 43.\*

146) *Éléments de statique*, (1<sup>re</sup> éd.) Paris an XII; (2<sup>e</sup> éd.) Paris 1811, p. 31; (3<sup>e</sup> éd.) Paris 1848, p. 35.\*

147) *Bull. sc. math.* (1) 9 (1875), p. 281.\*

système de points matériels dont les distances mutuelles sont assujetties à rester invariables. Bien entendu, un tel corps est une abstraction, tout corps se déformant plus ou moins sous l'action des forces qui lui sont appliquées, et l'étude de ces déformations constitue l'objet de la théorie de l'élasticité. Mais, pour les corps appelés solides dans le langage courant, ces déformations sont très petites et peuvent être négligées dans une première étude, à condition que les forces agissantes données ne soient pas trop grandes. On peut donc les assimiler sans erreur sensible au solide idéal défini plus haut. Ce solide idéal peut à volonté être envisagé comme fini ou indéfini.\*

On admet comme évident le principe suivant: Deux forces d'intensités égales, appliquées en deux points quelconques du solide, mais assujetties à être directement opposées, se font équilibre. Il en résulte qu'une force appliquée en un point d'un solide est équivalente à toute autre force équilibrante de même support, ce qui légitime l'expression: *appliquer une force à un solide*. On peut dire qu'une force appliquée à un solide de l'espace  $Oxyz$  est un vecteur glissant de l'espace  $Oxyz$ .

Ce principe est pris quelquefois pour définition du corps solide; joint au principe fondamental il suffit à constituer la statique du solide, dont toutes les propositions sont les traductions en langage mécanique des propositions de la théorie des vecteurs glissants.\*

69. La loi du levier. Historiquement, c'est d'abord sous forme statique qu'ont été énoncées les propositions de la théorie des vecteurs, propositions dont les plus simples sont connues depuis très longtemps.

Ainsi la loi du levier, qui exprime la composition de deux forces parallèles, remonte à Archimède. On peut l'énoncer de la façon suivante:

Deux forces parallèles  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  ne formant pas un couple sont statiquement équivalentes au vecteur  $\vec{F}$  somme de  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  ayant pour support la droite définie au n° 21. De la construction même de ce vecteur il résulte que les moments d'un point de la résultante par rapport aux deux composantes sont égaux et de signes contraires; nous trouvons ainsi un cas particulier du théorème de Varignon énoncé au n° 18. Ce cas particulier était déjà connu au moyen-âge [cf. IV 1].\*

Il y a un cas d'exception, c'est celui où les deux forces parallèles ont des intensités égales et des sens contraires; leur ensemble constitue alors un couple de Poinso, ou simplement un couple [voir n° 21 et 24].

La loi du levier permet de traiter aisément le problème plus général de l'équilibre d'un solide soumis à l'action d'un nombre quel-

conque de forces parallèles. La solution de cette question trouve une application immédiate dans la détermination des centres de masses des solides homogènes [cf. IV 5, 2], qui est un des problèmes les plus importants de la statique et l'un des plus anciennement étudiés [cf. IV 1].\*

70. Systèmes de forces quelconques. Leur réduction à deux forces rectangulaires. Ce n'est que beaucoup plus tard et dans un passé relativement récent que le problème de l'équilibre d'un corps solide a été résolu dans le cas où les forces sont quelconques et c'est G. Monge<sup>148)</sup> qui en a donné la première solution.

Dans le langage de la théorie des vecteurs, la solution du problème précèdent s'énonce très simplement:

Pour qu'un solide soumis à l'action d'un système de forces quelconques soit en équilibre il faut et il suffit que les forces forment un système de vecteurs glissants équivalent à zéro. Autrement dit, pour que deux systèmes de forces, ou d'après une locution employée antérieurement, deux visseurs appliqués au solide, soient équivalents au point de vue statique [n° 67], il faut et il suffit que les visseurs soient équivalents au point de vue vectoriel.

En particulier, tout système de vecteurs peut être réduit et d'une infinité de façons, à un système équivalent formé de deux vecteurs [n° 25], par exemple à un système de deux vecteurs rectangulaires. C'est précisément sous cette forme que G. Monge a effectué la réduction d'un système de forces. Il y est parvenu directement de la façon suivante:\*

Soit  $\Pi$  un plan choisi arbitrairement sous la seule restriction qu'aucune des forces données ne lui soit parallèle. Il est loisible, d'après l'axiome du n° 68, de prendre le point d'application de chaque force dans le plan  $\Pi$ , ce qui permet de la décomposer en deux autres dont l'une est normale au plan  $\Pi$  et la seconde située dans ce plan; cette décomposition est toujours possible d'après le principe fondamental de la Statique [n° 67]. Or les forces normales au plan ont une résultante dont le pied  $P$  est parfaitement déterminé quand le plan  $\Pi$  l'est; de même les forces situées dans le plan  $\Pi$  ont en général une résultante unique  $\vec{p}$  (qui, exceptionnellement, peut être rejetée à l'infini). Ainsi le système de forces données est remplacé par deux forces l'une normale au plan, l'autre située dans le plan. À un plan donné  $\Pi$ , correspondent un point  $P$  et une droite ( $\vec{p}$ ), support de la résultante  $\vec{p}$ . Le point  $P$  n'est pas autre chose que le foyer du plan dans le complexe linéaire attaché au système de forces

148) Traité élémentaire de statique, (1<sup>re</sup> éd.) Paris 1786; (8<sup>e</sup> éd.) Paris 1846.

donné [n° 27]. La droite ( $p'$ ) est souvent désignée sous le nom de *caractéristique* du plan; c'est la conjuguée par rapport au complexe [n° 29] de la normale au plan menée par le pôle du plan. On voit combien *G. Monge* a été près de la découverte des propriétés des complexes linéaires, sans cependant y avoir complètement abouti.

**71. Réduction d'un système de forces à une résultante unique et à un couple.** Le problème, ainsi résolu par *G. Monge*, était repris bientôt après par *L. Poinsot*<sup>149</sup> qui obtenait des théorèmes très élégants en introduisant la célèbre notion de couple. Indiquons brièvement sa méthode:

En un point  $O$  choisi arbitrairement une fois pour toutes, appliquons une force  $\vec{F}_i$ , équipollente à l'une quelconque  $\vec{F}_i$  des forces données et soit  $\vec{F}_i''$  la force égale et directement opposée à  $\vec{F}_i$ . Le système donné est équivalent à l'ensemble des forces  $\vec{F}_i''$  appliquées en  $O$  et des couples  $(\vec{F}_i, \vec{F}_i'')$ ; les forces  $\vec{F}_i''$  se composent en une force unique  $\vec{R}$  qu'on appelle la *résultante de translation* et les couples  $(\vec{F}_i, \vec{F}_i'')$  en un couple unique de moment  $\vec{G}$  qui est le *couple résultant relatif au point O*. Enfin, *L. Poinsot* montre qu'on peut choisir le point  $O$  de telle sorte que le plan du couple soit perpendiculaire à la résultante de translation, autrement dit, de telle sorte que  $\vec{G}$  soit parallèle à  $\vec{R}$ . Le support de  $\vec{R}$  prend dans ce cas le nom d'*axe central du système* et jouit de propriétés indiquées précédemment [n° 22, 27, 28, 29].

Analytiquement: Soient  $X, Y, Z$  les projections de  $\vec{R}$  sur trois axes de coordonnées rectangulaires, et  $L, M, N$  celles de  $\vec{G}$ ; les six quantités  $X, Y, Z, L, M, N$  sont les six *coordonnées* du visseur. Pour qu'un corps solide soumis à l'action d'un visseur soit en équilibre, il faut et il suffit que les six coordonnées du visseur soient identiquement nulles.

**72. Généralisations des expressions analytiques des conditions d'équilibre.** Plus généralement, on peut écrire les conditions d'équilibre d'un solide en employant un système de coordonnées tétraédriques quelconque. L'origine de cette extension remonte à un théorème de *A. F. Möbius*<sup>150</sup> d'après lequel tout visseur peut être remplacé d'une façon unique par un système de six forces agissant suivant les arêtes d'un tétraèdre. Ce système de coordonnées a été employé fréquemment

<sup>149</sup> *Éléments de statique*, (1<sup>re</sup> éd.) Paris an XII; (11<sup>e</sup> éd.) publ. par *J. Bertrand*, Paris 1873; (12<sup>e</sup> éd.) Paris 1877.

<sup>150</sup> *Lehrbuch der Statik* 1, Leipzig 1837; *Werke* 3, Leipzig 1866, p. 138/43.

par *G. Battaglini*<sup>151</sup>; *H. G. Zeuthen*<sup>152</sup> s'en est servi également. D'ailleurs le système des coordonnées tétraédriques n'est lui-même qu'un cas particulier du système des coordonnées-vis générales.\*

Nous avons déjà parlé de ce dernier système de coordonnées [n° 58]; son origine remonte au fond aux recherches de *J. J. Sylvester*<sup>153</sup> qui s'était proposé de trouver les conditions auxquelles doivent satisfaire  $n$  lignes droites [pour  $n = 3, 4, 5, 6$ ] pour qu'elles puissent être prises comme supports de forces s'équilibrant sur un solide.\*

Ces conditions peuvent être énoncées très simplement de la façon suivante: il faut et il suffit que les droites soient concourantes pour  $n = 3$ , qu'elles appartiennent à un même système de génératrices d'une quadrique pour  $n = 4$ , qu'elles appartiennent à une congruence linéaire pour  $n = 5$  ou à un complexe linéaire pour  $n = 6$ .\*

Lorsque ces conditions sont satisfaites, *J. J. Sylvester* dit que les lignes droites sont *en involution* et, dans ce cas, les coordonnées de l'une quelconque des forces s'expriment linéairement en fonction des coordonnées correspondantes des  $n - 1$  autres forces; en d'autres termes, son support appartient au système linéaire déterminé par les  $n - 1$  autres supports.

Les résultats de *J. J. Sylvester* ont été généralisés par *G. Battaglini*<sup>154</sup> qui a appliqué la notion d'involution aux systèmes de visseurs, et par *W. Spottiswoode*<sup>155</sup> de la façon suivante: proposons-nous de diriger respectivement suivant  $n$  droites données ( $n > 6$ )  $n$  forces  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  formant un système équivalent à zéro. Pour  $n > 6$  les droites données ne sont assujetties à aucune condition; tout revient à calculer les rapports mutuels des intensités  $F_1, F_2, \dots, F_n$  des forces.\* Soit alors  $(ji)$  le produit de la plus courte distance des droites qui supportent  $\vec{F}_i$  et  $\vec{F}_j$  par le sinus de leur angle ou, si l'on veut, le *moment relatif* de ces deux droites, suivant l'expression de *A. Cayley*<sup>156</sup>. On aura, pour  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$(1i)P_1 + (2i)P_2 + \dots + (i-1,i)P_{i-1} + (i+1,i)P_{i+1} + \dots + (ni,i)P_n = 0;$$

<sup>151</sup> *Rendic. Accad. Napoli* (1) 8 (1869), p. 87/94; (1) 9 (1870), p. 89; *Giorn. mat.* (1) 10 (1872), p. 133, 207.\*

<sup>152</sup> *Math. Ann.* 1 (1869), p. 432; *O. Mohr* [Der Civilingenieur 34 (1888), p. 691/736] a supposé en particulier que les trois arêtes partant du même sommet d'un tétraèdre sont deux à deux rectangulaires et qu'elles ont la même longueur.\*

<sup>153</sup> *C. R. Acad. sc. Paris* 52 (1861), p. 741, 815.

<sup>154</sup> *Atti Accad. sc. fis. mat. (Naples)* (1) 4 (1869), mém. n° 14; *Rendic. Accad. Napoli* (1) 8 (1869), p. 166.

<sup>155</sup> *C. R. Acad. sc. Paris* 66 (1868), p. 97.

<sup>156</sup> *C. R. Acad. sc. Paris* 61 (1865), p. 829; *Papers* 5, Cambridge 1892, p. 540/1.

W. Spottiswoode en déduit qu'en appelant encore  $D$  le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 0 & (12) & \dots & (1n) \\ (21) & 0 & \dots & (2n) \\ (31) & (32) & \dots & (3n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n1) & (n2) & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

et  $D_{11}, D_{22}, \dots, D_{nn}$  les mineurs principaux de  $D$ , les rapports des intensités  $F_1, F_2, \dots, F_n$  des forces sont donnés par les égalités

$$F_1 : F_2 : \dots : F_n = \sqrt{D_{11}} : \sqrt{D_{22}} : \dots : \sqrt{D_{nn}},$$

où  $D_{11}, D_{22}, \dots, D_{nn}$  désignent les mineurs principaux de  $D$ . Bien entendu une des intensités  $F_i$  demeure arbitraire.

Le déterminant  $D$  est toujours nul pour  $n > 6$ . Il doit être nul pour  $n \leq 6$  afin que les  $n$  droites puissent être les supports de  $n$  forces en équilibre, ce qui coïncide avec un résultat antérieur de J. J. Sylvester<sup>157</sup>.

Dans le cas de quatre forces, on retrouve le résultat de A. F. Möbius<sup>158</sup>

$$\begin{aligned} & F_1 : F_2 : F_3 : F_4 \\ &= \sqrt{(23)(34)(42)} : \sqrt{(34)(41)(13)} : \sqrt{(41)(12)(24)} : \sqrt{(12)(23)(31)} \\ & \text{avec} \end{aligned}$$

$$\sqrt{(23)(14)} + \sqrt{(31)(24)} + \sqrt{(12)(34)} = 0;$$

on peut alors démontrer facilement le célèbre théorème de M. Chasles<sup>159</sup>: si l'on répartit d'une manière quelconque les quatre forces en deux groupes de deux forces, les deux tétraèdres qui ont chacun pour arêtes opposées les deux forces d'un groupe ont le même volume<sup>160</sup>.

**73. Principe du travail virtuel.** Dans les problèmes de statique qui se présentent en pratique, il s'agit de rechercher les conditions d'équilibre d'un ou de plusieurs solides assujettis à des liaisons.\*

Les propositions précédentes permettent toujours d'exprimer les conditions d'équilibre (dans l'hypothèse bien entendu où les liaisons sont sans frottement), mais elles présentent l'inconvénient de faire

<sup>157</sup> C. R. Acad. sc. Paris 52 (1861), p. 815; M. Chasles, id. 52 (1861), p. 745, 1042, 1094.

<sup>158</sup> Lehrbuch der Statik 1, Leipzig 1837, § 103; Werke 3, Leipzig 1886, p. 149.

<sup>159</sup> C'est le même théorème qu'au n° 27, à savoir que les deux systèmes formés l'un par deux quelconques des forces données et l'autre par deux forces égales et directement opposées aux deux autres sont équivalents.

<sup>160</sup> Pour le contenu de ce paragraphe, cf. R. Sturm, Ann. mat. pura appl. (2) 7 (1875/6), p. 217; F. Zuccheri, Atti Accad. Torino 12 (1876/7), p. 44.

intervenir les réactions dans les équations d'équilibre; il en résulte que pour obtenir les conditions d'équilibre, il est nécessaire d'effectuer l'élimination de ces réactions entre les équations.\*

On peut obtenir immédiatement les conditions d'équilibre cherchées, sans avoir à effectuer les éliminations précédentes, en appliquant le principe du travail virtuel que nous allons exposer.\*

Soit  $(S)$  un corps solide libre ou assujéti à des liaisons sans frottement. Ces liaisons sont supposées bilatérales (c'est-à-dire exprimables uniquement par des égalités) et indépendantes du temps  $t$ . Donnons au corps solide  $(S)$  un déplacement virtuel, c'est-à-dire un déplacement infiniment petit compatible avec les liaisons et soit  $\delta t$  l'intervalle de temps infiniment court pendant lequel il s'effectue. Ce déplacement peut être assimilé à un vissage infiniment petit de coordonnées

$$u \delta t, v \delta t, w \delta t, p \delta t, q \delta t, r \delta t$$

par rapport à trois axes rectangulaires fixes  $OX, OY, OZ$ . Soit alors  $A_i$  un point quelconque du solide  $(S)$  auquel est appliquée la force  $\vec{F}_i$ ; ce point subit un déplacement infiniment petit qui peut être assimilé à un vecteur  $\vec{\delta s}_i$  de longueur  $\delta s_i$ . On appelle travail virtuel de la force  $\vec{F}_i$  dans le déplacement  $\vec{\delta s}_i$  le produit intérieur des deux vecteurs  $\vec{F}_i$  et  $\vec{\delta s}_i$ . Ce travail, que l'on représente par  $\delta W_i$ , a donc pour expression

$$F_i \delta s_i \cos \alpha_i,$$

en désignant par  $F_i$  l'intensité de la force  $\vec{F}_i$  et par  $\alpha_i$  l'angle des directions des deux vecteurs  $\vec{F}_i$  et  $\vec{\delta s}_i$ .\*

Désignons encore par

$$X_i, Y_i, Z_i$$

les projections de  $\vec{F}_i$  sur les axes rectangulaires  $OX, OY, OZ$ , par

$$x_i, y_i, z_i$$

les coordonnées de  $A_i$ , et par

$$\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$$

les projections correspondantes de  $\vec{\delta s}_i$ ; on aura

$$\delta W_i = X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i.*$$

Cela étant, faisons la somme

$$\delta W = \sum_{(i)} \delta W_i$$

des travaux effectués par toutes les forces  $\vec{F}_i$  agissant sur le solide  $(S)$ ,

et remarquons qu'on a

$$\begin{aligned}\delta x_i &= (u - ry_i + qx_i)\delta t, \\ \delta y_i &= (v - px_i + rz_i)\delta t, \\ \delta z_i &= (w - qx_i + py_i)\delta t;\end{aligned}$$

il viendra<sup>161)</sup>

$$\begin{aligned}\delta W &= \sum_i (X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i) \\ &= [Xu + Yv + Zw + Lp + Mq + Nr]\delta t,\end{aligned}$$

en appelant  $X, Y, Z, L, M, N$  les coordonnées du visseur agissant sur le solide  $(S)$ .

Énonçons alors le principe du travail virtuel: pour que le solide  $(S)$  soit en équilibre dans la position  $(s)$  il faut et il suffit que l'on ait  $\delta W = 0$  pour tout déplacement virtuel de  $(S)$  effectué à partir de la position  $(s)$ .

Il est quelquefois utile d'avoir une expression géométrique de  $\delta W$ . Prenons l'axe du vissage virtuel pour axe des  $x$ ; soient

$$\delta \varphi = r \delta t$$

la rotation autour de  $Ox$  et

$$k \delta \varphi$$

la translation parallèle à  $Ox$  en lesquelles peut être décomposé le vissage; soit enfin  $\vec{G}$  le moment vectoriel résultant par rapport à  $Ox$  du système de forces données et  $\vec{F}$  le vecteur obtenu en projetant sur  $Ox$  la résultante générale du système. On aura, en désignant par  $G$  et  $F$  les nombres qui mesurent  $\vec{G}$  et  $\vec{F}$  sur  $Ox$ ,

$$\delta W = (G + kF)\delta \varphi.$$

Revenons maintenant à l'expression analytique du travail virtuel  $\delta W$ . Nous observerons tout d'abord qu'elle permet de retrouver immédiatement la règle de la composition des visseurs. En effet, si l'on fait agir simultanément sur un solide  $(S)$  deux visseurs de coordonnées respectives

$$X, Y, Z, L, M, N$$

et

$$X', Y', Z', L', M', N',$$

le travail virtuel effectué par l'ensemble de ces deux visseurs est

$$[(X+X')u + (Y+Y')v + (Z+Z')w + (L+L')p + (M+M')q + (N+N')r]\delta t.$$

<sup>161)</sup> Cf. *A. F. Mobius*, *Lehrbuch der Statik* 1, Leipzig 1837, § 181; *Werke* 3, Leipzig 1886, p. 260; *F. Klein*, *Math. Ann.* 4 (1871), p. 403.

L'ensemble de ces deux visseurs est donc équivalent au visseur unique de coordonnées

$$X + X', Y + Y', Z + Z', L + L', M + M', N + N'.$$

De plus on voit que l'expression analytique de  $\delta W$  est symétrique par rapport aux coordonnées du visseur agissant sur  $(S)$  et du vissage initial imprimé à  $(S)$ . Au facteur  $\delta t$  près c'est l'invariant simultané [n° 54] des systèmes

$$X, Y, Z, L, M, N$$

et

$$p, q, r, u, v, w.$$

L'équation

$$\delta W = 0$$

établit ainsi une correspondance remarquable entre un déplacement infiniment petit et un système de forces. Il faut observer d'ailleurs que les coordonnées associées dans cette correspondance sont, d'une part

$$X, Y, Z \text{ et } p, q, r,$$

d'autre part

$$L, M, N \text{ et } u, v, w;$$

autrement dit: à la résultante générale du système de forces correspond la rotation  $p, q, r$  et au couple résultant  $L, M, N$  correspond la translation  $u, v, w$ . Tout cela est bien conforme aux conclusions des n° 50 et 53; nous reviendrons d'ailleurs sur ce point.

La relation établie par l'équation

$$\delta W = 0$$

entre les déplacements infiniment petits et les systèmes de forces paraît avoir été signalée pour la première fois par *O. Rodrigues*<sup>162)</sup>.

Suivant une expression empruntée par *F. Klein* à la théorie des formes algébriques, c'est une relation de grandeurs *contragrédiennes*. Cette relation prend une signification remarquable dans le langage de la théorie de *R. S. Ball*<sup>163)</sup>.

Soit  $(S)$  un solide libre ou soumis à des liaisons bilatérales qui lui laissent précisément  $n$  degrés de liberté (où  $n < 6$ ) et soit  $(\sigma)$  le système linéaire (d'ordre  $n$ ) de vissages infiniment petits qui peuvent être imprimés au solide  $(S)$  à partir d'une position quelconque  $(s)$  [n° 59].

<sup>162)</sup> *J. math. pures appl.* (1) 5 (1840), p. 436.

<sup>163)</sup> *Theory of screws*<sup>62)</sup>, (1<sup>re</sup> éd.) p. 41, (2<sup>e</sup> éd.) p. 64. Cf. *I. Somov*, *Račionálnaja Mehanika* 1, S<sup>t</sup> Pétersbourg 1871; 2<sup>e</sup>, S<sup>t</sup> Pétersbourg 1872; 2<sup>e</sup> (posth.), S<sup>t</sup> Pétersbourg 1877; trad. par *A. Ziwet*, *Theoretische Mechanik* 1, Leipzig 1878, p. 371, 390; *I. (J.) Somov*, *Bull. Acad. Pétersb.* (3) 18 (1873), col. 162.

Pour que  $(S)$  soit en équilibre dans la position  $(s)$  sous l'action d'un visseur  $\sigma'$ , il faut et il suffit que  $\sigma'$  appartienne au système  $(\sigma')$  réciproque de  $(\sigma)$ . Il en résulte donc qu'inversement, si le système de visseurs compatibles avec les liaisons dans la position  $(s)$  est  $(\sigma')$ , le système de tous les visseurs en équilibre sur  $(S)$  est précisément  $(\sigma)$ . Cette proposition très générale embrasse tous les cas particuliers traités par la statique élémentaire du solide et fournit une belle représentation mécanique des systèmes réciproques.

**74. Le viriel.** La somme des travaux virtuels effectués par toutes les forces d'un visseur ou, plus brièvement, le travail virtuel d'un visseur est la variation infiniment petite de l'expression<sup>164</sup>)

$$V_0 = \sum_{i=1}^{i=n} (X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i),$$

dans laquelle la force  $\vec{F}_i$  est supposée constante en grandeur et direction, et invariablement liée à son point d'application  $(x_i, y_i, z_i)$ . On peut aussi écrire

$$V_0 = \sum_{i=1}^{i=n} F_i r_i \cos(\vec{F}_i, \vec{r}_i),$$

où  $r_i$  désigne la distance à l'origine du point  $(x_i, y_i, z_i)$ .

L'expression  $V_0$  s'appelle le *viriel* de forces d'après R. Clausius<sup>165</sup>) qui s'est servi de cette notion pour déduire de la théorie cinétique des gaz le second principe de la Thermodynamique.

Avant lui F. Schuevins<sup>166</sup>) avait développé les propriétés essentielles du viriel qu'il étudia sous le nom de moment de déplacement (*Flichmoment*).

Nous allons simplifier l'expression analytique du viriel.

D'abord pour calculer  $\delta V_0$  il est loisible de substituer à  $V_0$  toute autre expression n'en différant que par une constante par rapport aux coordonnées  $x_i, y_i, z_i$ , en particulier l'expression

$$V = \sum_{i=1}^{i=n} [X_i(x_i - \xi) + Y_i(y_i - \eta) + Z_i(z_i - \zeta)] = V_0 - [X\xi + Y\eta + Z\zeta],$$

<sup>164</sup>) Cf. J. L. Lagrange, Mécanique analytique, (2<sup>e</sup> éd.) 1, Paris 1811, p. 66/73; Œuvres 11, Paris 1888, p. 69/76. Dans l'article IV 1 cette expression se rencontre avec le facteur  $-\frac{1}{2}$ .

<sup>165</sup>) C. R. Acad. sc. Paris 70 (1870), p. 1315. Cf. l'article IV 1.

<sup>166</sup>) J. reine angew. Math. 38 (1849), p. 77.

$X, Y, Z$  désignant, comme précédemment, les composantes de la résultante générale  $\vec{R}$  que nous supposons d'abord différente de zéro. Nous appellerons cette quantité  $V$  le *viriel* au point  $\xi, \eta, \zeta$ ;  $V_0$  est alors le viriel à l'origine.

Cela étant, considérons  $\xi, \eta, \zeta$  comme des coordonnées courantes; on voit que le viriel prend la même valeur pour tous les points d'un plan normal à la résultante générale ou, ce qui revient au même, à l'axe central. Il existe, en particulier, un plan pour lequel le viriel est nul; la trace de l'axe central sur ce plan a été appelée par R. W. Hamilton<sup>167</sup>) le *centre* du système de forces. Les coordonnées de ce point sont données par les équations

$$\begin{cases} R^2 x_0 = V_0 X + MZ - NY, \\ R^2 y_0 = V_0 Y + NX - LZ, \\ R^2 z_0 = V_0 Z + LY - MX, \end{cases}$$

où  $V_0$  a la valeur donnée plus haut correspondant à  $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0$  c'est-à-dire à l'origine des coordonnées.

Dans le cas où toutes les forces sont parallèles, ce centre coïncide avec le centre des distances proportionnelles.

Le viriel  $V$  étant nul au point  $x_0, y_0, z_0$ , on a

$$V_0 = Xx_0 + Yy_0 + Zz_0$$

et le viriel  $V$  peut s'écrire sous la forme remarquablement simple

$$V = X(x_0 - \xi) + Y(y_0 - \eta) + Z(z_0 - \zeta);$$

autrement dit, le viriel  $V$  en tout point de l'espace est égal au viriel de la résultante de translation appliquée au centre de W. R. Hamilton. Pour tout point d'un plan normal à cette résultante et qui la coupe à une distance  $p$  du centre, le viriel a pour valeur

$$p \cdot R.$$

Supposons maintenant que la résultante générale soit nulle en sorte que le système soit statiquement équivalent à un couple; on a alors

$$X = 0, Y = 0, Z = 0, R = 0, L^2 + M^2 + N^2 > 0;$$

le viriel est constant pour tous les points de l'espace, et le centre de W. R. Hamilton est indéterminé; il est alors facile de trouver un couple dont les forces soient appliquées en des points  $A, B$  donnés arbitrairement (assujettis toutefois à la condition que  $\vec{AB}$  soit normal au mo-

<sup>167</sup>) Elements of quaternions<sup>2</sup>), p. 708/9; (2<sup>e</sup> éd.) 2, Londres 1901, p. 285/6; trad. P. Glan 2, Leipzig 1884, p. 346/7.



ment résultant du système) et tel en outre que son viriel soit égal à celui du système de forces donné. Il suffira pour cela de s'appuyer sur l'expression géométrique que prend alors  $\mathbf{V}$ .

Soient  $\vec{F}, \vec{F}'$  deux forces d'intensité commune  $F$  formant un couple équivalent (au point de vue vectoriel) au système donné et appliquées respectivement aux points  $A$  et  $B$ ; appelons *bras de levier* du couple, l'un des vecteurs  $\vec{AB}$  ou  $\vec{BA}$ , le premier par exemple; soient enfin  $r$  la longueur du bras de levier et  $\omega$  son angle avec la force  $\vec{F}$ . Le viriel du couple est alors égal à  $F r \cos \omega$ , et par suite le viriel  $\mathbf{V}$  du système est donné par la formule

$$\mathbf{V} = R r \cos \omega,$$

équation qui donne  $Q \cos \omega$ .

En particulier si l'on a  $\mathbf{V} = 0$  et  $L^2 + M^2 + N^2$  différent de zéro, le couple sera *orthogonal*, autrement dit le bras de levier sera normal aux forces du couple.

*Retour au cas général.* Revenons au cas général où  $X^2 + Y^2 + Z^2$  et  $L^2 + M^2 + N^2$  sont positifs (non nuls). On peut toujours substituer au système de forces ou au visseur correspondant un système formé par une force unique appliquée au centre de *W. R. Hamilton* et par un couple orthogonal situé dans un plan normal à cette force, et cela de telle sorte que le nouveau système ait même viriel que le système initial en un point quelconque de l'espace et lui soit équivalent au point de vue vectoriel. En effet l'ensemble constitué par la résultante de translation appliquée au centre de *W. R. Hamilton* et par un couple de moments  $L, M, N$  et de viriel nul (couple orthogonal) répond à la question.

Nous signalerons encore les rapports de la théorie précédente avec la théorie des quaternions de *W. R. Hamilton*. Soient

$$\vec{r}_i$$

le vecteur mené de l'origine des coordonnées au point d'application

$$(x_i, y_i, z_i)$$

de la force

$$\vec{F}_i;$$

la partie scalaire

$$S q$$

du quaternion

$$q = \vec{r}_1 \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \vec{F}_3 + \vec{r}_4 \vec{F}_4$$

sera le viriel changé de signe du système donné, et la partie vectorielle

$$V q$$

du même quaternion sera le moment résultant du système par rapport à l'origine.

Considérons, en particulier, le cas du couple. A tout couple correspond un quaternion

$$- \mathbf{V} + L i + M j + N k,$$

$L, M, N$  étant les composantes suivant les axes du moment du couple et  $\mathbf{V}$  étant le viriel du couple.

Inversement, à tout quaternion

$$- \mathbf{V} + L i + M j + N k$$

correspondent une infinité de couples assujettis à la condition d'avoir pour viriel  $\mathbf{V}$  et pour moment le vecteur libre de projections  $L, M, N$ .

En particulier, soit  $\vec{AB}$  un vecteur normal à ce moment. Il existe un et un seul couple admettant le moment précédent, ayant  $\mathbf{V}$  pour viriel et  $\vec{AB}$  pour bras de levier. On obtient alors une représentation géométrique remarquable de l'addition de deux quaternions quelconques

$$\begin{aligned} K + L i + M j + N k, \\ K' + L' i + M' j + N' k; \end{aligned}$$

construisons les couples correspondant à ces quaternions et admettant le même bras de levier  $\vec{AB}$ , nécessairement orthogonal aux directions

$$(L, M, N) \text{ et } (L', M', N'),$$

et composons les forces appliquées respectivement en  $A$  et en  $B$ . Le système résultant est encore un couple ayant le même bras de levier que les deux précédents et admettant pour quaternion correspondant la somme

$$K + K' + (L + L')i + (M + M')j + (N + N')k$$

des deux premiers<sup>168</sup>).

**75. Interprétations erronées de l'analogie entre les forces et les mouvements infiniment petits.** Le rapprochement signalé précédemment [n° 73] entre les systèmes de forces et les déplacements infiniment petits n'a pas toujours été établi correctement. La source des erreurs d'interprétation commises réside dans l'hypothèse implicite d'une relation de cause à effet. Voici comment:

Soient

$$X, Y, Z, L, M, N$$

les coordonnées d'un système de percussions rapportées aux axes prin-

168) Cf. *K. Heun*, *Z. Math. Phys.* 47 (1902), p. 104/25.

cipaux d'inertie d'un solide libre partant du repos à l'instant  $t$ ; soient

$$p, q, r, u, v, w$$

les coordonnées du vissage développé à cet instant  $t$  par ces percussions; on a les relations

$$X = \mu u, \quad Y = \mu v, \quad Z = \mu w, \quad L = \mu a^2 p, \quad M = \mu b^2 q, \quad N = \mu c^2 r$$

dans lesquelles  $\mu$  est la masse totale du solide,  $a, b, c$  les demi-axes de l'ellipsoïde d'inertie. Il est visible qu'une percussion unique appliquée au centre de gravité du solide (origine du système de référence) imprime au corps libre une vitesse de translation dans la direction de la percussion et qu'un couple de percussions tend seulement à le faire tourner autour de ce centre de gravité. Faisons donc correspondre les percussions ou forces instantanées aux mouvements comme une cause à un effet, si tant est qu'une telle relation soit possible; la force correspondra à une translation, le couple à une rotation, ce qui est en contradiction avec les résultats des nos 50, 53, 73. L'analogie étudiée n'a donc rien à voir avec cet enchaînement de cause à effet qui doit être laissé à la cinétique [voir IV 8].

*J. Plücker*<sup>169</sup>) commet précisément une faute de même ordre lorsqu'il interprète géométriquement l'analogie entre les forces et les rotations, en se bornant à remarquer que chaque force est déterminée par deux points de la droite qui la porte, dont la distance est proportionnelle à l'intensité de la force, de même qu'une rotation est déterminée par la connaissance de deux plans dont l'un doit être amené à coïncider avec l'autre. Il fait alors correspondre l'intersection des deux plans, comme axe du mouvement, à la droite qui joint les deux points, considérée comme ligne d'action de la force. Mais il eût au moins fallu ajouter que l'angle de rotation était infiniment petit; c'est ce que *J. Plücker* a omis de faire. On sait que le défaut métrique de cette dualité dans le domaine des grandeurs finies ne peut disparaître que si l'on fait intervenir la métrique générale projective, qui substitue à l'ombilicale une surface quelconque de seconde classe ou, en d'autres termes, remplace l'espace euclidien par un espace à courbure constante, positive ou négative [cf. III 1, n° 30].

La cinématique et la statique des corps solides, qui s'établissent sur ces bases, ont été indiquées par *F. Klein*<sup>170</sup>) et développées par *F. Lindemann*<sup>171</sup>). De très nombreux travaux<sup>172</sup>) sont venus plus tard

169) *Philos. Trans. London* 156 (1866), p. 361.

170) *Math. Ann.* 4 (1871), p. 408.

171) *Math. Ann.* 7 (1874), p. 56.

172) On en trouve l'indication dans *R. S. Ball, Theorie of screws*<sup>173</sup>), (1<sup>re</sup> éd.)

compléter ce premier résultat et ainsi l'erreur de *J. Plücker* est devenue la source de nombreuses et belles recherches parmi lesquelles il faut citer tout d'abord celles de *E. Study*<sup>173</sup>).

#### IV. Astatique.

##### Introduction géométrique: Surfaces homofocales.

Les trois numéros suivants renferment des théorèmes de géométrie bien connus qui trouveront leur application dans la fin de cet article ainsi que dans l'article suivant IV 5 sur la géométrie des masses. Pour de plus amples détails et pour les indications bibliographiques on se reportera aux articles III 7 et III 22.

##### 76. Équations tangentielles. Systèmes antipolaires. Soit

$$ux + vy + wz + h = 0$$

l'équation d'un plan (II); si l'on astreint les coordonnées  $u, v, w, h$  du plan (II) à vérifier une relation

$$\varphi(u, v, w, h) = 0,$$

homogène et du second degré en  $u, v, w, h$ , le plan (II) sera assujéti à envelopper une quadrique (S) qui peut dégénérer en une conique ou en un système de deux points distincts ou confondus; par définition l'équation

$$\varphi(u, v, w, h) = 0$$

est l'équation tangentielle de la quadrique (S) (dégénérée ou non).\*

Si l'on a, par exemple,

$$\varphi = Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - h^2,$$

la surface-enveloppe (S) est une quadrique à centre rapportée à ses axes

$$(1) \quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1,$$

dont l'équation tangentielle est

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 - h^2 = 0.$$

Soit encore

$$\varphi = Au^2 + Bv^2 - h^2;$$

le plan de coordonnées tangentielles ( $u, v, w, h$ ) sera tangent à la conique

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0, \quad z = 0.*$$

appendice 1, p. 177/92; (2<sup>e</sup> éd.) p. 510/39 (notes bibliographiques). On trouve aussi un index bibliographique sur ce sujet dans *A. P. Kotelnikov, Proektivnaja teorija vektorov [Izvestija Kazanskago fiz.-mat.-Obščestva (Bull. Soc. phys.-math. Kazan) (2) 8 (1898), appendice des nos 2, 3, 4 (avec pagination spéciale); (2) 9 (1899), appendice des nos 1, 2 (avec suite de la pagination spéciale); (2) 9 (1899), n° 3, p. 1/38.\**

173) Voir, par exemple, *E. Study, Geometrie der Dynamen*, Leipzig 1903.

Soit enfin

$$\varphi = u^2 + v^2 + w^2;$$

le plan de coordonnées tangentielles  $(u, v, w, h)$  sera tangent à l'ombilicale  $(\gamma)$ .

Toute relation

$$u' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + v' \frac{\partial \varphi}{\partial v} + w' \frac{\partial \varphi}{\partial w} + h' \frac{\partial \varphi}{\partial h} = 0$$

entre les coordonnées tangentielles  $(u, v, w, h)$  et  $(u', v', w', h')$  de deux plans  $(II)$  et  $(II')$  signifie que les deux plans sont conjugués par rapport à  $(S)$ . Par exemple, si  $(S)$  se réduit à  $(\gamma)$ , les deux plans sont rectangulaires.

Supposons que les coefficients de  $\varphi$  soient réels, mais que  $(S)$  soit imaginaire. On peut encore interpréter à l'aide d'éléments géométriques réels la relation entre les coordonnées de  $(II)$  et celles de  $(II')$ . En effet, soit  $O$  le centre de  $(S)$ , et soit  $(S')$  la quadrique réelle (dégénérée ou non) de centre  $O$ , homothétique à  $(S)$ , le rapport d'homothétie étant  $i = \sqrt{-1}$ ; le plan  $(II)$  [ou  $(II')$ ] est symétrique par rapport à  $O$  d'un plan  $(II_1)$  [ou  $(II_1')$ ] conjugué de  $(II')$  [ou  $(II)$ ] par rapport à  $(S')$ . Soit encore  $P$  le pôle de  $(II)$  par rapport à  $(S)$ ;  $P$  est le symétrique, par rapport à  $O$ , du pôle de  $(II)$  par rapport à  $(S')$ .\*

On dit quelquefois que le point  $P$  et le plan  $(II)$  sont *antipolaires* par rapport à  $(S')$ . De même un triangle réel conjugué par rapport à  $(S)$  est dit *antipolaire* par rapport à  $(S')$ , etc.

#### 77. Quadriques homofocales<sup>174</sup>. Considérons l'équation

$$\varphi(u, v, w, h) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

où  $\varphi$  est une forme quadratique en  $u, v, w, h$  et où  $\lambda$  désigne un paramètre variable. Nous supposons d'abord que  $\varphi$  dépende effectivement de  $h$ ; par suite l'équation précédente représente un faisceau linéaire (tangential) de quadriques  $(\Sigma)$  qui comprend au moins une quadrique dégénérée, l'ombilicale  $(\gamma)$ .\* Ces surfaces ont été appelées *homofocales*.

La substitution de  $\lambda + \lambda_0$  à  $\lambda$  permet de remplacer  $\varphi$  par

$$\varphi(u, v, w, h) + \lambda_0(u^2 + v^2 + w^2);$$

nous pouvons donc supposer que le discriminant de  $\varphi$  est nul; l'équation

$$\varphi(u, v, w, h) = 0$$

174) Ch. Dupin, *Développements de géométrie*, Paris 1813, p. 269; J. P. M. Binet, *J. Ec. polyt.* (1) cah. 16 (1813), p. 58 et suiv.

représente alors une conique que nous supposons d'abord non dégénérée. Il y aura encore deux cas à distinguer suivant que cette conique possède ou non un centre à distance finie.\*

a. Si la conique  $\varphi = 0$  possède un centre unique à distance finie, on peut la rapporter à ses axes de symétrie; l'expression  $u^2 + v^2 + w^2$  restant invariante (à un facteur près) dans tout déplacement des axes de coordonnées, on voit sans peine que l'équation tangentielle des surfaces  $(\Sigma)$  peut s'écrire

$$au^2 + bv^2 + cw^2 - h^2 + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0;$$

l'équation ponctuelle des mêmes surfaces homofocales est donc, pour  $\lambda$  différent de  $-a, -b, -c$ ,

$$\frac{x^2}{a+\lambda} + \frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} = 1.$$

Toutes ces surfaces ont même centre et mêmes axes.

Pour  $\lambda = -a, -b, -c$  les surfaces  $(\Sigma)$  dégénèrent respectivement en trois coniques

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{b-a} + \frac{z^2}{c-a} = 1,$$

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{c-b} + \frac{z^2}{a-b} = 1,$$

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a-c} + \frac{y^2}{b-c} = 1$$

situées dans les plans de coordonnées. Si l'on suppose, comme il est permis,  $a > b > c$ , la première de ces coniques est imaginaire, la seconde est une hyperbole et la troisième une ellipse. On les appelle les *courbes focales* du faisceau; chacune d'elles passe par deux foyers (réels ou imaginaires) de chacune des deux autres.

b. Supposons maintenant que la conique  $\varphi = 0$  soit une parabole. En procédant comme dans le cas (a), on ramènera l'équation tangentielle des surfaces  $(\Sigma)$  à la forme

$$(a+\lambda)u^2 + (b+\lambda)v^2 + (c+\lambda)w^2 - 2uh = 0;$$

l'équation ponctuelle correspondante est, pour  $\lambda$  différent de  $-b$  et de  $-c$ ,

$$\frac{y^2}{b+\lambda} + \frac{z^2}{c+\lambda} - 2x - a - \lambda = 0.$$

Toutes ces surfaces sont des paraboloides admettant les mêmes plans principaux.

Pour  $\lambda = -b$  et pour  $\lambda = -c$ , les surfaces  $(\Sigma)$  dégénèrent en deux paraboles réelles situées dans les plans  $y = 0$  et  $z = 0$ : leur axe commun est  $Ox$  et chacune d'elles passe par le foyer de l'autre; on les appelle encore les *focales* du faisceau.

c. Passons au cas où l'équation  $\varphi = 0$  représente deux points  $A$  et  $B$  distincts (dont l'un au moins est nécessairement à distance finie). Les surfaces homofocales ( $\Sigma$ ) se composent de quadriques de révolution autour de la droite  $AB$ ; leurs méridiennes admettront  $A$  et  $B$  pour foyers. Comme cas limite, si  $A$  et  $B$  viennent à se confondre, les surfaces ( $\Sigma$ ) deviennent des sphères de centre  $A$ .\*

d. Il nous reste à traiter le cas où  $\varphi$  ne dépend pas de  $h$ . Il est alors loisible de supposer que  $\varphi = 0$  représente deux points, distincts ou confondus, du plan de l'infini. Si ces points sont distincts, l'équation

$$\varphi(u, v, w) + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0$$

peut être réduite à la forme

$$(a + \lambda)u^2 + (b + \lambda)v^2 + (c + \lambda)w^2 = 0 \quad (a > b > c),$$

qui représente, pour  $\lambda$  différent de  $-a$ ,  $-b$  et  $-c$ , des coniques ( $\sigma$ ) infiniment éloignées, et pour  $\lambda$  égal à  $-a$ ,  $-b$  ou  $-c$  trois couples de points  $(\alpha_1, \beta_1)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2)$ ,  $(\alpha_3, \beta_3)$  infiniment éloignés; un seul de ces couples est réel: c'est le couple  $(\alpha_3, \beta_3)$  qu'on obtient en prenant  $\lambda = -b$ .

Soit  $O$  un point quelconque de l'espace. Les cônes ( $C$ ) de sommet  $O$  passant par les coniques ( $\sigma$ ) admettent les droites  $O\alpha_i$  et  $O\beta_i$  comme focales<sup>175</sup>. Considérons en particulier les focales réelles  $O\alpha_3$ ,  $O\beta_3$  et soit  $Om$  une génératrice quelconque d'un des cônes ( $C$ ). La somme des angles de  $Om$  avec  $O\alpha$  et  $O\beta$  est constante pour toutes les génératrices de ( $C$ ) et, par suite, les plans  $mO\alpha$  et  $mO\beta$  font des angles égaux avec le plan tangent au cône le long de  $Om$ .

Enfin dans le cas où  $\varphi = 0$  représente un point double  $\alpha$  du plan de l'infini, les cônes ( $C$ ) sont de révolution autour de  $O\alpha$ .\*

Revenons au cas (a) et soit  $P_0$  un point arbitraire de coordonnées  $x_0, y_0, z_0$ . L'équation

$$\frac{x_0^2}{a + \lambda} + \frac{y_0^2}{b + \lambda} + \frac{z_0^2}{c + \lambda} = 1$$

admettant toujours pour  $\lambda$  trois racines réelles, on en déduit immédiatement que par  $P_0$  passent trois quadriques du faisceau homofocal (a) et l'on reconnaît aisément que ces trois surfaces sont un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes.

Ces trois quadriques se coupent deux à deux orthogonalement au point  $P_0$ ; l'intersection ( $D$ ) des plans tangents en  $P_0$  à deux de ces surfaces (de paramètres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ ) est normale à la troisième; les cosinus

<sup>175</sup> Cf. L. I. Magnus, Ann. math. pures appl. 16 (1825/6), p. 33; M. Chasles, Sur les propriétés générales des cônes du second degré [Mém. Acad. Bruxelles 6 (1830) mém. n° 11 (d'après la table: n° 10), p. 1/58].

directeurs de ( $D$ ) sont par conséquent proportionnels aux trois quantités

$$X = \frac{x_0}{a + \lambda_3}, \quad Y = \frac{y_0}{b + \lambda_3}, \quad Z = \frac{z_0}{c + \lambda_3}$$

dans lesquelles  $\lambda_3$  est le paramètre de la troisième surface.

Les focales du faisceau servent de frontière aux trois types de quadriques contenues dans ce faisceau: ellipsoïde, hyperboloïde à une nappe, hyperboloïde à deux nappes. Faisons en effet varier  $\lambda$  de  $+\infty$  à  $-\infty$  dans l'équation

$$au^2 + bv^2 + cw^2 - h^2 + \lambda(u^2 + v^2 + w^2) = 0.$$

La surface représentée par cette équation commence alors par être un ellipsoïde dont les axes, d'abord infiniment grands, décroissent jusqu'à ce que la quadrique s'aplatisse et recouvre l'intérieur de l'ellipse focale qui correspond à  $\lambda = c$ . Si  $\lambda$  devient inférieur à  $c$ , la surface est un hyperboloïde à une nappe qui est d'abord (pour  $\lambda$  peu inférieur à  $c$ ) extrêmement aplati, de façon à recouvrir la portion de plan extérieure à l'ellipse focale. Puis,  $\lambda$  continuant à décroître, l'hyperboloïde se déforme à son tour de manière à couvrir la portion de plan extérieure à l'hyperbole focale  $\lambda = b$ . Pour  $\lambda$  inférieur à  $b$ , on a un hyperboloïde à deux nappes qui, pour  $\lambda$  très voisin de  $b$ , réduit à la portion de plan intérieure à l'hyperbole focale, s'ouvre peu à peu de manière à recouvrir deux fois tout le plan  $x = 0$ . Enfin, pour  $-\infty < \lambda < a$ , la quadrique est imaginaire.

Les équations tangentielles du cône ( $C$ ), de sommet  $P_0$ , circonscrit à la surface de paramètre  $\lambda$  sont

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 + h = 0,$$

$$(a + \lambda)u^2 + (b + \lambda)v^2 + (c + \lambda)w^2 = (ux_0 + vy_0 + wz_0)^2.$$

Tous les cônes ( $C$ ) obtenus en faisant varier  $\lambda$  sont homofocaux; leurs plans principaux coïncident avec les plans tangents en  $P_0$  aux trois quadriques du faisceau de paramètres  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  et les focales de ces cônes coïncident avec celles des génératrices de ces surfaces qui passent par  $P_0$ . En particulier les focales réelles de ( $C$ ) appartiennent à l'hyperboloïde à une nappe qui passe par  $P_0$ . Ces deux droites appelées aussi axes focaux jouissent de cette propriété que, si l'on fait passer par l'une d'elles deux plans rectangulaires quelconques, ces plans sont conjugués par rapport à toutes les quadriques du faisceau homofocal.

Lorsque  $P_0$  est situé sur l'une des courbes focales du faisceau de surfaces ( $\Sigma$ ), les cônes ( $C$ ) sont de révolution autour de la tangente en  $P_0$  à la focale considérée. L'un de ces cônes étant celui qui passe par l'une des deux autres courbes focales, il en résulte que tout point

d'une des deux focales réelles est le sommet d'un cône de révolution passant par la seconde courbe focale réelle.

**78. Le complexe des axes de Reye.** On vérifie aisément que les coordonnées plückériennes de la droite ( $D$ ), normale menée par le point  $P_0$  à la surface du système triple orthogonal qui correspond au paramètre  $\lambda_3$ , satisfont aux relations

$$\frac{LX}{b-c} = \frac{MY}{c-a} = \frac{NZ}{a-b}.$$

En d'autres termes, l'équation du complexe ( $C$ ) des normales aux surfaces homofocales ( $\Sigma$ ) s'écrit

$$aLX + bMY + cNZ = 0.$$

On pourrait donner une autre définition du complexe ( $C$ ) en remarquant que la droite ( $D$ ) est le lieu des pôles, par rapport aux surfaces ( $\Sigma$ ), d'un plan ( $\Pi$ ) normal à ( $D$ ) en  $P_0$ . On peut encore considérer le complexe ( $C$ ) comme formé par les normales abaissées de tous les points de l'espace  $P_0$  sur leurs plans polaires par rapport à l'une quelconque ( $\Sigma_0$ ) des quadriques homofocales ( $\Sigma$ ). Enfin le complexe ( $C$ ) coïncide avec le complexe des axes des sections planes de ( $\Sigma_0$ ), étudié sous cette forme par *Th. Reye*<sup>176</sup>; aussi, l'appelle-t-on souvent le *complexe de Reye*.

#### Astatique proprement dite.

**79. Origines et but de l'astatique.** Soit  $Oxyz$  un trièdre trirectangle mobile par rapport au trièdre trirectangle  $O'x'y'z'$  que nous regarderons comme fixe. Dans certaines théories de la Physique, comme celles de la pesanteur et du magnétisme, on considère un corps solide ( $C$ ) comme constitué par un très grand nombre de points matériels  $m_i$ , invariablement liés à  $Oxyz$  et auxquels sont appliquées

176) Die Geometrie der Lage (1<sup>re</sup> éd.) 2, Hanovre 1868; (4<sup>e</sup> éd.) 2, Stuttgart (Leipzig) 1907, p. 214/22; trad. par *O. Chemin*, Géométrie de position, Paris 1882, p. 181/96; Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1869), p. 1. Ce complexe a été entrevu par *J. P. M. Binet* [J. Ec. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 1/87] et par *M. Chasles* [Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, (1<sup>re</sup> éd.): Mém. couronnées Acad. Bruxelles in 4<sup>e</sup>, 11 (1837), p. 384/99; (2<sup>e</sup> éd.) Paris 1875, p. 384/99; (3<sup>e</sup> éd.) Paris 1889, p. 384/99] qui a montré notamment que les normales à un faisceau de quadriques homofocales issues d'un point  $M$  ou situées dans un plan ( $\Pi$ ) engendrent un cône du second ordre de sommet  $M$  ou enveloppent une conique située dans ( $\Pi$ ). Au fond on doit attribuer la découverte du complexe ( $C$ ) à *A. M. Ampère* [Mém. Acad. sc. Institut France (2) 5 (1821/2), éd. Paris 1826, p. 86] qui en a trouvé les propriétés fondamentales [cf. *Th. Reye*, Geometrie der Lage (4<sup>e</sup> éd.) 2, Stuttgart (Leipzig) 1907, p. 223/4].

des forces  $\vec{F}_i$ , de directions invariablement liées à  $O'x'y'z'$  et d'intensités constantes, quelle que soit la position de  $Oxyz$  par rapport à  $O'x'y'z'$ .

Nous dirons pour abrégé que les forces  $\vec{F}_i$  forment un *système lié* ( $S$ ).

Pour chaque position du trièdre  $Oxyz$  la théorie des vecteurs glissants apprend à remplacer le système des forces  $\vec{F}_i$  par un système réduit statiquement équivalent, mais elle se montre impuissante à faire connaître la loi de variation de ce système réduit suivant les positions de  $Oxyz$ .

La solution de ce dernier problème a donné naissance à une branche importante de la statique qui a reçu le nom d'*astatique*, et dont l'origine remonte à *E. F. A. Minding*<sup>177</sup>. Ses résultats ont été étendus par *A. F. Möbius*<sup>178</sup> et *M. Steichen*<sup>179</sup>, puis par *O. J. Broch*<sup>180</sup> et *N. M. F. Moigno*<sup>181</sup> qui ont donné, en outre, des applications à la théorie du magnétisme.

Il faut réserver une place spéciale à un mémoire de *G. Darboux*<sup>182</sup> qui, tout en rectifiant des résultats antérieurs de *A. F. Möbius*, obtient par une voie simple, d'importantes propositions complètement nouvelles.\*

Enfin on pourra consulter les Traités de *I. (J.) Somov*<sup>183</sup>, de *E. J. Routh*<sup>184</sup> et de *H. E. Timerding*<sup>185</sup>.\*

**80. Cas de l'espace à deux dimensions.** Supposons les forces dirigées parallèlement au plan  $O'x'y'$ , leurs points d'application étant dans le plan  $Oxy$ , et supposons que, dans le déplacement relatif des

177) J. reine angew. Math. 14 (1835), p. 289; 15 (1836), p. 27; Handbuch der Differential- und Integralrechnung 2 (Mechanik), Berlin 1838, p. 78 et suiv.

178) Lehrbuch der Statik 1, Leipzig 1837, chap. 8 et 9; Werke 3, Leipzig 1886, p. 185/247.

179) J. reine angew. Math. 38 (1849), p. 277.

180) Lehrbuch der Mechanik, Berlin 1854, p. 82, 134 et suiv.

181) Leçons de mécanique analytique, Statique, Paris 1868, p. 206/45.

182) Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 2 (1878), p. 1/65; *G. Darboux*, Sur l'équilibre astatique Paris 1877; cf. *Th. Despeyroux*, Cours de mécanique (édition revue et annotée par *G. Darboux*) 1, Paris 1884, p. 391.

Voir encore les citations se rapportant au mémoire précédent de *G. Darboux* dans *W. Schell*, Theorie der Bewegung und der Kräfte, (2<sup>e</sup> éd.) 1, Leipzig 1879; 2, Leipzig 1880.

183) Racionalnaja Mehanika 1, S<sup>t</sup> Pétersbourg 1871; 2<sup>e</sup>, S<sup>t</sup> Pétersbourg 1872; 2<sup>e</sup> (posth.) S<sup>t</sup> Pétersbourg 1877; trad. par *A. Zucet*, Theoretische Mechanik 2, Leipzig 1879, p. 356/407.

184) Analytical statics (2<sup>e</sup> éd.) 2, Cambridge 1902.

185) Geometrie der Kräfte, Leipzig 1908, p. 266/86 (chap. 18).

trièdres  $Oxyz$  et  $O'x'y'z'$  les axes  $Oz$  et  $O'z'$  restent constamment parallèles; la solution du problème précédent [n° 79], ainsi restreint à un espace à deux dimensions, résultera immédiatement d'une construction de A. F. Möbius<sup>186</sup>).

Soient  $M_1, M_2, \dots, M_n$  les points d'application des forces  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ; soient  $M'_{12}$  l'intersection des forces  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ ; soit enfin  $\vec{F}_{12}$  la résultante des deux forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  respectivement équipollentes à  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  et appliquées en  $M'_{12}$ . Le support de  $\vec{F}_{12}$  rencontre le cercle passant par  $M_1, M_2$  et  $M'_{12}$  en un second point  $M_{12}$ ; soit  $\vec{F}_{12}$  la force équipollente à  $\vec{F}_{12}$  appliquée en  $M_{12}$ . Remplaçons les forces  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  par la force  $\vec{F}_{12}$ ; répétons la construction précédente sur le système  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  et ainsi de suite. A la fin nous aurons remplacé le système donné par une force unique  $\vec{F}$  appliquée en un point  $M$ , et il est clair que, lorsque toutes les forces tournent dans un sens bien déterminé d'un même angle  $\varphi$  autour de leurs points d'application, le système reste statiquement équivalent à une force passant par  $M$  et que l'on déduit de  $\vec{F}$  en faisant tourner  $\vec{F}$  de l'angle  $\varphi$  autour de  $M$ .

**81. Systèmes de forces parallèles.** Avant d'exposer la théorie générale de l'astatique, nous traiterons un cas particulier très simple dont la solution nous sera bientôt utile.

Supposons que les forces  $\vec{F}_i$  soient toutes parallèles à une droite  $D$  sur laquelle nous choisisons un sens positif, et appelons  $F_i$  la valeur algébrique de la projection de  $\vec{F}_i$  sur la droite orientée  $D$  [n° 3]. Il résulte bien aisément<sup>187</sup> de la loi du levier [n° 69] que, pour  $\sum_{(i)} F_i$  différent de zéro, le système des forces  $\vec{F}_i$  est statiquement équivalent, quelle que soit la position de  $Oxyz$ , à une force unique  $\vec{F}$ , parallèle à  $D$ , dont la projection sur la droite orientée  $D$  a pour valeur algébrique

$$R = \sum_{(i)} F_i$$

et appliquée au point  $m$  de coordonnées, par rapport à  $Oxyz$ ,

$$x = \frac{1}{R} \sum_{(i)} F_i x_i, \quad y = \frac{1}{R} \sum_{(i)} F_i y_i, \quad z = \frac{1}{R} \sum_{(i)} F_i z_i,$$

$x_i, y_i, z_i$  étant les coordonnées du point  $m_i$  par rapport aux axes  $Oxyz$ .

Le point  $m$  est appelé le *centre* du système de forces parallèles

<sup>186</sup>) Lehrbuch der Statik 1, Leipzig 1837, § 115; Werke 3, Leipzig 1886, p. 171.

<sup>187</sup>) P. Varignon, Hist. Acad. sc. Paris 1714, éd. 1717, M. p. 79.

donné. Sa position dans le trièdre  $Oxyz$  ne dépend pas de la direction de  $D$ .

L'application aux systèmes pesants est immédiate. Le centre des forces parallèles prend alors le nom de *centre de gravité* du corps.

**82. Équilibre astatique et équivalence astatique.** Conservons les hypothèses et les notations du n° 79. L'équilibre du corps ( $C$ ) sera dit *astatique* s'il est réalisé pour toutes les positions du trièdre  $Oxyz$  par rapport au trièdre  $O'x'y'z'$ .

Soit  $\vec{F}_i$  la force ayant même intensité, même point d'application que  $\vec{F}_i$  et une direction opposée à celle de  $\vec{F}_i$ . Appelons ( $S'$ ) le système des forces  $\vec{F}_i'$ . Nous dirons que deux systèmes liés ( $S$ ) et ( $S'$ ) sont *astatiquement équivalents* si le système formé par l'ensemble des forces de ( $S$ ) et de ( $S'$ ) maintient le solide ( $C$ ) en équilibre astatique.

Si le corps est en équilibre statique pour une position déterminée du trièdre  $Oxyz$ , il le sera encore après toute translation du trièdre  $Oxyz$  par rapport au trièdre  $O'x'y'z'$ ; il est donc loisible de supposer que les origines  $O$  et  $O'$  de ces deux trièdres coïncident.

Pour simplifier le langage nous conviendrons de regarder inversement le trièdre  $Oxyz$  comme fixe et le trièdre  $O'x'y'z'$  comme mobile. En d'autres termes, au lieu de faire tourner le corps nous ferons tourner les forces autour de leurs points d'application en conservant leurs intensités et leurs angles mutuels.

Soient alors  $X_i, Y_i, Z_i$  les composantes de la force  $F_i$  du système ( $S$ ) par rapport aux axes  $Oxyz$ ; et soient  $x_i, y_i, z_i$  les coordonnées du point d'application  $m_i$  de  $F_i$  par rapport à ces axes. Formons les douze quantités

$$(1) \quad \begin{cases} X = \sum_{(i)} X_i, & X_x = \sum_{(i)} X_i x_i, & X_y = \sum_{(i)} X_i y_i, & X_z = \sum_{(i)} X_i z_i, \\ Y = \sum_{(i)} Y_i, & Y_x = \sum_{(i)} Y_i x_i, & Y_y = \sum_{(i)} Y_i y_i, & Y_z = \sum_{(i)} Y_i z_i, \\ Z = \sum_{(i)} Z_i, & Z_x = \sum_{(i)} Z_i x_i, & Z_y = \sum_{(i)} Z_i y_i, & Z_z = \sum_{(i)} Z_i z_i. \end{cases}$$

Deux systèmes liés sont astatiquement équivalents si ces douze quantités ont les mêmes valeurs pour les deux systèmes; ainsi le système de forces parallèles  $\vec{F}_i$  [n° 80] est astatiquement équivalent à la force  $\vec{F}$ .

Pour qu'un système soit en équilibre astatique, il faut et il suffit que ces douze quantités soient nulles: nous les appellerons les *coordonnées astatiques* du système des forces<sup>188</sup>).

<sup>188</sup>) E. J. Routh les appelle "the twelve elements" (les douze éléments)

Observons que les différents termes des sommes qui définissent les coordonnées astatiques du système de forces sont les coordonnées astatiques des forces elles-mêmes. On obtiendra donc les coordonnées astatiques d'un système de forces en faisant les sommes algébriques des coordonnées astatiques de même nom des différentes forces du système.\*

Les coordonnées statiques, considérées jusqu'à présent, sont reliées aux précédentes de la façon suivante:

Les coordonnées statiques  $X, Y, Z$ , sont les mêmes que les coordonnées astatiques  $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ ; on a ensuite les formules

$$L = Z_y - Y_z, \quad M = X_z - Z_x, \quad N = Y_x - X_y.$$

**83. Couples liés**<sup>189</sup>. Par définition un *couple lié* est un système de deux forces parallèles, égales et de sens contraires, liées à des points d'application bien déterminés  $m_i, m'_i$ . L'un quelconque des vecteurs  $\vec{m}_i, \vec{m}'_i$  et  $\vec{m}_i, \vec{m}'_i$ , le premier par exemple pour préciser, est dit le *bras de levier astatique* du couple ou le *bras astatique du couple* [cf. n° 74].\* Soient  $a, b, c$  les projections du bras  $\vec{m}_i, \vec{m}'_i$  sur les axes de coordonnées,  $r$  sa longueur,  $X, Y, Z$  les composantes de la force appliquée en  $m'_i$ ,  $R$  son intensité; les coordonnées astatiques du couple seront

$$\begin{aligned} 0; & aX, bX, cX \\ 0; & aY, bY, cY \\ 0; & aZ, bZ, cZ. \end{aligned}$$

Elles ne changent pas si  $R$  et  $r$  varient de telle sorte que leur produit  $Rr$  reste constant; ce produit s'appelle le *moment astatique du couple*. On peut ainsi concevoir un couple lié comme une force infiniment petite dont le point d'application s'est éloigné indéfiniment dans une direction bien définie, celle du bras de levier astatique.

Supposons que, moyennant une rotation du trièdre  $Ox'y'z'$ , les supports des forces du couple viennent à coïncider avec le support du bras de levier astatique que nous prendrons pour axe des  $x$ ; toutes les coordonnées astatiques du couple s'évanouissent, à l'exception de  $X_x = Rr$ . Suivant que l'on a  $X_x > 0$  ou  $X_x < 0$  le couple est dit *stable* ou *instable*.\*

Tout système de forces liées *parallèles* dont la résultante générale est nulle est astatiquement équivalent à un couple lié.

[Analytical statics, (1<sup>re</sup> éd.) 2, Cambridge 1892, p. 171; (2<sup>e</sup> éd.) 2, Cambridge 1902, p. 313.\*

189) E. J. Routh, Analytical statics, (1<sup>re</sup> éd.) 2, p. 165/7; (2<sup>e</sup> éd.) 2, Cambridge 1902, p. 308/11.

Il est important d'observer qu'en général on ne peut trouver un couple lié astatiquement équivalent à l'ensemble de deux couples liés. Pour qu'un tel couple lié existe, il faut et il suffit que les forces ou les bras de levier astatiques des deux couples donnés soient *parallèles* à une même direction.\*

**84. Moment scalaire d'un système de forces liées par rapport à un plan.** Soit toujours  $m_i$  le point d'application de la force liée  $\vec{F}_i$  et  $F_i$  son intensité. Par définition, nous appellerons *moment vectoriel de la force liée  $\vec{F}_i$  par rapport à un plan (II)* (invariablement lié aux axes  $Oxyz$ ) le vecteur lié  $\vec{G}_i$ , d'origine  $m_i$ , de même direction et de même sens que  $\vec{F}_i$  et d'intensité

$$p_i F_i,$$

$p_i$  étant le nombre positif qui mesure la distance de  $m_i$  à (II).

Nous appellerons l'intensité

$$G_i = p_i F_i$$

du vecteur  $\vec{G}_i$  le *moment scalaire de  $\vec{F}_i$  par rapport à (II)*. Cette notion a été introduite pour la première fois par G. Monge<sup>190</sup>.

Enfin étant donné un système formé d'un nombre quelconque de forces liées  $\vec{F}_i$  nous appellerons *moment scalaire*, ou simplement *moment* du système de forces par rapport au plan (II), l'intensité  $R$  de la résultante générale  $\vec{R}$  des vecteurs  $\vec{G}_i$  définis précédemment.

Soit

$$ux + vy + wz + h = 0$$

l'équation du plan II; les composantes  $\Xi, H, Z$  de la résultante générale  $\vec{R}$  sont données par les égalités

$$(2) \quad \begin{cases} \Xi \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = X_x u + X_y v + X_z w + Xh, \\ H \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = Y_x u + Y_y v + Y_z w + Yh, \\ Z \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = Z_x u + Z_y v + Z_z w + Zh \end{cases}$$

et le moment scalaire  $M$  du système par rapport au plan (II) résultera de la formule

$$(3) \quad \begin{aligned} M^2(u^2 + v^2 + w^2) &= (X_x u + X_y v + X_z w + Xh)^2 \\ &+ (Y_x u + Y_y v + Y_z w + Yh)^2 \\ &+ (Z_x u + Z_y v + Z_z w + Zh)^2. \end{aligned}$$

\*L'importance de la notion de moment scalaire d'un système de

190) Traité élémentaire de statique, (1<sup>re</sup> éd.) Paris 1786; (2<sup>e</sup> éd.) Paris an III, p. 39; (4<sup>e</sup> éd.) Paris an IX, p. 41; (8<sup>e</sup> éd.) Paris 1846, p. 51.

forces par rapport à un plan apparaîtra plus complètement dans l'article IV 5. Il est aisé de prévoir dès maintenant qu'elle jouera en astatique un rôle considérable. En effet le moment scalaire par rapport à un plan est un invariant du système dans tous les déplacements du trièdre  $Oxyz$  par rapport au trièdre  $Ox'y'z'$ ; on le voit immédiatement d'après la définition même du moment; on peut aussi le vérifier à l'aide des formules de changement des coordonnées.\*

On peut dire encore: le moment scalaire par rapport à un plan conserve la même valeur si l'on suppose ce plan invariablement lié au corps et si l'on déplace d'une manière quelconque le corps tandis que les forces appliquées aux divers points du corps conservent chacune la même grandeur, la même direction et le même sens.

**85. Réduction astatique d'un système de forces liées. Plan central. Point central.** Pour effectuer la réduction astatique d'un système de forces liées, c'est-à-dire pour remplacer ce système par un nouveau système plus simple et astatiquement équivalent au premier, nous emploierons une méthode dont l'origine remonte à G. C. F. M. Riche de Prony<sup>191</sup>.

Nous décomposerons la force  $\vec{F}_i$  appliquée au point  $m_i$  en trois forces appliquées en  $m_i$  et parallèles respectivement aux trois arêtes d'un trièdre qu'on peut supposer trirectangle. Le système donné est ainsi remplacé par trois systèmes de forces parallèles: chacun d'eux est, en général, astatiquement équivalent à une force unique, appliquée en un point bien déterminé, et en définitive le système donné est remplacé par un système astatiquement équivalent formé de trois forces  $\vec{F}, \vec{G}, \vec{H}$  dont les directions sont parallèles aux arêtes d'un trièdre trirectangle, d'ailleurs arbitraire, et qu'on pourrait appeler les *composantes liées* du système (relatives au trièdre choisi). Si ce trièdre coïncide avec le trièdre  $Oxyz$ , les intensités des composantes liées sont  $X, Y, Z$  et les coordonnées de leurs points d'application  $A_x, A_y, A_z$  sont

$$(4) \quad \begin{cases} x_x = \frac{X_x}{X}, & y_x = \frac{X_y}{X}, & z_x = \frac{X_z}{X}, \\ x_y = \frac{Y_x}{Y}, & y_y = \frac{Y_y}{Y}, & z_y = \frac{Y_z}{Y}, \\ x_z = \frac{Z_x}{Z}, & y_z = \frac{Z_y}{Z}, & z_z = \frac{Z_z}{Z}. \end{cases}$$

191) On peut très bien se rendre compte du contenu et de la forme de ces leçons en lisant l'ouvrage de L. B. Francœur, *Traité de mécanique élémentaire* rédigé d'après les méthodes de R. de Prony, Paris an X, p. 65/77. Plus tard G. C. F. M. Riche de Prony a publié lui-même ses *Leçons de mécanique analytique* 1, Paris 1810; 2, Paris 1815.

On a ainsi une interprétation particulièrement simple des douze coordonnées astatiques du système.

Soit maintenant  $OS$  une direction donnée, de cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$  par rapport aux axes  $Ox, Oy, Oz$ , et soit  $\vec{f}_i$  la composante de  $\vec{F}_i$  parallèle à cette direction  $OS$  et d'origine  $m_i$ . Les coordonnées  $x, y, z$  du centre [n° 80] des forces  $\vec{f}_i$  ont les valeurs suivantes<sup>192</sup>:

$$(5) \quad \begin{cases} x = \frac{X_x\alpha + Y_x\beta + Z_x\gamma}{X\alpha + Y\beta + Z\gamma}, \\ y = \frac{X_y\alpha + Y_y\beta + Z_y\gamma}{X\alpha + Y\beta + Z\gamma}, \\ z = \frac{X_z\alpha + Y_z\beta + Z_z\gamma}{X\alpha + Y\beta + Z\gamma}. \end{cases}$$

Pendant la rotation du trièdre  $Oxyz$  autour de  $O$ , les cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$  varient, et, si l'un au moins des déterminants à neuf éléments que l'on peut extraire de la matrice des coordonnées astatiques n'est pas nul,<sup>193</sup> le point  $x, y, z$  se meut dans le plan

$$(6) \quad \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ X & X_x & X_y & X_z \\ Y & Y_x & Y_y & Y_z \\ Z & Z_x & Z_y & Z_z \end{vmatrix} = 0$$

invariablement lié au trièdre  $Oxyz$  et contenant évidemment les points  $A_x, A_y, A_z$ .

Ce plan a été appelé par E. F. A. Minding<sup>190</sup> et A. F. Möbius<sup>194</sup> le *plan central* du système de forces données. C'est en général le seul plan pour lequel le moment scalaire du système soit nul.

Observons que les formules (5) établissent une correspondance homographique réelle ( $H$ ) entre les points du plan de l'infini situés dans la direction  $\alpha, \beta, \gamma$  et les points  $(x, y, z)$  du plan central. Par suite les trois points

$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$$

du plan central qui correspondent aux trois arêtes de directions

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2), (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$$

d'un trièdre trirectangle sont les sommets d'un triangle conjugué par rapport à une conique imaginaire du plan central. Autrement dit, quelle que soit la réduction du système de forces liées à trois com-

192) Cf. G. Darboux, *Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux* (2) 2 (1878), p. 50.

193) J. reine angew. Math. 14 (1835), p. 289.

194) J. reine angew. Math. 16 (1837), p. 1/10; Werke 3, Leipzig 1886, p. 525/34; Lehrbuch der Statik 1, Leipzig 1837, § 145; Werke 3, Leipzig 1886, p. 217.



posantes liées normales entre elles deux à deux, les points d'application de ces trois composantes forment dans le plan central un triangle qui est antipolaire dans un système antipolaire déterminé<sup>195)</sup> [n° 76]. Au centre réel  $(x_0, y_0, z_0)$  de la conique imaginaire  $(\Gamma)$ , la transformation  $(H)$  fait correspondre le point du plan de l'infini, conjugué de la droite

$$X\alpha + Y\beta + Z\gamma = 0$$

du plan de l'infini par rapport à l'ombilicale\*; ce point a pour coordonnées

$$(6) \quad \begin{cases} x_0 = \frac{X^2 x_X + Y^2 x_Y + Z^2 x_Z}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ y_0 = \frac{X^2 y_X + Y^2 y_Y + Z^2 y_Z}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \\ z_0 = \frac{X^2 z_X + Y^2 z_Y + Z^2 z_Z}{X^2 + Y^2 + Z^2}, \end{cases}$$

où  $x_X, x_Y, x_Z, y_X, y_Y, y_Z, z_X, z_Y, z_Z$  sont fournies par les formules (4). Si, dans chaque réduction des forces données à trois composantes normales deux à deux, on considère les points d'application de ces composantes comme des points matériels pesants, de poids proportionnels aux intensités respectives de ces composantes, le centre de gravité de ces trois points matériels coïncide avec le point  $(x_0, y_0, z_0)$ . Ce point a été appelé, d'après E. F. A. Minding<sup>196)</sup>, *point central* du système de forces. Il diffère du point central de W. R. Hamilton dont on a parlé au n° 74. Il diffère encore du point nommé de la même manière par A. F. Möbius<sup>197)</sup> et qu'il définit de la façon suivante:

Considérons les projections sur le plan central des forces du système proposé et décomposons-les suivant des parallèles à deux directions données du plan central. Quelles que soient ces directions, les centres de ces systèmes de composantes parallèles sont toujours situés sur une même droite appelée *droite centrale* par A. F. Möbius. Si l'une des directions choisies est précisément celle de cette droite, le centre des composantes parallèles correspondantes est appelée *point central* par A. F. Möbius; mais ce point n'est pas invariablement lié au solide comme le point central de E. F. A. Minding.

Revenons à la réduction astatique d'un système de forces liées. Il résulte de la méthode donnée précédemment que l'on peut remplacer

195) G. Darboux, Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 2 (1878), p. 54.

196) J. reine angew. Math. 14 (1835), p. 289.

197) J. reine angew. Math. 16 (1837), p. 1/10; Werke 3, Leipzig 1886, p. 525/34.

un système de forces liées par trois forces liées dont l'une est perpendiculaire au plan central, les deux autres étant dans ce plan et perpendiculaires entre elles.

On peut encore obtenir un système réduit plus simple de la manière suivante:

Un système quelconque de forces liées peut être remplacé par un système astatiquement équivalent formé d'une force unique appliquée au point central et de deux couples dont les forces sont rectangulaires, les directions des bras de levier étant conjuguées par rapport à la conique  $(\Gamma)$ . En particulier on peut effectuer la réduction précédente de telle sorte que les bras de levier soient rectangulaires; mais alors on peut faire tourner le trièdre  $Oxyz$  autour de  $O$  de façon à amener les deux forces de chaque couple dans les directions de leurs bras de levier respectifs, la force unique restant normale à ces deux bras. On peut donc [cf. n° 82] choisir les axes de coordonnées de telle sorte que toutes les coordonnées astatiques du système de forces soient nulles à l'exception de

$$X_x = P, \quad Y_y = Q, \quad Z_z = R.$$

86. Les faisceaux de quadriques homofocales enveloppées par les plans d'égal moment. Tous les plans pour lesquels le moment scalaire  $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$  d'un système donné a une valeur constante  $M$  enveloppent une surface du second degré  $(M)$  dont l'équation tangentielle est donnée par la formule (3) du n° 84, et lorsque  $M$  varie de zéro à l'infini, on obtient ainsi toutes les surfaces réelles d'un faisceau de quadriques homofocales<sup>198)</sup>. Prenons les axes de coordonnées définis au numéro 85 et pour lesquels toutes les coordonnées astatiques du système sont nulles, sauf  $X_x = P, Y_y = Q$  et  $Z_z = R$ : l'équation tangentielle des quadriques précédentes devient

$$(M^2 - P^2)u^2 + (M^2 - Q^2)v^2 + M^2 w^2 = R^2 h^2;$$

l'équation ponctuelle correspondante est alors

$$\frac{x^2}{M^2 - P^2} + \frac{y^2}{M^2 - Q^2} + \frac{z^2}{M^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Les axes de ce système de coordonnées coïncident donc avec les axes principaux des quadriques homofocales. Leur centre commun est le point central de E. F. A. Minding, le plan des  $xy$  est le plan

198) Les rapports de l'astatique avec la théorie des moments d'inertie, qui conduit également à une famille de quadriques homofocales, ont été étudiés par D. Padellietti, Rendic. Accad. Napoli (1) 22 (1883), p. 29. Cf. aussi E. J. Routh, Analytical statics (1<sup>re</sup> éd.) 2, Cambridge 1892, p. 183/4; (2<sup>e</sup> éd.) 2, Cambridge 1902, p. 326/7.

central de *E. F. A. Minding*. La focale imaginaire située dans ce plan et qui a pour équation dans ce plan

$$\frac{x^2}{P^2} + \frac{y^2}{Q^2} + \frac{1}{R^2} = 0$$

est enveloppée par les plans de moment nul, dont un seul est réel (si  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont différents de zéro), le plan central. Cette focale coïncide précisément avec la conique ( $\Gamma$ ) dont il a été question plus haut [n° 85].

Les plans de moment  $M$  qui passent par un point  $P_0$  enveloppent un cône ( $C$ ); lorsque  $M$  varie, on obtient un faisceau de cônes homofocaux. Si l'on porte sur les normales à ces plans, en  $P_0$  (dans un sens arbitraire), l'inverse du moment correspondant, l'extrémité du vecteur ainsi construit décrit une quadrique, qui est en général un ellipsoïde appelé par *G. Darboux* l'*ellipsoïde central* du point  $P_0$ ; les axes de cet ellipsoïde coïncident avec ceux des cônes homofocaux ( $C$ ) de sommet  $P_0$ <sup>199</sup>. Les axes des ellipsoïdes centraux relatifs à tous les points de l'espace forment le complexe des axes de *Reye* ( $C$ ) correspondant à la famille de quadriques homofocales [n° 78].

Si l'on prend le point  $P_0$  comme origine, l'équation de l'ellipsoïde central est

$$(X_x x + X_y y + X_z z)^2 + (Y_x x + Y_y y + Y_z z)^2 + (Z_x x + Z_y y + Z_z z)^2 = 1.$$

Il en résulte que lorsque le point  $P_0$  est situé dans le plan central (et dans ce cas seulement) l'ellipsoïde central dégénère en un cylindre d'axe normal au plan central.

Par une droite quelconque  $g$ , on peut faire passer deux plans pour lesquels le moment scalaire a une valeur donnée  $M$ ; ce sont les deux plans tangents menés par  $g$  à la surface ( $M$ ) du faisceau homofocal.

Lorsque  $M$  varie ces deux plans décrivent deux faisceaux en involution dont les plans doubles correspondent au maximé et au minimé de  $M$  pour les plans passant par la droite  $g$ . Ces plans doubles sont rectangulaires et, par suite, sont bissecteurs des angles dièdres formés par un couple quelconque de plans de même moment.\*

Dans un faisceau de plans parallèles, il existe toujours un et un seul plan par rapport auquel le moment est minimé; c'est le plan du faisceau passant par le point central de *E. F. A. Minding*.\*

**87. Les axes statiques de Siacci. Le théorème de Minding.** Un système de forces donné peut toujours être remplacé par un système astatiquement équivalent formé d'une force unique  $\vec{R}$  appliquée en un

point arbitraire  $O$ , et de trois couples dont les bras, issus du point  $O$ , sont dirigés suivant les arêtes d'un trièdre trirectangle arbitraire. Les composantes de la force sont  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , quel que soit le point  $O$  et le moment scalaire d'un des couples par rapport au plan qui contient les bras des deux autres est évidemment égal au moment du système donné par rapport au même plan. Supposons que les bras soient dirigés précisément suivant les axes de coordonnées; les coordonnées astatiques de l'un des trois couples seront

$$\begin{aligned} 0; & X_x, 0, 0; \\ 0; & Y_x, 0, 0; \\ 0; & Z_x, 0, 0; \end{aligned}$$

et de même pour les autres.

Considérons alors l'ellipsoïde central relatif au point  $O$  et faisons coïncider les bras des couples avec les axes principaux de cet ellipsoïde; dans ce cas, les directions des forces des trois couples sont deux à deux rectangulaires. Il en résulte que par une rotation convenable autour du point  $O$  (arbitrairement choisi) on pourra donner au corps une position telle que le système de forces qui agit sur lui soit statiquement équivalent à une résultante unique appliquée au point  $O$ . Une telle position du corps une fois trouvée, on en obtiendra trois autres symétriques de la première par rapport aux axes de l'ellipsoïde central. Il existe donc quatre axes de rotation permettant d'amener le solide de sa position primitive à ces quatre positions particulières; ces quatre axes ont été appelés par *F. Siacci*<sup>200</sup> les *axes statiques* du point  $O$ . Le plan qui contient deux axes statiques est perpendiculaire au plan des deux autres.

Les supports ( $\Delta$ ) des quatre forces auxquelles le système donné devient statiquement équivalent dans les quatre positions définies précédemment sont les génératrices communes de deux cônes appartenant au faisceau de cônes homofocaux de sommet  $O$ : ce sont les cônes qui ont pour bases les deux focales réelles du faisceau de quadriques homofocales. Cette propriété constitue le *théorème de Minding*<sup>201</sup>; de nombreuses démonstrations en ont été données; en voici une particulièrement simple.

<sup>200</sup> Atti Accad. Torino 17 (1881/2), p. 241. Cf. *E. Padova*, Atti Ist. Veneto (6) 1 (1882/3), p. 1243; *C. Segre*, Mem. mat. fis. Soc. ital. delle scienze (della dei XL) (3) 6 (1887), p. 35 [1884].

<sup>201</sup> *E. F. A. Minding*, J. reine angew. Math. 15 (1836), p. 37/8. Cf. aussi *G. Chrystal*, Trans. R. Soc. Edinb. 29 (1878/80), p. 519; *P. G. Tait*, id. p. 675; *G. Plarr*, Proc. R. Soc. Edinb. 11 (1880/2), p. 628 [1882]; *A. Astor*, Nouv. Ann. math. (3) 7 (1888), p. 38.

<sup>199</sup> Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 2 (1878), p. 14.

Reprenons comme axes de coordonnées  $Oxyz$  les axes de symétrie des quadriques homofocales et soient  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  les cosinus directeurs de  $Ox$  par rapport à  $Ox'y'z'$  dans une position déterminée du trièdre  $Ox'y'z'$ . Pour que, dans cette position, le système des forces données soit (statiquement) équivalent à une force unique  $\vec{f}$  il faut et il suffit que l'on ait

$$(7) \quad \alpha_2 P - \beta_1 Q = 0.$$

D'autre part, les coordonnées de la trace du support  $\vec{f}$  sur le plan des  $yz$  sont

$$(8) \quad y = \frac{Q\alpha_2 - P\beta_1}{R\alpha_3}, \quad z = -\frac{P\gamma_1}{R\alpha_3}.$$

Or on peut éliminer  $\alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \gamma_1$  entre les équations (7), (8) et l'équation

$$\alpha_2^2 + \alpha_3^2 = \beta_1^2 + \gamma_1^2$$

et l'on voit immédiatement que  $y$  et  $z$  satisfont à l'équation

$$\frac{y^2}{P^2 - Q^2} + \frac{z^2}{P^2} = \frac{1}{R^2}.$$

De même on verrait que la trace de  $\vec{f}$  sur le plan des  $xz$  se trouve sur l'autre focale réelle

$$-\frac{x^2}{P^2 - Q^2} + \frac{z^2}{Q^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Supposons donc que la position relative des trièdres  $Oxyz$  et  $Ox'y'z'$  soit choisie de telle sorte que le système des forces  $\vec{F}_i$  admette une résultante unique  $\vec{F}$ ; l'ellipsoïde central relatif à chaque point  $m$  d'une des focales réelles est de révolution, son axe coïncidant avec la tangente ( $\Delta$ ) à cette focale au point  $m$ .

Faisons alors tourner chaque force  $\vec{F}_i$  d'un angle  $\varphi$  autour de la parallèle à ( $\Delta$ ) menée par  $m_i$ ; le système de forces restera équivalent à une force unique qui tournera en même temps d'un angle  $\varphi$  autour de ( $\Delta$ ) tandis que son support rencontrera constamment l'autre focale.

**88. Généralisation du théorème de Minding par Darboux.** Dans ce qui précède, on a considéré les positions particulières du système de forces mobiles pour lesquelles ce système est réductible à une force unique.

Supposons maintenant que la position relative des trièdres  $Oxyz$  et  $Ox'y'z'$  soit choisie au hasard; soit alors ( $H$ ) l'axe central correspondant. Lorsque  $Ox'y'z'$  se déplace par rapport à  $Oxyz$  d'une façon arbitraire, ( $H$ ) engendre un complexe quadratique étudié par *G. Darboux*<sup>202</sup>. Ce complexe contient évidemment la congruence des droites

<sup>202</sup> Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 2 (1878), p. 40.

\* Cf. *L. F. Painvin*, Nouv. Ann. math. (2) 11 (1872), p. 49, 97, 202, 289, 481, 529.\*

assujetties à rencontrer les deux focales. Il peut être défini par la propriété suivante: par toute droite du complexe passent deux plans rectangulaires tangents respectivement aux deux focales réelles du faisceau de quadriques homofocales.

Les droites du complexe qui passent par un point donné quelconque de l'espace forment un cône du second degré. Si l'on mène par le sommet  $S$  de ce cône les plans normaux à ses génératrices ces plans enveloppent un autre cône qui est tangent à l'une des quadriques homofocales. Si l'on adjoint à ce dernier cône les deux cônes qui projettent du même point  $S$  les deux courbes focales des surfaces homofocales, les trois cônes envisagés seront enveloppés par les plans d'une infinité de trièdres trirectangles.

**89. Axes principaux de la rotation.** Tout axe d'une section plane d'une des quadriques homofocales est une des génératrices d'un des hyperboloïdes du faisceau [voir la fin du n° 77]; le moment scalaire du système de forces est le même par rapport à tous les plans passant par une de ces droites. Sur chacune d'elles, *A. F. Möbius*<sup>203</sup> a découvert qu'il existe deux points  $A, B$  où sont appliqués deux forces statiquement équivalentes au système donné, cette équivalence subsistant lorsqu'on fait tourner le système autour de la droite  $AB$ ; en raison de cette propriété, *A. F. Möbius* appelle ces droites les *axes principaux de la rotation*.

**90. Cas particuliers de coordonnées astatiques.** Si un système lié satisfait à la condition (invariante par rapport aux changements d'axes) que ses trois coordonnées astatiques  $X, Y, Z$  soient nulles, on peut le réduire astatiquement à trois couples liés dont les bras appartiennent à un trièdre trirectangle arbitraire. La formule (3) du n° 84 qui donne l'expression du moment  $M$  par rapport au plan  $ux + vy + wz + h = 0$  devient alors

$$(X_x u + X_y v + X_z w)^2 + (Y_x u + Y_y v + Y_z w)^2 + (Z_x u + Z_y v + Z_z w)^2 = M^2(u^2 + v^2 + w^2);$$

le moment conserve donc la même valeur pour tous les plans parallèles à un plan donné. Pour tout plan réel à distance finie le moment est, en général, différent de zéro; pour le plan de l'infini il est indéterminé. Les surfaces homofocales se réduisent ici à des coniques, situées à l'infini; considérons alors les cônes homofocaux ( $C$ ) ayant pour bases les coniques et pour sommet un point arbitraire de l'espace [cas d du

<sup>203</sup> Lehrbuch der Statik 1, Leipzig 1837, § 137 et suiv.; Werke 3, Berlin 1886, p. 207 et suiv.

n° 77]. Les axes principaux de ces faisceaux de cônes homofocaux portent les bras de trois couples astatiquement équivalents au système donné; les forces de ces couples ont en même temps des directions deux à deux rectangulaires<sup>204)</sup>. On peut donc mettre généralement le solide en équilibre de quatre manières différentes, d'où ce théorème:

„Si un solide est en équilibre pour une position bien déterminée du trièdre  $Oxyz$ , il l'est encore (abstraction faite des translations) pour trois autres positions au moins de ce trièdre“.

C'est *G. Darboux*<sup>205)</sup> qui a découvert ce théorème, en démontrant par cela même l'inexactitude d'une proposition antérieure de *A. F. Möbius*<sup>206)</sup> d'après laquelle un solide est en équilibre astatique, s'il est en équilibre pour quatre positions du trièdre  $Oxyz$ .

Plus particulièrement, il peut arriver que le corps reste en équilibre si on lui imprime une rotation quelconque autour d'une droite de direction déterminée. *A. F. Möbius*<sup>207)</sup> appelle de telles droites des *axes d'équilibre*. Pour qu'un tel axe existe (et alors toutes les parallèles à cet axe sont aussi des axes d'équilibre), il faut et il suffit que le faisceau des cônes homofocaux ( $C$ ) définis plus haut se réduise pour un point (et par suite pour tout point à distance finie) à un faisceau de cônes de révolution coaxiaux. La condition analytique est donnée par l'évanouissement du déterminant

$$\begin{vmatrix} -(Y_y + Z_z) & X_y & X_z \\ Y_x & -(Z_z + X_x) & Y_z \\ Z_x & Z_y & -(X_x + Y_y) \end{vmatrix}$$

qui est symétrique, la position initiale étant supposée d'équilibre. Les cosinus directeurs  $\alpha, \beta, \gamma$  des axes d'équilibre par rapport à  $Oxyz$  s'obtiennent à l'aide des relations

$$\begin{aligned} -(Y_y + Z_z)\alpha + X_y\beta + X_z\gamma &= 0, \\ Y_x\alpha - (Z_z + X_x)\beta + Y_z\gamma &= 0, \\ Z_x\alpha + Z_y\beta - (X_x + Y_y)\gamma &= 0. \end{aligned}$$

On peut formuler ce résultat d'une autre manière en introduisant la quadrique dont l'équation est

$$X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2 + 2X_y xy + 2Y_z yz + 2Z_x xz = 1.$$

204) C'est la réduction déjà donnée [n° 48]: mais ici la résultante unique s'évanouit.

205) Mém. Soc. sc. phys. nat. Bordeaux (2) 2 (1878), p. 2, 20.

206) Lehrbuch der Statik 1, Leipzig 1837, § 134; Werke 3, Leipzig 1886, p. 198.

207) Lehrbuch der Statik 1, Leipzig 1837, § 131; Werke 3, Leipzig 1886, p. 193.

Pour déterminer les axes principaux de cette quadrique on a à résoudre l'équation du troisième degré

$$\begin{vmatrix} X_x - \varrho & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y - \varrho & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

dont les trois racines sont toujours réelles. Si l'une de ces racines est égale à

$$X_x + Y_y + Z_z,$$

c'est-à-dire au viriel constant

$$\sum_{(i)} (X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i)$$

du système, la condition analytique cherchée se réduit à celle trouvée plus haut. Mais alors la quadrique est bitangente à la sphère

$$(X_x + Y_y + Z_z)(x^2 + y^2 + z^2) = 1.$$

Si la quadrique considérée se réduit à un cylindre ( $K$ ), l'équation du troisième degré doit avoir une racine nulle.\*

L'annulation des coordonnées  $X, Y, Z$  et du déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{vmatrix}$$

exprime qu'il y a un faisceau de plans parallèles pour lesquels le moment  $M$  du système est nul. Ces plans sont alors normaux à l'un des axes communs de tous les cônes homofocaux ( $C$ ) correspondant à tous les points de l'espace et en même temps à l'axe du cylindre ( $K$ ) que nous venons de trouver.

Si ce cylindre se réduit à deux plans parallèles, et si par conséquent le déterminant  $\Delta$  s'annule ainsi que tous ses premiers mineurs, le système de forces est astatiquement équivalent à un couple lié. Le moment  $M$  est alors nul pour tous les plans normaux à ces deux plans parallèles. Le moment  $M$  du système par rapport à un plan quelconque est égal au produit de l'intensité d'une des forces du couple par le nombre positif qui mesure la projection de son bras sur la normale au plan et s'annule pour les plans parallèles au bras lui-même; ce bras est donc perpendiculaire aux deux plans que nous venons de considérer. Les cônes homofocaux ( $C$ ) sont des cônes de révolution dont l'axe est parallèle au bras du couple. En faisant tourner le corps d'un angle convenable autour d'une perpendiculaire quelconque au plan du couple, on peut mettre en équilibre le corps soumis à

l'action du couple et cet équilibre persistera si l'on fait tourner ensuite le corps d'un angle quelconque autour d'une parallèle au bras du couple<sup>208)</sup>.

Les deux résultats précédents sont d'ailleurs compris, comme cas particuliers dans les propositions suivantes, où  $X, Y, Z$  peuvent prendre des valeurs quelconques:

Pour que le système des forces soit astatiquement équivalent à deux forces  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  appliquées respectivement en deux points  $P_1, P_2$ , il faut et il suffit que les quatre déterminants

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} X & X_y & X_z \\ Y & Y_y & Y_z \\ Z & Z_y & Z_z \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} X_x & X & X_z \\ Y_x & Y & Y_z \\ Z_x & Z & Z_z \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} X_x & X_y & X \\ Y_x & Y_y & Y \\ Z_x & Z_y & Z \end{vmatrix}$$

et

$$\Delta = \begin{vmatrix} X_x & X_y & X_z \\ Y_x & Y_y & Y_z \\ Z_x & Z_y & Z_z \end{vmatrix}$$

que l'on peut extraire de la matrice des coordonnées astatiques soient tous les quatre nuls, l'un au moins des premiers mineurs de  $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$  et  $\Delta$  n'étant pas nul. Le moment scalaire  $M$  du système est alors nul pour tous les plans passant par  $P_1 P_2$ .

Pour que le système des forces soit astatiquement équivalent à une force unique  $\vec{F}$  appliquée en un point  $P$ , il faut et il suffit que tous les premiers mineurs de  $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$  et  $\Delta$  soient nuls. Le moment scalaire  $M$  du système est alors nul pour tous les plans passant par  $P$ .

Dans les deux cas précédents il n'y a plus de plan central [n° 85].\*

208) E. J. Routh, *Analytical statics*, (2<sup>e</sup> éd.) 2, Cambridge 1902, p. 352/5.

Cet article a été revu et mis au point par R. Garnier qui a, en particulier, rédigé à nouveau les n° 12, 23, 59 à 61, 65 à 75 et 79 à 90.

## IV 5. GÉOMÉTRIE DES MASSES.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE G. JUNG (MILAN),  
PAR E. CARVALLO (PARIS).

### Introduction.

1. La notion de système de masses. La *géométrie des masses*<sup>1)</sup> vient de l'idée de considérer les points de l'espace non pas purement et simplement, mais de les affecter de nombres appelés masses, à volonté positifs ou négatifs<sup>2)</sup>. La signification du mot masse est ici détournée de sa signification physique; les masses de la théorie

1) Le nom „géométrie des masses“ a été introduit pour la première fois par J. N. Haton de la Goupillière [Sur une théorie nouvelle de la géométrie des masses, Thèse, Paris 1857; J. Éc. polyt. (1) cah. 37 (1858), p. 35/96; cf. Revue gén. sc. 4 (1893), p. 337 et suiv.]; plus tard il a été accepté par quelques autres auteurs, par exemple I. (J.) Somov [Rationalnaja mehanika 1, S<sup>t</sup> Pétersbourg 1871; 2<sup>t</sup>, S<sup>t</sup> Pétersbourg 1872; 2<sup>t</sup> (posth.), S<sup>t</sup> Pétersbourg 1877; trad. par A. Ziwet, Theoretische Mechanik 2, Leipzig 1879, p. 1/107 (chapitre d'introduction à la statique et à la dynamique)] et W. Schell [Theorie der Bewegung und der Kräfte (2<sup>e</sup> éd.) 1, Leipzig 1879, p. 72/143].

Abstraction faite du nom, on peut trouver la première idée d'une géométrie des masses dégagée de la mécanique, aussi bien qu'une cinématique ou géométrie du mouvement séparée de la mécanique, chez L. N. M. Carnot [Géométrie de position, Paris 1803, p. 336/8, 483; De la corrélation des figures de géométrie, Paris 1801, p. 158/9]. Plus tard M. Chasles [Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie (1<sup>re</sup> éd.) Mémoires couronnés Acad. Bruxelles in 4<sup>e</sup>, 11 (1837); (2<sup>e</sup> éd.), Paris 1875, p. 105, 230/1, 397 et autres] a suivi la même idée.

La cinématique fut élevée par A. M. Ampère, qui fut suivi par la plupart des géomètres, à une discipline propre [cf. IV 6, 1]; la géométrie des masses ne l'est pas encore aujourd'hui, quoique déjà un matériel suffisant soit réuni pour cela.

2) L'expression „point affecté d'un coefficient“ est employée par A. F. Möbius, Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, p. 5 (§ 3); Werke 1, Leipzig 1866, p. 28. H. Grassmann [Geometrische Analyse (mémoire couronné par la Société Jablonowski à Leipzig en 1846), Leipzig 1847; Werke 1<sup>er</sup>, publ. par F. Engel, Leipzig 1894, p. 375] appelle les points masses des „grands points“; voir aussi W. Schell [Theorie der Bewegung<sup>1)</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) 1, p. 73] et L. Cremona [Elementi di calcolo grafico, Turin 1874, p. 59].

géométrique signifient en effet des nombres susceptibles d'une interprétation particulière à chaque application. C'est ainsi que dans l'étude des corps graves elles représentent des masses ou des poids proprement dits; mais dans la théorie des erreurs, par exemple, le mot poids est pris dans sa signification figurée. Ainsi les masses peuvent représenter des quantités d'électricité ou de magnétisme, des intensités lumineuses ou des quantités de chaleur, etc. Dans la démographie ce sont des nombres de personnes qui sont compris dans une même limite de temps ou d'espace, etc. En géométrie, les masses peuvent être représentées par des segments rectilignes de longueurs et de sens déterminés pris dans une direction arbitraire mais commune, chaque segment ayant pour origine le point masse correspondant<sup>3)</sup>.

Toutefois la signification principale de la géométrie des masses est celle de la mécanique. Car elle comprend tous les problèmes qui concernent la théorie des moments statiques et du centre de gravité, puis la théorie des moments d'inertie et de déviation.

Nous désignons un point masse par le symbole

$$\alpha A,$$

le facteur numérique  $\alpha$  est la masse et le symbole  $A$  désigne la position du point.

Si  $\alpha = 1$ , on écrit seulement  $A$ , et le point est alors appelé point simple par *H. Grassmann*<sup>4)</sup>.

L'ensemble de  $n$  points masses

$$\alpha_i A_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

qu'on peut représenter par le symbole

$$(\alpha_i A_i)_n$$

ou simplement

$$(\alpha A),$$

s'appelle système de masses;

$$\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

3) De tels segments, de direction commune mais arbitraire, représentent des masses scalaires. Si l'on veut étendre la notation des  $\alpha_i$  à des grandeurs orientées, on arrive à la notion des masses vectorielles  $(\alpha_i A_i)$  qui seraient représentées par des vecteurs  $\alpha_i$  non parallèles, issus des  $A_i$ . Si l'on désigne les sommes géométriques (vectorielles) par le symbole  $\Sigma_{\text{geom.}}$ , la masse totale du système est donnée par le vecteur  $\mu = \Sigma_{\text{geom.}} \alpha_i$  qui peut d'ailleurs être nul. Du reste la représentation des vecteurs qui sont attachés aux points simples de l'espace est liée de la façon la plus étroite à la théorie des systèmes de forces liées, qui est traitée dans l'article IV 4, n° 79 et suiv.; pour ce qui regarde l'idée des masses vectorielles, voir en particulier ce qui concerne l'équilibre statique et l'équivalence statique.

est la masse totale. Les points masses peuvent être en nombre infini et former un continuum. Dans ce cas, que nous traiterons au n° 23, les sommes discontinues  $\Sigma$  se changent en intégrales.

### Moments linéaires. Le centre de gravité.

**2. Moments polaires linéaires.** Différentes espèces de points masses. Un système de masses étant donné, on peut attacher à chaque point de l'espace un vecteur déterminé de la façon suivante. Soient

$$x, y, z$$

les coordonnées du point considéré  $P$ ;

$$x_i, y_i, z_i$$

les coordonnées d'un point  $A_i$  du système, de masse  $\alpha_i$ . Les composantes du vecteur attaché au point  $P$  sont par convention

$$(1) \quad \xi = \sum_{(i)} \alpha_i (x_i - x), \quad \eta = \sum_{(i)} \alpha_i (y_i - y), \quad \zeta = \sum_{(i)} \alpha_i (z_i - z).$$

Ce vecteur s'appelle le *moment polaire* du système de masses par rapport au point  $P$  pris comme pôle<sup>4)</sup>. Soient

$$\xi', \eta', \zeta'$$

les composantes du moment polaire pour un autre point  $P'$  de coordonnées  $x', y', z'$ ; on a

$$(2) \quad \xi - \xi' = \mu(x' - x), \quad \eta - \eta' = \mu(y' - y), \quad \zeta - \zeta' = \mu(z' - z).$$

Si  $\mu$  est différent de zéro, il existe un point unique  $S$  pour lequel le moment polaire s'annule. Ses coordonnées  $x_s, y_s, z_s$  sont données par les formules

$$(3) \quad \sum_{(i)} \alpha_i (x_i - x_s) = 0, \quad \sum_{(i)} \alpha_i (y_i - y_s) = 0, \quad \sum_{(i)} \alpha_i (z_i - z_s) = 0,$$

ou

$$(3a) \quad \mu x_s = \sum_{(i)} \alpha_i x_i, \quad \mu y_s = \sum_{(i)} \alpha_i y_i, \quad \mu z_s = \sum_{(i)} \alpha_i z_i.$$

Ce point s'appelle le *centre de gravité* du système de masses<sup>5)</sup>.

4) Sur la dénomination de „moment polaire“ voir *W. Schell, Theorie der Bewegung*<sup>1)</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) 1, p. 74; *H. Grassmann [Die lineale Ausdehnungslehre, Leipzig 1844; (2<sup>e</sup> éd.) Leipzig 1878; Geom. Analyse 2), Werke 1<sup>1</sup>, p. 161, 375]* appelle moment polaire<sup>2)</sup> d'un point masse „l'excès du point  $\alpha A$  sur le pôle  $P$ “; p. 378 on trouve aussi le nom de „grandeur moyenne du point multiple carré  $\alpha A^2$ “ [cf. n° 10, note 38], de façon que le moment polaire linéaire d'un système de masses est identique à la „grandeur moyenne“ de *H. Grassmann*.

5) Sous cette forme (3a), le centre de gravité a été introduit pour la

Il demeure inchangé si toutes les masses sont multipliées par un même nombre.

Les coordonnées  $x, y, z$ , permettent de représenter les composantes du moment polaire pour un point quelconque  $P$  ainsi

$$(4) \quad \xi = \mu(x_s - x), \quad \eta = \mu(y_s - y), \quad \zeta = \mu(z_s - z).$$

Le moment polaire du système de masses est donc, pour tout pôle, égal au moment de la masse totale concentrée au centre de gravité. On en déduit le théorème suivant:

Pour obtenir le moment polaire d'un système de masses pour un pôle quelconque, il suffit de construire le vecteur qui va de ce pôle au centre de gravité et de le multiplier par  $\mu$ .

Inversement, si l'on connaît le moment polaire pour un pôle  $P^0$ , il en résulte une construction simple du centre de gravité<sup>6)</sup>.

Si  $\mu = 0$ , les équations (3) sont généralement impossibles. Les équations (2) deviennent alors

$$\xi = \xi', \quad \eta = \eta', \quad \zeta = \zeta';$$

le moment polaire  $M$  est alors le même pour tout point de l'espace<sup>6)</sup>. Désignons par  $\vec{q}$  ce vecteur. Si  $\vec{q}$  est différent de zéro, le système de masses est dit *système magnétique*<sup>6)</sup>; le vecteur  $\vec{q}$  est l'axe du système magnétique<sup>10)</sup>; on peut dire que le centre de gravité  $S$  du système est rejeté à l'infini dans la direction du vecteur  $\vec{q}$ .

première fois par P. Varignon, Hist. Acad. sc. Paris 1714, éd. 1717, M. p. 77. [Cf. IV 4, 21, 69, 81].

6) On trouve ce moment par la construction du vecteur  $PP'$  égal à la somme géométrique des segments  $a_i PA_i$ .

7) I. (J.) Somov [Racionalnaja mehanika<sup>1)</sup>]; trad. A. Zivert, Mechanik 2, p. 20] attribue cette construction du centre de gravité qui est indépendante des moments linéaires plans [cf. n° 3] à B. de Saint Venant; mais elle se trouve aussi pour un système de points simples dans I. N. M. Carnot [Corrélation des figures de géom.<sup>1)</sup>, p. 152/4, 158/9]; pour un système général (défini à la fin du n° 2) elle a été donnée par G. Bellavitis, Sposizione del metodo delle equipollenze [Mem. mat. fis. Soc. ital. delle scienze (1) 25 (1855), math. p. 225 (Modène) (1855); trad. par C. A. Laisant, Exposition de la méthode des équipollences, Paris 1874], par A. F. Möbius [Elemente der Mechanik des Himmels, Leipzig 1843; Werke 4, Leipzig 1887, p. 124], puis par H. Grassmann [Die lineale Ausdehnungslehre<sup>6)</sup>, § 24, 101; Werke 1<sup>1)</sup>, p. 72, 168] et enfin par B. de Saint Venant [C. R. Acad. sc. Paris 21 (1845), p. 623].

8) H. Grassmann, Geom. Analyse<sup>6)</sup>; Werke 1<sup>1)</sup>, p. 375.

9) Le nom de „système magnétique“ est justifié par ce fait qu'un système de masses magnétiques représente un pareil système [H. Grassmann, Die lineale Ausdehnungslehre<sup>6)</sup>, § 104; Werke 1<sup>1)</sup>, p. 170/2]; voir aussi E. Beltrami [Ann. mat. pura appl. (2) 10 (1889/2), p. 252; Opere 3, Milan 1911, p. 476]; cf. notes 40 et 55.

Mais il se peut que les équations (3) soient identiquement satisfaites, en sorte que non seulement  $\mu$  soit nul mais qu'en outre le vecteur  $\vec{q}$  s'annule aussi. Alors le moment polaire est nul pour tout pôle de l'espace et tout point peut être regardé comme centre de gravité du système<sup>11)</sup>. Le système de masses s'appelle dans ce cas *système indifférent*.

Si toutes les masses ont le même signe, la masse totale a une valeur finie différente de zéro et l'on trouve toujours un centre de gravité déterminé à distance finie. Le système de masses s'appelle alors *système pesant* parce que des masses pesantes fournissent un exemple d'un tel système. La théorie des systèmes pesants se distingue de la théorie des systèmes généraux, principalement dans l'étude des moments quadratiques qu'on verra plus loin (ces moments sont nécessairement tous positifs dans les systèmes pesants, parce qu'on y suppose tous les  $a_i$  positifs).

Nous appellerons *système de masses général* un système dont la masse totale est différente de zéro, même si les masses données n'ont pas toutes le même signe.

**3. Moments linéaires planaires. Moments statiques par rapport à un plan.** On appelle *moment statique* d'un système de masses relativement à un plan  $\pi$ <sup>12)</sup> ou *moment planaire linéaire* l'expression scalaire qu'on obtient en multipliant la masse de chaque point du système par la valeur algébrique de sa distance au plan  $\pi$  et en ajoutant les produits obtenus, la valeur algébrique de la distance d'un point à un plan étant la valeur absolue de la distance précédée du signe + ou du signe - suivant que le point est d'un côté ou de l'autre du plan. Soit

$$Ux + Vy + Wz = T$$

10) H. Grassmann, Die lineale Ausdehnungslehre<sup>6)</sup>, § 102; Werke 1<sup>1)</sup>, p. 168/9; cf. note 55. H. Grassmann remarque ici (p. 189) que le vecteur  $\vec{q}$  représente un point éloigné à l'infini dans la direction du vecteur et qu'il apparaît comme la moyenne ou l'axe moyen des points masses.

Quelques auteurs appellent ce système „abarycentrique“ (schwerpunktlos), mais on doit entendre par là seulement l'absence de centre de gravité à distance finie [cf. H. Grassmann, Die lineale Ausdehnungslehre<sup>6)</sup>, p. 144; Werke 1<sup>1)</sup>, p. 170]. Le centre de gravité demeure déterminé; seulement, dans ce cas, il est à l'infini. Voir aussi A. F. Möbius, Der baryc. Calcul<sup>6)</sup>, p. 11 (§ 9); Werke 1, p. 33.

11) A. F. Möbius [Der baryc. Calcul<sup>6)</sup>, p. 12 (§ 10); Werke 1, p. 34] dit: „le système n'a pas de centre de gravité“, mais on entend par là qu'il n'a pas un centre de gravité déterminé.

12) La notion de moment statique remonte à Archimède, ἐπιπέδων ἰσορροπιῶν ἢ κέντρα βαρῶν ἐκκέντρωσιν, prop. 6 et 7; Opera, éd. J. L. Heiberg 2, Leipzig 1881, p. 152/61.

l'équation du plan  $\pi$ , le moment statique du système de masses  $(\alpha_i A_i)$  est

$$(5) \quad M = \frac{\sum \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}$$

ou, d'après (3a),

$$(5a) \quad M = \frac{\mu (Ux_s + Vy_s + Wz_s - T)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}.$$

Le moment statique d'un système de masses général est donc, pour tout plan de l'espace, le moment statique de la masse totale concentrée au centre de gravité; il est égal au produit de cette masse totale par la distance du centre de gravité au plan de référence<sup>13</sup>).

En particulier il est nul pour tous les plans qui passent par le centre de gravité; autrement dit, le centre de gravité  $S$  est l'enveloppe des plans pour lesquels le moment statique est nul.

Si le système est un système magnétique, on a  $\mu = 0$  et  $q$  différent de zéro. Pour un plan quelconque de référence, le moment s'obtient en projetant l'axe  $q$  sur la normale au plan<sup>14</sup>). Le moment statique a donc son maximum  $q$  pour les plans perpendiculaires à la direction de l'axe  $q$ ; les plans parallèles à l'axe  $q$  du système donnent un moment nul [cf. n° 5].

Le moment statique d'un système indifférent est nul pour tous les plans de l'espace.

**4. Projection d'un système de masses sur un plan. Système rectiligne.** On appelle projection d'un point masse  $\alpha A$  sur un plan  $\pi$  le point masse  $\alpha A_0$  qui a pour masse la masse  $\alpha$  du point  $\alpha A$  et pour position  $A_0$  la projection du point  $A$  sur le plan  $\pi$ . En particulier le centre de projection peut être à l'infini. Dans ce cas la projection d'un système général donne lieu aux propositions suivantes:

1°) Le centre de gravité  $S_0$  de la projection d'un système sur un plan  $\pi$  s'obtient en projetant le centre  $S$  du système donné sur le plan  $\pi$ . En particulier si le plan  $\pi$  passe par  $S$ ,  $S_0$  coïncide avec  $S$ <sup>15</sup>).

13) A. F. Möbius [Der baryc. Calcul<sup>3</sup>], p. 5 (§ 3); Werke 1, p. 28] fonde sur cette propriété la définition du centre de gravité.

14) K. (Ch.) Culmann [Die graphische Statik (1<sup>re</sup> éd.), Zurich 1866, p. 25; (2<sup>e</sup> éd.) Zurich 1875, p. 86] emploie pour la projection sur la normale à un plan l'expression *antiprojection* sur le plan. Exemples: 1°) la hauteur d'une pyramide est l'antiprojection sur sa base de chacune des arêtes passant par son sommet; 2°) un des côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle est l'antiprojection de l'hypoténuse sur l'autre côté de l'angle droit. Voir aussi L. Cremona, Calcolo grafico<sup>3</sup>), p. 26

2°) Le moment polaire du système projeté sur  $\pi$  pour un point  $P_0$  du plan  $\pi$  est un vecteur de ce plan. On l'obtient en projetant sur  $\pi$  le vecteur qui représente le moment polaire du système de l'espace pour le même point  $P_0$ .

3°) Le moment statique du système plan pour une droite  $d_0$  du plan  $\pi$  s'obtient en prenant le moment statique du système pour le plan mené par la droite  $d_0$  perpendiculairement au plan  $\pi$ .

La projection orthogonale d'un système magnétique sur un plan quelconque forme encore un système magnétique dont l'axe est la projection du vecteur  $q$  sur le plan. Mais si le plan est perpendiculaire à l'axe du système de l'espace, le système projeté est un système indifférent.

Des propositions analogues peuvent être établies pour des systèmes rectilignes obtenus en projetant les points masses sur une droite.

**5. Théorèmes sur le centre de gravité. Centre des moyennes distances.** Les équations (3) du n° 2, qui définissent le centre de gravité comme le point pour lequel le moment polaire est nul, comportent l'interprétation géométrique suivante:

On peut avec les segments qui joignent le centre de gravité  $S$  à chacun des points du système multipliés respectivement par les masses  $\alpha_i$  former les côtés d'un polygone fermé.

Inversement, qu'on prenne un polygone fermé quelconque parcouru dans un certain sens de circulation, puis qu'à partir d'un point  $S$  on mène les vecteurs  $\vec{SA}_i$ , représentés par les côtés du polygone, le point  $S$  sera le centre de gravité des extrémités  $A_i$  de ces vecteurs.

Les équations (3a) du n° 2 peuvent être écrites symboliquement

$$(6) \quad \sum_{(i)} \alpha_i A_i = \mu S \quad \text{ou} \quad S = \frac{1}{\mu} \sum_{(i)} \alpha_i A_i.$$

15) Les rayons projetants sont liés par la relation

$$\sum_{(i)} \alpha_i A_i A_i^* = \mu SS^*.$$

En d'autres termes,  $SS^*$  peut être regardé comme le vecteur moyen des vecteurs  $\alpha_i A_i A_i^*$ . Si  $a_i$  est le pied de la perpendiculaire abaissée d'un point  $P$  quelconque de l'espace sur  $SA_i$ , on a

$$\sum_{(i)} \alpha_i SA_i \cdot Sa_i = 0.$$

Pour le cas où  $\alpha_i = 1$  pour chacun des indices  $i$ , voir L. N. M. Carnot, Corrélation des figures de géom.<sup>1</sup>), p. 161.



Le centre de gravité apparaît ainsi comme le *point moyen*<sup>16)</sup> ou bien, si on l'affecte de la masse totale du système, comme la *somme*<sup>17)</sup> des divers points du système.

Qu'on partage un système de masses général en systèmes partiels, qu'on prenne le centre de gravité de chaque système partiel muni de la masse totale du système partiel, qu'on prenne enfin le centre de gravité des points masses ainsi obtenus, on aura le centre de gravité du système donné. Si toutes les masses d'un système sont sur une droite ou dans un plan donné, le centre de gravité est sur cette droite ou dans ce plan.

En conséquence:

Si le système peut être divisé en parties telles que les centres de gravité partiels soient sur une même droite ou dans un même plan, cette droite ou ce plan passe par le centre de gravité du système total. On dit que c'est une droite de gravité ou un plan de gravité. On peut toujours diviser le système en deux ou en trois parties; cela fera connaître une droite ou un plan de gravité<sup>18)</sup>.

De là une méthode simple pour trouver dans bien des cas le centre de gravité d'un système donné [voir n° 24].

En particulier si toutes les masses du système sont égales à 1 les coordonnées du centre de gravité  $S$  sont

$$(7) \quad \begin{cases} x_s = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \\ y_s = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}, \\ z_s = \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n}. \end{cases}$$

La distance du point  $S$  à un plan quelconque est donc la moyenne des distances de tous les points du système au même plan.

Pour cette raison, le centre de gravité est alors appelé *centre des moyennes distances*<sup>19)</sup>. Tout plan de symétrie ou axe du système des points  $A_i$  passe par le centre de gravité.

16) H. Grassmann, J. reine angew. Math. 24 (1842), p. 271; Werke 1<sup>1</sup>, publ. par F. Engel, Leipzig 1894, p. 72, 618; cf. n° 5, note 19 et n° 7, notes 26 et 27.

17) A. F. Möbius, Der baryc. Calcul<sup>2)</sup>, p. 25 (§ 22); J. reine angew. Math. 28 (1844), p. 7/8; Werke 1, p. 44, 611; H. Grassmann, Geom. Analyse<sup>3)</sup>, § 15; Werke 1<sup>1</sup>, p. 376; cf. n° 5, note 21.

18) Si  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont les masses des centres de gravité partiels  $S_1$  et  $S_2$ , on a  $\mu_1 + \mu_2 = \mu$  et  $\mu_1 SS_1 + \mu_2 SS_2 = 0$ .

19) L. N. M. Carnot, Corrélation des figures de géom.<sup>1)</sup>, p. 154. J. V. Poncelet J. reine angew. Math. 3 (1828), p. 213/72] envisage le centre des moyennes

Dans un système magnétique le centre de gravité est rejeté à l'infini dans la direction de l'axe [n° 2]. C'est le point  $S_\infty$ . Les propositions établies pour un système général se modifient alors ainsi:

L'enveloppe des plans de moment statique nul<sup>20)</sup> est le point  $S_\infty$  [n° 3] et le vecteur  $\vec{q}$  peut être regardé comme la somme des points masses  $a_i A_i$ , au moyen de l'équation<sup>21)</sup>

$$\sum_{(i)} a_i A_i = \vec{q}.$$

Si l'on partage un système magnétique en deux parties non magnétiques, la droite qui joint les centres de gravité des deux systèmes partiels est parallèle à la direction de l'axe du système magnétique.

Les masses des deux systèmes partiels sont alors égales et de signes contraires. Si l'on multiplie leur valeur absolue par la distance des deux centres de gravité, on obtient la longueur  $q$  de l'axe  $\vec{q}$ . En particulier, la direction de l'axe s'obtient en joignant un point quelconque du système au centre de gravité des autres; la ligne de jonction est égale à  $-\frac{1}{a_i} \vec{q}$ ,  $a_i$  étant la masse du point choisi. Si un système magnétique est formé de systèmes magnétiques partiels, l'axe du système total  $\vec{q}$  est la résultante des vecteurs  $\vec{q}_i$  qui correspondent aux systèmes partiels, ce que l'on peut représenter par l'équation

$$\sum_{(i)} \vec{q}_i = \vec{q}.$$

Dans un système indifférent tout point de l'espace est centre de gravité [n° 2]. La somme des  $n$  points  $a_i A_i$  est nulle.

Si l'on partage un système indifférent en deux systèmes partiels non indifférents, les deux centres de gravité coïncident. En particulier, tout point d'un système indifférent coïncide avec le centre de gravité du reste du système; réciproquement un système général devient un système indifférent si on lui ajoute, au centre de gravité, une masse égale à la masse totale du système changée de signe.

distances comme le centre de la moyenne harmonique relativement au plan de l'infini [cf. n° 11]; voir aussi M. Chasles, Aperçu hist.<sup>1)</sup>, (2<sup>e</sup> éd.), p. 616, 713. H. Grassmann [J. reine angew. Math. 24 (1842), p. 271; Werke 2<sup>1</sup>, publ. par E. Study, G. Scheffers et F. Engel, Leipzig 1894, p. 12] disait „moyenne harmonique par rapport à un plan“ au lieu de centre de moyenne harmonique et „moyenne des points“ au lieu de centre des moyennes distances.

20) A. F. Möbius, Der baryc. Calcul<sup>2)</sup>, p. 9/12 (§ 8, 9); Werke 1, p. 31/3.

21) H. Grassmann, Geom. Analyse<sup>3)</sup>, appendice III, § 20; Werke 1<sup>1</sup>, p. 308; cf. n° 5, note 17.

**6. Coordonnées barycentriques.** Si le système de masses est formé seulement de deux points masses  $\alpha_1 A_1$  et  $\alpha_2 A_2$ , nous pouvons choisir la droite  $A_1 A_2$  pour axe des  $x$ . Alors les coordonnées  $y$  et  $z$  des points  $A_1, A_2$  et du centre de gravité  $S$  sont nulles et la coordonnée  $x_s$  a pour valeur

$$(8) \quad x_s = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Le point  $S$  partage le segment  $A_1 A_2$  en parties inversement proportionnelles aux masses  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ ; il est à l'intérieur du segment ou à l'extérieur suivant que  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont de même signe ou de signes contraires<sup>22)</sup>. Si l'on a

$$\alpha_2 = -\alpha_1,$$

$S$  est à l'infini sur la droite  $A_1 A_2$  [n° 2].

Pour abrégé, nous passons le cas de trois points masses. Soit un système composé de quatre masses

$$\alpha_1 A_1, \alpha_2 A_2, \alpha_3 A_3, \alpha_4 A_4.$$

Le centre de gravité  $S$  est sur chacune des trois droites qui vont du centre de gravité des deux masses placées aux extrémités d'une arête au point analogue de l'arête opposée; il partage chacune d'elles dans le rapport inverse des masses placées aux extrémités de cette droite. La distance du point  $S$  à l'une des faces du tétraèdre est à la hauteur correspondante, comme la masse  $\alpha_r$  du sommet correspondant  $A_r$  est à la masse totale

$$\mu = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4.$$

Qu'on laisse maintenant fixes les quatre sommets  $A_1, A_2, A_3, A_4$  et qu'on change seulement leurs masses  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , en laissant constante leur somme  $\mu$ ; chaque quadruplet  $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$  définit un point  $S$  unique et inversement chaque point  $S$  définit un quadruplet unique  $(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4)$ .

Ces quatre valeurs  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  sont les *coordonnées barycentriques* du point  $S$  relativement au tétraèdre fondamental  $A_1 A_2 A_3 A_4$ <sup>23)</sup>. Elles ont été introduites par A. F. Möbius et employées dans son Calcul barycentrique<sup>2)</sup> en 1827. Ce sont les coordonnées homogènes introduites pour la première fois dans la géométrie analytique<sup>24)</sup>. Les

22) Cette loi du levier remonte à Archimède. Cf. note 12 et l'article IV 1.

23) Elles sont proportionnelles aux tétraèdres qui ont pour sommet commun  $S$  et pour bases les quatre faces  $\Delta_i$  qui sont opposées aux sommets  $A_i$  dans le tétraèdre fondamental.

24) Voir H. R. Baltzer dans A. F. Möbius, Werke 1, Leipzig 1885, préface p. IX, et ce que H. Grassmann (Die lineale Ausdehnungslehre<sup>2)</sup>), § 117; Werke 1<sup>1</sup>, p. 193] appelle „barycentrisches Richtsystem“ de A. F. Möbius.

coordonnées tétraédriques de J. Plücker<sup>25)</sup> dérivent des coordonnées barycentriques en multipliant celles-ci par un facteur constant arbitraire.

**7. Le système de masses envisagé comme un système de forces parallèles.** Les propositions données dans les numéros précédents prennent une interprétation caractéristique quand on représente chaque masse  $\alpha_i$  par un segment  $A_i B_i$  mené à partir du point  $A_i$  parallèlement à une direction  $u$  et dans un sens correspondant au signe de  $\alpha_i$ . On arrive ainsi aux théorèmes connus de la statique des corps solides [voir IV 4, 81].

Dans le cas d'un système de masses général, c'est-à-dire tel que  $\mu$  soit différent de zéro, on peut trouver un segment résultant  $SR$ <sup>26)</sup> appliqué au centre de gravité  $S$ . Comme la direction  $u$  est arbitraire, si l'on fait tourner les segments  $A_i B_i$  d'un angle  $\psi$  autour des points  $A_i$  en les laissant parallèles, la résultante  $SR$  tourne du même angle autour de  $S$ .

Les segments  $A_i B_i$  peuvent être regardés comme des forces appliquées aux points  $A_i$ ;  $S$  est le centre des forces parallèles  $A_i B_i$ <sup>27)</sup>.

Si l'on prend toutes les masses égales à 1, les segments  $SA_i$  peuvent représenter un système de forces appliquées au point  $S$  et se faisant équilibre. Si, au point  $S$ , on applique  $n$  forces ne se faisant pas équilibre, leur résultante est le segment  $nSM$  obtenu en multipliant par  $n$  le segment qui a pour origine le point  $S$  et pour extrémité le centre des moyennes distances  $M$  des extrémités des segments qui représentent les forces.

Si l'on remplace un système magnétique par un système de forces parallèles, appliquées aux points masses et ayant pour intensités ces masses<sup>28)</sup>, ces forces se font équilibre quand leur direction  $u$  coïncide avec la direction de l'axe du système magnétique; mais si la direction  $u$  fait avec celle de l'axe magnétique un angle  $\omega$ , les forces forment un couple de moment  $q \sin \omega$ <sup>29)</sup>. On peut prendre le bras de levier

25) J. reine angew. Math. 5 (1880), p. 1; Wiss. Abh. 1, Leipzig 1895, p. 124. Voir aussi G. Bellavitis, Mem. mat. fis. Soc. ital. delle scienze (1) 25 (1855), math. p. 225/309 [1855]; trad. C. A. Laisant, p. 90/1.

26) A cause de cette propriété du centre de gravité, D. Chelini [Mem. Ist. Bologna (2) 10 (1869/70), p. 343] le nomme *point résultant* du système des points  $A_i A_i$ .

27) Voir A. F. Möbius, Lehrbuch der Statik 1, Leipzig 1837, § 105/6; Werke 3, Leipzig 1886, p. 151/5.

28) A. F. Möbius, Statik<sup>21)</sup> 1, § 107; Werke 3, p. 155/6; et aussi l'article IV 4, n° 83.

29) Le couple peut être envisagé comme une force infiniment petite ou de longueur nulle rejetée à l'infini. Voir l'article IV 4, n° 21. Sur la composition

du couple dans la direction de l'axe du système magnétique et lui donner une longueur arbitraire  $a$ ; dès lors les forces du couple ont pour intensité  $\frac{g}{a}$  et tournent autour de leurs points d'application en même temps que les forces du système donné.

En particulier, on peut réduire le système de forces parallèles à un couple en réduisant à une force un certain nombre des forces du système, qui ne se réduisent pas à un couple, et en composant de même les autres forces du système. Les deux résultantes partielles forment alors le couple.

Si l'on remplace les masses d'un système indifférent par des forces parallèles, celles-ci sont en équilibre quelle que soit la direction  $u$  choisie pour ces forces<sup>29)</sup>.

**8. Systèmes congruents et systèmes semblables.** D'un système de masses on déduit un système de masses congruent par un simple déplacement dans l'espace. Par rapport au système, la position du centre de gravité demeure la même. Qu'on change le signe de la masse  $\alpha_i$  du point  $\alpha_i A'_i$  du second système, il formera avec le point masse  $\alpha_i A_i$  du système primitif un système magnétique; tous les systèmes magnétiques ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) réunis forment encore un système magnétique qui comprend les deux systèmes congruents considérés. De là résulte [voir n° 4] l'équation remarquable<sup>30)</sup>

$$\sum_{(i)} \alpha_i A_i A'_i = \mu S S',$$

où  $S$  et  $S'$  représentent les centres de gravité des systèmes congruents donnés, et où  $\Sigma$  désigne la somme géométrique des vecteurs.

D'un système de masses on peut déduire un autre système par une transformation homographique d'affinité (ou, en particulier, de similitude) de l'espace. La même transformation faite sur le centre de gravité du premier système l'amène sur le centre de gravité du second système<sup>31)</sup> [cf. n° 24].

#### Moments quadratiques. Le système antipolaire.

**9. Les différentes espèces de moments quadratiques et leurs significations respectives.** Le moment quadratique d'un système de

de telles forces dans le plan de l'infini voir *K. (Ch.) Culmann, Graph. Statik*<sup>14)</sup>, (1<sup>re</sup> éd.) p. 106/18; (2<sup>e</sup> éd.) p. 160/74, 187/91, 219, 253; trad. par *G. Glasser, J. Jacquier* et *A. Valat*, Traité de statique graphique, Paris 1880, p. 150/63, 177/81, 209, 243.

30) *A. F. Möbius, Mechanik des Himmels*<sup>7)</sup>, § 76; Werke 4, p. 134. Il en déduit le théorème de la conservation du centre de gravité.

31) Pour les figures semblables, le théorème remonte à *Archimède*. Cf. IV 1.

masses par rapport à un point, à une droite ou à un plan est une expression scalaire; pour l'obtenir, on multiplie chaque masse par le carré de sa distance au point, à la droite ou au plan et on ajoute les produits. Les distances à la droite ou au plan peuvent être évaluées, soit suivant la perpendiculaire, soit suivant une direction oblique donnée. Les moments quadratiques sont aussi appelés *moments d'inertie* polaires  $J_p$ , axiaux  $J_a$  ou planaires  $J_s$  suivant qu'ils se rapportent à un point, une droite, ou un plan. On appelle *rayon de giration* un segment dont le carré multiplié par la masse totale du système reproduit le moment d'inertie. Le rayon de giration est, comme le moment d'inertie correspondant, *polaire*  $k_p$ , *axial*  $k_a$  ou *planaire*  $k_s$ <sup>32)</sup>.

Choisissons dans l'espace un système de trois plans perpendiculaires quelconques  $\xi, \eta, \zeta$  pour définir un système de coordonnées. Les moments d'inertie correspondants pour un système de masses ( $\alpha A$ ) sont donnés par les expressions

$$(9) \quad J_\xi = \sum_{(i)} \alpha_i x_i^2, \quad J_\eta = \sum_{(i)} \alpha_i y_i^2, \quad J_\zeta = \sum_{(i)} \alpha_i z_i^2.$$

Les moments d'inertie pour les axes  $x, y, z$  sont alors<sup>33)</sup>

32) *I. (J.) Somov [Racionalnaja mehanika*<sup>1)</sup>; trad. *A. Zivert, Mechanik* 2, p. 531] adopte pour le moment d'inertie  $J_a$  l'expression employée par *L. Euler* de „moment d'inertie“; mais, contrairement à *K. (Ch.) Culmann [Graph. Statik*<sup>14)</sup>, (1<sup>re</sup> éd.) p. 160/80; Statique graphique<sup>29)</sup>, Paris 1880, p. 367], *W. Schell [Theorie der Bewegung*<sup>1)</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) 1, p. 100/5] et *E. J. Routh [A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, (6<sup>e</sup> éd.) 1, Londres 1897; trad. *A. Schepp, Die Dynamik der starren Körper* 1, Leipzig 1898, p. 2], il remplace la dénomination de *J. P. M. Binet [J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 42]* „moment d'inertie par rapport à un plan“ par l'expression de „moment quadratique par rapport à un plan“. *J. N. Haton de la Goupillière [J. Éc. polyt. (1) cah. 37 (1858), p. 73/6]*, appelle les moments d'inertie  $J_a, J_p, J_s$  respectivement „moment d'inertie, somme d'inertie, moment central d'inertie“; mais plus tard [Revue gén. sc. 4 (1893), p. 340] il emploie la dénomination que nous employons ici.

Déjà *L. Euler [Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum, Rostock et Greifswald 1765, p. 166]* avait (pour les masses pesantes) employé la quantité  $J_a$  sous la forme  $\mu k_a^2$ . *L. Poincaré [J. math. pures appl. (1) 16 (1851), p. 73]* se rattachant à *L. Euler* introduisit pour la première fois la notion de rayon d'inertie  $k_a$  qu'il appelait „bras d'inertie autour de l'axe  $a$ “. *J. N. Haton de la Goupillière* (comme aussi *J. Mac Cullagh*) donne aux rayons d'inertie  $k_a, k_p$  et  $k_s$  respectivement les noms de „rayon de giration, module de giration, et rayon central de giration“. *W. Schell [Theorie der Bewegung*<sup>1)</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) 1, p. 78, 100], dit au contraire respectivement „rayon d'inertie, bras d'inertie et rayon polaire du moment quadratique“. *I. (J.) Somov [Racionalnaja mehanika*<sup>1)</sup>; trad. *A. Zivert, Mechanik* 2, p. 74] n'emploie aucun nom particulier pour  $k_a$ .

33) *L. Euler, Theoria motus*<sup>29)</sup> p. 176/7.

$$(10) \quad \begin{cases} J_x = \sum_{(i)} \alpha_i (y_i^2 + z_i^2) = J_y + J_z, \\ J_y = \sum_{(i)} \alpha_i (x_i^2 + z_i^2) = J_x + J_z, \\ J_z = \sum_{(i)} \alpha_i (x_i^2 + y_i^2) = J_x + J_y. \end{cases}$$

Ainsi, pour obtenir le moment d'inertie  $J_x$  pour un axe quelconque  $\bar{x}$ , il suffit d'ajouter les moments d'inertie par rapport à deux plans rectangulaires passant par l'axe.

Inversement, on a

$$(11) \quad J_{\bar{x}} = \frac{1}{2}(J_y + J_z - J_x), \quad J_{\bar{y}} = \frac{1}{2}(J_x + J_z - J_y), \quad J_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(J_x + J_y - J_z).$$

Le moment polaire  $J_0$  pour l'origine 0 des coordonnées est

$$(12) \quad J_0 = \sum_{(i)} \alpha_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) = J_x + J_y + J_z = \frac{1}{2}(J_x + J_y + J_z).$$

Le moment d'inertie  $J_P$  pour un point quelconque  $P$  est donc égal à la somme des moments d'inertie pour trois plans perpendiculaires passant par ce point; il est aussi égal à la demi-somme des moments d'inertie pour trois axes rectangulaires passant par ce point.

On peut aussi écrire

$$(13) \quad J_0 = J_{\bar{x}} + J_x = J_{\bar{y}} + J_y = J_{\bar{z}} + J_z,$$

ou

$$J_{\bar{x}} = J_0 - J_x, \quad J_{\bar{y}} = J_0 - J_y, \quad J_{\bar{z}} = J_0 - J_z.$$

Ainsi pour trouver le moment d'inertie  $J_x$  pour un plan  $\pi$ , il suffit de prendre le moment d'inertie pour un point quelconque de ce plan et d'en retrancher le moment d'inertie par rapport à un axe mené par le point choisi perpendiculairement au plan donné.

Les moments d'inertie ne sont pas nécessairement positifs si les masses  $\alpha_i$  peuvent être à volonté positives ou négatives, mais si l'on suppose le système pesant (ou plus généralement tous les  $\alpha_i > 0$ ), les moments d'inertie sont essentiellement positifs. Par suite, le cas particulier des systèmes pesants conduit aux théorèmes suivants:

Si l'on prend trois axes rectangulaires passant par un point  $P$ , chaque moment d'inertie est plus petit que la somme des deux autres (équation 11); chacun d'eux est plus petit que le moment polaire par rapport au point  $P$  (équation 12). Le moment d'inertie par rapport à un plan est plus petit que le moment d'inertie par rapport à toute droite de ce plan (équation 10), plus petit aussi que le moment d'inertie pour tout point du plan (équation 13).

Aux moments quadratiques se rattachent aussi ce qu'on appelle les *moments de déviation*<sup>34)</sup>, ou *produits d'inertie*, ou *moments centrifuges*<sup>35)</sup>. On choisit deux plans quelconques  $\xi$  et  $\eta$ , on prend les distances  $x_i$  et  $y_i$  d'un point  $(\alpha_i A_i)$  du système à ces deux plans parallèlement à des directions choisies, on multiplie leur produit  $x_i y_i$  par la masse  $\alpha_i$  correspondante et l'on fait la somme des produits obtenus. L'expression scalaire obtenue est le moment de déviation

$$(14) \quad D_{\xi, \eta} = \sum_{(i)} \alpha_i x_i y_i.$$

Si les deux plans coïncident, le moment de déviation coïncide visiblement avec le moment d'inertie planaire  $J_\pi$  du plan correspondant.

Si le moment de déviation est nul pour un couple de plans on dit avec *J. P. M. Binet*<sup>36)</sup> que les deux plans sont conjugués par rapport au système de masses. Un plan pour lequel le moment d'inertie  $J_\pi$  est nul est dit *autoconjugué*. Si trois plans sont conjugués deux à deux, ils forment un *trièdre conjugué de Binet*<sup>36)</sup>; s'ils sont rectangulaires ils déterminent pour leur point commun  $P$  les *plans principaux* et les *axes principaux d'inertie*<sup>37)</sup>, autrement dit le *trièdre principal d'inertie* correspondant. En général [voir n° 11, 2°; et n° 17, 18], à chaque point  $P$  correspond un seul trièdre principal d'inertie. Pour chacun des trois plans principaux ou des trois axes principaux, le point  $P$  s'appelle le *point principal*.

Nous appellerons  $A, B, C$  les trois moments plans et  $A', B', C'$  les trois moments axiaux relatifs au trièdre principal d'inertie corres-

34) Pour la dénomination de moment de déviation et pour celle de produit d'inertie voir *E. J. Routh*, *Dynamics*<sup>37)</sup>, (6<sup>e</sup> éd.) 1, p. 2; trad. *A. Schepp* 1, p. 2; *W. Schell*, *Theorie der Bewegung*<sup>3)</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) 1, p. 104. Ces deux auteurs renvoient d'ailleurs à *W. J. M. Rankine*, *A manual of applied mechanics*, Londres 1858; (5<sup>e</sup> éd.), Londres 1876; trad. par *A. Vialay*, *Manuel de mécanique appliquée*, Paris 1876.

35) Voir surtout *K. (Ch.) Culmann*, *Graph. Statik*<sup>38)</sup>, (2<sup>e</sup> éd.), p. 423 qui dit „Centrifugalmomente“; *Statique graphique*<sup>39)</sup>, p. 392. Voir aussi *F. Müller-Breslau*, *Statik der Baukonstruktionen*, Leipzig 1887, p. 27; *O. Mohr*, *Der Civilingenieur* 33 (1887), p. 48. *D. Chelini*, *Memorie Ist. Bologna* (2) 10 (1869/70), p. 207] appelle le moment de déviation „moment complexe“ (momento complesso).

36) *J. P. M. Binet* [*J. Éc. polyt.* (1) cah. 16 (1813), p. 47] pour le système pesant.

37) D'après *L. Euler*, *Theoria motus*<sup>40)</sup>, p. 176 „*axes principales*“ auxquelles *corporis sunt tres illi axes per ejus centrum inertiae transeuntes, quorum respectu momenta inertiae sunt vel maxima vel minima*“ [cf. n° 21]. Pour la définition d'un *axe principal d'inertie pris isolément*, cf. n° 18. Pour un système pesant, la définition d'un tel *axe isolé* est donnée par *W. Thomson* [*Cambr. Dublin math. J.* 1 (1846), p. 127], qui la basait sur des considérations dynamiques.

pendant au centre de gravité;  $a, b, c; a', b', c'$  les rayons de giration correspondants. En outre, pour les systèmes pesants, nous admettrons que ces quantités sont rangées par ordre de grandeur  $a < b < c$  et par suite (équation 13)  $a' > b' > c'$ .

**10. Moments polaires quadratiques.** Le moment polaire quadratique d'un système de masses pour un point  $P$  de coordonnées  $x, y, z$ <sup>38)</sup> est représenté par l'expression suivante:

$$(15) \quad J_p = \Sigma \alpha_i \{ (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2 \}.$$

Si l'on suppose que le système est un système de masses général, on peut introduire les coordonnées  $x_s, y_s, z_s$  du centre de gravité  $S$ , la formule (15) devient (form. 3a)

$$J_p = \Sigma \alpha_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - 2\mu(x_s x + y_s y + z_s z) + \mu(x_s^2 + y_s^2 + z_s^2).$$

En introduisant dans cette formule le moment pour le centre de gravité

$$(16) \quad J_p^{(0)} = \Sigma \alpha_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \mu(x_s^2 + y_s^2 + z_s^2),$$

nous obtenons<sup>39)</sup>

$$(17) \quad J_p = J_p^{(0)} + \mu[(x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2] = J_p^{(0)} + \mu \overline{PS}^2.$$

Ainsi donc, suivant que la masse  $\mu$  est positive ou négative, le moment polaire  $J_p$  atteint son minimum ou son maximum quand le pôle  $P$  est au centre de gravité  $S$  et il est le même pour tous les points  $P$  d'une même sphère quelconque de centre  $S$ .

Soit  $k_p^{(0)}$  le rayon de giration du point  $S$ ; décrivons autour du point  $S$  comme centre une sphère  $K_s$  de diamètre  $k_p^{(0)}$  et soit  $MN$  un diamètre de cette sphère; on a pour un point  $P$  quelconque de l'espace

$$(18) \quad \begin{cases} J_p = \frac{\mu}{2} (\overline{PM}^2 + \overline{PN}^2) & \text{si } \mu J_p^{(0)} > 0, \\ J_p = \mu \overline{PM} \cdot \overline{PN} \cdot \cos(MPN) & \text{si } \mu J_p^{(0)} < 0. \end{cases}$$

38) H. Grassmann [Geom. Analyse<sup>1)</sup>, § 16; Werke 1<sup>1)</sup>, p. 376] appelle le moment quadratique polaire<sup>2)</sup> d'un système de masses ( $\alpha A$ ) „l'excès du point multiple carré  $\alpha A^2$  sur le pôle  $P$ “.

39) Les deux formules (17) et (19) sont dues, pour les systèmes pesants, à J. L. Lagrange [Nouv. Mém. Acad. Berlin 14 (1788), éd. 1786, p. 290/1; Œuvres 5, Paris 1870, p. 539/40]. L. N. M. Carnot [Corrélation des figures de géom.<sup>1)</sup>, p. 166] en a donné diverses applications géométriques. Pour un système de masses quelconque, voir les travaux de C. A. Laisant [Bull. Soc. math. France 6 (1877/8), p. 193/4], de G. Darboux [id. 7 (1878/9), p. 7/12] et de G. Jung [id. 7 (1878/9), p. 132/3]. J. N. Haton de la Goupillière [Revue gén. sc. 4 (1893), p. 389] appelait le premier membre de la relation (19) „le moment absolu du système“.

Cette sphère  $K_s$  peut, d'après H. Grassmann<sup>43)</sup>, être employée pour représenter le système de masses au point de vue de ses moments polaires quadratiques. Si le signe de  $\mu$  est celui de  $J_p^{(0)}$ , on peut imaginer la masse totale  $\mu$  partagée également entre les deux extrémités  $M$  et  $N$  d'un diamètre quelconque ou bien uniformément répartie sur toute la sphère. Ce système réduit coïncide aussi avec le système donné pour tous les moments linéaires. Si  $\mu$  et  $J_p^{(0)}$  ont des signes contraires, la sphère  $K_s$  fournit par un diamètre quelconque  $MN$  le moment polaire quadratique pour un point  $P$  quelconque en multipliant par la masse  $\mu$  le produit intérieur (ou scalaire) des segments  $\overline{PM}$  et  $\overline{PN}$ .

Formons le moment polaire relatif au point  $A_i$ , c'est  $\sum_{(j)} \alpha_i \overline{A_i A_j}^2$ ; multiplions-le par  $\alpha_i$  et ajoutons les résultats ainsi obtenus pour tous les points du système, nous aurons  $2 \sum_{(i)} \sum_{(j)} \alpha_i \alpha_j \overline{A_i A_j}^2$ . D'après l'équation (17), la moitié de cette expression a pour valeur<sup>40)</sup>

$$(19) \quad \sum_{(i)} \sum_{(j)} \alpha_i \alpha_j \overline{A_i A_j}^2 = \mu \sum_{(i)} \alpha_i \overline{S A_i}^2.$$

Dans la double somme de cette formule, on doit prendre pour les indices  $i$  et  $j$  les  $\frac{1}{2}n(n-1)$  combinaisons binaires des nombres naturels 1, 2, ...,  $n$ . Si tous les points du système sont simples, l'équation (19) s'écrit

$$(20) \quad \sum_{(i)} \sum_{(j)} \overline{A_i A_j}^2 = n \sum_{(i)} \overline{S A_i}^2.$$

Considérons un système magnétique et désignons par  $A_1, A_2, A_3$  les composantes de son axe  $\vec{q}$ , savoir

$$A_1 = \sum_{(i)} \alpha_i x_i, \quad A_2 = \sum_{(i)} \alpha_i y_i, \quad A_3 = \sum_{(i)} \alpha_i z_i.$$

Posons en outre

$$A_0 = \frac{1}{2} \sum_{(i)} \alpha_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

Le moment polaire quadratique pour le pôle  $P(x, y, z)$  aura pour valeur

$$(21) \quad J_p = -2(A_1 x + A_2 y + A_3 z - A_0).$$

D'après cette formule, les points dont le moment est nul sont ceux du plan  $\xi_0$ <sup>40)</sup> défini par l'équation

$$A_1 x + A_2 y + A_3 z - A_0 = 0.$$

40) Si les coefficients représentent des masses magnétiques, le plan  $\xi_0$  coïn-

Ce plan est normal à l'axe  $\vec{q}(A_1, A_2, A_3)$  du système magnétique et tous les points d'un même plan quelconque parallèle à  $\xi_0$  ont le même moment polaire. La valeur de ce moment s'obtient d'après (21) en multipliant la distance du plan considéré au plan  $\xi_0$  par la grandeur

$$G = 2\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

où l'on reconnaît le double du vecteur  $\vec{q}$ . H. Grassmann<sup>42)</sup> a remarqué qu'on peut représenter le système magnétique au point de vue de ses moments polaires quadratiques par le plan  $\xi_0$  muni du poids  $G$ . L'axe  $\vec{q}$  du système magnétique s'obtient alors en prenant le vecteur  $\frac{1}{2}\vec{G}$  normal au plan  $\xi_0$ . Enfin on a<sup>41)</sup>

$$(22) \quad q^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = \sum_{(i)} \sum_{(j)} \alpha_i \alpha_j \bar{A}_i \bar{A}_j.$$

Pour un système indifférent, on a  $q = 0$ , c'est-à-dire

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0;$$

le moment polaire a donc pour valeur

$$(23) \quad J_p = 2A_0;$$

il est le même pour tous les points de l'espace<sup>42)</sup>. Enfin on a<sup>43)</sup>

$$(24) \quad \sum_{(i)} \sum_{(j)} \alpha_i \alpha_j \bar{A}_i \bar{A}_j^2 = 0.$$

cide avec le plan que E. Beltrami [Ann. mat. pura appl. (2) 10 (1880/2), p. 252; Opere 3, Milan 1911, p. 476] appelle plan central, tandis que la grandeur du vecteur  $\vec{q}$  donne alors le moment principal du système; voir aussi F. P. Ruffini, Rendic. Accad. Bologna (2) 3 (1898/9), p. 17 et suiv. D'après les dénominations de H. Grassmann, le plan  $\xi_0$  avec son complément qui est un vecteur normal à ce plan, constitue une grandeur planaire intérieure (innere Plangrösse). Cf. IV 4, n° 7, 12, 16.

41) G. Darboux [Bull. Soc. math. France 7 (1878/9), p. 7/12]; G. Jung [id. 7 (1878/9), p. 132/8].

42) A. F. Möbius [J. reine angew. Math. 26 (1843), p. 26/31; Werke 1, Leipzig 1885, p. 583/8] a donné diverses applications géométriques de cette propriété.

43) Les moments polaires quadratiques coïncident avec les expressions que H. Grassmann appelle „grandeurs intérieures“. Ce qui est dit dans le texte éclaircit la classification que fait H. Grassmann des grandeurs intérieures en trois espèces [Geom. Analyse<sup>5)</sup>, § 16 à 22; Werke 1<sup>1)</sup>, p. 376/94; voir aussi A. F. Möbius, dans H. Grassmann, Geom. Analyse<sup>5)</sup>, appendice (Anhang); A. F. Möbius, Werke 1, Leipzig 1885, p. 620/33] et rend compréhensibles les dénominations adoptées par H. Grassmann de „grandeurs sphériques“, „grandeurs planes intérieures“ et „produit de segments“. De cette façon cette classification des moments polaires quadratiques du système de masses est mise d'accord avec celle qui a été donnée au n° 2 [Voir G. Jung, Reale Ist. Lombardo Rendic. (2) 16 (1883), p. 616].

11. Moments planaires quadratiques et de déviation et leur relation avec le système antipolaire lié au système de masses. L'exposition qu'on va faire de la théorie des moments planaires quadratiques découle d'une construction géométrique simple qui fait correspondre à tout plan un point déterminé de l'espace.

Transformons le système de masses

$$(\alpha A)$$

en donnant à chaque point  $A$ , une nouvelle masse  $\alpha'_i$  égale au moment statique de  $\alpha_i A_i$  par rapport à un plan donné  $\pi$ . Cherchons alors le centre de gravité du système transformé

$$(\alpha'_i A_i);$$

ce point est appelé par K. (Ch.) Culmann<sup>44)</sup> le centre du second degré<sup>45)</sup>

44) Graph. Statik<sup>14)</sup>, (2<sup>e</sup> éd.), p. 413; Statique graphique<sup>15)</sup>, p. 386.

45) La relation polaire entre un plan  $\pi$  et son centre du second degré a été établie d'abord par des considérations de statique géométrique et pour le cas d'un système pesant par L. Cremona [Corso litogr. di statica grafica, Milan 1867/8, § 12, n° 92 et suiv.] puis par O. Mohr [Der Civilingenieur 33 (1887), p. 60] et W. Ritter [Revue polytechnique, Schweizer. Bauzeitung 11 (1888), p. 121]; pour un système de masses quelconque c'est G. Jung [Reale Ist. Lombardo, Rendic. (2) 8 (1875), p. 698/701; (2) 12 (1879), p. 169/79, 218/28, 535/6, en partic. § 10; Collectanea mathematica in memoriam Dominici Chelini, publ. par L. Cremona et E. Beltrami, Milan 1881, p. 11] qui a démontré la proposition et cela par des considérations de statique géométrique. K. (Ch.) Culmann [Graph. Statik<sup>14)</sup>, (1<sup>re</sup> éd.), p. 170/2; Statique graphique<sup>15)</sup>, p. 387] a déduit la même relation, pour un système pesant, par des considérations analytiques, en s'appuyant sur les propriétés de l'ellipsoïde central auxquelles il était parvenu analytiquement.

En même temps que K. (Ch.) Culmann, M. Bresse [Cours de mécanique appliquée, (2<sup>e</sup> éd.) 1, Paris 1866, p. 80] étudiait cette polarité dans le plan et introduisait pour la première fois les dénominations „antipôle d'une droite“, „droite antipolaire“, etc. adoptées ensuite par K. (Ch.) Culmann [Graph. Statik<sup>14)</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) Zurich 1875] et étendues à l'espace (ces dénominations se justifient au n° 12).

Dans Th. Reye [Z. Math. Phys. 10 (1865), p. 440] on trouve déjà les dénominations „contrepôle“ et „droite contrepolaire“; comme K. (Ch.) Culmann, Th. Reye procéda analytiquement dans le cas d'un système pesant; mais (p. 446) il démontra expressément que les points et leurs plans contrepolaires forment un système polaire par rapport à une surface imaginaire.

La même proposition se trouve aussi implicitement contenue dans L. O. Hesse [Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, (2<sup>e</sup> éd.) Leipzig 1869, p. 352/63; (3<sup>e</sup> éd.) revue et complétée par S. Gundelfinger, Leipzig 1876, p. 355/67] qui n'envisage que le cas d'un système pesant et suit une voie analytique.

Pour un système de masses quelconque, Th. Reye [J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 293] a établi la proposition en question par des considérations de statique analytique; on voit bien en effet que le système antipolaire ne diffère pas du système polaire correspondant à la „figure imaginaire“ (imaginäres Bild) de L. O. Hesse et à la „seconde surface-nulle“ (zweite Nullfläche) [n° 26] de Th. Reye.

du système donné *par rapport au plan donné*  $\pi$ . Il joue pour les moments quadratiques un rôle entièrement analogue à celui du centre de gravité pour les moments linéaires; il coïncide avec lui quand le plan  $\pi$  s'éloigne indéfiniment; car, dans ce cas, les distances de tous les points  $A_i$  au plan de l'infini peuvent être regardées comme égales.

Commençons par quelques formules analytiques. Soient

$$Ux + Vy + Wz - T = 0$$

et

$$U'x + V'y + W'z - T' = 0$$

les équations de deux plans  $\pi$  et  $\pi'$ ; le *moment de déviation* correspondant pour le système de masses est donné par la formule

$$(25) \quad D_{\pi, \pi'} = \frac{\sum_{(i)} \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)(U'x_i + V'y_i + W'z_i - T')}{\sqrt{(U^2 + V^2 + W^2)(U'^2 + V'^2 + W'^2)}}.$$

Si  $\pi$  et  $\pi'$  sont deux plans conjugués de Binet on a [voir n° 9]

$$D_{\pi, \pi'} = 0$$

ou

$$(26) \quad \sum_{(i)} \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)(U'x_i + V'y_i + W'z_i - T') = 0.$$

Si les plans  $\pi$  et  $\pi'$  coïncident, on déduit de (25) pour le moment d'inertie planaire  $J_\pi$

$$(27) \quad J_\pi = \frac{\sum_{(i)} \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)^2}{U^2 + V^2 + W^2}$$

ou, en désignant le numérateur par  $\Phi$ ,

$$(27') \quad J_\pi = \frac{\Phi}{U^2 + V^2 + W^2}.$$

Si  $\pi$  est un plan *autoconjugué* dans le sens de Binet l'équation (26) fournit celle-ci

$$(28') \quad \Phi = \sum_{(i)} \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)^2 = 0.$$

Cette équation s'écrit sous la forme

$$(28) \quad \Phi = A_{11}U^2 + A_{22}V^2 + A_{33}W^2 + 2A_{21}UV + 2A_{31}WU + 2A_{12}UV - 2A_1UT - 2A_2VT - 2A_3WT + \mu T^2 = 0,$$

en posant

$$(29) \quad \begin{cases} \sum_{(i)} \alpha_i x_i^2 = A_{11}, & \sum_{(i)} \alpha_i y_i^2 = A_{22}, & \sum_{(i)} \alpha_i z_i^2 = A_{33}, \\ \sum_{(i)} \alpha_i y_i x_i = A_{21} = A_{12}, & \sum_{(i)} \alpha_i z_i x_i = A_{31} = A_{13}, & \sum_{(i)} \alpha_i z_i y_i = A_{32} = A_{23}, \end{cases}$$

$$(30) \quad \sum_{(i)} \alpha_i x_i = A_1, \quad \sum_{(i)} \alpha_i y_i = A_2, \quad \sum_{(i)} \alpha_i z_i = A_3.$$

Les équations (28), (28') et (26) sont susceptibles de diverses interprétations. D'abord la géométrie de l'espace donne les propositions connues que voici:

1°) L'équation (28)

$$\Phi = 0$$

représente la surface directrice d'un système polaire  $\Sigma$ , système des pôles et plans polaires par rapport à  $\Phi$ ; ce système est réel, même quand la surface  $\Phi$  est imaginaire. On l'appelle *système antipolaire* du système de masses donné.

2°) L'équation (26) donne en coordonnées tangentielles le pôle du plan  $\pi$  relativement à  $\Phi = 0$ , autrement dit l'antipôle  $P$  de  $\pi$  dans le système donné.

3°)  $\pi$  et  $\pi'$  sont des plans conjugués du système antipolaire [voir IV 4, 76]<sup>(45)</sup>.

D'un autre côté, pour déduire du système primitif  $(\alpha_i A_i)$  le système transformé  $(\alpha'_i A'_i)$  correspondant au plan

$$\pi \equiv Ux + Vy + Wz - T = 0,$$

il faut, conformément à notre idée fondamentale, remplacer la masse  $\alpha_i$  du point  $A_i$  du système donné par la nouvelle masse

$$\alpha'_i = \frac{\alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}.$$

De cette transformation résultent les théorèmes suivants:

1°) La même équation (26) représente aussi, d'après notre définition du début, le centre du second degré  $(U'V'W'T')$  du plan  $\pi$ ; en outre, d'après les formules (28) et (30), le centre de gravité du système de masses est aussi le centre du système antipolaire  $\Sigma$ , comme cela résulte de la remarque faite au début du n° 11.

2°) Tous les plans conjugués d'un plan  $\pi$  au sens de *J. P. M. Binet* (26) passent par son centre du second degré; donc tout trièdre conjugué de *J. P. M. Binet* est un trièdre polaire du système antipolaire  $\Sigma$  et réciproquement; comme à chaque point correspond en général un seul trièdre polaire *rectangulaire*, on trouve aussi pour chaque point un seul *trièdre principal* d'inertie. [Voir n° 9, 17 et 18].

3°) Le moment de déviation  $D_{\pi, \pi'}$  de deux plans peut être regardé comme le moment statique du système transformé au moyen de l'un des deux plans  $\pi$  par rapport à l'autre plan  $\pi'$ ; de même, le moment d'inertie planaire  $J_\pi$  est aussi le moment statique du système transformé au moyen du plan  $\pi$  relativement au plan  $\pi$  lui-même<sup>(46)</sup>.

Enfin il résulte de ce qui précède que:

1°) La surface  $\Phi = 0$  est l'enveloppe des plans qui sont conjugués d'eux-mêmes au sens de Binet.

2°) Chacun de ces plans contient le centre correspondant du second degré.

3°) Pour chacun d'eux, le moment d'inertie correspondant  $J_\pi$  est nul<sup>46)</sup>.

La nature de la surface  $\Phi = 0$  dépend de la nature du système de masses choisi. Son centre, qu'il soit d'ailleurs à distance finie ou dans le plan de l'infini, coïncide toujours avec le centre de gravité  $S$  ou  $S_\infty$  du système de masses. Pour tout système pesant, la surface  $\Phi = 0$  est imaginaire. Sur ce point voir plus loin n° 12 et 13.

Désignons maintenant par  $S_\pi$  la distance du centre de gravité  $S$  à un plan  $\pi$  ne passant pas par  $S$ ; par  $p_\pi$ , la distance de l'antipôle au même plan. Ces distances doivent être mesurées suivant la même direction  $u$ , d'ailleurs arbitraire, que les distances des points masses  $\alpha_i A_i$ . Supposons le système donné général (où  $\mu$  est différent de zéro) et observons que, dans ce cas, le système transformé a pour masse totale

$$\mu S_\pi = \frac{\Sigma \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i - T)}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}.$$

Dès lors les formules (3a) et les théorèmes ci-dessus conduisent pour un système général aux relations<sup>47)</sup>

$$(31) \quad J_\pi = \mu S_\pi p_\pi \quad \text{et} \quad D_{\pi, \pi'} = \mu S_\pi p_{\pi'}.$$

Donc le moment d'inertie planaire pour un plan  $\pi$  ne passant pas par le centre de gravité s'obtient en multipliant la masse totale  $\mu$  par la distance  $S_\pi$  de son centre de gravité et par la distance  $p_\pi$  de son antipôle au plan  $\pi$ . Puis, le moment de déviation pour un couple de plans (dont l'un au moins ne passe pas par le centre de gravité) s'obtient en multipliant la masse totale par la distance  $S_\pi$  du centre de gravité au plan  $\pi$  et par la distance  $p_{\pi'}$  de l'antipôle du plan  $\pi$  au plan  $\pi'$ .

Pour un système magnétique, si l'on choisit la direction  $u$  parallèle à l'axe  $\vec{q}$  du système, on a les équations

$$(31') \quad J_\pi = q p_\pi \quad \text{et} \quad D_{\pi, \pi'} = q p_{\pi'},$$

où  $p_{\pi'}$  désigne la distance au plan quelconque  $\pi'$  de l'antipôle du plan  $\pi$  et où  $q$  est la valeur scalaire de l'axe magnétique.

46) L. O. Hesse [Analyt. Geom. des Raumes<sup>45)</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) p. 352/63; (3<sup>e</sup> éd.), p. 355/67] pour les systèmes pesants.

47) Voir K. (Ch.) Oulmann, Graph. Statik<sup>46)</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) Zurich 1875, p. 409; Statique graphique<sup>47)</sup>, p. 382.

Soit maintenant un système de masses général,  $J_\pi$  et  $J_\sigma$  les moments d'inertie planaires de deux plans parallèles  $\pi$  et  $\sigma$  de distance  $p$ , le dernier  $\sigma$  passant par le centre de gravité  $S$ , nous aurons [voir la relation (9) et le n° 3] la relation analogue à (17)

$$(32) \quad J_\pi = J_\sigma + \mu p^2.$$

Comme  $p = S_\pi$  les formules (31) et (32) donnent par soustraction

$$(33) \quad J_\sigma = \mu S_\pi (p_\pi - S_\pi) = \mu S_\pi p_\sigma,$$

en désignant par  $p_\sigma$  la distance de l'antipôle  $P$  du plan  $\pi$  au plan parallèle  $\sigma$  mené par le centre de gravité.

Si le plan  $\pi$  touche la surface  $\Phi = 0$ , on a  $J_\pi = 0$  et alors on a [voir l'équation (38)]

$$(34) \quad J_\sigma = -\mu k^2,$$

où  $k$  est la distance du plan central  $\sigma$  au plan parallèle tangent à la surface  $\Phi = 0$ .

Soient  $\pi$  et  $\pi'$  deux plans quelconques et  $\pi^{(o)}$  et  $\pi'^{(o)}$  les plans parallèles menés par le centre de gravité; on a pour les moments de déviation correspondants  $D_{\pi, \pi'}$  et  $D_{\pi^{(o)}, \pi'^{(o)}}$  la relation analogue à (32)

$$(35) \quad D_{\pi, \pi'} = D_{\pi^{(o)}, \pi'^{(o)}} + \mu S_\pi S_{\pi'} \quad 48);$$

$S_\pi$  et  $S_{\pi'}$  y représentent les distances du centre de gravité  $S$  aux plans  $\pi$  et  $\pi'$ .

Si l'un de ces plans,  $\pi'$  par exemple, passe par  $S$  on a

$$S_{\pi'} = 0,$$

et par suite<sup>48)</sup>

$$(35') \quad D_{\pi^{(o)}, \pi'^{(o)}} = D_{\pi, \pi'^{(o)}}.$$

Ainsi le moment de déviation relatif à deux plans passant par le centre de gravité ne change pas quand l'un d'eux ( $\pi^{(o)}$ ) subit une translation parallèle

$$(\pi^{(o)} - \pi)^{48)}.$$

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer d'une façon analogue les théorèmes compris dans les formules (32) à (35).

12. Les surfaces centrales pour les moments quadratiques planaires et les moments de déviation. Soit

$$\Phi = 0$$

la surface directrice du système antipolaire pour un système de masses

48) J. N. Haton de la Goupillière [J. Éc. polyt. (1) cah. 37 (1858), p. 44] a démontré ce théorème pour des plans  $\pi$  et  $\pi'$  rectangulaires et dans le cas d'un système pesant.



donné. Nous appelons *surface centrale de Culmann* la surface

$$\Phi^{(c)} = 0$$

conjuguée de la surface  $\Phi = 0^{49}$ .

Prenons un système de masses général et choisissons pour axes les axes centraux [n° 9]; nous aurons

$$A_1 = A_2 = A_3 = 0, \quad A_{23} = A_{31} = A_{12} = 0, \\ A_{11} = A, \quad A_{22} = B, \quad A_{33} = C.$$

L'équation (28) prend la forme canonique

$$(36) \quad \begin{cases} \Phi = A U^2 + B V^2 + C W^2 + \mu T^2 = 0 \\ \text{ou en coordonnées ponctuelles} \\ \Phi = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} + \frac{1}{\mu} = 0. \end{cases}$$

L'équation de la *surface centrale de Culmann* est donc

$$(37) \quad \begin{cases} \Phi^c = A U^2 + B V^2 + C W^2 - \mu T^2 = 0 \\ \text{ou} \\ \Phi^c = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - \frac{1}{\mu} = 0. \end{cases}$$

Soient  $\pi$  et  $\pi^c$  les plans polaires d'un point  $P(x', y', z')$  par rapport aux surfaces  $\Phi$  et  $\Phi^c$ . La forme de leurs équations montre que ces plans sont symétriques par rapport au centre de gravité  $S$ ; et de même les pôles d'un plan quelconque par rapport aux deux surfaces sont symétriques par rapport à  $S$ . En particulier:

Si  $P$  est un point de la surface de Culmann elle-même, il est l'antipôle du plan qui touche la surface au point  $P_0$  symétrique de  $P$ .

$\Phi^c$  est un hyperboloïde ou un ellipsoïde réel si  $\Phi$  est un hyperboloïde ou un ellipsoïde imaginaire. Si  $\Phi$  est un ellipsoïde réel,  $\Phi^c$  est imaginaire.

Tout système pesant a un *ellipsoïde central de Culmann*<sup>50</sup> qui a pour formule

$$(37) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

où  $a, b, c$  sont les rayons principaux d'inertie planaires (n° 9), de

49) Si l'on rapporte la surface du second ordre à centre à ses trois plans de symétrie (ou la surface parabololoïde à ses deux plans de symétrie et au plan tangent au sommet), l'équation prend la *forme canonique*. Deux surfaces sont alors dites *conjuguées* si leurs équations canoniques rapportées aux mêmes axes ne diffèrent que par le signe du terme constant (lequel est nul dans le parabololoïde).

50) Graph. Statik<sup>51</sup>, (1<sup>re</sup> éd.) p. 164/6; (2<sup>e</sup> éd.) p. 408/13; Statique graphique<sup>52</sup>, p. 381/6. Voir aussi P. Ruffini, Memorie Ist. Bologna (4) 3 (1881/2), p. 9, 283.

façon que

$$A = \mu a^2, \quad B = \mu b^2, \quad C = \mu c^2.$$

Dans un *système magnétique* au contraire (où  $\mu = 0$ ) l'équation (28) est satisfaite par le plan de l'infini

$$U = V = W = 0$$

et la surface  $\Phi$  est tangente à ce plan; c'est donc un parabololoïde<sup>51</sup>; d'après la définition donnée dans la note 49,  $\Phi$  coïncide alors avec la surface centrale de Culmann  $\Phi^c$ .

Revenons à un *système de masses général*. Soit  $\pi$  un plan tangent de la surface centrale de Culmann  $\Phi^c$ ; son antipôle est le point  $P$  de la surface qui est diamétralement opposé au point de contact. Soit  $k$  la perpendiculaire abaissée de  $S$  sur  $\pi$ , on a

$$S_\pi = P_\sigma = +k, \quad P_\pi = +2k$$

et par conséquent [voir les formules 33 et 31]

$$(38) \quad J_\sigma = \mu k^2, \quad J_\pi = 2J_\sigma.$$

Si donc  $\sigma$  est un plan central parallèle à un plan tangent  $\pi$  à la surface centrale de Culmann, le rayon d'inertie  $k_\sigma$  est égal à la distance du plan  $\pi$  au centre de gravité  $S$ <sup>52</sup>. En outre la valeur du moment d'inertie planaire pour le plan tangent à la surface centrale de Culmann est deux fois aussi grande que pour le centre de gravité.

Le signe des deux moments d'inertie est celui de la masse totale  $\mu$ .

Soit maintenant  $M$  l'une des extrémités du diamètre conjugué de  $\sigma$  dans la surface centrale de Culmann. On démontre la proposition suivante:

Le moment d'inertie du système de masses pour le plan central  $\sigma$  est égal au moment d'inertie par rapport au même plan de la masse totale concentrée au point  $M$ .

Si l'on prend un second plan central  $\sigma'$ , on montre aussi que le moment de déviation du système pour  $\sigma$  et  $\sigma'$  est égal au moment de déviation de la masse totale  $\mu$  concentrée au point  $M$ <sup>53</sup>.

Cette dernière partie du théorème résulte de la formule (31), en remplaçant d'abord [au moyen de l'équation (35)] le plan central  $\sigma$  par le plan parallèle tangent à  $\Phi^c$ .

51) Th. Reye, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 298.

52) K. (Ch.) Culmann, Graph. Statik<sup>54</sup>, (1<sup>re</sup> éd.) p. 166/7; (2<sup>e</sup> éd.) p. 408/13, pour les systèmes dans l'espace; [(1<sup>re</sup> éd.) p. 176/7; (2<sup>e</sup> éd.) p. 403/8] pour les systèmes plans; Statique graphique<sup>55</sup>, p. 381/5 pour l'espace et p. 377/81 pour les systèmes plans.

53) K. (Ch.) Culmann, Graph. Statik<sup>54</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) p. 401, 409; Statique graphique<sup>55</sup>, p. 374, 382.

La surface centrale de Culmann a pour réciproque

$$(39) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 - \mu = 0.$$

Avec *W. Schell* nous la désignerons par *surface centrale de Binet*.

Soit *SM* le demi-diamètre perpendiculaire au plan central  $\sigma$ ; on montre que la valeur réciproque du rayon d'inertie  $k_\sigma$  correspondant à ce plan est égal à *SM*.

Si le système donné est un *système pesant*, la surface est un ellipsoïde réel

$$(39') \quad a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 - 1 = 0.$$

Dans ce cas l'ellipsoïde central de Binet est défini par le dernier théorème énoncé, lequel permet de construire la surface de la façon la plus simple.

Pour terminer, ajoutons encore ceci aux n°s 11 et 12:

La totalité des plans de l'espace et de leurs centres correspondants du second degré relativement à un système de masses forme, comme nous l'avons vu, une correspondance polaire. C'est le système  $\Sigma$  que nous avons appelé *antipolaire* à cause des propriétés signalées au début de ce numéro. Ainsi *centre du second degré* et *antipôle* désignent un même objet. La polarité  $\Sigma$  peut être définie et construite aussi bien, soit par la surface  $\Phi$  directrice de  $\Sigma$ , soit par la surface centrale de Culmann  $\Phi$ . L'antipôle d'un plan  $\pi$  coïncide avec son pôle  $P$  par rapport à  $\Phi$  et ce pôle  $P$  est symétrique (par rapport au centre de gravité  $S$ ) du pôle  $P^*$  du plan  $\pi$  par rapport à  $\Phi$ .

Cette relation d'un plan avec son antipôle paraît en général plus simple et plus directe par la considération du système antipolaire  $\Sigma$ , toujours réel, que par la surface centrale de Culmann. Toutefois cette surface, comme aussi la surface directrice  $\Phi$ , présente un grand avantage pour la représentation des rayons d'inertie planaires.

**13. Les surfaces homofocales de moment planaire constant.** D'après les équations (27) et (27'), tous les plans pour lesquels le moment d'inertie  $J_\pi$  a la même valeur  $K$  satisfont à l'équation

$$(27'') \quad \Phi = K(U^2 + V^2 + W^2).$$

Les plans de moment d'inertie planaire constant enveloppent donc l'une des quadriques homofocales<sup>54)</sup> à la surface  $\Phi = 0$ , directrice du système antipolaire  $\Sigma$  [IV 4, 77].

Ces surfaces homofocales s'appellent *surfaces de moment constant* du système de masses [voir n° 19].

<sup>54)</sup> Le théorème est dû à *J. P. M. Binet* [J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 41/67 (1811)] pour les systèmes pesants.

Supposons maintenant que le système soit *général*, c'est-à-dire que  $\mu$  soit différent de zéro. Les surfaces ont alors même centre et mêmes axes; leurs axes sont les axes centraux d'inertie. Prenons ces axes pour axes de coordonnées, les surfaces homofocales ont alors pour équation

$$(40) \quad \begin{cases} AU^2 + BV^2 + CW^2 + \mu T^2 = K(U^2 + V^2 + W^2) \\ \text{ou en coordonnées ponctuelles} \\ \frac{x^2}{K-A} + \frac{y^2}{K-B} + \frac{z^2}{K-C} = \frac{1}{\mu}, \end{cases}$$

où la notation est celle du n° 12.

Soit  $k_\pi$  le rayon de gyration correspondant à  $J_\pi$ , l'équation (40) s'écrit encore

$$(40') \quad \frac{x^2}{k_\pi^2 - a^2} + \frac{y^2}{k_\pi^2 - b^2} + \frac{z^2}{k_\pi^2 - c^2} = 1.$$

Si maintenant le système est *magnétique*, on a  $\mu = 0$ , tandis que  $q$  n'est pas nul; alors le centre de gravité s'éloigne à l'infini ainsi qu'un des trois plans principaux. La surface directrice  $\Phi = 0$  n'ayant que deux plans de symétrie devient un paraboloides<sup>55)</sup> dont l'équation rapportée à ces deux plans et au plan central<sup>49)</sup> comme plans de coordonnées<sup>55)</sup> prend la forme

$$(41) \quad \begin{cases} \Phi = AU^2 + BV^2 + CW^2 - 2qWT = 0 \\ \text{ou en coordonnées ponctuelles} \\ \Phi = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - \frac{C-2qz}{q^2} = 0. \end{cases}$$

Dans cette équation,  $q$  désigne le moment linéaire principal du système, c'est-à-dire la valeur scalaire du vecteur  $\vec{q}$ .

Les surfaces de moment constant sont les paraboloides homofocaux à la surface  $\Phi = 0$ .

Pour un *système de masses indifférent*, on a encore  $\mu = 0$  et en outre  $A_1 = A_2 = A_3 = 0$ ; la surface  $\Phi = 0$  peut être mise sous la forme

$$(42) \quad AU^2 + BV^2 + CW^2 = 0,$$

où  $A, B, C$  sont les moments d'inertie principaux planaires d'origine d'ailleurs quelconque. La surface directrice  $\Phi = 0$  se réduit alors à une

<sup>55)</sup> Ces trois plans forment ce que *E. Beltrami* [Ann. mat. pura appl. (2) 10 (1880/2), p. 248; Opere 3, Milan 1911, p. 472] appelle le *trièdre central*; le sommet du trièdre est d'après *E. Beltrami* le „centre magnétique“ du système. Avec *W. Thomson* et *E. Beltrami* au lieu de vecteur libre  $\vec{q}$  [cf. note 10] nous emploierons de préférence, pour désigner l'axe du paraboloides  $\Phi$ , la dénomination d'„axe magnétique“.

conique rejetée à l'infini; le système antipolaire se réduit à un système antipolaire plan rejeté à l'infini et toutes les surfaces homofocales à  $\Phi = 0$  sont des coniques rejetées à l'infini.

Le moment d'inertie planaire est donc le même pour des plans parallèles<sup>56)</sup>.

Nous renvoyons à l'article IV 4, n° 77 pour toutes ces propositions, que nous compléterons ici en précisant la signification mécanique du système des surfaces homofocales; toutefois nous nous bornons au système de masses général, particulièrement au système pesant; nous prendrons donc pour base l'équation (40) ou, dans le cas du système pesant, l'équation (40').

Par tout point  $P$  passent, dans ce cas, trois surfaces homofocales réelles du système, un ellipsoïde, un hyperboloïde à une nappe et un hyperboloïde à deux nappes; ces trois surfaces se coupent orthogonalement en  $P$ . Les cônes circonscrits qu'on peut mener du point  $P$  aux surfaces homofocales forment eux mêmes une famille homofocale; leurs lignes focales communes (*axes focaux*) sont les deux génératrices issues du point  $P$  sur l'hyperboloïde à une nappe qui passe par ce point. Les plans de symétrie communs des cônes sont les plans tangents aux trois surfaces homofocales passant par  $P$ ; ils forment le trièdre polaire trirectangle correspondant au point  $P$  dans le système antipolaire. Réciproquement, tout plan est en général tangent à une et une seule des surfaces du système et il appartient donc à un et un seul trièdre polaire trirectangle.

La signification mécanique de ces relations est celle-ci: les cônes homofocaux de sommet  $P$  sont les enveloppes d'un plan de moment quadratique constant (40) passant par  $P$  [voir la fin du n° 16]; les plans tangents aux surfaces homofocales du point  $P$  forment le trièdre principal d'inertie pour ce point [voir n° 9]<sup>57)</sup>. Inversement, étant donné un plan  $\pi$ , construisons le point  $P$  où le plan  $\pi$  touche la surface correspondante du système homofocal, c'est le point principal de ce plan [voir n° 9].

Le même point  $P$  s'obtient comme pied de la perpendiculaire abaissée sur le plan  $\pi$  de l'antipôle de ce plan. En effet, d'après l'équation (36) les coordonnées de l'antipôle du plan  $U, V, W, T$  sont

$$\frac{AU}{\mu T}, \frac{BV}{\mu T}, \frac{CW}{\mu T},$$

tandis que les coordonnées du point de contact du plan avec la sur-

face (40) sont (en écrivant  $J_\pi$  au lieu de  $K$ )

$$\frac{(A - J_\pi)U}{\mu T}, \frac{(B - J_\pi)V}{\mu T}, \frac{(C - J_\pi)W}{\mu T}.$$

**14. Moments quadratiques axiaux et surfaces centrales correspondantes, pour un système général.** Pour trouver le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque  $d$ , on peut employer le théorème qui le donne comme la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans rectangulaires quelconques passant par  $d$ . En particulier, si l'on choisit pour l'un des plans celui qui passe par le centre de gravité  $S$ , on déduit facilement de la règle précédente et des équations (10) et (32) une relation analogue à (17) et (32)<sup>58)</sup>:

$$(43) \quad J_d = J_d^{(s)} + \mu p^2,$$

où  $p$  est la distance du centre de gravité à  $d$ , et  $J_d$  et  $J_d^{(s)}$  sont les moments d'inertie axiaux, par rapport à  $d$  d'abord, puis à la parallèle à  $d$  menée par le centre de gravité.

Pour représenter les rayons d'inertie pour des axes passant par le centre de gravité, on peut utiliser l'une des surfaces homofocales (40), savoir celle dont le paramètre  $K$  (c'est-à-dire ici  $J_\pi$ ) a la valeur particulière  $A + B + C$  ou

$$K = J_\pi^{(s)}.$$

L'équation (40) devient alors en effet

$$\frac{x^2}{B+C} + \frac{y^2}{C+A} + \frac{z^2}{A+B} - \frac{1}{\mu} = 0,$$

c'est-à-dire, à cause du n° 9, formule (10),

$$(44) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{A'} + \frac{y^2}{B'} + \frac{z^2}{C'} - \frac{1}{\mu} = 0 \\ \text{ou en coordonnées tangentielles} \\ \mathcal{W} = A'U^2 + B'V^2 + C'W^2 - \mu T^2 = 0. \end{cases}$$

Elle représente conséquemment une surface  $\mathcal{W} = 0$  homofocale du système antipolaire; c'est la surface pour laquelle les plans tangents ont pour moment d'inertie correspondant  $J_\pi$  la valeur  $A + B + C$ , c'est-à-dire que ces plans ont pour moment d'inertie le moment quadratique polaire correspondant au centre de gravité  $J_\pi^{(s)}$ . Cette surface  $\mathcal{W} = 0$  est la surface centrale de Mac Cullagh. Elle est coaxiale à la surface centrale de Culmann; mais les demi-axes principaux de la surface de Culmann sont égaux aux rayons centraux principaux planaires; ce sont au contraire les rayons axiaux pour la surface de Mac Cullagh.

56) Th. Reye, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 302, 309/13.

57) La signification mécanique des axes focaux sera donnée au n° 15.

58) L. Euler, Theoria motus<sup>22)</sup>, p. 168.

Pour un système pesant la surface de Mac Cullagh est naturellement aussi un ellipsoïde  $\mathcal{P}$  coaxial à l'ellipsoïde de Culmann:

$$(44) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1;$$

les axes principaux des deux ellipsoïdes sont donc (n° 9) liés par les relations

$$(45) \quad \begin{cases} a'^2 = b^2 + c^2, & b'^2 = c^2 + a^2, & c'^2 = a^2 + b^2, \\ \text{d'où l'on déduit inversement} \\ a^2 = \frac{1}{2}(b'^2 + c'^2 - a'^2), & b^2 = \frac{1}{2}(c'^2 + a'^2 - b'^2), & c^2 = \frac{1}{2}(a'^2 + b'^2 - c'^2). \end{cases}$$

Les formules (44) expriment que d'une façon tout à fait générale la distance du centre de gravité à un plan tangent de la surface  $\mathcal{P}$  est égale au rayon d'inertie pour la perpendiculaire au plan menée par le centre de gravité. D'un autre côté, la formule (43) enseigne que la distance  $SM$  du centre de gravité  $S$  à un point  $M$  de la surface  $\mathcal{P}$  est égale à l'un des rayons principaux d'inertie pour ce point  $M$ : la normale en  $M$  à  $\mathcal{P}$  est l'axe principal d'inertie correspondant.

Pour un système pesant, ces théorèmes se généralisent en ce sens que, pour avoir le rayon  $k_d$  d'inertie correspondant à un axe  $d$  quelconque de l'espace, il suffit alors de mener à  $\mathcal{P}$  un plan tangent perpendiculaire à  $d$  et de prendre l'intersection  $R$  de ce plan avec  $d$ ; la distance  $RS$  représente le rayon  $k_d$ . Dans ce cas  $\mathcal{P}$  est un ellipsoïde et la construction est toujours réelle; on peut en outre renverser les propositions précédentes et les utiliser à la définition et à la construction de l'ellipsoïde central de Mac Cullagh.

Si l'on rapporte le système homofocal (40) à la surface  $\mathcal{P}$ , ce système (40), pour un système général de masses, est représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{A' + \lambda\mu} + \frac{y^2}{B' + \lambda\mu} + \frac{z^2}{C' + \lambda\mu} - \frac{1}{\mu} = 0,$$

où  $\lambda$  est lié au paramètre  $K$  (qui est ici égal à  $J_n$ ) employé plus haut par la relation<sup>59)</sup>

$$(46) \quad \begin{cases} K - A = A' + \lambda\mu & (A' = B + C) \\ \text{ou} \\ \lambda = \frac{K - J_p^{(i)}}{\mu} = \frac{J_\pi - J_p^{(i)}}{\mu}. \end{cases}$$

La surface réciproque de la surface de Mac Cullagh est

$$(47) \quad A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = \mu.$$

<sup>59)</sup> Voir I. (J.) Somov, *Račionalnaja mehanika*); trad. A. Zivert, *Mechanik* 2, p. 85.

Nous l'appellerons *surface centrale de Poinso*. Pour un système pesant, où la surface est un ellipsoïde réel

$$(47) \quad a'^2x^2 + b'^2y^2 + c'^2z^2 = 1,$$

elle a été introduite par A. L. Cauchy et L. Poinso.

Chaque demi-diamètre de la surface centrale de Poinso est égal à l'inverse du rayon d'inertie correspondant  $k_d^{(i)}$ . Pour un système pesant, la réciproque est vraie, et elle peut servir à la définition et à la construction de l'ellipsoïde central de Poinso.

**15. Moments de déviation des systèmes pesants, dans le cas particulier des plans rectangulaires.** Dans la formule (14) du n° 9 posons

$$\mu d^2 = \pm D;$$

$d$  est ce qu'on appelle le *rayon de déviation* du dièdre donné. Mais dans le présent numéro on s'occupera seulement des dièdres rectangulaires et de la valeur absolue du moment de déviation, le système sera supposé pesant et, en outre,  $\mu$  positif.

Par une droite  $d$  faisons passer d'une part les couples de plans rectangulaires et d'autre part les couples conjugués par rapport au système de masses (dans le sens de J. P. M. Binet); on obtient ainsi deux involutions qui en général ont un seul couple commun ( $\nu, \nu'$ ). Ce couple est rectangulaire et a un moment de déviation  $D_{\nu, \nu'}$  nul; il forme ce qu'on appelle le *dièdre nul de l'axe  $d^{(60)}$* .

Soit  $\pi, \pi'$  un autre couple de plans rectangulaires passant par  $d$ ,  $\theta$  l'angle  $\pi\nu$ , et posons

$$\mu k_{\pi, \pi'}^2 = D_{\pi, \pi'};$$

nous aurons

$$(48) \quad k_{\pi, \pi'}^2 = l^2 \sin 2\theta,$$

avec

$$(49) \quad l^2 = \frac{1}{2}(k_\pi^2 + k_{\pi'}^2).$$

Ainsi, le moment de déviation du couple de plans rectangulaires mobile autour de  $d$  atteint son maximum

$$\frac{1}{2}(J_\pi - J_{\pi'})$$

quand ces plans bissectent le dièdre nul; le rayon de déviation correspondant  $l$  a été nommé *paramètre de l'axe  $d$*  par J. N. Haton de la Goupillière.

<sup>60)</sup> J. N. Haton de la Goupillière [J. Éc. polyt. (1) cah. 37 (1858), p. 3], à qui l'on doit l'étude des moments de déviation, appelle les plans  $e, e'$  les *plans-nuls* de  $d$ . Voir aussi L. N. F. Moigno, *Leçons de mécanique analytique, Statique*, Paris 1868, p. 444/52.

Tout axe de déviation  $d$  est donc caractérisé par la position de son dièdre nul ( $e, e'$ ) et par la valeur de son paramètre  $l^{(59)}$ . Si l'on connaît ces éléments, la formule (48) permet de calculer le moment de déviation pour tout couple rectangulaire d'axe  $d$ , indépendamment des formules (31), (35), (35'). Pour déterminer le dièdre nul à l'aide du système homofocal (40) du n° 13, on cherche d'abord les deux surfaces du système qui sont tangentes à  $d$  et l'on mène les plans tangents aux points de contact. Si  $K$  et  $K'$  sont les paramètres des deux surfaces tangentes à  $d$ , le paramètre correspondant à  $d$  est

$$l = \sqrt{\frac{K - K'}{2\mu}}.$$

Si  $l = 0$ , le moment de déviation s'annule pour tout couple de plans rectangulaires passant par  $d$ ; ces couples de plans sont donc tous conjugués par rapport au système de masses. L'axe  $d$  est donc une génératrice d'un hyperboloïde à une nappe de la famille homofocale; c'est un axe focal du système de surfaces (ou du système antipolaire) [cf. n° 13]<sup>(61)</sup>. Réciproquement tout axe focal est un axe de déviation de paramètre nul, c'est un axe nul<sup>(62)</sup>.

Soit  $P$  un point de  $d$  et  $\tau$  l'angle que forme l'un des plans nuls de  $d$  avec chacun des plans  $df$  et  $df'$  déterminés par  $d$  et les axes focaux  $f$  et  $f'$  issus de  $P$ ; le paramètre  $l$  est proportionnel à  $\sin \tau$  pour toutes les droites issues de  $P^{(63)}$  qui touchent la même surface de la famille homofocale.

En particulier, soit un point  $P$  et prenons sur une droite  $d$  issue de  $P$  un point  $G$  tel que  $PG$  soit égal à la valeur  $L$  du paramètre pour l'axe principal moyen d'inertie correspondant à  $P$ . On montre alors que les plans bissecteurs du couple  $df, df'$  forment le dièdre nul de l'axe  $d$ ; le paramètre correspondant est

$$l = \sqrt{LP},$$

en appelant  $p$  et  $p'$  les distances du point  $G$  aux axes focaux  $f$  et  $f'$ .

Le théorème s'applique encore à un point  $P_\infty$  situé à l'infini,  $G$  étant alors un point quelconque de l'axe de déviation  $d^{(60)}$ .

**16. Les surfaces d'inertie d'un point quelconque.** Choisissons le point donné pour origine  $O$  des coordonnées rectangulaires. Soient

61) Pour l'étude des axes de déviation et des moments de déviation normaux correspondants, la congruence des axes nuls joue le même rôle que le complexe d'inertie [voir n° 18] du système de masses pour l'étude des axes principaux d'inertie et les moments d'inertie correspondants.

62) J. N. Haton de la Goupillière [J. Éc. polyt. (1) cah. 37 (1858), p. 68] distingue les axes nuls passant par un point en axes focaux et axes singuliers suivant que le point  $P$  est à distance finie ou infinie.

$\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  les moments d'inertie planaires,  $\mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$  les moments de déviation correspondants aux plans coordonnés. Ces six constantes suffisent pour calculer les moments d'inertie pour tous les plans et tous les rayons issus de  $O$ . Soit

$$Ux + Vy + Wz = 0$$

l'équation d'un plan passant par  $O$  et  $J_\pi$  son moment d'inertie; on a

$$(50) \quad \sum_{(i)} \alpha_i (Ux_i + Vy_i + Wz_i)^2 = J_\pi (U^2 + V^2 + W^2)$$

ou, sous une autre forme,

$$(51) \quad \mathcal{A}U^2 + \mathcal{B}V^2 + \mathcal{C}W^2 + 2\mathcal{D}VW + 2\mathcal{E}WU + 2\mathcal{F}UV = \mu T^2,$$

où  $T$  a l'expression tirée de l'équation<sup>(63)</sup>

$$(52) \quad \mu T^2 = J_\pi (U^2 + V^2 + W^2).$$

Soit maintenant la normale  $d$  menée par  $O$  au plan  $\pi$ , on a

$$J_d = J_0 - J_\pi \quad \text{et} \quad J_0 = \sum_{(i)} \alpha_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

et en portant ces expressions dans l'équation (50)

$$(50') \quad (\mathcal{B} + \mathcal{C})U^2 + (\mathcal{C} + \mathcal{A})V^2 + (\mathcal{A} + \mathcal{B})W^2 - 2\mathcal{D}VW - 2\mathcal{E}WU - 2\mathcal{F}UV = J_d (U^2 + V^2 + W^2)$$

ou encore d'après (10)

$$(51') \quad \mathcal{A}'U^2 + \mathcal{B}'V^2 + \mathcal{C}'W^2 - 2\mathcal{D}'VW - 2\mathcal{E}'WU - 2\mathcal{F}'UV = \mu T^2,$$

$\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}'$  désignant les moments d'inertie axiaux correspondants aux axes de coordonnées et  $T$  étant donné ici par l'équation<sup>(61)</sup>

$$(52') \quad \mu T^2 = J_d (U^2 + V^2 + W^2).$$

En coordonnées tangentielles, les équations (51) et (51') représentent deux surfaces de deuxième classe. La première est la surface d'inertie de K. (Ch.) Culmann, la deuxième est celle de J. Mac Cullagh pour le point  $O$ . Les surfaces réciproques sont respectivement celle de J. P. M. Binet et celle de L. Poinsot.

A chaque point correspondent ainsi quatre surfaces d'inertie. Elles ont pour axes communs les axes principaux d'inertie de ce point ( $\mathcal{D} = \mathcal{E} = \mathcal{F} = 0$ ). Elles coïncident respectivement avec les surfaces centrales de même nom, quand le point  $O$  vient au centre de gravité

63) Si dans (51') on porte la valeur de  $\mu T^2$  tirée de (52'), et qu'on divise par  $U^2 + V^2 + W^2$ , on obtient la formule classique de Lagrange qui donne la valeur de  $J_d$  en fonction des six constantes ( $\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}', \mathcal{D}', \mathcal{E}', \mathcal{F}'$ ) et des cosinus directeurs de l'axe  $d$ . De même, les formules (51) et (52) conduisent à la formule de Binet pour  $J_\pi$ .

$S$  du système. Elles admettent les mêmes propriétés, pour les moments quadratiques relatifs aux plans et aux rayons menés par  $O$ , que les surfaces centrales relativement aux plans centraux et aux droites centrales [voir n° 12 et 14].

Si l'on choisit pour axes coordonnés les axes principaux d'inertie ( $\mathcal{O} = \mathcal{S} = \mathcal{F} = 0$ ),  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  et  $\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}'$  deviennent les moments principaux d'inertie, *planaires* puis *axiaux*  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  et  $\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}'$ , relatifs au point  $O$ .

La représentation par les quatre surfaces d'inertie devient particulièrement importante quand le système est *pesant*. Dans ce cas, toutes les surfaces d'inertie sont des ellipsoïdes réels, en sorte qu'à tout point  $O$  sont associés quatre ellipsoïdes d'inertie coaxiaux: ce sont d'abord les ellipsoïdes de Culmann et de Mac Cullagh; leurs équations sont représentées par rapport aux axes principaux d'inertie du point  $O$  par

$$(53) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$(54) \quad \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1,$$

où  $a, b, c$  et  $a', b', c'$  sont les rayons principaux d'inertie *planaires* et *axiaux* relatifs au point  $O$ ; ce sont en second lieu les ellipsoïdes de Binet et de Poincaré qui sont les réciproques des précédents; ils ont pour équations

$$(55) \quad a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1,$$

$$(56) \quad a'^2 x'^2 + b'^2 y'^2 + c'^2 z'^2 = 1.$$

D'ailleurs les mêmes théorèmes qui nous ont servi [n° 12 et 14] pour définir les surfaces centrales d'inertie peuvent servir à la définition et à la construction des ellipsoïdes d'inertie relatifs au point  $O$ .

On peut encore obtenir d'une autre façon l'ellipsoïde de Culmann  $\Phi_0$  relatif au point  $O$ . Cette surface peut être définie géométriquement par les deux conditions suivantes:

1°) ses axes principaux coïncident avec les axes principaux d'inertie du point  $O$ ;

2°) dans cette surface, le centre de gravité  $S$  du système est le pôle du plan  $\omega$ , antipolaire de  $O$ <sup>64</sup>.

Cette définition est en défaut dans le seul cas où le point  $O$  est en  $S$ ; dans ce cas on définit  $\Phi_0$  comme l'ellipsoïde central de Culmann

64) Cette définition se trouve dans L. Cremona [Statica grafica<sup>65</sup>], p. 101/3 (n° 109). K. (Ch.) Culmann<sup>66</sup>) détermine analytiquement la surface d'inertie dans sa statique graphique. Pour  $\mu = 1$  et dans le cas d'un système pesant, la surface d'inertie est identique avec l'ellipsoïde donné pour la première fois par J. P. M. Binet.

$\Phi_0$ . En dehors de ce cas spécial, voici comment la nouvelle définition permet de construire un point  $M$  quelconque de la surface  $\Phi_0$ .

Soit  $\pi$  un plan mené par  $O$  et  $OM$  le diamètre conjugué de  $\pi$  dans la surface  $\Phi_0$ , l'antipôle  $P$  de  $\pi$  est sur cette droite  $OM$ ; soit maintenant  $P'$  l'intersection de  $OM$  avec le plan central  $\sigma$  parallèle à  $\pi$ , on a

$$\overline{OM}^2 = OP \cdot OP'.$$

Dans cette relation  $OM, OP$  et  $OP'$  sont proportionnels à  $k_\pi, p_\pi$  et  $s_\pi$ . Jointe aux formules générales du n° 11, elle permet de démontrer que les théorèmes établis au n° 12 pour la surface centrale de Culmann s'appliquent à l'ellipsoïde  $\Phi_0$  du point  $O$ .

Jusqu'ici le point  $O$  était entièrement quelconque. Supposons maintenant que  $O$  soit sur les courbes focales du système antipolaire et que nous ayons affaire à un système *pesant*. Désignons les plans de symétrie du système par  $\alpha, \beta, \gamma$ ; les moments d'inertie planaires correspondants sont  $A, B, C$  et nous supposons  $A < B < C$  [voir n° 9]; l'ellipse focale est dans  $\gamma$ , l'hyperbole focale dans  $\beta$ . Pour chacun des plans tangents à l'une ou à l'autre de ces surfaces homofocales dégénérées le moment d'inertie a la même valeur, en outre le plan de la courbe doit être regardé comme tangent en tous les points de cette courbe; on voit donc que pour tout plan tangent à l'ellipse focale ( $\gamma$ ) le moment d'inertie est  $C$  et pour tout plan tangent à l'hyperbole ( $\beta$ ) le moment d'inertie est  $B$ . Les quatre ellipsoïdes d'inertie d'un point  $O$  d'une courbe focale sont donc de révolution; ils ont pour axe de révolution la tangente à la courbe focale au point  $O$ <sup>65</sup>.

Si l'ellipsoïde central de Culmann  $\Phi_0$  est de révolution ayant pour axe de révolution le petit axe  $2a$ , il existe sur cet axe à la distance  $\sqrt{c^2 - a^2}$  du centre de gravité deux foyers<sup>66</sup>) pour lesquels les trois moments principaux d'inertie sont égaux et les ellipsoïdes d'inertie deviennent des sphères<sup>67</sup>).

Dans le faisceau mené par le point  $O$ , il existe en général  $\infty^1$

65) Aux points de l'ellipse focale, le moment d'inertie planaire principal *minimé* est donc variable et a pour valeur  $A' = A + \mu r^2$ , aux points de l'hyperbole focale le moment *maximé* est variable et a pour valeur  $B' = B + \mu r^2$ ,  $r$  désignant la distance du centre de gravité [J. P. M. Binet, J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 61, 62; J. N. Haton de la Goupillière [J. Éc. polyt. (1) cah. 37 (1858), p. 90/1] appelle les lignes focales *lignes de symétrie* et leurs points, *points de symétrie*.

66) J. N. Haton de la Goupillière appelle ces points „points de complète symétrie“.

67) J. P. M. Binet, J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 63; S. D. Poisson, Traité de mécanique, (1<sup>re</sup> éd.) 2, Paris 1811, p. 496/500.

plans  $\pi$  et  $\infty^1$  droites  $d$  ayant un moment donné constant; les plans  $\pi$  enveloppent une des surfaces homofocales de la famille (40); je dis que les droites  $d$  décrivent le cône supplémentaire du cône enveloppé par les plans. En effet, la génératrice  $d$  étant perpendiculaire au plan  $\pi$  correspondant, on aura  $J_d + J_\pi = J_0$ , par suite  $J_d$  est bien constant quand  $J_\pi$  est constant<sup>68</sup>).

**17. Le trièdre principal d'inertie d'un point quelconque.** Nous avons déjà donné au n° 13 la position du trièdre principal d'inertie d'un point  $O$  quelconque dans le système des surfaces homofocales de moment planaire constant. La détermination directe de ce trièdre et celle des moments principaux correspondants revient à la détermination des axes d'une surface du second degré en grandeur et position [cf. n° 16]. Nous donnons ici les formules complètes pour un système pesant, en les rattachant aux numéros précédents.

Les moments d'inertie planaires principaux  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  de  $O$  sont les trois racines  $K_1, K_2, K_3$  de l'équation

$$(57) \quad K^3 - q_1 K^2 + q_2 K - q_3 = 0,$$

où l'on a posé

$$(58) \quad \begin{cases} q_1 = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}, \\ q_2 = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{C} + \mathcal{C}\mathcal{A} - \mathcal{D}^2 - \mathcal{E}^2 - \mathcal{F}^2, \\ q_3 = \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C} + 2\mathcal{D}\mathcal{E}\mathcal{F} - \mathcal{A}\mathcal{D}^2 - \mathcal{B}\mathcal{E}^2 - \mathcal{C}\mathcal{F}^2; \end{cases}$$

les cosinus directeurs  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  du plan principal correspondant à  $K_i$  sont donnés par les équations linéaires

$$(59) \quad \begin{cases} \mathcal{A}\alpha_i + \mathcal{F}\beta_i + \mathcal{E}\gamma_i = K_i\alpha_i, \\ \mathcal{F}\alpha_i + \mathcal{B}\beta_i + \mathcal{D}\gamma_i = K_i\beta_i, \\ \mathcal{E}\alpha_i + \mathcal{D}\beta_i + \mathcal{C}\gamma_i = K_i\gamma_i, \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3).$$

De même, les moments axiaux principaux  $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$  de  $O$  sont les trois racines  $H_1, H_2, H_3$  de l'équation<sup>69</sup>

$$(57') \quad H^3 - q_1' H^2 + q_2' H - q_3' = 0,$$

<sup>68</sup> Les cônes focaux  $O(\beta)$  et  $O(\gamma)$  sont particulièrement remarquables. On peut y rattacher la construction suivante de *J. Mac Cullagh* que *R. Townsend* [Cambr. Dublin math. J. 2 (1847), p. 41] reproduit comme il suit:

Les génératrices communes aux deux cônes focaux forment les quatre arêtes bifocales d'un angle polyèdre ayant pour base un quadrangle. Celui-ci admet trois diagonales formant un triangle qui, avec le point  $O$ , définit un trièdre; c'est le trièdre principal du point  $O$ .

Voir aussi *E. J. Routh*, *Dynamics*<sup>72</sup>; *Dynamik* 1, p. 46.

<sup>69</sup> *A. L. Cauchy* [Exercices math. 2, Paris 1827, p. 98; Œuvres (2) 7, Paris 1889, p. 130] remarque que l'équation du troisième degré (57') a été trouvée par

où

$$(58') \quad \begin{cases} q_1' = \mathcal{A}' + \mathcal{B}' + \mathcal{C}', \\ q_2' = \mathcal{A}'\mathcal{B}' + \mathcal{B}'\mathcal{C}' + \mathcal{C}'\mathcal{A}' - \mathcal{D}'^2 - \mathcal{E}'^2 - \mathcal{F}'^2, \\ q_3' = \mathcal{A}'\mathcal{B}'\mathcal{C}' - 2\mathcal{D}'\mathcal{E}'\mathcal{F}' - \mathcal{A}'\mathcal{D}'^2 - \mathcal{B}'\mathcal{E}'^2 - \mathcal{C}'\mathcal{F}'^2. \end{cases}$$

Les cosinus directeurs  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  des axes principaux d'inertie correspondants à  $H_i$  sont donnés par les équations linéaires

$$(59') \quad \begin{cases} \mathcal{A}'\alpha_i + \mathcal{F}'\beta_i + \mathcal{E}'\gamma_i = H_i\alpha_i, \\ -\mathcal{F}'\alpha_i + \mathcal{B}'\beta_i + \mathcal{D}'\gamma_i = H_i\beta_i, \\ -\mathcal{E}'\alpha_i + \mathcal{D}'\beta_i + \mathcal{C}'\gamma_i = H_i\gamma_i. \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3)$$

En outre les racines  $H$  et  $K$  sont liées par les relations

$$H_1 = K_2 + K_3, \quad H_2 = K_3 + K_1, \quad H_3 = K_1 + K_2,$$

de façon que l'on a

$$(60) \quad H_i + K_i = J_0 = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Par ces formules on peut non seulement déduire l'une de l'autre les équations (57) et (57'), mais encore obtenir la relation<sup>70</sup>

$$(61) \quad H_i = \mu(r^2 - \lambda_i) \quad (i = 1, 2, 3),$$

*J. L. Lagrange* dans ses recherches sur la rotation d'un corps solide sous la forme

$$(H - \mathcal{A}')(H - \mathcal{B}')(H - \mathcal{C}') - \mathcal{D}'^2(H - \mathcal{A}') - \mathcal{E}'^2(H - \mathcal{B}') - \mathcal{F}'^2(H - \mathcal{C}') + 2\mathcal{D}'\mathcal{E}'\mathcal{F}' = 0,$$

où l'on a

$$\mathcal{A}' = \mathcal{B} + \mathcal{C}, \quad \mathcal{B}' = \mathcal{C} + \mathcal{A}, \quad \mathcal{C}' = \mathcal{A} + \mathcal{B}.$$

*J. L. Lagrange* avait aussi montré qu'elle a ses trois racines réelles, mais *M. Binet* a prouvé le premier que ces racines étaient précisément les moments d'inertie principaux<sup>71</sup>. *J. P. M. Binet* [J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 51 [1811]] a découvert pour la première fois au moyen de l'équation (57) les axes principaux et les moments principaux d'inertie planaires. En formant l'équation dont les racines sont les sommes des racines deux à deux de l'équation (57) il a déterminé les moments principaux d'inertie axiaux; enfin il a montré comment on peut donner à l'équation la forme ci-dessus qui avait été obtenue par *J. L. Lagrange* [Mécanique analytique, (1<sup>re</sup> éd.) Paris 1788, p. 397; (2<sup>e</sup> éd.) 1, Paris 1811; (3<sup>e</sup> éd.) publ. par *J. Bertrand* 2, Paris 1855, p. 218; Œuvres 12, Paris 1889, p. 237/8]. *W. Thomson* (lord *Kelvin*) a donné aux équations (57) et (57') une autre forme en introduisant les grandeurs  $\mathcal{D}', \mathcal{E}', \mathcal{F}'$  [Cambr. Dublin math. J. 1 (1846), p. 199/200].

Soient  $\alpha, \beta, \gamma$  les cosinus directeurs d'un axe  $d$  normal au plan  $\pi$  menés tous deux par  $O$ , relativement aux axes principaux de ce point, les moments d'inertie pour  $d$  et  $\pi$  sont

$$J_d = \mathfrak{A}\alpha^2 + \mathfrak{B}\beta^2 + \mathfrak{C}\gamma^2, \quad J_\pi = \mathfrak{A}\alpha^2 + \mathfrak{B}\beta^2 + \mathfrak{C}\gamma^2.$$

La première de ces formules est due à *L. Euler* [Theoria motus<sup>72</sup>, p. 176/7], la seconde à *J. P. M. Binet* [J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 53/4 (1811)]; on les déduit aussi des formules (51) et (51') en y faisant  $\mathcal{D} = \mathcal{E} = \mathcal{F} = 0$ .

<sup>70</sup> Voir *E. J. Routh*, *Dynamics*<sup>73</sup>; *Dynamik* 1, p. 43; *W. Schell*, *Theorie der Bewegung*<sup>74</sup> 1, p. 122.

où  $r = SO$ , et  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sont les paramètres correspondants au point  $O$ , rapportés à l'ellipsoïde central  $\mathcal{U}$  de Mac Cullagh [voir n° 14].

Remarquons encore que les coefficients  $q_1, q_2, q_3$  et  $q'_1, q'_2, q'_3$  invariants du point  $O$  sont liés par les formules suivantes:

$$(62) \quad q'_1 = 2q_1, \quad q'_2 = q_1^2 + q_2, \quad q'_3 = q_1q_2 - q_3.$$

Si l'on donne, non plus les six constantes  $\mathcal{Q}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$  et  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  (ou  $\mathcal{A}', \mathcal{B}', \mathcal{C}'$ ), mais le trièdre central d'inertie et les moments centraux, on trouve les mêmes éléments pour le point  $O$  de la façon suivante:

Soient  $x, y, z$  les coordonnées du point  $O$  par rapport aux axes centraux principaux d'inertie; les moments principaux d'inertie planaires

$$\mathfrak{A} = \mu a^2, \quad \mathfrak{B} = \mu b^2, \quad \mathfrak{C} = \mu c^2$$

du point  $O$  sont, d'après le n° 13, les racines  $K_1, K_2, K_3$  de l'équation du troisième degré (équation 40)

$$(63) \quad \frac{\mu x^2}{K-A} + \frac{\mu y^2}{K-B} + \frac{\mu z^2}{K-C} = 1,$$

de façon que l'on a<sup>71)</sup>

$$(64) \quad \mathfrak{A} = K_1, \quad \mathfrak{B} = K_2, \quad \mathfrak{C} = K_3.$$

Les cosinus directeurs  $a_i, b_i, c_i$  des plans principaux d'inertie correspondants, qui coïncident avec les plans tangents au point  $O$  aux trois surfaces homofocales (40) passant par ce point, sont donnés par la proportion

$$(65) \quad a_i : b_i : c_i = \frac{x}{K_1 - A} : \frac{y}{K_1 - B} : \frac{z}{K_1 - C} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Le moment polaire d'inertie  $J_O$  du point  $O$  est égal au coefficient de  $-K^2$  dans l'équation (63); l'application de (10) donne aussitôt les moments principaux d'inertie axiaux

$$\mathfrak{A}' = \mu a'^2, \quad \mathfrak{B}' = \mu b'^2, \quad \mathfrak{C}' = \mu c'^2$$

du point  $O$ <sup>72)</sup>.

71) Pour obtenir les coordonnées  $x, y, z$  dont les moments principaux d'inertie planaires aient des valeurs données  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ , il suffit d'employer les formules qui donnent les coordonnées cartésiennes d'un point en fonction de ses coordonnées elliptiques. On obtient huit points symétriques par rapport aux axes de coordonnées; les coordonnées de ces huit points satisfont aux équations

$$x = \sqrt{\frac{(\mathfrak{A}-A)(\mathfrak{B}-A)(\mathfrak{C}-A)}{(B-A)(C-A)\mu}}, \quad y = \sqrt{\frac{(\mathfrak{A}-B)(\mathfrak{B}-B)(\mathfrak{C}-B)}{(C-B)(A-B)\mu}},$$

$$z = \sqrt{\frac{(\mathfrak{A}-C)(\mathfrak{B}-C)(\mathfrak{C}-C)}{(A-C)(B-C)\mu}}.$$

Voir I. (J.) Somov, *Racionalnaja mehanika*<sup>1)</sup>; trad. A. Zivert, *Mechanik* 2, p. 89.

72) Les considérations de ce numéro et du précédent subsistent encore quand

Remarquons encore qu'ayant supposé  $A < B < C$ , on en conclut  $A' > B' > C'$  [n° 9]. Donc pour un point quelconque les moments principaux d'inertie planaires  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  tombent entre les limites  $A, B, C, \infty$ , et les moments axiaux  $\mathfrak{A}', \mathfrak{B}', \mathfrak{C}'$  entre les limites  $\infty, A', B', C'$ <sup>73)</sup>.

**18. Le complexe d'inertie d'un système de masses.** A chaque plan  $\pi$  correspond en général un point principal  $P$  [n° 9] pour lequel  $\pi$  est un plan principal d'inertie. A chaque point  $P$  correspondent en général trois axes principaux d'inertie qui forment un trièdre polaire rectangulaire du système antipolaire. Ce trièdre a trois arêtes et trois faces. Pour chacun de ces six éléments,  $P$  est le point principal [voir n° 9].

On démontre au contraire qu'une droite  $d$  n'est axe principal d'inertie pour l'un de ses points que si elle contient l'antipôle d'un des plans normaux à cette droite<sup>74)</sup>; elle est l'arête de l'angle droit d'un trièdre polaire rectangulaire ou, ce qui revient au même, d'un trièdre principal conjugué de  $J. P. M. Binet$  [voir n° 11 et 9].

Le point principal correspondant est l'intersection de ce plan avec  $d$ , et  $d$  est normale en ce point à l'une des surfaces homofocales qui passent par ce point.

On montre en outre que toute normale à une des surfaces homofocales est axe principal pour le pied de cette normale; ce pied est le point principal de la normale.

On peut encore dire<sup>75)</sup> que la droite  $d$  n'est axe principal d'inertie que si elle coupe orthogonalement la droite antipolaire  $d'$ .

Mais cela équivaut à la définition que *Th. Reye* a établie pour les axes (géométriques) du système antipolaire. Les axes de Reye sont donc d'une part, au point de vue géométrique<sup>76)</sup>, identiques aux normales aux surfaces homofocales, d'autre part, au point de vue mécanique, ils sont identiques aux axes principaux d'inertie du système de masses. Ainsi le complexe des axes de Reye (lié au système antipolaire) fournit la totalité des axes principaux d'inertie du système de masses [voir IV 4, 78].

Les nombreuses propriétés des rayons d'un tel complexe<sup>78)</sup> sont

le point  $O$  coïncide avec le centre de gravité  $S$ , de façon qu'on obtient ainsi, indépendamment de la surface  $\Phi = 0$ , une autre détermination analytique de la surface centrale de Culmann et des trois autres surfaces centrales attachées au système de masses.

73) *J. P. M. Binet*, *J. Éc. polyt.* (1) cah. 16 (1813), p. 58/9.

74) *Th. Reye*, *Geometrie der Lage* (3<sup>e</sup> éd.) 2, Leipzig 1892, p. 141, 152, 156.



donc autant de propriétés des axes principaux d'inertie. Ce complexe prend de là (comme le système antipolaire lui-même) dans l'étude des moments d'inertie une importance considérable. Nous l'appellerons *complexe d'inertie* du système de masses [voir n° 21]<sup>75)</sup>.

**19. Surfaces de moments principaux planaires et axiaux.** La famille des complexes de moments axiaux constants. Toute surface  $F(K)$  de la famille des surfaces homofocales (40) peut être définie comme le lieu des points pour lesquels un des moments principaux planaires  $J_\pi$  a la valeur constante  $K$  (car les points de contact sont principaux pour les plans tangents correspondants).

Considérons alors les lignes d'intersection de deux des surfaces homofocales  $F(K)$  et  $F(K')$  qui passent par le point  $O$ ; la tangente à cette ligne au point  $O$  est un axe principal d'inertie pour ce point  $O$  et en même temps le moment d'inertie correspondant

$$J_d = K + K'$$

est le même pour toutes les tangentes de ladite courbe d'intersection<sup>76)</sup>. En outre  $K - K'$  est aussi le même, si bien que ces tangentes  $d$  peuvent être regardées aussi comme des axes de déviation de paramètre constant  $l$  [cf. n° 15].

Soient maintenant les normales à la surface homofocale  $F(K)$  le long de la conique sphérique déterminée par l'intersection de  $F(K)$  avec une sphère concentrique. Les points  $P$  de cette courbe étant également distants du centre  $S$ , les moments d'inertie polaires  $J_p$  sont égaux (équation 17); d'autre part les moments d'inertie planaires  $J_\pi$  pour les plans tangents à  $F(K)$  sont aussi égaux. Donc les moments d'inertie axiaux

$$J_a = J_p - J_\pi$$

sont aussi égaux pour toutes les normales à  $F(K)$  le long de la conique sphérique donnée et leur valeur est précisément<sup>77)</sup>

$$J_a = A' + ST^2 - K.$$

75) Le *complexe d'inertie* est aussi identique au complexe des axes de Reye déterminé par les axes de la surface centrale de Culmann; ses rayons sont donc aussi normaux aux surfaces homofocales de la surface de Culmann. Seulement le point principal  $h$  de cette normale ne coïncide plus avec le pied  $f$  de cette normale; mais le segment  $fh$  est partagé en son milieu par le plan central perpendiculaire à  $fh$ .

76) J. P. M. Binet, J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 62.

77) Ce théorème est dû à W. Thomson; cf. R. Townsend [Cambr. Dublin math. J. 2 (1847), p. 19/42, 140/71, 241/51]. R. Townsend remarque que le théorème est applicable à la théorie des axes isochrones, c'est-à-dire des axes pour lesquels la masse du système soumise à la pesanteur donnerait des oscillations pendulaires

Dans le cas général, le lieu des points  $P$  pour lesquels un des moments principaux d'inertie *axiaux*  $J_a$  a une valeur constante  $H$  est une surface „biaxiale“ du quatrième ordre  $\Delta(H)$ <sup>78)</sup>; on obtient facilement son équation par la considération que l'axe d'inertie principal correspondant à  $P$  est normal à l'une des trois surfaces homofocales passant par le point  $P$ . Pour le plan tangent correspondant, on a

$$J_\pi = J_p - H;$$

d'un autre côté, d'après l'équation (17), on a

$$J_p = J_p^{(s)} + \mu(x^2 + y^2 + z^2)$$

et

$$J_p^{(s)} = A + B + C.$$

Pour cette valeur  $J_\pi$  du paramètre  $K$ , il résulte de (40) et de (63) l'équation

$$(66) \quad \Delta(H) = \frac{\mu x^2}{\mu(x^2 + y^2 + z^2) + A' - H} + \frac{\mu y^2}{\mu(x^2 + y^2 + z^2) + B' - H} + \frac{\mu z^2}{\mu(x^2 + y^2 + z^2) + C' - H} - 1 = 0,$$

qui représente la surface considérée<sup>79)</sup>.

Si  $P(x, y, z)$  est un point quelconque de la surface et  $P_1$  la projection orthogonale du centre de gravité  $S$  sur le plan tangent à la surface  $\Delta(H)$  en  $P$ ,  $PP_1$  est l'axe principal d'inertie correspondant à  $P$  avec le moment d'inertie  $H$ <sup>80)</sup>.

Si l'on fait varier  $H$  de  $C'$  à  $+\infty$ , l'équation (66) représente une famille de surfaces<sup>81)</sup> qui se groupent en trois classes de surfaces en quelque sorte homofocales, suivant que  $H$  est entre  $C'$  et  $B'$ , entre  $B'$  et  $A'$  ou entre  $A'$  et  $+\infty$ . Chaque surface de la famille  $\Delta(H)$ , comme chaque surface de la famille  $F(K)$ , admet comme plans de symétrie les trois plans de symétrie du système antipolaire. Les points doubles de toutes les surfaces  $\Delta(H)$  engendrent deux co-

de même durée. Les axes d'égal moment qui sont également distants du centre de gravité, sont manifestement isochrones.

78) W. Thomson [Cambr. Dublin math. J. 1 (1846), p. 203] appelle cette surface *surface d'égal moment* (*equimomental surface*).

79) Cette équation permet aussi de trouver les moments d'inertie principaux axiaux d'un point quelconque  $(x, y, z)$ . L'équation est du troisième degré en  $H$  et ses racines  $H_1, H_2, H_3$  donnent les valeurs cherchées [voir n° 17].

80) W. Thomson [Cambr. Dublin math. J. 1 (1846), p. 203]. Voir aussi E. J. Routh, *Dynamics*<sup>81)</sup>; Dynamik 1, p. 50.

81) W. Thomson [Cambr. Dublin math. J. 1 (1846), p. 203] appelle ces surfaces *surfaces conjuguées d'égal moment*.

niques<sup>82</sup>); ce sont les surfaces focales ( $\beta$ ) et ( $\gamma$ ) du système antipolaire [voir n° 16].

On considère en optique des surfaces de même caractère que  $\Delta(H)$ , ce sont les surfaces d'onde de Fresnel; seulement dans ces surfaces particulières, le lieu des points doubles est formé seulement de l'hyperbole focale. La surface d'onde de Fresnel pour les milieux biréfringents<sup>83</sup> est une surface  $\Delta(H)$  de la troisième classe ( $H > A'$ ). La totalité des droites  $d$  (axes principaux d'inertie ou non) pour lesquelles le moment d'inertie  $J_d$  a une valeur constante  $\lambda$  forme un complexe quadratique de Painvin<sup>84</sup> que nous désignerons par  $(J_d)_\lambda$ . Comme  $\lambda$  peut prendre  $\infty^1$  valeurs, on pourra associer à tout système pesant, outre le complexe unique d'inertie, toute la famille des complexes  $(J_d)_\lambda$ . Si le paramètre  $\lambda$  prend la valeur particulière  $H$ , le complexe  $(J_d)_H$  et le complexe d'inertie du système ont en commun une congruence dont les rayons sont tous les axes principaux d'inertie ayant pour moment d'inertie  $H$ . Les points principaux correspondants décrivent d'une part la surface focale de cette congruence et d'autre part la surface  $\Delta(H)$ . Les deux surfaces sont donc identiques et cela fournit une nouvelle génération de la surface  $\Delta(H)$ .

82) A. Clebsch, J. reine angew. Math. 57 (1860), p. 73.

83) On le sait, en optique, on construit cette surface du quatrième ordre ainsi: on fait les sections centrales d'un certain ellipsoïde et sur le diamètre normal à chaque section on porte les longueurs des deux demi-axes de la section. On connaît l'usage de cette surface d'onde pour des problèmes autres que ceux de l'optique. J. Mac Cullagh [Trans. Irish Acad. (Dublin) 17 (1837), p. 243] lui donne le nom général de *surface biaxiale*, d'une part à cause du mode de génération de la surface, et d'autre part „the name perhaps may appear the more appropriate, as it reminds us of the place which the surface holds in the optical theory of biaxial crystals“.

Voir aussi R. Townsend [Cambr. Dublin math. J. 2 (1847), p. 24] qui considère de même cette surface et, partant du théorème de W. Thomson, établit, entre autres, la proposition suivante:

Tous les axes principaux d'inertie qui, pour les points auxquels ils correspondent, sont, en même temps, des axes de durée minimisée d'oscillation décrivent une surface qui est justement la surface biaxiale de l'ellipsoïde de Mac Cullagh.

84) A. Demoulin [Bull. Soc. math. France 20 (1892), p. 130]. L'auteur (p. 131 en note) attribue toutefois le théorème à G. Fourret qui l'avait communiqué verbalement quelques années auparavant à la Société. Le complexe de L. F. Painvin [Nouv. Ann. math. (2) 11 (1872), p. 49, 97, 202, 461, 529] est un cas spécial du complexe de G. Battaglini [Rendic. Accad. Napoli (1) 5 (1866), p. 305]. Le premier est formé des droites d'intersection des couples de plans rectangulaires tangents à une surface du second ordre; le second est formé des droites telles que les plans tangents menés par cette droite à deux surfaces du second ordre forment un faisceau harmonique. Voir aussi F. Aschieri [Giorn. mat. (1) 8 (1870), p. 35, 37].

La famille des surfaces  $\Delta(H)$  peut être définie comme la famille des surfaces focales de toutes les congruences qui sont communes au complexe d'inertie et à la famille des complexes  $(J_d)_\lambda$ .

20. Moments quadratiques pour les systèmes plans et rectilignes (généraux). Si tous les points masses sont dans un plan  $\omega$ , le centre de gravité  $S$  du système est dans  $\omega$  [voir n° 4 et 5], ainsi que l'antipôle (centre du second degré) de tout autre plan de l'espace. Naturellement, le moment d'inertie  $J_\omega$  par rapport au plan  $\omega$  est nul. Par là la surface directrice  $\Phi$  du système antipolaire devient, en portant dans (36) la valeur  $C = J_\omega = 0$ , la conique représentée par

$$(36a) \quad \begin{cases} \Phi = A U^2 + B V^2 + \mu T^2 = 0 \\ \text{ou} \\ \Phi = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{1}{\mu} = 0; \end{cases}$$

le système antipolaire se réduit à un système plan situé dans le plan  $\omega$  ( $z = 0$ ). Tous les plans passant par la même droite  $p$  de  $\omega$  ont donc le même centre du second degré  $P$  et par suite le point  $P$  peut dans ce cas être appelé centre du second degré ou antipôle de la droite  $p$  elle-même.

De cette façon, à chaque droite  $p$  du système plan est associé un centre du second degré (antipôle) qui est l'antipôle de tous les plans passant par cette droite et qui coïncide avec le pôle  $P$  de  $p$  par rapport à la conique directrice  $\Phi$ .

La surface centrale de Culmann se réduit à la conique centrale de Culmann

$$(37a) \quad \Phi^c = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - \frac{1}{\mu} = 0$$

et la surface centrale de Binet, à la courbe réciproque

$$A x^2 + B y^2 - \mu = 0.$$

Si  $\Phi$  est une hyperbole,  $\Phi^c$  est l'hyperbole conjuguée; si  $\Phi$  est une ellipse réelle, la courbe centrale de Culmann est imaginaire et réciproquement.

Ainsi, par exemple toute surface plane limitée (ou toute courbe plane) définit dans son plan  $\omega$  un système antipolaire n'admettant pas de courbe directrice réelle, mais admettant une ellipse centrale de Culmann

$$(37a) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

où  $a$  et  $b$  sont les rayons centraux d'inertie définis par la figure plane et  $\mu$  est l'étendue de la surface plane (ou la longueur de la courbe).

Comme les moments linéaires et quadratiques pour les droites (et points) du plan  $\bar{\omega}$  sont égaux aux moments linéaires et quadratiques par rapport aux plans menés par ces droites normalement à  $\bar{\omega}$  (et aux droites normales à  $\bar{\omega}$  menées par ces points), la courbe centrale de Culmann donne aussi une *représentation des moments quadratiques correspondants à ses diamètres*.

Par exemple, la distance du centre de gravité à une tangente à la conique est égale au rayon d'inertie pour le diamètre parallèle à cette tangente [n° 12, équation 38]<sup>5a</sup>; le moment d'inertie pour un diamètre  $\sigma$  de la conique de Culmann est égal au moment d'inertie, par rapport à ce diamètre, de la masse totale  $\mu$  concentrée à l'extrémité  $M$  du diamètre conjugué de  $\sigma$ .

En outre, le moment de déviation pour les deux diamètres  $\sigma$  et  $\sigma'$  est égal au moment de déviation de la masse totale concentrée au point  $M^{5b}$  [n° 11, éq. 35'].

D'une façon générale, toutes les formules des n° 11 et 12 s'appliquent au système plan, et il doit être entendu qu'elles s'appliquent aussi bien à tous les plans de l'espace qu'à leurs intersections avec  $\bar{\omega}$ . Par exemple, dans la formule [n° 11]

$$(31) \quad J_{\pi} = \mu s_{\pi} p_{\pi},$$

on peut aussi bien admettre que  $\pi$  représente un plan quelconque de l'espace ou bien la droite d'intersection de ce plan avec le plan  $\bar{\omega}$  du système;  $s_{\pi}$ ,  $p_{\pi}$  sont alors les distances correspondantes des points  $S$  et  $P$  soit au plan  $\pi$ , soit à la droite  $\pi$  [n° 11].

Les axes du plan  $\bar{\omega}$  qui ont un même moment d'inertie, ainsi que les plans de moments constants perpendiculaires à  $\bar{\omega}$ , enveloppent l'une des courbes de la famille homofocale du système antipolaire, qui ont pour équation

$$\Phi = K(U^2 + V^2)$$

ou

$$(40a) \quad \frac{x^2}{K-A} + \frac{y^2}{K-B} = \frac{1}{\mu}.$$

Les foyers communs de la famille sont les foyers  $\varphi$  et  $\varphi'$  du système antipolaire et forment avec les foyers  $f$  et  $f'$  de la courbe centrale de Culmann les quatre sommets d'un carré.

Dans le plan  $\bar{\omega}$  du système, tout point  $O$  est le centre d'une conique d'inertie de Culmann qui lui est associée, et dont l'équation, rapportée aux axes principaux d'inertie du point  $O$ , est l'équation (37a) où l'on remplace  $A$  et  $B$  par  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$ , moments d'inertie principaux par rapport au point  $O$ . Ces axes sont les tangentes en  $O$  aux deux coniques du faisceau homofocal (40a) qui passent par ce point; ce

sont donc les deux bissectrices de l'angle des rayons vecteurs  $\varphi O \varphi'$  et de son supplémentaire. Cette conique de centre  $O$  a les mêmes propriétés pour les moments d'inertie par rapport à ses diamètres que la conique centrale de Culmann par rapport à ses diamètres.

Si l'on considère un *système pesant plan*, qui en particulier peut être une surface homogène ou une ligne homogène, la courbe d'inertie correspondant à un point quelconque  $O$  du plan  $\bar{\omega}$  est une ellipse. En particulier, les ellipses d'inertie pour les foyers  $\varphi$  et  $\varphi'$  du système sont des cercles dont le demi-diamètre est  $a$ , en supposant  $a > b$  dans l'équation (37'a).

La *surface centrale de Mac Cullagh* (pour la représentation des rayons *axiaux* d'inertie correspondant au centre de gravité) est d'après le n° 14

$$(44a) \quad \Psi = \frac{x^2}{B} + \frac{y^2}{A} + \frac{z^2}{A+B} - \frac{1}{\mu} = 0$$

et le faisceau des surfaces homofocales de moment constant est d'après le n° 13

$$(40b) \quad \frac{x^2}{K-A} + \frac{y^2}{K-B} + \frac{z^2}{K} = \frac{1}{\mu};$$

cette équation conduit aussi directement à (44a) en remplaçant  $K$  par  $A + B + C$  [n° 14], soit ici par  $A + B$ .

On voit en outre que la conique  $\Phi$ , donnée par l'équation (40b) pour  $K = C = 0$ , est une des courbes focales de la famille: en effet, pour tous les plans qui passent par ses tangentes, le  $J_{\pi}$  correspondant est nul. La *surface centrale de Poincaré* est réciproque de celle (44a) de Mac Cullagh [n° 14]; c'est donc

$$Bx^2 + Ay^2 + (A+B)z^2 = \mu.$$

Pour tout point  $O$  du plan  $\bar{\omega}$  on obtient les équations des quatre surfaces d'inertie qui lui sont associées, rapportées à leurs axes principaux, en ajoutant aux équations (37a) et (44a) leurs équations réciproques et remplaçant  $A$  et  $B$  par les moments d'inertie  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  qui correspondent au point  $O$ . Mais si  $O$  est un point extérieur au plan  $\bar{\omega}$ , les surfaces d'inertie correspondantes sont données par les équations (37), (39), (44) et (47), dans lesquelles  $A$ ,  $B$  et  $C$  doivent être remplacés par  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$  [n° 16 et 17].

Si le système de masses est *rectiligne*, disposé sur une ligne  $l$ , le système antipolaire se réduit à une involution ponctuelle  $XX' \cdot S \infty$  sur  $l$ , dont les points doubles (ou éventuellement les points conjugués et symétriques par rapport au centre de gravité  $S$ ) forment deux surfaces  $\Phi$  (ou  $\Phi'$ ) dégénérées en deux faisceaux; en tous cas chaque

point  $X$  de  $l$  est l'antipôle de tous les plans passant par le point conjugué  $X'$  et réciproquement.

Par exemple, le centre de gravité  $S$  d'un segment homogène  $AB$  est en son milieu; et si l'on prend sur lui le point  $A'$  de façon que  $AA' = 2A'B$ ,  $S$  est le centre et  $A$  et  $A'$  deux éléments conjugués de l'involution ponctuelle déterminée sur la droite  $AB$ .

A l'aide de cette involution et des formules générales des n° 11 et 12 valables ici, on peut calculer tous les moments quadratiques du segment  $AB$ .

**21. Le développement historique de la théorie des moments et des surfaces d'inertie.** L'existence des axes principaux d'inertie pour des systèmes pesants fut découverte par *J. A. de Segner*<sup>85</sup>. Celui-ci démontra que par tout point  $P$  passent trois axes au moins pour lesquels le point  $P$  est point principal. Là-dessus, *L. Euler*<sup>86</sup> a donné les formules qui permettent de calculer le moment d'inertie d'une droite quelconque issue de  $P$  en fonction des moments d'inertie par rapport aux axes principaux du point  $P$ .

Ni *J. A. de Segner*, ni *L. Euler* ne considérèrent pourtant les autres axes principaux, qui passent par le point  $P$ , sans admettre ce point pour point principal; surtout ils ne s'occupèrent pas d'une façon générale de la distribution de ces axes dans l'espace.

Une extension essentielle de la théorie fut apportée par *J. P. M. Binet*<sup>87</sup> qui introduisit la notion plus générale de *trièdre d'axes conjugués* et étudia pour la première fois les moments d'inertie *planaires*. Il trouva la famille des surfaces homofocales et les propriétés de leurs lignes de courbure. Il montra que ces surfaces sont enveloppées par les plans pour lesquels le moment d'inertie est le même, et qu'elles sont décrites par les points pour lesquels un des moments principaux d'inertie correspondants a une valeur donnée. Il remarqua en outre que les coniques focales sont les lieux des points pour lesquels deux des moments principaux d'inertie sont égaux et il étudia, en même temps que *S. D. Poisson*<sup>88</sup>, le cas particulier où les surfaces homofocales sont de révolution.

*A. M. Ampère*<sup>89</sup> réservait le nom d'axes principaux d'inertie

<sup>85</sup> Specimen theoriae turbinum, Halle 1755. «Quelques années plus tôt, *L. Euler* [Scientia navalis 1, S<sup>3</sup> Pétersbourg 1749, p. 76/7] avait indiqué comme hypothèse qu'un corps flottant quelconque a trois axes principaux d'inertie (Note de *G. Eneström*).»

<sup>86</sup> Theoria motus<sup>85</sup>, p. 177.

<sup>87</sup> J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 47 [1811].

<sup>88</sup> Mécanique<sup>85</sup>, (1<sup>re</sup> éd.) 2, p. 496/500.

<sup>89</sup> Mém. Acad. sc. Institut France (2) 5 (1821/2), éd. 1826, p. 86.

à ceux du centre de gravité et nommait les autres *axes permanents*. Il trouva que les axes permanents passant par un même point  $P$  sont sur un cône du second degré équilatère et que les points auxquels ils correspondent décrivent une courbe du cinquième ordre avec un point triple en  $P$ ; que si le point principal donné  $P$  correspond à un plan de symétrie, le cône se décompose en deux plans: le plan de symétrie lui-même et un plan normal; la courbe se décompose en un cercle<sup>90</sup> et une courbe du troisième ordre située dans le plan de symétrie. Chacun de ces plans normaux est en même temps un plan normal en  $P$  à une conique d'une certaine famille de coniques homothétiques situées dans le plan de symétrie. Dans l'un des plans de symétrie sont situées deux familles homothétiques de cette espèce, dont la première renferme l'hyperbole focale du système antipolaire et la deuxième renferme l'hyperbole focale de la surface centrale de Culmann. Dans chacun des deux autres plans de symétrie au contraire se trouve une seule famille de courbes homothétiques, qui renferme respectivement l'ellipse focale du système antipolaire et l'ellipse focale de la surface centrale de Culmann<sup>90</sup>.

La théorie des surfaces homofocales et de leurs courbes focales fut reprise par *M. Chasles*<sup>91</sup> qui étudia surtout la distribution des normales à ces surfaces dans l'espace. Il donna entre autres ce théorème que les normales situées dans un même plan enveloppent en général une conique (antipolaire au cône d'Ampère), qui est même une parabole, comme l'a trouvé *R. Townsend*<sup>92</sup>; en outre *M. Chasles* apporta dans cette théorie un ordre systématique. Ses recherches, conduites au seul point de vue géométrique, trouvent une application immédiate à la théorie des axes principaux d'inertie; elles furent complétées par les travaux de *J. Mac Cullagh*<sup>93</sup>, *W. Thomson*<sup>94</sup>, *A. Cayley*<sup>95</sup>, *R. Townsend*<sup>96</sup> et *J. N. Haton de la Goupillière*<sup>97</sup>.

Un autre pas d'une importance décisive fut fait par d'autres

<sup>90</sup> Pour les points  $P$  de l'hyperbole focale et de l'ellipse focale du système antipolaire ce cercle se réduit à un point qui n'est autre que le point  $P$  lui-même. *A. M. Ampère* désigne ces deux coniques sous le nom d'*hyperbole principale* et d'*ellipse principale* [Mém. Acad. sc. Institut France (2) 5 (1821/2), éd. 1826, p. 139].

<sup>91</sup> Aperçu hist.<sup>1</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) p. 384 (Note XXXI).

<sup>92</sup> *R. Townsend*, Cambr. Dublin math. J. 1 (1846), p. 209/27; 2 (1847), p. 19/42, 140/71, 241/51.

<sup>93</sup> *J. Mac Cullagh*, Trans. Irish Acad. (Dublin) 22 (1849), p. 139 [1844].

<sup>94</sup> *W. Thomson*, Cambr. Dublin math. J. 1 (1846), p. 127/33, 195/206.

<sup>95</sup> *A. Cayley*, Id. 1 (1846), p. 207/8; Papers 1, Cambridge 1889, p. 353/4.

<sup>96</sup> Cambr. Dublin math. J. 1 (1846), p. 209/27; 2 (1847), p. 19/42, 140/71, 241/51.

<sup>97</sup> J. Éc. polyt. (1) cah. 37 (1858), p. 73/96.

recherches purement géométriques. *Th. Reye*<sup>98)</sup> s'assimila les idées de *J. Plücker* sur la géométrie des droites et utilisa les matériaux déjà réunis. Matériaux riches, mais amassés sans idée systématique et d'un caractère moitié mécanique, moitié géométrique. Il étudia en 1868 pour la première fois le complexe des axes d'une surface du second degré et du système polaire correspondant et en donna une théorie complète. Plus tard, il définit le complexe des axes indépendamment de la surface du second degré, prise d'abord pour base, et montra que les surfaces homofocales et en outre toutes les surfaces qui leur sont concentriques et homothétiques fournissent le même complexe, etc. Mais comme le complexe de Reye, formé des axes du système antipolaire attaché à un système de masses, est, en même temps, le complexe d'inertie du système de masses, il permet de trouver tous les résultats connus antérieurement sur les axes principaux d'inertie comme de simples corollaires, et en outre une série de compléments importants et de nouveaux théorèmes; et cela non pas seulement pour les systèmes pesants, qui seuls avaient été étudiés par tous les auteurs cités antérieurement, mais aussi pour les systèmes de masses généraux.

Notons enfin la simplicité de la définition que nous avons donnée pour le système antipolaire attaché à un système de masses quelconque, en associant à tout plan  $\pi$  le centre de gravité du second degré correspondant à ce plan  $\pi$  [n° 11]; système qui, à son tour, détermine facilement les surfaces homofocales du second degré et le complexe d'inertie.

On peut donc désormais regarder comme rempli le souhait de *M. Chasles*<sup>99)</sup> et de *A. Cayley*<sup>100)</sup>, de baser sur une idée fondamentale unique et simple toutes les propriétés des moments statiques et quadratiques et d'en déduire, par un développement logique et systématique, tous les théorèmes qui s'y rapportent.

Pour se guider au milieu des dénominations diverses employées dans les différentes publications concernant les surfaces d'inertie, on peut encore utiliser les données suivantes:

*J. P. M. Binet*<sup>101)</sup> avait pour la première fois représenté les moments d'inertie planaires correspondant à un point à l'aide d'un ellipsoïde, mais l'ellipsoïde employé par *J. P. M. Binet* n'est pas celui que nous avons désigné plus haut (d'après *W. Schell*) comme ellipsoïde

98) *Geom. der Lage*<sup>74)</sup>, (3<sup>e</sup> éd.) 2, p. 138/77.

99) *Aperçu hist.*, (2<sup>e</sup> éd.) p. 397 et les notes des pages 220, 221.

100) *Report Brit. Assoc.* 32, Cambridge 1862, éd. Londres 1863, p. 227.

101) *J. Éc. polyt.* (1) cah. 16 (1813), p. 64 [1811].

de Binet; c'est un ellipsoïde semblable à l'ellipsoïde de Culmann, le rapport de similitude étant  $\sqrt{\mu}:1$ . *J. N. Haton de la Goupillière*<sup>102)</sup> était arrivé aussi au même ellipsoïde de Culmann.

L'ellipsoïde considéré par *J. P. M. Binet* a pour réciproque la surface appelée par *W. Thomson*<sup>103)</sup> „the ordinary ellipsoid of construction“, par *A. Cayley*<sup>104)</sup> „the comomental ellipsoid“ et par *I. (J.) Somov*<sup>105)</sup> l'ellipsoïde fondamental<sup>106)</sup>.

Comme l'avait fait *J. P. M. Binet* pour les moments planaires, *A. L. Cauchy*<sup>107)</sup> représenta aussi les moments axiaux d'inertie d'un point par un ellipsoïde. L'ellipsoïde de Cauchy était désigné par *J. Mac Cullagh*<sup>108)</sup>, *W. Thomson*<sup>109)</sup>, *R. Townsend*<sup>110)</sup> et autres sous le nom de *the momental ellipsoid*; il est homothétique de celui que nous avons appelé (47) ellipsoïde de Poinso<sup>111)</sup>. *L. Poinso* l'appela „ellipsoïde central“ et le mit en valeur dans ses belles recherches sur la rotation des corps. L'ellipsoïde central  $\Psi$  de Mac Cullagh (44') a été introduit par *J. Mac Cullagh*<sup>112)</sup> dès 1844 sous le nom de „the ellipsoid of gyration“ et employé par lui à l'étude de la rotation d'un corps; *W. Thomson*<sup>113)</sup> l'a retrouvé de son côté en 1846 sous le nom de „the central ellipsoid“ et *A. Clebsch* sous le nom de „das zweite Central-ellipsoid“. La surface analogue, pour un point quelconque, que nous avons appelée ellipsoïde d'inertie de Mac Cullagh, a été étudiée par *R. Townsend*<sup>114)</sup> et plus tard par *A. Clebsch*<sup>115)</sup>.

**22. Systèmes de masses quadratiquement équivalents.** Deux systèmes de masses sont dits *équivalents* au point de vue de leurs

102) *J. Éc. polyt.* (1) cah. 37 (1858), p. 85.

103) *Cambr. Dublin math. J.* 1 (1846), p. 201, 202.

104) *Report Brit. Assoc.* 32, Cambridge 1862, éd. Londres 1863, p. 143.

105) *Racionalnaja mehanika*<sup>7)</sup>; trad. *A. Zivert*, *Mechanik* 2, p. 79.

106) Voir aussi *D. Chelini*, *Mem. Ist. Bologna* (3) 5 (1865), p. 144 et suiv.; *F. P. Buffini*, *Mem. Ist. Bologna* (4) 3 (1881/2), p. 25.

107) *Exercices math.* 2, Paris 1827, p. 93; *Œuvres* (2) 7, Paris 1839, p. 127.

108) *Trans. Irish Acad. (Dublin)* 22 (1855), p. 139.

109) *Cambr. Dublin math. J.* 1 (1846), p. 127/33, 195/206.

110) *Id.* 1 (1846), p. 209/27; 2 (1847), p. 19/42, 140/71, 241/51.

111) *J. math. pures appl.* (1) 16 (1851), p. 74.

112) Cf. *S. Haughton*, *Account of prof. Mac Cullagh's lectures on the rotation of a solid body round a fixed point* [*Trans. Irish Acad. (Dublin)* 22 (1855), p. 149].

113) *Cambr. Dublin math. J.* 1 (1846), p. 127/33, 195/206.

114) *Cambr. Dubl. math. J.* 1 (1846), p. 209/27; 2 (1847), p. 19/42, 140/71, 241/51.

115) *J. reine angew. Math.* 57 (1860), p. 73 [1859]. *A. Clebsch* paraît, comme *R. Townsend*, n'avoir pas eu connaissance des recherches de *J. Mac Cullagh*.

moments d'inertie<sup>116)</sup> si pour tous les plans de l'espace leurs moments d'inertie ont des valeurs égales<sup>117)</sup>. Dans ce cas, les deux moments d'inertie ont aussi la même valeur pour tout point et pour tout axe et il en est de même des moments de déviation pour tout couple de plans.

D'après les formules (31) à (35), les conditions d'équivalence pour les systèmes généraux sont l'égalité des masses totales et la coïncidence des systèmes antipolaires. Si ces conditions sont remplies, il est facile de voir que les systèmes sont équivalents aussi au point de vue des moments statiques et qu'ils admettent le même centre de gravité, les mêmes surfaces homofocales et le même complexe d'inertie.

Tout système *non indifférent* équivaut à une sextuple infinité de quadruplets de points masses. Les points d'un tel quadruplet forment les sommets de l'un quelconque des tétraèdres antipolaires du système donné<sup>117)</sup>. Soient  $h_1, h_2, h_3, h_4$  les hauteurs du tétraèdre,  $s_1, s_2, s_3, s_4$  les distances du centre de gravité à ses faces; les masses  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$  des quatre sommets sont données par les équations

$$(67) \quad \mu_1 h_1 = \mu s_1, \quad \mu_2 h_2 = \mu s_2, \quad \mu_3 h_3 = \mu s_3, \quad \mu_4 h_4 = \mu s_4.$$

Pour un système *magnétique* (où  $\mu = 0$ ), tandis que  $q$  est différent de zéro) il faut substituer à ces formules celles-ci

$$(67') \quad \mu_1 h_1 = \mu_2 h_2 = \mu_3 h_3 = \mu_4 h_4 = q,$$

où les hauteurs sont mesurées dans la direction de l'axe magnétique  $\vec{q}$  et où  $q$  est la valeur scalaire de cet axe comme dans (31').

Le système de masses *indifférent* équivaut au contraire à une infinité de quintuplets de points-masses, avec une masse totale nulle.

Pour un système *pesant*, il y a toujours une infinité de quadruplets équivalents dont les quatre points ont pour masse  $\frac{\mu}{4}$ . Les tétraèdres qui forment ces quadruplets sont circonscrits à un ellipsoïde  $\Phi_1$  et inscrits à un autre ellipsoïde  $\Phi_2$ . Ces deux ellipsoïdes sont

116) *Th. Reye*, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 300/1; *E. J. Routh*, Dynamics<sup>89)</sup>; Dynamik 1, p. 24. Abstraction faite de la dénomination, l'idée de l'équivalence des corps se trouve d'abord dans *J. P. M. Binet*, J. Éc. polyt. (1) cah. 16 (1813), p. 65/7 [1811], et plus tard chez *A. M. Legendre*, Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes 1, Paris 1825, p. 410 [1817]. Mais les premières réductions d'un corps à des groupes équivalents de points-masses ont été pour la première fois données par *J. J. Sylvester* [Quart. J. pure appl. math. 6 (1864), p. 131; Papers 2, Cambridge 1908, p. 339], *E. J. Routh* [Quart. J. pure appl. math. 6 (1864), p. 267/9] et *Th. Reye* [Z. Math. Phys. 10 (1865), p. 433].

117) *Th. Reye*, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 295/6; et déjà auparavant, pour les systèmes *pesants* [Z. Math. Phys. 10 (1865), p. 433]. La réduction du triangle à un système équivalent de trois points d'égale masse a été donnée pour la première fois par *E. J. Routh*, Quart. J. pure appl. math. 6 (1864), p. 267/9.

concentriques et homothétiques à l'ellipsoïde central de Culmann  $\Phi^c$ . Il suffit de diviser et de multiplier les axes de  $\Phi^c$  par  $\sqrt{3}$  pour avoir respectivement les axes de  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$ .

Tous ces tétraèdres ont un même volume qui est le volume maximé des tétraèdres que l'on peut inscrire dans l'ellipsoïde  $\Phi_2$ <sup>118)</sup>.

Tout système *pesant* peut en outre être réduit à un sextuplet équivalent de masses égales à  $\frac{\mu}{6}$ , placées aux extrémités d'un triplet quelconque de diamètres conjugués de l'ellipsoïde  $\Phi_2$ .

Ces théorèmes peuvent être déduits, par une transformation homographique-affine de l'espace, des théorèmes analogues pour un système de masses dont la surface centrale est une sphère; par cette transformation, l'équivalence de deux systèmes n'est pas troublée<sup>119)</sup>.

Remarquons qu'un système dont la surface centrale est une sphère de rayon  $a$  est équivalent à une masse sphérique homogène de rayon  $a\sqrt{5}$ ; il en résulte que tout système de masses purement positives est équivalent à un ellipsoïde homogène. Cet ellipsoïde est concentrique et homothétique à l'ellipsoïde central de Culmann et s'en déduit en multipliant ses dimensions linéaires par  $\sqrt{5}$ . C'est l'ellipsoïde de Legendre<sup>120)</sup>.

L'ellipsoïde de Legendre pour un tétraèdre homogène de masse  $\mu$  coïncide avec l'ellipsoïde de Culmann pour quatre masses égales à  $\frac{\mu}{4}$  concentrées aux sommets du tétraèdre.

Tout système *pesant* est aussi équivalent à un tétraèdre homogène.

Considérons en effet un tel système et un quadruplet équivalent formé de quatre masses égales. Joignons le centre de gravité  $S$  à ces quatre points  $A_1, A_2, A_3, A_4$  et multiplions les segments obtenus par  $\sqrt{5}$ . Les quatre extrémités nouvelles  $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4$  forment les sommets d'un tétraèdre homogène équivalent au système donné. Cela montre en même temps comment on peut remplacer un tétraèdre homogène donné, de masse  $\mu$ , par un système de quatre masses égales à  $\frac{\mu}{4}$ <sup>121)</sup>.

118) Sur ces tétraèdres de volume maximé voir *J. Liouville*, J. math. pures appl. (1) 7 (1842), p. 190; *J. Steiner*, J. reine angew. Math. 30 (1846), p. 273/6; Werke 2, Berlin 1882, p. 345/8; *C. F. Geiser*, Reale Ist. Lombardo Rendic. (2) 1 (1868), p. 773/9.

119) *E. J. Routh*, Dynamics<sup>89)</sup>; Dynamik 1, p. 30.

120) *A. M. Legendre*, Fonct. ellipt.<sup>90)</sup> 1, p. 410. Voir aussi *E. J. Routh*, Dynamics<sup>89)</sup>; Dynamik 1, p. 23.

121) Par là on voit encore comment un polyèdre homogène (ou un polygone et aussi une ligne polygonale homogène) peut être remplacé par un système équivalent de points isolés. Il suffit de partager d'abord le polyèdre en tétraèdres (ou le polygone en triangles, la ligne polygonale en ses côtés). De là (voir

Le tétraèdre est en outre équivalent<sup>123)</sup> à cinq masses; quatre de ces masses coïncident avec les sommets du tétraèdre et ont pour valeur  $\frac{\mu}{20}$ , et la cinquième, placée au centre de gravité, a pour valeur  $\frac{4\mu}{5}$ <sup>123)</sup>.

#### Appendice à la théorie des moments linéaires et quadratiques.

**23. Moments linéaires et quadratiques d'un système continu.** Le noyau d'une figure continue. Pour l'usage pratique, une importance particulière appartient au centre de gravité, aux moments linéaires et aux moments d'inertie des corps continus (ou des surfaces); ces éléments méritent pour cette raison une mention spéciale.

Les coefficients introduits plus haut [voir n° 11] sont définis par les intégrales suivantes étendues à tout le corps:

$$(68) \quad \begin{cases} A_{11} = \int x^2 d\tau, & A_{22} = \int y^2 d\tau, & A_{33} = \int z^2 d\tau, \\ A_{23} = A_{32} = \int yz d\tau, & A_{31} = A_{13} = \int zx d\tau, & A_{12} = A_{21} = \int xy d\tau, \\ A_1 = \int x d\tau, & A_2 = \int y d\tau, & A_3 = \int z d\tau, & \mu = \int d\tau, \end{cases}$$

où  $d\tau$  est la masse de l'élément du corps supposé homogène et  $\mu$  la masse totale. Du reste les autres développements demeurent inchangés. Seulement une nouvelle notion s'ajoute qu'on ne rencontre pas dans un système de masses isolées, c'est la notion de noyau<sup>124)</sup>.

aussi note 122) une méthode pour calculer les moments d'inertie de certains corps, de certaines surfaces ou lignes brisées.

122) Cette réduction du tétraèdre à un groupe équivalent de cinq masses a été donné pour la première fois par J. J. Sylvester, Quart. J. pure appl. math. 6 (1864), p. 130/3; Papers 2, p. 333/41.

123) D'autres exemples de telles réductions se trouvent dans E. J. Routh, Dynamics<sup>125)</sup>; Dynamik, p. 24/32; Th. Reye, Z. des Vereins deutscher Ingenieure 19 (1875), p. 401/4; R. Mohr, Z. Math. Phys. 29 (1884), p. 61.

124) K. (Ch.) Culmann, Graph. Statik<sup>126)</sup>, (1<sup>re</sup> éd.) p. 174/7, 180/206; (2<sup>e</sup> éd.), p. 415; Statique graphique<sup>127)</sup>, p. 387 et, pour les figures planes, M. Bresse, Mécanique appliquée<sup>128)</sup>, (3<sup>e</sup> éd.) I, p. 58. Contrairement à ce qu'avait fait K. (Ch.) Culmann, M. Bresse détermine directement le noyau de diverses figures simples, et à cet effet il s'appuie sur le théorème suivant découvert par lui:

Soit  $\alpha$  la ligne d'intersection des bases non parallèles d'un corps cylindrique; la projection  $A$  du centre de gravité de ce corps, prise parallèlement aux génératrices, sur une base, coïncide avec l'antipôle de la ligne  $\alpha$  relativement à cette base, pourvu qu'on regarde cette base comme un système plan homogène et continu.

La méthode de M. Bresse fut systématiquement utilisée par G. Jung dans ses cours sur la statique graphique professés à l'école polytechnique de Milan [cours qui ont été autographiés à plusieurs reprises à partir de 1886/7] pour effectuer la détermination du noyau et du système antipolaire relatifs à une série de figures planes.

On entend par noyau la surface fermée dont le contour est le lieu des antipôles de tous les plans qui touchent le corps, mais sans le traverser. Le noyau entoure le centre de gravité  $S$ , comme tout autre point dont le plan antipolaire ne traverse pas le corps. Soient  $V$  le volume du corps,  $P$  un point quelconque du noyau,  $\pi$  le plan antipolaire de  $P$ ,  $r$  la distance du point  $P$  et  $v$  la distance du plan  $\pi$  au plan  $\sigma$  parallèle au plan  $\pi$  mené par le centre de gravité  $S$ . D'après la formule (38) du n° 11, le moment d'inertie du volume  $V$  par rapport au plan central  $\sigma$  sera

$$(69) \quad J = r v V, \quad \text{d'où} \quad \frac{J}{v} = r V.$$

On définit de même le noyau pour une surface plane, sauf que le volume est ici remplacé par l'aire  $F$  de la surface. Considérons la surface plane donnée comme la section droite d'une poutre rectiligne; soient alors  $f$  l'axe neutre de cette section droite,  $J_f$  le moment d'inertie correspondant et  $f'$  le diamètre conjugué à  $f$  dans le système antipolaire attaché à  $F$ ; la formule (69) devient<sup>129)</sup>

$$(69a) \quad v = \frac{J_f}{v} = F \cdot r.$$

Dans cette formule,  $v$  est la distance (mesurée parallèlement à  $f'$ ) du centre de gravité à la plus éloignée  $p$  des deux tangentes à la section parallèles à  $f$ ; et  $r = SP$  est le plus petit des deux segments interceptés sur  $f'$  par le noyau,  $P$  étant l'antipôle de  $p$ . Cette grandeur  $v$ , à cause de son emploi dans la résistance des matériaux, est appelée par F. Reuleaux le module de résistance de la section pour l'axe neutre  $f$ .

Le noyau fournit un moyen commode pour résoudre graphiquement les problèmes qui concernent les moments d'inertie et de déviation et les moments résistants<sup>130)</sup>.

Dans des figures homographiques par affinité, les systèmes antipolaires sont homographiques par affinité et les noyaux aussi. Donc du noyau d'un carré, d'un cercle et d'une sphère on déduit le noyau d'un parallélogramme, d'une ellipse, d'un ellipsoïde, etc. En particulier si les figures sont semblables, on a les formules

$$J' = \lambda^n \cdot J, \quad v' = \lambda \cdot v, \quad \text{donc} \quad v' = \lambda^{n-1} \cdot v,$$

125) W. Ritter, Der Civilingenieur 22 (1876), p. 309; G. Jung, Reale Ist. Lombardo Rendic. (2) 9 (1876), p. 647; A. Sayno, id. (2) 9 (1876), p. 733.

126) G. Jung, Reale Ist. Lombardo Rendic. (2) 9 (1876), p. 600, 647; Report Brit. Assoc. 46, Glasgow 1876, éd. Londres 1877, p. 23/6; Amtlicher Bericht der 50. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in München vom 17 bis 22 September 1877, éd. Munich 1877, p. 98/100. Pour plus de détails, voir l'article IV 7.

où les lettres sans accent s'appliquent à la première figure et les lettres accentuées à la deuxième; enfin  $i$  représente le rapport d'agrandissement linéaire et il faut faire  $n=5$  pour un corps,  $n=4$  pour une surface, et  $n=3$  pour une courbe.

Soit un système de masses composé de plusieurs corps  $1, 2, \dots, n$  ayant pour densités uniformes  $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$  et pour volumes  $V_1, V_2, \dots, V_n$ ; on trouve le centre de gravité  $S$  du système en concentrant au centre de gravité  $S_i$  de chacun des corps la masse totale de ce corps et en prenant le centre de gravité des  $n$  points obtenus. Soit en outre  $\pi$  un plan qui ne passe par aucun des centres de gravité  $S_i$  et  $S$ , et soient  $P_i$  les antipôles du plan  $\pi$  par rapport aux divers corps, joignons ces antipôles  $P_i$  aux centres de gravité correspondants  $S_i$  et désignons par  $s_i^{(0)}$  et  $p_i^{(0)}$  les distances de ces points  $S_i$  et  $P_i$  au plan  $\pi$ .

Si l'on donne alors au point  $P_i$  la masse  $\varrho_i V_i s_i^{(0)}$ , le centre de gravité des points masses obtenus est l'antipôle du plan  $\pi$  pour le système total [voir n° 11 et 5].

En outre [n° 11] le moment d'inertie pour le plan  $\pi$  est

$$(70) \quad J_\pi = \sum \varrho_i V_i s_i^{(0)} p_i^{(0)} = \mu s_\pi p_\pi;$$

$\mu = \sum \varrho_i V_i$  est la masse totale du système,  $s_\pi$  et  $p_\pi$  sont les distances normales des points  $S$  et  $P$  au plan  $\pi$ . Pour le plan  $\sigma$  mené par  $S$  parallèle à  $\pi$ , le moment d'inertie est

$$(70') \quad J_\sigma = \mu s_\pi (p_\pi - s_\pi) = \mu s_\pi p_\sigma.$$

Enfin, pour un plan  $\pi$  ne passant pas par le centre de gravité et un second plan  $\pi'$  entièrement quelconque, le moment de déviation  $D_{\pi, \pi'}$  est [n° 11]

$$(71) \quad D_{\pi, \pi'} = \sum \varrho_i V_i s_i^{(0)} p_i^{(0)} = \mu s_\pi p_{\pi'}.$$

Les corps  $1, 2, \dots, n$  peuvent naturellement être des parties d'un même corps; de là une méthode (procédé de décomposition) qui permet de réduire le calcul des moments d'inertie d'un corps à celui de corps plus simples composant le corps donné. La méthode s'applique aux surfaces et aux courbes [voir n° 24a].

**24. Calcul effectif des moments linéaires et quadratiques pour les systèmes pesants.** Nous allons donner quelques méthodes pour la détermination du centre de gravité, des moments quadratiques et du système antipolaire d'un système donné.

a) *Méthodes de substitution*: Un système pesant peut être remplacé par des systèmes plus simples soit par le procédé de décompo-

sition [voir la fin du n° 23 et le n° 5] soit par la réduction à un système quadratiquement équivalent [voir n° 22], ou enfin par les deux procédés simultanément<sup>127)</sup>. Dans l'un et l'autre cas, on peut poursuivre le calcul analytiquement ou graphiquement.

b) *Méthodes analytiques*, savoir:

$\alpha$ . Si l'on connaît le trièdre central principal d'inertie, la détermination de l'ellipsoïde central de Culmann [formules (37) et (37')] exige la détermination des trois constantes  $A, B, C$ . En désignant par  $\varrho$  la densité en  $P(x, y, z)$ , et par  $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$  les aires des sections du système par trois plans menés par  $P$  parallèlement aux plans principaux d'inertie, on obtient les trois constantes cherchées au moyen des formules

$$A = \int \varrho x^2 \Omega_x dx, \quad B = \int \varrho y^2 \Omega_y dy, \quad C = \int \varrho z^2 \Omega_z dz.$$

Les rayons de giration planaires correspondants s'en déduisent par les relations<sup>127)</sup>

$$a^2 \mu = A, \quad b^2 \mu = B, \quad c^2 \mu = C.$$

L'ellipsoïde central de Culmann détermine alors d'une façon simple le système antipolaire qui, à son tour, donne les moments quadratiques  $J_x, J_y, J_z$  par rapport à tous les points, plans et droites de l'espace.

$\beta$ . On procède de même quand on connaît, non plus le trièdre principal, mais un autre trièdre conjugué de Binet pour le centre de gravité, car les formules de l'ellipsoïde central de Culmann demeurent les mêmes. Les axes principaux centraux sont alors déterminés par les axes de l'ellipsoïde.

$\gamma$ . Dans bien des cas on peut trouver un trièdre conjugué de Binet et le centre de gravité du système en se basant sur le théorème suivant:

Si une droite  $d$  contient les centres de gravité de toutes les sections parallèles à un plan central  $\sigma$  faites dans une figure homogène, la droite  $d$  contient le centre de gravité  $S$  de cette figure [n° 5] et  $d$  est le diamètre conjugué de  $\sigma$  dans le système antipolaire déterminé par le système<sup>128)</sup>. Réciproquement, si  $\sigma$  est un plan diamétral pour toutes les cordes parallèles à la droite centrale  $g$ ,  $\sigma$  est le plan diamétral conjugué de  $d$  dans le système antipolaire. En particulier, dans un système homogène, tout plan ou axe de symétrie est plan ou axe principal d'inertie.

Cela s'applique encore à un système non homogène, si les points symétriques ont la même densité.

127) Voir W. Schell, *Theorie der Bewegung*<sup>1)</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) 1, p. 129/30.

128) Cf. J. P. M. Binet, *J. Éc. polyt.* (1) cah. 16 (1813), p. 65.



δ. Dans le cas général, l'application des formules (51') ou (51) exige la détermination de six constantes ( $\mathcal{Q}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{F}$ ), mais il est rare qu'on puisse les trouver analytiquement. En particulier, si l'on désire le système antipolaire, on fera coïncider le point  $O$  avec le centre de gravité et l'on imaginera faite la substitution indiquée dans la note 63.

ε. Les moments d'inertie pour les couches minces et les surfaces peuvent se déduire par différentiation des moments d'inertie des volumes; de même les moments d'inertie des fines bandes de surfaces et des lignes se déduisent des moments d'inertie des surfaces<sup>129)</sup>.

La détermination analytique du centre de gravité s'obtient par l'application directe des formules (3a).

c) *Méthodes géométriques*: Outre les transformations semblable et homographique par affinité<sup>130)</sup> [n° 8 et 23], il est souvent avantageux pour faciliter la détermination des moments d'inertie d'employer la transformation par rayons vecteurs réciproques. On peut appliquer les théorèmes suivants:

Soient  $r$  et  $r'$  les rayons vecteurs de deux points correspondants des figures inverses relativement à un centre quelconque  $O$  (de façon que  $rr' = r^2 = \text{const.}$ ). Entre les densités  $\rho$  et  $\rho'$  aux points correspondants, établissons la relation

$$\rho' = \rho \left( \frac{r}{r'} \right)^n,$$

où l'on fera  $n = 10$ ,  $n = 8$  ou  $n = 6$  suivant que la figure est un volume, une surface ou une ligne. Les deux figures ont alors les mêmes axes principaux d'inertie relatifs à  $O$  et les mêmes moments d'inertie par rapport à toutes les droites passant par  $O$ .

Soient maintenant  $J_p$  et  $J_{p'}$  les moments d'inertie polaires des deux systèmes inverses relativement aux deux points homologues  $P$  et  $P'$ . On prendra encore

$$\rho' = \rho \left( \frac{r}{r'} \right)^n,$$

mais avec  $n = 8$ , 6 ou 4 suivant que le système est un volume, une

129) Voir *W. Schell, Theorie der Bewegung*<sup>1)</sup>, (3<sup>e</sup> éd.) 1, p. 142; *I. (J.) Somov, Racionalnaja mehanika*<sup>2)</sup>; trad. *A. Zivert, Mechnik* 2, p. 92.

130) Pour le problème direct (détermination du moment d'inertie d'une figure donnée) voir des exemples dans *W. Schell [Theorie der Bewegung*<sup>1)</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) 1, p. 134 et suiv.; pour le problème indirect (étant donné le moment d'inertie ou le module de résistance [n° 23], construction de la figure sous d'autres conditions données) voir *G. Jung, Reale Ist. Lombardo Rendic.* (2) 9 (1876), p. 388/90, 514/8, 597/609; *Il Politecnico* 24 (1876), p. 421/34, 529/34; *Report. Brit. Assoc.* 46, Glasgow 1876, éd. Londres 1877, p. 21/3; *Assoc. fr. avanc. sc.* 6 (Clermont-Ferrand) 1876, p. 127/9 [*E. Collignon* avait proposé à *G. Jung* de traiter ce problème].

surface ou une ligne; c'est ce que faisait *W. Thomson*<sup>131)</sup>. Avec cette nouvelle convention, on a

$$J_p = \left( \frac{r}{OP} \right)^2 \cdot J_p = \frac{OP'}{OP} \cdot J_p,$$

et le calcul du moment polaire pour un système résulte simplement de celui du système inverse.

d) *Méthodes graphiques*: Ce sont des méthodes d'approximation et leur principal avantage est leur grande généralité. Elles sont, pour les systèmes plans surtout, applicables à tous les problèmes où la présence de coefficients empiriques justifie l'approximation. La technique pose très souvent de tels problèmes. Voir à ce sujet l'article IV 7.

e) *Méthodes expérimentales*: Si le corps est irrégulier dans sa forme comme dans la distribution de sa densité, les méthodes précédentes sont en défaut. On est réduit alors à l'expérience:

On suspend le corps à un axe horizontal quelconque  $d'$  et on calcule le moment d'inertie  $J_d$  par rapport à la parallèle  $d$  à  $d'$  menée par le centre de gravité au moyen de la formule

$$J_d = \frac{p \delta^2}{\pi^2} = \mu \delta^2.$$

Dans le second membre de cette formule, toutes les grandeurs peuvent être connues par l'expérience, ce sont la masse  $\mu$ , le poids  $p$ , la distance  $\delta$  du centre de gravité  $S$  à l'axe  $d'$ , la demi-durée d'oscillation  $t$ <sup>132)</sup>, ( $\pi$  est le rapport de la longueur de la circonférence à son diamètre).

Mais on peut aussi attacher le corps à un pendule de masse connue et dont on a préalablement déterminé par observation le moment d'inertie par rapport à un axe horizontal.

Par une nouvelle expérience on détermine la durée d'oscillation du système total; on en conclut le moment d'inertie de ce système puis du système donné seulement, pourvu qu'on connaisse la masse de ce système donné<sup>133)</sup>.

En répétant l'expérience un nombre de fois suffisant, on détermine l'ellipsoïde central de *Mac Cullagh* au moyen des valeurs trouvées de  $\frac{J_d}{\mu}$ ; les trois autres ellipsoïdes centraux en résultent.

\* Citons également une méthode expérimentale donnée par *G. D. J. Haefner*<sup>134)</sup> pour déterminer les balourds des roues des wagons.\*

131) Voir *E. J. Routh, Dynamics*<sup>23)</sup>; *Dynamik* 1, p. 34.

132) Voir *R. Townsend, Cambr. Dublin math. J.* 2 (1847), p. 26; voir aussi *E. J. Routh, Dynamics*<sup>23)</sup>; *Dynamik* 1, p. 81.

133) Voir *E. J. Routh, Dynamics*<sup>23)</sup>; *Dynamik* 1, p. 81/2.

134) Cf. *P. Appell, J. Éc. polyt.* (2) cah. 9 (1904), p. 151/52.\*

f) *Méthodes mécaniques*: On peut aussi se servir de divers appareils et instruments. Nous citerons seulement les trois exemples suivants: *J. Amsler*<sup>135)</sup> construit un planimètre, *Marcel Deprez*<sup>136)</sup> un intégromètre et *Br. Abdank-Abakanowicz*<sup>137)</sup> un intégraphe; ces instruments déterminent par voie mécanique non seulement les moments d'inertie de figures planes homogènes relativement à des droites quelconques de leur plan, mais aussi les moments linéaires, les aires et les centres de gravité<sup>138)</sup>.

#### Moments supérieurs.

**25. Définition générale des moments supérieurs.** On appelle moment du  $m^{\text{ième}}$  degré d'un système de masses<sup>139)</sup> pour un groupe de  $m$  plans, dont quelques-uns peuvent être confondus, l'expression

$$(72) \quad \mathfrak{M} = \sum_{(i)} \alpha_i p_{i1} p_{i2} \dots p_{im},$$

où  $p_{ik}$  est la distance du  $i^{\text{ième}}$  point au  $k^{\text{ième}}$  plan et  $m \geq 1$ <sup>140)</sup>. Ce moment n'est qu'un cas particulier du moment du système de masses pour une surface générale du  $m^{\text{ième}}$  ordre<sup>141)</sup>. Celui-ci a pour expression

$$(73) \quad \mathfrak{M} = \sum_{(i)} \alpha_i F(x_i, y_i, z_i),$$

où  $F(x, y, z) = 0$  est l'équation de la surface donnée.

Dans une direction déterminée, menons une transversale par chaque point  $A_i$  du système et soient  $\varrho_{i1}, \varrho_{i2}, \dots, \varrho_{im}$  les distances du point  $A_i$  aux  $m$  points d'intersection de la transversale avec la surface du  $m^{\text{ième}}$  ordre; le moment précédent  $\mathfrak{M}$  sera proportionnel à l'expression

$$(74) \quad \sum_{(i)} \alpha_i \varrho_{i1} \varrho_{i2} \dots \varrho_{im}.$$

Soit alors  $\varphi_k$  l'angle formé par une direction arbitrairement

135) Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 1 (1856), p. 41/70, 101/40; K. (Ch.) Culmann [Graph. Statik<sup>14)</sup>, (1<sup>re</sup> éd.), p. 50/3; (2<sup>e</sup> éd.) p. 467/75; Statique graphique<sup>29)</sup>, p. 435/43] en donne une description détaillée.

136) „L'intégromètre de Marcel Deprez est décrit C. R. Acad. sc. Paris 73 (1871), p. 755/7; E. Collignon [Ann. Ponts et Chaussées (5) 3 (1872) premier semestre, p. 223/37] a publié une note descriptive sur cet intégromètre avec figures.”

137) Les intégraphes, la courbe intégrale et ses applications, Paris 1886.

138) N. Žukovskij (Joukowski) [Izvēstija Obščestva ljubitelej jestestvoznaniija (C. R. de la Soc. des amateurs des sciences naturelles Moscou) 67 (1891), p. 415] a construit un appareil pour trouver les moments d'inertie d'un corps quelconque.

139) Nous omettons, dans cet article, les modifications que subit la théorie des moments supérieurs et de l'équivalence dans le cas des systèmes plans.

140) Th. Reye, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 306.

141) Th. Reye, id. 78 (1874), p. 98.

choisie avec la normale à l'un des  $m$  plans  $\eta_k$ , soit  $\varrho_{ik}$  la distance du point  $A_i$  au plan  $\eta_k$  évaluée suivant la direction choisie;

$$p_{ik} = \varrho_{ik} \cos \varphi_k$$

est la distance normale du point  $A_i$  au plan  $\eta_k$ . Le moment du système de masses par rapport au groupe de ces plans est

$$(75) \quad \mathfrak{M} = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \dots \cos \varphi_m \sum_{(i)} \alpha_i \varrho_{i1} \varrho_{i2} \dots \varrho_{im}.$$

Les distances  $p_{ik}$  sont données analytiquement par la formule

$$p_{ik} = \frac{U_k x_i + V_k y_i + W_k z_i - T_k}{\sqrt{U_k^2 + V_k^2 + W_k^2}},$$

où  $U_k, V_k, W_k, T_k$  sont les coordonnées homogènes du plan  $\eta_k$ . Si les  $m$  plans coïncident, le moment du  $m^{\text{ième}}$  degré du système par rapport au plan  $\eta$  est

$$(76) \quad \mathfrak{M} = \sum_{(i)} \alpha_i \left( \frac{U x_i + V y_i + W z_i - T}{\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}} \right)^m.$$

Le moment peut être calculé pour tout plan de l'espace dès qu'on connaît le moment par rapport à un nombre de plans indépendants égal à

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = N(m) + 1.$$

**26. Les surfaces nulles d'un système de masses.** Les plans pour lesquels le moment du  $m^{\text{ième}}$  degré a une valeur constante  $\mathfrak{M}$  enveloppent une surface algébrique dont l'équation en coordonnées homogènes est

$$(77) \quad \sum_{(i)} \alpha_i (U x_i + V y_i + W z_i - T)^m = \mathfrak{M} (U^2 + V^2 + W^2)^{\frac{m}{2}}$$

pour  $m$  pair,

$$(77') \quad \left\{ \sum_{(i)} \alpha_i (U x_i + V y_i + W z_i - T)^m \right\}^2 = \mathfrak{M}^2 (U^2 + V^2 + W^2)^m$$

pour  $m$  impair.

Pour  $m$  pair elle est de classe  $m$ , pour  $m$  impair de classe  $2m$ . Pour  $\mathfrak{M} = 0$ , on a toujours une surface de  $m^{\text{ième}}$  classe<sup>142)</sup>

$$(78) \quad \Phi^m = \sum_{(i)} \alpha_i (U x_i + V y_i + W z_i - T)^m = 0.$$

Cette surface est la  $m^{\text{ième}}$  surface nulle du système.

Toutes les surfaces nulles sont indépendantes du choix des axes. Si l'on différentie l'équation de l'une d'elles par rapport à  $T$ , on voit

142) Th. Reye, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 296.

que la première polaire du plan de l'infini pour la  $m^{\text{ième}}$  surface de moments est la  $(m-1)^{\text{ième}}$  surface nulle du système.

Ces diverses surfaces nulles peuvent recevoir un poids égal à la masse totale du système; pourvue de ce poids, la  $m^{\text{ième}}$  surface-nulle détermine le système au point de vue des moments jusqu'au  $m^{\text{ième}}$  ordre inclusivement.

Pour les moments statiques, la surface nulle se réduit à un point qui est le centre de gravité et ce point muni de la masse totale remplace en effet le système pour les moments statiques. Pour les moments quadratiques, la surface nulle est la surface directrice du système antipolaire et la surface conjuguée<sup>143)</sup> est la surface centrale de Culmann, etc.

De cette façon la surface de  $m^{\text{ième}}$  classe munie d'un certain poids apparaît comme une simple généralisation du point masse. Nous pouvons l'appeler une *surface masse*. Une surface masse de  $m^{\text{ième}}$  classe est alors l'équivalent complet d'une forme algébrique quaternaire du  $m^{\text{ième}}$  degré. C'est ainsi qu'on peut rattacher toute la théorie des formes quaternaires algébriques à la géométrie des masses, comme l'a fait en particulier Th. Reye<sup>145)</sup>.

**27. Équivalence de degré supérieur. Indifférence de degré supérieur.** Deux systèmes de masses sont dits *équivalents au  $m^{\text{ième}}$  degré*<sup>144)</sup> si pour tout plan de l'espace leurs moments sont égaux jusqu'au  $m^{\text{ième}}$  inclusivement. Dès lors les deux systèmes ont des moments égaux par rapport à toute surface de degré  $m$  au plus et en particulier pour tout système de plans en nombre au plus égal à  $m$ .

De tels systèmes ont les mêmes surfaces nulles jusqu'au  $m^{\text{ième}}$  degré et les plans de moment constant ont la même enveloppe jusqu'au  $m^{\text{ième}}$  moment.

Réciproquement, si deux systèmes ont la même  $m^{\text{ième}}$  surface nulle et la même masse totale, ils sont équivalents au  $m^{\text{ième}}$  degré.

Un système de masses est appelé *indifférent au  $m^{\text{ième}}$  degré* si pour tout plan de l'espace ses moments s'annulent jusqu'au  $m^{\text{ième}}$  inclusivement. Alors toutes les surfaces nulles sont indéterminées jusqu'à la  $m^{\text{ième}}$  et l'équation (78) est une identité pour  $m = 1, 2, \dots, m$ . En outre, le moment du système est nul par rapport à toute surface

143) J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 313, 319, 321; 78 (1874), p. 99/100, 114/22, 123/9.

144) Th. Reye, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 293; 78 (1874), p. 97. Quelques cas particuliers furent traités par E. J. Routh, Quart. J. pure appl. math. 21 (1886), p. 281/7. S. Kantor [Sitzgsb. Akad. München 26 (1896), p. 531] a étendu la théorie à l'hyperespace.

d'ordre au plus égal à  $m$  ou à tout groupe de plans en nombre au plus égal à  $m$ .

Si deux systèmes sont équivalents au  $m^{\text{ième}}$  degré, l'un d'eux s'obtient en ajoutant à l'autre un système indifférent de  $m^{\text{ième}}$  degré et l'on peut regarder un tel système indifférent comme la *différence* entre deux systèmes équivalents au  $m^{\text{ième}}$  degré.

Soit un système de masses indifférent au  $(m-1)^{\text{ième}}$  degré et l'équation de la surface nulle correspondante de  $m^{\text{ième}}$  degré

$$\Phi^m = 0,$$

développons cette équation suivant les puissances de  $T$ , tous les termes s'annulent sauf le terme indépendant de  $T$ . La  $m^{\text{ième}}$  surface nulle se réduit donc à une courbe rejetée à l'infini et les moments du  $m^{\text{ième}}$  degré du système sont égaux pour deux plans parallèles quelconques.

Deux systèmes de masses qui pour tout plan d'une même *gerbe* ont les mêmes moments de degré  $m$  et de degré inférieur sont équivalents au degré  $m$  pourvu qu'ils aient aussi même masse totale. Car dans le développement de l'équation  $\Phi^m = 0$  pour les deux systèmes d'après les puissances de  $T$ , tous les termes coïncident et les deux systèmes ont par suite même surface nulle de  $m^{\text{ième}}$  degré.

Soit

$$\mathfrak{M} = \sum_{(i)} \alpha_i p_i^m$$

l'expression du moment de degré  $m$  d'un système relativement au plan  $\pi$ ; pour un plan  $\pi'$  situé à la distance  $a$  de  $\pi$ , le moment sera

$$(79) \quad \mathfrak{M}' = \sum_{(i)} \alpha_i (p_i - a)^m.$$

Les racines de l'équation du  $m^{\text{ième}}$  degré

$$(80) \quad \sum_{(i)} \alpha_i (p_i - a)^m = 0$$

sont les distances  $a_1, a_2, \dots, a_n$  du plan  $\pi$  aux plans parallèles tangents à la  $m^{\text{ième}}$  surface nulle  $\Phi_m^{\text{ième}}$ <sup>145)</sup>. Le coefficient de  $a^{m-k}$  dans cette équation est le  $k^{\text{ième}}$  moment du système pour le plan  $\pi$ . Le coefficient de  $a^m$  est la masse totale

$$\mu = \sum_{(i)} \alpha_i.$$

Les moments jusqu'au  $m^{\text{ième}}$  degré inclusivement sont donc déterminés comme fonctions de  $a_1, a_2, \dots, a_n$  par les relations entre les coefficients

145) Th. Reye, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 303.

et les racines d'une équation de  $m^{\text{ième}}$  degré. Par exemple, pour trouver le  $m^{\text{ième}}$  moment du système par rapport à un plan quelconque, il suffit de multiplier la masse totale par les distances du plan aux  $m$  plans parallèles tangents à la  $m^{\text{ième}}$  surface nulle<sup>146)</sup> etc.

Soit, dans un faisceau de plans quelconque,  $\eta$  un plan variable et  $\pi$  un plan fixe qui ne touche pas la  $m^{\text{ième}}$  surface nulle; soient  $\theta, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$  les angles formés par  $\pi$  avec  $\eta$  et avec les  $m$  plans du faisceau, qui sont tangents à la  $m^{\text{ième}}$  surface nulle. Soient enfin  $\mathfrak{M}_\eta$  et  $\mathfrak{M}_\pi$  les  $m^{\text{ième}}$  moments du système pour  $\eta$  et  $\pi$ , on a<sup>147)</sup>

$$(81) \quad \mathfrak{M}_\eta = \frac{\sin(\theta_1 - \theta) \sin(\theta_2 - \theta) \cdots \sin(\theta_m - \theta)}{\sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_m} \cdot \mathfrak{M}_\pi.$$

Cette formule permet de calculer le moment pour tout plan  $\eta$  du faisceau quand on connaît  $\mathfrak{M}_\pi$  et les  $m$  plans tangents à la  $m^{\text{ième}}$  surface nulle. Si la surface nulle est entièrement connue, on peut trouver le moment pour tout plan de l'espace en déplaçant l'axe du faisceau dans le plan fixe  $\pi$ .

**28. Polarité et apolarité.** Nous avons exposé plus haut une méthode qui permet de transformer un système de masses donné en un nouveau système à l'aide d'un plan quelconque  $\pi$ . On multiplie par exemple chaque masse  $\alpha_i$  par une fonction linéaire  $(\alpha x_i + \beta y_i + \gamma z_i - p)$  représentant la distance du point considéré au plan  $\pi$  [n° 11].

D'une façon analogue et plus générale on peut d'un système donné en déduire un autre (le *système transformé*) en remplaçant la masse  $\alpha_i$  par la masse  $\alpha_i F_k(x_i, y_i, z_i)$ , où  $F_k$  est une fonction déterminée de degré  $k$  par rapport aux coordonnées  $x, y, z$ . La  $s^{\text{ième}}$  surface nulle du nouveau système est représentée par l'équation

$$(82) \quad \sum_{(i)} \alpha_i F_k(x_i, y_i, z_i) (Ux_i + Yy_i + Wz_i - T)^s = 0.$$

Si l'on développe cette équation, le coefficient de  $U^2 V^\mu W^\nu T^e$  est

$$\sum_{(i)} \alpha_i F_k(x_i, y_i, z_i) x_i^l y_i^\mu z_i^\nu$$

et ce coefficient se compose linéairement de termes de la forme

$$\sum_{(i)} \alpha_i x_i^{l+\lambda} y_i^{m+\mu} z_i^{n+\nu}, \quad (l+m+n=k, \quad \lambda+\mu+\nu < s).$$

146) Si l'on a  $\sum_{(i)} \alpha_i = 0$ , l'une des racines  $\alpha_j$  est infinie;  $\Phi^m$  est tangente au plan de l'infini, et l'équation (80) se réduit à une équation du  $(m-1)^{\text{ième}}$  degré. Ce cas comporte donc une modification très évidente au théorème énoncé.

147) Th. Reye, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 304.

Ces expressions sont elles-mêmes coefficients dans l'équation de la  $(k+s)^{\text{ième}}$  surface nulle du système donné, et elles apparaissent ici multipliées par les coefficients de l'équation

$$F_k(x, y, z) = 0.$$

La  $s^{\text{ième}}$  surface nulle du nouveau système est donc déterminée sans ambiguïté par l'équation  $F_k = 0$  et la  $(k+s)^{\text{ième}}$  surface nulle du système primitif. Th. Reye l'appelle la  $s^{\text{ième}}$  polaire de la surface du  $k^{\text{ième}}$  ordre  $F_k$ <sup>148)</sup> relativement à la surface nulle de  $(k+s)^{\text{ième}}$  classe. C'est elle-même une surface de  $s^{\text{ième}}$  classe.

Pour  $s=1$ , elle se réduit à un point dont les coordonnées sont données par les relations

$$(83) \quad \begin{cases} Mx_k = \sum_{(i)} \alpha_i x_i F_k(x_i, y_i, z_i), \\ My_k = \sum_{(i)} \alpha_i y_i F_k(x_i, y_i, z_i), \\ Mz_k = \sum_{(i)} \alpha_i z_i F_k(x_i, y_i, z_i), \\ M = \sum_{(i)} \alpha_i F_k(x_i, y_i, z_i). \end{cases}$$

On peut appeler ce point le *pôle* de la surface  $F_k = 0$  pour le système donné.

Il peut maintenant arriver que l'équation (82) soit identiquement satisfaite, quand le système transformé est indifférent du  $s^{\text{ième}}$  degré<sup>149)</sup>. Alors Th. Reye donne à la surface du  $k^{\text{ième}}$  ordre

$$F_k = 0$$

le nom d'*apolaire* de la surface de  $(k+s)^{\text{ième}}$  classe<sup>150)</sup>

$$\Phi_{k+s} = 0.$$

**29. Remplacement d'un système de masses par des points isolés au point de vue des moments du  $m^{\text{ième}}$  degré.** Tout système

148) La surface  $F_k$  peut d'ailleurs se décomposer en un groupe de  $k$  plans qui à leur tour peuvent être distincts ou confondus.

149) Pour que le système transformé ne soit pas indifférent au degré  $s$ , il suffit que le moment du système donné ne s'annule pas pour la surface  $F_k$ . Mais inversement l'hypothèse contraire ne suffit pas pour établir l'indifférence du système transformé. Mais celui-ci est à coup sûr indifférent au degré  $s$  si  $F_k$  passe par tous les points du système primitif ou par tous ceux d'un système qui lui est équivalent au degré  $k+s$ .

150) Sur les surfaces apolaires, voir Th. Reye, J. reine angew. Math. 78 (1874), p. 104/8; 79 (1875), p. 159/75.

de masses peut, au point de vue de ses moments du  $m^{\text{ième}}$  degré, être remplacé par un groupe de points masses  $a_i$  en nombre

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = N(m) + 1.$$

Ces points d'ailleurs arbitraires doivent seulement ne pas se trouver sur une même surface du  $m^{\text{ième}}$  ordre.

Le point  $a_i$  doit être affecté d'une masse  $\mu_i$  telle que son moment par rapport à la surface de  $m^{\text{ième}}$  ordre  $F_m^{(i)}$ , qui passe par les autres points en nombre  $N(m)$ , soit égal au moment du système donné pour la même surface. Cette masse  $\mu_i$  est déterminée par l'équation<sup>151)</sup>

$$(84) \quad \mu_i F_m^{(i)}(x_i, y_i, z_i) = \sum_{(j)} \alpha_j F_m^{(j)}(x_i, y_i, z_i).$$

Un système de masses peut aussi être remplacé par des points en nombre inférieur à  $N(m) + 1$  pourvu que la position de ces points soit convenablement choisie<sup>152)</sup>. Le nombre minimisé de points n'a pas encore été découvert pour  $m$  quelconque.

Pour  $m = 1$ , c'est-à-dire au point de vue des moments statiques, le système est équivalent en général à un point unique et déterminé; pour  $m = 2$  on peut prendre en général, comme nous l'avons vu, un nombre minimisé de quatre points<sup>153)</sup>.

Au point de vue des moments du troisième degré<sup>154)</sup>, le système peut généralement être remplacé par six masses avec quatre paramètres arbitraires, la droite de jonction de deux de ces points pouvant être choisie arbitrairement; mais il y a une seule manière de remplacer le système par cinq points masses<sup>154)</sup>.

Au point de vue des moments du quatrième degré<sup>155)</sup> un système général peut être remplacé par dix points comportant cinq paramètres

151) Th. Reye, J. reine angew. Math. 78 (1874), p. 110. On voit manifestement de quelle façon on peut utiliser une pareille réduction pour le calcul des intégrales  $\int x^n dS$ ,  $\int F_m(x, y, z) dS$ , où  $dS$  est l'élément d'un domaine donné. E. J. Routh [Quart. J. pure appl. math. 21 (1886), p. 281/7] applique ce procédé d'intégration à quelques cas particuliers qui se rapportent au centre de pression d'une surface plane et au centre de gravité d'un tétraèdre, quand la pression ou la densité de l'élément  $dS$  est représentée par la fonction entière  $F_m$  de la position du point [voir aussi E. J. Routh, Dynamics<sup>2)</sup>; Dynamik I, p. 32/3].

152) Th. Reye, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 321/6.

153) Th. Reye, J. reine angew. Math. 72 (1870), p. 316/20; 78 (1874), p. 114/22.

154) Dans tous ces cas, en même temps que les points, les masses sont aussi déterminées.

155) Th. Reye, J. reine angew. Math. 78 (1874), p. 123/9.

qui demeurent arbitraires; l'un des points est complètement arbitraire; un autre point peut être pris arbitrairement sur une quadrique déterminée qui dépend du premier point; enfin les huit points restants occupent sur cette surface des positions déterminées.

Dans un cas particulier seulement, le système de masses peut, au point de vue des moments du quatrième ordre, être remplacé par un nombre de points inférieur à dix, savoir par neuf points dont l'un détermine les autres. Cela arrive quand la quatrième surface nulle du système forme une surface apolaire du deuxième degré.

Pour parler le langage algébrique, ces théorèmes ont pour objet de représenter une forme quaternaire par une somme de puissances de formes linéaires. A ce point de vue, se reporter à l'article I 11.

30. Le problème des valeurs limites de Čebyšev<sup>156)</sup>. P. L. Čebyšev<sup>157)</sup> a donné pour la première fois une application des moments supérieurs au cas particulier d'une seule variable.

Pour une densité inconnue  $f(x)$ , on se donne les intégrales

$$\int_A^B f(x) dx, \int_A^B x f(x) dx, \int_A^B x^2 f(x) dx, \dots, \int_A^B x^m f(x) dx,$$

où l'on a  $A < a$ , et  $B > b$ , et l'on demande entre quelles limites on

peut alors prendre  $\int_a^b f(x) dx$ .

Ces limites sont toujours fournies par des distributions de masses telles que l'axe des  $x$  ne contienne seulement que des points isolés affectés de masses.

La première communication de P. L. Čebyšev<sup>158)</sup> consiste dans le problème suivant: étant donné la longueur, le poids, le centre de gravité et le moment principal d'inertie central d'une droite matérielle dont la densité est inconnue et peut changer d'un point à un autre, on veut

156) Les noms russes sont transcrits conformément à la décision prise par la Commission internationale de bibliographie. On écrivait autrefois *Tchebycheff* ou *Tschebycheff* ou encore *Tchelycheff*.

157) J. math. pures appl. (2) 3 (1858), p. 289/323; (2) 12 (1867), p. 177/84; (2) 19 (1874), p. 157/60; Œuvres I, St Pétersbourg 1899, p. 687/94; 2, St Pétersbourg 1907, p. 183/5.

Voir aussi P. L. Čebyšev [Mém. Acad. Pétersb. (7) 1 (1859), mém. n° 5, p. 1/81; Acta math. 9 (1886/7), p. 35/56; Œuvres I, p. 387/469; 2, p. 421/40], comme aussi les travaux de ses élèves G. Zolotarev [J. math. pures appl. (2) 19 (1874), p. 161/88] et A. A. Markov [Math. Ann. 24 (1884), p. 172/80; Acta math. 9 (1886/7), p. 57/70].

158) J. math. pures appl. (2) 19 (1874), p. 159.

trouver les limites entre lesquelles peut se trouver le poids d'une partie de cette droite.

La solution de ce problème a été donnée par *P. L. Čebyšëv* sans démonstration; la démonstration a été fournie ensuite par *A. A. Markov*<sup>159</sup>. Un exposé détaillé de ce sujet a été donné par *C. A. Possé*<sup>160</sup>.

*P. L. Čebyšëv* a donné une généralisation analytique de la question; à la place des puissances de  $x$ , il introduit des fonctions

$$\Omega(x), \Omega_1(x), \dots, \Omega_m(x)$$

soumises à des restrictions particulières<sup>161</sup>).

159) Math. Ann. 24 (1884), p. 179.

160) Math. Ann. 26 (1886), p. 593/6; Sur quelques applications des fractions continues algébriques, St Pétersbourg 1886, préface p. IV à VI et p. 90/175 (chap. 5).

161) Ces questions posées et en partie résolues par *P. L. Čebyšëv* trouvent leur application particulière dans les recherches sur la distribution des masses dans l'intérieur de la terre. Pour plus de détails voir à ce sujet l'article du tome VI (géophysique) qui lui est consacré.

## IV 6. CINÉMATIQUE.

EXPOSÉ D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE *A. SCHÖNFELDS* (FRANCFORT S/M),  
PAR *G. KOENIGS* (PARIS).

### A. Mouvements finis.

1. Les types les plus simples de mouvements; les déplacements et les antidéplacements. La cinématique considère les lois du mouvement, indépendamment de la notion de forces et de toute conception dynamique. La séparation méthodique d'avec le reste de la mécanique remonte à *A. M. Ampère*<sup>1)</sup> 2).

Les mouvements continus les plus simples d'un corps sont la translation, la rotation et la torsion<sup>3)</sup>, c'est-à-dire le mouvement dans lequel un corps tourne autour d'un axe en glissant le long de cet axe simultanément et proportionnellement à la rotation<sup>4)</sup>.

1) Essai sur la philosophie des sciences, Paris 1814, p. 48. Voir aussi *A. Transon*, L'Institut (1) 38 (1870), p. 117. *A. M. Ampère* désirait que l'étude des mouvements et des vitesses précédât la théorie des machines. *J. V. Poncelet* dans un cours professé à la faculté des sciences de Paris en 1838 a commencé à exposer dans ce sens la théorie des machines.

2) La partie de la mécanique qui fait abstraction du cours du mouvement dans le temps et n'a égard qu'à la position occupée sous les yeux, en considérant ensuite la succession des figures mobiles, a reçu le nom de *géométrie du mouvement*. Elle a été créée par *M. Charles*, et sa constitution ultérieure est principalement attachée au nom de *A. Mannheim*. Pour *A. Mannheim* du reste, le but principal des propositions et des résultats réside dans la théorie des courbes et des surfaces. *G. Darboux* [Leçons sur la théorie des surfaces 1, Paris 1887; 2, Paris 1889; 3, Paris 1894; 4, Paris 1896] et ses élèves ont aussi utilisé avec beaucoup de succès la cinématique dans cette partie de la géométrie. C'est dans le même sens que procède *E. Cesàro* [Lezioni di geometria intrinseca, Naples 1896; trad. par *G. Kowalewski*, Vorlesungen über natürliche Geometrie, Leipzig 1901].

3) Une rotation de l'angle  $\alpha$  autour de l'axe  $a$  sera désignée par  $\mathcal{R}(\alpha)$ ; une torsion d'angle  $\alpha$  et de glissement  $r$  selon l'axe  $a$  sera représentée par  $\mathcal{T}(\alpha, r)$ .

4) Ce sont en même temps les mouvements dont les trajectoires glissent sur elles-mêmes.

Il est nécessaire d'établir ici une distinction qui fera mieux comprendre certains travaux modernes. La coexistence dans l'espace de deux positions d'un même corps constitue ce que l'on appelle un *déplacement*.\*

C'est un fait très remarquable que la réalisation de tout déplacement, c'est-à-dire tout passage d'un corps d'une position à une autre, puisse être obtenue par le moyen de l'un des trois mouvements continus simples signalés plus haut.

Que tout déplacement d'un corps dont un point  $O$  est fixe puisse être réalisé par une rotation autour d'un axe  $a$  passant par  $O$ , fut une découverte de *L. Euler*<sup>5)</sup>.

Un plan  $\tau$  se meut-il sur lui-même, chaque déplacement peut être obtenu par une rotation autour d'un point (centre de rotation  $O$ ). La rotation devient une translation du moment où le point  $O$  se trouve rejeté à l'infini. Ce théorème fut donné pour la première fois par *M. Chasles*<sup>6)</sup>, auquel on doit aussi le théorème plus général d'après lequel le changement de position le plus général d'un corps peut être toujours réalisé par le moyen d'une certaine torsion  $\mathcal{C}(a, \tau)$  autour d'un axe déterminé. La torsion devient une rotation ou bien une translation chaque fois que la composante  $\tau$  de la translation ou bien l'angle  $\alpha$  de la rotation sont nuls. Le cas de  $\alpha = 180^\circ$  a, par suite des recherches de *H. Wiener* [n° 2], atteint une importance théorique; il lui correspond un *renversement* si  $\tau = 0$ , et un *renversement-torsion* si  $\tau$  n'est pas nul.

Il est convenable de lier la théorie des déplacements à la théorie de ces transformations de l'espace qui transforment des figures  $\Sigma$  en d'autres  $\Sigma$  qui leur sont égales par réflexion et que nous désignons sous le nom de *antidéplacements*<sup>7)</sup>.

\*On peut ajouter que ces mouvements sont aussi les seuls au cours desquels il existe des surfaces (surfaces prismatiques, surfaces rotoides ou de révolution, surfaces hélicoïdes selon les cas) qui glissent sur elles-mêmes. Cette remarque a une haute importance au point de vue de la réalisation pratique de ces mouvements, car elle permet d'en pratiquer le guidage dans des conditions spéciales de précision et de stabilité.\*

5) *Novi Comm. Acad. Petrop.* 20 (1775), éd. 1776, p. 202. Au lieu du mouvement autour d'un point  $O$  on peut aussi considérer le mouvement d'une sphère sur elle-même; pour celle-ci, la trace de l'axe  $a$  sur elle est le centre correspondant de rotation.

6) *Bull. sc. math. astr. phys. chim.* 14 (1830), p. 321, 324.

7) Voir *E. Study*, *Math. Ann.* 39 (1891), p. 441.

\*Ce n'est pas sans quelques hésitations que nous introduisons ici ce néologisme de *antidéplacement* pour traduire le mot *Umlegung* du texte allemand. Il correspond bien à l'usage de la préfixe *anti* introduite dans des circonstances

*M. Chasles*<sup>8)</sup> s'était déjà occupé d'elles. A la rigueur, il n'y a lieu de considérer les antidéplacements que dans le cas de figures à trois dimensions; on peut toutefois les considérer aussi dans un plan  $\tau$ , si l'on s'impose que le plan ne sorte pas de lui-même.

Pour le passage correspondant de  $\sigma$  à  $\bar{\sigma}$ , dans le plan, il existe deux types simples d'antidéplacements. On peut transformer  $\sigma$  en  $\bar{\sigma}$  par une réflexion sur une droite  $g$  ou bien par une réflexion sur la droite  $g$ , accompagnée d'une translation rectiligne suivant la droite  $g$ .

Pour le passage de  $\Sigma$  à  $\bar{\Sigma}$ , dans l'espace, il existe quatre types simples distincts. En premier lieu, la symétrie par rapport à un point  $O$  (inversion); la symétrie par réflexion sur un plan  $\varepsilon$ ; la réflexion sur un plan  $\varepsilon$  accompagnée d'une rotation autour d'un axe normal<sup>9)</sup> (rotation réflexion); enfin une réflexion sur un plan, accompagnée d'une translation rectiligne suivant ce plan. Les trois premiers types sont précisément ceux qui interviennent lorsqu'un point de  $\Sigma$  reste fixe ainsi que *E. Hessel*<sup>10)</sup> l'a remarqué.

Les propositions élémentaires qui précèdent ont une source plus profonde dans la théorie générale des plans ou des espaces projectifs [III 8]. Sur les trois points doubles des plans collinéaires, dans le cas particulier d'un déplacement d'un plan sur lui-même il y en a deux qui sont les points circulaires à l'infini et le troisième est le centre de rotation. Dans tous les déplacements d'un plan  $\sigma$  sur lui-même les points circulaires demeurent donc *fixes*.

De même deux espaces congruents ont en commun le cercle de l'infini et sur celui-ci deux points communs. Les plans passant par l'un ou l'autre de ces points et par l'axe du mouvement hélicoïdal constituent deux faces du tétraèdre commun, tandis que les deux autres faces coïncident avec le plan de l'infini compté deux fois.

Ces faits montrent immédiatement l'importance que présentent les points circulaires imaginaires et le cercle imaginaire à l'infini pour les courbes et les surfaces qui interviennent dans la cinématique, et qui reçoivent de ce fait un caractère particulier<sup>11)</sup>.

analogues: antiparallèle, antibomologue. Le simple mot de *symétrie* ne suffirait pas puisque, dans le cas actuel, la symétrie se trouve compliquée d'un déplacement.\*

8) *C. R. Acad. sc. Paris* 51 (1860), p. 905.

9) Lorsque l'angle de rotation est de  $180^\circ$ , on obtient une inversion. Tout axe issu de  $O$  peut alors être pris comme axe de rotation.

10) Voir *J. S. T. Gehler*, *Physikal. Wörterbuch* (nouv. éd.) 5<sup>e</sup>, Leipzig 1880 (article „Kristallographie“); cf. V 9.

11) *A. Mannheim* [*J. math. pures appl.* (3) 1 (1875), p. 59] a découvert le premier ces caractères spéciaux aux *surfaces trajectoires*.

**2. Composition des déplacements et des antidéplacements.** Quand une figure de l'espace subit un déplacement ou un antidéplacement  $\mathcal{A}$  et ensuite un second  $\mathcal{B}$ , on peut toujours effectuer le passage de la position initiale à la position finale par le moyen de l'une des opérations simples définies au n° 1. Cette opération *résultante*  $\mathcal{C}$  est toujours un déplacement et seulement alors, si  $\mathcal{A}$  aussi bien que  $\mathcal{B}$  sont tous deux des déplacements ou bien tous deux des antidéplacements. Si l'on effectue d'abord  $\mathcal{B}$ , puis  $\mathcal{A}$ , l'opération résultante  $\mathcal{C}_1$  est en général différente de  $\mathcal{C}$ . Si  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1$ ,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont *échangeables*<sup>12)</sup>. Cette désignation est liée à ce fait que l'on peut appliquer aux déplacements et aux antidéplacements les notations formelles de la multiplication. On écrit  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{C}$  et l'on appelle  $\mathcal{C}$  le produit de  $\mathcal{A}$  et de  $\mathcal{B}$ ; pour cette notion de produit l'associativité existe, mais non, en général la commutativité<sup>13)</sup>.

Les translations sont des vecteurs; leur composition s'effectue par l'addition géométrique de ces derniers [IV 4, 6].

Pour deux rotations  $\mathcal{A}(\alpha)$  et  $\mathcal{B}(\beta)$ , dont les axes  $a$  et  $b$  se coupent en  $O$ , la rotation résultante  $\mathcal{C}(\gamma)$  se détermine ainsi: construire l'axe  $c$  passant par  $O$  de façon que  $\angle cab = \frac{1}{2}\alpha$  et  $\angle cba = \frac{1}{2}\beta$ , en ce cas  $\angle acb = \frac{1}{2}(180^\circ - \gamma)$ . Ce fait a trouvé son expression la plus simple dans cet énoncé de *W. R. Hamilton*<sup>14)</sup>: les rotations autour des axes  $a, b, c$  égales respectivement aux doubles des angles compris entre les plans du trièdre qu'ils forment ramènent l'espace à sa position primitive.

Les axes  $a, b$  sont-ils parallèles, alors  $c$  est aussi parallèle à  $a$  et à  $b$  et l'on a  $\gamma = \alpha + \beta$ ; les positions relatives de  $a, b, c$  sont données par la règle d'Hamilton.

Si l'on a en outre  $\alpha + \beta = 0$ ,  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  forment un *couple de rotations*. Le mouvement résultant est une translation  $\mathcal{C}$  dont la direction est rectangulaire avec  $a$  et  $b$ <sup>15)</sup>. On peut donc remplacer toute rotation par une rotation d'égale amplitude angulaire autour d'un axe parallèle et par une translation rectiligne perpendiculaire à cet axe. De là résulte encore que tout déplacement hélicoïdal peut être remplacé

12) Dans les cas des opérations simples du n° 1, les composantes sont toujours échangeables.

13) Pour une exposition plus complète voir *H. Wiener*, Ber. Ges. Lpz. 42 (1890), math. p. 13/23, 71/87; voir aussi *A. Schoenflies*, Krystallsysteme und Krystallstruktur, Leipzig 1891, p. 31 et suiv.

14) Lectures on quaternions, Dublin 1853, §§ 217 et 344; voir aussi *A. F. Möbius*, Ber. Ges. Lpz. 11 (1859), math. p. 138.

15) Si  $AB$  est la distance de  $a$  et de  $b$  on a  $\tau = 2AB \sin \frac{\alpha}{2}$ .

par une translation et par une rotation d'angle égal autour d'un axe parallèle à celui du mouvement hélicoïdal, en sorte que se placent ici des propositions et des formules analogues à celles déjà rencontrées à propos des mouvements infiniment petits [IV 4, 49]; seulement ici la succession des mouvements n'est pas en général échangeable<sup>16)</sup>.

La composition de deux mouvements hélicoïdaux trouve son expression la plus simple dans un théorème analogue à celui d'Hamilton. Soient  $a, b, c$  trois droites formant un système gauche, soient  $u, v, w$  leurs perpendiculaires communes;  $u$  coupe les droites  $b$  et  $c$  en  $U_b$  et  $U_c$  etc., on a alors ce résultat: Si autour des droites  $a, b, c$  s'effectuent les torsions  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ , telles que

$$\alpha = 2(vw), \quad \beta = 2(wu), \quad \gamma = 2(uv)$$

$$\tau_a = 2V_a W_a, \quad \tau_b = 2W_b U_b, \quad \tau_c = 2U_c V_c$$

la figure  $\Sigma$ , par ces torsions successives, reprend sa position primitive. Ce théorème, sous cet énoncé, a été établi par *G. H. Halphen*<sup>17)</sup>. Mais pour remonter à sa source la plus simple, ainsi qu'à celle du théorème d'Hamilton, il est nécessaire de faire mention d'une plus récente direction de recherches, dont l'utilisation méthodique en la présente matière a été inaugurée par *H. Wiener*<sup>18)</sup>. L'idée première consiste à prendre comme opérations élémentaires les opérations de période 2, c'est-à-dire celles qui, appliquées deux fois de suite, ramènent l'espace à sa position première.

Il n'existe qu'un seul déplacement de cette espèce, à savoir le *renversement*. Parmi les antidéplacements il y en a deux, la réflexion (ou symétrie) relative à un point et celle relative à un plan. Chacune de ces opérations se trouve définie l'une par une droite, une autre par un point, la dernière par un plan<sup>19)</sup>.

16) Ces théorèmes et les formules qui leur sont liées devraient leur origine à *O. Rodrigues* [J. math. pures appl. (1) 6 (1840), p. 592 et suiv.].

17) Nouv. Ann. math. (3) 1 (1882), p. 296. Voir aussi *W. Burnside* [Messenger of math. (2) 19 (1889/90), p. 104] qui a donné une démonstration susceptible de s'étendre aux mouvements non-euclidiens, et qui en a déduit la construction de la torsion résultante. Voir aussi pour cette construction *H. Wiener* [Ber. Ges. Lpz. 42 (1890), math. p. 76].

18) Ber. Ges. Lpz. 42 (1890), math. p. 245; 43 (1891), math. p. 424, 644.

De son côté, *G. Darboux* avait utilisé les renversements dans son enseignement à la Faculté des sciences de Paris [cf. Théorie des surfaces\* 4, p. 433/41 (note V) et *G. Darboux*, dans *G. Koenigs*, Leçons de cinématique, Paris 1897, p. 346/51 (note II)].\*

19) *H. Wiener* signale aussi le renversement comme étant une réflexion (symétrie) par rapport à une droite.



Un déplacement arbitraire ou un antidéplacement, peut être représenté par le produit de deux de ces opérations; en particulier, une torsion peut être regardée comme le produit de deux renversements [n° 5]. Sur cette circonstance repose l'ingénieuse méthode de *H. Wiener*. Les déplacements et les antidéplacements se rattachent donc à la classe de ces transformations qui peuvent être définies comme le produit de deux transformations involutives et donnent ainsi lieu à une interprétation des notions et des propositions qui se rapportent à ces transformations<sup>20</sup>.

La composition des réflexions et des renversements donne lieu aux théorèmes suivants: Si  $J, J_1$  sont des réflexions sur les points  $M$  et  $M_1$ , l'opération  $JJ_1$  est une translation  $\tau$  et l'on a  $\tau = 2MM_1$ .

Si  $\sigma$  et  $\sigma_1$  sont des réflexions sur les plans  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_1$ , l'opération  $\sigma\sigma_1$  est une rotation  $\mathcal{C}(\alpha)$  autour de la droite  $a = (\varepsilon\varepsilon_1)$  et  $\alpha = 2(\varepsilon\varepsilon_1)$ ;

Si  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  sont des renversements autour des droites  $u, v$ , l'opération  $\mathcal{U}\mathcal{V}$  est une torsion  $\mathcal{C}(a, \tau)$  autour de la perpendiculaire commune à  $u$  et à  $v$  et l'on a  $\alpha = 2(uv)$ ,  $\tau = 2UV$ , où  $U, V$  sont les pieds de la perpendiculaire commune. De là résulte aussitôt le théorème de *G. H. Halphen*, par l'identité évidente

$$\mathcal{U}\mathcal{V}\mathcal{U}\mathcal{V} \cdot \mathcal{U}\mathcal{V} \cdot \mathcal{U}\mathcal{V} = 1$$

de même que le théorème d'*Hamilton* résulte de la formule

$$\sigma_1\sigma_2 \cdot \sigma_2\sigma_3 \cdot \sigma_3\sigma_1 = 1.$$

où  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sont des réflexions sur les plans du trièdre dont  $a, b, c$  sont les arêtes<sup>21</sup>.

On peut se demander de combien de manières un déplacement ou un antidéplacement peut être représenté par d'autres opérations et en particulier par des opérations involutives. Dans un cas particulier, *C. Moshammer* et *H. Wiener* ont d'abord posé et résolu cette question<sup>22</sup>. *E. Study*<sup>23</sup>) a ensuite traité le problème d'une façon

20) Voir *H. Wiener*, Ber. Ges. Lpz. 43 (1891), math. p. 658.

21) Si l'on applique cette formule à des axes parallèles on est conduit au théorème de *C. Stephanos*, que trois positions quelconques données  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sur un plan  $\sigma$  peuvent être obtenues par réflexion sur trois droites  $g, g', g''$  [Bull. Soc. philom. Paris (7) 6 (1881/2), p. 13]. Ce théorème fut le point de départ des recherches de *G. H. Halphen*; son propre théorème est l'extension de celui-ci au cas de l'espace.

22) Sitzgeb. Akad. Wien 73 II (1876), p. 143; Ber. Ges. Lpz. 42 (1890), math. p. 85. Le cas particulier concerne le passage d'une droite  $g$  à la position  $g_1$ . Il y a  $\infty^2$  vissages qui la permettent; leurs axes forment une congruence linéaire rectangulaire avec une droite  $u$ . Un point  $P$  se trouve-t-il astreint à prendre une position  $P_1$ , il y a  $\infty^1$  vissages appropriés, dont les axes forment un cylindroïde etc. Voir IV 4, 60.

plus générale. Par exemple, un antidéplacement peut être représenté d'une  $\infty^3$  de façons par trois réflexions, un mouvement en général d'une  $\infty^3$  de façons par deux renversements et d'une  $\infty^4$  de façons par deux rotations, d'une  $\infty^6$  de façons par quatre réflexions sur des plans, etc. etc.

Les théorèmes concernant la composition des antidéplacements se déduisent de ce qui précède par la réduction des antidéplacements à leurs éléments<sup>24</sup>).

**3. Le Dualisme dans le Mouvement.** Le caractère de relativité de la notion de mouvement fait que l'on peut tout aussi bien considérer le mouvement de  $\Sigma$  par rapport à  $\Sigma'$  ou le mouvement de  $\Sigma'$  par rapport à  $\Sigma$ ; cela dépend uniquement de la pensée que l'on a de se placer soi-même au cours du mouvement soit dans le système  $\Sigma$  soit dans le système  $\Sigma'$ . L'un des mouvements est dit inverse de l'autre.

C'est *M. Chasles*<sup>25</sup>) qui, le premier, remarqua que si un point  $A$  de la figure plane  $\sigma$  décrit dans  $\sigma'$  une courbe  $a'$ , par contre, dans le mouvement inverse, la courbe  $a'$  passe constamment par le point  $A$ . *M. Chasles* lui-même a tiré un certain parti de ce dualisme et a fait ressortir sa signification technique. Le côté théorique a été développé particulièrement par *S. H. Aronhold*<sup>26</sup>) et plus tard par *A. Schoenflies*<sup>26</sup>).

En vertu de ce même principe, si un point  $A$  de  $\sigma$  tombe  $n$  fois sur une courbe  $c'$ , dans le mouvement inverse,  $c'$  passe  $n$  fois par  $A$ . De là résulte que: 1°) Si les trajectoires d'un mouvement plan sont de l'ordre  $n$ , les enveloppes des droites de l'autre mouvement sont de la  $n^{\text{ème}}$  classe; 2°) Si dans l'un des mouvements la trajectoire de  $A$  possède un point d'inflexion, dans le mouvement inverse  $A$  est un point de rebroussement de l'enveloppe de la tangente inflexionnelle.

Des relations analogues existent pour le mouvement dans l'espace. Si  $A$  tombe  $n$  fois dans le plan  $\sigma'$ , dans le mouvement inverse, le plan  $\sigma'$  passe  $n$  fois par le point  $A$ ; de là résulte que: 1°) Si les figures engendrées par les points, droites ou plans dans le premier mouvement sont algébriques, il en est de même pour le mouvement inverse; 2°) Le degré des surfaces engendrées par les droites est le même dans les

23) Math. Ann. 39 (1891), p. 487 et suiv. Pour des mouvements particuliers, les théorèmes précédents subissent quelques modifications.

24) *E. Study*, Math. Ann. 39 (1891), p. 487; *H. Wiener*, Ber. Ges. Lpz. 43 (1891), math. p. 434; *A. Schoenflies*, Krystallsysteme<sup>12</sup>) p. 49, 341.

25) Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, (2<sup>e</sup> éd.) Paris 1875, p. 408.

26) *S. H. Aronhold*, Grundzüge der kinematischen Geometrie [Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbeleisses 51 (1872), p. 134]; *A. Schoenflies*, C. R. Acad. sc. Paris 101 (1885), p. 150/3.

deux mouvements; 3°) Le degré des trajectoires de l'un des mouvements est égal à la classe des surfaces développables engendrées par les plans dans l'autre. Si les trajectoires sont planes, les développables deviennent des cônes<sup>27)</sup>.

Les courbes trajectoires et les développables trajectoires dans les deux mouvements sont généralement de nature différente<sup>28)</sup>. Cependant pour tout mouvement d'un plan  $\sigma$  sur un autre  $\sigma'$  le théorème suivant est valable, à savoir que si un point  $A$  de  $\sigma$  décrit un cercle dans  $\sigma'$  de centre  $A'$ ,  $A'$  de son côté décrit dans  $\sigma$  un cercle de centre  $A$ . De même, si un point  $A$  d'un corps  $\Sigma$  demeure sur une sphère solidaire d'un corps  $\Sigma'$ , le centre  $A'$  de cette sphère est sur une sphère de  $\Sigma$  de centre  $A$ . Cette réciprocité subsiste, si  $A$  dans  $n$  positions vient sur un cercle ou une sphère de centre  $A'$ , car alors  $A'$  vient aussi en  $n$  positions sur un cercle ou une sphère de centre  $A$ . Ce fait a une importance essentielle<sup>29)</sup> [n° 4 et 5].

4. Plusieurs positions données du même plan ou du même faisceau. Deux positions d'une même figure plane dans son propre plan  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  entraînent l'existence d'un centre de rotation  $O$  [n° 1]; de plus, à tout couple de points  $A_1, A_2$  il correspond leur corde  $A_1A_2$ , leur milieu  $A_m$ , et la perpendiculaire  $a''$  en ce milieu; à deux positions d'une droite  $g_1, g_2$  appartiennent les deux bissectrices  $g_3$  et  $g_4$  de leur angle. Les points  $A_m$  forment en général un système  $\sigma_m$  semblable au système  $\sigma$ ; les perpendiculaires  $a''$  passent toutes par le point  $O$  et des droites  $g_3$  et  $g_4$ , les unes passent toutes par le point  $O$ , tandis que les autres forment un système semblable à  $\sigma$ <sup>30)</sup>. L'ensemble

27) G. Darboux, C. R. Acad. sc. Paris 92 (1881), p. 119. Voir aussi G. Darboux dans G. Koenigs, Cinématique<sup>19)</sup>, p. 352 [note III]. Des théorèmes analogues ont lieu dans le cas d'un degré de liberté égal à 2.

28) Il peut y avoir identité complète; comme pour la translation rectiligne, la rotation, la torsion.

Cette question des mouvements identiques à leurs inverses a été posée par G. Koenigs [Interméd. math. 2 (1895), p. 22 (Question 473)]. La réponse donnée par R. Bricard [id. 3 (1896), p. 44] vise un cas particulier. Le problème se trouve traité avec sa généralité dans un mémoire de G. Koenigs, ayant pour titre: Les mouvements identiques à leurs inverses, qui paraîtra prochainement dans le Journal de l'École polytechnique.<sup>4</sup>

29) Si dans le mouvement autour d'un point fixe un point  $A$  décrit un grand cercle sur une sphère, alors, dans ce même mouvement, un cercle de la sphère passe par un point fixe.

30) M. Chasles, C. R. Acad. sc. Paris 51 (1860), p. 855. Les bissectrices ont été considérées pour la première fois par E. Study, Math. Ann. 39 (1891), p. 448. Si  $\varpi_1, \varpi_2$  sont les similitudes qui transforment respectivement  $A_1, A_2$  en  $A_m$ , alors  $g_1$  et  $g_2$  se transforment respectivement par  $\varpi_1, \varpi_2$  en  $g_3, g_4$ .

des cordes  $A_1A_2$  est à l'égard de  $\sigma$  à l'état de correspondance du second ordre. Si l'on passe de  $\sigma_1$  à  $\sigma_2$  par glissement ou par renversement, alors s'introduisent des exceptions<sup>31)</sup>. Les correspondances que nous mentionnons ici sont une source abondante de théorèmes particuliers qui le plus souvent ont été formulés par M. Chasles<sup>32)</sup>.

Trois positions  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  d'une même figure plane  $\sigma$  dans son plan entraînent 3 centres de rotation  $O_{12}, O_{13}, O_{23}$  et en outre, un système  $\sigma'$  formé des points de rencontre  $A'$  des perpendiculaires  $a''$  et  $a_1''$  à  $A_1A_2$  et  $A_2A_3$ .

Le système  $\sigma'$  des points  $A'$  est à l'état de correspondance quadratique  $\varpi_i^{(2)}$  avec chaque système  $\sigma_i$ <sup>33)</sup>. Les points principaux sont dans  $\sigma'$  les points  $O_{ik}$ ; par surcroît, les points circulaires à l'infini, se correspondent à eux mêmes, en sorte que la correspondance  $\varpi_i^{(2)}$  présente un caractère spécial. Comme  $A'$  est le centre du cercle passant par  $A_1, A_2, A_3$ , le point  $A$  [n° 3] se trouve être le centre du cercle passant par  $A_1', A_2', A_3'$ . Par suite les systèmes  $\sigma, \sigma'$  liés par la correspondance  $\varpi_i^{(2)}$  ont des rôles cinématiques interchangeables<sup>34)</sup>. En conséquence, les théorèmes énoncés pour l'un s'appliquent à l'autre.

De la nature même de  $\varpi^{(2)}$  il résulte qu'à la droite de l'infini  $g_\infty$  de  $\sigma$  il correspond dans  $\sigma$  un cercle  $w_2$  passant par les points principaux; ce cercle passe aussi par le point de concours des hauteurs du triangle principal de  $\sigma$ <sup>35)</sup> et il est en même temps le lieu des points  $W$  tels quel  $W_1, W_2, W_3$  soient en ligne droite; toutes ces droites  $W_1W_2W_3$  passant par un même point  $V'$ .

Si l'on considère, outre les positions  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , une quatrième  $\sigma_4$ , on peut rechercher les points  $K$  tels que  $K_1, K_2, K_3, K_4$  soient sur un même cercle. Ils forment<sup>36)</sup> une courbe focale  $k_3$  passant aux points circulaires et par les points principaux. Conformément à la nature de la correspondance  $\varpi^{(2)}$ , il lui correspond dans  $\sigma'$  une courbe  $k_3'$  qui a dans  $\sigma'$  la même signification cinématique. Il y a sur  $k_3$  un

31) Voir E. Study, Math. Ann. 39 (1891), p. 447.

32) C. R. Acad. sc. Paris 51 (1860) et 52 (1861), notes déjà citées; Bull. Soc. math. France 6 (1877/8), p. 208 [1829]. Voir une rectification concernant l'un deux dans V. Retali, Memorie Ist. Bologna (5) 2 (1890/1), p. 588/9.

33) Voir L. Burmester, Der Civilingenieur 22 (1876), p. 598.

34) A. Schoenflies, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung, Leipzig 1886, p. 12; trad. par Ch. Speckel, Géométrie du mouvement, Paris 1893, p. 13.

35) L. Geisenheimer, Z. Math. Phys. 24 (1879), p. 137.

36) L. Burmester, Der Civilingenieur 22 (1876), p. 598; 23 (1877), p. 227, 319. Les quatre positions définissent six pôles  $O_{ik}$ , dont la configuration a été étudiée par L. Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888, p. 616.  $k_3$  est la courbe focale du quadrilatère formé par les  $O_{ik}$ .

point  $U$  tel que  $U_1, U_2, U_3, U_4$  soient en ligne droite. C'est le point différent des  $O_{ik}$ , où se coupent la cubique  $k_2$  et le cercle  $w_2$ . C. Rodenberg a généralisé<sup>37)</sup> ce théorème pour le cas d'un nombre quelconque de positions. Il considère une courbe quelconque  $c'$  définie par  $m$  points et il détermine un point  $L$  de  $\sigma$  qui dans  $(m+1)$  positions ou davantage soit situé sur cette courbe.

Pour deux, trois ou un plus grand nombre de positions d'un faisceau, en entendant par là une figure ayant un point fixe, [n° 2] ou encore une surface sphérique qui se meut sur elle-même, il existe des théorèmes analogues. La nature par elle-même dualistique d'un faisceau, qui résulte de la polarité entre les rayons et les plans perpendiculaires, fait qu'il y a pour deux rayons donnés  $l_1$  et  $l_2$  deux lignes bissectrices et par suite deux plans normaux à celles-ci, ces plans sont liés avec les plans et les rayons, qui appartiennent à deux plans  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  du faisceau, par une dualité dépourvue de singularités<sup>38)</sup>. Le cercle  $w_2$  du plan est remplacé cependant dans le faisceau par deux cônes distincts. Il y a un cône  $K_2$  qui correspond au plan normal à  $a$  dans la transformation quadrique  $\mathfrak{V}^{(2)}$ , transformation qui se présente encore dans le cas du faisceau.

Ce cône n'est plus le lieu des rayons  $l$  pour lesquels  $l_1, l_2, l_3$  tombent dans un plan; de tels rayons engendrent en effet un cône  $K_3$  du 3<sup>ème</sup> degré et par suite les plans  $\pi$  dont les positions  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  passent par une même droite enveloppent un cône de la 3<sup>ème</sup> classe<sup>39)</sup>.

5. Plusieurs positions d'un même système dans l'espace. Aux propriétés géométriques de deux espaces congruents  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , M. Chasles<sup>40)</sup> a consacré des recherches pénétrantes et fécondes et obtenu à leur sujet une abondance vraiment étonnante de théorèmes particuliers.

Si  $A_1$  et  $A_2$  sont deux points correspondants de  $\Sigma_1$  et de  $\Sigma_2$ , soient encore  $A_1A_2$  leur corde,  $A_m$  son milieu,  $\alpha'$  le plan normal en  $A_m$  à  $A_1A_2$ . Dans la position la plus générale de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  le système  $\Sigma_m$  est en affinité avec  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , tandis que  $\Sigma'$  leur est réciproque. Le théorème fondamental qui domine la théorie consiste en ce que  $\Sigma_m$  et  $\Sigma'$  forment un Nullsystem dont l'axe principal coïncide avec l'axe

de torsion<sup>41)</sup>. E. Study a considéré encore ici les plans bissecteurs de deux plans  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  et montré que l'un d'eux engendre un système  $\Sigma_m$  réciproque au système  $\Sigma'^{42)}$ .

Les systèmes  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  conduisent au complexe tétraédral  $\mathcal{C}'$  formé des lignes de jonction des points correspondants<sup>43)</sup>. Comme deux points doubles de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  coïncident avec deux points cycliques, et deux plans doubles avec le plan de l'infini  $\varepsilon_\infty$ , les coniques du complexe sont des paraboles, le cône du complexe est orthogonal<sup>44)</sup>, les courbes d'ordre sont des cercles cubiques; d'une manière analogue se spécialisent les congruences définies par 2 plans  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  ainsi que les surfaces développables<sup>45)</sup>.

Trois positions  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  entraînent pour chaque point  $A$  une droite  $a'$ , intersection des plans normaux  $\alpha'$  et  $\alpha'_1$  et par suite un complexe tétraédral  $\mathcal{C}_2'$  dont les points fondamentaux sont en général tous imaginaires. Il faut signaler dans  $\Sigma$  la courbe  $i_3$ , lieu des points  $J$  pour lesquels  $J_1, J_2, J_3$  sont en ligne droite.

Enfin quatre positions de  $\Sigma$  entraînent un système  $\Sigma'$ , formé des points de rencontre des plans  $\alpha', \alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3$ . Entre  $\Sigma'$  et chaque  $\Sigma_i$  existe une correspondance cubique  $\mathfrak{V}_i^{(3)}$ . Comme  $A'$  est le centre de la sphère passant par  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , le point  $A$  est aussi le centre de la sphère correspondante pour le mouvement inverse [n° 3]. En ce qui concerne la correspondance  $\mathfrak{V}^{(3)}$ , il y a dans  $\Sigma$  une courbe remarquable  $k_6$ , la courbe fondamentale, dont les points  $K$  sont tels que les 4 positions  $K_1, K_2, K_3, K_4$  sont sur un même cercle; il existe aussi une surface  $F_3$  qui correspond au plan de l'infini  $\varepsilon'_\infty$  de  $\Sigma'$  et dont les points dans leurs 4 positions sont dans un même plan.

Enfin il convient de signaler la surface  $F_4$  lieu des points  $H$  pour lesquels  $H_1, H_2, H_3, H_4$  et  $H_5$ , dans le cas de cinq positions,

41)  $\Sigma_m$  peut aussi exécuter le mouvement infinitésimal déterminé par le système focal (Nullsystem) [n° 18] de façon que la tangente à la trajectoire en  $A_m$  soit la corde  $A_1A_2$ .

42) Math. Ann. 39 (1891), p. 463. Il introduit encore les transformations  $\mathfrak{U}, T, \mathfrak{V}$ , qui changent  $A$  en  $A_m$ ,  $A$  en  $\alpha'$  et  $A_m$  en  $\alpha'$  et il examine leurs relations avec  $\mathcal{C}$ . En outre il traite à fond les cas d'exception. Il est remarquable que dans le cas du renversement et du renversement-torsion il y a toujours exception.

43) Sur le complexe tétraédral, voir Th. Reye, Geometrie der Lage (4<sup>e</sup> éd.) 3, Leipzig 1910, p. 1 (§ 1).

44) Un cône est orthogonal si les sections circulaires sont normales à une génératrice.

45) A. Schoenflies, Geometrie der Bewegung<sup>34)</sup>, p. 109. Sur la congruence définie par  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , voir G. H. Halphen, Bull. Soc. math. France 1 (1872/3), p. 114/7.

37) Nachr. Ges. Göttingen 1888, p. 176.

38) Explicitement par E. Study, Math. Ann. 39 (1891), p. 501.

39) A. Schoenflies, Geometrie der Bewegung<sup>44)</sup>, p. 47 et suiv.

40) C. R. Acad. sc. Paris 51 (1860), p. 856, 905; 52 (1861), p. 77, 189, 487. Un développement explicite de ces théorèmes a été donné par Ch. Brisse, J. math. pures appl. (2) 19 (1874), p. 221; (3) 1 (1875), p. 141; leur exposition analytique par G. Battaglini, Rendic. Accad. Napoli (1) 9 (1870), p. 142. Une exposition par la méthode vectorielle a été donnée par J. Lüroth, Z. Math. Phys. 43 (1898), p. 243.

sont sur une même sphère; les centres des sphères ainsi obtenues forment une surface  $F'_4$  de  $\Sigma'^{46}$ . C. Rodenberg a généralisé ces considérations pour le cas d'un nombre quelconque de positions et pour des surfaces quelconques.

En ce qui concerne deux positions  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  et la torsion correspondante  $\mathcal{C}(\alpha, \tau)$  il existe des relations métriques trouvées par M. Chasles depuis longtemps. Les plus simples sont les suivantes<sup>47</sup>.

La projection de la corde  $A_1, A_2$  sur  $a$  a la valeur constante  $\tau$ ; de même pour tout point de  $g_1$ , la projection de sa corde sur  $g_m$  est constante. La perpendiculaire commune à  $g_m$  et à  $g'$  coupe  $a$  à angle droit et entre les distances  $r, r_m, r'$  des droites  $g, g_m, g'$  à la droite  $a$  existent les relations:

$$r : r_m : r' = \tan(ga) : \tan(g_m a) : \tan(g' a).$$

De plus si  $\mathfrak{B}(\beta), \mathcal{C}(\gamma)$  sont deux rotations telles que  $\mathfrak{B}\mathcal{C} = \mathcal{C}(\alpha, \tau)$  et si  $d$  est la plus courte distance entre  $b$  et  $c$  on a

$$\frac{\tau}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = d \sin \frac{1}{2} \beta \sin \frac{1}{2} \gamma \sin(bc) \\ \cos \frac{\alpha}{2} = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \sin(bc)^{48}.$$

Si  $\mathfrak{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont des renversements on a

$$\frac{\tau}{2} = d, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sin(bc)$$

et  $a$  coïncide avec  $d$ .

Il convient de s'arrêter à la construction de l'axe de torsion quand  $\Sigma_1, \Sigma_2$  sont donnés par  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$ . M. Chasles<sup>49</sup> a donné d'abord deux constructions. On mène par  $O$  les vecteurs  $OA', OB', OC'$  équipollents à  $A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2$ , alors l'axe de torsion  $t$  est perpendiculaire au plan  $A'B'C'$ . On projette sur ce plan  $A_1 B_1 C_1$  et  $A_2 B_2 C_2$ , alors l'axe de torsion  $t$  passe par le centre de rotation de ces deux projections. Telle est la première construction de M. Chasles. Une seconde

46) Ce théorème et d'autres analogues furent donnés par A. Schoenflies, [J. reine angew. Math. 98 (1885), p. 265]; dans ce mémoire il se trouve cependant quelques erreurs qui ont été corrigées un peu plus tard [Geometrie der Bewegung<sup>44</sup>], p. 138 et suiv.; cf. Bull. sc. math. (2) 12 (1888), p. 18].

47) Pour un grand nombre de ces formules voir encore O. Rodrigues [J. math. pures appl. (1) 5 (1840), p. 380 (§§ 14 et suiv.)] et D. Chelini [Memorie Ist. Bologna (2) 1 (1861/2), p. 361 (§§ 4 et 6)].

48) Cette formule s'applique aussi à des axes qui se coupent [n° 2].

49) C. R. Acad. sc. Paris 52 (1861), p. 487. Une simplification de la seconde partie a été donnée par G. R. Dahlander, Öfversigt Vetensk.-Akad. förhandl. (Stockholm) 24 (1867), p. 601/4.

utilise les cotés  $a, b, c$  du triangle  $A, B, C$ , on construit  $a_m, b_m, c_m$  et  $a', b', c'$  et leurs perpendiculaires communes respectives  $u, v, w$ , l'axe de la torsion est la perpendiculaire commune à  $u, v, w$ <sup>50</sup>. Les constructions se simplifient dans certaines positions particulières ou par un choix particulier de  $A_1, B_1, C_1$  et  $A_2, B_2, C_2$ <sup>51</sup>. Une nouvelle construction digne de mention a été donnée par R. Mehmke<sup>52</sup>; elle s'appuie sur ce que les systèmes  $\Sigma$  et  $\Sigma_m$  sont des systèmes en affinité.

**6. Représentation analytique des mouvements finis.** La représentation des mouvements finis au moyen de paramètres remonte à L. Euler<sup>53</sup>. Il partit de ce fait que si un corps  $\Sigma$  tourne autour d'un point  $O$ , sa position peut être déterminée au moyen des formules ordinaires de la transformation de coordonnées, c'est-à-dire, au moyen des angles  $\alpha, \beta, \gamma$ , qu'un trièdre trirectangle  $T(x, y, z)$  fixe dans le corps  $\Sigma$  forme avec un trièdre trirectangle  $T'(x', y', z')$  fixe dans l'espace. Mais comme d'autre part ces angles ou plutôt leurs neuf cosinus sont équivalents seulement à trois paramètres indépendants, alors se pose le problème de représenter uniformément les neuf cosinus au moyen de trois paramètres<sup>54</sup>.

Soit  $\mathcal{C}(\omega)$  la rotation qui change  $T'$  en  $T$ ; L. Euler décompose  $\mathcal{C}$  en trois rotations d'angles  $\varphi, \psi, \theta$ , dont la première s'effectue autour de l'axe des  $x$ , la seconde autour de la droite  $l$  d'intersection des plans  $(xy)$  et  $(x'y')$  et la troisième autour de l'axe des  $z'$ . La première rotation superpose l'axe  $x$  sur  $l$ , la deuxième l'axe  $z$  sur  $z'$ , la troisième  $l$  sur  $x'$ . Les expressions des neuf cosinus à l'aide de ces trois angles sont assez peu symétriques.

L. Euler obtint des expressions symétriques en introduisant comme paramètres l'angle  $\omega$  de la rotation et les angles de direction  $\alpha, \beta, \gamma$  de l'axe  $a$ <sup>55</sup>. On simplifie la représentation par l'introduction de

50) Les droites  $u, v, w$  peuvent encore être définies autrement, en remarquant que les renversements  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3$  changent  $a_1, b_1, c_1$  en  $a_2, b_2, c_2$ , avec changement de sens. C'est sous cette forme que se présente la construction dans H. Wiener, Ber. Ges. Lpz. 42 (1890), math. p. 77.

51) C. Moshammer [Sitzgsb. Akad. Wien 73 II (1876), p. 157] choisit  $A, B, C$  sur la ligne d'intersection de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ .

52) Der Civilingenieur 29 (1883), p. 207.

53) Novi Comm. Acad. Petrop. 20 (1775), éd. 1776, p. 193. Voir aussi A. J. Lexell, id. 20 (1775), éd. 1776, p. 239; A. Schoenflies [Rend. Circ. mat. Palermo 29 (1910), p. 331] a donné un exposé très simple des formules de L. Euler; cf. W. Grunert, Diss. Königsberg 1911.

54) Une représentation de toutes les rotations autour d'un point par les points de l'espace a été donnée par C. Stephanos, Math. Ann. 22 (1883), p. 531.

55) Novi Comm. Acad. Petrop. 20 (1775), éd. 1776, p. 212 et suiv.

paramètres homogènes

$$A = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha, \quad B = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta, \quad C = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \gamma, \quad D = \cos \frac{\alpha}{2}$$

en sorte que  $A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1$ ; alors les neuf cosinus directeurs  $a_i, b_i, c_i$  forment le tableau:

$$\begin{array}{ccc} D^2 + A^2 - B^2 - C^2, & 2(AB - CD), & 2(AC + BD), \\ 2(AB + CD), & D^2 - A^2 + B^2 - C^2, & 2(BC - AD), \\ 2(AC - BD), & 2(BC + AD), & D^2 - A^2 - B^2 + C^2. \end{array}$$

Ces formules, après *L. Euler*, ont été plusieurs fois reproduites<sup>56)</sup>. Un pas essentiel fut fait par *O. Rodrigues*<sup>57)</sup>, qui détermina les paramètres  $A'', B'', C'', D''$  de la rotation  $\mathcal{C}''$  qui résulte de deux rotations  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ . On a<sup>58)</sup>

$$\begin{aligned} A'' &= +AD' - BC' + CB' + DA', \\ B'' &= +AC' + BD' - CA' + DB', \\ C'' &= -AB' + BA' + CD' + DC', \\ D'' &= +DD' - AA' - BB' - CC'. \end{aligned}$$

On doit aussi à *O. Rodrigues* une représentation paramétrique du changement de position le plus général. Il remplace la torsion par les composants  $\tau_x, \tau_y, \tau_z$  de la translation de l'origine et par la rotation  $\mathcal{C}$  correspondante et il choisit pour paramètres les quantités  $\tau_x, \tau_y, \tau_z$  avec les rapports des quantités  $A, B, C, D$  afférentes à cette rotation. Les équations qui servent de base à ses formules sont des relations entre les coordonnées des points  $A_1, A_2, A_m$ . Si l'on pose encore

$$A : B : C : D = l : m : n : 1,$$

ces relations ont la forme:

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= X + ny_m - mz_m, \\ y_2 - y_1 &= Y + lz_m - nx_m, \\ z_2 - z_1 &= Z + mx_m - ly_m, \end{aligned}$$

56) On les attribua longtemps à *G. Monge*; le premier *C. G. J. Jacobi* indiqua *L. Euler* comme leur auteur; *J. F. Encke* et *M. Reiss* [Correspondance math. phys. de l'Observatoire de Bruxelles 1 (1832), p. 273; 5 (1839), p. 119] donnèrent quelques développements à leur égard. Des expositions simples se trouvent par ex. dans *G. Koenigs* [Cinématique<sup>18)</sup>, p. 198, 340] et aussi dans *F. Klein* et *A. Sommerfeld* [Über die Theorie des Kreisels, Leipzig 1910, cah. 1 (1897), p. 15 et suiv.] où, en particulier, les formules de composition se trouvent déduites avec facilité.

57) *J. math. pures appl.* (1) 5 (1840), p. 380.

58) Ces formules contiennent le théorème de multiplication des quaternions. Sur les relations de ceux-ci avec les rotations, voir l'article IV 15.

*G. Koenigs* [Cinématique<sup>18)</sup>, p. 464 (note X)] a traité également du rapport existant entre la théorie des quaternions et celle des rotations.\*

en faisant

$$\begin{aligned} X &= \tau_x - n\tau_y + m\tau_z, \\ Y &= \tau_y - l\tau_z + n\tau_x, \\ Z &= \tau_z - m\tau_x + l\tau_y. \end{aligned}$$

De ces formules on tire

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \tau_x + \frac{ny - mz - 2lx + lu}{1 + l}, \\ y_2 - y_1 &= \tau_y + \frac{lz - nx - 2ly + mu}{1 + l}, \\ z_2 - z_1 &= \tau_z + \frac{mx - ly - 2lz + nu}{1 + l}, \end{aligned}$$

où l'on a posé<sup>59)</sup>

$$4l = l^2 + m^2 + n^2, \quad 2u = lx + my + nz.$$

Dans ses recherches *E. Study*<sup>60)</sup> a traité d'une façon plus large la représentation analytique des mouvements de l'espace.

Il part de ce fait que, conformément aux formules précédentes, les paramètres homogènes de la rotation  $\mathcal{C}''$  sont composés bilinéairement au moyen des paramètres des rotations  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ . Plus généralement, en conséquence, *E. Study* se propose le problème de représenter les mouvements de l'espace par un nombre  $s$  de paramètres homogènes le plus réduit possible, de façon que la composition s'exprime par des formules bilinéaires. La plus petite valeur de  $s$  au fond serait  $s = 7$ ; mais cela n'est pas avantageux. Au contraire, on peut représenter les déplacements au moyen de 8 paramètres homogènes entre lesquels existe une relation de la forme simple

$$\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0.$$

Parmi l'infinité de manières dont on peut choisir les paramètres conformément à cette relation, la plus simple est celle qui coïncide au fond avec celle de *O. Rodrigues*, en sorte que les  $\alpha_i$  sont proportionnels à  $A, B, C, D$  et

$$\frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{\tau}{2} \tan \frac{\alpha}{2}, \quad \frac{\beta_1}{\alpha_0} = -\frac{X}{2}, \quad \frac{\beta_2}{\alpha_0} = -\frac{Y}{2}, \quad \frac{\beta_3}{\alpha_0} = -\frac{Z}{2}.$$

59) Ces formules ont été transformées par *O. Rodrigues*, de façon à pouvoir se donner dans  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  trois couples de points correspondants. Les équations de l'axe de torsion

$$\frac{X + py - nz}{m} = \frac{Y + mz - px}{n} = \frac{Z + ny - my}{p}$$

deviennent illusoires si  $\alpha = 180^\circ$ . Ce cas a été traité par *I. J. Stieltjes*, Archives néerlandaises sc. Harlem (1) 19 (1884), p. 372.

60) *Math. Ann.* 39 (1891), p. 514 et suiv. Les relations entre les questions connexes des systèmes de nombres supérieurs et des groupes de transformations  $y$  sont aussi examinées à fond. Voir aussi *E. Study*, Geometrie der Dynamen, Leipzig 1903, p. 174 et suiv. ainsi que l'article I 5 de l'Encyclopédie.

Les formules de composition des  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  sont alors précisément celles des  $A, B, C, D$  tandis que celles des  $\beta_i$  sont plus compliquées<sup>61</sup>). Ces paramètres conviennent du reste aussi pour la représentation des antidéplacements. *E. Study* a aussi représenté au moyen des paramètres  $\alpha_i, \beta_i$  le complexe et les correspondances [n° 5] qui caractérisent un changement de position. Un exemple simple est fourni par les formules précédentes d'*Olinde Rodrigues* qui expriment les unes par les autres les coordonnées des points  $A_1, A_2$  et  $A_m$ <sup>62</sup>).

Dans une série de publications assez récentes, *R. de Saussure*<sup>63</sup>) a retrouvé les huit coordonnées d'*Olinde Rodrigues* auxquelles ont également abouti les recherches de *E. Study*. Mais, en outre de ces considérations dogmatiques, *R. de Saussure* a fait un pas important en développant la remarque que la relation quadratique existant entre les huit coordonnées homogènes et surabondantes établit un rapprochement entre la géométrie des déplacements et la géométrie de la ligne droite. C'est ainsi que deux positions dont les coordonnées annulent la forme polaire de la forme quadratique fondamentale se transforment l'une dans l'autre par une simple rotation.

Sur cette remarque si judicieuse, *R. de Saussure* a fondé toute une théorie des déplacements, d'après le nombre de paramètres qu'y laissent arbitraires les équations établies entre les huit coordonnées. C'est ainsi qu'une seule équation laissant arbitraires cinq paramètres, définit

61) Les formules correspondantes représentent le théorème de multiplication des *biquaternions*, de *W. K. Clifford* [Papers, Londres 1882, p. 181/200, 385/96] de la même façon que les formules précédentes représentaient celle des quaternions.

La théorie des biquaternions a été exposée plus récemment par *A. Mac Aulay*, sous le titre *Octonions, a development of Clifford's biquaternions*, Cambridge 1898.

62) *R. Marcolongo* [Ann. mat. pura appl. (2) 26 (1897), p. 101] définit le visseur IV 4, 50] par les six coordonnées de son axe et par les grandeurs du glissement et de la rotation correspondante et, pour ce qui est des visseurs regardés comme composés d'un nombre arbitraire d'autres [IV 4, 59 à 64], il a déterminé par le calcul leurs coordonnées et autres éléments. Voir aussi une exposition de *G. Plarr* [Proc. R. Soc. Edinb. 12 (1882/4), p. 151] au moyen du calcul des quaternions. Cf. IV 4, n° 59 à 64.

63) Cinématique des fluides [Archives sc. phys. naturelles Genève (5) 5 (1898), p. 497]; Sur le mouvement le plus général d'un corps solide qui possède deux degrés de liberté autour d'un point fixe [C. R. Acad. sc. Paris 133 (1901), p. 1193/9, 1283/5]; Théorie géométrique du mouvement des corps [Archives sc. phys. naturelles Genève (5) 13 (1902), p. 425/61; (5) 14 (1902), p. 14/41; (5) 18 (1904), p. 25/63; (5) 21 (1906), p. 36/65, 129/55; (5) 28 (1909), p. 423/38; (5) 29 (1910), p. 310/20, 484/93; La geometria de folietoj ou geometria folietara [Internacia scienco revuo (Genève) 1908 et 1909]; Exposé résumé de la géométrie des feuillettes [Mém. Soc. phys. et hist. naturelle Genève 36 (1910), fasc 2].

une  $\infty^5$  positions constituant une *pentasérie*; deux équations laissant subsister quatre paramètres et définissant une  $\infty^4$  positions constituent une *tétrasérie*; trois équations définissent de même une *trisérie*; quatre équations une *bisérie*; cinq une *monosérie* ou ensemble simplement infini de positions. *R. de Saussure* et *R. Bricard*<sup>64</sup>) ont entrepris l'étude des monoséries linéaires, définies par une ou plusieurs équations linéaires entre les paramètres. Par exemple, une *monosérie linéaire* est l'ensemble des positions qui se déduisent d'une position donnée par des torsions  $\mathcal{C}(\alpha, \tau)$  dans lesquelles  $\alpha$  et  $\tau$  vérifient la relation

$$\tau \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = k,$$

où  $k$  est une constante. A signaler le cas où  $k = 0$ , auquel cas la monosérie est l'ensemble des positions conjuguées d'une position donnée, c'est-à-dire qui s'en déduisent par une simple rotation. C'est l'analogue du complexe linéaire spécial. Si  $k = \infty$ , alors  $\alpha = 180^\circ$  la monosérie se compose de toutes les positions obtenues en donnant à une position donnée tous les renversements-torsions possibles [n° 1].

Dans le même ordre d'idées, *R. de Saussure* a interprété la relation d'involution entre deux monoséries, par analogie avec la notion de complexes linéaires en involution. On ne peut dire encore si cette nouvelle doctrine s'adaptera aisément aux questions de géométrie du déplacement actuellement pendantes, mais elle ouvre déjà l'accès à des problèmes tout à fait nouveaux et du plus grand intérêt.\*

#### B. Mouvements continus.

##### 7. Principes et méthodes propres à la cinématique générale.

Dans les paragraphes précédents la considération de deux ou de plusieurs positions simultanées d'un même corps ou d'une même figure soit sur le plan, soit sur la sphère, soit dans l'espace, a été l'occasion d'une série de développements purement géométriques d'un haut intérêt. On verra même plus loin qu'en supposant infiniment voisines ces positions, on peut arriver à traiter par une méthode intuitive certaines propriétés des normales aux trajectoires ou aux enveloppes, ainsi qu'une catégorie de problèmes concernant la courbure. Le caractère intuitif de ces méthodes, dont *M. Chasles* fut l'initiateur puissant et imité, donne aux questions qu'elles peuvent atteindre une luminosité singulière et une élégance pleine d'harmonie.

64) *R. Bricard*, Sur la géométrie des feuillettes [Nouv. Ann. math. (4) 10 (1910), p. 1]. „Sur ces questions générales, voir *E. Study*, Grundlagen und Ziele der analytischen Kinematik [Sitzgsb. Berliner math. Ges. 12 (1913), p. 36].\*

Mais, en revanche, on aurait bien tort de s'en tenir à elles, à l'exclusion de toute autre et, par la croyance à l'universalité de de leur puissance, de s'interdire l'accès des problèmes auxquels leur rôle ne s'étend pas. Il suffit pour s'en convaincre de penser à l'immense étendue des questions concernant le mouvement qui se traduisent par des équations différentielles et même à certains problèmes de courbure tels que ceux que G. Koenigs a traités récemment, dont la complexité exige évidemment d'autres méthodes. Il est donc certain qu'à côté de la méthode géométrique et synthétique, il y a place pour une méthode analytique.

Mais il y a plus. En dehors de toute discussion sur le procédé géométrique ou analytique, au-dessus de la question de forme, il y a le fond qui est la *Cinématique* elle-même; or cette science a sa méthode à elle, ses principes, ses inflexions dans la marche. Tour à tour les analystes et les géomètres ont voulu ne voir dans chaque branche de la science les uns qu'une analyse, les autres qu'une géométrie. Il a fallu les leçons de l'expérience pour en arriver à comprendre qu'il n'y a aucun profit à ce qu'une branche de la science se trouve déformée par le pli de la méthode qu'on lui applique. Cette remarque si vraie pour la mécanique en général, se justifie tout autant pour la cinématique en particulier. On peut même observer que depuis que cette science aux débuts modestes, est parvenue à dégager ses principes et ses méthodes, on l'a vue, par un retour singulier, s'emparer de la géométrie et lui apporter le concours le plus efficace.

La méthode cinématique proprement dite repose essentiellement sur le théorème de la composition des vitesses, dont l'application peut être opérée dans les circonstances les plus variées. Aperçue déjà par Roberval et quelques anciens géomètres, cette méthode a atteint aujourd'hui un haut degré de puissance et de perfection. Elle peut du reste revêtir la forme géométrique par l'usage des constructions vectorielles, et aussi la forme analytique lorsque, par l'emploi d'un trièdre de référence mobile, elle fournit aux calculs les éléments les plus directs et les moins artificiels. C'est pourquoi, au moment d'exposer la théorie des mouvements continus, il semble nécessaire d'évoquer ici cette grande méthode cinématique, qui a hérité des efforts de tous les mécaniciens passés et qui aujourd'hui a si nettement fait ses preuves, soit par les découvertes qu'elle a produites, soit par les coordinations dogmatiques, rationnelles, aussi élégantes que solides qu'elle a permis de réaliser.\*

8. Mouvement d'un point isolé. Le plus simple de tous les mouvements est celui d'un point. Mais il faut avant tout rappeler le

caractère essentiellement relatif qui est le propre de toute notion de mouvement, caractère que les anciens ne semblent pas avoir toujours bien compris.

Deux points sont mobiles l'un par rapport à l'autre si leur distance varie avec le temps. Dans le cas où cette distance demeure constante ils forment un système invariable. La notion de système invariable s'étend au cas d'un nombre quelconque de points. La possibilité de concevoir des points formant un système invariable et répartis continuellement soit sur une ligne, soit sur une surface, soit dans un volume, amène la notion de courbes, de surfaces, de solides invariables. Un procédé commode, mais non indispensable, consiste à imaginer un trièdre trirectangle solide du système invariable. Tout point fait ou non partie du système, selon que ses coordonnées par rapport à ce trièdre sont constantes ou variables. S'il ne fait pas partie du système invariable, il est *mobile* par rapport à ce système ou dans ce système, qui est alors appelé le *système de référence* du mouvement.

A chaque instant du mouvement le point mobile  $M$  coïncide avec un point  $P$  du système invariable; ce point  $P$  est appelé le *point de coïncidence*.

Le lieu des points de coïncidence dans le système invariable est une courbe appelée *trajectoire*.

La notion de trajectoire est *relative* comme le mouvement lui-même. Si sur la trajectoire on fait choix d'une origine et d'un sens direct pour les arcs, l'arc  $s$  de la trajectoire parcouru dans le temps  $t$ , est une fonction du temps

$$s = f(t),$$

cette relation est l'*équation du mouvement*.

La dérivée de  $s$  par rapport au temps  $t$  est la vitesse<sup>65</sup>; c'est une quantité algébrique que l'on désigne par  $v$ ,

$$v = \frac{ds}{dt} = f'(t).$$

La vitesse est constante dans le mouvement uniforme. Le signe de la vitesse donne le sens du mouvement; si  $v > 0$  celui-ci a lieu dans le sens des arcs directs et si  $v < 0$ , dans le sens des arcs rétrogrades.

Cette notion purement algébrique de la vitesse serait insuffisante; aussi représente-t-on la vitesse par un vecteur  $MV$ , porté par la tangente et mesuré par le nombre  $v$  sur celui des axes portés par la

65) Le cas des courbes et des mouvements non différentiables est laissé de côté [III 2]; voir à ce sujet IV 1 et surtout IV 2.

tangente qui a le sens des arcs directs (tangente directe). Le vecteur ainsi construit a toujours même sens que le mouvement.

On est conduit à construire ce vecteur  $MV$  par la remarque suivante. Si  $M, M'$  sont deux positions infiniment voisines du mobile sur la trajectoire, aux époques  $t$  et  $t + dt$ , le vecteur  $MM'$  représente l'excès géométrique du vecteur  $OM'$  sur le vecteur  $OM$  où  $O$  représente un point fixe, c'est-à-dire solide du système de référence. Le vecteur  $\frac{MM'}{dt}$  qui n'est autre que  $MV$  représente donc ce que l'on peut appeler la *dérivée géométrique* du vecteur  $OM$ , dérivée prise par rapport au temps.

La substitution à  $O$  d'un autre point fixe n'aurait pas plus d'importance que l'addition d'une constante à une fonction; la dérivée reste la même.

Cette conception du vecteur-vitesse comme dérivée géométrique est de la plus haute importance pour les développements ultérieurs.

En premier lieu, une simple application du théorème des projections montre que si l'on projette le mobile  $M$  en  $M_1$  sur un plan fixe ou sur une droite fixe, la vitesse de  $M_1$  est la projection de la vitesse du point  $M$ . De là la possibilité de considérer la vitesse de tout point comme la somme géométrique des vitesses de ses projections, soit sur trois axes fixes, soit sur un axe fixe et sur un plan fixe normal à cet axe.

On en conclut aussitôt que si  $x, y, z$  sont les coordonnées du point mobile  $M$ , et si  $\alpha, \beta, \gamma$  sont les cosinus directeurs de la tangente directe à la trajectoire  $c$ , les projections de la vitesse  $MV$  du mobile sur les axes du trièdre de référence ont ces doubles expressions

$$\frac{dx}{dt} = \alpha v, \quad \frac{dy}{dt} = \beta v, \quad \frac{dz}{dt} = \gamma v,$$

En tant que vecteur la vitesse  $MV$  possède six coordonnées, qui sont, outre ses trois projections ci-dessus, ses moments pris par rapport aux axes, à savoir:

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}, \quad z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt}, \quad x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}.$$

La considération de ces moments est liée à celle des aires. Si l'on appelle  $N$  la projection du point  $M$  sur le plan des  $x, y$  par exemple, le vecteur  $ON$  balaie dans ce plan une aire  $A_1$ , que l'on convient de compter positivement ou négativement selon que  $ON$  tourne dans le sens direct ou dans le sens rétrograde. La dérivée de  $A_1$  par rapport au temps est précisément le demi-moment du vecteur-vitesse par

rapport à  $Oz$ , et de même sur les deux autres plans en sorte que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dt} &= \frac{1}{2} \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \\ \frac{dA_2}{dt} &= \frac{1}{2} \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) \\ \frac{dA_3}{dt} &= \frac{1}{2} \left( x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right). \end{aligned}$$

L'interprétation précédente, riche en applications dynamiques, offre aussi l'avantage de donner un exemple de l'extension de la notion de vitesse.

Les quantités  $\frac{dA_1}{dt}, \frac{dA_2}{dt}, \frac{dA_3}{dt}$  ont reçu le nom de *vitesses aréolaires*.

L'usage des projections permet de soumettre au calcul les questions concernant les vitesses; mais, pour cet objet, il n'est pas forcé que les axes sur lesquels on projette soient fixes<sup>66</sup>). C'est ainsi que l'on projette souvent la vitesse sur l'axe qui a précisément la direction même de  $OM$ : si  $r$  est la longueur de  $OM$  on trouve  $\frac{dr}{dt}$  pour mesure de cette projection. C'est là ce que l'on appelle la *vitesse d'élongation*.

Lorsque l'on fait usage de coordonnées curvilignes, en supposant  $x, y, z$  exprimés en fonction de trois paramètres  $u_1, u_2, u_3$ , les projections de  $MV$  sur les tangentes  $MT_1, MT_2, MT_3$  aux courbes de coordonnées, menées dans le sens des paramètres  $u_1, u_2, u_3$  croissants, ont pour valeurs

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{A_1}} \frac{\partial W}{\partial u_1}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{A_2}} \frac{\partial W}{\partial u_2}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{A_3}} \frac{\partial W}{\partial u_3},$$

où l'on représente par  $2W$  la forme quadratique en  $u_1', u_2', u_3'$

$$\left( u_1' = \frac{du_1}{dt}, \quad u_2' = \frac{du_2}{dt}, \quad u_3' = \frac{du_3}{dt} \right),$$

<sup>66</sup>) Les projections de la vitesse  $\vec{v}$  sur deux rayons vecteurs ont été utilisées par Gules Personier (dit Roberval) dans la construction de la tangente à l'ellipse (quoique donnant des résultats exacts pour les sections coniques, sa méthode est cependant fautive).

Des procédés analogues interviennent dans le même but pour d'autres courbes définies mécaniquement (courbes focales, ovales de Descartes, cassiniennes); voir L. Burmester, *Kinematik*<sup>65</sup>), p. 67 et suiv. Rappelons que L. Poincaré [J. Éc. polyt. (1) cah. 13 (1806), p. 182] a aussi considéré la projection de la vitesse d'un point  $M$  sur la normale abaissée de  $M$  sur une surface (ou sur une courbe, dans le cas du mouvement plan). Il est ainsi parvenu à une construction de la normale à une surface définie par une relation entre les longueurs des normales issues d'un de ses points à des surfaces données; même construction dans le plan pour une courbe définie par une relation entre les longueurs des normales issues d'un de ses points à des courbes données.



qui exprime le carré de la vitesse  $v^2$ ,

$$2W = A_1 u_1'^2 + A_2 u_2'^2 + A_3 u_3'^2 + 2B_1 u_2' u_3' + 2B_2 u_3' u_1' + 2B_3 u_1' u_2'.$$

Ajoutons que diverses extensions de la notion de vitesse ont été données en considérant une droite ou un plan comme mobiles<sup>67)</sup>, ou en prenant des systèmes de vecteurs<sup>68)</sup>.

C'est principalement et d'abord à propos de la définition des accélérations du premier ordre et d'ordre supérieur que se manifeste la puissance de la notion de dérivée géométrique. Cette définition est en effet, *il est essentiel de le dire*, d'ordre vectoriel et ce n'est que dans le cas d'un mouvement rectiligne qu'il serait permis de déduire une notion algébrique des accélérations par voie de différentiation algébrique de la vitesse.

Si par un point  $O$  fixe, on mène le vecteur  $OM_1$  équipollent à la vitesse  $MV$ , un mobile coïncidant constamment avec  $M_1$  décrit une courbe trajectoire appelée *hodographe*. C'est *W. R. Hamilton*<sup>69)</sup> qui a introduit cette courbe. La vitesse avec laquelle  $M_1$  décrit l'hodographe s'appelle *l'accélération totale* de  $M_1$ , ou simplement *accélération*, ou *accélération du premier ordre*.

Si par le point  $M$  on mène  $MJ_1$  équipollent à la vitesse de  $M_1$ , ce vecteur  $MJ_1$  est l'accélération *en place*. Ce vecteur  $MJ_1$  est dans le plan osculateur de la trajectoire. La mesure de sa projection sur la tangente directe (accélération tangentielle) étant représentée par  $j_{1,p}$  et la mesure de sa projection sur la normale principale (normale principale directe ou menée vers le centre de courbure) étant représentée par  $j_{1,n}$  on a

$$j_{1,t} = \frac{dv}{dt}, \quad j_{1,p} = \frac{v^2}{\rho}$$

où  $\rho$  représente le rayon de courbure de la trajectoire.

Les théorèmes relatifs aux projections sur des axes *fixes* ou sur des plans *fixes* déjà énoncés pour la vitesse, s'étendent exactement à l'accélération du premier ordre. On en conclura que les mesures des projections de l'accélération sur les axes de référence fixes ont pour valeur

$$j_{1,x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad j_{1,y} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad j_{1,z} = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

67) J. F. Wittenbauer, Kinematik des Strahles, Graz 1883; Z. Math. Phys. 30 (1885), p. 216.

68) E. Delassus, Bull. Soc. math. France 39 (1911), p. 159.

69) Elements of quaternions, Londres 1866, p. 100, 178; (2<sup>e</sup> éd.) publ. par Ch. J. Joly 1, Londres 1899; 2, Londres 1901. Une extension de l'hodographe au cas de deux points a été donnée par A. Laisant, J. math. scienc. math. astron. 10 (1890/1), p. 97. Voir aussi O. Gerlach, Atti R. Accad. Lincei Transunti (3) 4 (1879/80), p. 106.

D'autre part les coordonnées du vecteur-accélération  $MJ_1$ , outre ces trois projections, sont constituées par les trois moments de ce vecteur par rapport aux axes, savoir:

$$y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2}, \quad z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2}, \quad x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2}.$$

On remarquera que les coordonnées du vecteur-accélération par rapport à trois axes fixes, sont les dérivées par rapport au temps des coordonnées du vecteur-vitesse.

Cette propriété cesse d'avoir lieu pour les accélérations d'ordre supérieur; elle ne persiste que pour les projections.

Les projections<sup>70)</sup> de  $MJ_1$  sur les tangentes  $MT_1$ ,  $MT_2$ ,  $MT_3$  aux courbes de coordonnées, dans l'hypothèse d'un système de coordonnées curvilignes peuvent être utiles. En conservant les notations précédentes concernant les vitesses, et désignant par  $j_{1,1}$ ,  $j_{1,2}$ ,  $j_{1,3}$  les mesures de ces projections, on trouve

$$j_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{A_1}} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial u_1} \right) - \frac{\partial W}{\partial u_1} \right] \\ j_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{A_2}} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial u_2} \right) - \frac{\partial W}{\partial u_2} \right] \\ j_{1,3} = \frac{1}{\sqrt{A_3}} \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial u_3} \right) - \frac{\partial W}{\partial u_3} \right].$$

Pour définir l'accélération du second ordre, on considère le vecteur  $OM_2$  équipollent à  $MJ_1$ . La vitesse de  $M_2$  est l'accélération du second ordre de  $M$ ; on peut aussi la transporter en  $M$ , soit  $MJ_2$ . Et ainsi de suite pour l'accélération du second ordre, du troisième ordre. D'une façon générale<sup>71)</sup>, si  $MJ_{n-1}$  est l'accélération du  $(n-1)^{\text{ème}}$  ordre, en prenant le vecteur  $OM_n$  équipollent à  $MJ_{n-1}$ , la vitesse de  $M_n$ , ou la dérivée géométrique de  $OM_n$  sera l'accélération d'ordre  $n$  du point  $M$ .

Pour ces accélérations, sont valables les théorèmes déjà démontrés pour les projections de la vitesse sur des axes fixes ou des plans fixes. De la sorte, les mesures des projections de l'accélération d'ordre

70) Les projections de la vitesse et de l'accélération sur les tangentes aux courbes coordonnées, dans le cas d'un système triple orthogonal, ont été calculées par A. P. E. Guiraudet, Thèse, Paris 1856, puis par G. Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, Paris 1859, p. 149, 165. Ultérieurement, I. (J.) Smolov<sup>72)</sup> a établi des formules de même nature pour le cas de coordonnées quelconques et pour des accélérations d'ordre quelconque.

71) H. Resal [Traité de cinématique pure, Paris 1862, p. 269 et suiv., ainsi que p. 811] a méthodiquement introduit les accélérations d'ordre supérieur. Voir aussi A. Transon, J. math. pures appl. (1) 10 (1846), p. 320.

$n$  sur les axes du trièdre de référence seront

$$j_{n,x} = \frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}, \quad j_{n,y} = \frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}}, \quad j_{n,z} = \frac{d^{n+1}z}{dt^{n+1}},$$

Les trois autres coordonnées (moments) du vecteur  $MJ_n$  seront évidemment

$$y \frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}} - z \frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}}, \quad z \frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}} - x \frac{d^{n+1}z}{dt^{n+1}}, \quad x \frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}} - y \frac{d^{n+1}z}{dt^{n+1}}.$$

Ce ne sont pas les dérivées des moments de l'accélération précédente.

I. (J.) Somov a donné l'expression des projections des accélérations d'ordre quelconque sur les tangentes aux courbes coordonnées, dans l'hypothèse d'un système de coordonnées curvilignes quelconques.

On a aussi opéré la décomposition de l'accélération d'ordre quelconque suivant la tangente directe, la normale directe et la binormale à la trajectoire, axes formant un trièdre trirectangle de disposition directe. En ce qui concerne l'accélération du second ordre, H. Resal<sup>72)</sup> a donné les formules

$$\begin{aligned} j_{2,t} &= \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{\rho^3} \\ j_{2,p} &= 3 \frac{v}{\rho} \frac{dv}{dt} - \frac{v^2}{\rho^2} \frac{d\rho}{ds} \\ j_{2,\sigma} &= -\frac{v^3}{\rho^3} \end{aligned}$$

où  $\tau$  est le rayon de torsion<sup>73)</sup>.

Dans le cas d'une accélération quelconque d'ordre  $n$ , il existe des formules de récurrence permettant de passer de  $(n-1)$  à  $n$  qui ont été démontrées par I. (J.) Somov<sup>74)</sup> et par J. C. Bouquet.

Dans le développement de ces questions, le calcul vectoriel a joué le plus grand rôle. C'est à Barré de Saint Venant<sup>75)</sup> et à H. Resal<sup>76)</sup> que l'on doit son introduction méthodique en ces matières. C'est au

72) Cinématique<sup>71)</sup>, p. 271. Sous une forme plus rigoureuse, on trouvera ces formules dans I. (J.) Somov, Mém. Acad. Pétersb. (7) 8 (1865), mém. n° 5, p. 11 [1864]; voir aussi D. Paddelletti, Giorn. mat. 13 (1876), p. 115, 129; G. Bardolli, Reale Ist. Lombardo Rendic. (2) 11 (1878), p. 219; G. Gauthier, Atti R. Accad. Lincei Transunti (3) 4 (1879/80), p. 106.

73) Les formules concernant les accélérations du premier et du second ordre ont été utilisées par H. Resal [Cinématique<sup>71)</sup>, p. 55] et, plus récemment par E. Weyr [Sitzgeb. böhm. Ges. Prag 24 (1895), mém. n° 28] pour la construction de  $\rho$  et de  $\tau$ . H. Resal [Cinématique<sup>71)</sup>, p. 275] a aussi donné le rayon de courbure de la développée. Les formules précédentes sont les vraies.

74) Mém. Acad. Pétersb. (7) 8 (1865), mém. n° 5, p. 11, 60. J. C. Bouquet donne une démonstration analytique [Ann. Éc. Norm. (2) 8 (1879), p. 147].

75) C. R. Acad. sc. Paris 21 (1845), p. 620.

76) Cinématique<sup>71)</sup>, p. 25, 64.

premier que revient l'idée de dérivée géométrique et au second, celle du produit intérieur de deux vecteurs.

Les règles de la différentiation géométrique pour les sommes et les produits géométriques sont celles du domaine algébrique.

Parmi les théorèmes qui en découlent signalons le suivant<sup>77)</sup> à cause de son importance ultérieure.

„Si l'on considère deux points  $M, N$ , mobiles par rapport à un même système invariable et  $O$  un point fixe,  $OS$  un vecteur équivalent à  $MN$ , la vitesse de  $S$  est la différence géométrique de celles de  $M$  et de  $N$ ,

$$\vec{V}_S = \vec{V}_N - \vec{V}_M.$$

Si, en particulier  $M$  et  $N$  sont à une distance constante l'un de l'autre la vitesse de  $S$  est normale à  $OS$  et les vitesses  $\vec{V}_M, \vec{V}_N$  ont des projections égales sur  $MN$ .

Le cas particulier où la valeur commune de ces projections est nulle a servi de base aux recherches de A. Mannheim<sup>78)</sup>; sur le même théorème, G. Koenigs<sup>79)</sup> a fondé l'exposition de la cinématique du solide invariable.

La méthode vectorielle ne s'applique pas d'ailleurs aux seules vitesses. La représentation des moments par des vecteurs ouvre le champ à un autre ordre d'applications.

Par exemple, si  $OG$  représente le moment du vecteur-vitesse<sup>80)</sup> par rapport à un point fixe  $O$ , la vitesse de  $G$ , ou dérivée géométrique de  $OG$  par rapport au temps, est le moment de l'accélération du premier ordre  $MJ_1$  moment pris par rapport au même point  $O$ .

Ce théorème équivaut à la remarque déjà faite que les coordonnées de l'accélération du premier ordre sont les dérivées par rapport au temps des coordonnées de la vitesse. Mais sous sa forme nouvelle, plus cinématique, le théorème se prête beaucoup mieux aux applications qu'on peut en faire.

Rappelons enfin que A. F. Möbius<sup>81)</sup>, grâce à l'introduction du calcul vectoriel, a pu parvenir à donner une signification vectorielle à la formule de Taylor.

77) Ce théorème a été utilisé par I. (J.) Somov dans ses recherches sur les accélérations<sup>71)</sup>.

78) A. Mannheim, Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable [Mém. présentés Acad. sc. Paris (2) 20 (1872), p. 6 [1869]].

79) G. Koenigs, Sur l'enseignement de la cinématique [Bull. Soc. math. France 40 (1912), p. 180].

80) Ce vecteur  $OG$  a reçu le nom de *moment cinétique*.

81) A. F. Möbius, Ber. Ges. Lpz. 1 (1846), p. 79/82; J. reine angew. Math. 36 (1848), p. 91/4; Werke 4, Leipzig 1887, p. 625/30.

Si  $\vec{c}$  représente la corde de l'arc de trajectoire parcouru dans le temps  $t$  on a la relation *géométrique*

$$\vec{c} = \vec{v} \cdot t + \vec{j}_1 \cdot \frac{t^2}{2!} + \vec{j}_2 \cdot \frac{t^3}{3!} + \dots + \vec{j}_{n-1} \frac{t^n}{n!} + \dots,$$

où  $\vec{v}, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \dots, \vec{j}_{n-1}$  sont la vitesse et les accélérations d'ordres successifs en tant que vecteurs. Lorsque  $t$  est infiniment petit, la quantité  $\vec{c} - \vec{v} \cdot t$  a reçu le nom de *déviation*; cette quantité vectorielle a pour partie principale le vecteur

$$\frac{1}{2} \vec{j}_1 \cdot t^2.$$

La considération de cette quantité joue un rôle essentiel dans l'établissement de la formule fondamentale de la dynamique du point.\*

**9. Le principe de la composition des vitesses.** Nous avons dit que la notion de mouvement est essentiellement relative et subordonnée au choix d'un certain système  $\Sigma$  de référence. Si l'on a un second système de référence  $\Sigma'$ , différent du premier, nous aurons la notion d'un mouvement du même point, et ce mouvement co-existe avec le premier. Nous comprenons ainsi qu'un même point puisse avoir en même temps deux mouvements.

Quand nous disons que les systèmes  $\Sigma, \Sigma'$  diffèrent nous entendons par là qu'il ne forment pas un même système invariable et que les points de l'un sont mobiles dans l'autre. Nous avons ainsi la notion d'un mouvement d'*entraînement*  $[\Sigma, \Sigma']$  de  $\Sigma$  dans  $\Sigma'$  et au cours duquel tout point  $P$  de  $\Sigma$  décrit dans  $\Sigma'$  une trajectoire dite d'entraînement, avec une certaine vitesse  $\vec{V}_P$ . On pourrait tout aussi bien considérer le mouvement d'entraînement de  $\Sigma'$  dans  $\Sigma, [\Sigma', \Sigma]$ , lequel est dit *inverse* du premier. Tout point  $P'$  de  $\Sigma'$  décrit dans  $\Sigma$  une certaine trajectoire avec une vitesse  $\vec{V}_{P'}$ .

La composition des mouvements consiste à déduire le mouvement du point mobile  $M$  par rapport à  $\Sigma'$  de la connaissance de son mouvement dans  $\Sigma$  et de celle du mouvement  $[\Sigma, \Sigma']$ .

Il est bien digne de remarque que, en ce qui concerne la détermination de la vitesse, on puisse arriver à formuler une règle générale sans avoir à analyser le mouvement d'entraînement et sans avoir besoin d'étudier d'avance ses lois.

Ici intervient seulement le point de coïncidence, c'est-à-dire le point  $P$  du système  $\Sigma$  avec lequel le point  $M$  coïncide à l'instant considéré, où l'on veut construire la vitesse de  $M$ .

Soit  $\vec{V}_M$  la vitesse de  $M$  dans  $\Sigma$ ,  $\vec{V}_M'$  sa vitesse dans  $\Sigma'$  et  $\vec{V}_P$  la vitesse d'entraînement du point  $P$  dans le mouvement  $[\Sigma, \Sigma']$ ; on a

$$\vec{V}_M' = \vec{V}_M + \vec{V}_P.$$

C'est par suite d'un abus de langage que l'on appelle quelquefois  $\vec{V}_M'$  vitesse relative et  $\vec{V}_M$  vitesse absolue. Nous savons bien que toute vitesse est relative. Les mots *absolu, relatif* employés n'ont qu'une valeur conventionnelle et il faudrait les échanger entre eux si l'on voulait passer du mouvement de  $M$  par rapport à  $\Sigma'$  au mouvement de  $M$  par rapport à  $\Sigma$ .

En prenant pour  $M$  un point  $P'$  fixe dans  $\Sigma'$ , on arrive à rendre intuitif ce fait, qu'un même point regardé tantôt comme solidaire de  $\Sigma$ , tantôt comme solidaire de  $\Sigma'$ , a deux vitesses égales et opposées; théorème essentiel.

La composition des mouvements, et en particulier celle des vitesses est susceptible d'une facile extension.

On considère une suite de systèmes invariables  $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ , dans lesquels on suppose connus les mouvements

$$[\Sigma, \Sigma_1], [\Sigma_1, \Sigma_2], [\Sigma_2, \Sigma_3], \dots, [\Sigma_{n-1}, \Sigma_n].$$

Il s'agit alors,  $M$  étant un point mobile dans  $\Sigma$ , d'en conclure son mouvement dans  $\Sigma_n$  et en particulier sa vitesse.

On appelle à cet effet  $P, P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  les points de  $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{n-1}$  avec lesquels coïncide le point  $M$  à l'époque considérée et  $\vec{V}_M, \vec{V}_M^{(1)}, \vec{V}_M^{(2)}, \dots, \vec{V}_M^{(n)}$  ses vitesses dans  $\Sigma$  et  $\Sigma_n$ , ainsi que  $\vec{V}_P^{(1)}, \vec{V}_P^{(2)}, \dots, \vec{V}_P^{(n)}$  les vitesses d'entraînement successives de  $P$  dans  $\Sigma_1$ , de  $P_1$  dans  $\Sigma_2, \dots$ , de  $P_{n-1}$  dans  $\Sigma_n$ . On a la relation géométrique

$$\vec{V}_M^{(n)} = \vec{V}_M + \vec{V}_P^{(1)} + \vec{V}_P^{(2)} + \dots + \vec{V}_P^{(n)}.$$

On peut démontrer le théorème général qui précède par une application répétée du premier. Il est fort remarquable que ce théorème, à lui tout seul, puisse suffire à édifier toute la cinématique, qui acquiert de ce fait une grande unité de méthode.

Il est ici un point sur lequel il convient d'attirer l'attention. L'importance même de la formule fondamentale

$$\vec{V}_M' = \vec{V}_M + \vec{V}_P$$

exige qu'elle soit établie avec la plus grande rectitude. On la démontre souvent en considérant la trajectoire du mobile dans  $\Sigma$  et deux positions  $c, c'$  de cette trajectoire aux époques  $t, t + \Delta t$  dans  $\Sigma'$ . On prend alors les positions  $M, M_1$  du point mobile aux époques  $t, t + \Delta t$  sur  $c$ , positions qui sont en  $M', M_1'$  sur  $c'$ .  $MM_1'$  est la corde de la trajectoire absolue (ou dans  $\Sigma'$ ), et  $MM_1$  la corde de la trajectoire relative (ou dans  $\Sigma$ ),  $NM'$  est la corde de la trajectoire d'entraînement. Or  $MM_1'$  ne coïncide qu'au second ordre près avec la diagonale  $MN$  du parallélogramme construit sur les deux autres cordes et même

le vecteur  $NM'_1$ , qui est du second ordre, a précisément un rôle cinématique effectif à propos des accélérations. Le raisonnement strict exige donc que l'on tienne compte de cet infiniment petit en prouvant, ce qui est facile, qu'il est bien du second ordre.

Un des premiers bénéfices de la règle de la composition des vitesses, comme l'a remarqué *J. Petersen*<sup>82</sup>, c'est de donner un sens concret et cinématique à certains cas de décomposition de la vitesse qui sans cela ne présentent que la valeur *formelle* de projections. Tel est le cas de la vitesse d'élongation, que l'on peut regarder comme la vitesse du mobile sur le rayon vecteur, tandis que celui-ci tourne autour de l'origine.

Il serait naturel de poursuivre ici l'étude de la composition des mouvements en présentant celle de la composition des accélérations. Mais il se trouve que pour être à même d'en formuler l'énoncé, l'analyse du mouvement d'entraînement devient alors nécessaire et c'est d'elle qu'il faut d'abord nous occuper.\*

**10. Lois de distribution des vitesses dans un solide en mouvement.** La vitesse  $\vec{V}_P$  d'un point  $P$  de  $\Sigma$  dans le mouvement

$$[\Sigma, \Sigma']$$

de  $\Sigma$  par rapport à un autre système invariable  $\Sigma'$ , dépend de la position de  $P$ . La loi de cette dépendance constitue la loi de distribution des vitesses dans le solide  $\Sigma$ .

Le cas le plus simple est celui où  $\Sigma$  est animé par rapport à  $\Sigma'$  d'un mouvement de rotation autour d'un axe  $\Delta$ , auquel cas  $\Sigma, \Sigma'$  sont dits *articulés*. Si l'on représente la vitesse angulaire de la rotation par un vecteur  $\vec{\Omega}$  porté par l'axe  $\Delta$ , le moment de ce vecteur en  $M$  représente alors  $\vec{V}_P$ . Par là la considération des moments s'introduit en cinématique.

Si, au cours du mouvement, toute droite de  $\Sigma$  reste parallèle à une droite de  $\Sigma'$  le mouvement est une translation. Les vitesses de tous les points sont alors équipollentes. C'est le cas limite d'une vitesse de rotation infiniment petite  $\Omega$  autour d'un axe  $\Delta$  rejeté à l'infini. On sait qu'un vecteur qui présente cette singularité si spéciale équivaut à un couple; cela concorde avec le fait que tous les points du corps ont des vitesses équipollentes.

Considérons une chaîne de corps  $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{n-1}, \Sigma_n$  articulés, ce qui signifie que  $\Sigma$  tourne par rapport à  $\Sigma_1$  autour d'un axe  $\Delta$ ,

<sup>82</sup> Kinematik, Forelaesninger holdte ved den polytekniske Laevninstalt, Copenhagen 1884; trad. allemande par *R. von Fischer-Benzon*, Kinematik, Copenhagen 1884, p. 9.

$\Sigma_1$  autour d'un axe  $\Delta_1$  par rapport à  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_2$  autour d'un axe  $\Delta_2$  par rapport à  $\Sigma_3, \dots, \Sigma_{n-1}$  autour d'un axe  $\Delta_{n-1}$  par rapport à  $\Sigma_n$ . Soient  $\vec{\Omega}, \vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2, \dots, \vec{\Omega}_{n-1}$  les vecteurs représentatifs des vitesses angulaires portés par les axes  $\Delta, \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$  respectivement. Si  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  sont les points de  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_{n-1}$  qui coïncident actuellement avec le point  $P$  de  $\Sigma$ , en appelant  $\vec{V}_P, \vec{V}_{P_1}, \vec{V}_{P_2}, \dots, \vec{V}_{P_{n-1}}$  les vitesses des points  $P$  dans  $\Sigma, P_1$  dans  $\Sigma_2, \dots, P_{n-1}$  dans  $\Sigma_n$ , le théorème de la composition des vitesses donnera pour  $\vec{V}_P$ , vitesse de  $P$  dans le système ultime  $\Sigma_n$  la valeur géométrique

$$\vec{V}_P = \vec{V}_P + \vec{V}_{P_1} + \dots + \vec{V}_{P_{n-1}}.$$

Mais  $\vec{V}_P$  est le moment de  $\vec{\Omega}$  en  $P$ ,  $\vec{V}_{P_1}$  le moment de  $\vec{\Omega}_1$  en  $P_1$ , c'est-à-dire en  $P$ , puisque  $P_1$  coïncide avec  $P$ , et de même  $\vec{V}_{P_2}, \dots, \vec{V}_{P_{n-1}}$  sont les moments en  $P$  des vecteurs  $\vec{\Omega}_2, \dots, \vec{\Omega}_{n-1}$ . En conséquence, la vitesse  $\vec{V}_P$  est le moment résultant en  $P$  du système des vecteurs  $\vec{\Omega}, \vec{\Omega}_1, \dots, \vec{\Omega}_{n-1}$ .

Par ce théorème les systèmes de vecteurs s'introduisent en cinématique.

Il est vrai que leur rôle semble limité à un cas bien particulier de mouvement, celui de la *chaîne articulée*. Mais la considération suivante va donner à leur rôle une toute autre portée.

Soient  $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$  trois systèmes invariables mobiles les uns par rapport aux autres. Supposons qu'à un instant donné, dans les deux mouvements  $[\Sigma, \Sigma'], [\Sigma, \Sigma'']$ , tout point de  $\Sigma$  ait la même vitesse. Nous dirons alors que ces deux mouvements sont *tangents* à l'instant considéré.

Or c'est un théorème facile à établir soit par un raisonnement géométrique dans le genre de ceux de *M. Chasles*, soit par le calcul, soit enfin par un procédé cinématique, direct, que tout mouvement  $[\Sigma, \Sigma']$  est à tout instant tangent au mouvement  $[\Sigma, \Sigma_n]$  obtenu en reliant  $\Sigma, \Sigma_n$  par une chaîne articulée<sup>83</sup>.

C'est ce que l'on exprime en disant qu'à tout instant il existe pour tout mouvement un système tangent de *rotations*. Le mot rotations s'appliquant ici aux vecteurs  $\vec{\Omega}, \vec{\Omega}_1, \dots, \vec{\Omega}_{n-1}$ .

Maintenant, puisque le système tangent des rotations n'intervient que par son moment résultant en tout point du corps  $\Sigma$ , on pourra concevoir une infinité de formes du système de rotations tangent, pourvu que le système de vecteurs qu'elles forment reste *équivalent* à lui-même [voir IV 4, 23].

On peut ainsi interpréter en cinématique toutes les représentations particulières qu'il est possible de donner d'un système de vecteurs, sans qu'il cesse d'être équivalent à lui-même.

Réduction à deux vecteurs, réduction à un vecteur et à un couple et en particulier à un vecteur et à un couple dont le plan est normal au vecteur (réduction canonique) trouvent ici un rôle nouveau.

Et comme, dans le mouvement hélicoïdal continu, la réduction canonique s'offre d'elle-même, l'existence du mouvement hélicoïdal tangent devient intuitive.

Du reste tous ces résultats peuvent s'obtenir aussi par des considérations géométriques dans le genre de celles que nous offrent les numéros précédents. Nous ferons toutefois observer que cette conception des mouvements tangents correspond strictement à la réalité des faits, laquelle se limite aux propriétés infinitésimales du premier ordre.

C'est l'existence du mouvement hélicoïdal tangent qui a amené *R. S. Ball* à la conception de la vis (système de vecteurs dont la somme géométrique vaut 1) et dont on trouvera ailleurs le développement [IV 4, 50].

Le système des rotations n'a pas seulement pour rôle de définir par son moment en tout point la vitesse de ce point. Son moment résultant par rapport à un axe représente la projection sur cet axe de la vitesse d'un de ses points, projection qui est indépendante, on le sait, du choix de celui-ci.

Le cas particulier où ce moment est nul donne lieu au système des normales dont l'étude fut inaugurée par *M. Chasles* dans une note de son „Aperçu historique“. Ultérieurement cet ensemble s'est trouvé identique au complexe linéaire dont la notion fut introduit par *Plücker*. La réduction des rotations à deux ou à une rotation et à un couple de rotations (translation) correspond à l'existence des droites conjuguées par rapport au complexe; la seconde réduction correspond spécialement au cas où l'une des deux droites conjuguées est rejetée à l'infini. Nous n'insisterons pas ici sur les relations géométriques qui ont été développées dans l'article IV 4 de l'Encyclopédie.

Nous retiendrons toutefois spécialement de cet ensemble de faits que la vitesse de tout point  $P$  d'un corps résulte de la vitesse d'un point  $A$  du même corps et de la vitesse qu'il acquerrait par suite d'une rotation autour d'un axe issu de  $A$ . La vitesse angulaire, représentée par un vecteur  $\vec{\Omega}$  issu de  $A$ , donne lieu à cette remarque que si l'on passe d'un point  $A$  à un autre, le vecteur  $\vec{\Omega}$  reste équivalent à lui-même. On l'appelle la *rotation* (tout court).\*

**11. Composition des rotations.** Nous ne pouvons faire moins que de dire ici un mot de la composition des rotations, car c'est le complément obligé de ce qui précède.

Si  $\Sigma, \Sigma', \Sigma''$  sont trois solides à l'état de mouvement relatif, il existe pour chacun des mouvements relatifs de deux de ces corps un système tangent de rotations. Soit  $R(\Sigma, \Sigma')$  celui qui concerne le mouvement  $\boxed{\Sigma, \Sigma'}$ ,  $R(\Sigma', \Sigma'')$  celui qui concerne le mouvement  $\boxed{\Sigma', \Sigma''}$ . Comme le mouvement  $\boxed{\Sigma, \Sigma''}$  résulte de ces deux premiers, d'après le théorème sur la composition des vitesses, la vitesse de tout point  $P$  de  $\Sigma$  par rapport à  $\Sigma''$  sera la somme géométrique des moments en  $P$  des systèmes de rotations

$$R(\Sigma, \Sigma'), R(\Sigma', \Sigma'').$$

Ce sera donc le moment résultant en  $P$  du système de vecteurs obtenu en réunissant dans un même ensemble les systèmes de vecteurs  $R(\Sigma, \Sigma')$  et  $R(\Sigma', \Sigma'')$ . Ce système résultant de rotations sera donc précisément le système  $R(\Sigma, \Sigma'')$ , en sorte que l'on peut poser

$$R(\Sigma, \Sigma'') = R(\Sigma, \Sigma') + R(\Sigma', \Sigma''),$$

le signe + indiquant ici que l'on réunit en un même ensemble, que l'on *compose* comme on dit, les deux systèmes de vecteurs  $R(\Sigma, \Sigma')$  et  $R(\Sigma', \Sigma'')$ .

Telle est la base de la composition des rotations qui rentre ainsi dans la composition géométrique des systèmes de vecteurs.

Lorsque les deux systèmes de rotations  $R(\Sigma, \Sigma')$ ,  $R(\Sigma', \Sigma'')$  sont donnés par leurs éléments canoniques (axe central, moment principal, pas), le problème de la composition s'opère sur le cylindroïde [voir IV 4, 60].

Du reste le problème de la composition des rotations ne se borne pas au cas où le mouvement résulterait seulement de la composition de deux autres, mais s'étend au cas de la composition d'un nombre quelconque de mouvements. La règle est toujours la même et se ramène à la composition ou réunion en un seul système de plusieurs systèmes de vecteurs représentant les rotations pour chacun des mouvements intermédiaires.

L'importance et la simplicité de quelques cas de composition obligent de les signaler ici sous leur forme cinématique.

S'il s'agit de deux rotations autour d'axes concourants, elles sont équivalentes à une rotation unique représentée par leur somme géométrique (*parallélogramme des rotations*). Théorème analogue s'il s'agit de plusieurs rotations autour d'axes concourants: on est alors conduit à un *polygone de rotations* analogue au polygone des forces.

Des rotations parallèles se composent en une rotation unique parallèle, comme les forces parallèles.

Cependant, ici encore, se présente le cas du couple de rotations équivalent à une translation tangente. La composition des couples de rotations revient ainsi à celle des translations.\*

**12. Représentations analytiques.** Tous les résultats qui précèdent donnent lieu à une représentation analytique simple et qui se prête élégamment à l'étude des questions les plus variées, même à celles qui conduisent à des relations différentielles et où il semble que le rôle de l'analyse ne puisse être éludé.

Si l'on fait choix d'un trièdre trirectangle  $T$ ,  $Oxyz$ , si l'on appelle  $\xi, \eta, \zeta$  les projections sur les axes de ce trièdre de la vitesse du point  $P$  du corps  $\Sigma$  qui coïncide actuellement avec  $O$ , et  $p, q, r$  les projections du vecteur qui représente la rotation, le mouvement de  $\Sigma$  ayant lieu par rapport à un autre corps  $\Sigma'$ , les quantités  $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$  sont les coordonnées du système tangent  $R(\Sigma, \Sigma')$  des rotations. Un point de  $\Sigma$  dont  $x, y, z$  sont les coordonnées actuelles par rapport au trièdre  $T$  a pour projections de sa vitesse d'entraînement

$$\xi + qz - ry, \quad \eta + rx - pz, \quad \zeta + py - qx.$$

Parmi toutes les hypothèses que l'on peut faire sur le choix du trièdre  $T$ , une des plus habituelles concerne le cas où ce trièdre se trouverait lié invariablement au corps  $\Sigma$  lui-même, auquel cas  $\xi, \eta, \zeta$  sont les projections de la vitesse même de l'origine  $O$  et  $x, y, z$  les coordonnées fixes du point considéré du corps  $\Sigma$ . Mais si ce point était lui-même mobile dans  $\Sigma$ , ses coordonnées devenant variables avec le temps, les projections de sa vitesse dans  $\Sigma'$ , projections faites sur les axes de  $T$ , auraient pour valeurs, d'après le théorème de la composition des vitesses,

$$v_x' = \xi + qz - ry + \frac{dx}{dt},$$

$$v_y' = \eta + rx - pz + \frac{dy}{dt},$$

$$v_z' = \zeta + py - qx + \frac{dz}{dt},$$

formules qui sont d'un emploi tout à fait classique aujourd'hui. Cependant, dans certains cas, il est plus profitable, dans l'étude du mouvement relatif de deux corps  $\Sigma, \Sigma'$ , de faire choix d'un trièdre  $T$  mobile à la fois dans les deux corps et de considérer le mouvement  $\left[ \begin{smallmatrix} \Sigma, \Sigma' \end{smallmatrix} \right]$  comme résultant de la composition de ces deux autres  $\left[ \begin{smallmatrix} \Sigma, T \end{smallmatrix} \right], \left[ \begin{smallmatrix} T, \Sigma' \end{smallmatrix} \right]$  en regardant  $\left[ \begin{smallmatrix} \Sigma, T \end{smallmatrix} \right]$  comme l'inverse du mouvement

$\left[ \begin{smallmatrix} T, \Sigma' \end{smallmatrix} \right]$ . Alors si

$$p, q, r, \xi, \eta, \zeta \quad \text{et} \quad p', q', r', \xi', \eta', \zeta'$$

sont les coordonnées des deux systèmes de rotations  $R(T, \Sigma)$  et  $R(T, \Sigma')$ , celles du système de rotations  $R(\Sigma, \Sigma')$  seront<sup>83)</sup>

$$p' - p, \quad q' - q, \quad r' - r, \quad \xi' - \xi, \quad \eta' - \eta, \quad \zeta' - \zeta.$$

Il est à noter que l'usage des quantités  $p, q, r, \xi, \eta, \zeta$  (coordonnées des rotations), dans l'étude du mouvement d'un trièdre  $T$  par rapport à un corps  $\Sigma$  ou  $\Sigma'$ , offre le très grand avantage de n'introduire dans les calculs que des éléments possédant par eux-mêmes une signification cinématique.

La question générale<sup>84)</sup> de passer de la connaissance de ces éléments à la représentation du mouvement en termes finis se trouve en fait comprendre et synthétiser un grand nombre de problèmes concernant la mécanique et la géométrie. La solution générale et méthodique de cette question a été donnée par G. Darboux qui, en la ramenant à l'intégration d'une équation de Riccati, a mis en pleine lumière ses racines analytiques et expliqué le succès de certaines solutions particulières, tout en donnant la voie à suivre pour en trouver d'autres. Ainsi les problèmes concernant le mouvement se sont trouvés étendus du champ du calcul purement différentiel au champ plus ardu du calcul intégral.

A cause de son importance, nous indiquerons ici le principe de cette méthode. Si l'on cherche, le trièdre  $T$  étant solidaire du corps  $\Sigma$ , à repérer un point  $M$  du corps  $\Sigma'$ , ses coordonnées  $x, y, z$  par rapport au trièdre  $T$  doivent vérifier les équations

$$(a) \quad \begin{cases} \xi + qz - ry + \frac{dx}{dt} = 0, \\ \eta + rx - pz + \frac{dy}{dt} = 0, \\ \zeta + py - qx + \frac{dz}{dt} = 0, \end{cases}$$

qui expriment que la vitesse du point  $M$  dans le corps  $\Sigma'$  est nulle. Si  $x', y', z'$  sont les coordonnées du point  $M$  par rapport à un trièdre  $T'$  solidaire de  $\Sigma'$ ,  $a, b, c$  les coordonnées de l'origine de  $T'$  par

83) G. Koenigs, Cinématique<sup>18)</sup>, p. 128, 208; Sur la formule d'Euler-Savary et sa construction géométrique [Bull. sc. math. (2) 31 (1907), p. 29]; Mémoire sur les courbes conjuguées [Mém. présentés Acad. sc. Paris (2) 36, mém. n° 1 publié en 1910]. La loi de courbure des profils superficiels conjugués [J. math. pures appl. (6) 8 (1912), p. 103].

84) Voir G. Darboux, Théorie des surfaces<sup>1)</sup> 1, chap. 1, 2, 3 et 4; G. Koenigs, Cinématique<sup>18)</sup>, p. 119 et suiv.

rapport à  $T$  et  $\alpha, \beta, \gamma; \alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$  les cosinus directeurs des axes de  $T'$  par rapport au trièdre  $T$ , les formules de transformation de coordonnées donnent

$$(b) \quad \begin{cases} x = \alpha + \alpha'x' + \alpha''y' + \alpha'''z', \\ y = \beta + \beta'x' + \beta''y' + \beta'''z', \\ z = \gamma + \gamma'x' + \gamma''y' + \gamma'''z'. \end{cases}$$

En y considérant  $x', y', z'$  comme des constantes arbitraires, ces expressions de  $x, y, z$  sont précisément les intégrales générales des équations différentielles (a). En y faisant  $a, b, c$  nuls,  $x, y, z$  deviennent les intégrales des mêmes équations différentielles sans seconds membres, c'est-à-dire pour lesquelles  $\xi, \eta, \zeta$  seraient nuls. C'est à l'intégration de ces équations sans seconds membres qu'il faut s'attacher, car, cette intégration effectuée, de simples quadratures donnent les solutions des équations complètes, avec seconds membres.

C'est précisément l'intégration des équations sans seconds membres que *G. Darboux*<sup>85)</sup> a ramenée à une équation de Riccati, en y faisant le changement de variables

$$x = \frac{1-u}{u-v}, \quad y = i \frac{1+uv}{u-v}, \quad z = \frac{u+v}{u-v}.$$

Alors  $u$  et  $v$  vérifient une même équation de Riccati

$$\frac{d\sigma}{dt} = -i r \sigma + \frac{q-ip}{2} + \frac{q+ip}{2} \sigma^2.$$

Il est vrai que  $x^2 + y^2 + z^2$  est alors égal à 1, mais comme

$$x^2 + y^2 + z^2 = \text{const.},$$

il suffit de diviser  $x, y, z$  par la racine carrée de cette constante pour arriver au cas en apparence plus particulier où  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Le résultat est que le mouvement est pleinement défini par les coordonnées  $(p, q, r, \xi, \eta, \zeta)$  du système des rotations. Ce qui peut être prévu a priori<sup>86)</sup>, car si le corps  $\Sigma$  dans deux mouvements

$$[\Sigma, \Sigma'], [\Sigma, \Sigma'']$$

par rapport à deux corps  $\Sigma', \Sigma''$  a constamment même distribution de vitesse, les corps  $\Sigma', \Sigma''$  ont un mouvement relatif tel que le système tangent des rotations est constamment nul et, par suite, ces corps sont à l'état de repos relatif, ils ne forment qu'un seul et même solide invariable.

Cette méthode trouve une nouvelle confirmation dans la facilité avec laquelle elle s'étend, ainsi qu'on le verra plus loin, aux mouvements à plusieurs paramètres.\*

85) Théorie des surfaces<sup>2)</sup> 1, p. 22.

86) *G. Koenigs*, Cinématique<sup>1a)</sup>, p. 120.

**13. Composition des accélérations. Théorème de Coriolis.** On a vu plus haut comment on arrive à construire la vitesse du mouvement qui résulte de la composition de deux ou de plusieurs mouvements. La même question se pose au sujet des accélérations.

Soient  $\vec{J}_M, \vec{J}_P$  les accélérations du point mobile  $M$  dans ses mouvements par rapport à deux systèmes invariables de référence  $\Sigma'$  et  $\Sigma''$ . Soit  $P$  le point de coïncidence de  $M$  dans  $\Sigma$  et  $\vec{J}_P$  l'accélération de ce point  $P$  dans son mouvement d'entraînement dans le mouvement d'ensemble  $[\Sigma, \Sigma']$ . Désignons enfin par  $\vec{J}_M^{\Sigma'}$  une accélération complémentaire égale géométriquement au double du moment par rapport à l'extrémité  $V$  de la vitesse relative  $MV$ , du vecteur  $\vec{\Omega}$  obtenu en transportant en  $M$  la rotation; on a, d'après le théorème de Coriolis, l'égalité géométrique<sup>87)</sup>

$$\vec{J}_M^{\Sigma'} = \vec{J}_M + \vec{J}_P + \vec{J}_M^{\Sigma'}$$

Si ce n'était le vecteur complémentaire  $\vec{J}_M^{\Sigma'}$  on aurait le même énoncé que pour les vitesses et c'est ce qui a lieu de fait quand le mouvement  $[\Sigma, \Sigma']$  étant une translation ou même admettant une translation tangente, la rotation  $\Omega$  est nulle.

La démonstration de ce théorème peut se faire directement, en considérant dans le système  $\Sigma'$  deux positions consécutives de la trajectoire de  $M$  dans  $\Sigma$  et sur celles-ci les places occupées aux deux époques consécutives par le mobile. On peut aussi se servir du calcul en différenciant deux fois les formules d'une transformation de coordonnées orthogonales. Enfin une méthode plus cinématique repose sur la définition de l'accélération comme dérivée géométrique de la vitesse.

Si l'on suit cette méthode en faisant usage du trièdre mobile  $T$ , solidaire du système  $\Sigma$ , on tombe sur les formules de *E. Bour*<sup>88)</sup>

$$\begin{cases} j'_{M,x} = qv'_{M,z} - rv'_{M,y} + \frac{dv'_{M,x}}{dt} \\ j'_{M,y} = rv'_{M,x} - pv'_{M,z} + \frac{dv'_{M,y}}{dt} \\ j'_{M,z} = pv'_{M,y} - qv'_{M,x} + \frac{dv'_{M,z}}{dt} \end{cases}$$

87) *G. Coriolis*, Mémoire sur le principe des forces vives dans le mouvement relatif des machines [J. Éc. polyt. (1) cah. 21 (1832), p. 268]; Mémoire sur les équations du mouvement relatif des systèmes de corps [id. (1) cah. 24 (1835), p. 142].

88) J. math. pures appl. (2) 8 (1863), p. 1. Ces formules sont établies dans *G. Koenigs*, Cinématique<sup>1a)</sup>, p. 129.

où  $v'_{M,x}$ ,  $v'_{M,y}$ ,  $v'_{M,z}$  sont les projections sur les axes de  $T$  de la vitesse  $\bar{v}'_M$  de  $M$  dans  $\Sigma'$  et  $j'_{M,x}$ ,  $j'_{M,y}$ ,  $j'_{M,z}$  les projections de l'accélération du même mouvement. Les quantités  $v'_{M,x}$ ,  $v'_{M,y}$ ,  $v'_{M,z}$  ont été données au numéro précédent.

En développant ces formules, on trouve que

$$j'_{M,x} = \xi_1 + q_1 z - r_1 y + \frac{\partial H}{\partial x} + 2 \left( q \frac{dz}{dt} - r \frac{dy}{dt} \right) + \frac{d^2 x}{dt^2},$$

$$j'_{M,y} = \eta_1 + r_1 x - p_1 z + \frac{\partial H}{\partial y} + 2 \left( r \frac{dx}{dt} - p \frac{dz}{dt} \right) + \frac{d^2 y}{dt^2},$$

$$j'_{M,z} = \xi_1 + p_1 y - q_1 x + \frac{\partial H}{\partial z} + 2 \left( p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt} \right) + \frac{d^2 z}{dt^2},$$

où l'on pose

$$p_1 = \frac{dp}{dt}, \quad q_1 = \frac{dq}{dt}, \quad r_1 = \frac{dr}{dt},$$

$$\xi_1 = \frac{d\xi}{dt} + q\xi - r\eta, \quad \eta_1 = \frac{d\eta}{dt} + r\xi - p\xi, \quad \xi_1 = \frac{d\xi}{dt} + p\eta - q\xi,$$

$$2H = (px + qy + rz)^2 - (p^2 + q^2 + r^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

Dans ces formules,  $\frac{d^2 x}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2 y}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2 z}{dt^2}$  sont les projections de  $\bar{J}'_M$ , tandis que celles de  $\bar{J}'_M$  sont

$$j^{(c)}_{M,x} = 2 \left( q \frac{dz}{dt} - r \frac{dy}{dt} \right),$$

$$j^{(c)}_{M,y} = 2 \left( r \frac{dx}{dt} - p \frac{dz}{dt} \right),$$

$$j^{(c)}_{M,z} = 2 \left( p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt} \right);$$

les autres termes sont les projections  $j'_{P,x}$ ,  $j'_{P,y}$ ,  $j'_{P,z}$  de l'accélération d'entraînement, en sorte que

$$j'_{P,x} = \xi_1 + q_1 z - r_1 y + \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$j'_{P,y} = \eta_1 + r_1 x - p_1 z + \frac{\partial H}{\partial y},$$

$$j'_{P,z} = \xi_1 + p_1 y - q_1 x + \frac{\partial H}{\partial z}.$$

Ces formules fournissent la distribution de l'accélération d'entraînement, question sur laquelle on reviendra plus loin [n° 22].

Il convient ici de remarquer que les formules de Bour ont une portée beaucoup plus générale que la question des accélérations. Si  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  sont les projections d'un vecteur sur les axes du trièdre

$T$ , si  $X_1$ ,  $Y_1$ ,  $Z_1$  sont les projections de la dérivée géométrique de ce vecteur considéré comme mobile on a

$$X_1 = qZ - rY + \frac{dX}{dt}$$

$$Y_1 = rX - pZ + \frac{dY}{dt}$$

$$Z_1 = pY - qX + \frac{dZ}{dt}.$$

Appliquées à l'accélération du premier ordre, ces formules donnent la loi de composition des accélérations du second ordre, puis du troisième et ainsi de suite; en même temps elles fournissent, en supposant le point mobile solidaire du système  $\Sigma$ , la loi de distribution des accélérations d'ordre quelconque dans un solide en mouvement.

Les résultats généraux qu'on peut tirer de cette méthode offrent des spécialisations remarquables qui, en raison de leur simplicité et de leur importance pratique, ont particulièrement occupé les savants et qui tiennent la première place dans l'ordre historique. Nous exposons en détail ces cas particuliers.\*

**14. Mouvement continu d'un plan sur lui-même.** Parmi les cas particuliers dont nous voulons parler, deux, en raison de la diversité de leurs applications, ont spécialement occupé les géomètres. Le premier est celui d'un corps  $\Sigma$  dont une face plane  $\sigma$  glisse sur une face plane  $\sigma'$  d'un autre corps  $\Sigma'$ , auquel cas tout plan  $\sigma_1$  parallèle à  $\sigma$  dans  $\Sigma$  glisse sur un plan  $\sigma'_1$  parallèle à  $\sigma'$  dans  $\Sigma'$ . De là est née la considération du mouvement d'un plan  $\sigma$  sur un plan  $\sigma'$ . Le second cas est celui où une sphère de  $\Sigma$ , de centre  $O$ , glisse sur une sphère égale et concentrique de  $\Sigma'$ , auquel cas  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  ont en commun le même point  $O$ . Toute sphère de centre  $O$  dans  $\Sigma$  glisse alors sur une sphère égale et concentrique dans  $\Sigma'$ . De là est née la considération du mouvement d'une sphère sur une sphère superposée ou emboîtée sur elle. Nous commencerons d'abord par le cas du mouvement d'un plan  $\sigma$  sur lui-même ou plus justement sur un plan  $\sigma'$  superposé.

Tout point de  $\sigma$  a sa trajectoire dans  $\sigma'$  et inversement. Plus généralement, toute courbe  $c$  de  $\sigma$  possède dans  $\sigma'$  une enveloppe  $c'$ ; les courbes  $c$ ,  $c'$  forment un couple de courbes conjuguées. L'importance de la considération de ces couples de courbes tient au rôle qu'elles jouent dans le tracé des profils des engrenages et des cames cylindriques.\*

Les théorèmes pour le mouvement continu peuvent se déduire des résultats du n° 4 par passage à la limite; dans l'ordre historique ils sont en partie les premiers.



C'est en effet par l'analyse, et principalement par la considération des accélérations, qu'on est parvenu à la plupart d'entre eux.\*

L'existence du centre instantané (pôle de rotation), auquel tend le point  $O$  dans le mouvement continu, a été découverte par *Jean Bernoulli*<sup>89</sup>; tout mouvement [infinitement petit] d'un plan  $\sigma$  sur lui-même est donc une rotation instantanée<sup>90</sup>. Il en résulte les théorèmes suivants trouvés par *M. Chasles*<sup>91</sup> sous cette forme:

1°) Les normales instantanées de toutes les trajectoires passent au point  $O$ .

2°) Également les normales aux couples de courbes conjuguées en leur point de contact instantané.

3°) Tout mouvement de  $\sigma$  sur  $\sigma'$  consiste dans le roulement sans glissement d'une courbe  $p$  sur une courbe  $p'$ . Ces courbes s'appellent courbes *polaires*.

La correspondance<sup>92</sup> des points  $A$  et  $A'$  [n° 5] devient une correspondance  $\mathfrak{V}^2$  entre les points de  $\sigma$  et ceux de  $\sigma'$ , de sorte que chacun des deux points est le centre de courbure de la trajectoire de l'autre<sup>93</sup>. Les trois points principaux coïncident avec le pôle  $O$ ; les trois droites principales coïncident avec la *tangente*  $t$  aux courbes polaires en  $O$ .

En ce qui concerne les couples de courbes conjuguées, leur correspondance constitue une transformation de contact, en sorte que deux courbes ayant entre elles un contact d'ordre  $n$  ont pour conjuguées des courbes ayant entre elles un contact du même ordre. On peut remarquer que deux courbes parallèles ont pour conjuguées deux courbes parallèles et que, par exemple, l'enveloppe d'un cercle de rayon constant a même développée que la trajectoire de son centre. Ces diverses remarques conduisent aisément à cette conclusion que les centres de courbure  $A, A'$  de deux courbes conjuguées  $c, c'$  sont des points correspondants dans  $\mathfrak{V}^2$ .

89) De centro spontaneo rotationis [Propositiones variae mechanico-dynamicae n° 14/24; Opera 4, Lausanne 1742, p. 265/73].

90) Si  $O$  va à l'infini, le mouvement consiste en une translation instantanée. Si tel est continûment le cas, toutes les trajectoires sont égales. Le mouvement est alors déterminé par une trajectoire; on exclut ici ce cas qui est celui d'une translation continue.

91) *R. Descartes* [Lettre de Descartes à Mersenne du 23 août 1638; Œuvres, éd. Ch. Adam et P. Tannery 2, Paris 1898, p. 307/43] savait déjà que dans le roulement de deux courbes toutes les normales passent au point de contact.

92) *G. Koenigs* [C. R. Acad. sc. Paris 131 (1900), p. 1179] a fait connaître un mode de réalisation mécanique au moyen de tiges articulées de la transformation quadratique  $\mathfrak{V}^2$ .

93) Les trajectoires elles-mêmes sont en général différentes.

Toutes les coniques  $c_2'$  qui dans  $\sigma'$ , correspondent aux droites de  $\sigma$ , sont osculatrices entre elles et avec la courbe polaire en  $O$ <sup>94</sup>. Le cercle  $w_2$  (cercle des inflexions) qui correspond à  $g_2'$ , est le lieu des points qui sont actuellement des points d'inflexion sur leurs trajectoires. Toutes les tangentes d'inflexion passent par un point fixe  $V$ , pôle d'inflexion, second point de rencontre de  $w_2$  avec la normale  $n$  aux courbes polaires<sup>95</sup>. Le cercle des inflexions du mouvement inverse est aussi appelé cercle des rebroussements  $r_2$  de  $\sigma$ . Il est le lieu des points de rebroussements actuels des enveloppes des droites de  $\sigma$ <sup>96</sup> qui présentent cette singularité.

Le cercle des inflexions est aussi le lieu des centres de courbure des courbes  $c$  dont l'enveloppe  $c'$  offre un point d'inflexion au point où elle touche  $c$ ; en particulier, par conséquent il est le lieu des centres de courbure des courbes qui enveloppent une droite.

La courbe focale  $k_2$  devient le lieu des points qui possèdent des cercles de courbure stationnaires<sup>97</sup>. Elle possède en  $O$  un point double et touche en  $O$  la tangente et la normale à la courbe polaire. Cette courbe a été remarquée d'abord par *L. Burmester*<sup>98</sup>, plus tard par *H. Léauté*<sup>99</sup> et comme elle a une grande importance pour la théorie générale, particulièrement pour la théorie des mécanismes bielle et manivelle [n° 19], elle a été l'objet de plusieurs recherches<sup>99</sup>.

94) *G. Rivals* [J. Éc. polyt. (1) cah. 35 (1858), p. 112] montra que les centres de courbure des points d'une droite sont sur une  $c_2'$ : *A. Mannheim* [J. Éc. polyt. (1) cah. 37 (1858), p. 179] et *Ph. Gilbert* [Mém. couronnés et savants étrangers Acad. sc. Belgique in 4°, 30 (1858/61), mém. n° 1] trouvèrent que  $c_2'$  touche  $t$ ; le premier *E. Dewulf* [C. R. Acad. sc. Paris 92 (1881), p. 1091; Ann. Éc. Norm. (3) 3 (1886), p. 405] trouva l'osculation des  $c_2'$  et l'introduction de  $\mathfrak{V}^2$  que déjà, dans le cas des déplacements finis, *L. Burmester* avait antérieurement trouvée (cf. note 33). En particulier des propriétés des  $c_2'$  furent données par *A. Mannheim* [J. math. pures appl. (3) 1 (1875), p. 37] et par *Ch. Speckel*, Nouv. Ann. math. (3) 11 (1892), p. 268.

95) Le cercle des inflexions apparaît pour la première fois chez *Ph. de La Hire*, Traité des roulettes [Hist. Acad. sc. Paris 1706, M. p. 348]. Voir aussi *A. Tronson* [J. math. pures appl. (1) 10 (1845), p. 154] et encore *S. H. Aronhold*, Kinematische Geom.<sup>29</sup> [Verh. Beford. Gewerbevereines 51 (1879), p. 153].

96) *A. Grouard*, Bull. Soc. philom. Paris (6) fasc. 6 (1869), p. 51/6; L'Institut 38 (1870), p. 84/5. Ces dernières droites passent toutes au pôle des inflexions du mouvement inverse.

97) Comme  $k_2$  et  $k_2'$  se correspondent dans  $\mathfrak{V}^2$ ,  $k_2'$  est le lieu des centres de ces cercles.

98) C. R. Acad. sc. Paris 87 (1878), p. 151; J. Éc. polyt. (1) cah. 46 (1879), p. 167.

99) *C. Rodenberg*, Z. Math. Phys. 36 (1891), p. 271; *L. Allievi*, Cinematica

Sur elle il y a quatre points  $B_i$  (points de Burmester), dont les trajectoires admettent un cercle qui les coupe en cinq points confondus (contact du quatrième ordre)<sup>96</sup>; son intersection  $U$  avec  $w_2$  est un point de  $\sigma$  à la trajectoire duquel la tangente a un contact du troisième ordre (quatre points confondus) en sorte que ce point est un point d'ondulation de la trajectoire.

Ce point est aussi l'intersection de la courbe avec l'axe focal de la courbe  $k_2'$  du mouvement inverse<sup>100</sup>, et il est appelé point de Ball parce que R. Ball<sup>101</sup> l'a indiqué le premier.

Les points de Ball qui correspondent à l'ensemble du mouvement engendrent la courbe de Ball  $b$ , qui, avec la courbe polaire  $p$ , constitue l'enveloppe des cercles d'inflexion<sup>102</sup>. Si l'un des points  $B_i$  tombe en  $U$ , alors la trajectoire de  $U$  a un contact du quatrième ordre (cinq points confondus) avec la tangente. De tels points tombent en un point de rebroussement de la courbe de Ball<sup>103</sup>.

R. Müller<sup>104</sup> a considéré les courbures des premières développées et des développées d'ordre supérieur des enveloppes. Pour chaque sorte de développée existent deux cercles analogues aux cercles  $w_1$  et  $r_2$ . Si  $c$  est une courbe de  $\sigma$  dont l'enveloppe est une droite, les normales actuelles de la  $n^{\text{ième}}$  développée passent toutes par un point  $V_n$  (le  $n^{\text{ième}}$  pôle d'inflexion) et les centres de courbure des  $(n-1)^{\text{ièmes}}$  développées forment un cercle  $w_n$  décrit sur  $V_{n-1}V_n$  comme diamètre; il s'appelle le  $n^{\text{ième}}$  cercle des inflexions.

Si au contraire,  $g$  est une droite de  $\sigma$ , la normale à la  $n^{\text{ième}}$  développée de son enveloppe passe par un point  $\Psi_n$ , le  $n^{\text{ième}}$  pôle des rebroussements, et les centres de courbure de la  $(n-1)^{\text{ième}}$  développée engendrent le  $(n-1)^{\text{ième}}$  cercle des rebroussements dont  $\Psi_n\Psi_{n-1}$  est un diamètre. Des positions particulières de ces points amènent des points dont les trajectoires ont avec leur tangente un contact supérieur.

della biella piana, Naples 1896, p. 37 suiv.; R. Müller, Z. Math. Phys. 37 (1892), p. 129, 412; M. Grübler, id. 37 (1892), p. 35; L. Burmester, Kinematik<sup>98</sup>, p. 616.

100) C. Rodenberg, Z. Math. Phys. 36 (1891), p. 270. Voir la note 114.

101) Proc. Irish Acad. (Dublin) (2) 1 (1870/1), p. 243.

102) La tangente à la trajectoire de  $U$  coïncide avec la tangente de l'enveloppe de  $w_2$ ; L. Allievi, Biella piana<sup>99</sup>, p. 44.

103) R. Müller, Z. Math. Phys. 43 (1898), p. 37. Quand des quatre points  $B_i$  trois sont en ligne droite, le quatrième point est en  $U$ .

104) Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks (Festschrift), Brunswick 1897, p. 43 et suiv.; Z. Math. Phys. 42 (1897), p. 247; pour la première développée cf. id. 36 (1891), p. 193, 257; dans ce mémoire on recherche aussi la correspondance entre  $\sigma$  et les centres de courbure de la développée. Voir également A. Pellet, C. R. Acad. sc. Paris 120 (1895), p. 1204.

En général le pôle  $O$  considéré comme point du système est un point de rebroussement sur sa propre trajectoire, tandis que les autres trajectoires n'ont aucune singularité<sup>105</sup>. A. Schoenflies<sup>106</sup> a signalé une exception. Si  $\varrho = \varrho'$ , auquel cas les courbes polaires ont alors un contact plus intime, la trajectoire de tout point de la figure possède un rebroussement.

Les points de la tangente aux courbes polaires sont sur leurs trajectoires des points de rebroussement d'espèce supérieure. Un examen plus général de la question est dû à R. Mehmke et à L. Allievi. L. Allievi<sup>107</sup> a en particulier discuté les singularités des courbes trajectoires dans les cas où les courbes  $w_2$  et  $k_2$  se décomposent. R. Mehmke<sup>108</sup> représente les coordonnées des trajectoires par des séries qui procèdent suivant les puissances de l'angle de rotation; il trouve, en particulier, que même lorsque les courbes polaires et les trajectoires offrent des singularités, il existe encore une correspondance  $\mathfrak{V}^{(2)}$  pour définir les relations de courbure ainsi qu'un cercle analogue au cercle des inflexions pour les trajectoires des points duquel se présentent des singularités encore plus élevées.

R. Mehmke a étendu ses considérations au cas où le pôle est rejeté à l'infini<sup>109</sup>. R. Mehmke et R. Müller ont enfin aussi étudié les singularités des courbes polaires elles-mêmes<sup>110</sup>.

15. Questions métriques et constructives. Le mouvement plan de  $\sigma$  est pleinement défini (au point de vue géométrique) si l'on connaît deux courbes trajectoires ou, plus généralement, deux couples de courbes conjuguées<sup>111</sup>. Par le moyen de deux couples de courbes conjuguées

105) La tangente au point de rebroussement coupe les courbes polaires à angle droit. Une exception survient, si par exemple, une spirale logarithmique roule sur un cercle; la trajectoire du point asymptotique n'a pas de rebroussement et on peut faire en sorte que l'angle sous lequel elle coupe le cercle ait telle valeur qu'on voudra, grâce à un choix convenable du rayon.

106) Geometrie der Bewegung<sup>94</sup>, p. 46; Géom. du mouvement<sup>95</sup>, p. 51.

107) Biella piana<sup>99</sup>, p. 3 et suiv.

108) Z. Math. Phys. 35 (1890), p. 1 et 65. La  $\mathfrak{V}^{(2)}$  peut dégénérer, alors il n'y a de courbure finie que pour les points de la ligne exceptionnelle. G. Koenigs [Cinématique<sup>19</sup>], p. 154] a donné des séries de puissances dont les coefficients sont formés avec  $v_x, v_y, j_{1x}, j_{1y}, \dots$  [n° 16].

109) Z. Math. Phys. 35 (1890), p. 23. Tous les points passent par des singularités de même nature, sauf une droite dont les trajectoires des points présentent des singularités plus élevées.

110) Z. Math. Phys. 35 (1890), p. 21; Gelenkviereck<sup>109</sup>, p. 59.

111) Les trajectoires et les courbes enveloppes sont un exemple simple des transformations de contact de S. Lie. Si en effet à tout point de  $\sigma$  on fait

ou de leurs centres de courbure  $A, A'$  et  $B, B'$  le pôle  $O$  se trouve défini ainsi que la correspondance quadratique  $\mathfrak{V}^{(2)}$ .

Pour les dépendances *métriques* et *constructives* il existe une formule déjà connue de *L. Euler*<sup>112</sup> retrouvée par *F. Savary*<sup>113</sup> et généralisée plus récemment, ainsi qu'une construction qui remonte à *E. Bobillier*<sup>114</sup>. La première exposition systématique de l'ensemble de ces matières paraît due à *S. H. Aronhold*<sup>115</sup>; ce géomètre apprit à déduire les propositions qui s'y rapportent des faits plus généraux d'ordre projectif. Il remarque d'abord que sur toute droite issue de  $O$  (rayon normal)  $l$ , les points correspondants de  $\mathfrak{V}^{(2)}$  engendrent deux séries projectives de points dont les points de fuite sont situés sur  $w_2$  et sur  $r_2$ . Il en résulte, si  $s$  est l'arc de la courbe polaire, que l'équation d'Euler-Savary prend la forme<sup>116</sup>

$$\left(\frac{1}{OA} + \frac{1}{OA'}\right) \cos(l, n) = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{OV} = \frac{d\theta}{ds} = \frac{\omega}{u} \quad (117).$$

correspondre dans  $\sigma$  sa trajectoire, cette correspondance définit une transformation de contact. Il correspond à une courbe  $c$  de  $\sigma$  l'enveloppe  $c'$  des trajectoires de tous ses points qui est en même temps l'enveloppe de la courbe  $c$ . Voir *S. Lie* et *G. Scheffers*, *Geometrie der Berührungstransformationen* 1, Leipzig 1896, p. 66.

112) *Novi Comm. Acad. Petrop.* 11 (1765), éd. 1767, p. 207.

113) Voir une remarque de *M. Chasles* [*J. math. pures appl.* (1) 10 (1845), p. 204] comme aussi *J. N. Haton de la Goupillière*, *Traité des mécanismes*, Paris 1864, p. 107.

114) *Cours de géométrie* (12<sup>e</sup> éd.) Paris 1870, p. 232; *G. Koenigs* [*Bull. sc. math.* (2) 31 (1907), p. 29] a donné une démonstration cinématique directe de cette construction fondée sur la composition des vitesses.

115) *Kinematische Geom.*<sup>98</sup> [*Verh. Beförd. Gewerbefleißes* 51 (1872), p. 142].

116) *A. Mannheim*, *J. Éc. polyt.* (1) cah. 37 (1858), p. 179;  $u$  est la vitesse du centre instantané sur chaque courbe polaire en sorte que  $u = \frac{ds}{dt}$ ;  $\theta$  est l'angle de rotation et  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  la vitesse angulaire.

117) Dans son *Mémoire sur les courbes conjuguées*, *G. Koenigs* [*Mém. présentés Acad. sc. Paris* (2) 35, mém. n° 1 publié en 1910, p. 149] a remarqué qu'en écrivant la relation d'Euler-Savary sous cette forme on compte dans deux sens positifs différents les distances des points  $A, A'$  au point  $O$ . Si l'on adopte un même sens positif pour  $OA$  et  $OA'$ , il faut, dans la formule, changer le signe à la fois de  $OA$  et de  $\rho$ , en sorte que l'on a alors

$$\left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OA'}\right) \cos(l, n) = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}.$$

Cette forme de la relation projective entre  $A$  et  $A'$  met en évidence ce fait caractéristique que les points doubles sont confondus et confondus avec le point  $O$ . Dans ce mémoire et dans d'autres ultérieurs, *G. Koenigs* [*C. R. Acad. sc. Paris* 152 (1911), p. 1463] a montré la persistance de ce caractère d'avoir leurs éléments doubles coïncidants dans toutes les relations projectives qui se rencontrent dans ces questions variées de courbures.

La construction de *Bobillier* de la tangente  $t$  aux courbes polaires en partant de couples de points  $A, A'$  et  $B, B'$  s'appuie sur ce théorème (fig. 1) que  $AB$  et  $A'B'$  se coupent sur un axe fixe  $c$  (axe de collinéation) du moment où les points  $A, A'$  et  $B, B'$  demeurent sur deux normales fixes  $l_a, l_b$ ; en outre, on a<sup>118</sup>)

$$\sphericalangle(l_a) = \sphericalangle(l_b, c)$$

d'où résultent encore une suite de résultats constructifs<sup>119</sup>.

Pour la construction des rayons de courbure des trajectoires polaires on peut utiliser les développées des courbes enveloppes [n° 14] ou la courbe  $k_2$ ; ces constructions sont équivalentes. *M. Grübler*<sup>120</sup>) a établi une formule correspondante. *R. Müller*<sup>121</sup>) a, au moyen des pôles d'inflexion et des cercles d'inflexion supérieurs [n° 14], établi des formules et des constructions pour déterminer les courbures de la première développée et des développées supérieures des courbes enveloppes.

Une représentation de la génération de  $k_3$  fondée sur les propriétés cinématiques, a été donnée par *R. Müller*<sup>122</sup>). Le centre focal est constructible du moment que sur deux rayons normaux on se donne un point  $K$  de  $k_3$ <sup>123</sup>). Si l'on connaît, pour un couple de courbes conjuguées, la courbure propre à chacune, ainsi que celle de leurs développées, alors le couple correspondant  $K, K'$  est constructible. *M. Grübler* a donné les formules correspondantes<sup>99</sup>).

L'équation de la courbe peut être mise du reste sous une forme simple. Pour le cas de la bielle et manivelle elle a été donnée par *C. Rodenberg*<sup>123</sup>) et pour le cas général par *M. Grübler*<sup>99</sup>). Les para-

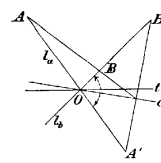


Fig. 1.

118) Voir aussi *E. Habich*, *Nouv. Ann. math.* (3) 1 (1882), p. 460.

119) Comme  $\mathfrak{V}^2$  et le cercle des inflexions sont définis l'un et l'autre, du moment où  $w_2$  est connu, on peut construire  $A'$  au moyen de  $A$  et inversement aussi. De là résultent plusieurs constructions; la plus simple a été donnée par *M. Grübler*, *Z. Math. Phys.* 29 (1884), p. 310. Voir aussi *Ph. Gilbert*, *Ann. Soc. scient. Bruxelles* 2<sup>e</sup> (1877/8), p. 81/8.

120) *Z. Math. Phys.* 34 (1889), p. 309.

121) *Id.* 36 (1891), p. 193, 267; *Gelenkviereck*<sup>109</sup>), p. 48 et suiv.

122) *Z. Math. Phys.* 40 (1895), p. 351. La courbe  $k_3$  est engendrée par un faisceau de cercles tangents et un faisceau de rayons passant chacun au centre du cercle. Le sommet du faisceau s'appelle centre focal, la droite lieu du centre du cercle s'appelle axe focal.

123) Voir *M. Grübler* [*Z. Math. Phys.* 34 (1889), p. 309] et aussi *L. Allievi* [*Biella plana*<sup>99</sup>), p. 35].

mètres figurant dans l'équation s'expriment de la façon la plus simple au moyen des rayons de courbures  $\rho, \rho'$  des trajectoires polaires et du diamètre  $\delta$  du cercle des inflexions<sup>124</sup>). Posons

$$\frac{3}{R} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\delta}, \quad \frac{3}{R'} = \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\delta}, \quad \frac{3}{S} = \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{d\sigma};$$

les équations de  $k_3$  et de  $k_3'$  sont

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R \sin \varphi} + \frac{1}{S \cos \varphi}, \quad \frac{1}{r'} = \frac{1}{R' \sin \varphi} + \frac{1}{S \cos \varphi}.$$

Les trois manières différentes possibles de décomposition de  $k_3$  se présentent quand un ou plusieurs des paramètres  $R, R', S$  deviennent infinis<sup>125</sup>). En particulier elle dégénère en  $g_\infty$  et une hyperbole équilatère si  $O$  est rejeté à l'infini: alors les paramètres sont infinis, de façon cependant que  $\frac{R^2}{S^3} = k$  reste fini<sup>126</sup>).

Enfin il convient de mentionner aussi l'équation biquadratique dont dépendent les quatre points  $B_i$ . Ces points donnent lieu aux relations

$$\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2 + \operatorname{tg} \varphi_3 + \operatorname{tg} \varphi_4 = \frac{R}{S} + \frac{R'}{S} = \cot \varphi_F + \cot \varphi_{F'},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \varphi_2 \operatorname{tg} \varphi_3 \operatorname{tg} \varphi_4 = \frac{R}{S} \cdot \frac{R'}{S} = \cot \varphi_F \cdot \cot \varphi_{F'}.$$

où  $\varphi_F$  et  $\varphi_{F'}$  sont les angles des droites allant de  $O$  aux centres focaux de  $k_3$  et  $k_3'$  avec la tangente aux courbes polaires<sup>127</sup>).

**16. Vitesse et accélérations du mouvement plan.** Si un plan  $\sigma$  se meut sur lui-même autour d'un point fixe et si  $\theta$  est l'angle de rotation, les dérivées

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad \lambda^{(1)} = \frac{d\omega}{dt}, \quad \lambda^{(2)} = \frac{d^2\omega}{dt^2}, \quad \dots, \quad \lambda^{(n)} = \frac{d^n\omega}{dt^n}$$

représentent la *vitesse angulaire* et la première, la seconde, la  $n^{\text{ème}}$  *accélération angulaire*.

124) C. Rodenberg, Z. Math. Phys. 36 (1891), p. 267; 37 (1892), p. 145.

125)  $k_3$  peut dégénérer sans que  $k_3'$  le fasse; quand  $k_3$  se décompose en  $t, n$  et  $g_\infty$ ,  $k_3'$  se décompose en  $t$  et  $w_3'$ . Tout point de  $w_3'$  décrit une ondulation. Voir en particulier C. Rodenberg<sup>121</sup>) et L. Allievi, Biella piana<sup>99</sup>), p. 55.

126) L. Allievi, Biella piana<sup>99</sup>), p. 100 et suiv. Le rayon de courbure  $\rho$  d'un point  $A$  est défini par

$$\rho y = k' - k,$$

où  $y$  est la perpendiculaire abaissée de  $A$  sur  $t$ .

127) R. Müller, Z. Math. Phys. 37 (1892), p. 214; L. Allievi, Biella piana<sup>99</sup>), p. 42, 56, 60. On trouve là encore d'autres formules où entrent  $R, R', S$  ainsi que  $\varphi_i, \varphi_F$  et  $\varphi_{F'}$ .

Ces notions ont de l'importance pour la définition de la vitesse et des accélérations de chaque point de la figure.

Les théorèmes du n° 14 donnent, à propos de la distribution des vitesses dans le mouvement plan, ce résultat<sup>128</sup>) que le pôle  $O$  est le point pour lequel  $v=0$ ; si  $\alpha$  et  $\beta$  sont les coordonnées de  $O$ , alors on a, par rapport à des axes  $x, y$  fixes dans  $\sigma$  et pour tout point  $A(x, y)$ ,

$$v_x = -\omega(y - \beta), \\ v_y = +\omega(x - \alpha).$$

Si  $P$  est un point de contact d'une droite  $g$  avec son enveloppe, sa vitesse  $v_g$  est sur la droite  $g$ ; pour tout autre point  $A$  de  $g$  la projection de  $v$  sur la droite  $g$  a la valeur constante  $v_g$ .

Des considérations analogues sur la distribution des accélérations dans  $\sigma$  ont été présentées pour la première fois par J. A. Ch. Bresse<sup>129</sup>). En appelant  $j$  et  $j_n$  l'accélération tangentielle et l'accélération normale, il a trouvé que les points  $j_n=0$  et  $j=0$  sont les uns et les autres respectivement sur un cercle et ces deux cercles passent par le point  $O$  (fig. 2), le premier de ces cercles est le cercle des inflexions, le second le coupe orthogonalement et admet comme diamètre  $\frac{\omega}{\omega'} \omega^{130}$ ). Leur point de rencontre  $G$ , pour lequel  $j=0$ , s'appelle le *centre des accélérations*<sup>131</sup>). Sa signification plus large consiste en ce que sur tout cercle de centre  $G$  l'accélération  $j$  est constante et proportionnelle à la distance  $GA=r$  et que, en tous les points d'une droite issue de  $G$ , l'accélération  $\vec{j}$  fait avec cette droite un angle constant.

W. Schell<sup>132</sup>) a aussi attiré l'attention sur certaines propriétés du point  $H$ , intersection de la tangente  $t$  aux courbes polaires avec le cercle  $j_i=0$ .

D'ailleurs l'accélération  $\vec{j}$  se décompose en deux composantes rec-

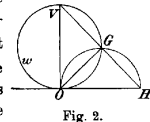


Fig. 2.

128) Tout théorème du n° 14 sur les tangentes aux trajectoires est aussi un théorème sur la direction des vitesses.

129) J. Éc. polyt. (1) cah. 35 (1853), p. 89; Voir aussi G. R. Dahlander, Öfversigt Vetensk.-Akad. förhandl. (Stockholm) 25 (1868), p. 79; T. Ritterhaus, Der Civil-Ingenieur 24 (1873), p. 1.

130) Pour chaque cercle du faisceau correspondant, l'angle  $(\vec{v}, \vec{j})$  est constant [L. Burmester, Der Civilingenieur 24 (1873), p. 157]. Au sujet de ces cercles voir aussi J. de Vries, Monath. Math. Phys. 8 (1897), p. 138.

131) L. Lecornu [Nouv. Ann. math. (3) 10 (1891), p. 5] a étudié les courbes décrites par le point  $G$ . Si  $\omega$  est constant,  $G$  coïncide avec  $V$ .

132) Z. Math. Phys. 19 (1874), p. 185. On a  $OH \cdot l = \omega u$  (cf. note 116).

tangulaires  $\omega^2 r$  et  $\lambda r$ ; d'où résultent pour  $\varphi$  d'autres décompositions susceptibles de définitions géométriques simples<sup>133</sup>).

Les théorèmes précédents peuvent être généralisés, en sorte qu'il existe pour chaque accélération  $\vec{j}^{(n)}$  un point  $j^{(n)} = 0$ , tel que sur tout cercle ayant ce point pour centre  $j^{(n)}$  soit constant et que de plus, pour tous les points situés sur une droite<sup>134</sup> issue de ce point,  $\vec{j}^{(n)}$  ait une direction constante; ce point est le *pôle de l'accélération d'ordre  $n$* . Il en résulte que pour  $\vec{j}^{(n)}$  les mêmes modes de décomposition en composantes simples se retrouvent qui ont été déjà rencontrés pour  $\vec{j}$  lui-même. Les formules qui permettent de mettre tous ces faits en évidence ont été données par Ph. Gilbert<sup>135</sup>; en appelant  $\vec{j}_0^{(n)}$  l'accélération d'ordre  $n$  de  $O$  on a

$$j_x^{(n)} = p_n(x - \alpha) - q_n(y - \beta) + j_{0,x}^{(n)}$$

$$j_y^{(n)} = q_n(x - \alpha) + p_n(y - \beta) + j_{0,y}^{(n)}$$

et si  $\alpha_n, \beta_n$  sont les coordonnées de  $G_n$  centre de l'accélération d'ordre  $n$ , on trouve

$$j_x^{(n)} = p_n(x - \alpha_n) - q_n(y - \beta_n),$$

$$j_y^{(n)} = q_n(x - \alpha_n) + p_n(y - \beta_n);$$

et  $j_0^{(n)}, \alpha_n, \beta_n$  comme  $p_n, q_n$  dépendent de  $\alpha, \beta, \omega$  et de leurs dérivées au moyen de formules de récurrence simples. Elles se simplifient beaucoup quand  $\omega$  a une valeur constante, ce qui suffit pour l'étude des relations purement géométriques.

La source géométrique des théorèmes concernant les  $\vec{j}^{(n)}$  est la suivante, qui a été pour la première fois utilisée méthodiquement par L. Burmester<sup>136</sup>. Si l'on mène par  $A$  des vecteurs équipollents aux vecteurs  $\vec{v}, \vec{j}, \dots$ , les extrémités forment chacune un système  $\sigma$ , un système  $\sigma_j, \dots$ , semblable au système  $\sigma$ . Il existe donc pour  $\sigma$  et  $\sigma_j$ , pour  $\sigma$  et  $\sigma_j, \dots$  un point double, à savoir le point  $v = 0$ , le point  $j^{(1)} = 0, \dots$ . De là s'ensuivent les théorèmes généraux. Cette

133) Voir par ex. W. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, (2<sup>e</sup> éd.) 1, Leipzig 1879, p. 441 et suiv. On y considère aussi les points  $j^{(1)} = \text{const.}$  et  $j_t^{(1)} = \text{const.}$ ; cf. L. Burmester, Der Civilingenieur 24 (1878), p. 147.

134) Ce théorème a été donné par A. Grouard, Bull. Soc. philom. Paris (6) fasc. 7 (1870), p. 115/8; l'Institut 38 (1870), p. 172.

135) Ann. Soc. scient. Bruxelles 13<sup>e</sup> (1888/9), p. 214 et suiv.; cf. Memorie Accad. pontif. Nuovi Lincei 3 (1888), p. 213/29. Ph. Gilbert définit aussi le lieu des points  $G^{(n)}$  et donne des applications géométriques.

136) Der Civilingenieur 24 (1878), p. 147. Voir aussi R. Mehmke, Der Civilingenieur 29 (1888), p. 487. Dans R. Mehmke se trouve le même théorème, pour le cas où les vecteurs  $\vec{v}$  sont portés à partir d'un même point.

méthode sert aussi à déduire les  $\vec{v}$  et les  $\vec{j}$  d'un point quelconque quand on connaît ceux d'un point déterminé.

On peut rattacher à cette méthode un procédé dont l'application méthodique remonte à J. Schadwill<sup>137</sup>. Si l'on construit sur  $OA$  un vecteur  $AL = \vec{v}$  (vitesse perpendiculaire à la droite), les points  $L$  forment un système  $\sigma_v$  homothétique à  $\sigma$ . Ce procédé facilite grandement la construction de  $\vec{v}$ .

D'une autre manière H. Mohr<sup>138</sup> fait usage des relations entre  $\sigma_v$  et  $\sigma$ . Il porte, pour chaque point  $A$ , à partir d'un point arbitraire  $M$ , un vecteur  $MA_v$  égal et parallèle à la vitesse. Il obtient ainsi un système  $\sigma_v$  semblable à  $\sigma$  et tel que  $A_v B_v$  est rectangulaire avec  $AB$ ; ensuite l'accélération  $\vec{j}$  du point  $A$  peut être considérée comme la vitesse de  $A_v$  par rapport au système variable avec similitude  $\sigma_v$ ; on peut donc la construire d'une façon analogue sous forme d'un vecteur issu d'un point  $N$ ; on obtient ainsi un système encore semblable à  $\sigma_v$  et à  $\sigma$ . Cette construction est dans certains cas de quelque intérêt.

17. Propriétés générales des courbes conjuguées. Au n° 14 on a appelé *conjuguées* deux courbes des plans  $\sigma, \sigma'$  qui restent tangentes au cours du mouvement. Les équations générales qui expriment la dépendance existant entre les courbes polaires  $p, p'$  (qui roulent sans glisser), les trajectoires des points et les couples de courbes conjuguées ont été données depuis longtemps par J. L. Lagrange<sup>139</sup>. Beaucoup plus récemment S. H. Aronhold<sup>140</sup> et A. Cayley<sup>141</sup> leur ont donné des formes plus cinématiques et moins implicites.

Depuis, cette question a donné lieu à des formes d'exposition extrêmement variées. Sophus Lie, en rattachant aux transformations de contact la correspondance qui unit deux courbes conjuguées a placé le problème sur son véritable terrain et rendu ainsi intuitifs les plus essentiels résultats.

Si l'on appelle  $p, p'$  les courbes polaires, à tout point  $M$  de  $p$  correspond sur  $p'$  le point  $M'$  qui, au cours du roulement, doit venir

137) Das Gliedverhältnis als Grundlage der Kinematik [Verhandl. des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleißes 55 (1876), p. 407].

138) Der Civilingenieur 33 (1887), p. 631.

139) Nouv. Mém. Acad. Berlin 10 (1779), éd. 1781, p. 133; Œuvres 4, Paris 1869, p. 601. Voir aussi N. Nicolaidès [Théorie du mouvement d'une figure plane dans son plan, Paris 1863] et E. Cesàro [Lezioni di geometria intrinseca], p. 65].

140) Communiqué par R. Sellenin, Z. Math. Phys. 28 (1883), p. 116.

141) Quart. J. pure appl. math. 16 (1879), p. 1. Voir aussi J. N. Haton de la Goupillière, C. R. Acad. sc. Paris 85 (1877), p. 895; 86 (1878), p. 527.

coïncider avec  $M$ ; les arcs décrits sur  $p, p'$  par  $M, M'$  respectivement sont égaux, en vertu du non-glissement. Si l'on se trouve à l'époque où  $p$  et  $p'$  se touchent par les points  $M$  et  $M'$  et si  $c, c'$  sont deux courbes conjuguées se touchant par un point qui s'appelle  $P$  sur  $c$  et  $P'$  sur  $c'$ , la normale en ce point aux deux courbes  $c$  et  $c'$  passe au point  $M, M'$ , centre instantané actuel. Si l'on mène la tangente en  $M$  et  $M'$  aux courbes  $p, p'$ , le rayon  $MP$  fait avec cette tangente un angle  $\theta$  tandis que sa longueur peut être désignée par  $r$ . Imaginons alors que l'on sépare les plans  $\sigma, \sigma'$ ; nous aurons dans  $\sigma$  la courbe  $p$  et la courbe  $c$ , sur celle-ci un point  $P$ , de plus la normale à  $c$  en  $P$  passe par le point  $M$  de  $p$ . Pour construire alors dans  $\sigma'$  le point  $P'$  de  $c'$  et réaliser ainsi la transformation qui fait passer de  $c$  à  $c'$ , il faudra prendre sur  $p'$  le point  $M'$  qui correspond au point  $M$  de  $p$ , mener la droite  $M'P'$  qui fait avec la tangente en  $M'$  à  $p'$  le même angle  $\theta$  que fait  $MP$  avec la tangente à  $p$  en  $M$  (en ayant soin d'observer la disposition des angles) et enfin, sur la droite  $M'P'$  ainsi construite, prendre  $M'P' = MP = r$ . Le point  $M'$  est le point cherché de la courbe  $c'$  et, qui plus est,  $P'M'$  est la normale en ce point à cette courbe.

Si l'on réfléchit à cette construction, on voit que:

1°) elle ne fait pas seulement intervenir la position du point  $P$  de la courbe  $c$ , mais aussi la normale  $PM$  à cette courbe, ou, ce qui revient au même, la tangente;

2°) si l'on substitue à  $c$  une courbe  $c_1$  qui la touche au point  $P$ , on aura le même point  $P'$  et la même normale  $P'M'$  en sorte que la courbe normale  $c_1'$  touche  $c'$  au point  $P'$ .

En résumé, la transformation entre  $c, c'$  n'est pas une simple transformation ponctuelle et elle transforme deux courbes tangentes en deux autres courbes tangentes; c'est donc une transformation de contact.

Si l'on considère le cercle<sup>142)</sup>  $\gamma$  de centre  $M$  qui passe en  $P$ , ce cercle touche en ce point la courbe  $c$ ; il est égal au cercle  $\gamma'$  analogue, de centre  $M'$ , qui passe en  $P'$  et y touche  $c'$ . La succession de ces cercles  $\gamma$ , tangents à  $c$  et dont  $p$  est le lieu des centres, constitue une *file de cercles*  $\gamma$ . Le plan  $\sigma$  donne lieu à une file de cercles  $\gamma'$  analogues tangents à  $c'$  et dont  $p'$  est le lieu des centres.

Supposons que la courbe  $c$  soit réalisée sous la forme d'un fil

142) La considération de ces cercles et cette construction sont dues à J. V. Poncelet [Cours de mécanique appliqué aux machines, Metz 1826; (nouv. éd.) publ. par F. X. Kretz 1, Paris 1874, p. 208]. S. Lie [dans S. Lie et G. Scheffers, *Berührungstransf.*<sup>143)</sup> 1, p. 66] a ensuite rattaché la question aux transformations de contact.\*

souple et inextensible, portant en chacun de ses points, attaché par son centre  $M$ , le cercle  $\gamma$  correspondant, et déformons la courbe, chaque point  $M$  emportant le cercle  $\gamma$  dont il est le centre. Si l'on fait prendre à la courbe  $c$  la forme de la courbe  $c'$ , le point  $M$  vient en  $M'$ , le cercle  $\gamma$  vient sur le cercle  $\gamma'$ , la file des cercles  $\gamma$  devient celle des cercles  $\gamma'$  et  $c'$  devient l'une des branches de l'enveloppe de ces cercles, de même que  $c$  était l'une des branches de l'enveloppe de la file de cercles  $\gamma$ . La considération de la disposition des angles permet de lever l'ambiguïté tenant au choix à faire entre les deux branches de l'enveloppe.

Cette théorie rend intuitif le théorème que si  $p, p', p''$  sont trois courbes dont les points  $M, M', M''$  se correspondent de telle manière que les arcs correspondants sur  $p, p', p''$  soient égaux, si l'on fait rouler l'une sur l'autre  $p$  et  $p'$ ,  $p$  et  $p''$  et si  $c$  et  $c''$  sont dans ces deux mouvements les profils conjugués d'un même profil  $c$  solidaire de  $p$ ,  $c'$  et  $c''$  sont aussi deux profils conjugués quand on fait rouler  $p'$  sur  $p''$ , sous la condition que, dans ce roulement, les points correspondants  $M', M''$  soient ceux qui sont venus en contact avec un même point  $M$  de  $p$  dans les deux roulements précédents.

Ce théorème devient évident si on le traite au point de vue de la transformation des files de cercles par le passage de la ligne des centres de la forme  $p$  à la forme  $p'$ , puis à la forme  $p''$ .

Si l'on prend pour  $c$  un point, ou cercle infiniment petit,  $c'$  devient la trajectoire de ce point, en sorte que les questions de trajectoires sont des cas particuliers des questions de courbes conjuguées.

Le théorème précédent, où  $c$  est un point et  $c', c''$  ses trajectoires dans les roulements de  $p$  sur  $p'$  ou sur  $p''$ , montre que ces trajectoires sont conjuguées dans un roulement convenable de  $p'$  sur  $p''$ , ce qui est un théorème dû à Ch. E. L. Camus<sup>143)</sup>. Ce théorème fournit un procédé de construction des courbes conjuguées. Il est particulièrement utile dans le tracé des engrenages à roues circulaires droites, comme on le verra dans l'article IV 6.\*

E. Delassus<sup>144)</sup> s'est posé ce problème: étant donnés trois plans  $\sigma, \sigma', \sigma''$  mobiles l'un sur l'autre de la façon la plus générale, trouver s'il y a un point  $A$  de  $\sigma$  qui décrive dans  $\sigma', \sigma''$  deux courbes qui soient conjuguées dans le mouvement  $[\sigma' \sigma'']$ . Il trouve que le point doit être pris sur la ligne de jonction des centres instantanés. Si les

143) Ch. E. L. Camus, Sur la figure des dents des roues et des aîles des pignons, pour rendre les horloges plus parfaites [Hist. Acad. sc. Paris 1733, éd. 1735, M. p. 117].\*

144) E. Delassus, Bull. sc. math. (2) 22 (1898), p. 251.\*

centres instantanés coïncidaient, on serait dans le cas du théorème de Camus. Ce cas exclu, si tous les points de la droite de jonction des pôles doivent vérifier la condition, cette droite est elle-même une courbe polaire pour les mouvements  $[\sigma, \sigma']$ ,  $[\sigma, \sigma'']$ , en sorte que le mouvement  $[\sigma', \sigma'']$  est celui de deux plans solidaires de deux courbes qui roulent sans glisser sur une même droite. Il peut se faire aussi qu'un seul point de la ligne droite qui joint les pôles possède la propriété demandée. On reviendra sur ces questions [cf. IV 6\*] à propos de la construction effective des profils des roues dentées.

**18. Mouvements spéciaux dans le plan.** Les applications particulières, traitées au point de vue géométrique, des principes et des résultats généraux qui précèdent, sont extrêmement nombreuses. Certaines d'entre elles touchent de près aux nécessités techniques et ont été inspirées par elles.\*

Parmi les mouvements spéciaux, les plus simples et les plus intéressants sont ceux aux cours desquels des points demeurent sur des droites ou sur des cercles ou dans lesquels des droites passent par des points fixes; tels sont en particulier le mouvement de l'ellipsographe et le mouvement conchoïdal.

Le mouvement de l'ellipsographe est défini par la condition que deux points  $A$  et  $B$  de la figure mobile décrivent des lignes droites. Les courbes polaires sont alors deux cercles dont l'un roule intérieurement sur l'autre maintenu fixe et dont le rayon est double du sien. Le cercle mobile lui-même constitue le cercle des inflexions, ce qui explique que chacun des points de sa circonférence décrive un diamètre du cercle fixe. Tout autre point du plan mobile  $\sigma$  décrit dans le plan fixe  $\sigma'$  une ellipse<sup>145</sup>. De là le nom d'*ellipsographe*.

Sur ce mouvement est fondé le compas elliptique qui a été réalisé sous diverses formes. Sur son principe repose également le tour elliptique dont la conception remonte à *Léonard de Vinci*. Dans ce mouvement toute droite de  $\sigma$  enveloppe soit une hypocycloïde à quatre rebroussements (application du théorème de Camus) lorsqu'elle est un diamètre du cercle roulant, soit une courbe parallèle à une telle hypocycloïde.

Le mouvement inverse du précédent n'est pas sans intérêt; les trajectoires des points sont des limaçons de Pascal et en particulier

145) Cette génération de l'ellipse était connue des anciens. Voir *M. Chasles*, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, (2<sup>e</sup> éd.) Paris 1876, p. 89. Modèles par *W. von Dyck*, Katalog math. und math.-phys. Modelle, Apparate und Instrumente, Munich 1892, p. 341 et suiv.

des cardioïdes tandis que les enveloppes des droites sont des points ou des cercles.

Un autre type important de mouvement est le mouvement conchoïdal, type auquel appartient du reste le dernier mouvement considéré. Dans le mouvement conchoïdal une droite  $g$  du plan  $\sigma$  passe par un point fixe  $G'$  du plan  $\sigma'$  tandis que un point  $A$  de la droite  $g$  décrit une courbe directrice  $a'$ . Les deux cas les plus simples sont ceux où  $a'$  est soit une droite<sup>146</sup>) soit une circonférence de cercle. Lorsque  $a'$  est une droite les courbes polaires sont une parabole  $p_2$  et une quartique unicursale  $c_4$ <sup>147</sup>).

Il est clair que lorsqu'une courbe est susceptible d'une définition cinématique, la construction de son centre de courbure et de ceux de ses développées peut être donnée par la théorie générale. A cet égard, il convient de signaler en particulier les nombreux travaux de *A. Mannheim*<sup>148</sup>).

A cet ordre d'idées peuvent être rattachées les définitions cinématiques des *développantes*, des *podaires* et des *courbes focales*, en entendant par ce dernier nom les enveloppes de rayons qui issus d'un point se sont réfléchis sur une courbe donnée.

En ce qui concerne les développantes, la courbe fondamentale et sa tangente sont précisément les courbes polaires.

Par contre le rattachement à ces théories des courbes podaires et des courbes focales repose sur le théorème suivant<sup>149</sup>): si l'on fait rouler une courbe  $p$  sur une courbe égale  $p'$  de manière que ces deux courbes restent symétriques par rapport à leur tangente commune, tout point  $M$  solidaire de  $p$  reste symétrique d'un point  $M'$  solidaire de  $p'$  par rapport à la tangente commune. Il en résulte que sa trajectoire est l'homothétique [pôle d'homothétie  $M'$ , rapport de similitude égal à 2] de la podaire de  $M'$  par rapport à la courbe  $p'$ . De plus la développée de la trajectoire du point  $M$  est la focale du point  $M'$  par réflexion sur la courbe  $p'$ .

Les mouvements épicycloïdaux sont ceux où les courbes polaires sont deux cercles; le mouvement de l'ellipsographe est l'un d'eux. Ces

146) Dans le premier cas on a des conchoïdes ordinaires et dans le second des conchoïdes de cercle.

147) Voir *S. Roberts*, Proc. London math. Soc. (1) 7 (1876/6), p. 216.

148) On trouvera ces questions dans *A. Mannheim*, Principes et développements de géométrie cinématique, Paris 1894, p. 2/75.

149) Ces théorèmes sont de *A. Quelelet*, Nouv. Mém. Acad. Bruxelles 3 (1826), p. 89; 5 (1829), p. 6. Pour l'exposition cinématique voir *A. Mannheim*, Géométrie cinématique<sup>148</sup>), p. 36, 66; *O. Kessler*, Z. Math. Phys. 23 (1878), p. 1.

mouvements tiennent une place prépondérante en Cinématique pour plusieurs raisons. D'abord parce qu'ils interviennent directement dans la plupart des dispositifs appelés *engrenages*. En second lieu à cause de l'ancienneté de leur découverte et des études multiples et variées auxquelles ils ont depuis longtemps donné lieu. Enfin une troisième raison c'est que, de même qu'au point de vue des vitesses et des propriétés infinitésimales du premier ordre, on peut substituer au mouvement de  $\sigma$  par rapport à  $\sigma'$  un mouvement de rotation tangent, de même au point de vue du second ordre, on peut substituer aux courbes polaires  $p$ ,  $p'$  deux courbes ayant avec elles un contact du second ordre et en particulier leurs cercles osculateurs. De la sorte, les propriétés du second ordre dans le cas général sont les mêmes que celles d'un certain mouvement épicycloïdal, en sorte qu'un résultat acquis en ce domaine particulier peut profiter au cas général<sup>150</sup>).

Le cas limite, où le cercle fixe est une ligne droite, donne lieu au mouvement cycloïdal, au cours duquel tout point de la circonférence du cercle roulant décrit une *cycloïde*, tandis que tout autre point décrit une *cycloïde allongée* ou *accourcie* selon qu'il est extérieur ou intérieur au cercle.

Lorsque les deux courbes polaires sont vraiment des cercles, le contact peut être soit extérieur, soit intérieur.

Dans un mouvement épicycloïdal, le diamètre  $\delta$  du cercle  $w_2$  est constant [n° 15]; il en résulte que le point de Ball  $U$  tombe au pôle d'inflexion et que l'enveloppe du cercle des inflexions se décompose en le cercle polaire et en un cercle concentrique à ce dernier. La zone comprise entre ces deux cercles constitue la région lieu des points dont la trajectoire présente des points d'inflexions.

Les points de la circonférence du cercle mobile décrivent des épicycloïdes extérieures ou *épicycloïdes proprement dites* si le contact est extérieur, et des épicycloïdes intérieures ou *hypocycloïdes* lorsque

150) A. Trançon, J. math. pures appl. (1) 10 (1845), p. 154; R. Henning, J. reine angew. Math. 65 (1866), p. 58. A. Mannheim part également du même principe. Voir encore H. Resal, Cinématique<sup>151</sup>), p. 178.

Il y a lieu de mentionner que la loi des courbures ne dépendant que de la fonction  $\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}$  des rayons de courbure  $R$ ,  $R'$  des courbes  $p$ ,  $p'$ , il suffit que cette fonction reste la même pour que la correspondance entre les centres de courbure des profils conjugués reste aussi la même. Voir à ce sujet, G. Koenigs, Cinématique<sup>152</sup>), p. 150. Du reste le raisonnement purement cinématique qui permet d'établir la construction de Savary n'est pas plus compliqué dans le cas général que dans le cas de deux cercles. Voir G. Koenigs, Sur la formule d'Euler-Savary [Bull. sc. math. (2) 31 (1907), p. 29].\*

le contact est intérieur. Ces courbes sont algébriques lorsque le rapport des rayons des cercles est commensurable. Tout autre point de la figure décrit une épicycloïde ou hypocycloïde allongée ou accourcie selon le cas<sup>151</sup>).

Par application de la méthode exposée à la fin du n° 17, on constate que les diamètres du cercle roulant enveloppent, suivant le cas, des épicycloïdes ou des hypocycloïdes et que toute autre droite enveloppe naturellement une courbe parallèle à l'une de celles-ci.\*

Toute courbe épicycloïde ou hypocycloïde est susceptible, comme on le verra dans l'article IV 6\*, d'un double mode de génération. Les propriétés purement géométriques ou purement dynamiques de ces courbes, qui concernent l'évaluation de leurs arcs au moyen des fonctions elliptiques, ainsi que le calcul de leurs aires, et leur intervention dans la théorie des tautochrones ou des brachystochrones, ont fait l'objet d'études qui échappent au présent article et ne sont mentionnées ici que pour mémoire.

Le mouvement d'un plan  $\sigma$  sur un plan  $\sigma'$  est défini par les trajectoires de deux points  $A$ ,  $B$  ou plus généralement par la connaissance de deux courbes conjuguées.

S. Roberts<sup>152</sup>) a d'une façon générale déterminé l'ordre, la classe, les singularités des trajectoires, courbes polaires et enveloppes, du moment que ces nombres sont donnés pour les trajectoires de deux points  $A$  et  $B$ <sup>153</sup>); il a même déterminé le degré de multiplicité des ombilics du plan sur les trajectoires, lorsque ces points appartiennent déjà aux trajectoires données des points  $A$  et  $B$ . Si  $m$ ,  $n$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  sont les ordres et les classes des trajectoires de ces deux points, en général l'ordre et la classe d'une trajectoire quelconque seront  $2mn$  et  $2(mn + m\nu + n\mu)$ .

La méthode repose sur le principe de correspondance de Chasles.

M. Chasles<sup>154</sup>) lui-même a plus tard déterminé l'ordre et la classe

151) F. Reuleaux [Lehrbuch der Kinematik 2, Brunswick 1900, p. 3 et suiv.] donne une discussion détaillée et une nomenclature spéciale de ces courbes.

152) Proc. London math. Soc. (1) 3 (1869/71), p. 268; (1) 7 (1875/6), p. 216. Plusieurs cas particuliers ont été traités par F. Dingeldey, Diss. Leipzig 1885. Voir aussi F. Ebner, Leitfaden der technisch wichtigen Kurven, Leipzig 1906; L. Crelier, Systèmes cinématiques, Paris 1910.\*

153) A. Cayley [Trans. Cambr. philos. Soc. 15 (1889/93), éd. 1894, p. 391/402; Papers 13, Cambridge 1897, p. 505/16] recherche quand il existe pour  $A$  et  $B$  des points de rebroussement ou des points isolés et en fait l'application au mécanisme de bielle et manivelle [cf. IV 6\*].

154) C. R. Acad. sc. Paris 80 (1875), p. 346; 82 (1876), p. 431. Il détermine en particulier la multiplicité de  $g_{\infty}$  comme tangente.



dans les cas où le mouvement se trouve défini soit par l'enveloppe de deux droites soit par l'enveloppe d'une droite et la trajectoire d'un point. *S. Roberts*<sup>152</sup>) de son côté traite peu après ce problème.

**19. Système à bielle et manivelle.** Le mouvement de la bielle est défini par la condition que deux points  $A$  et  $B$  décrivent deux cercles de centres  $A'$  et  $B'$ ; la droite  $AB$  s'appelle la *bielle*. Le mouvement est de même nature que son inverse [n° 3]. Plus généralement chacun des quatre côtés du quadrilatère  $AA'B'B$  peut être pris comme membre fixe<sup>153</sup>) sans que la nature du mouvement de la bielle soit changée.

Au point du vue technique une question intéressante est celle qui consiste à savoir si les points  $A$  et  $B$  parcourent le cercle entier ou non. Le mécanisme est alors soit à mouvement *continu*, soit à mouvement *alternatif*. A cet égard a lieu le théorème suivant: Si un sommet est à révolution complète il en existe un second de même nature; ces deux sommets sont les extrémités du plus petit côté. La condition nécessaire et suffisante à cet effet consiste en ce que la somme du plus petit et du plus grand côté soit au plus égale à la somme des deux autres côtés<sup>154</sup>). Si les deux sommes sont égales, il peut exister des quadrilatères avec trois et quatre sommets à révolution complète. Dans le premier cas il existe deux paires de côtés égaux adjacents et le quadrilatère est un rhomboïde; dans le second cas les côtés égaux ne sont pas adjacents et le quadrilatère est, soit un parallélogramme, soit un contre parallélogramme.

Le mécanisme bielle et manivelles a une importance théorique pour la même raison que les mouvements épicycloïdaux. La correspondance momentanée  $\mathfrak{V}_2$  d'un mouvement arbitraire ne change pas si les trajectoires des points  $A, B$  sont momentanément remplacées par les cercles de centres  $A'$  et  $B'$ . Tout mouvement plan peut ainsi être remplacé, avec une approximation du second ordre, par un mouvement de bielle et manivelles<sup>155</sup>). Mais on peut aller plus loin. On peut

156) Le quadrilatère s'appelle articulation à quatre membres ou quadrilatère articulé; pour les modèles voir *W. von Dyck*, Katalog<sup>145</sup>), p. 348.

156) *F. Grashof*, Theoretische Maschinenlehre 2, Berlin 1883, p. 117; *G. Koenigs* [Cinématique<sup>19</sup>], p. 246] a complètement discuté la question. La discussion donnée par *F. Reuleaux* [Theoretische Kinematik 1, Brunswick 1875, p. 282; Cinématique, Paris 1877, p. 302] est inexacte.

157) Chez *S. H. Aronhold*, Kinematische Geometrie<sup>26</sup>) 2, p. 138] et chez *J. Schadwill* [Gliederweise<sup>127</sup>], p. 378] le système de bielle et manivelles, sous le nom de *quadrilatère de pôles* est le fondement de la théorie. On peut le définir de telle manière que, autour des quatre sommets (pôles), on peut effectuer des rotations dont la somme est nulle. Voir aussi *L. Burmester*, Kinematik<sup>26</sup>), p. 49.

atteindre une approximation du troisième ou du quatrième ordre au moyen du même procédé; il n'y a qu'à prendre, soit des points  $A, B$  de la courbe  $k_3$ ; soit deux des quatre points de Burmester.

*A. Cayley*<sup>158</sup>) a démontré que la trajectoire d'un point solide de la bielle (*courbe de bielle*, *courbe du trois-barre*) est une courbe algébrique plane  $c_6$  d'ordre six, qui admet comme points triples les ombilics du plan et en général encore trois points doubles. Dans le cas où la somme de deux côtés égale celle des deux autres, il survient encore un autre point double auquel cas la courbe  $c_6$  est unicursale [n° 23].

*S. Roberts*<sup>159</sup>) prouva qu'il existe trois foyers<sup>160</sup>) dont deux tombent en  $A'$  et  $B'$  tandis que le troisième  $P'$  est tel que  $A'P'B'$  forme un triangle semblable au triangle  $APB$  (fig. 3). Le cercle circonscrit au triangle  $A'B'P'$  contient en même temps les trois points doubles qui existent en général. *S. Roberts* a aussi déterminé les courbes polaires. Le résultat le plus remarquable qu'il ait mis en évidence, c'est la *triple génération de la courbe de bielle*.

La trajectoire du point  $P$  peut en effet être engendrée de trois manières au moyen d'un quadrilatère articulé et même de telle sorte qu'un côté quelconque du triangle  $A'B'P'$  au lieu du côté  $A'B'$  puisse être pris comme le côté fixe d'un quadrilatère  $A'A_1B_1P'$  ou  $B'B_2A_2P'$ <sup>161</sup>).

Ce théorème a été l'objet d'un grand nombre de démonstrations. Les plus simples en ont été données par *A. Cayley*<sup>162</sup>) et *W. Clifford*<sup>163</sup>). Elles reposent sur la proposition suivante: Par un point  $O$  du plan d'un triangle  $ABC$  menons  $B_1C_1$  parallèle à  $BC$ , qui coupe  $AB$  en  $B_1$ ,  $AC$  en  $C_1$ ;  $C_1A_1$  parallèle à  $CA$ , qui coupe  $BC$  en  $C_1$  et  $BA$  en  $A_1$ ;  $A_1B_1$  parallèle à  $AB$ , qui coupe  $CA$  en  $A_1$  et  $CB$  en  $B_1$ , puis

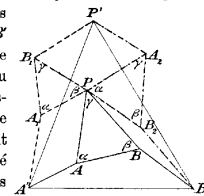


Fig. 3.

158) Proc. Lond. math. Soc. (1) 4 (1871/3), p. 105 [1872]; voir aussi *W. Johnson*, Messenger math. (2) 5 (1876), p. 50.

159) Proc. Lond. math. Soc. (1) 7 (1875/6), p. 14.

160) C'est-à-dire l'intersection des tangentes aux ombilics du plan.

161) On a, dans la figure, tracé en traits différents les trois quadrilatères articulés et leurs lignes de jonction avec le point  $P$ .

162) Proc. London math. Soc. (1) 7 (1875/6), p. 142, 166; (1) 9 (1877/8), p. 27. D'autres démonstrations ont été données par *H. Hart* [Messenger math. (2) 12 (1882/3), p. 32] et *G. Pastore* [Atti Accad. Torino 26 (1890/1), p. 84].

163) Voir aussi *J. Kleiber*, Z. Math. Phys. 36 (1891), p. 296.

réalisant sous forme de tiges de longueurs invariables d'une part les droites  $B_2OC_2$ ,  $C_1OA_2$ ,  $A_2OB_1$ , ainsi que les côtés des trois parallélogrammes  $AA_2OA_3$ ,  $BB_2OB_1$ ,  $CC_1OC_2$  nous articulons ces parallélogrammes en leurs sommets; ce système articulé est susceptible de se déformer et les trois points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ne cessent, au cours de cette déformation, de figurer un triangle semblable à celui qu'ils formaient au début. Il en résulte que si l'on fixe deux des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  le troisième se trouve aussi fixé tandis que le point  $O$  décrit une courbe qui apparaît de trois façons comme solidaire d'une bielle<sup>165</sup>).

Dans le cas du système de bielle et manivelles les points  $B$ , [n° 14] peuvent être construits par la règle et le compas. Comme en effet  $A$  et  $B$  sont deux d'entre eux, l'équation biquadratique [n° 15] se réduit à une équation quadratique<sup>164</sup>). On connaît aussi les singularités des trajectoires décrites par des points de la courbe polaire et les singularités qui correspondent à une position de ramification (23) du quadrilatère articulé. *R. Müller*<sup>165</sup>) a démontré que le lieu de tous les points doubles pour toute position de  $\sigma$  est une courbe focale  $c_2$ .

La discussion systématique de la déformation d'un quadrilatère articulé conduit naturellement à envisager le cas où les côtés seraient égaux deux à deux. Si les côtés égaux sont consécutifs on obtient le rhomboïde appelé *cerf-volant* ou *fer de lance* par les anglais selon qu'il est convexe ou concave. Si les côtés égaux sont opposés on obtient au contraire, soit le parallélogramme soit le contreparallélogramme. Dans ce dernier cas, le mouvement relatif des deux plus petits côtés réalise le roulement avec symétrie par rapport à la tangente commune de deux ellipses égales et au contraire de deux hyperboles égales s'il s'agit des deux plus grands côtés. Les trajectoires sont alors des podaires de coniques.

Au contraire, dans le cas du rhomboïde, un grand côté se trouve opposé à chaque petit côté; les courbes polaires dans le mouvement relatif sont deux limaçons de Pascal<sup>166</sup>), avec cette circonstance que le limaçon solidaire du petit côté possède une boucle rentrante, tandis que celui qui est solidaire du grand côté opposé n'en possède pas. Si l'on fixe un petit côté et qu'on fasse faire un tour complet au

164) *R. Müller*, *Z. Math. Phys.* 37 (1892), p. 213; *L. Allievi*, *Biella piana*<sup>96</sup>), p. 4, 61.

165) *Z. Math. Phys.* 36 (1891), p. 11, 66; il existe en général douze points de rebroussement.

166) Le théorème est dû à *J. J. Sylvester* qui l'avait communiqué directement à *A. Mannheim*. Ce dernier [*Proc. London math. Soc.* (1) 6 (1874/5), p. 35] en donna alors une démonstration.

grand côté qui s'articule à lui, le petit côté qui lui est articulé à l'autre bout fait deux tours, en sorte que ce mécanisme peut fonctionner comme duplicateur de tours.\* Tout point lié à la bielle décrit, comme *A. Cayley*<sup>167</sup>) l'a démontré, une podaire de conique, conique qui est une ellipse ou une hyperbole selon que c'est un petit côté ou un grand côté qui joue le rôle de membre fixe.

Ce théorème est une conséquence de ce que le contreparallélogramme donne lui-même, ainsi qu'on l'a vu, de telles courbes selon que l'on fixe le petit ou le grand côté. En effet si l'on échange la bielle et une manivelle du contreparallélogramme on obtient le rhomboïde. Or il y a un théorème général, dit *théorème de l'échange de bielle et manivelle*, d'après lequel à tout point solidaire de la bielle primitive on peut faire correspondre un point solidaire de la nouvelle bielle et réciproquement, de manière que les deux points décrivent des courbes semblables. Ce théorème à son tour résulte de la propriété du pantographe de *Chr. Scheiner*<sup>168</sup>).

Parmi les cas curieux de quadrilatères articulés, il convient de signaler celui dans lequel la somme des carrés de deux côtés opposés égale celle des carrés des deux autres côtés. Les diagonales des ces quadrilatères restent rectangulaires au cours de la déformation.

*F. Reuleaux*<sup>169</sup>) a montré l'intérêt qu'il y a à rattacher au cas général les cas limites dans lesquels quelques centres des articulations qui relient deux ou plusieurs des membres du système articulé à quatre membres sont rejetés à l'infini.

Le système de bielle avec glissière rectiligne se rattache au cas où un seul centre d'articulation est rejeté à l'infini. Le mouvement inverse est un mouvement conchoïdal à directrice circulaire<sup>170</sup>).

Le mouvement de l'ellipsographe est une forme particulière du cas où deux centres d'articulation sont rejetés à l'infini.

Le système de bielle avec glissière rectiligne joue un rôle important dans les applications. Si l'on appelle  $C$  le point où la manivelle s'articule à la glissière rectiligne fixe,  $A$  le point où elle s'articule à la bielle,  $B$  celui où celle-ci s'articule à la glissière mobile, on

167) *A. Cayley*, *Proc. London math. Soc.* (1) 3 (1869/71), p. 100; *Papers* 7, Cambridge 1894, p. 182.

168) „Pantographice, seu ars delineandi res quaelibet per parallelogrammum lineare seu cavum, mechanicum mobile, Rome 1631.”

169) „Cinématique”<sup>156</sup>), p. 314.\*

170) Une exposition d'ensemble des trajectoires auxquelles donne lieu le dispositif de bielle-manivelles a été donnée par *L. Burmester*, *Kinematik*<sup>96</sup>), p. 300 et suiv. Voir aussi *E. M. Blake*, *Trans. Amer. math. Soc.* 1 1900), p. 421.

suppose que la ligne droite que décrit le point  $B$  passe au point  $C$  (dans l'hypothèse contraire, rarement réalisée, la coulisse est dite oblique). Le centre instantané dans la première hypothèse est au point de rencontre de la manivelle  $CA$  avec la normale en  $B$  à la direction de la glissière. On en conclut aisément que si  $H$  est le point où la bielle coupe la normale en  $C$  à la glissière, en appelant  $\omega$  la vitesse angulaire de la manivelle, la vitesse de la glissière mobile (coulisseau, piston) a pour valeur<sup>171)</sup>

$$v = CH \cdot \omega.$$

La construction de la vitesse  $\vec{v}$  pour un point quelconque de la bielle résulte aisément de là. En ce qui concerne la construction de l'accélération qui importe à certaines questions de la dynamique des machines, comme les calculs de résistance, on a publié diverses recherches<sup>172)</sup>.

Au moyen des théorèmes sur  $\sigma$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_\varphi$  [n° 16] cette construction a été donnée par *H. Mohr*<sup>173)</sup>. La construction de *H. Mohr* tombe en défaut si les points  $G$  et  $O$  [n° 16] ne peuvent pas être dessinés. *T. Ritterhaus* a donné une construction indépendante de cet accident<sup>174)</sup>. La première construction graphique pour le cas de la manivelle à coulisse rectiligne a été donnée par *J. Schadewill*<sup>175)</sup>.

Dans un autre ordre d'idées, le quadrilatère articulé a donné lieu à d'intéressantes recherches dont l'origine est dans un mémoire de *G. Darboux*<sup>176)</sup> où il est établi qu'on peut faire correspondre bi-univoquement les différentes formes d'un quadrilatère articulé et les points d'une cubique plane du genre un, c'est-à-dire dénuée de point double. Dès lors une telle courbe ayant des coordonnées exprimables par des fonctions elliptiques d'un paramètre, il en est de même des lignes trigonométriques des angles réciproques des côtés du quadrilatère.

Il est curieux de voir que l'excès de la somme du plus grand et du plus petit côté du quadrilatère sur la somme des côtés moyens,

171) *H. Resal*, Traité de mécanique générale 3, Paris 1875, p. 97.\*

172) Des observations critiques ont été présentées à ce sujet par *A. Ciampi*, Annali della società degli ingegneri e degli architetti italiani 15 (1900), p. 26.\*

173) Der Civilingenieur 25 (1879), p. 613. Voir aussi *W. End* [Technische Blätter 22 (1890), p. 83] et *F. J. Vass* [Ann. Éc. polyt. Delft 8 (1897), p. 116].

174) Der Civilingenieur 25 (1879), p. 461.

175) Gliedverviereit<sup>177)</sup>, p. 446. Voir aussi *J. Taubels*, Der Civilingenieur 32 (1886), p. 635; *Kirsch*, Z. des Vereins deutscher Ingenieure 34 (1890), p. 1320.

176) *G. Darboux* [Bull. sc. math. (2) 3 (1879), p. 100]. La cubique plane introduite par *G. Darboux* fournit une représentation au moyen des quantités imaginaires. *G. Koenigs* [Cinématique<sup>18)</sup>, p. 263] utilise une courbe du quatrième ordre à deux points doubles qui ne met en jeu que les quantités réelles.

dont le signe est déjà un critère pour l'existence des points à révolution complète, est aussi un critère au point de vue de la représentation par les fonctions elliptiques. Si cet excès est nul, la cubique acquiert un point double et la représentation s'opère au moyen des fonctions rationnelles. Dans le cas général, les trajectoires des points, les enveloppes des droites sont des courbes elliptiques, ou du genre un; dans le cas particulier de la rationalité, toutes ces courbes sont unicursales.

Si la cubique se décompose en une conique et une droite, un phénomène mécanique se produit qui mérite l'attention. Dans ce cas les côtés du quadrilatère sont égaux par couples en sorte que celui-ci est soit un parallélogramme, soit un contreparallélogramme si les côtés égaux ne sont pas adjacents, soit un rhomboïde, soit un système de doubles tiges articulées<sup>177)</sup> si les côtés égaux sont adjacents. Dans le premier cas, lorsque toutes les tiges sont alignées suivant une même droite, ce qui a lieu de deux manières, le point représentatif est un des points de rencontre de la conique et de la droite. Or de même qu'à partir de l'un de ces points on peut cheminer sur l'une ou l'autre de ces lignes, de même à partir de cette position de ramification le système peut opter soit suivant la forme du parallélogramme (cheminement sur la droite) soit suivant la forme du contreparallélogramme (cheminement sur la conique).

Si au contraire les côtés égaux sont adjacents, le cheminement sur la conique correspond à la déformation suivant un rhomboïde, et le cheminement sur la droite correspond à la déformation du système des doubles tiges articulées.

L'échange de bielle à manivelle fait du reste passer, comme on l'a déjà vu, du cas de la contiguïté des côtés égaux au cas de la non-contiguïté.

Le travail de *G. Darboux* a été l'origine de travaux ultérieurs. *M. Krause*<sup>178)</sup>, en partant des équations immédiates que fournit le théorème des projections, a traité le problème par une voie purement analytique et exprimé au moyen des fonctions  $\theta$  de troisième espèce les lignes trigonométriques des angles du quadrilatère articulé. Sa méthode s'étend du reste à des systèmes articulés plus compliqués. Il retrouve ainsi les formules de *G. Darboux*.

177) On peut concevoir que, un rhomboïde étant construit, on amène les tiges égales à se superposer, et que l'on déforme de la sorte le système sans séparer les tiges égales; c'est ce système que l'on appelle ici un système de doubles tiges articulées.\*

178) *M. Krause*, Ber. Ges. Lpz. 59 (1907), math. p. 313; 60 (1908), math. p. 132; 63 (1911), math. p. 271, 516; Archiv Math. Phys. (3) 16 (1910), p. 2/10; Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 19 (1910), p. 327.

Des travaux conçus dans le même esprit ont été ultérieurement publiés par *E. Weisse*, puis par *O. Bolduan* et *K. Bleicher* qui ont appliqué, en particulier, la méthode à l'étude de certains systèmes à liaisons surabondantes. *M. Blauert*, plus récemment, s'est servi de la représentation elliptique pour étudier les courbes trajectoires et autres éléments géométriques de la déformation du quadrilatère articulé<sup>179</sup>.

**20. Description approchée des courbes au moyen du dispositif de bielle et manivelles.** Un problème important de la technique consiste dans la recherche de la courbe décrite dans un mouvement de bielle et manivelles qui se rapproche dans la plus grande étendue possible d'une courbe donnée. Dans la pratique, se présente en premier lieu le guidage rectiligne approché. Une solution a été depuis longtemps donnée par *James Watt*<sup>180</sup>. Soit le parallélogramme  $ABCD$  et considérons le quadrilatère articulé à tiges croisées  $ACBD$ , dans l'ordre des sommets consécutifs; fixons  $AC$ , le milieu  $M$  de  $BD$  décrit la courbe appropriée. Une autre réalisation approchée du mouvement rectiligne au moyen du dispositif de bielle et manivelle a été donné par *O. Evans*<sup>181</sup>.

Le problème général a été traité d'abord par *P. L. Čebyšev*. Il prit comme point de départ le problème d'analyse qui consiste à

179) *E. Weisse*, Anwendung der elliptischen Funktionen auf ein Problem aus der Theorie der Gelenkmechanismen, Diss. Dresde 1907; *O. Bolduan*, Zur Theorie der übergeschlossenen Gelenkmechanismen, Diss. Halle 1908; *K. Bleicher*, Zur Theorie der übergeschlossenen Gelenkssysteme, Diss. Rostock 1910; *M. Blauert*, Über einige Anwendungen der elliptischen Funktionen auf die Theorie des ebenen Gelenkvierecks, Diss. Rostock 1911.

180) Spécification n° 1432 du 28 avril 1784 [cf. *J. P. Muirhead*, Origin of mechanical inventions of James Watt 3, Londres 1855, p. 68].

181) Abb. der kgl. (preussischen) technischen Deputation für Gewerbe 1 (1826), p. 225. Le guidage rectiligne repose sur ce que le mouvement de bielle approxime le mouvement de l'ellipsographe.

Dans le mouvement de l'ellipsographe, tandis que deux points  $A, B$  décrivent deux droites rectangulaires, le milieu  $C$  de  $AB$  décrit un cercle dont le centre est le point de rencontre  $O$  de ces deux droites, ce qu'on peut réaliser au moyen d'une bride articulée en  $O$  et en  $C$  dont la longueur égale la moitié de  $AB$ . Si, en conservant cette bride, on fait décrire à  $A$  un arc de cercle au moyen d'une seconde bride articulée en  $A$  et en un point fixe  $O'$ , le point  $A$  décrit approximativement une droite comme corde de l'arc de cercle effectivement décrit, mais, et c'est là le point important, le point  $B$  décrit avec une approximation beaucoup plus grande la droite perpendiculaire qu'il décrirait exactement dans l'ellipsographe. Un échange de bielle et manivelle fait passer de ce dispositif à celui de Watt [*G. Koenigs*, Cinématique<sup>18)</sup>, p. 274].\* Voir aussi *G. Pastore*, Atti Accad. Torino 27 (1891/2), p. 47.

déterminer, dans une fonction ou un développement en série, des paramètres, de manière que dans un certain intervalle son écart vis-à-vis d'une fonction donnée soit le plus petit possible<sup>182</sup>. *P. L. Čebyšev* a appliqué cette méthode d'abord au parallélogramme de Watt et ensuite à un dispositif quelconque à bielle et manivelles. Tout d'abord deux voies différentes se présentent. On peut poser les conditions pour qu'une trajectoire possède une tangente offrant un contact de l'ordre le plus élevé possible. On trouve comme résultat que ce contact est au plus sextiponctuel (contact du 5<sup>ème</sup> ordre). Mais on atteint aussi une approximation profitable si la courbe possède plusieurs points d'inflexion simples voisins les uns des autres. A ce cas appartient la courbe de Watt qui possède trois points d'inflexion voisins. *P. L. Čebyšev* reconnut que cette approximation est essentiellement préférable à celle que l'on obtient au moyen d'une tangente sextiponctuelle<sup>183</sup>.

*R. Müller*<sup>184</sup> et *L. Allievi*<sup>185</sup> ont traité la théorie du mouvement rectiligne approché en partant de la courbe  $k_3$ , ou des points  $U$  et  $B$ , [n° 14]. On peut s'attacher à l'équation quadratique des points  $B$ , et essayer de déterminer le paramètre qu'elle contient par la condition que l'un de ces points tombe en  $U$ .

On obtient ainsi les conditions pour un guidage rectiligne du quatrième ordre ou quintiponctuel. On arrive au contact du cinquième ordre ou sextiponctuel, en faisant prendre à la courbe une forme symétrique par rapport à la normale. Si, en particulier, le point décrivant  $U$  doit être situé sur  $AB$ , alors dans la position spéciale où  $U$  est au point inflexionnel (fig. 4), les trois côtés mobiles  $A'A, AB, B'B$  du quadrilatère forment un triangle équilatéral<sup>186</sup>. Entre les

182) Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes [Mémoires présentés Acad. sc. Pétersbourg 7 (1854), p. 537 (1853); Œuvres 1, Saint Pétersbourg 1899, p. 109/43]; Sur une identification du parallélogramme de Watt [Bull. Acad. Pétersb. (3) 4 (1861), col. 433; Œuvres 1, p. 531/8]. Une exposition simple a été donnée par *A. de Saint Germain*, J. math. pures appl. (3) 6 (1880), p. 19.

183) Un second mécanisme de ce genre dans lequel pourtant le point décrivant  $M$  n'est pas situé sur  $AB$  a été donné par *P. L. Čebyšev* [Zapiski akad. nauk 60 (1889), prilozhenie (supplément), mém. n° 1]; trad. par *P. O. Somov*, Sur le système articulé le plus simple donnant des mouvements symétriques par rapport à un axe [*P. L. Čebyšev*, Œuvres 2, St. Pétersbourg 1907, p. 495/540]. Voir aussi *A. Vasiliev* et *N. Delaunay*, *P. L. Čebyšev*, Leipzig 1900, p. 60. Ce guidage rectiligne est techniquement préférable aux autres.

184) Z. Math. Phys. 37 (1892), p. 213; 38 (1893), p. 130; Gelenkviereck<sup>184)</sup> p. 60; Z. Math. Phys. 46 (1901), p. 330. Dans ce travail les rapports de forme des courbes de bielle sont étudiés de près.

185) Biella plana<sup>185)</sup>, p. 133 et suiv.

186) Voir aussi Nachr. Ges. Gött. 1897, math.-phys. p. 3.

longueurs  $a, b, c$  de ces côtés et le côté fixe  $A'B' = d$  il existe deux équations symétriques<sup>187)</sup> en  $a, b, c$ , en sorte qu'il existe une  $\infty^2$  de quadrilatères de cette sorte. Et quand  $AB$ , en outre de  $U$ , est donné, il existe encore deux quadrilatères qui réalisent un mouvement rectiligne approché sextiponctuel<sup>188)</sup>. Par contre, aucune particularité dans la constitution du quadrilatère ne se présente, si le point de Ball  $U$  possède une tangente quintiponctuelle.

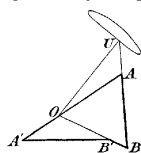


Fig. 4.

Pour passer du cas des points avec guidage rectiligne quadri-, quinti- ou sextiponctuel, à celui des trajectoires qui possèdent plusieurs points d'inflexion consécutifs, on doit se reporter à la courbe  $b$  dont les points donnent lieu à une tangente quadripunctuelle. Elle divise le plan en deux régions, de sorte que dans l'une d'elles les points dans le voisinage de  $b$  possèdent des trajectoires avec deux points d'inflexion voisins<sup>189)</sup>. Si  $b$  a un rebroussement, il y a dans son voisinage des points avec trois points d'inflexion voisins sur leurs trajectoires, et si un point existe possédant une trajectoire sextiponctuelle, il existe dans son voisinage des points avec des trajectoires possédant quatre points d'inflexion voisins. De là résultent des problèmes tenant à la manière dont la courbe  $b$  divise le plan  $\sigma$ ; quelles singularités des trajectoires appartiennent aux régions ainsi définies et comment la courbe  $b$  et les autres courbes remarquables dépendent des constantes du quadrilatère, c'est ce qu'ont cherché *L. Allievi*<sup>190)</sup> et *R. Müller*<sup>191)</sup>. *L. Allievi* a particulièrement considéré le cas où la courbe  $k_3$  se décompose et construit les quadrilatères correspondants d'une façon méthodique en ce sens qu'il a de toutes les façons possibles distribué les points  $A$  et  $B$  sur les diverses parties de la courbe  $k_3$  et, pour chaque quadrilatère, recherché les singularités des courbes trajectoires. Il a de cette manière déterminé

187) La propriété du mouvement rectiligne sextiponctuel persiste ainsi si l'on échange arbitrairement  $a, b, c$ , en concordance avec la triple génération de toute courbe de bielle. Pour les relations correspondantes voir aussi *P. L. Čebyšev*, Bull. sc. math. (2) 5 (1881), p. 216; Bull. Soc. math. de France 12 (1883/4), p. 179.

188) Le mouvement à ligne droite de Čebyšev déjà mentionné correspond au cas où  $U$  est le milieu de  $AB$ ,  $AA' = 4AB$  et  $AB' = 3AB$ .

189) Dans le mouvement cycloïdal déjà mentionné, cette région est l'anneau circulaire déjà considéré.

190) Biella plana<sup>99)</sup>, p. 56 et suiv.

191) Z. Math. Phys. 43 (1898), p. 36. Pour les relations se rapportant aux mouvements rectilignes quinti- et sextiponctuels, voir *L. Allievi*, Biella plana<sup>99)</sup>, p. 73, 138.

aussi les points dont la trajectoire représente un cercle avec la plus grande approximation, problème que *P. L. Čebyšev*<sup>192)</sup> avait aussi entrepris dans ses recherches antérieures. *H. Léauté*<sup>193)</sup> a de son côté déterminé de tels points sur la droite  $AB$ . *H. Léauté*<sup>194)</sup> a étendu la méthode de Čebyšev au problème plus général qui consiste à approximer une courbe arbitraire au moyen de la trajectoire d'un point de la bielle<sup>195)</sup>.

Dans l'article V 6a, consacré aux mécanismes, on s'occupera des dispositifs plus compliqués qui ont permis de résoudre par d'autres moyens le guidage rectiligne d'un point.

**21. Mouvement continu autour d'un point fixe.** Les propriétés géométriques du mouvement continu d'une figure invariable autour d'un point fixe  $O$  peuvent s'obtenir soit au moyen du calcul, en ayant recours aux formules de transformation de coordonnées et c'est même ainsi qu'on y est parvenu tout d'abord, soit au moyen de la méthode cinématique indiquée au début, soit enfin au moyen de la méthode géométrique analogue à celle exposée au n° 4, en effectuant un passage à la limite.

L'existence d'un axe  $o$  autour duquel a lieu la rotation instantanée (plus tard la rotation tangente) a été découverte par *J. d'Alembert*<sup>196)</sup>, 25 ans avant que ne fut trouvé par *L. Euler* le théorème concernant le déplacement fini. Mais il fallut attendre encore un siècle pour que vint à maturité la connaissance que tout mouvement continu autour d'un point fixe est caractérisé par le roulement de deux cônes<sup>197)</sup>, de même que le mouvement plan l'est par le roulement de deux courbes. *L. Poincaré*<sup>198)</sup> eut l'honneur de cette découverte.

L'application générale des propositions et des formules qui reposent sur l'existence de la correspondante  $\Psi^2$  est due à *S. H. Aronhold*<sup>199)</sup>.

Si au point de rencontre  $O'$  de l'axe  $o$  avec une sphère de centre  $O$  on mène le plan tangent  $\sigma$  et si l'on considère le mouvement instantané de ce plan dans lequel les courbes polaires seraient

192) Bull. Soc. math. de France 12 (1883/4), p. 179; Œuvres 2, St Pétersbourg 1907, p. 726/32.

193) J. Éc. polyt. (1) cah. 53 (1883), p. 59.

194) Id. (1) cah. 46 (1879), p. 205; C. R. Acad. sc. Paris 96 (1883), p. 639, 1356.

195) Il traite aussi le problème qui consiste à approximer une courbe au moyen d'un cercle ou d'une ellipse.

196) Recherches sur la précession des équinoxes, Paris 1749, p. 3.

197) Comme au n° 8, on laisse de côté les mouvements non différentiels.

198) Théorie nouvelle de la rotation des corps, Paris 1834, p. 558.

199) Voir les dissertations citées notes 185, 186, 187; *A. Schoenflies* (Geometrie der Bewegung<sup>54)</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) p. 47; Géométrie du mouvement<sup>54)</sup>, p. 52] a exposé cette théorie.

les traces des cônes polaires sur ce plan tangent, la correspondance  $\mathfrak{V}_2$  qui lie les points  $A, A'$  dans le plan  $\sigma$  associe aussi l'un à l'autre les rayons  $a, a'$  du faisceau et leurs points de rencontre  $A_k, A'_k$  avec la sphère de telle manière que  $a'$  est l'axe de courbure de la trajectoire sphérique du point  $A_k$  comme aussi  $a$  l'axe de courbure de la trajectoire de  $A'_k$  dans le mouvement inverse<sup>200</sup>).

Dès lors, pour passer des relations métriques du mouvement plan aux relations analogues du mouvement sphérique, il suffit de remplacer les vecteurs issus du pôle  $O$  dans le plan  $\sigma$  par la tangente trigonométrique de l'arc correspondant sur la sphère<sup>201</sup>.

Le cercle des inflexions de  $\sigma$  fournit par le passage au faisceau un cône orthogonal  $K_2^{(2)}$ , sur lequel toutefois ne se traduisent pas complètement les propriétés inhérentes au cercle des inflexions [n° 4]<sup>202</sup>. En particulier, les rayons de  $S$  qui sont momentanément des rayons d'inflexion de leur cône trajectoire, forment une surface conique  $H_2$  et les plans perpendiculaires aux génératrices de  $H_2$  sont momentanément des plans de rebroussement des surfaces qu'ils enveloppent. Enfin, par analogie avec les courbes  $k_2$  et  $k'_2$ , il existe des cônes  $K_2, K'_2$  formés de rayons dont les cônes trajectoires présentent un axe de courbure stationnaire: ils coupent la sphère suivant une courbe sphérique, offrant la même propriété. Les relations entre les courbes  $k_2$  et  $k'_2$  se retrouvent complètement dans ces deux cônes<sup>203</sup>.

Le mouvement autour d'un point fixe intervient dans un grand nombre de questions de géométrie et de mécanique. Au n° 23 nous résumerons en particulier les recherches concernant les mouvements étudiés pour la première fois par L. Poincaré.

Mais si l'on se place au seul point de vue cinématique, les mouvements sphériques spéciaux qui ont été étudiés concernent presque exclusivement les systèmes de bielle et manivelle sphériques<sup>204</sup>. Un tel mouvement se définit par la condition que deux points d'un grand cercle se meuvent sur des cercles. D'une façon un peu détaillée ont

200) Ceci s'applique encore à chaque couple de courbes conjuguées dans le mouvement sphérique [cf. n° 17].

201) L'équation analogue à celle d'Euler-Savary fut d'abord donnée par L. Poincaré, Rotation des corps<sup>199</sup>, p. 559.

202) Les axes de courbure de ses points tombent dans un plan normal à l'axe  $o$ .

203) Pour ce qui est des rayons qui correspondent [n° 14] au point de Ball et aux points de Burmester, voir A. Schoenflies, Geometrie der Bewegung<sup>194</sup>, p. 67; Géométrie du mouvement, p. 77.

204) F. Masi, Memorie Ist. Bologna (4) 1 (1879/80), p. 349; F. Buka, Diss. Göttingue 1876.

été traités seulement les cas du contreparallélogramme sphérique<sup>205</sup> et de l'ellipsographe sphérique<sup>206</sup>. Pour ces mouvements les cônes polaires, le cône inflexionnel etc., ont été déterminés par le calcul. L'ellipsographe sphérique n'est autre que cette sorte de mouvement réalisé par le joint de Cardan [n° 27], savoir un quadrant tracé sur la sphère glisse par ses deux extrémités sur deux grands cercles. V. Nobile<sup>207</sup> a traité le roulement sur une droite d'une surface de révolution  $\Phi$  libre de tourner autour d'un point de son axe. Si  $\Phi$  est une quadrique, le cône des axes instantanés dans le corps mobile  $S$  est un cône du second ordre.

**22. Vitesse et accélération dans le mouvement autour d'un point fixe.** Les quelques indications générales données au n° 13 au sujet de l'accélération des divers points d'un corps solide en mouvement, peuvent être complétées ici à l'occasion du mouvement autour d'un point fixe, attendu qu'on y ramène aisément le cas général du mouvement d'un corps solide.

Si, par le point fixe  $O$ , on mène un vecteur  $O\Omega$  représentant la vitesse angulaire instantanée [fin du n° 10], la vitesse de l'extrémité  $\Omega$  de ce vecteur est la même dans le corps mobile et dans le corps fixe attendu que la différence géométrique des deux vitesses serait la vitesse d'entraînement, laquelle est nulle puisque  $\Omega$  est sur l'axe instantané. Cette vitesse propre au point  $\Omega$  est l'accélération angulaire. On doit ici observer que si l'axe instantané est fixe dans l'un des corps, la vitesse de  $\Omega$  y est portée par la droite  $O\Omega$  elle-même et réciproquement, ce qui conduit à ce théorème fondamental: Si l'axe instantané est fixe dans l'un des corps (corps mobile ou corps fixe) il est fixe également dans l'autre.

Soient  $p, q, r$  les composantes, suivant des axes  $Ox, Oy, Oz$  solidaires du corps mobile  $S$ , de la vitesse angulaire d'intensité  $\omega$ , représentée par le vecteur  $O\Omega$ ; les projections de la vitesse de  $\Omega$  seront

$$p_1 = \frac{dp}{dt}, \quad q_1 = \frac{dq}{dt}, \quad r_1 = \frac{dr}{dt};$$

ce sont les projections du vecteur  $\vec{\lambda}$  qui représente l'accélération angulaire. En prenant ainsi les dérivées géométriques successives de  $\vec{\omega}$  on arrive à définir les accélérations angulaires successives

$$(2) \quad \vec{\lambda} = D\vec{\omega}, \quad \vec{\lambda}^{(2)} = D\vec{\lambda}, \quad \dots, \quad \vec{\lambda}^{(n+1)} = D\vec{\lambda}^{(n)},$$

où  $D$  représente le symbole de la dérivée géométrique.

205) R. Sellentin, Diss. Iéna 1881.

206) O. Marbach, Diss. Iéna 1880.

207) Nouv. Ann. math. (3) 18 (1899), p. 218.

Les droites  $l, l^{(2)}, \dots, l^{(n)}$  qui portent les vecteurs  $\vec{\lambda}, \vec{\lambda}^{(2)}, \dots, \vec{\lambda}^{(n)}$  sont les axes des accélérations angulaires correspondantes. On remarquera qu'ici, lorsqu'on prend les dérivées géométriques des accélérations, il y a lieu de distinguer selon que cette opération se fait dans l'intérieur du corps mobile ou dans l'intérieur du corps fixe, attendu que la circonstance qui se présentait pour l'accélération  $\vec{\lambda}$  ne se présente plus pour les suivantes; c'est là une raison de complication quand on passe aux accélérations angulaires d'ordres supérieurs.\* Il est clair que si pour définir la position du corps mobile  $S$  par rapport au corps fixe  $S'$  on fait usage des trois angles d'Euler  $\theta, \varphi, \psi$  les  $p, q, r$ , ainsi que les projections des accélérations angulaires des divers ordres sont des fonctions de ces angles et de leurs dérivées<sup>208</sup>). Si l'on considère en particulier les relations entre  $p, q, r$  et  $\theta, \varphi, \psi$ , ainsi que les dérivées de ces angles par rapport au temps  $t$ , l'intégration de ces équations, où  $p, q, r$  sont regardées comme connues, constitue un problème général dont il a déjà été question au n° 12 et qui a été ramené par G. Darboux<sup>209</sup>) à une équation différentielle de Riccati.

L'accélération angulaire  $\vec{\lambda}$  peut être décomposée de la manière la plus simple en deux composantes, l'une  $\vec{\lambda}_\omega$  suivant l'axe  $o$  de la rotation instantanée, l'autre  $\vec{\lambda}_n$  suivant la normale  $n$  à  $o$  dans le plan mené par  $o$  et  $l$ ; on a

$$(3) \quad \lambda_\omega = \frac{d\omega}{dt}, \quad \lambda_n = \omega \frac{d\chi}{dt} = \omega u,$$

où  $\chi$  représente l'angle conique que décrit l'axe instantané sur son cône;  $\chi$  est ainsi l'arc que décrit, sur la sphère de centre  $O$  et de rayon 1, l'extrémité  $U$  du vecteur-unité dirigé suivant l'axe; il en résulte que  $u$  est la vitesse du point  $U$  sur cette courbe sphérique; c'est ce que l'on peut appeler la *vitesse de changement* de l'axe instantané.

L'accélération d'un point quelconque  $A$  du corps est la somme géométrique<sup>210</sup>) de deux vecteurs [n° 13]; l'un qui a pour projections  $\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z}$  est dirigé suivant la perpendiculaire abaissée de  $A$  sur l'axe  $o$  et est égal au produit par  $\omega^2$  de la distance du point  $A$  à

208) Voir par ex. H. Resal, Cinématique<sup>21)</sup>, p. 113, 115.

209) Théorie des surfaces<sup>2)</sup> 1, p. 19; (2<sup>e</sup> éd.) 1, Paris 1913, p. 27.\*

210) La décomposition en  $\omega^2 r$  et  $\lambda_n r$  a été donnée par G. Riccati, J. Éc. polyt. (1) cah. 35 (1853), p. 113.

l'axe  $o$ , le second est le moment pris en  $A$  du vecteur  $\vec{\lambda}$ . Il est clair qu'à ce vecteur  $\vec{\lambda}$  on peut substituer les deux vecteurs  $\vec{\lambda}_\omega$  et  $\vec{\lambda}_n$  et remplacer le moment de  $\vec{\lambda}$  par les sommes géométriques des moments de  $\vec{\lambda}_\omega$  et de  $\vec{\lambda}_n$  dont  $\vec{\lambda}$  est la somme géométrique.

Ces faits se traduisent analytiquement<sup>211)</sup> par les formules [n° 13]

$$(4) \quad \begin{cases} j'_{Ax} = q_1 z - r_1 y + \frac{\partial H}{\partial x}, \\ j'_{Ay} = r_1 x - p_1 z + \frac{\partial H}{\partial y}, \\ j'_{Az} = p_1 y - q_1 x + \frac{\partial H}{\partial z}. \end{cases}$$

Ces formules résultent immédiatement des formules de Bour [n° 13] qui ne diffèrent pas au fond de celles que Ph. Gilbert<sup>212)</sup> a données plus tard

$$(5) \quad \begin{cases} j'_x = q_1 z - r_1 y + qv_z - rv_y, \\ j'_y = r_1 x - p_1 z + rv_x - pv_z, \\ j'_z = p_1 y - q_1 x + pv_y - qv_x. \end{cases}$$

Ainsi qu'on l'a fait remarquer à la fin n° 13, les formules de Bour s'étendent à un vecteur quelconque et en particulier aux accélérations d'ordres successifs, en sorte que des formules analogues subsistent pour les accélérations de tous les ordres.

Les équations explicites qui précèdent peuvent recevoir une forme plus condensée; en appelant  $r, r_1, r_n$  les distances du point mobile  $A$  aux droites  $o, l, n$  on peut écrire abrégativement,  $\vec{j}_A$  représentant l'accélération du point  $A$ , solidaire du corps  $S$ , dans le mouvement d'entraînement de  $S$  par rapport au corps  $S'$ ,

$$(6) \quad \vec{j}_A = \omega^2 \vec{\lambda}_r + \vec{\lambda}_r = \omega^2 r + \vec{\lambda}_\omega r + \vec{\lambda}_n r_n.$$

Dans cette formule  $\omega^2 r$  est le vecteur dirigé suivant la perpendiculaire abaissée de  $A$  sur  $o$ , tandis que  $\vec{\lambda}_r$  est le moment du vecteur  $\vec{\lambda}$  par rapport au point  $A$ ; par contre  $\vec{\lambda}_\omega r, \vec{\lambda}_n r_n$  sont les moments en  $A$  des composantes  $\vec{\lambda}_\omega, \vec{\lambda}_n$  du vecteur  $\vec{\lambda}$ .

211) Voir H. Resal, Cinématique<sup>21)</sup>, p. 193.

212) C. R. Acad. sc. Paris 104 (1887), p. 162; Ann. Soc. scient. Bruxelles 13<sup>4</sup> (1889/90), p. 268. La relation de H. Resal paraît dans Ph. Gilbert sous la forme plus simple

$$j_x = z\lambda_y - y\lambda_z + \omega[\varphi p - \omega^2 x,$$

ce qui conduit immédiatement à une autre décomposition; on a  $\varphi = OA$ .

Notons que, comme axes commodes pour l'étude des accélérations, on peut utiliser les axes  $o, n$  et un axe  $y$  rectangulaire avec eux. Les formules analytiques se condensent encore plus si l'on introduit directement comme éléments la vitesse  $\vec{v}$  d'un point, son accélération  $\vec{j}$  et les vecteurs  $\vec{\omega}, \vec{\lambda}$ . Le premier théorème construit avec ces éléments est dû à H. Resal<sup>213</sup>; son expression est contenue dans l'équation symbolique<sup>15</sup>

$$(7) \quad \omega | \vec{j} + \lambda | \vec{v} = 0$$

où  $\omega | \vec{j}$  et  $\lambda | \vec{v}$  représentent les produits intérieurs ou scalaires [voir IV 4, 8] de deux vecteurs  $\vec{\omega}$  et  $\vec{j}$ ,  $\vec{\lambda}$  et  $\vec{v}$ .

Ph. Gilbert qui a donné cette forme au théorème a aussi remarqué qu'il se déduit immédiatement par voie de différentiation [n° 10] de l'équation  $\omega | \vec{v} = 0$ . Cela permet d'en donner aussitôt la généralisation, contenue dans la formule<sup>214</sup>

$$(8) \quad \omega | \vec{j}^{(n)} + n \lambda | \vec{j}^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \lambda^{(2)} | \vec{j}^{(n-2)} + \dots + \lambda^{(n)} | \vec{v} = 0.$$

Les questions de géométrie pure qui se posent à propos de la distribution de l'accélération dans un solide en mouvement ont toutes leur point de départ dans ce fait que  $j_x, j_y, j_z$  sont des fonctions linéaires entières des coordonnées du point  $(x, y, z)$ , en sorte que l'extrémité du vecteur accélération correspond au point lui-même suivant une correspondance homographique conservant le plan de l'infini. J. L. Gruey<sup>215</sup> a entrepris le premier une étude dans ce sens. Il y a été suivi par W. Schell<sup>216</sup> et Ph. Gilbert<sup>216</sup>. Le fait saillant c'est que dans une famille d'ellipsoïdes homothétiques de centre  $O$ , chacun est le lieu des points dont l'accélération a une valeur donnée. Les

<sup>213</sup> Cinématique<sup>15</sup>, p. 220.

<sup>214</sup> Ph. Gilbert, Ann. Soc. scient. Bruxelles 13<sup>2</sup> (1893/4), p. 232. D'autres produits vectoriels peuvent être traités de même. Une erreur dans les formules de  $\vec{j}_x$  qui se trouve dans W. Schell a été corrigée par E. Novaresse, Atti Accad. Torino 26 (1890/1), p. 302.

<sup>215</sup> Sur les accélérations des points d'un solide en mouvement, Clermont Ferrand 1878; C. R. Acad. sc. Paris 86 (1878), p. 1241.

<sup>216</sup> Theorie der Bewegung<sup>159</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) 1, p. 482; C. R. Acad. sc. Paris 107 (1888), p. 776, 830. Ann. Soc. scient. Bruxelles 13<sup>2</sup> (1888/9), p. 274]. Voir aussi R. Marcolongo, Giorn. mat. (1) 27 (1889), p. 90; G. Castelnuovo, Rivista di mat. 2 (1892), p. 13; 3 (1893), p. 25. Voir aussi W. Schell, Theorie der Bewegung<sup>159</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) 1, p. 474; Ph. Gilbert, Ann. Soc. scient. Bruxelles 13<sup>2</sup> (1888/9), p. 277; C. R. Acad. sc. Paris 107 (1888), p. 776, 946; 108 (1889), p. 92. Voir aussi R. Dahlander, Öfversigt Vetensk.-Akad. förhandl. (Stockholm) 27 (1870), p. 49/56.

diamètres conjugués de cet ellipsoïde donnent lieu à des propriétés susceptibles d'interprétation cinématique.

Si l'on appelle  $g$  la droite lieu des points  $G$  [n° 16] qui sont des centres des accélérations pour les plans normaux à  $o$ , en s'en tenant aux composantes de l'accélération situées dans ces plans, les droites  $o, l, g$  forment un *triple* de diamètres conjugués de ces ellipsoïdes; les droites  $o, l, g$  sont respectivement les lieux des points dont l'accélération est parallèle aux droites déjà considérées  $n, y, o$ . Réciproquement  $n, y, o$  sont les lieux des points dont l'accélération est respectivement normale aux plans  $(og), (lg), (ol)$ <sup>217</sup>.

En prenant  $o, l, g$  comme axes  $x', y', z'$  et désignant par  $a', b', c'$  les demi-diamètres correspondants, Ph. Gilbert a trouvé les formules

$$(9) \quad j'_x = -\frac{x'}{a'}, \quad j'_y = -\frac{y'}{b'}, \quad j'_z = -\frac{z'}{c'}.$$

**23. Polhodie et herpolhodie.** Le cas particulier le plus remarquable de mouvement autour d'un point fixe  $O$  consiste dans le roulement d'un ellipsoïde  $E_2$ <sup>218</sup> sur un plan fixe  $II'$ , dans lequel la vitesse angulaire instantanée est proportionnelle au rayon vecteur  $OA$  qui va du point  $O$  au point de contact. Ce mouvement d'après L. Poinsot<sup>219</sup> caractérise la rotation autour d'un point fixe<sup>220</sup> dans le cas où aucune force ne s'exerce sur le corps. La conception de ce mouvement, qui d'abord prit naissance sur le terrain dynamique, a été l'occasion d'une foule de considérations cinématiques. Des deux cônes lieux des axes, ainsi que les équations de la dynamique le montrent, celui qui appartient au corps  $S$  est un cône du second degré  $K_2$ , tandis que le cône des axes dans le second corps  $S'$  est en général transcendant. Les deux courbes qui sont les traces des cônes des axes sur l'ellipsoïde  $E_2$ , et sur le plan  $II'$  et dont la première roule sur la seconde au cours du mouvement, ont reçu de L. Poinsot les noms de *polhodie* et d'*herpolhodie*.

Dans les figures que L. Poinsot a jointes à son travail, l'herpolhodie contient des points d'inflexion; c'est là une erreur comme W. Hess<sup>221</sup> l'a montré le premier. Ce sujet a donné lieu à des recherches étendues

<sup>217</sup> Un théorème plus général a été donné par J. L. Gruey, C. R. Acad. sc. Paris 86 (1878), p. 1241.

<sup>218</sup> Dans ce qui suit, un ellipsoïde sera représenté par  $E_2$ , un hyperboloïde par  $H_2$ , un parabololoïde par  $P_2$ .

<sup>219</sup> Rotation des corps<sup>159</sup>, chap. 2.

<sup>220</sup> Pour la discussion plus complète de ce problème lui-même voir IV 15.

<sup>221</sup> Diss. Munich 1880; Math. Ann. 27 (1886), p. 465, 568. Le même résultat fut trouvé par M. de Sparre, C. R. Acad. sc. Paris 99 (1884), p. 906. Voir aussi A. Mannheim [id. 100 (1885), p. 963], A. de Saint Germain [id. 100 (1885), p. 1126], J. N. Franke [id. 100 (1885), p. 1573], G. Darboux [id. 100 (1885), p. 1576], M. de Sparre



et importantes concernant la nature et la manière d'être de la polhodie et de l'herpolhodie<sup>223</sup>). *W. Hess* trouva déjà que si les points d'inflexion sont exclus dans le cas de l'ellipsoïde de Poinot, ils peuvent cependant exister si on le remplace par une autre surface à centre du second degré  $F_2$ . S'il s'agit d'un ellipsoïde  $E_2$ , les points d'inflexion se présentent chaque fois que la distance  $ON$  du point  $O$  au plan  $\Pi'$  est supérieure au demi grand axe moyen. Des théorèmes analogues existent pour un hyperboloïde  $H_2$  à une ou à deux nappes<sup>224</sup>). L'herpolhodie n'a pas de point de rebroussement dans le cas de  $E_2$ , mais en possède au contraire dans le cas d'un  $H_2$  réglé, ainsi que *G. Darboux* l'a montré. La tangente à l'herpolhodie et le rayon vecteur issu de  $N$ , pied de la perpendiculaire  $ON$ , sont des tangentes conjuguées de  $F_2$ ; elles ne peuvent donc coïncider que dans une quadrique  $F_2$  réglée; et, au cas où une certaine relation est vérifiée, cela arrive réellement.

On peut se demander si d'autres surfaces encore existent qui, dans un mouvement de ce genre, roulent les unes sur les autres. *F. Siacci*<sup>225</sup>) trouva d'abord un  $H_2$  qui roule sur un cylindre de révolution, tandis que *N. Gëbbia*<sup>226</sup>) trouva que tout  $F_2$  qui contient la même ombilicale que l'ellipsoïde  $E_2$  de Poinot, roule sur une surface de révolution du second degré. Connaît-on un couple de surfaces roulantes, on peut, au moyen de certaines transformations de contact, en obtenir une infinité d'autres couples<sup>227</sup>).

[id. 101 (1886), p. 370]. Une solution purement cinématique du problème a été donnée par *F. W. Baehr*, Ann. Éc. polyt. Delft 6 (1890), p. 27. Voir surtout *J. N. Franke*, O kręceniu się ciała stałego około punktu (sur la rotation d'un solide autour d'un point) [Pamiętnik Akad. Umiejętności w Krakowie, classe math. nat. 12 (1886), p. 94/103].

222) Une exposition d'ensemble a été donnée par *G. Darboux* en supplément à *Th. Despeyroux*, Cours de mécanique 2, Paris 1886, p. 488. Voir aussi *E. J. Routh*, A treatise on the dynamics of a system of rigid bodies, (6<sup>e</sup> éd.) 2, Londres 1897; (7<sup>e</sup> éd.) 2, Londres 1905; trad. par *A. Schepp*, Die Dynamik der Systeme starrer Körper 2, Leipzig 1898, p. 105.

223) Les carrés des demi-axes  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$  de  $F_2$  vérifient l'équation

$$a^2 - Px^2 + Qx - R = 0$$

et alors d'après *G. Darboux*, l'existence des points d'inflexion est subordonnée aux conditions

$$c^2 > \frac{2R}{Q} > b^2 > \frac{h}{T^2} > a^2 \quad \text{ou} \quad c^2 > \frac{h}{T^2} > b^2 > \frac{2R}{Q} > a^2$$

où

$$h : \sqrt{h} = ON;$$

224) Dans *L. Cremona* et *E. Beltrami*, Collectanea mathematica in memoriam Dominici Chelini, Milan 1881, p. 6.

225) *Atti R. Accad. Lincei, Memorie mat.* (4) 1 (1885), p. 326.

226) *F. Siacci*, Atti Accad. Torino 21 (1886/87), p. 261. Voir aussi *D. Padellietti*, Rendic. Accad. Napoli (1) 25 (1886), p. 242.

Au sujet de la polhodie, *J. J. Sylvester*<sup>227</sup>) donna le théorème suivant: Si l'on porte à partir des points de la polhodie sur la normale à  $E_2$  une longueur constante, les extrémités des vecteurs ainsi construits forment une autre polhodie pour un autre  $E_2$  et les normales du premier  $E_2$  sont aussi normales au second<sup>228</sup>). Un autre théorème dû à *J. Maillard de la Gournerie*<sup>229</sup>) énonce que toute courbe d'intersection  $c$  de deux  $F_2$  coaxiaux peut être regardée comme la polhodie pour deux certains  $E_2$  et en même temps comme la courbe d'intersection de deux  $F_2$  homofocales.

*G. Darboux*<sup>230</sup>) ajouta la remarque que ces  $F_2$  sont réelles seulement si la troisième série de surfaces se compose de  $H_2$  à une nappe. En chaque point de la polhodie, les deux génératrices rectilignes de cet  $H_2$  qui y passent sont les normales aux deux  $E_2$  pour lesquels  $c$  est une polhodie. Ces propositions mettent la polhodie dans une certaine dépendance avec les  $H_2$  articulés [cf. VIa]. D'un théorème de *H. Durande* il résulte effectivement que dans le changement de forme du  $H_2$ , chacun de ses points décrit une polhodie. De là la possibilité d'engendrer une polhodie au moyen d'un quadrilatère gauche articulé dans l'espace; d'une façon analogue, l'herpolhodie aussi peut être décrite au moyen d'un mécanisme dans l'espace<sup>231</sup>).

Le mouvement de Poinot a été l'objet de diverses généralisations. L'une d'elles a été donnée par *G. Darboux*<sup>232</sup>). Les équations différentielles

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{d\alpha}{dt} = \beta r - \gamma q, \\ \frac{d\beta}{dt} = \gamma p - \alpha r, \\ \frac{d\gamma}{dt} = \alpha q - \beta p \end{cases}$$

qui déterminent les cosinus directeurs des axes du trièdre mobile sont vérifiées si l'on substitue à  $\alpha, \beta, \gamma$  les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial p}, \quad \frac{\partial f}{\partial q}, \quad \frac{\partial f}{\partial r},$$

où  $f$  est la force vive du corps, forme quadratique en  $p, q, r$ . *G. Darboux*

227) Philos. Trans. London 156 (1866), p. 757.

228) Les plans invariables sont ainsi parallèles.

229) Recherches sur les surfaces réglées tétraèdres symétriques, Paris 1867, p. 163.

230) C. R. Acad. sc. Paris 101 (1885), p. 200; *A. Mannheim*, id. 102 (1886), p. 501. La courbe  $c$  ne peut être sphérique.

231) Voir aussi *Ph. Gilbert*, Ann. Soc. scient. Bruxelles 14<sup>e</sup> (1889/90), p. 25; on trouvera là aussi une exposition historique des nouveaux résultats.

232) Théorie des surfaces<sup>2</sup> 1, p. 38; 4<sup>e</sup> (2<sup>e</sup> éd.) 1, Paris 1913, p. 56.\*

suppose qu'au lieu de la force vive,  $f$  soit une forme quelconque en  $p, q, r$ . Il montre que le mouvement se détermine par une quadrature. *G. Floquet*<sup>233</sup>) a également généralisé le mouvement de Poinsoit en faisant tourner une surface algébrique d'ordre  $m$  autour d'un point fixe  $O$  et en supposant la vitesse angulaire portée par un axe joignant le point  $O$  à l'un des pôles  $P$  de la surface pris par rapport à un plan fixe  $II'$ , la vitesse de rotation étant en outre proportionnelle à la distance  $OP$ . Il généralise ainsi une propriété signalée par *G. H. Halphen*<sup>234</sup>). *G. Floquet* a envisagé plus spécialement le cas où la surface est la cubique  $xyz = l^3$ ; la question dépend des fonctions elliptiques et a des rapports étroits avec le roulement d'un hyperboloïde.\*

**24. Les surfaces des axes dans le mouvement le plus général.** Le théorème d'après lequel le mouvement instantané d'un corps  $\Sigma$ , dans le cas le plus général, est hélicoïdal fut énoncé pour la première fois par *G. Mozzani*<sup>235</sup>). On l'énonce aujourd'hui en disant qu'il existe à chaque instant un mouvement hélicoïdal tangent ou un vissage tangent. L'axe  $a$  de ce mouvement décrit dans chacun des corps  $\Sigma$  et  $\Sigma'$  une surface réglée; ces deux surfaces réglées  $\Phi$  et  $\Phi'$  ont reçu le nom d'*axoïdes*. Elles ont à chaque instant en commun la génératrice rectiligne  $a$  et qui plus est, ainsi qu'on le démontre immédiatement par une simple application du théorème de la composition des vitesses\*, elles se raccordent le long de  $a$ . Leur mouvement relatif élémentaire consiste donc en une rotation infiniment petite autour de  $a$  et en un glissement infiniment petit le long de  $a$ ; le rapport  $h$  du glissement à la rotation n'est pas autre chose que le *pas* du mouvement hélicoïdal tangent. Ce mouvement relatif de  $\Phi$ ,  $\Phi'$  a reçu le nom de *viration*<sup>236</sup>); on dit des deux surfaces qu'elles *virent* l'une sur l'autre. Puisque les deux surfaces  $\Phi$ ,  $\Phi'$  se raccordent instantanément suivant  $a$ , elles sont toutes deux<sup>237</sup>) gauches, toutes deux développables ou toutes deux cylindriques. Cette dernière remarque revient à dire que si l'axe  $a$  a une direction fixe dans l'un des corps, il a aussi une direction fixe dans l'autre, propriété déjà mentionnée dans le cas du mouvement autour d'un point fixe.\*

233) C. R. Acad. sc. Paris 106 (1887), p. 746, 854.

234) Id. p. 536.

235) Discorso matematico sopra il rotamento dei corpi, Naples 1763. Voir IV 4, 48 note 80. *R. Marcolongo*, Boll. bibl. storia sc. mat. 8 (1905), p. 1/8; cf. *A. L. Cauchy* [Exercices math. 2, Paris 1827, p. 27; Œuvres (2) 7, Paris 1889, p. 94] a aussi remarqué d'abord ces surfaces d'axes.

236) Une viration plus générale consisterait dans le cas où le glissement formerait un angle avec la génératrice; elle offre beaucoup moins d'intérêt.\*

237) Voir *E. Bour*, J. Éc. polyt. (1) cah. 39 (1862), p. 36.

Les surfaces axoïdes supposées connues définissent la valeur  $h$  du pas, mais elles ne sauraient être prises arbitrairement toutes les deux; il existe entre elles certaines dépendances. Au moment de leur raccordement instantané suivant l'axe  $a$ , elles ont le même point central, le même plan central et le même paramètre de distribution  $k$ . Leurs lignes de striction qui se croisent au point central n'y sont pas en général tangentes<sup>237</sup>). De là ne résulterait pas encore une dépendance entre les deux surfaces, car on peut toujours faire se correspondre deux surfaces réglées, de façon que les génératrices correspondantes aient même valeur de leur paramètre de distribution. Mais il existe des circonstances plus restrictives. Si  $\vec{v}$  et  $\vec{v}'$  sont les vitesses du point central sur les lignes de striction de  $\Phi$  et de  $\Phi'$  respectivement,  $\psi$  et  $\psi'$  leurs angles avec la génératrice  $a$ , et  $\sigma$  et  $\sigma'$  les arcs des courbes indicatrices sphériques que tracent sur la sphère de rayon unité les cônes directeurs de  $\Phi$  et  $\Phi'$ , on a les équations<sup>238</sup>)

$$(11) \quad v \sin \psi = v' \sin \psi', \quad \tau = v' \cos \psi' - v \cos \psi, \quad d\sigma' = d\sigma,$$

où  $\tau$  représente la vitesse de glissement suivant  $a$ . On remarque que la dernière de ces équations exprime que si l'on imagine deux corps  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma'_0$  ayant un même point fixe  $O$  et respectivement en translation par rapport aux corps  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$ , les cônes directeurs de  $\Phi$ ,  $\Phi'$ , ayant le sommet commun  $O$ , supposés solidaires des corps  $\Sigma_0$ ,  $\Sigma'_0$ , sont précisément les cônes roulants dans le mouvement relatif de  $\Sigma_0$  et de  $\Sigma'_0$ .\*

En considérant les rayons de courbure  $\rho$ ,  $\rho'$  des sections de  $\Phi$ ,  $\Phi'$  par des plans normaux à la génératrice  $a$ , on obtient la formule donnée d'abord par *H. Resal* et rectifiée ensuite par *G. Gauthero*<sup>239</sup>), facile d'ailleurs à établir par la méthode du trièdre mobile [n° 25]

$$(12) \quad \frac{1}{h} (\cot \psi' - \cot \psi) = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'}.$$

Le rôle de ces diverses relations est facile à départager. D'abord les premières définissent exactement les conditions de viration de deux axoïdes. Il faut qu'en faisant se correspondre les surfaces, génératrice par génératrice, les arcs correspondants des indicatrices sphériques

238) Voir particulièrement *H. Resal* [Cinématique<sup>17</sup>], p. 142 et suiv.] où se trouvent d'autres relations du même genre. Il convient de dire que les questions de signes n'y sont pas toujours précises comme il conviendrait.

239) Giorn. mat. (1) 20 (1882), p. 168. Les conditions de viration de deux axoïdes sont traitées par *G. Koenigs*, Courbes conjuguées<sup>117</sup>), p. 26. Voir aussi *J. Haag*, J. math. pures appl. (6) 6 (1910), p. 343.\*

traces de cônes directeurs, soient égaux, ce qui règle la loi de correspondance: cela étant, la correspondance ainsi établie, les paramètres de distribution pour deux génératrices homologues doivent être égaux.

Quand ces conditions sont remplies, les deux axoïdes peuvent effectivement virer l'un sur l'autre et la dernière formule ci-dessus donne alors l'expression  $h$  du pas du mouvement hélicoïdal tangent.\*

Dans le cas où les deux axoïdes sont deux surfaces développables, leurs arêtes de rebroussement touchent l'axe  $a$  au même point et y ont même plan osculateur; cependant ces arêtes roulent en glissant l'une sur l'autre, et si  $v, v'$  sont les vitesses du point de contact sur chacune d'elles, la vitesse de glissement

$$(13) \quad \tau = v' - v$$

est aussi la vitesse de glissement suivant l'axe dans le mouvement hélicoïdal; en outre, si  $R, R'$  sont les rayons de courbure de ces courbes, l'équation  $\sigma' = \sigma$  du cas général devient ici évidemment<sup>240)</sup>

$$(14) \quad \frac{v'}{R'} = \frac{v}{R}.$$

Du reste l'une des surfaces développables peut devenir un cône dont le sommet décrit alors l'arête de l'autre développable.

Une catégorie importante est celle des mouvements qui admettent à chaque instant une rotation tangente en sorte que le pas  $h$  du mouvement hélicoïdal tangent est toujours nul. Dans ce cas les deux axoïdes  $\Phi$  et  $\Phi'$  roulent l'un sur l'autre sans glisser; toute courbe de l'un roule sur une courbe de l'autre, en particulier toute géodésique sur une géodésique. De plus, si l'on observe que tout point  $M$  de  $\Phi$  vient à un certain instant en coïncidence avec un point  $M'$  de  $\Phi'$ , il s'ensuit que, du fait même du mouvement, une correspondance existe entre les points de  $\Phi$  et ceux de  $\Phi'$ . Or cette correspondance présente cette particularité, rendue intuitive par une simple application de la composition des vitesses, qu'elle entraîne l'égalité d'un arc et de son transformé en sorte que  $\Phi$  et  $\Phi'$  sont applicables<sup>241)</sup> l'une sur l'autre avec correspondance des génératrices rectilignes. On reconnaît ainsi que chercher une surface réglée  $\Phi'$  applicable sur une autre  $\Phi$  revient à imprimer à  $\Phi$  un mouvement à rotation tangente dans lequel  $\Phi$  serait l'axoïde mobile. Ce problème dépend des quadratures<sup>242)</sup>

240) Voir G. Koenigs, Cinématique<sup>18)</sup>, p. 209; H. Duport, Nouv. Ann. math. (3) 18 (1899), p. 5.

241) Voir H. Resal, Cinématique<sup>19)</sup>, p. 155; C. R. Acad. sc. Paris 100 (1885), p. 261.

242) E. Bour, Mémoire sur les surfaces applicables sur une surface donnée

ainsi que E. Bour l'a montré et comme d'autres savants l'ont diversement démontré à nouveau depuis<sup>243)</sup>.\*

Un cas particulier remarquable de mouvement à rotation tangente est celui où les deux axoïdes sont développables. Ici l'un ne peut devenir un cône sans l'autre. Le glissement des deux arêtes est nul et elles ont même rayon de courbure, en sorte que, par développement, elles se transforment en deux courbes égales. Ces arêtes roulent l'une sur l'autre, si l'on peut encore le dire, puisque l'axe de la rotation instantanée est justement leur tangente commune; la vitesse angulaire de rotation est égale au quotient par  $dt$  de la différence des angles de contingence des plans osculateurs de deux courbes<sup>244)</sup>.

Pour ce qui concerne l'étude analytique du roulement des surfaces réglées, une exposition de ce genre a été donnée par N. Nicolaidès<sup>245)</sup>.

Dans son mémoire déjà cité, E. Bour<sup>246)</sup> a indiqué comme éléments analytiques de l'étude des surfaces réglées le paramètre de distribution  $k$ , la courbure géodésique de l'indicatrice sphérique du cône directeur de la surface et enfin un paramètre qui se rattache aux trajectoires orthogonales des génératrices et qu'on peut définir comme la projection de la vitesse du point central sur la génératrice.\*

X. Antomari<sup>245)</sup> a utilisé ces paramètres dans l'étude des surfaces virantes et a montré comment leur connaissance pouvait servir à définir les surfaces virantes et leur mouvement, ainsi que les trajectoires, les enveloppes et les lieux de droites, etc.

Dans une série de travaux exposés au n° 25, G. Koenigs a traité le mouvement relatif de deux corps par une méthode cinématique tout à fait générale<sup>246)</sup> fondée sur l'emploi d'un trièdre de référence mobile.

[J. Éc. polyt. (1) cah. 39 (1862), p. 31]; G. Darboux, Théorie des surfaces<sup>2)</sup> 3, p. 293; voir aussi pour la question cinématique proprement dite G. Koenigs, Cinématique<sup>18)</sup>, p. 204; E. Cesàro, Nouv. Ann. math. (3) 3 (1884), p. 434.

243) G. Koenigs [Cinématique<sup>18)</sup>, p. 210] a étudié ce mouvement particulier. Un problème voisin de celui-là a été traité par Eduard Weyr, Sitzsb. Akad. Wien 104 II\* (1895), p. 292.

244) Thèse, Paris 1864, p. 47 et suiv.

245) Thèse, Paris 1894, p. 2, 67 et suiv.; dans ce travail X. Antomari traite aussi quelques catégories de problèmes spéciaux.

246) En ce qui concerne les questions générales du roulement des surfaces les unes sur les autres, voir H. Resal, Cinématique<sup>19)</sup>, p. 155; E. Beltrami, Giorn. mat. (1) 10 (1872), p. 103; H. Zimmermann, Z. Math. Phys. 19 (1874), p. 242; W. Thomson et P. G. Tait, Treatise on natural philosophy (2<sup>e</sup> éd.) 1<sup>e</sup>, Cambridge 1890, p. 90. Les courbes de contact ont même courbure géodésique.

**25. Propriétés infinitésimales du premier ordre du mouvement le plus général d'un corps solide.** Les propriétés infinitésimales du mouvement le plus général d'un corps solide, bien qu'elles forment aujourd'hui un ensemble important, ont été beaucoup moins approfondies, surtout en ce qui concerne le second ordre, que les propriétés analogues des mouvements plans ou sphériques. Cela tient à la complication plus grande due à l'existence d'une troisième dimension et au rôle que joue dans la question la théorie des surfaces qui est moins simple que celle des lignes. On ne saurait arguer en la circonstance des convenances et des nécessités des applications car de nos jours la technique a souvent recours à des dispositifs dont les profils ne sont ni cylindriques ni coniques.\*

Il est clair que le passage à la limite, dans la considération simultanée de deux ou de plusieurs positions d'un même corps solide dans l'espace, permet de transformer les théorèmes du n° 5 en des théorèmes sur les tangentes, les plans normaux, les plans osculateurs des trajectoires etc. Si l'on considère deux positions voisines, en employant la terminologie du n° 5, le système  $\Sigma^*$  devient le système  $\alpha'$  des plans normaux aux trajectoires; le système  $\Sigma_m$  devient identique à  $\Sigma'$ , tandis que le complexe des cordes devient le complexe quadratique  $\mathcal{C}_2'$  des tangentes aux trajectoires.

Cependant des considérations mettant en jeu la vitesse et l'accélération permettent aussi d'arriver à ces résultats et même sous une forme plus complète en raison de la précision des signes dans les formules ou des sens des vecteurs dans les constructions. On peut, en suivant cette méthode, soit se servir d'un calcul banal, soit recourir à la méthode cinématique évoquée au n° 7.\*

En ce qui concerne les propriétés du premier ordre des trajectoires, concernant les tangentes et les plans normaux, la considération de deux positions voisines a conduit tout d'abord *M. Chasles* à la réciprocity remarquable<sup>247</sup> qui relie tout point  $M$  du plan au plan normal à sa trajectoire. Cette réciprocity a été rencontrée plus tard par *A. F. Möbius* dans son „Nullsystem“ et par *J. Plücker* dans le complexe linéaire. En effet, si l'on considère le système tangent des

247) Aperçu hist.<sup>148</sup>, (2<sup>e</sup> éd.) p. 679; C. R. Acad. sc. Paris 51 (1860), p. 855, 906; 52 (1861), p. 77, 189, 487; Ces théorèmes furent d'abord établis par *M. Chasles* ainsi que ceux du n° 5 (déplacement fini). *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières* [Mélanges de géométrie pure, Paris 1856, p. 1 et suiv.] a donné le premier une démonstration de ces théorèmes. Une exposition analytique fut donnée par *G. Battaglini* [Rendic. Accad. Napoli (1) 9 (1870), p. 79], *Ch. Brisse* [J. math. pures appl. (2) 15 (1870), p. 281/314] et *J. Tannery* [Ann. Ec. Norm. (3) 3 (1886), p. 43].

rotations, l'ensemble des droites de moment nul par rapport au système de vecteurs qu'elles forment est l'ensemble des normales aux trajectoires et constitue un complexe linéaire  $\mathcal{L}$ . Les coordonnées de ce complexe sont celles du système des rotations; son axe et son pas sont ceux du mouvement hélicoïdal tangent, lequel n'est que la représentation canonique du système vectoriel des rotations.

Le plan normal de la trajectoire d'un point est le plan polaire de ce point dans le complexe  $\mathcal{L}$  et réciproquement tout plan est normal à la trajectoire d'un de ses points, son pôle dans  $\mathcal{L}$ .

Toutes les propriétés des normales et des plans normaux ne sont d'après cela qu'une interprétation spéciale de la polarité dans le complexe  $\mathcal{L}^{248}$ .

Le complexe  $\mathcal{L}$  devient spécial [ensemble des sécantes d'une droite  $a$ ] si le mouvement hélicoïdal tangent devient une simple rotation autour d'une droite  $a$ . Dans le cas d'une translation tangente, la droite  $a$  est rejetée à l'infini dans un plan  $\bar{\omega}$ , la rotation portée par  $a$  devient un couple de rotations dont le plan est parallèle au plan  $\bar{\omega}$ .

Signalons les propositions suivantes:

1°) Si un point  $P$  est dans le plan normal de la trajectoire d'un point  $M$ , le point  $M$  à son tour est dans le plan normal de la trajectoire du point  $P$ . Cela tient à ce que  $MP$  est alors une droite du complexe  $\mathcal{L}$ .\*

2°) Les plans normaux des trajectoires des points d'une droite  $g$  passent tous par la droite  $g'$  conjuguée de  $g$  dans le complexe  $\mathcal{L}$ . Si  $g$  ne coïncide pas avec une droite du complexe  $\mathcal{L}$ , le mouvement instantané de  $g$  peut être regardé comme étant une rotation autour de  $g'^{249}$ .

3°) Les droites conjuguées  $g, g'$  servent de support à deux rotations équivalentes, à elles deux, au système tangent des rotations, en sorte que la théorie des droites conjuguées est confondue avec celle de la réduction à deux du système tangent des rotations par voie d'équivalence.

Si, en particulier,  $g$  est la droite à l'infini d'un plan  $\bar{\omega}$ , la rotation qu'elle porte devient un couple de rotations (translation normale à  $\bar{\omega}$ ) tandis que sa conjuguée  $g'$  devient un diamètre (droite parallèle à l'axe du mouvement hélicoïdal tangent); la rotation portée par  $g'$  est alors identique à la rotation tout court [fin du n° 10]. On

248) Pour plus de détails voir l'exposition détaillée de l'article IV 4, n° 29 et suiv.

249) Une surface réglée est ainsi susceptible d'être engendrée par le roulement de certaines surfaces.

réalise donc ainsi la réduction du système des rotations à une translation et à une rotation,

Le cas particulier où le plan  $\omega$  est normal à l'axe du mouvement hélicoïdal tangent donne pour  $g^*$  cet axe lui-même et l'on obtient dans ce cas la réduction canonique elle-même.\*

4°) En comparant ensemble deux représentations différentes du système des rotations au moyen de deux rotations, on trouve aisément que deux couples de droites conjuguées  $g$  et  $g^*$ ,  $g_1$  et  $g_1^*$  sont quatre génératrices d'un même système d'une quadrique. Les génératrices de l'autre système sont des normales.\*

5°) En particulier, en prenant  $g_1$  à l'infini dans le plan normal à  $g$ , ces normales sont celles menées en tous les points de  $g$  à la surface réglée engendrée par la droite  $g$ ; on voit ainsi que ces normales forment un parabolôïde hyperbolique<sup>250</sup>); elles coupent toutes le diamètre  $g_1^*$  qui est la droite conjuguée de la droite  $g_1$  rejetée à l'infini. Cette droite  $g_1^*$  a été introduite par A. Mannheim<sup>251</sup>) sous le nom d'adjointe à la droite  $g$ .\*

6°) Plus particulièrement encore, si l'on compare le système des deux rotations  $\omega, \omega'$  portées par les droites conjuguées  $g, g'$  à la réduction canonique; en appelant  $\Omega$  la rotation (tout court),  $h$  le pas du mouvement hélicoïdal,  $l, l'$  les plus courtes distances de  $g, g'$  avec l'axe  $a$  du mouvement hélicoïdal,  $\theta, \theta'$  les angles avec cet axe des rotations  $\omega, \omega'$ , on trouve d'abord que les droites  $a, g, g'$  ont même perpendiculaire commune et que de plus, les quantités précédentes vérifient les relations

$$(15) \quad \begin{cases} l' = -h \cot \theta, \\ l = -h \cot \theta', \end{cases}$$

$$(16) \quad \begin{cases} \omega \sin \theta + \omega' \sin \theta' = 0, \\ \omega \cos \theta + \omega' \cos \theta' = \Omega. \end{cases}$$

7°) Comme généralisation de la propriété 5°, si l'on prend l'intersection du plan normal à une courbe solidaire du corps en un point  $M$ , avec le plan polaire du point  $M$ , on obtient la normale en  $M$  à la surface engendrée par la courbe.\*

8°) Pareillement, si l'on considère une surface  $F$ , solidaire du corps, elle possède une enveloppe  $F'$ , qu'elle touche tout du long d'une courbe  $c$  dans chaque position. Cette courbe de contact  $c$  est définie

<sup>250</sup>) Toute génératrice du second système du parabolôïde est l'axe d'une rotation dans laquelle  $g$  décrit un élément de la surface ( $g$ ).

<sup>251</sup>) Mémoires présentés Acad. sc. Institut France (2) 20 (1872), p. 14.

sur la surface  $F$  comme le lieu actuel des points de  $F$  dont la normale appartient au complexe  $\Omega$ .

Plus généralement si, au cours du mouvement, une surface  $F$  reste tangente à une surface  $F'$  par un seul point, la normale commune appartient au complexe  $\Omega$ .\*

9°) S'il s'agit de l'enveloppe d'un plan  $II$ , la droite de contact  $g_{II}$  est la conjuguée de la droite  $g_{II}^*$  normale au plan  $II$  en son pôle  $P$ ; en sorte que  $g_{II}^*$  est la tangente à la trajectoire du point  $P$ . Du reste les rôles de  $g_{II}, g_{II}^*$  peuvent être intervertis en ce sens que  $g_{II}^*$  est la droite de contact avec son enveloppe du plan  $II'$  mené par  $g_{II}^*$  normalement à la droite  $g_{II}$ , tandis que  $g_{II}$  est la tangente à la trajectoire du pôle  $P'$  du plan  $II'$ .

Il y a ainsi identité entre les droites de contact des plans et les tangentes aux trajectoires.\* Ces droites forment le complexe quadratique  $\mathcal{Q}^{(2)}$  des droites qui sont rectangulaires avec leur conjuguée dans le complexe linéaire  $\Omega^{(1)}$ . Ce complexe quadratique est un complexe tétraédral spécial<sup>252</sup>).

La position d'un corps dépendant de six paramètres, cinq conditions imposées au corps laissent un paramètre arbitraire, et un mouvement possible du corps apparaît. Si ces cinq conditions sont le contact de cinq surfaces avec cinq autres, les normales aux points de contact dans une position donnée sont cinq droites du complexe  $\Omega$  qui par là est déterminé et avec lui tous les moyens de construction des éléments du premier ordre, tangente, plan normal, normale, courbe de contact d'une surface et de son enveloppe, etc.<sup>253</sup>)

Si parmi ces conditions figure la trajectoire donnée d'un point  $M$ , le plan polaire de  $M$  dans  $\Omega$  est par là connu, ce qui équivaut à deux droites du complexe  $\Omega$ , etc.

La théorie des profils conjugués dans le cas le plus général donne lieu à deux catégories bien distinctes de recherches. En premier lieu toute surface  $F$  solidaire du corps possède une enveloppe  $F'$  qui est sa conjuguée et qu'elle touche à chaque instant le long d'une courbe  $c$ , ainsi qu'on l'a vu plus haut. La correspondance entre  $F$  et  $F'$  résulte encore d'une transformation de contact<sup>254</sup>). Mais dans

<sup>252</sup>) Le caractère spécial de ce complexe [voir n° 5] a été analysé par A. Schoenflies, Z. Math. Phys. 28 (1883), p. 229; Geometrie der Bewegung<sup>24</sup>), p. 109; Géom. du mouvement<sup>24</sup>), p. 112; D. Puddetti, a aussi considéré un complexe du quatrième ordre  $\mathcal{Q}_4$  plus général [Rendic. Accad. Napoli 19 (1880), p. 41].

<sup>253</sup>) Il se peut que les cinq normales appartiennent à une même congruence linéaire; G. H. Halphen [Bull. Soc. math. France 8 (1879/80), p. 18] a étudié ce cas.

<sup>254</sup>) Une transformation de contact entre deux espaces  $E, E'$  à trois

des travaux récents, et déjà dans sa Cinématique, G. Koenigs<sup>255</sup>) a montré l'existence de profils conjugués *curvilignes*.

Il y a des courbes  $e$  solidaires du corps solide  $\Sigma$  possédant chacune une enveloppe  $e'$  dans le corps  $\Sigma'$  auquel on rapporte le mouvement. Ces courbes  $e$  sont définies par la propriété que la tangente en chacun de leurs points  $M$  appartient à un certain cône  $\Gamma_M$  ayant pour sommet ce point. Ce cône, appelé *cône des vitesses*, est le lieu, dans le corps  $\Sigma$  lui-même, des droites qui, au cours du mouvement, portent successivement la vitesse d'entraînement du point  $M$  regardé comme fixe dans le corps  $\Sigma$ .

Maintenant G. Koenigs a fait aussi la remarque que les courbes  $e$  ne sont pas les seules qui aient leur tangente sur le cône  $\Gamma_M$ . Si une courbe a chacune de ses tangentes sur le cône  $\Gamma_M$  qui a pour sommet le point de contact  $M$ , cela veut dire que, à un certain instant  $t$ , la vitesse d'entraînement de  $M$  est tangente à la courbe.

Or cela peut arriver de deux manières; ou bien le temps  $t$  change quand on passe d'un point  $M$  de la courbe  $e$  à un autre: alors le lieu de  $M$  dans le corps  $\Sigma'$  est une courbe  $e'$  à laquelle  $e$  est constamment tangente; ou bien à la même époque  $t$  déterminée, chaque point  $M$  de la courbe  $e$  a sa vitesse d'entraînement tangente à la courbe: dans ce cas cette courbe est une hélice  $f$  ayant même axe  $a$  et même pas  $h$  que le mouvement hélicoïdal actuellement tangent. Pour un instant donné il y a une double infinité de ces hélices dans le corps  $\Sigma$  et une triple infinité si l'on envisage l'ensemble du mouvement. Ces hélices constituent ainsi une classe exceptionnelle de courbes qui, sans être des courbes  $e$  douées d'enveloppe, ont cependant chacune de leurs tangentes sur le cône  $\Gamma_M$ . Elles remplacent dans ce cas général les cercles de Poncelet qui interviennent dans le mouvement plan et ont leur centre au centre instantané. Chaque courbe  $e$  est l'enveloppe d'une file d'hélices  $f$  qui donnent lieu à la même propriété que les files de cercles considérées à l'occasion du mouvement plan<sup>256</sup>).

dimensions dérive soit d'une seule équation entre les coordonnées  $x, y, z$  d'un point de  $E$  et celles  $x', y', z'$  d'un point de  $E'$ , soit de deux relations de ce genre

$$f(x, y, z, x', y', z') = 0, \quad g(x, y, z, x', y', z') = 0.$$

C'est à cette seconde catégorie qu'appartient la transformation actuelle.\*

<sup>255</sup>) G. Koenigs, Courbes conjuguées<sup>117</sup>), p. 29 et suiv.; Cinématique<sup>118</sup>), p. 199.\*

<sup>256</sup>) G. Koenigs [Courbes conjuguées<sup>119</sup>), p. 172] a remarqué que si à chaque instant du mouvement on construit une hélice  $f$  correspondant à cet instant, le lieu de  $f$  dans  $\Sigma$  et dans  $\Sigma'$  se compose de deux surfaces conjuguées.\*

Si l'on appelle  $T$  le trièdre ayant pour origine le point central de  $\Phi$  sur  $a$ , pour  $Ox$  l'axe  $a$  lui-même, pour plan  $zOx$  le plan central, et si l'on déforme alors l'axoïde  $\Phi$  de façon à lui faire prendre la forme  $\Phi'$ , chaque arête  $a$  entraînant son trièdre  $T$  de manière qu'il ait dans  $\Phi'$  même signification que dans  $\Phi$ , et enfin chaque trièdre  $T$  entraînant avec lui son hélice  $f$ , la file des hélices  $f$  tangentes à  $e$  se transformera dans la file des hélices  $f$  tangentes à l'enveloppe  $e'$  des  $e$ . Cette transformation de  $e$  dans  $e'$  constitue une transformation de contact des courbes dans l'espace.

C'est cette même transformation de contact, appliquée aux surfaces, qui change une surface  $F$  en sa conjuguée  $F'$ . En effet, toute surface  $F$  contient une famille de courbes  $e$  dont le lieu des enveloppes  $e'$  est précisément la surface  $F'$ .

En prenant pour  $\Phi'$  différents axoïdes  $\Phi', \Phi'', \Phi''', \dots$  susceptibles de virer avec  $\Phi$  et, par suite, de virer entre eux, on obtiendra des courbes  $e', e'', e''', \dots$  comme enveloppes d'une courbe  $e$  dans les virations respectives de  $\Phi$  sur  $\Phi', \Phi'', \Phi''', \dots$ . Ces courbes sont telles que  $e'$  et  $e''$  par exemple sont conjuguées dans la viration de  $\Phi$  sur  $\Phi''$ .

La détermination de ces divers axoïdes dépend d'une fonction arbitraire. Aussi peut-on trouver un axoïde  $\Phi''$  pour lequel la courbe  $e''$  se réduit à un point  $P''$ , en sorte que  $e, e'$  sont les trajectoires de ce point lorsqu'on fait virer l'axoïde  $\Phi''$  sur les surfaces  $\Phi$  et  $\Phi'$ . On trouve, comme on voit, la généralisation des résultats déjà acquis à propos des mouvements plans ou sphériques.

Un problème corrélatif de celui des courbes conjuguées consiste à rechercher les développables solidaires de  $\Sigma$  qui ont dans  $\Sigma'$  une enveloppe développable qu'elles touchent à chaque instant suivant une droite. Des considérations analogues aux précédentes interviennent à leur sujet.

La méthode employée par G. Koenigs consiste à prendre un trièdre  $T$  de référence mobile à la fois dans les deux corps, savoir celui qui a été mentionné plus haut, et à faire mouvoir un point par rapport à ce trièdre  $T$  de façon qu'il décrive dans  $\Sigma, \Sigma'$  deux courbes  $e, e'$ . Le lieu de ce point par rapport au trièdre  $T$  est une courbe  $\varepsilon$  appelée *courbe d'engrènement*. Si alors, fixant le trièdre  $T$ , on considère les mouvements simultanés de  $\Phi, \Phi'$  par rapport à  $T$ , le lieu du point de contact de deux profils conjugués  $e, e'$  par rapport à  $T$ , est une courbe d'engrènement, ce qui est entièrement conforme à la locution habituellement employée dans la théorie des engrenages.\*

**26. Propriétés infinitésimales d'ordre supérieur du mouvement le plus général d'un corps solide.** Les propriétés du second ordre concernent principalement les plans osculateurs, axes de courbure, rayons et centres de courbure de trajectoire, et même les courbures des surfaces enveloppes.\*

On peut rattacher à cet ordre d'idées les recherches de A. Mannheim<sup>257)</sup> sur les courbes des trajectoires des points d'une droite en mouvement, quoiqu'en fait ces recherches visent la géométrie sur une surface réglée plutôt que celle du mouvement d'un corps solide.\*

Les tangentes aux trajectoires des divers points de la droite forment un paraboloïde, les axes de courbure un hyperboloïde<sup>258)</sup>, les plans osculateurs enveloppent une développable  $F_4$ , les centres des sphères osculatrices décrivent une cubique gauche  $c_3$ , les normales principales une surface réglée  $R_4$ , les centres de courbure une courbe du cinquième ordre  $c_5$  etc.<sup>259)</sup>.

Dans le cas d'un corps solide, non réduit à une simple droite, si l'on applique le passage à la limite en considérant trois (ou même quatre) positions infiniment voisines d'un même corps<sup>260)</sup>, on constate que le complexe quadratique  $\mathcal{C}_2^*$  [n° 5] défini par trois positions devient dans le mouvement continu, le complexe quadratique  $\mathcal{C}_2^k$  des axes de courbure des trajectoires. Dans ce complexe, les points principaux et les plans principaux sont normalement imaginaires, en sorte qu'il n'existe pas en général de points à plan normal stationnaire. La correspondance cubique  $\mathfrak{B}_3$  devient la correspondance entre le point  $A$  de  $\Sigma$  et le centre  $A'$  de la sphère osculatrice de sa trajectoire dans  $\Sigma'$ ; comme cela équivaut à dire que la variation de la longueur  $AA'$  est seulement du troisième ordre,\*  $A$  est aussi le centre de courbure de la sphère osculatrice de la trajectoire de  $A'$  dans le mouvement inverse [n° 3]. La courbe fondamentale  $k_3$  de  $\mathfrak{B}_3$  contient les points dont les trajectoires ont un axe de courbure stationnaire; la courbe  $i_3$  est le lieu des points à tan-

257) Bull. Soc. math. France 1 (1872/3), p. 112.

258) P. E. Haag, Bull. Soc. philom. Paris (6) fasc. 7 (1870), p. 150.

259) A. Mannheim [C. R. Acad. sc. Paris 70 (1870), p. 1215, 1259; 110 (1890), p. 391] a donné la construction du centre de courbure de la trajectoire d'un point d'une droite mobile.

260) En ce qui concerne les propriétés géométriques des trajectoires pour trois, ou plus de trois positions infiniment voisines, voir A. Mannheim, Bull. Soc. math. France 1 (1872/3), p. 112; A. Schoenflies, Geometrie der Bewegung<sup>261)</sup>, p. 186; Géométrie du mouvement<sup>262)</sup>, p. 140; A. Thévenet, Thèse, Paris 1886, p. 23 et suiv. Ce dernier travail contient quelques erreurs.

gente stationnaire<sup>261)</sup>. La surface  $F_3$  contient les points à plan osculateur stationnaire, la surface  $F_4$  enfin les points à sphère osculatrice stationnaire. Les centres de ces sphères formant la surface  $F_4'$  du mouvement inverse. Sur la surface  $F_3$  il y a une courbe lieu des points dont le plan osculateur a un contact du quatrième ordre; sur  $F_4$  il y a une courbe lieu des points dont la sphère osculatrice a un contact du cinquième ordre et ainsi de suite<sup>262)</sup>.

Lorsque les surfaces des axes sont des cylindres, les propositions précédentes dégénèrent en partie. Les lois générales de ce mouvement ont été données par A. Schoenflies<sup>263)</sup>. On peut signaler que la courbe  $c_3$  dégénère en une droite parallèle à l'axe du mouvement hélicoïdal tangent.

On a vu à propos des mouvements plans que les questions de courbure des trajectoires se plaçaient dans leur vrai jour lorsque les courbes sont envisagées comme des cas particuliers de courbes enveloppes. La considération des courbes conjuguées introduite par G. Koenigs<sup>264)</sup> dans l'étude du mouvement le plus général d'un corps solide présente ici un intérêt tout pareil. Appuyée sur la méthode cinématique elle conduit à une construction effective des centres de courbure ainsi qu'à des formules qui rappellent entièrement la formule d'Euler-Savary.

Si l'on considère toutes les courbes  $c$  douées d'enveloppes qui passent au point  $P$  du corps  $\Sigma$  et y admettent comme tangente la droite  $t_P$  qui porte la vitesse d'entraînement de  $P$ , leurs conjuguées  $c'$  passent aussi en  $P$  et y ont la même tangente. Ces courbes ont le même plan normal  $\Pi_P$ , polaire de  $P$  dans le complexe  $\mathfrak{L}$ . Ce qu'il y a de saillant c'est que les axes de courbure  $\delta$ ,  $\delta'$  des courbes conjuguées  $c$ ,  $c'$  font partie d'un même faisceau dans le plan normal  $\Pi_P$  et se correspondent homographiquement, avec cette circonstance que les deux rayons doubles de cette homographie coïncident entre eux; la droite de coïncidence est la droite  $d_P$  caractéristique du plan  $\Pi_P$  et conjuguée de  $t_P$  dans le complexe  $\mathfrak{L}$ .

Le sommet du faisceau des axes de courbure  $\delta$ ,  $\delta'$  est un point  $P_1$  appelé associé du point  $P$ . L'associé d'un point  $P$  se trouve sur

261) Cette courbe dont la détermination a été l'occasion d'erreurs semble avoir été exactement obtenue pour la première fois par J. D. Everett, Quart. J. pure appl. math. 13 (1875), p. 39.

262) Voir A. Schoenflies, Bull. sc. math. (2) 12 (1888), p. 18.

263) Math. Ann. 40 (1892), p. 317.

264) Courbes conjuguées<sup>117)</sup>, p. 29.

la normale stationnaire<sup>265</sup> issue de  $P$ ; de plus les plans polaires de deux points associés sont rectangulaires, ce qui équivaut à dire que  $P$  et  $P_1$  sont conjugués par rapport au cylindre de révolution imaginaire d'axe  $a$  et de rayon de base  $h\sqrt{-1}$  qui est polaire réciproque de l'ombilicale par rapport au complexe  $\Omega$ . Il en résulte que la relation entre un point et son associé est *réciproque*, c'est-à-dire que  $P$  est l'associé de  $P_1$  de même que  $P_1$  est l'associé de  $P$ . La transformation birationnelle et symétrique qui fait passer de  $P$  à  $P_1$  ou de  $P_1$  à  $P$  est cubique; elle admet comme ligne de singularité les deux directrices de la congruence linéaire des normales stationnaires et une courbe gauche du quatrième ordre, imaginaire.

Maintenant de ce que  $\delta, \delta'$  se correspondent homographiquement, le rayon double unique étant la droite  $d_P$ , on peut conclure que, si l'on appelle  $\theta, \theta'$  les angles de  $\delta, \delta'$  avec  $d_P$ , on a

$$(17) \quad \cot \theta' - \cot \theta = f_P,$$

où  $f_P$  est une fonction qui ne dépend que des coordonnées du point  $P$  et qu'il est aisé de calculer. On peut remarquer encore que sur une parallèle  $d'_P$  à  $d_P$  menée par  $P$ , les droites  $\delta, \delta'$  découpent un vecteur  $\Delta\Delta'$  de longueur constante dont la construction une fois faite permet par voie de glissement suivant  $d'_P$  de déterminer les couples d'axes  $\delta, \delta'$  correspondants. Signalons en particulier cette conséquence: les axes de courbure des trajectoires du point  $P$  dans le mouvement direct et dans le mouvement inverse coupent  $d'_P$  en deux points équidistants du point  $P$ . Il résulte de ce qui précède que le cercle décrit, dans le plan normal, sur  $PP_1$  comme diamètre, est le lieu des centres de courbure tant des courbes  $c$  que de leurs conjuguées  $c'$ , assujetties, bien entendu, à être tangentes à  $t_P$  au point  $P$ .

Les constructions se simplifient dans le cas d'une rotation tangente, ainsi que dans le cas où les axoïdes sont des cylindres.

On peut traiter de même la question des développables à enveloppes développables et considérer encore celles qui touchent un plan  $\Pi$  suivant la caractéristique  $d_\Pi$  de ce plan. Les points de contact des arêtes d'une développable et de sa conjuguée avec  $d_\Pi$  se correspondent encore homographiquement et les points doubles de cette homographie sont coïncidents.

G. Koenigs<sup>266</sup> a considéré le cône des vitesses non seulement

<sup>265</sup> A. Thévenet, dans sa Thèse<sup>269</sup>, avait déjà considéré ces normales stationnaires mais sans leur faire jouer aucun rôle.\*

<sup>266</sup> G. Monge a considéré les courbes  $c$  qui vérifient une équation de

au point de vue des courbes qui ont sur lui leur tangente (courbes  $c$  ou hélices  $f$ ) mais aussi au point de vue des surfaces  $G$  dont le plan tangent en chaque point  $M$  est tangent au cône  $\Gamma_M$  qui a pour sommet ce point. Toute normale à une de ces surfaces est à un certain instant normale stationnaire, en sorte que ces surfaces sont définies par la propriété que leurs normales font partie d'un complexe donné, lieu des normales stationnaires. Ces surfaces vérifient une équation aux dérivées partielles du premier ordre, de la classe de celles qui admettent comme intégrales des familles de surfaces parallèles. Ces surfaces possèdent une propriété remarquable: elles ont, à chaque instant  $t$ , avec leur enveloppe un contact du second ordre tout le long de la courbe de contact. G. Koenigs<sup>267</sup> a démontré plus tard que seules ces surfaces offraient cette propriété.

Ainsi qu'on l'a dit au n° 25, toute surface  $F$  solidaire du corps  $\Sigma$  possède dans  $\Sigma'$  une enveloppe  $F'$  à laquelle elle est circonscrite le long d'une courbe  $c$ :  $F$  et  $F'$  constituent un couple de profils superficiels conjugués et le problème général de la courbure, dans le mouvement le plus général d'un corps solide, consiste évidemment à chercher à construire les éléments de courbure de la surface  $F'$  en un point de la courbe  $c$  quand on connaît ceux de  $F$  et certains des éléments du mouvement. G. Koenigs<sup>268</sup> a résolu ce problème.

Il consiste, connaissant les plans principaux  $\Pi_1, \Pi_2$  de  $F$  en un point  $P$  de la courbe  $c$ , ainsi que les centres de courbure principaux

la forme

$$f\left(x, y, z, \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}\right) = 0$$

et remarqué qu'elles sont définies par la condition qu'en chacun de leurs points  $P$  la tangente est située sur un cône  $\Gamma_P$  ayant pour sommet ce point. On peut considérer alors les surfaces qui en chacun de leurs points  $P$  sont tangentes à ce même cône. Elles vérifient une équation aux dérivées partielles du premier ordre dont l'intégration complète fournit aisément, au moyen d'une fonction arbitraire, la totalité des courbes  $c$  ci-dessus considérées.

Voir G. Monge [Hist. Acad. sc. Paris 1784, éd. 1787, M. p. 502] et G. Darboux [Sur les solutions singulières, Mém. présentés Acad. sc. Institut France (2) 27 (1882), mém. n° 2, p. 39].

G. Koenigs [Courbes conjuguées<sup>117</sup>], p. 112 a montré que la notion de point associé pouvait être appliquée à toutes ces courbes  $c$  et que les axes de courbure de toutes les courbes  $c$  tangentes en  $P$  à une génératrice de  $\Gamma_P$  passent tous par un point fixe  $P_1$ . Le cercle décrit sur  $PP_1$  comme diamètre dans le plan normal est le lieu de leurs centres de courbure. C'est une généralisation du théorème de Meusnier.

<sup>267</sup> „Courbes conjuguées<sup>117</sup>”, p. 206; C. R. Acad. sc. Paris 153 (1911), p. 998; J. math. pures appl. (6) 8 (1912), p. 137.\*

<sup>268</sup> „J. math. pures appl. (6) 8 (1912), p. 103 et suiv.\*



correspondants  $C_1, C_2$ , à trouver le dièdre droit des plans principaux  $\Pi'_1, \Pi'_2$  de  $F'$  et les centres de courbure principaux correspondants  $C'_1, C'_2$ ; en sorte que le problème comporte trois inconnues. Mais G. Koenigs a remarqué que  $(C_1, \Pi_1), (C_2, \Pi_2)$  sont deux couples d'éléments correspondants dans une corrélation homographique  $G$  que l'on sait construire quand on connaît ces deux couples d'éléments ainsi que le complexe  $\mathfrak{L}$ . De plus, les couples inconnus  $(C'_1, \Pi'_1), (C'_2, \Pi'_2)$  appartiennent aussi à cette corrélation. Dès lors le problème se réduit à la détermination du dièdre  $\Pi'_1, \Pi'_2$  des plans principaux de  $F'$ .

Or si l'on considère toutes les surfaces  $F_0, F'_0$  qui admettent la même corrélation  $G$  et qui de plus font leur contact au point central  $O$  de la corrélation  $G$  (car on peut substituer à  $F, F'$  deux surfaces parallèles) on trouve que ces surfaces  $F_0, F'_0$  ont une tangente asymptotique commune en  $O$ , tandis que les secondes tangentes asymptotiques forment dans le plan tangent deux faisceaux homographiques à rayons doubles coïncidents.

Cette homographie donne la solution du problème, puisque les couples de plans principaux bisectent l'angle des tangentes asymptotiques.

Il est à noter que dans la formule, analogue encore à celle d'Euler-Savary, qui traduit cette correspondance, les propriétés du second ordre du mouvement n'interviennent que par une seule quantité qui est, en prenant le temps comme variable, la demi-projection sur la normale de la différence géométrique des accélérations du point  $P$  dans le mouvement direct et dans son inverse.\*

Plus récemment G. Koenigs<sup>269)</sup> a étudié le cas particulier où un plan  $\omega$  de  $\Sigma$  glisse sur un plan  $\omega'$  de  $\Sigma'$  et il est parvenu à une formule simplifiée qui met en jeu uniquement la même différence des courbures

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}$$

qui intervient déjà dans la formule classique d'Euler-Savary.\*

**27. Vitesse et accélération dans le mouvement le plus général d'un solide dans l'espace.** Aux n°s 12 et 13 on a donné des indications générales sur la vitesse et l'accélération d'un point d'un solide en mouvement et même indiqué dans les formules de E. Bour un moyen général d'étendre les recherches au cas d'une accélération quelconque.\*

Un fait facile à établir et qui domine, c'est que l'accélération d'ordre  $n$  de tout point  $M$  d'un solide en mouvement est la somme

269) C. R. Acad. sc. Paris 156 (1913), p. 54.\*

géométrique de l'accélération d'ordre  $n$  d'un point particulier quelconque  $A$  et de l'accélération qu'aurait ce point  $M$  si le corps tournait autour de  $A$  maintenu fixe, en suivant la même loi d'orientation dans l'espace. Ceci est vrai pour la vitesse aussi bien que pour les accélérations. Mais ce qui n'a lieu en général que pour les accélérations, c'est l'existence pour chaque ordre  $n$  d'un centre  $O_n$  d'accélération, dont l'accélération d'ordre  $n$  est nulle. En prenant pour  $A$  le point  $O_n$  on voit que la distribution de l'accélération d'ordre  $n$  est la même que si le corps tournait autour de  $O_n$  supposé fixe<sup>270)</sup>. Le cas général se trouve ainsi ramené à celui d'un point fixe qui a été traité au n° 22<sup>271)</sup>.

Du reste, un calcul direct, par voie de simples différentiations appliquées aux formules de transformation de coordonnées qui représentent le mouvement

$$(18) \quad \begin{cases} x_1 = a + \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z \\ y_1 = b + \beta x + \beta' y + \beta'' z \\ z_1 = c + \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z \end{cases}$$

permet de déduire analytiquement les propriétés des accélérations. C'est la marche qui a mis les géomètres sur la trace des premiers résultats.

On peut de la sorte parvenir à définir les lieux géométriques correspondant à certaines propriétés spéciales de la vitesse  $v$ , ou des accélérations  $j^{(1)}, j^{(2)}, \dots, j^{(n)}$ <sup>272)</sup>.

On arrive également à mettre d'emblée en évidence l'affinité (correspondance projective conservant le plan de l'infini) qui relie<sup>273)</sup> le

270) En ce qui concerne les problèmes de décomposition des accélérations, rappelons encore ici H. Reul [Cinématique<sup>71)</sup>], p. 199; J. Éc. polyt. (1) cah. 37 (1858), p. 227; W. Schell [Theorie der Bewegung<sup>135)</sup>], (2<sup>e</sup> éd.) 1, p. 500; Ph. Gilbert [Ann. Soc. scient. Bruxelles 13<sup>e</sup> (1858/9), p. 290]. Voir aussi G. R. Dahlander, Öfversigt Vetensk.-Akad. förhandl. (Stockholm) 27 (1870), p. 49.

271) Par un choix convenable d'axes, Ph. Gilbert [Ann. Soc. scient. Bruxelles 13<sup>e</sup> (1858), p. 308, 302] est parvenu à des formules très simples. On trouve aussi là des formules et des constructions pour la courbure des trajectoires décrites par les points de l'axe. Voir aussi C. R. Acad. sc. Paris 107 (1888), p. 830.

272) Voir C. Jordan, Bull. Soc. math. France 1 (1873/3), p. 144; J. L. Gruey, C. R. Acad. sc. Paris 86 (1878), p. 1141; G. Schouten, Verhand. Akad. Wetensch. Amsterdam, Afd. Naturk. eerste Sectie (2) 2 (1893/4), mém. n° 5, p. 3.

En ce qui concerne ces lieux voir aussi W. Schell [Theorie der Bewegung<sup>135)</sup>], (2<sup>e</sup> éd.) 1, p. 508] et H. Reul [Cinématique<sup>71)</sup>], p. 206 et suiv.] dont les résultats contiennent quelques erreurs. Une exposition en coordonnées tétraédriques a été donnée par C. Formenti, Reale Ist. Lombardo Rendic. (2) 17 (1884), p. 787; (2) 18 (1885), p. 195, 238, 418.

273) J. Petersen [Kinematik<sup>27)</sup>], Copenhague 1884, p. 46] et R. Mehnke [Fest-

corps  $\Sigma$  avec l'espace  $\Sigma_n$  lieu de l'extrémité  $\Pi_n$  de l'accélération d'ordre  $n$ . On peut de cette façon envisager les complexes définis par  $\Sigma$  et  $\Sigma_n$ ,  $\Sigma$  et  $\Sigma_j$ , ... et autres éléments géométriques qui sont intervenus au n° 5<sup>274</sup>). C'est la marche suivie par *L. Burmester*<sup>275</sup>), qui, avec *J. L. Gruey*, attira un des premiers l'attention sur ce caractère d'affinité.

Les courbes et surfaces  $c_3, k_3$  sont ainsi appelées à jouer un rôle dans la distribution de l'accélération.

A ce point de vue le point  $O_n$ <sup>276</sup>) est un point double de l'affinité qui lie  $\Sigma$  et  $\Sigma_n$ .

Il se peut du reste qu'il existe une droite de points doubles<sup>277</sup>).

Il ne faut pas oublier de mentionner qu'il peut se faire aussi que le centre des accélérations d'un ordre donné se trouve rejeté à l'infini. C'est ce qui a lieu par exemple pour l'accélération du premier ordre si l'axe a une direction stationnaire; cela se produit pendant toute la durée du mouvement si les deux axoïdes sont des cylindres dont la vitesse de glissement longitudinale ne soit pas uniforme.\*

L'introduction des paramètres de *E. Bour* a conduit *X. Antomari*<sup>278</sup>) à une méthode simple d'exposition.

En différentiant  $(n+1)$  fois les équations (18), on se rend compte que si, à un instant donné, pour deux mouvements différents, les douze fonctions  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$  ont mêmes valeurs ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $n+1$ , ces mouvements donnent lieu à la même distribution des vitesses et des accélérations jusqu'à l'ordre  $n$ . On peut dire qu'ils sont osculateurs et ont un contact de l'ordre  $(n+1)$ , par extension de la notion de mouvement tangent. Mais cela ne peut se produire qu'à un instant donné. Si seulement

schrift zur Feier des 60jährigen Bestehens der Technischen Hochschule Darmstadt 1886, p. 77) ont résolu le problème: étant donnée l'accélération de trois points, trouver celle d'un quatrième.

274) C'est ainsi que le complexe  $\mathfrak{S}$  fournit la direction de la vitesse de chaque point.

276) *Z. Math. Phys.* 23 (1878), p. 110. Le complexe qui résulte de la considération simultanée de  $\Sigma$  et de  $\Sigma_n$  a été étudié par *F. Castellano* [*Atti Accad. Torino* 29 (1898/4), p. 300] et par *J. L. Gruey*<sup>275</sup>).

276) Les points dont l'accélération d'ordre  $n$  a la même grandeur forment un ellipsoïde ayant  $O_n$  pour centre. Le point  $O_i$  a été introduit par *H. Resal* [*Cinématique*, p. 205; *J. Ec. polyt.* (1) cah. 37 (1858), p. 227].

277) Chaque fois que les axoïdes  $\Phi, \Phi'$  sont des cylindres, les surfaces lieu des points d'égale accélération d'ordre  $n$  sont des cylindres de révolution. Voir *V. N. Ligin (Liguine)*, *Bull. Soc. math. France* 1 (1872/3), p. 152.

278) Thèse, Paris 1894, p. 67.

la distribution des vitesses était la même pendant tout le cours des deux mouvements, ceux-ci coïncideraient, ainsi qu'on l'a vu au n° 12,\* p. 244.

Si l'on se borne au cas d'une tige mobile de forme invariable, la projection de la vitesse d'un point sur la tige est constante. Ce théorème est fondamental [cf. n° 8, p. 235]. Les propriétés des accélérations d'ordre quelconque des points d'une droite ont été l'objet de quelques travaux<sup>279</sup>); c'est ainsi qu'il y a généralement un point dont l'accélération d'ordre  $n$  est normale à la tige<sup>280</sup>). *G. Koenigs*<sup>281</sup>) a considéré le cas où la projection de l'accélération d'un point  $A$  sur une droite  $a$  issue de ce point est la dérivée par rapport au temps de la projection de la vitesse, tout comme si  $a$  était fixe: c'est la condition nécessaire et suffisante pour que  $A$  décrive la ligne de striction de la surface réglée engendrée par  $a$ .

28. Mouvements dans le cas d'une liberté de degré 2 ou de degré supérieur. Dans le mouvement d'un corps solide, le temps n'est qu'une variable indépendante à laquelle on rapporte les positions successives du corps; tous les résultats cinématiques sont indépendants de l'horloge à laquelle on confie la mesure du temps. On peut dès lors tout aussi bien concevoir un corps dont les positions dans l'espace dépendraient de deux ou d'un plus grand nombre de paramètres. Ce nombre de paramètres indépendants ne peut cependant excéder six, car six est le nombre de paramètres qui fixent la position d'un corps dans l'espace [n° 6]. Si à ces six paramètres de position on impose  $(6-k)$  conditions, il reste  $k$  paramètres arbitraires, le mouvement est dit posséder le degré  $k$  de liberté.\*

Un premier cas qu'on a déjà mentionné à propos d'un seul degré de liberté, c'est celui d'une simple droite ou tige dont les points constituent un système invariable. La position d'une tige dépend de cinq paramètres seulement dans l'espace; mais on a principalement étudié le cas où le degré de liberté est réduit à 2, hypothèse dans laquelle tout point de la tige décrit une surface trajectoire. *A. Mannheim*<sup>282</sup>) a établi que les normales à chacune de ces surfaces aux différents points de la tige, forment les génératrices d'un système d'une quadrique  $Q$ <sup>283</sup>), tandis que les génératrices de l'autre système sont

279) Voir *E. Novarese*, *Atti Accad. Torino* 24 (1888/9), p. 400.

280) Voir *R. Mehmke*, *Der Civilingenieur* 29 (1888), p. 487/508.

281) *Courbes conjuguées*<sup>115</sup>), p. 21.\*

282) *Géométrie cinématique*<sup>149</sup>), p. 129; *G. Koenigs*, *Cinématique*<sup>18</sup>), p. 220.

Voir aussi *G. H. Halphen*, *Bull. Soc. math. France* 8 (1879/80), p. 18.

283) On peut conclure de là qu'une droite douée du degré 2 de liberté

les axes des rotations qui réalisent chaque déplacement de la tige autour d'une de ses positions. Les diverses positions de la tige forment une congruence de droites. Pour que cette congruence soit une congruence de normales, il faut et il suffit que le cône asymptote de la quadrique  $Q$  soit capable d'un trièdre trirectangle inscrit<sup>284</sup>. Sur ces considérations, *A. Mannheim* a fondé l'exposition des propriétés des congruences et, en particulier, des congruences de normales.

Si l'on assujettit un point  $D$  de la tige à décrire une surface supplémentaire, le mouvement ne dépend plus que d'un paramètre car  $D$  ne peut plus décrire que l'intersection de la nouvelle surface avec celle qu'il était déjà assujéti à décrire. Cependant si ces deux surfaces se touchent en  $D$  sans se traverser, la tige se trouvera en réalité immobilisée; *G. H. Halphen*<sup>285</sup> a développé cette remarque.\*

Le mouvement à deux paramètres d'un corps solide a été l'objet des recherches de *Th. Schönemann*<sup>286</sup> qui a étudié le premier ce mouvement; abstraction faite des cas spéciaux. Dans ce cas tout point solide du corps décrit une surface, sauf peut-être quelques points, et le résultat saillant, c'est que les normales à toutes ces surfaces trajectoires coupent à chaque instant deux droites fixes  $u$  et  $v$ , ou appartiennent à une congruence linéaire, laquelle varie d'une position du corps à l'autre. Les points où une surface  $F$  solide du corps touche son enveloppe  $F'$  sont ceux dont les normales appartiennent à cette congruence<sup>286</sup>. Cette congruence est définie par quatre de ses droites, car ses directrices sont les sécantes communes aux quatre normales aux quatre surfaces données<sup>287</sup>. Tout déplacement du corps résulte de deux rotations infiniment petites effectuées chacune autour d'une des directrices de la congruence, en sorte que tout point  $M$  pris sur une de ces directrices décrit non pas un élément de surface, mais un élément de courbe<sup>288</sup>. Il en résulte que si un point du corps reste tangente à deux surfaces fixes, surfaces focales de la congruence formée par ces droites.

284) *G. Koenigs*, Cinématique<sup>18</sup>), p. 221. Cette propriété rend intuitifs certains résultats, comme par exemple qu'une droite dont trois points décrivent trois plans rectangulaires est normale à une famille de surfaces parallèles.\*

285) *Ber. Akad. Berlin* 1855, p. 255; *J. reine angew. Math.* 90 (1881), p. 44; id. p. 39 se trouve aussi une démonstration de *C. F. Geiser*. Voir aussi *A. Mannheim*, *J. math. pures appl.* (3) 1 (1875), p. 57; *Géométrie cinématique*<sup>149</sup>), p. 127.

286) Voir *A. Ribaucour*, *C. R. Acad. sc. Paris* 76 (1873), p. 1347.

287) Les cas où les quatre normales appartiennent à un hyperboloïde  $H_2$  a été traité par *A. Mannheim* [*Bull. Soc. math. France* 1 (1872/3), p. 114] et *G. H. Halphen* [id. 8 (1879/80), p. 18].

288) Pour plus de détails sur ce sujet et sur le cylindroïde attaché à ce mouvement dans chaque position, voir IV 6\*.

décrit une courbe, il se trouve à chaque instant sur l'une de ces directrices.

Les lieux géométriques liés à ces mouvements ont été spécialement étudiés par *A. Mannheim*<sup>289</sup> et *A. Thévenet*<sup>290</sup>. Les normales aux surfaces trajectoires de tous les points d'une droite  $g$  forment un  $H_2$ ; les normales aux plans d'un faisceau forment un  $P_2$ ; les plans tangents de tous les points d'une droite  $g$  enveloppent une développable  $F_4$ , les points de contact des plans d'un faisceau une courbe  $c_3$  etc. Une droite  $g$  solide du corps engendre une congruence; on peut chercher quelles sont, dans une position donnée du corps, les droites qui engendrent une congruence de normales, c'est-à-dire dont les plans focaux sont rectangulaires. D'après *A. Ribaucour*<sup>286</sup>) ces droites forment un complexe linéaire dont l'axe est la perpendiculaire commune aux directrices de la congruence des normales.

Un cas important de mouvement à deux paramètres étudié par *A. Ribaucour*<sup>286</sup>) et *G. Darboux*<sup>291</sup>) est celui où la congruence des normales se décompose en une gerbe (droites issues d'un point  $O$ ) et un système plan (droites tracées dans un plan  $\omega$ ). Le point  $O$  est un point du plan  $\omega$ ; il décrit dans chacun des deux corps une surface,  $\Omega$  dans le corps  $\Sigma'$  et  $\Omega'$  dans le corps  $\Sigma$ ; ces deux surfaces sont tangentes entre elles en  $O$ , et  $\omega$  est leur plan tangent commun en ce point. De plus il existe du fait du mouvement une correspondance ponctuelle entre les surfaces  $\Omega$ ,  $\Omega'$  en vertu de laquelle ces deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre<sup>290</sup>).

Le mouvement peut se représenter par le roulement sans glissement de  $\Omega$  sur  $\Omega'$ . Les normales aux surfaces trajectoires passent par le point  $O$  et le point où une surface  $F'$  solide de  $\Sigma$  touche son enveloppe  $F''$  solide de  $\Sigma'$  est celui (ou ceux s'il y en a plusieurs) dont la normale passe au point  $O$ . *G. Koenigs*<sup>292</sup>) a donné pour ce mouvement un théorème qui est l'analogue de celui de Bobillier.

Si l'on songe que la théorie des surfaces revient à l'étude des positions, dépendant de deux paramètres, occupées par le trièdre formé par la normale à la surface et deux tangentes rectangulaires

289) Thèse, Paris 1886, p. 81 et suiv. Voir aussi *A. Schoenflies*, *Geometrie der Bewegung*<sup>25</sup>), p. 150 et suiv.; *Géométrie du mouvement*<sup>25</sup>), p. 154.

290) *C. R. Acad. sc. Paris* 70 (1870), p. 330.

291) Cf. *A. Thévenet*, Thèse<sup>269</sup>), Paris 1886, p. 132/4; *G. Darboux*, *Théorie des surfaces*<sup>2</sup>) 1, p. 69; id. 4, p. 111; (2<sup>e</sup> éd.) 1, Paris 1913, p. 106.\*

292) *C. R. Acad. sc. Paris* 136 (1903), p. 354.\*

sur celle-ci, on conçoit que les mouvements à deux paramètres jouent un grand rôle en géométrie et c'est ce qu'ont justifié pleinement les travaux de A. Ribaucour, de G. Darboux et des géomètres de leur école. Mais ces questions se rattachent plutôt à la géométrie infinitésimale et sortent du cadre de cet article.\*

Th. Schönemann<sup>293)</sup> s'est aussi occupé du mouvement à trois paramètres ou de liberté trois. Il y a autour de chaque position du corps une infinité de manières de faire varier infiniment peu les paramètres de façon que le mouvement infiniment petit correspondant soit une rotation. Les axes de ces rotations forment les génératrices d'un système d'un hyperboloïde  $H_2$ . Si l'on considère un point quelconque du corps dans une position particulière  $M$ , en général, en vertu de la variation des trois paramètres, ce point décrit un petit volume élémentaire autour de  $M$ . Mais si le point est pris sur  $H_2$ , ses déplacements élémentaires ont lieu sur une surface<sup>293)</sup>.

Dans l'étude des mouvements à plusieurs paramètres, G. Koenigs<sup>294)</sup> a introduit la notion de *mouvements décomposables*. Le mouvement à  $n$  paramètres entre deux corps  $\Sigma$ ,  $\Sigma'$  est décomposable s'il existe un troisième corps  $\Sigma''$  dont le mouvement par rapport à  $\Sigma$  soit à  $n-k$  paramètres, tandis que par rapport à  $\Sigma'$  il est à  $k$  paramètres, ces derniers étant indépendants des premiers. Du reste les mouvements entre  $\Sigma$  et  $\Sigma''$  ou entre  $\Sigma'$  et  $\Sigma''$  peuvent aussi être décomposables. C'est ainsi que le mouvement à trois paramètres autour d'un point fixe est décomposable en trois mouvements de rotation autour de trois axes; le mouvement de glissement sur un plan, qui est à trois paramètres est aussi décomposable soit en trois rotations autour d'axes parallèles, soit en deux mouvements de translation continus et un mouvement de rotation continu. De même le mouvement d'un cylindre de révolution sur lui-même (mouvement de *verrou*), qui est à deux paramètres, est décomposable en deux mouvements hélicoïdaux ou en un mouvement de translation continu, et un mouvement de rotation continu.

G. Koenigs<sup>294)</sup> a étudié le cas des mouvements de Ribaucour décomposables; on les obtient en faisant rouler sur une même quadrique  $Q$  deux surfaces  $\Phi$ ,  $\Phi'$  réglées et applicables sur  $Q$  avec conservation des génératrices rectilignes, mais de telle sorte que les génératrices de  $\Phi$  correspondent aux génératrices d'un système de  $Q$  et celles de  $\Phi'$  aux génératrices de l'autre système.

<sup>293)</sup> On trouvera plus de détails sur ce sujet dans l'article IV 4, 61.

<sup>294)</sup> Introduction à une théorie nouvelle des mécanismes, Paris 1905, p. 39; J. math. pures appl. (6) 7 (1911), p. 349.\*

L'étude des mouvements à plusieurs paramètres fournit une belle application de l'emploi d'un trièdre  $T$  de référence mobile solidaire du corps<sup>295)</sup>. Si l'on représente par  $u_1, u_2, \dots, u_n$  les  $n$  paramètres ( $n \leq 6$ ) qui fixent la position du corps, lorsque  $u_i$  varie seul, avec une vitesse  $\frac{du_i}{dt} = 1$ , le corps effectue un mouvement dont les coordonnées du système tangent des rotations sont

$$p_i, q_i, r_i, \xi_i, \eta_i, \zeta_i,$$

quantités qui sont des fonctions bien définies des paramètres  $u$ .

Avec ces notations, les projections  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  sur les axes du trièdre  $T$  du déplacement d'un point  $M$  du corps dont  $x, y, z$  sont les coordonnées, ont ces expressions:

$$(19) \quad \begin{cases} \Delta x = \sum_{i=1}^{i=n} (\xi_i + q_i z - r_i y) du_i, \\ \Delta y = \sum_{i=1}^{i=n} (\eta_i + r_i x - p_i z) du_i, \\ \Delta z = \sum_{i=1}^{i=n} (\zeta_i + p_i y - q_i x) du_i. \end{cases}$$

Si, au contraire,  $M$  est lui-même mobile par rapport au corps, ses coordonnées  $x, y, z$  sont variables et  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  s'augmentent de  $dx, dy, dz$ .

On peut observer que, si  $x, y, z$  sont les coordonnées d'un point fixe, non pas dans le corps, mais dans l'espace,  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  doivent être nuls, en sorte que le système d'équations aux différentielles totales

$$(20) \quad \begin{cases} 0 = dx + \sum_{i=1}^{i=n} (\xi_i + q_i z - r_i y) du_i, \\ 0 = dy + \sum_{i=1}^{i=n} (\eta_i + r_i x - p_i z) du_i, \\ 0 = dz + \sum_{i=1}^{i=n} (\zeta_i + p_i y - q_i x) du_i \end{cases}$$

doit admettre pour  $x, y, z$  un système de solutions dépendant de

<sup>295)</sup> G. Darboux [Théorie des surfaces<sup>2)</sup>, 1, Paris 1887, p. 47; 2<sup>e</sup> éd. 1, Paris 1913, p. 65]\*, G. Koenigs [Cinématique<sup>16)</sup>, p. 232] et A. Thévenet [Thèse. Paris 1886, p. 82, 142], où le cas de liberté de degré 3 est aussi envisagé.

trois constantes arbitraires, savoir les trois coordonnées du point fixe par rapport aux axes fixes. Ces équations sont, comme on dit, *complètement intégrables*, en sorte que les conditions d'intégrabilité établissent certaines dépendances entre les  $\xi, \eta, \zeta$  et les  $p, q, r$ . Ces conditions sont les suivantes

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi_i}{\partial u_j} - \frac{\partial \xi_j}{\partial u_i} + q_j \xi_i - q_i \xi_j + r_i \eta_j - r_j \eta_i = 0, \\ \frac{\partial \eta_i}{\partial u_j} - \frac{\partial \eta_j}{\partial u_i} + r_j \xi_i - r_i \xi_j + p_i \zeta_j - p_j \zeta_i = 0, \\ \frac{\partial \zeta_i}{\partial u_j} - \frac{\partial \zeta_j}{\partial u_i} + p_j \eta_i - p_i \eta_j + q_i \xi_j - q_j \xi_i = 0; \end{cases}$$

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\partial p_j}{\partial u_i} - \frac{\partial p_i}{\partial u_j} + q_i r_j - r_i q_j = 0, \\ \frac{\partial q_j}{\partial u_i} - \frac{\partial q_i}{\partial u_j} + r_i p_j - p_i r_j = 0, \\ \frac{\partial r_j}{\partial u_i} - \frac{\partial r_i}{\partial u_j} + p_i q_j - q_i p_j = 0^{297}); \end{cases}$$

avec  $i, j = 1, 2, \dots, n (n \leq 6)$ .

Réciproquement si l'on possède  $6n$  fonctions

$$p_i, q_i, r_i, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$$

vérifiant les conditions précédentes, le système (20) admet un système de solutions de la forme

$$\begin{aligned} x &= a + \alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1, \\ y &= b + \beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1, \\ z &= c + \gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1, \end{aligned}$$

où les  $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$  sont fonctions des  $u$ ; ces équations constituent une transformation orthogonale, représentant un mouvement dans lequel  $x, y, z$  sont les coordonnées d'un point par rapport au trièdre mobile  $T$  et  $x_1, y_1, z_1$  ses coordonnées par rapport à un trièdre fixe  $T_1$ . Ce mouvement est parfaitement déterminé, sauf la possibilité de substituer au trièdre  $T_1$  tout autre trièdre trirectangle fixe comme lui<sup>298</sup>).

<sup>297</sup> Voir E. Combesseure, Ann. Éc. Norm. (1) 4 (1867), p. 108; M. Fouché [C. R. Acad. sc. Paris 121 (1895), p. 763] a fondé la démonstration de ces dernières équations sur la considération d'une rotation spéciale d'un trièdre.

<sup>298</sup> G. Darboux, Théorie des surfaces<sup>3</sup>) 1, p. 66; 2<sup>e</sup> éd.) 1, Paris 1913, p. 88; voir aussi G. Koenigs, Cinématique<sup>18</sup>), p. 227.\*

La fin de l'article n'a pas été publiée en raison de la guerre.

**Paul DU BOIS-REYMOND**  
• ☐ *Théorie générale des fonctions*

**Jean-Baptiste DUMAS**  
• ☐ *Leçons sur la philosophie chimique*

**Ernest DUPORCQ**  
• ☐ *Premiers principes de géométrie moderne*

**ENCYCLOPÉDIE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES**  
Tout ce qui a paru de l'édition française rédigée et publiée d'après l'édition allemande sous la direction de Jules MOLK.  
• ☐ *Arithmétique et Algèbre*  
• ☐ *Analyse*  
• ☐ *Géométrie*  
• ☐ *Mécanique*  
• ☐ *Physique*  
• ☐ *Géodésie et Géophysique*  
• ☐ *Astronomie*  
• ☐ *Compléments*

**F. G.-M. (Frère GABRIEL-MARIE)**  
• ☐ *Exercices de géométrie*  
comprenant l'exposé des méthodes géométriques et 2.000 questions résolues  
• ☐ *Exercices de géométrie descriptive*

**Pierre FERMAT**  
• *Précis des Œuvres mathématiques et de l'Arithmétique de Diophante*, par Émile BRASSINNE

**J. FITZ-PATRICK**  
• ☐ *Exercices d'arithmétiques*

**Joseph FOURIER**  
• *Théorie analytique de la chaleur*

**Maurice FRÉCHET**  
• *Les espaces abstraits*

**Augustin FRESNEL**  
• *Mémoire sur la diffraction de la lumière*

**Évariste GALOIS**  
• *Œuvres mathématiques*  
suivies de  
— *Influence de Galois sur le développement des mathématiques*, par Sophus LIE

**Félix R. GANTMACHER**  
• *Théorie des matrices*

**Carl Friedrich GAUSS**  
• *Recherches arithmétiques*

**Francisco GOMES TEIXEIRA**  
• *Traité des courbes spéciales planes et gauches (3 tomes)*

**Édouard GOURSAT**  
• ☐ *Cours d'Analyse mathématique (3 tomes)*

**Édouard GRIMAUX**  
• ☐ *Lavoisier, 1743-1794*  
d'après sa correspondance, ses manuscrits, ses papiers de famille et d'autres documents inédits

**Jacques HADAMARD**  
• *Leçons de géométrie élémentaire (2 tomes)*  
• *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*  
suivi de  
— *L'Invention mathématique*, par Henri POINCARÉ

**Paul R. HALMOS**  
• *Introduction à la théorie des ensembles*

**G. H. HARDY**  
• *Divergent Series* (en anglais)

**Werner HEISENBERG**  
• *Les principes physiques de la théorie des quanta*

**Hermann von HELMHOLTZ**  
• *Optique physiologique (2 tomes)*  
• *Théorie physiologique de la musique*

**David HILBERT**  
• *Sur les problèmes futurs des mathématiques (Les 23 Problèmes)*  
• *Théorie des corps de nombres algébriques*

**Camille JORDAN**  
• *Traité des substitutions et des équations algébriques*  
• ☐ *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique (3 tomes)*

**Erich KAMKE**  
• *Théorie des ensembles*

**Stephen C. KLEENE**  
• *Logique mathématique*

**Félix KLEIN**  
• *Le programme d'Erlangen*

**Casimir KURATOWSKI**  
• ☐ *Topologie I et II*

**Jean LADRIÈRE**  
• ☐ *Les limitations internes des formalismes*  
Étude sur la signification du théorème de Gödel et des théorèmes apparentés dans la théorie des fondements des mathématiques

**Joseph-Louis LAGRANGE**  
• *Mécanique analytique*

**Trajan LALESCO**  
• *La géométrie du triangle*

**Pierre-Simon LAPLACE**  
• *Théorie analytique des probabilités (2 tomes)*  
Le premier tome contient le célèbre *Essai philosophique sur les probabilités*

**Pierre LAROUSSE**  
• ☐ *Jardin des racines grecques* (Livre du Maître)  
suivi de  
— *Jardin des racines latines* (Livre du Maître)

**Antoine-Laurent LAVOISIER**  
• ☐ *Traité élémentaire de chimie*

**Henri LEBESGUE**  
• *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*  
• *Les coniques*  
• *Leçons sur les constructions géométriques*

**C. LEBOSSE & C. HÉMERY**  
• *Géométrie (classe de Mathématiques)*

**Julien LEMAIRE**  
• ☐ *Étude élémentaire de l'hyperbole équilatère et de quelques courbes dérivées*  
suivie de  
— *Hypocycloïdes et épicycloïdes*

**Tullio LEVI-CIVITA**  
• *Caractéristiques des systèmes différentiels et propagation des ondes*

**Paul LÉVY**  
• ☐ *Calcul des probabilités*  
• ☐ *Processus stochastiques et mouvement brownien*  
• ☐ *Théorie de l'addition des variables aléatoires*  
• ☐ *Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle*

**Alexandre LIAPOUNOFF**  
• *Problème général de la stabilité du mouvement*

**André LICHNEROWICZ**  
• *Éléments de calcul tensoriel*

**Ernst LINDELÖF**  
• *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*

**Gérard de LONGCHAMPS**  
• ☐ *Cours de problèmes de géométrie analytique (3 tomes)*

**Hendrik-Antoon LORENTZ**

- □ *The Theory of Electrons and its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat* (en anglais)

**Édouard LUCAS**

- □ *Théorie des nombres*

**Nicolas LUSIN**

- □ *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*  
suivies du Mémoire  
— *Sur les fonctions représentables analytiquement*,  
par Henri LEBESGUE

**Ernst MACH**

- *La Mécanique*  
Exposé historique et critique de son développement

**James Clerk MAXWELL**

- *Traité d'Electricité et de Magnétisme* (2 tomes)

**Émile MEYERSON**

- □ *La déduction relativiste*

**Charles MICHEL**

- □ *Compléments de géométrie moderne*  
suivis du recueil des solutions des questions proposées  
— *Exercices de géométrie moderne*, par Julien LEMAIRE

**Abraham de MOIVRE**

- *The Doctrine of Chances* (en anglais)

**Gaspard MONGE**

- *Géométrie descriptive.*  
• *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*

**Pierre Rémond de MONTMORT**

- *Essai d'analyse sur les jeux de hasard*

**John von NEUMANN**

- *Les fondements mathématiques de la Mécanique quantique*

**Isaac NEWTON**

- *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* (2 tomes)

**Georges PAPELIER**

- □ *Exercices de géométrie moderne précédés de l'exposé élémentaire des principales théories*  
l'ouvrage comprend  
I. *Géométrie dirigée*  
II. *Transversales*  
III. *Division et faisceau harmonique*  
IV. *Pôles, polaires, plans polaires, dans le cercle et la sphère*  
V. *Rapport anharmonique*  
VI. *Inversion*  
VII. *Homographie*  
VIII. *Involution*  
IX. *Géométrie projective. Application aux coniques*  
• □ *Éléments de Trigonométrie sphérique*

**Julius PETERSEN**

- *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques*

**Émile PICARD**

- □ *Traité d'Analyse* (3 tomes)  
• □ *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles*  
suivies de  
— *Leçons sur quelques équations fonctionnelles*  
— *Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles*  
— *Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*

**Johann Christian POGGENDORFF**

- □ *Histoire de la physique*

**Henri POINCARÉ**

- *Calcul des probabilités*  
• *La Mécanique nouvelle (Théorie de la Relativité)*  
• *Théorie du potentiel newtonien*  
• *Théorie des tourbillons*  
• *Figures d'équilibre d'une masse fluide*  
• *Electricité et Optique*  
• □ *Théorie mathématique de la lumière*

**Siméon-Denis POISSON**

- *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*

**George POLYA**

- *Comment poser et résoudre un problème*

**Alfred RÉNYI**

- □ *Calcul des probabilités*  
avec un appendice sur la théorie de l'information

**Bernhard RIEMANN**

- *Œuvres mathématiques*

**F. RIESZ & B. SZ.-NAGY**

- *Leçons d'analyse fonctionnelle*

**Erwin SCHRÖDINGER**

- *Mémoires sur la Mécanique ondulatoire*

**Joseph-Alfred SERRET**

- □ *Cours d'Algèbre supérieure* (2 tomes)  
• □ *Traité de Trigonométrie rectiligne et sphérique*

**Waclaw SIERPINSKI**

- *250 problèmes de théorie élémentaire des nombres*

**G. SINGIER**

- □ *Les correspondances algébriques (1, 1), (2, 1), (2, 2)*  
Applications aux courbes et aux surfaces du deuxième et du troisième degré

**Jean-Marie SOURIAU**

- □ *Calcul linéaire*  
La solution détaillée des exercices termine l'ouvrage

**Paul TANNERY**

- *Pour l'histoire de la science hellène*  
• *La géométrie grecque*

**François-Félix TISSERAND**

- *Traité de Mécanique céleste* (4 tomes)  
suivi de  
— *Leçons sur la détermination des orbites*

**Georges VALIRON**

- *Equations fonctionnelles – Applications*

**Vito VOLTERRA**

- *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*



**ÉDITIONS  
JACQUES GABAY**  
RÉIMPRESSIONS

**Niels Henrik ABEL**

- Œuvres complètes (2 tomes)

suivies de

— *Niels Henrik Abel — Sa vie et son action scientifique*,  
par C.-A. BJERKNES

**Jean D'ALEMBERT**

- *Traité de dynamique*

**André-Marie AMPÈRE**

- *Théorie mathématique des phénomènes électro-dyna-*  
*miques*

- *Considérations sur la théorie mathématique du jeu*

**Paul APPELL**

- ☐ *Traité de Mécanique rationnelle* (5 tomes en 3 vol.)

**Louis BACHELIER**

- *Calcul des probabilités*

- *Les lois des grands nombres du calcul des probabilités*

suivies de

— *La spéculation et le calcul des probabilités*

— *Les nouvelles méthodes du calcul des probabilités*

• ☐ *Le Jeu, la Chance et le Hasard*

• *Collection de Mémoires*

titres inclus

— *Théorie de la spéculation*

— *Théorie mathématique des jeux*

— *Théorie des probabilités continues*

— *Les probabilités à plusieurs variables*

— *Mouvement d'un point ou d'un système soumis à*

*l'action des forces dépendant du hasard*

— *Les probabilités cinématiques et dynamiques*

**René BAIRE**

- *Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la*  
*continuité*

**W. W. Rouse BALL**

- ☐ *Récréations mathématiques*

- ☐ *Histoire des mathématiques*

**Stefan BANACH**

- ☐ *Théorie des opérations linéaires*

**Paul BARBARIN**

- *La Géométrie non euclidienne*

**Edmond BAUER**

- *Introduction à la théorie des groupes et à ses applica-*  
*tions à la physique quantique*

**Jacques BERNOULLI**

- *L'art de conjecturer*

Cette première partie de l'*Ars Conjectandi* (la traduction  
française des parties 2, 3 et 4 n'a jamais paru) contient  
le célèbre *Traité de la manière de raisonner dans les jeux*  
*de hasard*, par Christiaan HUYGENS

**Joseph BERTRAND**

- ☐ *Calcul des probabilités*

**Marcel BOLL**

- ☐ *La chance et les jeux de hasard*

- ☐ *Le mystère des nombres et des formes*

**Ludwig BOLTZMANN**

- *Leçons sur la théorie des gaz*

**Émile BOREL**

- *Leçons sur les séries divergentes*

**Émile BOREL & André CHÉRON**

- ☐ *Théorie mathématique du bridge à la portée de tous*  
*suivie de*

— *Applications de la théorie des probabilités aux jeux*

*de hasard*, par Émile BOREL & Jean VILLE

— *Valeur pratique et philosophie des probabilités*,

par Émile BOREL

**Pierre BOUTROUX**

- ☐ *L'idéal scientifique des mathématiciens*

**Léon BRILLOUIN**

- *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*

- *La science et la théorie de l'information*

**Louis de BROGLIE**

- *Ondes et mouvements*

**Georg CANTOR**

- *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*

**Sadi CARNOT**

- *Réflexions sur la puissance motrice du feu*

**Élie CARTAN**

- *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*

- ☐ *Leçons sur la géométrie projective complexe*

suivies de

— *La théorie des groupes finis et continus et la géomé-*

*trie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*

— *Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective*

**Augustin-Louis CAUCHY**

- *Analyse algébrique*

**Michel CHASLES**

- *Aperçu historique sur l'origine et le développement des*  
*méthodes en géométrie*

- *La dualité et l'homographie*

- *Rapport sur les progrès de la géométrie*

**Rudolph CLAUSIUS**

- ☐ *Théorie mécanique de la chaleur*

**H. COMMISSAIRE & G. CAGNAC**

- *Cours de Mathématiques spéciales* (3 tomes)

**Antoine-Nicolas de CONDORCET**

- *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des*  
*décisions rendues à la pluralité des voix*

**Gaspard-Gustave CORIOLIS**

- *Théorie mathématique des effets du jeu de billard*  
*suivie des deux célèbres Mémoires*

— *Sur le principe des forces vives dans les mouvements*  
*relatifs des machines*

— *Sur les équations du mouvement relatif des systèmes*  
*de corps*

**Gaston DARBOUX**

- ☐ *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les appli-*  
*cations géométriques du calcul infinitésimal* (4 tomes)

- ☐ *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coor-*  
*données curvilignes*

- ☐ *Principes de géométrie analytique*

**R. DELTHEIL & D. CAIRE**

- *Géométrie*

suivie de

— *Compléments de géométrie*

**G. DEMARTRES**

- ☐ *Cours de géométrie infinitésimale*

**René DESCARTES**

- *La Géométrie*

**Paul A.M. DIRAC**

- *Les principes de la Mécanique quantique*

☐ = ☐ blong® (Suite à l'intérieur)

**Diffusion-Distribution : JACQUES GABAY**

151 bis, rue Saint-Jacques 75005 PARIS

Tél. (1) 43 54 64 64 — Fax : (1) 43 54

241 06  
DECITRE  
234F00

ISBN 2-87647-115-9

ISSN 0989-0602

☐ blong®